MATEMATICA B - Primer parcial 27-4-2022

1. a) Calcular: $\displaystyle\int \frac{x - \ln x}{x^2}\, dx$

   b) Sea $I(x) = e^{-x} + \displaystyle\int_0^{3x} \cos(t^2)\, dt$. Sin resolver la integral, hallar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de $I(x)$ en el punto de abscisa $x_0 = 0$. Justificar.

Rta

a)

$$\int \frac{x - \ln x}{x^2}\, dx = \int \frac{x}{x^2}\, dx - \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C_1$$

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx \overset{\substack{\text{por partes} \\ u=\ln x\,,\, du=\frac{dx}{x} \\ dv=x^{-2}dx\,,\, v=-1/x}}{=} uv - \int v\, du = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C_2$$

Entonces:

$$\int \frac{x - \ln x}{x^2}\, dx = \ln x + \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C \quad \text{(en este ejercicio } x > 0)$$

b) La función $f(t) = \cos(t^2)$ es continua en $\mathbb{R}$ por ser composición de continuas. Entonces por el teorema fundamental del cálculo integral la función:

$$g(u) = \int_0^u \cos(t^2)\, dt = \int_0^u f(t)\, dt$$

es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada está dada por:

$$g'(u) = f(u) = \cos(u^2)\,,\ \forall u \in \mathbb{R}.$$

La función

$$h(x) = \int_0^{3x} f(t)\, dt = \int_0^{3x} \cos(t^2)\, dt$$

se relaciona con g del modo siguiente:

$$h(x) = g(3x)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces aplicando la regla de la cadena:

$$h'(x) = g'(3x)3$$

Es decir:

$$h'(x) = \cos((3x)^2)3 = 3\cos(9x^2)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Entonces:

$$I'(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{-x} + h(x)\right) = \frac{d}{dx}(e^{-x}) + \frac{d}{dx}\int_0^{3x} \cos(t^2)\, dt = -e^{-x} + 3\cos(9x^2)\,,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de $I(x)$ en el punto de abscisa $x_0 = 0$ es:

$$I'(0) = \left(-e^{-x} + 3\cos(9x^2)\right)\Big|_{x=0} = -1 + 3 = 2$$

2. a) Hallar la solución general de: $\left(y+1+\dfrac{2\ln(x)}{x}\right)dx+(x-2y)\,dy=0$

b) Resolver: $\begin{cases} y'-y\,\cos(x)=e^{2\,\mathrm{sen}(x)}\cos(x) \\ y(0)=2 \end{cases}$

Rta

a) Veamos si se trata de una ecuación diferencial exacta. Para ello definimos:

$$M(x,y)=y+1+\frac{2\ln(x)}{x} \qquad\qquad N(x,y)=x-2y$$

Observar que $M, N \in C^1(D)$ donde $D=\{(x,y):\, x>0\}$.
Si la EDO es exacta en D, existirá una función $f(x,y)$ tal que $f'_x=M$ y $f'_y=N$ en todo punto de D. Entonces se deberá cumplir la siguiente condición necesaria:

$$M'_y=f''_{xy}=f''_{yx}=N'_x$$

Esto efectivamente ocurre para la EDO dada:

$$M'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(y+1+\frac{2\ln(x)}{x}\right)=1=\frac{\partial}{\partial x}(x-2y)=N'_x\ ,\ \forall(x,y)\in D.$$

Para determinar si la EDO es exacta en D buscamos una tal función $f(x,y)$ planteando:

$$\begin{cases} f'_x=M(x,y) \\ f'_y=N(x,y) \end{cases} \equiv \begin{cases} f'_x=y+1+\dfrac{2\ln(x)}{x} & [1] \\ \\ f'_y=x-2y \quad [2] \end{cases}$$

A partir de [1], integrando respecto de x:

$$f(x,y)=\int\left(y+1+\frac{2\ln(x)}{x}\right)dx=xy+x+\ln^2 x+g(y)$$

Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(xy+x+\ln^2 x+g(y)\right)=x+g'(y)$$

