Tema 2 **Matemática B-Segundo Parcial** **29/06/2022**

Apellido y Nombre: Legajo:

Carrera: Comisión:

1		2	3			4		5
a	**b**		**a**	**bi**	**bii**	**a**	**b**	
1	1.25	1.5	0.75	0.5	0.5	1.5	1.5	1.5

1) a) ¿Es posible asignarle un valor a la siguiente integral? Justifique.

$$\int_0^{\pi/2} \frac{sen(x)dx}{cos^3(x)}$$

Respuesta: La integral es impropia pues la función $f(x) = \frac{sen(x)}{cos^3(x)}$ $es\ continua\ en$ $[0, \frac{\pi}{2})$ y $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\overbrace{senx}^{\to 1}}{\underbrace{(cos(x))^3}_{\to 0^+}} = \infty$. Primero resolvemos la integral definida $\int_0^b \frac{sen(x)dx}{cos^3(x)}$ con $0 < b < \frac{\pi}{2}$

$$\int_0^b \frac{sen(x)dx}{cos^3(x)} \underbrace{=}_{\substack{u=cosx\\ du=-senxdx}} \int_1^{cos(b)} \frac{-du}{u^3} = \frac{1}{2u^2}\Big|_1^{cos(b)} = \frac{1}{2cos^2(b)} - \frac{1}{2}$$

Tomando límite:

$$\lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \int_1^{cos(b)} \frac{-du}{u^3} = \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2u^2}\Big|_1^{cos(b)} \lim_{b\to\frac{\pi}{2}^-} \left(\frac{\overbrace{1}^{\to 1}}{\underbrace{2cos^2(b)}_{\to 0^+}} - \frac{1}{2} \right) = \infty$$

La integral $\int_0^{\pi/2} \frac{sen(x)dx}{cos^3(x)}$ es divergente. No es posible asignarle un valor.

b) Analice si la siguiente serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . \sqrt{n}}{n+1}$$

Respuesta: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . \sqrt{n}}{n+1}$ es condicionalmente convergente pues $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n . \sqrt{n}}{n+1}\right|$ diverge (ver demostración (1) abajo) y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . \sqrt{n}}{n+1}$ converge (ver demostración (2) abajo)

(1) Estudiemos por *criterio de comparación en el límite* la convergencia de

$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n . \sqrt{n}}{n+1}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}^{c_n}$ tomando como $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \to \lim\limits_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})} = 1 > 0$. Luego, como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ **<u>es divergente</u>** por ser serie-p con $p = \frac{1}{2} \leq 1$ y $\lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{b_n} = 1 > 0$, entonces, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ **<u>es divergente también</u>**.

(2) Estudiemos por *<u>criterio de Leibniz</u>* la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . \sqrt{n}}{n+1}$

(i) $b_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1} > 0 \ \forall n \geq 1$

(ii) $\{b_n\} = \left\{\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right\}$ es decreciente pues:

$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$ es decreciente en $[1,\infty)$ ya que $f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x+1) - \sqrt{x}}{(x+1)^2} = \frac{1-x}{2\sqrt{x}(x-1)^2} \leq 0$ en $[1,\infty)$

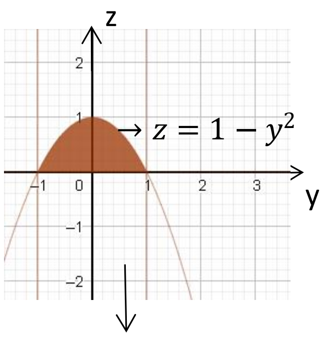
(iii) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\sqrt{n}}_{\to\infty}(1+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0})} = 0$

Luego, por criterio de Leibniz $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . \sqrt{n}}{n+1}$ converge

