Tema 1 **Matemática B-Segundo Parcial** **29/06/2022**

Apellido y Nombre: Legajo:
Carrera: Comisión:

1		2	3			4		5
a	**b**		**a**	**bi**	**bii**	**a**	**b**	
1	1.25	1.5	0.75	0.5	0.5	1.5	1.5	1.5

1) a) ¿Es posible asignarle un valor a la siguiente integral? Justifique.

$$\int_1^e \frac{dx}{x(lnx)^2}$$

Respuesta: La integral es impropia pues la función $f(x) = \frac{1}{x(lnx)^2}$ $es\ continua\ en\ (1, e]$ y $\lim_{x\to1^+} \overbrace{\frac{1}{\underbrace{x}_{\to1}\underbrace{(lnx)^2}_{\to0^+}}}^{\to1} = \infty$. Primero resolvemos la integral definida $\int_b^e \frac{dx}{x(lnx)^2}$ con $1 < b < e$

$$\int_b^e \frac{dx}{x(lnx)^2} \underbrace{=}_{\substack{u=lnx \\ du=\frac{1}{x}dx}} \int_{lnb}^{1} \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u}\Big|_{lnb}^{1} = -1 + \frac{1}{lnb}$$

Tomando límite:

$$\lim_{b\to1^+} \int_{lnb}^1 \frac{du}{u^2} = \lim_{b\to1^+} -\frac{1}{u}\Big|_{lnb}^1 = \lim_{b\to1^+}\Big(-1 + \overbrace{\frac{1}{\underbrace{lnb}_{\to0^+}}}^{\to1}\Big) = \infty$$

La integral $\int_1^e \frac{dx}{x(lnx)^2}$ es divergente. No es posible asignarle un valor.

b) Analice si la siguiente serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{(n+1)^2}$$

Respuesta: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{(n+1)^2}$ es condicionalmente convergente pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n . n}{(n+1)^2}\right|$ diverge (ver demostración (1) abajo) y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{(n+1)^2}$ converge (ver demostración (2) abajo)

(1) Estudiemos por *criterio de comparación en el límite* la convergencia de

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n . n}{(n+1)^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{n}{(n+1)^2}}^{c_n}$ tomando como $b_n = \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} =$

$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = 1 > 0$

Luego, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **es divergente** por ser serie-p con $p = 1 \leq 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = 1 > 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$ **es divergente también**.

(2) Estudiemos por *criterio de Leibniz* la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{(n+1)^2}$

(i) Sea $\mathrm{b_n} = \frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2} > 0\ \forall \mathrm{n} \geq 1$

(ii) $\{\mathrm{b_n}\} = \left\{\frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2}\right\}$es decreciente pues:

$$\mathrm{b_{n+1}} < \mathrm{b_n} \leftrightarrow \frac{\mathrm{n}+1}{(\mathrm{n}+2)^2} < \frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2} \leftrightarrow (\mathrm{n}+1)^3 < \mathrm{n}(\mathrm{n}+2)^2 \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \mathrm{n}^3 + 3\mathrm{n}^2 + 3\mathrm{n} + 1 < \mathrm{n}^3 + 4\mathrm{n}^2 + 4\mathrm{n} \leftrightarrow 1 < \mathrm{n}^2 + \mathrm{n}$$

Notar que esta última desigualdad es verdadera pues $\mathrm{n} \geq 1$ ^ $\mathrm{n}^2 \geq 1 \rightarrow$

$\rightarrow\ \mathrm{n} + \mathrm{n}^2 \geq 2 > 1$, por lo tanto es verdadera la desigualdad $\mathrm{b_{n+1}} < \mathrm{b_n}$

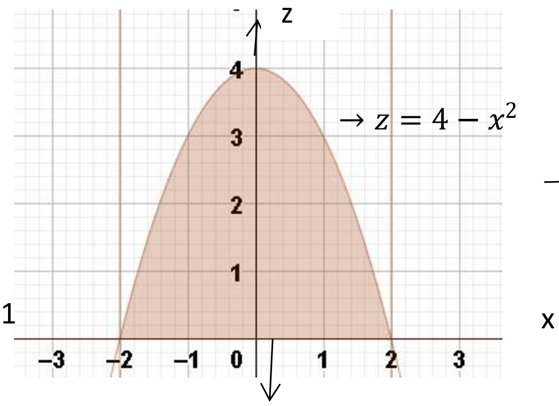
(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{n}}{(\mathrm{n}+1)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}^2+2\mathrm{n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}^2(1+\frac{2}{\mathrm{n}}+\frac{1}{\mathrm{n}^2})} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\mathrm{n}}_{\to\infty}(1+\underbrace{\frac{2}{\mathrm{n}}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{1}{\mathrm{n}^2}}_{\to 0})} = 0$