Comparando con [2] se tiene:

$$x+g'(y)=x-2y$$

con lo cual

$$g'(y)=-2y\ \therefore\ g(y)=-y^2+K\ \ (K \text{ constante}).$$

Luego:

$$f(x,y)=xy+x+\ln^2 x-y^2+K$$

es una familia de funciones que muestran que la EDO dada es exacta en D, como puede verificarse calculando f'_x y f'_y.
La solución general de la EDO es pues la familia de curvas de nivel de f incluidas en D, es decir la familia:

$$xy+x+\ln^2 x-y^2=C$$

b) La ecuación diferencial

$$y'-y\,\cos(x)=e^{2\,\mathrm{sen}(x)}\cos(x)$$

es lineal de primer orden puesto que responde a la forma

$$y' + P(x)y = Q(x) \text{ con } P(x) = -\cos x \ , \ Q(x) = e^{2 \operatorname{sen} x} \cos x$$

Proponemos como solución general un producto $u(x)v(x)$ donde $u(x)$, $v(x)$ se determinan del modo siguiente:

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv'$$

Reemplazando ambas en la ED:

$$(u'v + uv') - uv \cos x = e^{2 \operatorname{sen} x} \cos x$$

Reagrupando:

$$u'v + u(v' - v \cos x) = e^{2 \operatorname{sen} x} \cos x \quad [*]$$

La función $v(x)$ será una solución particular no trivial de la ED auxiliar de variables separables:

$$v' - v \cos x = 0$$

en tanto $u(x)$ se determinará a posteriori reemplazando la v obtenida en $[*]$, dando lugar a una segunda ED auxiliar:

$$u'v = e^{2 \operatorname{sen}(x)} \cos(x)$$

Resolvamos la primera ED auxiliar:

$$v' = v \cos x$$

$$\frac{dv}{dx} = v \cos x$$

$$\frac{dv}{v} = \cos x \, dx \text{ variables separadas}$$

$$\int \frac{dv}{v} = \int \cos x \, dx$$

$$\ln |v| = \operatorname{sen} x + C_1$$

$$e^{\ln |v|} = e^{\operatorname{sen} x + C_1}$$

$$|v| = e^{C_1} e^{\operatorname{sen} x}$$

$$|v| = C_2 e^{\operatorname{sen} x}$$

$$v = \pm C_2 e^{\operatorname{sen} x}$$

$$v = C_3 e^{\operatorname{sen} x}$$

Particularizamos eligiendo por ejemplo $C_3 = 1$, así que:

$$v = e^{\operatorname{sen} x}$$

La segunda ED auxiliar queda entonces:

$$u' e^{\operatorname{sen} x} = e^{2 \operatorname{sen}(x)} \cos(x)$$

Cancelando un factor $e^{\operatorname{sen} x}$ resulta:

$$u' = e^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x)$$

Entonces:

$$u = \int e^{\operatorname{sen}(x)} \cos(x)\, dx \overset{\substack{\text{sustit.} \\ t=\operatorname{sen} x \\ dt=\cos x\, dx}}{=} \int e^t dt = e^t + C = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

Es decir

$$u = e^{\operatorname{sen} x} + C$$

Por lo tanto,la solución general de la ED dada es:

$$y = \left(e^{\operatorname{sen} x} + C\right) e^{\operatorname{sen} x}$$

La condición inicial se traduce en:

$$y(0) = 2 \;\Leftrightarrow\; 2 = \left(e^{\operatorname{sen} 0} + C\right) e^{\operatorname{sen} 0} \;\Leftrightarrow\; 2 = 1 + C \;\Leftrightarrow\; C = 1$$

Luego, queda determinada la siguiente solución particular:

$$y = \left(e^{\operatorname{sen} x} + 1\right) e^{\operatorname{sen} x}$$

3. En un gráfico sombrear la región R **del primer cuadrante** limitada por: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 2$. Calcular $I = \iint_R 2x\, dA$. **Plantear** luego el cálculo de I invirtiendo el orden de integración.

