Área de Superficies en el Espacio.

Integral de Superficie de un Campo Escalar

- Fórmula de cálculo para el Área de una Superficie en el espacio. Sección **7.2**
- Definición y cálculo de la Integral de Superficie de un Campo Escalar. Sección **7.3**

Recordemos que la Integral de Línea $\int_C f\ ds$ representó la *generalización* de la Integral Definida, $\int_a^b f(x)\ dx$.

De igual manera, la Integral de Superficie $\iint_S f\ \ dS$ representará la *generalización* de la Integral Doble, $\iint_R f\ \ dA$, en el sentido de que en una Integral de Superficie se integra sobre una superficie S *del espacio* en vez de integrar sobre una superficie *del plano* (como lo es la región R en $\iint_R f\ \ dA$)

Comenzaremos deduciendo una fórmula de cálculo para Área de una superficie S, y luego *extenderemos* ésa fórmula para lograr definir a la Integral de Superficie.

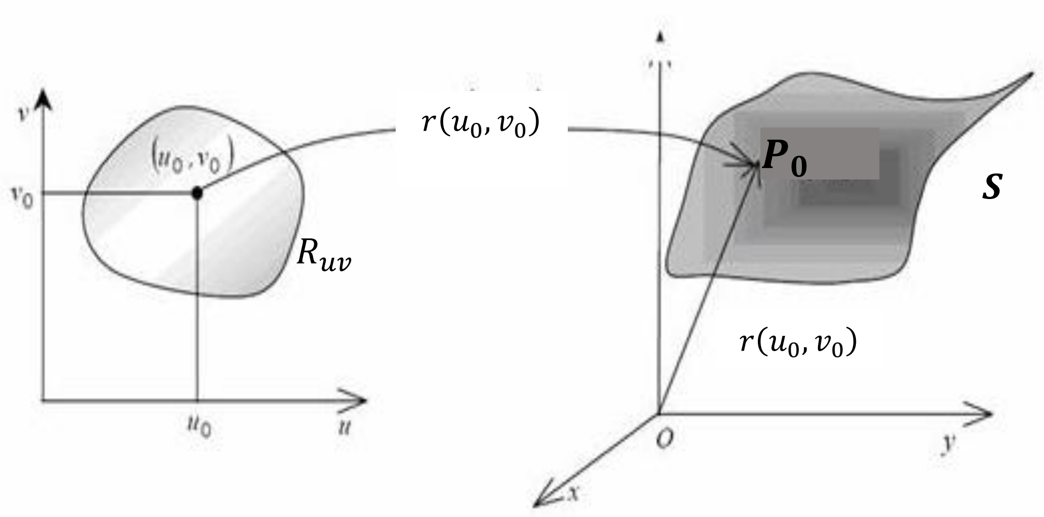
- **Área de una Superficie**:

Sea S una superficie suave y acotada, parametrizada según:

S: $r(u,v)$, $\quad (u,v) \in R_{uv}$.

Hallaremos el área de S, A_S , siguiendo el mismo procedimiento que utilizamos en casos anteriores:

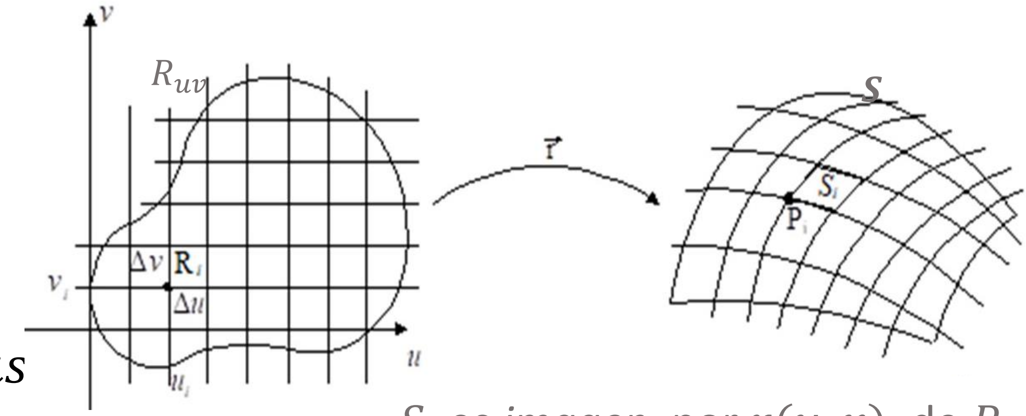
1. Particionar el dominio (R_{uv}).
2. Armar las Sumas de Riemann que *aproximan* el área A_S.
3. Refinar la Partición tomando $n \to \infty$ en la Suma de Riemann. (para llegar al valor exacto de A_S)



