

Integral de Línea de un Campo Escalar

$$\int_C f \, ds$$

- Definición. Cálculo en términos de un parámetro t . Propiedades. Sección 6.7

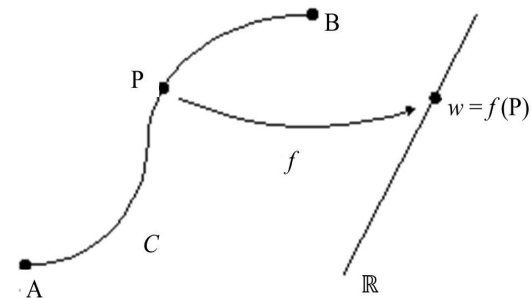
La Integral de Línea $\int_C f \, ds$ (y $\int_C F \cdot T \, ds$ que estudiaremos la clase que viene) representa la *generalización* de la Integral Definida, $\int_a^b f(x) \, dx$, en el sentido de que en una Integral de Línea se integra sobre una curva C en vez de integrar sobre un segmento de recta (como lo es el intervalo $[a, b]$ en $\int_a^b f(x) \, dx$)

Aquí $f = f(x, y, z)$ es continua, o continua a trozos, $\forall (x, y, z) \in C$, $C \subset \mathbb{R}^3$.
(o $f = f(x, y)$ continua, o continua a trozos, $\forall (x, y) \in C$, $C \subset \mathbb{R}^2$)

Ahora C , dominio de f , es una *curva* del espacio (o del plano).
Supondremos que C es un arco *acotado* de curva suave.

Vamos a definir a $\int_C f \, ds$ siguiendo el mismo procedimiento que utilizamos en los casos anteriores:

1. Particionar el dominio de f , C .
2. Armar las Sumas de Riemann para f .
3. Refinar la Partición tomando $n \rightarrow \infty$ en la Suma de Riemann.



1. Particionar el dominio C (en n -subarcos $\widehat{P_i P_{i+1}}$):

$$P_i^* \in \widehat{P_i P_{i+1}} ; \Delta S_i = \text{long}(\widehat{P_i P_{i+1}})$$

2. Armar las Sumas de Riemann para f :

$$\sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i \quad (\text{pero } \Delta S_i \text{ ya no es f\'acil de calcular...})$$

3. Refinar la Partici\'on tomando $n \rightarrow \infty$ en la Suma de Riemann:

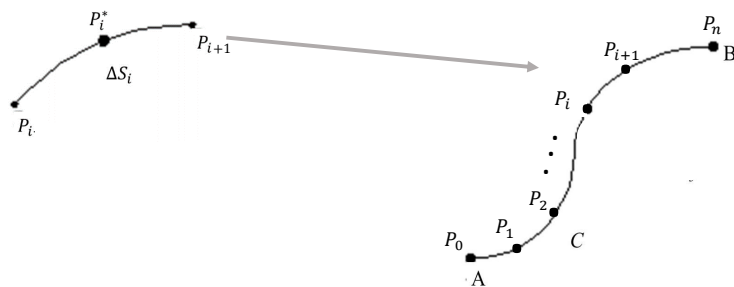
$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i ; \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i = \int_C f(P) ds \quad : \text{Integral de L\'inea de } f \text{ a lo largo de } C \quad (\text{si el l\'imite existe}). \quad (1)$$

(ds : diferencial de arco)

Necesitamos reescribir la suma $\sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i$ en la forma $\sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x$ para poder aplicar el Teorema de Existencia de la Integral:

$$\text{Si } g(x) \text{ es continua en } [a, b] \text{ (o continua a trozos)} \implies \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x = \int_a^b g(x) dx$$

\forall las posibles Particiones del intervalo $[a, b]$.