Rta

La descripción de la región como de tipo 2 es:

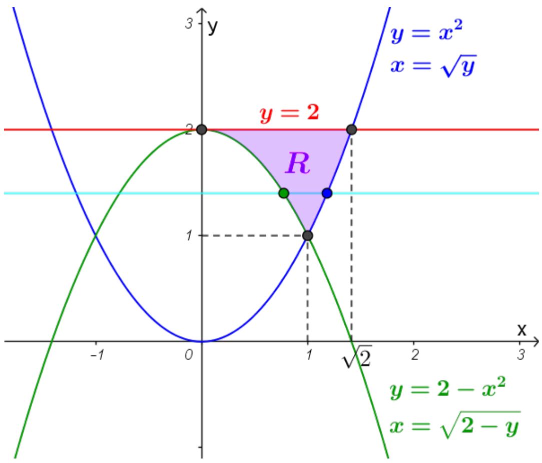

Figura 1: Ejercicio 3 Tema 1

$$R = \left\{ (x, y) : 1 \le y \le 2 \,,\; \sqrt{2-y} \le x \le \sqrt{y} \right\}$$

Entonces:

$$I = \iint_R 2x\, dA = \int_1^2 \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{y}} 2x\, dy\, dx$$

Cálculo de la integral:

$$I = \iint_R 2x\, dA = \int_1^2 \int_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{y}} 2x\, dx\, dy = \int_1^2 x^2 \Big|_{\sqrt{2-y}}^{\sqrt{y}} dx =$$

$$= \int_1^2 \left[\left(\sqrt{y}\right)^2 - \left(\sqrt{2-y}\right)^2 \right] dy = \int_1^2 \left[y - (2 - y) \right] dy =$$

$$= \int_1^2 (2y-2)\,dy = (y^2-2y)\Big|_1^2 = 0-(-1) = 1$$

Observar la intersección:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 2 \end{cases} \equiv \begin{cases} x^2 = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \; x = \sqrt{2}$$

Invertir el orden de integración significa reescribir la misma integral pero describiendo la región R como de tipo 1:

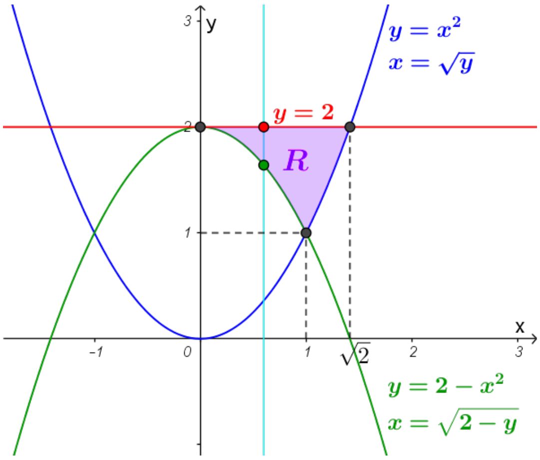

Figura 2: Ejercicio 3 Tema 1

$$R = R_1 \cup R_2$$

$$R_1 = \big\{(x,y) : \; 0 \le x \le 1 \;,\; 2-x^2 \le y \le 2\big\}$$

$$R_1 = \Big\{(x,y) : \; 1 \le x \le \sqrt{2} \;,\; x^2 \le y \le 2\Big\}$$

Luego:

$$I = \iint_R 2x\,dA = \int_0^1 \int_{2-x^2}^2 2x\,dy\,dx + \int_1^{\sqrt{2}} \int_{x^2}^2 2x\,dy\,dx$$

4. **Plantear:**

a) en coordenadas polares el cálculo del área de la región

$$R = \Big\{(x,y) : \; x^2 + (y-2)^2 \le 4 \,,\; y \ge -\sqrt{3}\,x\Big\}$$

Señalar R en un gráfico.

b) en coordenadas cilíndricas el cálculo del volumen del sólido limitado por: $z = 2(x^2+y^2)\,, z = 3 - x^2 - y^2$.

c) en coordenadas esféricas el cálculo de la masa del sólido V limitado por: $z = \sqrt{3(x^2+y^2)}\,, z = \sqrt{3}\,, z = 3$. La densidad de masa es $f(x,y,z) = z^{-5}$. Graficar V.

