

Integrales Dobles

$$\iint_R f \, dA$$

- Definición, Propiedades, y Cálculo en coordenadas cartesianas (sección 4.1).
- Aplicaciones de la Integral Doble (sección 4.2).

Definiremos a la **Integral Doble** basándonos en una interpretación geométrica:

El cálculo del volumen de un sólido V

Si $f(x, y)$ es **continua** en la región $R \subset \mathbb{R}^2$, $f(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in R$

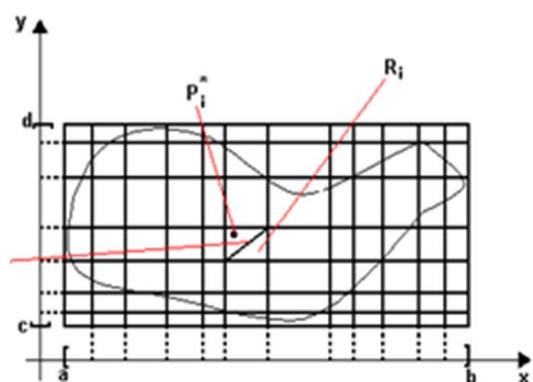
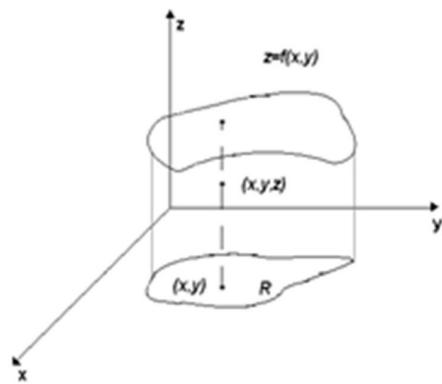
→ Queda definido un sólido V entre la gráfica de $z = f(x, y)$ y el plano xy :

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \quad (x, y) \in R \quad \wedge \quad 0 \leq z \leq f(x, y) \}$$

$$Vol(V) = ? \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Calcularemos } Vol(V) \text{ en forma aproximada} \\ (\text{cubriendo a } V \text{ con prismas rectangulares}) \\ \text{y luego mejoraremos la aproximación hasta} \\ \text{llegar al valor exacto} \end{array} \right.$$

Trazando rectas paralelas a los ejes x e y hasta cubrir R quedan formados rectángulos en el plano xy , y podemos definir una partición de R :

$$P = \{R_1, R_2, R_3, \dots, R_n\} \quad \leftarrow \begin{array}{l} n \text{ rectángulos contenidos en } R \\ \text{de área } \Delta R \text{ cada uno} \end{array}$$

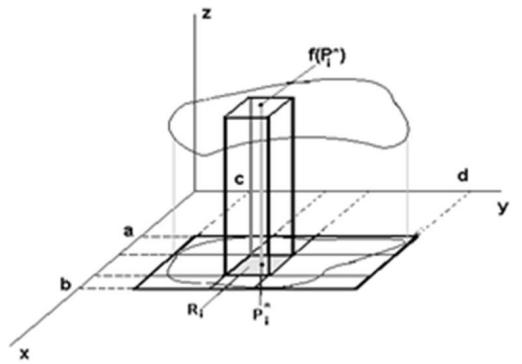


Elegimos $P_i^* \in R_i$, $i = 1, \dots, n$ y armamos *prismas rectangulares*, de altura $f(P_i^*)$:

→ Cubrimos a V con n prismas V_i , $i = 1, \dots, n$:

V_i : prisma rectangular de base R_i y altura $f(P_i^*)$

$$Vol(V) \cong \sum_{i=1}^n Vol(V_i) = \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta R$$



Cuando n crece, la aproximación al $Vol(V)$ mejora..

Cuando $n \rightarrow \infty$ se logra el valor exacto:

$$Vol(V) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta R \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta R = \iint_R f(x, y) dA \quad \leftarrow \text{Donde se ha usado el } \underline{\text{Teorema de Existencia de la Integral Doble:}}$$

$$\text{Si } f(x, y) \text{ es continua en } R \quad (\text{o continua a trozos}) \quad \Longrightarrow \quad \exists \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta R \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta R = \iint_R f(x, y) dA$$

∀ las posibles Particiones de R .