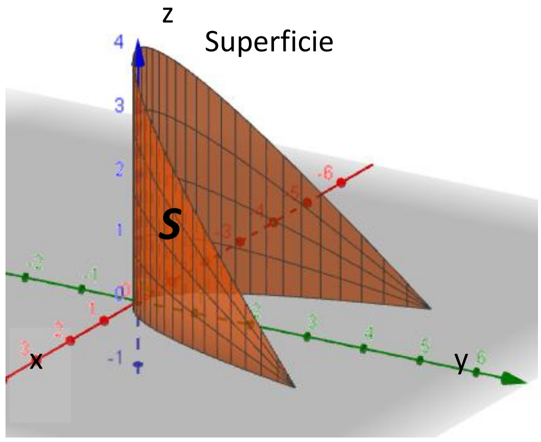
Luego, por el criterio de Leibniz, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . n}{(n+1)^2}$ converge.

2- Calcule $\iint_S \frac{1}{\sqrt{4y+1}} dS$, siendo S la porción del cilindro $y = x^2$ limitado por los planos $\mathrm{z} = 4 - \mathrm{y}\ ; z = 0$

<u>Respuesta</u>: Parametrizamos la superficie de manera trivial: $S: r(x,z) = < x, x^2, z >$. Pero nos falta dar límites para los parámetros x ; z de tal manera que la parametrización recorra cada punto de S. Para encontrar estos límites, debemos proyectarla en el plano xz. Noten que la región estará limitada por $z = 0$ y por la proyección de la curva intersección entre el cilindro $y = x^2$ y el plano $z = 4 - y \rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ z = 4 - y \end{cases} \rightarrow z = 4 - x^2$

Región de proyección





$R = \{(x,z) \in R^2,\ 0 \leq z \leq 4 - x^2; -2 \leq x \leq 2\}$

- $S: \vec{r}(x,z) = < x, x^2, z >$ con $(x,z) \in R = \{(x,z) \in R^2,\ 0 \leq z \leq 4 - x^2; -2 \leq x \leq 2\}$

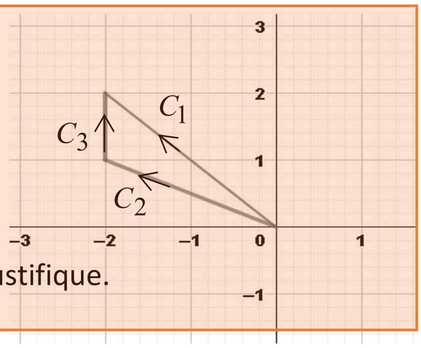
- $\vec{N} = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm \langle 2x, -1, 0 \rangle \rightarrow \boxed{|\vec{N}| = \sqrt{4x^2+1}}$

- $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{4y+1}} \to f(x,x^2,z)=\boxed{\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}}$

$$\iint_S \overbrace{\frac{1}{\sqrt{4y+1}}}^{f(x,y,z)} \overbrace{dS}^{|\vec{N}|dxdz} = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} \underbrace{f(x,x^2,z)}_{\frac{1}{\sqrt{4x^2+1}}} \underbrace{|\vec{N}|}_{\sqrt{4x^2+1}}\, dzdx = \int_{-2}^{2}\int_{0}^{4-x^2} 1.dzdx =$$

$$= \int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = 4x-\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{2} = 8-\frac{8}{3}-\left(-8+\frac{8}{3}\right)=\boxed{\frac{32}{3}}$$

3) Dado $\vec{F}(x,y)=\langle e^{x^2}, e^{y^2}+1\rangle$ y los segmentos del dibujo con las orientaciones indicadas:



a) Calcule $\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r}$

bi) ¿Es $\vec{F}$ conservativo en R^2? **bii)** ¿Qué valor le asigna a $\int_{C_2\cup C_3} \vec{F}.d\vec{r}$? Justifique.