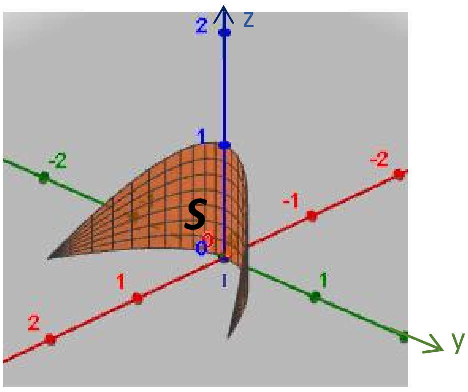
2) Calcule $\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x}} dS$, siendo S la porción del cilindro $x = y^2$ limitado por los planos $x + z = 1 \, ; z = 0$

<u>Respuesta</u>: Parametrizamos la superficie de manera trivial: $S: r(y,z) = < y^2, y, z >$. Pero nos falta dar límites para los parámetros y ; z de tal manera que la parametrización recorra cada punto de S. Para encontrar estos límites, debemos proyectarla en el plano yz. Noten que la región estará limitada por $z = 0$ y por la proyección de la curva intersección entre el cilindro $x = y^2$ y el plano $x = 1 - z \to \begin{cases} x = y^2 \\ x = 1 - z \end{cases} \to z = 1 - y^2$

Región de proyección



Superficie



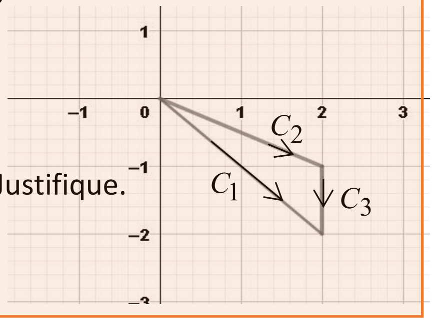
$R = \{(y,z) \in R^2, \ 0 \leq z \leq 1 - y^2; -1 \leq y \leq 1\}$

- $S: \vec{r}(y,z) = < y^2, y, z >con(y,z) \in R = \{(y,z) \in R^2, \ 0 \leq z \leq 1 - y^2; -1 \leq y \leq 1\}$
- $\vec{N} = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial z} = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2y & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm \langle 1, -2y, 0 \rangle \to \boxed{|\vec{N}| = \sqrt{1+4y^2}}$
- $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \to f(y^2, y, z) = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}}$

$$\iint_S \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1+4x}}}^{f(x,y,z)} \overbrace{d\vec{S}}^{|\vec{N}|dydz} = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2} \underbrace{f(y^2,y,z)}_{\frac{1}{\sqrt{1+4y^2}}} \underbrace{|\vec{N}|}_{\sqrt{1+4y^2}} \, dzdy = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-y^2} 1.dzdy =$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-y^2)dy = y - \frac{y^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 1-\frac{1}{3}-(-1+\frac{1}{3}) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

3) Dado $\vec{F}(x,y) = \langle sen(x^2)+1, sen(y^2)\rangle$ y los segmentos del dibujo con las orientaciones indicadas:



a) Calcule $\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r}$

bi) ¿Es $\vec{F}$ conservativo en R^2? **bii)** ¿Qué valor le asigna a $\int_{C_2 \cup C_3} \vec{F}.d\vec{r}$? Justifique.

Respuesta:

a) Una parametrización para la curva C_1: $*\,\vec{r}(t) = \langle 2t,-2t\rangle$ con $0 \le t \le 1 \rightarrow$

$*\,\vec{r}'(t) = \langle 2,-2\rangle$

$$\int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^1 \overbrace{\langle sen(4t^2)+1, sen(4t^2)\rangle}^{\vec{F}(\vec{r}(t))}.\overbrace{\langle 2,-2\rangle}^{\vec{r}'(t)}dt =$$

$$= \int_0^1 (2sen(4t^2)+2-2sen(4t^2))dt$$

$$= \int_0^1 2dt = 2t|_0^1 = \boxed{2}$$

bi) $\boxed{\vec{F}(x,y) = \langle sen(x^2)+1, sen(y^2)\rangle \text{ es conservativo}}$ pues tiene componentes con derivadas parciales continuas en R^2, R^2 es simplemente conexo y