Resumiendo:

Si $f(x, y)$ es **continua** (**o continua a trozos**) en la región R del plano xy , entonces **existe** la Integral Doble de $f(x, y)$ sobre R : $\iint_R f(x, y) dA$.

Además, si $f(x, y) > 0$ sobre R , queda definido un sólido V entre la gráfica de $z = f(x, y)$ y el plano xy que se describe como: $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y)\}$.

En ése caso, el Volúmen de V se calcula como:

$$Vol(V) = \iint_R f(x, y) dA$$

Otras situaciones:

- Si $f(x, y) = 1$, $\forall (x, y) \in R$. Entonces: $\iint_R f(x, y) dA = \iint_R 1 dA = Area(R)$
- Si $f(x, y) < 0$ sobre R , $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \wedge f(x, y) \leq z \leq 0\}$. Entonces: $\iint_R f(x, y) dA = -Vol(V)$.

Actividad de sección 4.1.1.

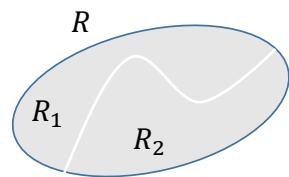
Propiedades de la integral doble:

Supongamos f y g continuas en la región R del plano y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Aditividad en la región de integración:

$$\iint_{R=R_1 \cup R_2} f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

(entendiendo que $R_1 \cap R_2$ tiene área nula)



2. Linealidad:

$$\iint_R [\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)] dA = \alpha \iint_R f(x, y) dA + \beta \iint_R g(x, y) dA$$

3. Monotonía:

$$\text{Si } f(x, y) \leq g(x, y) \quad \forall (x, y) \in R, \quad \iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R g(x, y) dA$$

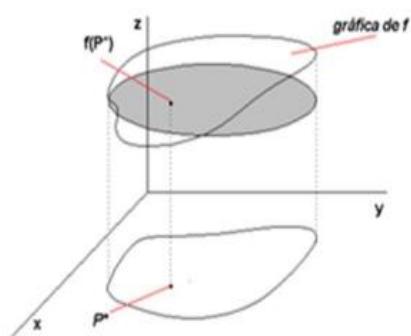
4. Acotamiento:

$$\begin{aligned} & \text{Si } |f(x, y)| \leq M \quad \forall (x, y) \in R, \\ & -M \leq f(x, y) \leq M \Rightarrow - \iint_R M dA \leq \iint_R f(x, y) dA \leq \iint_R M dA \Rightarrow \\ & \Rightarrow -M \iint_R dA \leq \iint_R f(x, y) dA \leq M \iint_R dA \Rightarrow -M \cdot \text{área}(R) \leq \iint_R f(x, y) dA \leq M \cdot \text{área}(R) \end{aligned}$$

$$\text{entonces } \left| \iint_R f(x, y) dA \right| \leq M \cdot \text{área}(R)$$

Teorema del valor medio para integrales dobles.

Si $f(x, y)$ es continua en la región $R \subset \mathbb{R}^2$ entonces existe $P^* \in R$ tal que $\iint_R f(x, y) dA = f(P^*) \cdot \text{área}(R)$



Si f es integrable en R , el **valor promedio de f en R** es el cociente

$$f_{\text{prom}} = \frac{\iint_R f(x, y) dA}{\text{área}(R)}$$

Cálculo de una Integral Doble:

Definiciones previas:

- Una región R del plano es una **región tipo I** si puede expresarse en la forma

$$R = \{(x, y); a \leq x \leq b \wedge f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

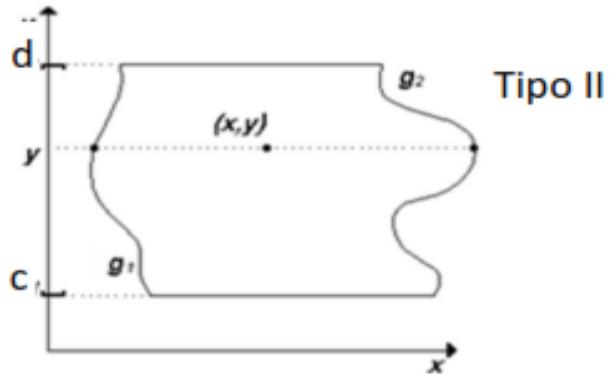
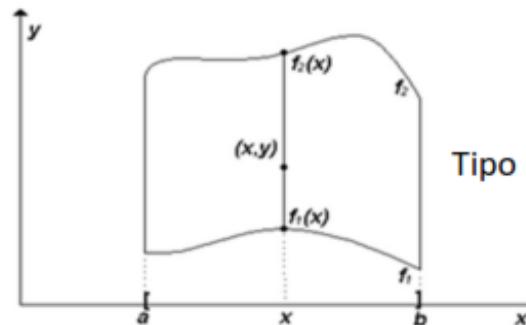
siendo f_1 y f_2 continuas en $[a, b]$.