1. Particionar el dominio paramétrico R_{uv} :

Definamos una Partición de R_{uv} trazando rectas de la forma $u = cte$ y $v = cte$, de manera tal que R_{uv} quede dividida en n rectángulos R_i de área ΔR_i , $i = 1 \dots n$. $(\Delta R_i = \Delta u . \Delta v)$

Esas rectas producen en S un conjunto de $u - curvas$ y $v - curvas$ que dividen a S en n porciones de superficie S_i de área ΔS_i , $i = 1 \dots n$.

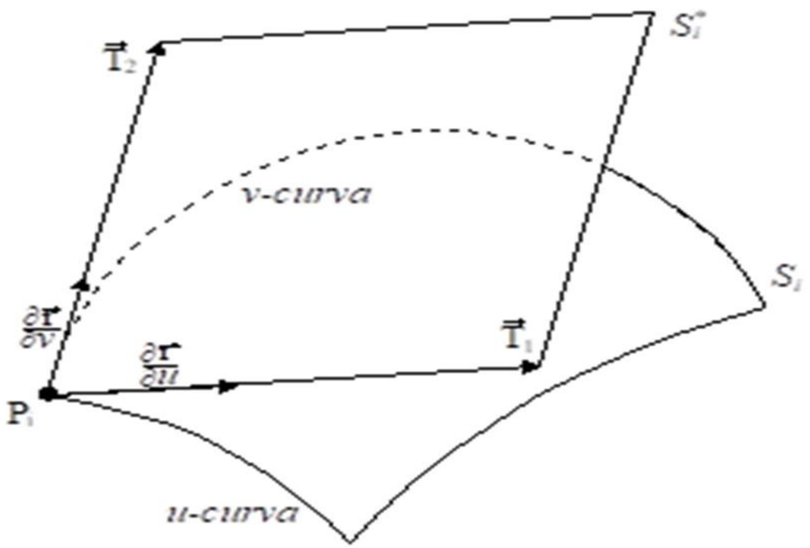


S_i es *imagen*, por $r(u, v)$, de R_i
$P_i \leftrightarrow r(u_i, v_i)$

2. Armar las Sumas de Riemann que *aproximan* el área de S, A_S:

$$A_S \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \ , \quad \Delta S_i = ??$$

Calcularemos ΔS_i *aproximando* a cada porción S_i por una porción de plano tangente..



S_i^*: porción de plano tangente a S en P_i , de lados T_1 y T_2 .

ΔS_i^*: área de S_i^* , en donde sabemos que: $\Delta S_i^* = |T_1 \times T_2|$

Ahora aproximamos: $\Delta S_i \cong \Delta S_i^*$ (si es que S_i^* *se parece* a S_i…).

Para eso: $T_1 = \frac{\partial\, r(u_i,v_i)}{\partial\, u} \Delta u$ y $T_2 = \frac{\partial\, r(u_i,v_i)}{\partial\, v} \Delta v$

Luego: $\Delta S_i \cong \Delta S_i^* = |T_1 \times T_2| = \left| \frac{\partial\, r(u_i,v_i)}{\partial\, u} \Delta u \times \frac{\partial\, r(u_i,v_i)}{\partial\, v} \Delta v \right|$

$$\Delta S_i \cong \left| \frac{\partial\, r(u_i,v_i)}{\partial\, u}\, \Delta u \times \frac{\partial\, r(u_i,v_i)}{\partial\, v}\, \Delta v \right| = \underbrace{\left| \frac{\partial\, r(u_i,v_i)}{\partial\, u} \times \frac{\partial\, r(u_i,v_i)}{\partial\, v} \right| \Delta u\, \Delta v}_{} = |N(u_i,v_i)|\, \Delta R_i$$

$$\alpha\, \vec{a} \times \beta\, \vec{b} = \alpha\, \beta \left(\vec{a} \times \vec{b}\right), \qquad \alpha\ y\ \beta \in \mathbb{R}.$$

$$\left|\alpha\, \vec{a} \times \beta\, \vec{b}\right| = \left|\alpha\, \beta \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)\right| = |\alpha\, \beta|\, \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

$$\therefore \qquad \Delta S_i \cong |N(u_i,v_i)|\, \Delta R_i$$

Luego: $$A_S \cong \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i \cong \sum_{i=1}^{n} |N(u_i,v_i)|\, \Delta R_i$$

Suma de Riemann para la función $|N(u,v)|$ asociada una Partición del dominio R_{uv} en n rectángulos R_i de área ΔR_i (tal que cuando $n \to \infty$, $\Delta R_i \to 0$).