Respuesta:

a) Una parametrización para la curva C_1: $*\ \vec{r}(t)=\langle -2t,2t\rangle$ con $0\le t\le 1 \to$

$*\ \vec{r}\,'(t)=\langle -2,2\rangle$

$$\int_{C_1}\vec{F}.d\vec{r} = \int_0^1 \overbrace{\langle e^{(-2t)^2}, e^{(2t)^2}+1\rangle}^{\vec{F}(\vec{r}(t))}.\overbrace{\langle -2,2\rangle}^{\vec{r}\,'(t)}dt = \int_0^1(-2e^{4t^2}+2e^{4t^2}+2)dt =$$

$$= \int_0^1 2dt = 2t|_0^1 = \boxed{2}$$

bi) $\boxed{\vec{F}(x,y)=\langle e^{x^2}, e^{y^2}+1\rangle \text{ es conservativo}}$ pues tiene componentes con derivadas parciales continuas en R^2, R^2 es simplemente conexo y

$\text{rot}(\vec{F})=\langle 0,0,\frac{\partial(e^{y^2}+1)}{\partial x}-\frac{\partial(e^{x^2})}{\partial y}\rangle=\langle 0,0,0\rangle$

bii) $\vec{F}(x,y)=\langle e^{x^2}, e^{y^2}+1\rangle$ tiene componentes continuas en R^2 y por b) sabemos que $\vec{F}$ es conservativo en R^2, por lo tanto la integral $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ es independiente del camino en R^2. Como C_1 y $C_2\cup C_3$ tienen mismo punto inicial y mismo punto final entonces

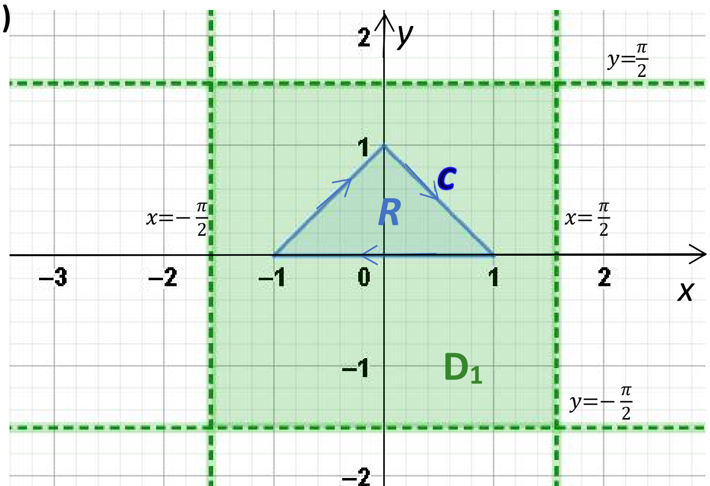
$$\to \int_{C_2\cup C_3}\vec{F}.d\vec{r}=\int_{C_1}\vec{F}.d\vec{r}=\boxed{2}$$

4) Evalúe las siguientes integrales, aplicando si es posible algún teorema:

a) $\oint_C\ tgxdx+(tgy+2x)dy$, siendo C la frontera del triángulo de vértices $(-1,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ recorrida en sentido antihorario. Realice gráficos aclaratorios.

b) $\oint_C\ zydx+2yxdy+xdz$, siendo $C:\begin{cases} z=y \\ x^2+(y-1)^2=1\end{cases}$ con orientación antihoraria mirada desde $y<0$. Realice gráficos aclaratorios.

Respuesta: **a)**



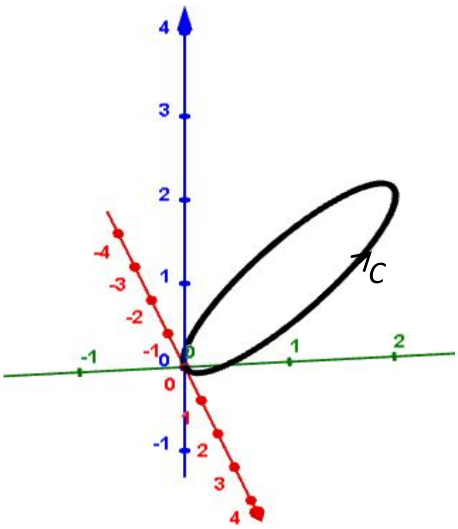
C es una curva cerrada, suave a trozos (pues es la frontera de la región triangular), simple, con orientación antihoraria y frontera de la región R del plano xy *(ver dibujo)*.