- Una región R del plano es una **región tipo II** si puede expresarse en la forma

$$R = \{(x, y); c \leq y \leq d \wedge g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

siendo g_1 y g_2 continuas en $[c, d]$.

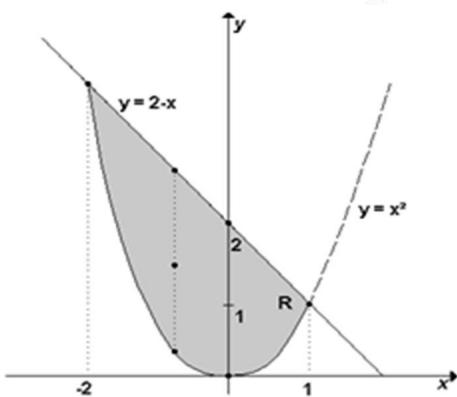
En lo que sigue, cuando hablamos de una región $R \subset \mathbb{R}^2$ estaremos suponiendo que R es una región tipo I o tipo II o una unión finita de regiones de esos tipos.



Teorema de Fubini para Regiones de Tipo I:

- 1. Si $R = \{(x, y); a \leq x \leq b \wedge f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ (región tipo I) y $f(x, y)$ es continua en R , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy dx$$



Ejemplo: Calcular la Integral Doble de la función $f(x, y) = 2xy$, sobre la región R limitada por las gráficas de $y = x^2$, $x + y = 2$.

$$\begin{aligned} \iint_R 2xy dA &= \int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} 2xy dy dx = \int_{-2}^1 xy^2 \Big|_{x^2}^{2-x} dx = \\ &= \int_{-2}^1 [x(2-x)^2 - x^5] dx = \dots - \frac{45}{4} \end{aligned}$$

$$R = \{(x, y); -2 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 2 - x\}$$

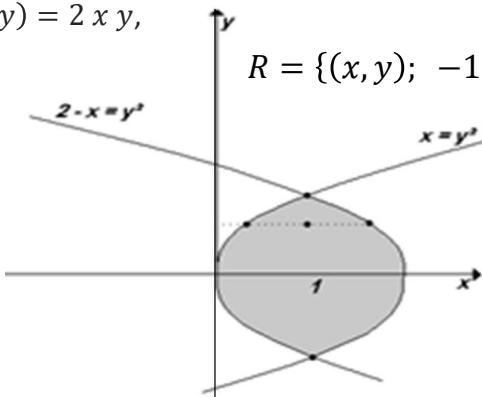
Teorema de Fubini para Regiones de Tipo II:

2. Si $R = \{(x, y); c \leq y \leq d \wedge g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$ (región tipo II)
 y $f(x, y)$ es continua en R , entonces

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy$$

Ejemplo: Calcular la Integral Doble de la función $f(x, y) = 2xy$, sobre la región R limitada por $x = y^2$, $2 - x = y^2$.

$$\begin{aligned} \iint_R 2xy \, dA &= \int_{-1}^1 \int_{y^2}^{2-y^2} 2xy \, dx \, dy = \\ &= \int_{-1}^1 x^2 y \Big|_{y^2}^{2-y^2} \, dy = \\ &= \int_{-1}^1 [(2-y^2)^2 y - y^3] \, dy = \dots \end{aligned}$$



Casos más generales:

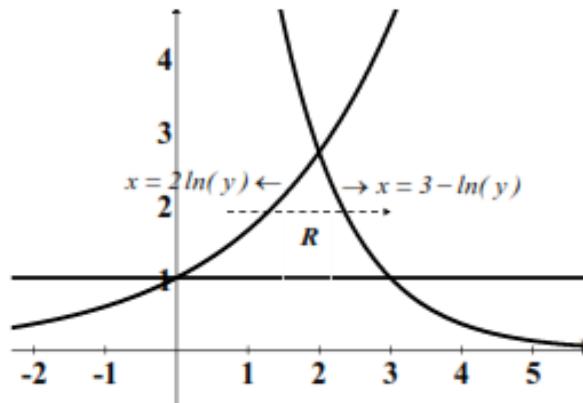
- Regiones simultáneamente de Tipo I y II (Ejemplo pág 134)
- Regiones que no son de Tipo I ni de Tipo II (Ejemplo pág 135)