$\text{rot}(\vec{F}) = \langle 0,0, \frac{\partial(sen(y^2))}{\partial x} - \frac{\partial(sen(x^2)+1)}{\partial y}\rangle = \langle 0,0,0\rangle$

bii) $\vec{F}(x,y) = \langle sen(x^2)+1, sen(y^2)\rangle$ tiene componentes continuas en R^2 y por b) sabemos que $\vec{F}$ es conservativo en R^2, por lo tanto la integral $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$ es independiente del camino en R^2. Como C_1 y $C_2 \cup C_3$ tienen mismo punto inicial y mismo punto final entonces

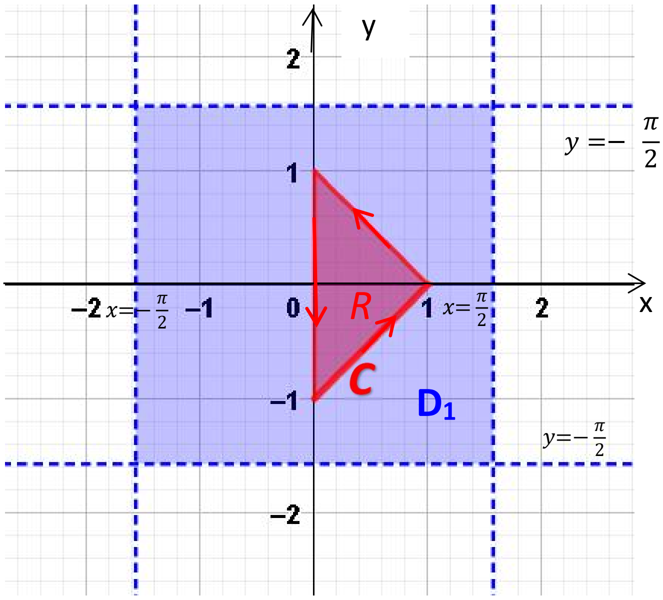
$$\rightarrow \int_{C_2 \cup C_3} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F}.d\vec{r} = \boxed{2}$$

4) Evalúe las siguientes integrales, aplicando si es posible algún teorema:

a) $\oint_C \left(\frac{1}{cos(x)} - 2y\right)dx + \frac{1}{cos^2(y)}dy$, siendo C la frontera del triángulo de vértices $(0,-1), (1,0)\ y\ (0,1)$ recorrida en sentido antihorario. Realice gráficos aclaratorios.

b) $\oint_C zdx - yxdy + zxdz$, siendo $C: \begin{cases} z = -y \\ x^2 + (y+1)^2 = 1 \end{cases}$ con orientación antihoraria mirada desde $y > 0$. Realice gráficos aclaratorios.

Respuesta: **a)**



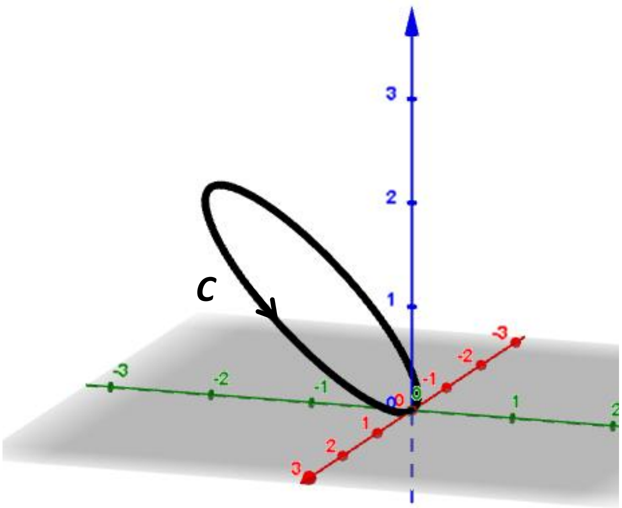
C es una curva cerrada, suave a trozos (pues es la frontera de la región triangular), simple, con orientación antihoraria y frontera de la región R del plano xy *(ver dibujo)*.