Rta

a) Observar que las desigualdades en la definición de R indican que dicha región se encuentra dentro de la circunferencia $x^2 + (y-2)^2 = 4$ y por encima de la recta $y = -\sqrt{3}\,x$. Emplearemos un cambio a las coordenadas polares:

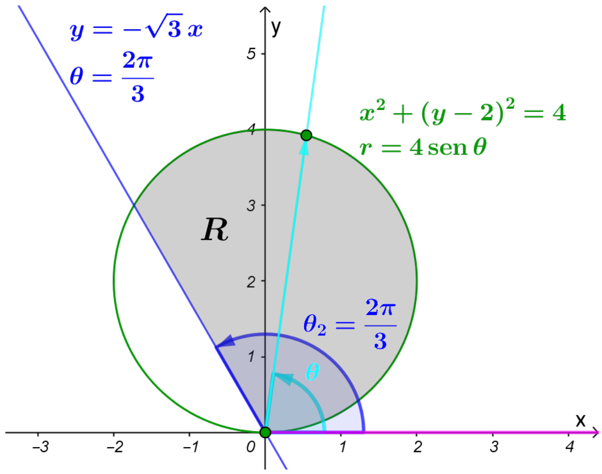

Figura 3: Ejercicio 4a Tema 1

$$T : \begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

En la figura se muestra una semirrecta genérica que parte del origen y atraviesa R, formando un ángulo θ genérico con la horizontal. Moviéndola con pivote en el origen (polo) encontramos los valores límite para θ. Esto equivale a hallar una región angular con vértice en el polo de modo que R quede incluida de manera justa (es decir que no pueda achicarse ni agrandarse) en esa región, cuyos lados darán los valores límite del ángulo θ. En este caso dicha región angular es:

$$\left\{(x,y) : \; y \geq 0\,,\; y \geq -\sqrt{3}\,x\right\}$$

Sus lados se indican en color rosa y azul en el dibujo.
La semirrecta $y = 0\,,\; x > 0$ da el ángulo mínimo

$$\theta_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{0}{x}\right) = \mathrm{arctg}(0) = 0$$

y la semirrecta $y = -\sqrt{3}\,x\,,\; y > 0$ da el ángulo máximo cuya tangente es

$$\mathrm{tg}\,\theta_2 = \frac{-\sqrt{3}\cancel{x}}{\cancel{x}} = -\sqrt{3}$$

y teniendo en cuenta que θ_2 es ángulo del segundo cuadrante, resulta:

$$\theta_2 = \pi + \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

Luego, para cualquier punto de R se verifica:

$$0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}$$

Ahora fijamos un θ genérico en ese intervalo, es decir una semirrecta genérica desde el polo y atravesando R (como la de color celeste en la figura) y determinamos el segmento donde ella interseca a R. Dicho segmento tiene por extremos dos puntos, uno más cercano al polo y el otro más lejano. El primero coincide con el polo y el segundo se sitúa sobre la circunferencia. Y esto ocurre para cualquier otro θ. Ahora bien, para hallar el valor de r sobre la circunferencia para un θ genérico, hallamos la ecuación de la misma en polares:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \;\;\Leftrightarrow\;\; x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4 \;\;\Leftrightarrow\;\; x^2 + y^2 = 4y \;\;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad r^2 = 4r \text{ sen}\,\theta \quad \Leftrightarrow \quad r = 4 \text{ sen}\,\theta$$

Así, los límites de r para $\theta \in \left[0\,,\,\frac{2\pi}{3}\right]$ genérico:

$$0 \le r \le 4 \text{ sen}\,\theta$$

Luego, la descripción de R en coordenadas polares es

$$R^* = \left\{(r,\theta) : \, 0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3}\,,\, 0 \le r \le 4 \text{ sen}\,\theta\right\}$$

Aplicando el teorema de cambio de variables en las integrales dobles se tiene:

$$\text{área}(R) = \iint_R 1\, dA_{xy} \overset{T}{=} \int_0^{2\pi/3} \int_0^{4 \text{ sen}\,\theta} r\, dr\, d\theta$$

en cuyo integrando hemos agregado el factor jacobiano (módulo) en polares $|J_T| = r$.