Ejemplo: Plantee ésta integral invirtiendo el orden de integración:

$$\int_1^{e^{3-\ln y}} \int_{2\ln y}^{3-\ln y} f(x, y) \, dx \, dy$$

Respuesta:

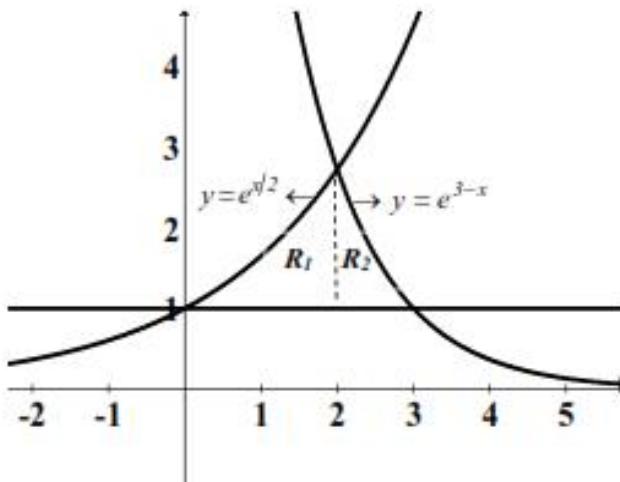
Primero describamos y grafiquemos la región de integración: $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2\ln y \leq x \leq 3 - \ln(y); 1 \leq y \leq e\}$ (región de tipo II)



Para plantear la integral cambiando el orden de integración debemos describir la región R como región de tipo I, donde ahora, la coordenada "x" de los puntos de ésta región esté entre límites constantes y la coordenada "y" de los puntos de la región esté entre funciones y observamos que R es unión de dos regiones de tipo I:

$$R = R_1 \cup R_2 \quad \text{dónde} \quad R_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq e^{x/2}, 0 \leq x \leq 2 \right\}$$

$$R_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq e^{3-x}, 2 \leq x \leq 3 \right\}$$



Cambiando el orden de integración, la integral queda expresada como la siguiente suma:

$$\int_{1+2\ln y}^{e^{3-\ln y}} \int_{0}^{\frac{x}{2}} f(x,y) dx dy = \int_{0}^{2e^2} \int_{1}^{\frac{x}{2}} f(x,y) dy dx + \int_{2}^{3} \int_{1}^{e^{3-x}} f(x,y) dy dx$$

Aplicaciones de la Integral Doble

- Volumen de Sólidos
- Área de Regiones Planas
- Masa y Centro de Masa

□ Cálculo del Volumen de Sólidos:

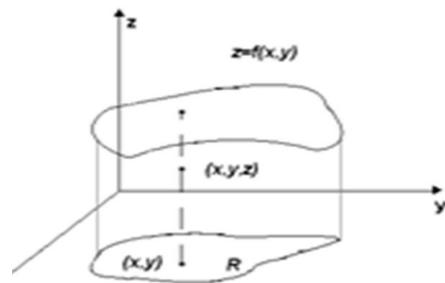
- Sólido *apoyado* sobre un plano coordenado:

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y) \},$$

$$Vol(V) = \iint_R f(x, y) dA$$

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \wedge f(x, y) \leq z \leq 0 \},$$

$$Vol(V) = - \iint_R f(x, y) dA$$

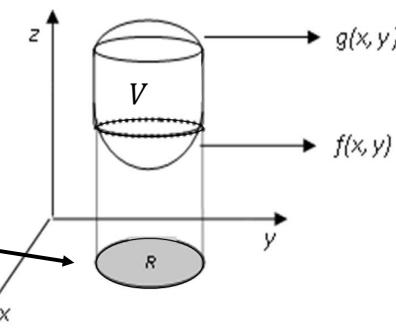


- Sólido *no apoyado* sobre un plano coordenado:

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \wedge f(x, y) \leq z \leq g(x, y) \},$$

$$Vol(V) = \iint_R [g(x, y) - f(x, y)] dA$$

Región de proyección de V



→ Se plantean fórmulas análogas cuando R está en yz o xz :