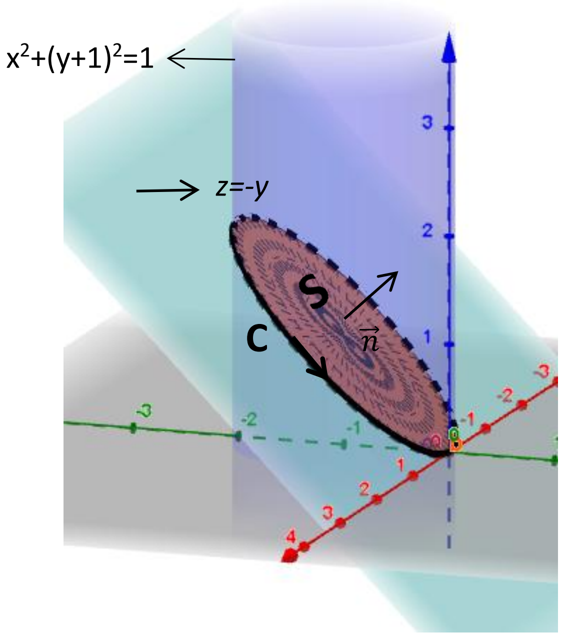
$\vec{F} = \langle \overbrace{\frac{1}{cos(x)} - 2y}^{M}, \overbrace{\frac{1}{cos^2(y)}}^{N} \rangle$ tiene componentes con derivadas parciales continuas en

$D = \{(x,y): x \neq \frac{\pi}{2} + k_2\pi \wedge y \neq \frac{\pi}{2} + k_1\pi \text{, con } k_1 \in Z,\ k_2 \in Z\}$, por lo tanto $\vec{F}$ tiene componentes con derivadas parciales continuas en $D_1 = \{(x,y): \frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \frac{-\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\} \subseteq D$ y $C \cup R \subseteq D_1$. Aplicamos el ***teorema de Green*** y se tiene que :

$$\int_C \vec{F}.d\vec{r} = \iint_R \overbrace{2}^{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}} dA_{xy} = 2\iint_R \overbrace{1\, dA_{xy}}^{Área(R)=\frac{bh}{2}=1} = 2.1 = 2$$

b)





C es una curva cerrada, suave, frontera de la superficie orientable $S: z = f(x,y) = -y$ con $(x,y) \in\ R = \{(x,y): x^2 + (y+1)^2 \leq 1\}$ (su representación vectorial, S: $\vec{r}(x,y) = \langle x, y, -y\rangle$ con $(x,y) \in R$).
La curva C está recorrida con orientación antihoraria vista desde $y > 0$.
Elegimos sobre S el normal $\vec{n}$ con segunda componente positiva, que es la orientación inducida sobre la superficie, por el sentido de recorrido de C según la regla de la mano derecha. El campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \langle z, -yx, zx\rangle$ tiene componentes con derivadas parciales continuas en R^3(por ser polinómicas) y $S \cup C \subseteq R^3$, por lo tanto,por el ***teorema de Stokes*** se tiene que:

$$\oint_C zdx - yxdy + zxdz = \iint_S rot(\vec{F}).\vec{n}dS =$$

$$= \iint_R rot\,\vec{F}(x,y,f(x,y)).\overbrace{\langle -f_x, -f_y, 1\rangle}^{\vec{N}} dA_{xy} \underset{abajo}{\overset{Ver(*)y(**)}{=}} \iint_R \overbrace{\langle 0, y+1, -y\rangle.\langle 0,1,1\rangle}^{y+1-y=1} dA_{xy} =$$

$$= \iint_R 1\, dA_{xy} = Área(R) \overset{\substack{R\ es \\ un\ círcu- \\ lo\ de\ radio\ 1}}{=} \pi.1^2 = \pi$$