Rta
b) El sólido V se muestra en la figura:

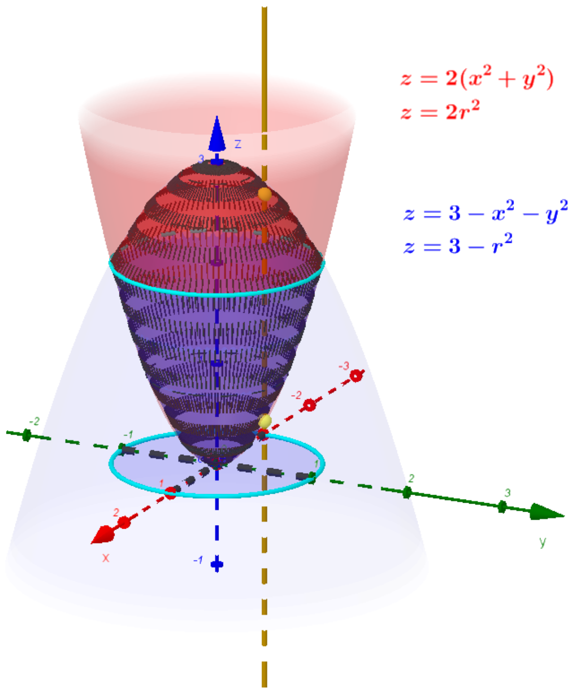

Figura 4: Ejercicio 4b Tema 1

Emplearemos las coordenadas cilíndricas

$$T : \begin{cases} x = r \cos\theta \\ y = r \text{ sen}\,\theta \\ z = z \end{cases}$$

Las superficies frontera de V en coordenadas cilíndricas son:

$$z = 2(x^2 + y^2) \quad \Leftrightarrow \quad z = 2r^2$$

$$z = 3 - x^2 - y^2 \quad \Leftrightarrow \quad z = 3 - r^2$$

La región proyección R_{xy} sobre el plano xy es un círculo. Su frontera se obtiene proyectando la curva celeste. Analíticamente esto equivale a eliminar z en el sistema

$$\begin{cases} z = 2r^2 \\ z = 3 - r^2 \end{cases}$$

Se tiene:

$$2r^2 = 3 - r^2 \quad \Leftrightarrow \quad 3r^2 = 3 \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = 1$$

Entonces:

$$R_{xy} = \left\{(x, y) : \, x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Es claro pues que la descripción de R en coordenadas polares es

$$R^* = \{(r, \theta) : \, 0 \leq \theta \leq 2\pi \, , \, 0 \leq r \leq 1\}$$

Por un punto (x, y) genérico en R_{xy} trazamos una paralela al eje z. Subiendo por ella aumentamos z desde $-\infty$ hasta $+\infty$. Ingresamos a V al atravesar la superficie "piso" $z = 2r^2$ y salimos de V al atravesar la superficie "techo" $z = 3 - r^2$, como se muestra con la recta amarilla genérica en el gráfico. Y esto ocurre para cualquier posición de dicha recta vertical.
Por lo tanto, la descripción del sólido en coordenadas cilíndricas es:

$$V^* = \left\{(r, \theta, z) : \, 0 \leq \theta \leq 2\pi \, , \, 0 \leq r \leq 1 \, , \, 2r^2 \leq z \leq 3 - r^2\right\}$$

Entonces, aplicando el cambio a coordenadas cilíndricas resulta:

$$\text{vol}(V) = \iiint_V dV_{x,y,z} \overset{T}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{2r^2}^{3-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

Observar que hemos incluido el jacobiano en cilíndricas (módulo).