3. Refinar la Partición tomando $n \to \infty$ en la Suma de Riemann (para llegar al valor exacto de A_S) :

$$A_S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta R_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} |N(u_i,v_i)|\, \Delta R_i = \iint_{R_{uv}} |N(u,v)|\, dA$$

Donde se ha usado el Teorema de Existencia de la Integral Doble (aplicado a $f(u,v) = |N(u,v)|$, continua en R_{uv}):

Si $f(u,v)$ es continua en R_{uv} (o continua a trozos) $\Longrightarrow$ $$\exists \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta R_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(u_i,v_i)\, \Delta R_i = \iint_{R_{uv}} f(u,v)\, dA$$

$\forall$ las posibles Particiones deR_{uv}.

O sea: $A_S = \iint_{R_{uv}} |N(u,v)|\, dA$, donde S es suave y acotada, $S: r(u,v)$, $(u,v) \in R_{uv}$.

<u>Si se define</u>: $dS \equiv |N(u,v)|\, dA$: diferencial de Superficie.

Esa definición de dS nos permite definir a la **<u>Integral de Superficie</u>**: $\iint_{R_{uv}} |N(u,v)|\, dA \equiv \iint_S dS$: Integral de Superficie (de la función "1") sobre S.

En resúmen:

Sea S una superficie suave y acotada. Entonces su área, A_S, se define como:

$$A_S = \iint_S dS$$: Integral de Superficie (de la función 1) sobre S.

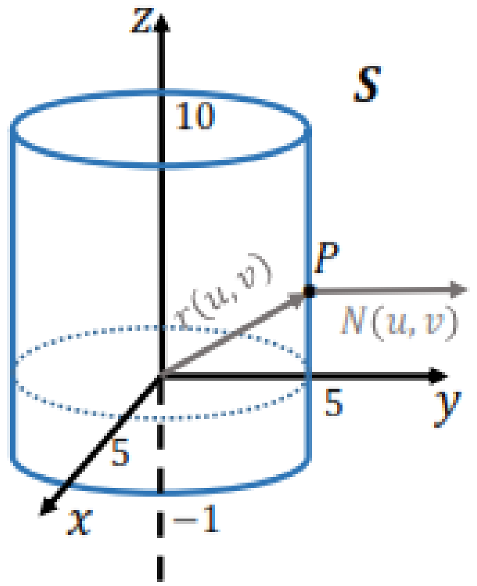
Si S se describe paramétricamente como $S: r(u,v)$, $(u,v) \in R_{uv}$, A_S se calculará *como una Integral Doble*:

$$A_S = \iint_S dS = \iint_{R_{uv}} |N(u,v)|\, dA \ , \quad \text{donde } |N(u,v)| = |r_u(u,v) \times r_v(u,v)|$$

Integral de Superficie

Fórmula de *cálculo* de la Integral de Superficie

Ejemplo: Calcular el área de $S: x^2 + y^2 = 25$, donde $-1 \leq z \leq 10$.



La clase pasada parametrizamos ésta superficie y hallamos un vector normal N.
Obtuvimos:

$$S: r(u,v) = \langle 5\cos(u), 5\,sen(u), v\rangle, \quad (u,v) \in R_{uv}$$

$$R_{uv}: \{(u,v);\ 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 10\}$$

$$N(u,v) = r_u(u,v) \times r_v(u,v) = \cdots = \langle 5\,cos(u), 5\,sen(u), 0\rangle$$

Con eso podemos calcular el área A_S : $\quad A_S = \iint_S dS = \iint_{R_{uv}} |N(u,v)|\, dA$

$$|N(u,v)| = \sqrt{(5\,cos(u))^2 + (5\,sen(u))^2 + (0)^2} = 5$$

Luego:

$$A_S = \iint_S dS = \iint_{R_{uv}} |N(u,v)|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{10} 5\ dv\, du = \int_0^{2\pi} \left(5\,v\Big|_{-1}^{10}\right) du = \int_0^{2\pi} 55\, du = 55\, 2\pi = 110\,\pi$$

$$\boxed{A_S = 110\,\pi}$$

A continuación *generalizaremos* la definición anterior (Integral de Superficie “de la función 1”) para definir a la Integral de Superficie de una función f arbitraria:

Integral de Superficie de un Campo Escalar f:

Como se mencionó al comienzo de la clase, la Integral de Superficie $\iint_S f \; dS$ representará la *generalización* de la Integral Doble, $\iint_R f \; dA$.