Volumen de sólidos proyectables en los planos coordenados

1. Si $V = \{(x, y, z); (x, y) \in R_{xy} \wedge f(x, y) \leq z \leq g(x, y)\}$ entonces

$$vol(V) = \iint_{R_{xy}} [g(x, y) - f(x, y)] dA_{xy}$$

2. Si $V = \{(x, y, z); (x, z) \in R_{xz} \wedge f(x, z) \leq y \leq g(x, z)\}$ entonces

$$vol(V) = \iint_{R_{xz}} [g(x, z) - f(x, z)] dA_{xz}$$

3. Si $V = \{(x, y, z); (y, z) \in R_{yz} \wedge f(y, z) \leq x \leq g(y, z)\}$ entonces

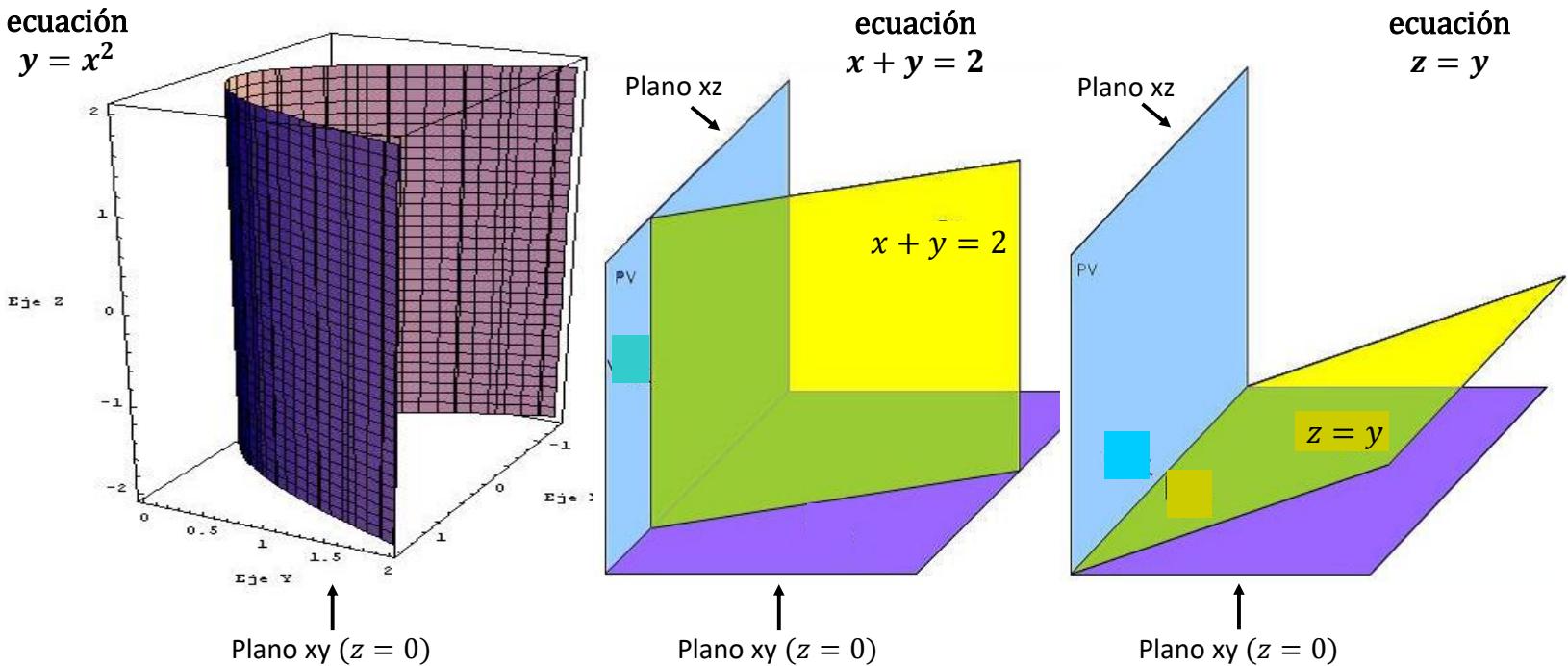
$$vol(V) = \iint_{R_{yz}} [g(y, z) - f(y, z)] dA_{yz}$$

Aquí R_{xy} , R_{xz} , R_{yz} , representan, respectivamente, regiones de los planos xy , xz e yz , y los diferenciales de área se traducirán, al plantear el cálculo con integrales iteradas, en: $dxdy$ o $dydx$; $dxdz$ o $dzdx$; $dzdy$ o $dydz$, según se describan la regiones.