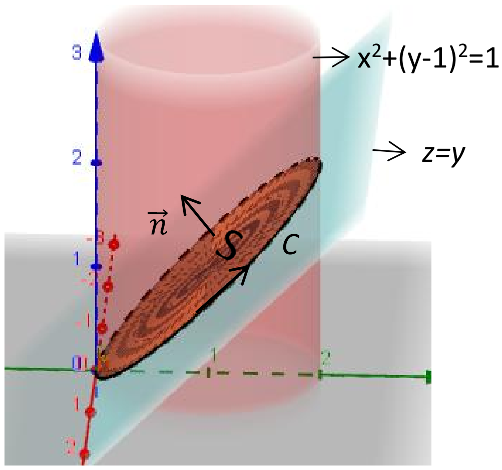
$\vec{F} = \langle \overbrace{tg(x)}^{M}, \overbrace{tg(y) + 2x}^{N} \rangle$ tiene componentes con derivadas parciales continuas en

$\mathrm{D} = \left\{(\mathrm{x}, \mathrm{y}): \mathrm{x} \neq \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}_2\pi \wedge \mathrm{y} \neq \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}_1\pi \text{, con } \mathrm{k}_1 \in \mathrm{Z},\ \mathrm{k}_2 \in \mathrm{Z} \right\}$, por lo tanto $\vec{F}$ tiene componentes con derivadas parciales continuas en $\mathrm{D}_1 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}): \frac{-\pi}{2} < \mathrm{x} < \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} < \mathrm{y} < \frac{\pi}{2}\} \subseteq \mathrm{D}$ y $C \cup R \subseteq D_1$. Aplicamos el ***teorema de Green*** y se tiene que :

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_R \overbrace{2}^{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}} dA_{xy} = 2 \overbrace{\iint_R 1\, dA_{xy}}^{Área(R)=\frac{bh}{2}=1} = 2.1 = 2$$

b)





C es una curva cerrada, suave, frontera de la superficie orientable $S: z = f(x, y) = y$ con $(x, y) \in \quad R = \{(x, y): x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$ (su representación vectorial,S: $\vec{r}(x, y) = \langle x, y, y \rangle$ con $(x, y) \in R$).

La curva C está recorrida con orientación antihoraria vista desde $y < 0$.

Elegimos sobre S el normal $\vec{n}$ con segunda componente negativa, que es la orientación inducida sobre la superficie, por el sentido de recorrido de C según la regla de la mano derecha. El campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = \langle zy, 2yx, x \rangle$ tiene componentes con derivadas parciales continuas en R^3(por ser polinómicas) y $S \cup C \subseteq R^3$, por lo tanto,por el ***teorema de Stokes*** se tiene que:

$$\oint_C zydx + 2yxdy + xdz = \iint_S rot(\vec{F}).\vec{n}dS =$$

$$= \iint_R rot\,\vec{F}(x, y, f(x, y)).\overbrace{\langle -f_x, -f_y, 1 \rangle}^{\vec{N}} dA_{xy} \overset{\substack{Ver(*)y(**)\\ abajo}}{\cong} \iint_R \overbrace{\langle 0, -1 + y, y \rangle . \langle 0, -1, 1 \rangle}^{1-y+y=1} dA_{xy} =$$

$$= \iint_R 1\, dA_{xy} = Área(R) \overset{\substack{R\ es\\ un\ círcu-\\ lo\ de\ radio\ 1}}{\cong} \pi.1^2 = \pi$$

$$(*)rot(\vec{F})=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ zy & 2yx & x\end{vmatrix}=\langle 0,-1+y,2y-z\rangle \rightarrow$$

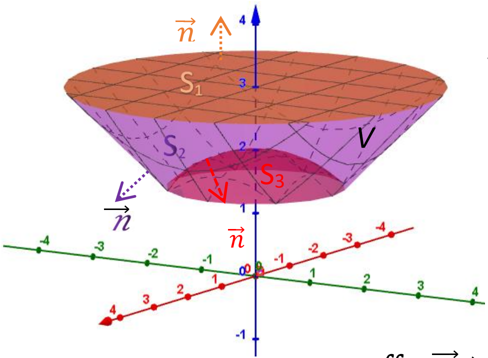
$$\rightarrow rot\vec{F}(x,y,\overbrace{y}^{f(x,y)})\underbrace{=}_{z=y}\langle 0,-1+y,\overbrace{y}^{2y-y}\rangle$$

$$(**)\vec{N}=\pm\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial y}=\pm\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=\pm\langle 0,-1,1\rangle$$