Daremos una definición de $\iint_S f \; dS$ *extendiendo* la definición que hemos hallado para el área, $A_S = \iint_S dS$:

Sea S: superficie suave y acotada. Sea $f = f(x, y, z)$ campo escalar, definido (y continuo) sobre los puntos de S.
Entonces existe:

$$\iint_S f \; dS : \text{ Integral de Superficie del campo escalar } f \text{ sobre } S.$$

Si S se describe paramétricamente como $S: r(u, v)$, $(u, v) \in R_{uv}$, la Integral de Superficie se calculará *como una Integral Doble*:

$$\iint_S f \; dS = \iint_{R_{uv}} f\big(r(u, v)\big) \, |N(u, v)| \, dA \, , \quad \text{donde } |N(u, v)| = |r_u(u, v) \times r_v(u, v)|$$

Integral de Superficie

Fórmula de *cálculo* de la Integral de Superficie

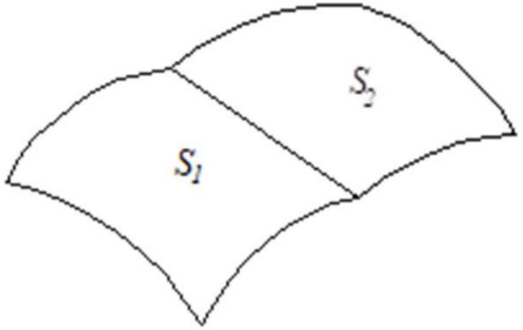
Propiedades:

Dado que la Integral de Superficie generaliza a la Integral doble, se verifican las mismas propiedades.
En particular, las más usadas:

- Aditividad en el conjunto de integración:

Si f es continua sobre S, y S es unión de un número finito de superficies suaves $S = S_1 \cup S_2$:

$$\iint_S f \ dS = \iint_{S_1} f \ dS + \iint_{S_2} f \ dS$$



- Linealidad:

Si f y g son continuas sobre la superficie suave S, y $\alpha \ y \ \beta \in \mathbb{R}$:

$$\iint_S [\alpha \ f + \beta \ g] \, dS = \alpha \iint_S f \ dS + \beta \iint_S g \ dS$$

Aplicaciones de la Integral de Superficie:

1) Si $f = 1, \quad \forall \, P \in S, \ S: r(u,v) \, , \ (u,v) \in R_{uv},$ entonces:

$$\left(\iint_S f \ dS = \iint_{R_{uv}} f\big(r(u,v)\big) \, |N(u,v)| \, dA \right)$$

$$\iint_S 1 \, dS = \iint_{R_{uv}} |N(u,v)| \, dA = A_S \qquad \therefore$$

$$\boxed{\iint_S 1 \, dS = A_S}$$

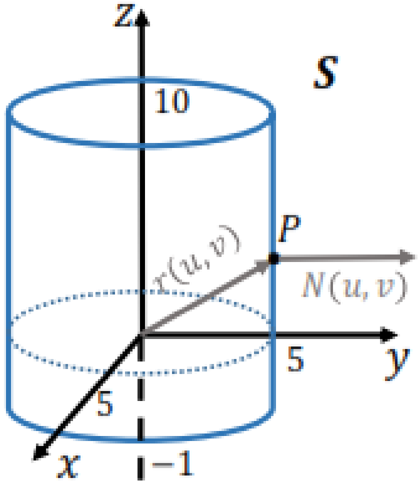
2) Si S representa a una *lámina delgada* y f: *densidad superficial de masa de* S, entonces la *masa de la lámina* se calcula como:

$$\boxed{\iint_S f\ dS = m_S}$$

Propiedad: El resultado de la Integral de Superficie de un Campo Escalar *no depende* del Normal elegido. (siempre que se calcule a partir de $r(u,v)$). O sea:

$$\iint_S f\ \ dS = \iint_{R_{uv}} f\big(r(u,v)\big)\ \underbrace{|r_u(u,v) \times r_v(u,v)|}_{|N(u,v)|}\ dA = \iint_{R_{uv}} f\big(r(u,v)\big)\ \underbrace{|r_v(u,v) \times r_u(u,v)|}_{|-N(u,v)|}\ dA$$

Ejemplo: Calcular la *masa* de una lámina S cuya forma coincide con $x^2 + y^2 = 25$, donde $-1 \leq z \leq 10$, siendo $f(x, y, z) = z^2$ su densidad superficial de masa.