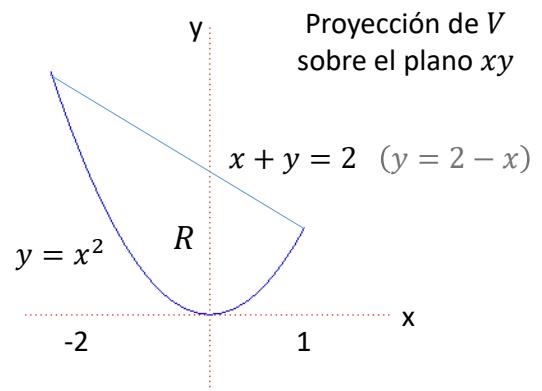
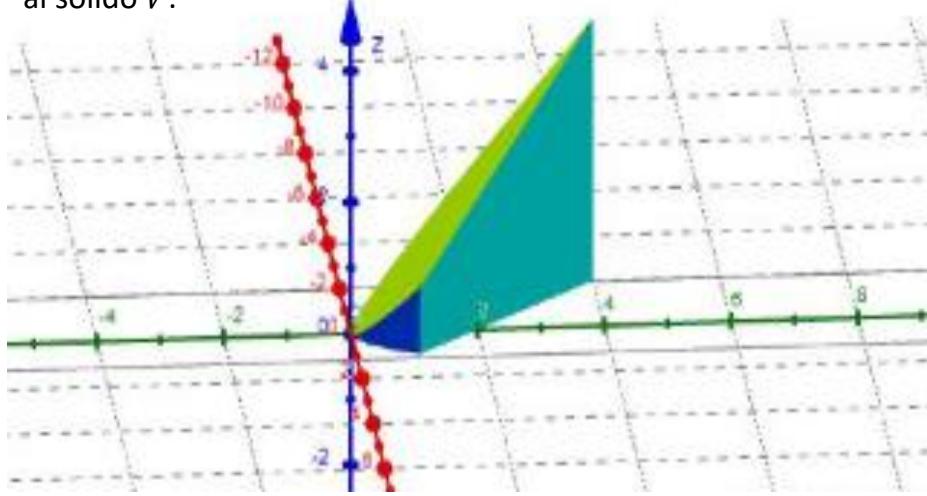
Ejemplo: Hallar el volúmen del sólido V , siendo V limitado por las gráficas de:

$$y = x^2, x + y = 2, z = 0, z = y.$$

Si analizamos cada superficie por separado:



Al graficar las tres superficies en el mismo sistema de coordenadas, se intersectarán de manera de encerrar al sólido V :



$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq f(x, y) \}, \quad \text{donde aquí } f(x, y) \text{ se obtiene de } z = y: z = f(x, y) = y$$

O sea:

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq y \}$$

$$Vol(V) = \iint_R y \, dA$$

$$V = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in R \wedge 0 \leq z \leq y \}$$

$$Vol(V) = \iint_R y \, dA$$

$$R = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2 - x \}$$

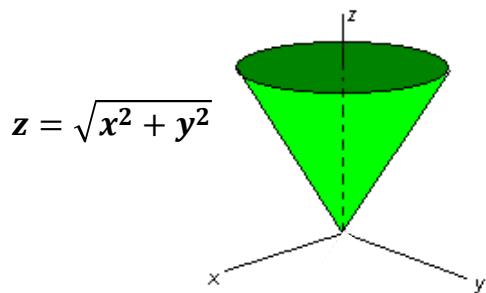
y entonces:

$$Vol(V) = \int_{-2}^1 \int_{x^2}^{2-x} y \, dy \, dx = \int_{-2}^1 \frac{1}{2} y^2 \Big|_{x^2}^{2-x} \, dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^1 ((2-x)^2 - x^4) \, dx =$$

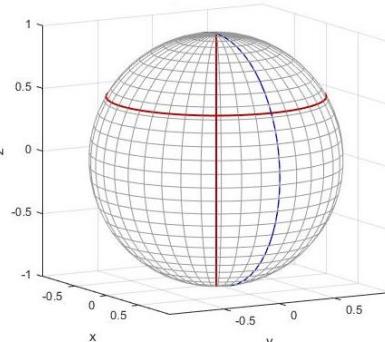
$$\frac{1}{2} \int_{-2}^1 (4 - 4x + x^2 - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \left(4x - 2x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right) \Big|_{-2}^1 = \frac{36}{5}$$

Ejemplo: Plantear la integral doble con la que se calcularía el volumen del sólido V encerrado entre las gráficas de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (con $z \geq 0$).