---

2) Dado $\vec{F}(x,y,z)=\langle -2yx,y^2,ln(z)\rangle$ y S: frontera del sólido limitado por $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$; $z=3$, con normal exterior.
Muestre que el flujo de $\vec{F}$ a través de S puede calcularse por medio de una integral triple.
Plantee el cálculo de dicha integral usando coordenadas esféricas.

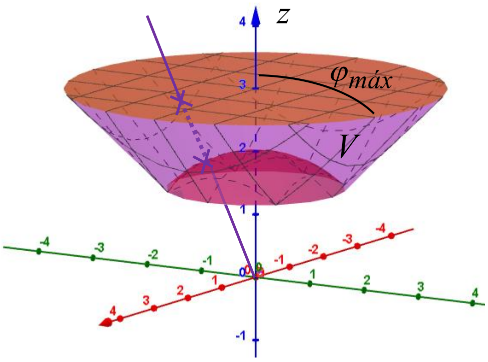
Respuesta:



$S=S_1\cup S_2\cup S_3$ es una superficie orientable, cerrada, con $\vec{n}$ exterior. S es frontera del sólido acotado V.
$\vec{F}=\langle -2yx,y^2,ln(z)\rangle$ tiene componentes con derivadas parciales continuas en $D=\{(x,y,z)\in R^3: z>0\}$, $S\cup V\subseteq D$. Podemos aplicar el teorema de Gauss y se tiene que:

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\,dS=\iiint_V \overbrace{\tfrac{1}{z}}^{div(\vec{F})}\,dV_{xyz}\underbrace{=}_{\substack{cambio\\ de\ var.\\ a\ coord\\ esféricas}}\iiint_{V^*}\underbrace{\frac{1}{\rho cos\varphi}}_{\frac{1}{z}}\underbrace{\overbrace{\rho^2 sen\varphi}^{|J_T|}\,d\rho d\varphi d\theta}_{dV_{xyz}}\quad (*)$$

Para describir al sólido V en coordenadas esféricas $T:\begin{cases}x=\rho\cos(\theta)sen(\varphi)\\ y=\rho\,sen(\theta)sen(\varphi)\\ z=\rho\cos(\varphi)\end{cases}$, observemos el gráfico de dicho sólido:



Los puntos en el cono son los que tienen mayor coordenada φ dentro del sólido:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\rightarrow 1=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}=tg(\varphi)\rightarrow\varphi=\frac{\pi}{4}$$. Por lo tanto, se tiene que $\boxed{0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}}$

La proyección del sólido en el plano *xy* es un círculo centrado en el origen, entonces $\boxed{0\leq\theta\leq 2\pi}$

Notemos que si trazamos cualquier semirrecta que salga del origen y atraviese al sólido, sobre el segmento de la semirrecta violeta que queda contenido en el sólido, el punto que tiene menor coordenada ρ es el que está sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=4\ (\rho=2)$ y el punto con mayor ρ está sobre el plano $z=3\quad(\rho\cos\varphi=3\leftrightarrow\rho=\frac{3}{\cos\varphi})$. Por lo tanto se tiene que $\boxed{2\leq\rho\leq\frac{3}{\cos\varphi}}$

$$\boxed{div(\vec{F})=\frac{\partial(-2yx)}{\partial x}+\frac{\partial(y^2)}{\partial y}+\frac{\partial(\ln z)}{\partial z}=-2y+2y+\frac{1}{z}=\frac{1}{z}}$$

Luego, retomando las integrales en (*):

$$\boxed{\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\,dS=\iiint_V \overbrace{\frac{1}{z}}^{div(\vec{F})}\,dV_{xyz}\underbrace{=}_{\substack{cambio\\ de\ var.\\ a\ coord\\ esféricas}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_2^{3/cos\varphi}\underbrace{\frac{1}{\rho cos\varphi}}_{\frac{1}{z}}\ \underbrace{\rho^2 sen\varphi\ d\rho d\varphi d\theta}_{dV_{xyz}}}$$