Calcularemos: $m_S = \iint_S f \; dS = \iint_{R_{uv}} f\big(r(u,v)\big)\, |N(u,v)|\, dA$:

S: $r(u, v) = \langle 5\cos(u), 5\,sen(u), v\rangle$, $\quad (u, v) \in R_{uv}$

R_{uv}: $\{(u, v);\ 0 \leq u \leq 2\pi, -1 \leq v \leq 10\}$

$N(u, v) = \langle 5\cos(u), 5\,sen(u), 0\rangle$, $\quad |N(u, v)| = 5$ (calculado en ejemplo de Clase 26)

$$m_S = \iint_S f\, dS = \iint_S z^2\, dS = \iint_{R_{uv}} f\big(r(u,v)\big)\, |N(u,v)|\, dA = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{10} v^2\, 5\, dv\, du = 5\int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{v^3}{3}\right|_{-1}^{10}\right) du =$$

$$= 5\int_0^{2\pi}\left(\frac{10^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3}\right) du = 5\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+10^3}{3}\right) du = 5\left(\frac{1+10^3}{3}\right) 2\pi \;\therefore\; \boxed{m_S = \left(\frac{1+10^3}{3}\right) 10\,\pi}$$

Nota: Notar que en los ejemplos que hemos resuelto, calculamos a N como $N = r_u \times r_v$.
Sin embargo, a los fines de calcular la Integral de Superficie (de un campo escalar), también podríamos haber usado "$-N$" , donde $-N = r_v \times r_u$ (ya que $|N| = |-N|$) .

En el módulo:

La fórmula para calcular el **Área de una Superficie Parametrizada $\boldsymbol{S}$** en términos de una Integral doble, se deduce en la sección **7.2**, páginas 240 y 242.

Es importante remarcar que

- En la fórmula $A_S = \iint_{R_{uv}} |N(u,v)|\, dA$, el vector normal $\boldsymbol{N}$ ***siempre*** **debe calcularse como** $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{r_u} \times \boldsymbol{r_v}$ **(ó $\boldsymbol{r_v} \times \boldsymbol{r_u}$)**. Es decir, a partir de una parametrización para la superficie S.
- Las distintas expresiones para N que hallarán en el recuadro de la pág 244 y en los ejemplos dados en las págs 244 y 245 provienen sólo de las diferentes maneras de parametrizar superficies (parametrización cilíndrica, esférica ó trivial). **Siempre se debe parametrizar $\boldsymbol{S}$ para calcular el Normal.**

La Ejercitación sobre cálculo de Área de Superficies está en el ejercicio 2 de la sección **7.2.1**.

Los conceptos asociados a la **Integral de Superficie de un Campo Escalar** se desarrollan en la sección **7.3**.

Sus Aplicaciones se listan en la pág 247 (*área* de una superficie, *masa* y *centro de masa* de una lámina).

La Fórmula de Cálculo para la Integral de Superficie de un Campo Escalar se deduce en la pág 248.

Observación: En la pág 249 hallarán un recuadro con "*otra*" expresión para la fórmula de cálculo de $\iint_S f\, dS$. Observar que **la fórmula del 2º recuadro *sólo* es válida en el caso de que $\boldsymbol{S}$ sea *gráfica de función***. Por el contrario, la fórmula del 1º recuadro (que es la que dimos en clase) es aplicable siempre, para *cualquier* superficie S suave y acotada (incluso cuando S sea gráfica de función). O sea: **siempre se debe parametrizar $\boldsymbol{S}$**.

En las págs 250 y 251 se muestran 2 ejemplos de cálculo.

Al pie de la pág 251 se comenta la Propiedad para Superficies suaves a trozos.

La sección **7.3.1** es de Ejercicios.

Como material adicional adjuntamos:

- 2 ejercicios resueltos de Cálculo de Área: 2a) y 2c) de la sección **7.2.1**.
- 2 ejercicios resueltos de Integral de Superficie: 1d) y 2) de la sección **7.3.1**.

→ Próxima Clase: sección **7.4**.