<u>Rta</u>

c) El sólido V se muestra en la figura: Emplearemos las coordenadas esféricas:

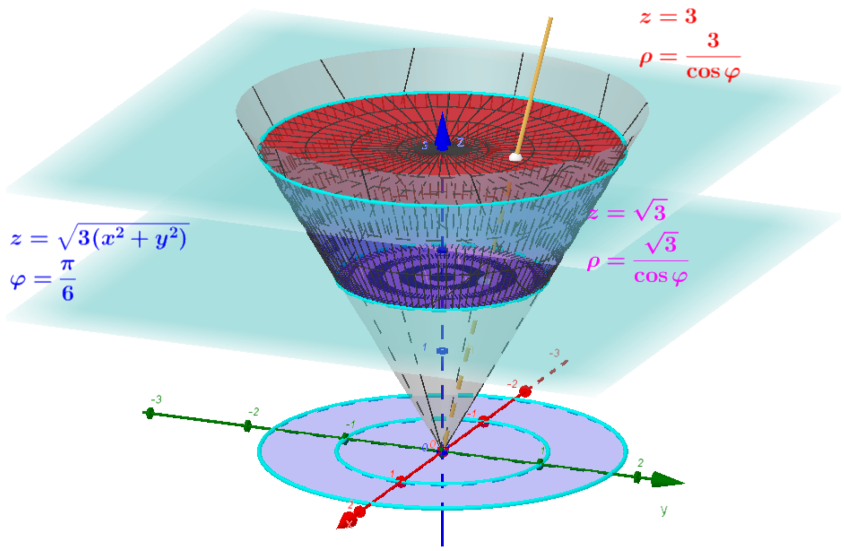

Figura 5: Ejercicio 4c Tema 1

$$\begin{cases} x = \rho \, \cos\theta \, \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \, \operatorname{sen}\theta \, \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho \, \cos\varphi \end{cases}$$

Expresemos las ecuaciones de las superficies frontera de V en el nuevo sistema de coordenadas.
Cono:

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \;\Leftrightarrow\; \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3(x^2+y^2)}} =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{3}\,\cancel{\sqrt{(x^2+y^2)}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dado que $z > 0$ se tiene:

$$z = \sqrt{3(x^2 + y^2)} \;\Leftrightarrow\; \varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \;\Leftrightarrow\; \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Plano:

$$z = \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; \rho \cos\varphi = \sqrt{3} \;\Leftrightarrow\; \rho = \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi}$$

El otro plano:

$$z = 3 \;\Leftrightarrow\; \rho \cos\varphi = 3 \;\Leftrightarrow\; \rho = \frac{3}{\cos\varphi}$$

Es claro que hay puntos del sólido todo alrededor del eje z así que $0 \le \theta \le 2\pi$.
Para cada θ fijo pero genérico la variación de φ es siempre la misma (independientemente de θ) y tiene como límite inferior el ángulo $\varphi_1 = 0$ y límite superior el ángulo $\varphi_2 = \pi/6$ de abertura del cono. Basta para convencerse intersecar el sólido con un semiplano genérico con bisagra el eje z, que producirá siempre una misma región intersección.
Para θ y φ genéricos pero fijos (es decir semirrectas desde el origen atravesando el sólido), los límites de variación de ρ los dan los planos $z = \sqrt{3}$ y $z = 3$, de cuyas expresiones en esféricas despejaremos ρ.
Así pues, la descripción del sólido en coordenadas esféricas es:

$$V^* = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) :\; 0 \le \theta \le 2\pi \,,\; 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6} \,,\; \frac{\sqrt{3}}{\cos\varphi} \le \rho \le \frac{3}{\cos\varphi} \right\}$$

Por consiguiente:

$$\operatorname{masa}(V) = \iiint_V z^{-5} dV_{xyz} \overset{T}{=} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_{\sqrt{3}/\cos\varphi}^{3/\cos\varphi} \frac{1}{(\rho\, \cos\varphi)^5} \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/6} \int_{\sqrt{3}/\cos\varphi}^{3/\cos\varphi} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\rho^3\, \cos^5\varphi} \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$