• Describamos a C param\'etricamente:

$$C: r(t), \quad t \in [a, b]$$

1. Particionar el dominio C (particionando el dominio param\'etrico):

$$P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b$$

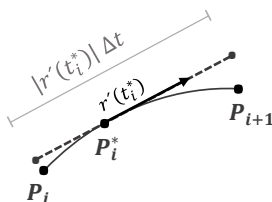
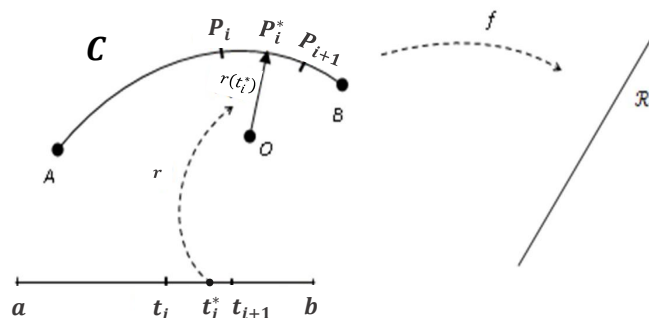
Cada $P_i \leftrightarrow r(t_i)$, $i = 1 \dots n$.

$$P_i^* \in \widehat{P_i P_{i+1}} \quad \text{entonces } \exists t_i^* \in [t_i, t_{i+1}] \text{ tal que } P_i^* \leftrightarrow r(t_i^*)$$

$$\Delta S_i = \text{long}(\widehat{P_i P_{i+1}}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} |r'(t)| dt$$

Pero si $n \gg 1$ (partici\'on P muy *fin*a), la longitud ΔS_i de cada subarco es tan peque\~na que se puede aproximar con la longitud de una porci\'on de recta tangente:

$$\Delta S_i \cong |r'(t_i^*)| \Delta t, \quad \text{donde } \Delta t = t_{i+1} - t_i$$



2. Armar las Sumas de Riemann para f :

$$\sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(r(t_i^*)) \Delta S_i \cong \sum_{i=1}^n f(r(t_i^*)) |r'(t_i^*)| \Delta t = \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t, \quad \text{donde } g(t) = f(r(t)) |r'(t)|.$$

Hemos podido reescribir la Suma de Riemann para f como una Suma de Riemann para g , que es apta para aplicar el Teorema de Existencia de la Integral (ya que $g(t)$ es continua en $[a, b]$).

3. Refinar la Partición tomando $n \rightarrow \infty$ en la Suma de Riemann:

Aplicando el Teorema de Existencia de la Integral: $\exists \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t = \int_a^b g(t) dt = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$

Pero, además: $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i.$

Eso significa que se verifica **(1)** : $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i = \int_C f(P) ds$

...y también significa que: $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$ **(2)**

Comparando **(1)** y **(2)** tenemos finalmente que:

$$\int_C f(P) ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt \quad \text{donde } C: r(t), t \in [a, b]$$

En resumen:

Si f es una función continua (o continua a trozos) en los puntos de un arco de curva suave y acotado C , entonces existe:

$\int_C f ds$: Integral de Línea de la función f a lo largo de la curva C .

Si C se describe como $C: r(t), t \in [a, b]$, entonces la Integral de Línea se calcula *como una Integral definida*:

$\int_C f ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$

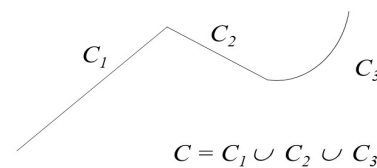


Propiedades: Dado que la Integral de Línea generaliza a la Integral definida, verifican las mismas propiedades. En particular, las más usadas:

- Aditividad en el conjunto de integración:

Si f es continua sobre C , y C es unión de un número finito de curvas suaves $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$:

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds + \int_{C_3} f \, ds$$



- Linealidad:

Si f y g son continuas sobre la curva suave C , y α y $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\int_C [\alpha f + \beta g] \, ds = \alpha \int_C f \, ds + \beta \int_C g \, ds$$

Aplicaciones de la Integral de Línea:

- 1) Si $f = 1$, $\forall P \in C$, $C: r(t)$, $t \in [a, b]$, entonces:

$$\int_C 1 \, ds = \int_a^b |r'(t)| \, dt = L_c \quad \therefore \quad \boxed{\int_C ds = L_c}$$