Grafiquemos cada superficie por separado:



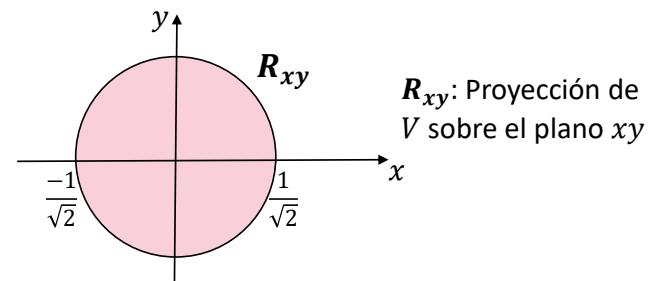
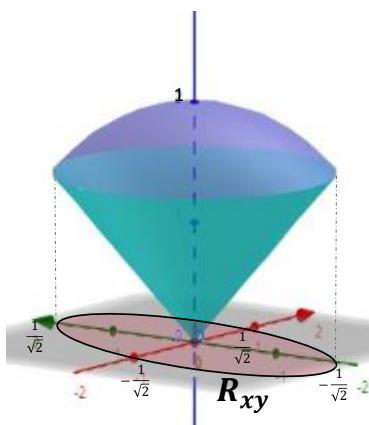
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$



Graficando ambas superficies en el mismo sistema obtenemos a V :

El contorno de R_{xy} se obtiene de eliminar z de las ecuaciones de las superficies:

$$\begin{aligned} z &= \sqrt{x^2 + y^2} \quad y \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \therefore x^2 + y^2 &= 1/2 \end{aligned}$$



R_{xy} : Proyección de V sobre el plano xy

Podemos describir a V como:

$$V = \left\{ (x, y, z) \mid (x, y) \in R_{xy}, \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \right\}$$

$$\therefore Vol(V) = \iint_{R_{xy}} \left[\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2} \right] dA_{xy}$$

Describiendo a R_{xy} como región de tipo I:

$$R_{xy} = \left\{ (x, y) \mid \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2} - x^2} \leq y \leq \sqrt{\frac{1}{2} - x^2} \right\}$$

Llegamos al planteo pedido:

$$Vol(V) = \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{-\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}}^{\sqrt{\frac{1}{2} - x^2}} \left[\sqrt{1 - (x^2 + y^2)} - \sqrt{x^2 + y^2} \right] dy dx$$

□ Cálculo del Área de una Región Plana:

Si R es una región plana:

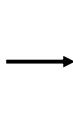
$$Area(R) = \iint_R 1 \, dA$$

←

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{De: } \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta R \quad \text{cuando } f = 1: \\ \sum_{i=1}^n 1 \Delta R \cong Area(R) \end{array} \right.$$

□ Cálculo de la Masa y del Centro de Masa de una Placa:

- Si R representa una placa *plana* y
 $\rho(x, y)$: densidad superficial de masa de R



→

$$masa(R) = \iint_R \rho(x, y) \, dA$$

- El Centro de Masa de R es un punto $P_{CM}: (x_{CM}, y_{CM})$ donde:

$$x_{CM} = \frac{\iint_R x \rho(x, y) \, dA}{masa(R)}$$

$$y_{CM} = \frac{\iint_R y \rho(x, y) \, dA}{masa(R)}$$

En el Módulo:

- La Definición, Propiedades y Teorema de Valor Medio de la Integral Doble se desarrollan en la sección **4.1**.
Observación: en la Actividad de la sección **4.1.1** : hacer sólo la primer actividad.
- El Cálculo de la Integral Doble para las diferentes tipos de Regiones se desarrolla entre las págs. 119 y 125.
- La Aplicaciones de la Integral Doble se desarrollan en la sección **4.2**.
- Las secciones **4.1.2** y **4.2.1** son de Ejercicios.

→ Próxima Clase: sección **4.3**.