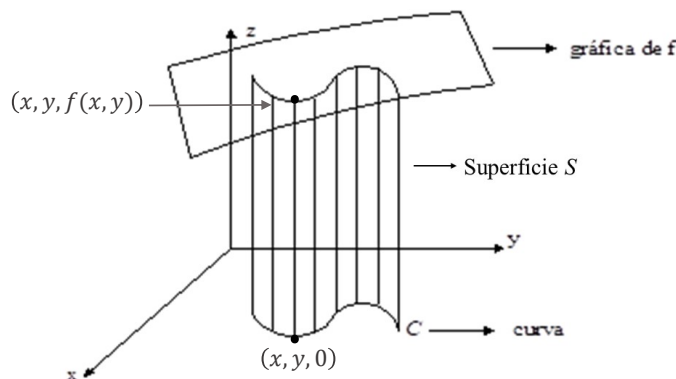
(recordar: $\int_C f \, ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| \, dt$)

- 2) Si C representa a un *alambre* y f : *densidad lineal de masa del alambre* C , entonces la masa del alambre se calcula como:

$$\boxed{\int_C f \, ds = m_c}$$

- 3) Si C es una curva del plano y $f = f(x, y)$ es una función continua, tal que $f(x, y) \geq 0$ sobre C , entonces el área de la superficie vertical S (que comienza en los puntos $(x, y, 0)$ de la curva C y termina en los puntos $(x, y, f(x, y))$ de la gráfica de f), se calcula como:

$$\boxed{\int_C f \, ds = A_S}$$



Ejemplo: Calcular la *masa* de un alambre cuya forma coincide con el arco de curva $C: x^2 + y^2 = 4$, con $x \geq 0, y \geq 0$, siendo $f(x, y) = xy$ su densidad lineal de masa.

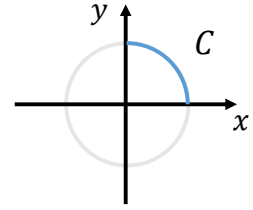
Calcularemos: $m_c = \int_C f \, dS = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| \, dt$:

$$C: r(t) = \langle 2 \cos(t), 2 \operatorname{sen}(t) \rangle, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$r'(t) = \langle -2 \operatorname{sen}(t), 2 \cos(t) \rangle$$

$$|r'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(-2 \operatorname{sen}(t))^2 + (2 \cos(t))^2} = 2.$$

$$\begin{aligned} m_c &= \int_C f \, ds = \int_C x y \, ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) 2 \operatorname{sen}(t) 2 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos(t) \operatorname{sen}(t) \, dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos(t) \operatorname{sen}(t) \, dt = 4 \operatorname{sen}^2(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4 \operatorname{sen}^2(0) = 4 \quad \therefore \quad \boxed{m_c = 4} \end{aligned}$$



Nota: Notar que en el ejemplo hemos parametrizado la curva C con sentido antihorario.

Pero, a los fines de calcular la Integral de línea, podríamos haber usado *cualquier otra* parametrización de esa curva, incluso aquellas que la orienten de manera diferente: **El resultado de la Integral de Línea de un Campo Escalar no depende de la parametrización (ni de la orientación) de la curva.**

Se verifica:

Propiedad:

$$\boxed{\int_C f \, ds = \int_{-C} f \, ds}$$

Aquí $-C$ es el arco de curva que coincide con C pero que tiene orientación *contraria*.

La Propiedad de arriba se refiere a la Invarianza de la Integral de Línea (del campo escalar) frente a cambios de orientación: El resultado de la Integral de Línea de un campo escalar *no depende* de la orientación de la curva.

En el Módulo:

Los conceptos asociados a $\int_C f \, ds$ se deducen en la sección **6.7**, para llegar finalmente a la Fórmula de Cálculo para la Integral de Línea del Campo Escalar:

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| \, dt, \quad \text{siendo } C: r(t), \, t \in [a, b].$$

Las Propiedades y las Interpretaciones (aplicaciones) se comentan al pie de la pág 209 y pág 210.

La sección **6.7.1** es de Ejercicios.

Como material adicional, adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1a) y 3a) de la sección **6.7.1**.

————→ Próxima Clase: sección **6.8**.