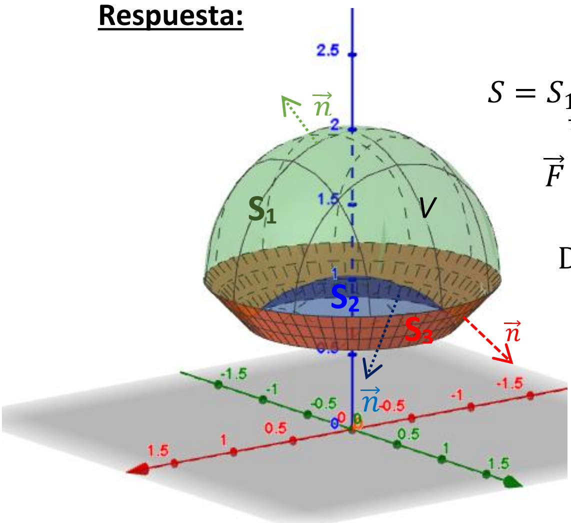
$$(*) rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & -yx & zx \end{vmatrix} = \langle 0, -(z-1), -y\rangle \rightarrow$$

$$\rightarrow rot\vec{F}(x,y,\overbrace{-y}^{f(x,y)}) \underbrace{=}_{z=-y} \langle 0, \overbrace{y+1}^{-(-y-1)}, -y\rangle$$

$$(**) \vec{N} = \pm \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = \pm \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \pm \langle 0,1,1\rangle$$

5) Dado $\vec{F}(x,y,z) = \langle x^2, -2xy, \sqrt{z}\rangle$ y S: frontera del sólido limitado por $z - 1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ con normal exterior.
Muestre que el flujo de $\vec{F}$ a través de S puede calcularse por medio de una integral triple.
Plantee el cálculo de dicha integral usando coordenadas esféricas.

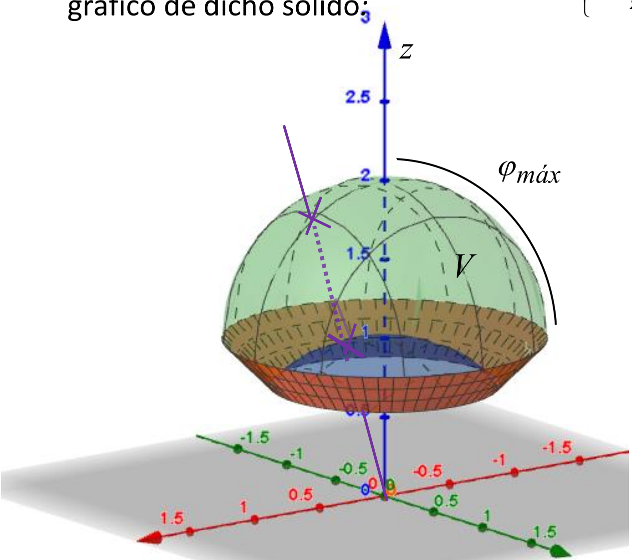
Respuesta:



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ es una superficie orientable, cerrada, con $\vec{n}$ exterior. S es frontera del sólido acotado V.
$\vec{F} = \langle x^2, -2xy, \sqrt{z}\rangle$ tiene componentes con derivadas parciales continuas en D $= \{(x,y,z)\ R^3: z > 0\}$, $S \cup V \subseteq D$. Podemos aplicar el teorema de Gauss y se tiene que:

$$\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\, dS = \iiint_V \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{z}}}^{div(\vec{F})} dV_{xyz} \underbrace{=}_{\substack{cambio\\ de\ var.\\ a\ coord\\ esféricas}} \iiint_{V^*} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\rho cos\varphi}}}_{\frac{1}{2\sqrt{z}}} \underbrace{\overbrace{\rho^2 sen\varphi}^{|J_T|}\ d\rho d\varphi d\theta}_{dV_{xyz}} \quad (*)$$

Para describir al sólido *V* en coordenadas esféricas $T:\begin{cases} x = \rho\, cos(\theta) sen(\varphi) \\ y = \rho\, sen(\theta) sen(\varphi) \\ z = \rho\, cos(\varphi) \end{cases}$, observemos el gráfico de dicho sólido:



Los puntos en el cono son los que tienen mayor coordenada φ dentro del sólido:

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 1 = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} = tg(\varphi) \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$. Por lo tanto, se tiene que $\boxed{0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}}$

La proyección del sólido en el plano *xy* es un círculo centrado en el origen, entonces $\boxed{0 \le \theta \le 2\pi}$

Notemos que si trazamos cualquier semirrecta que salga del origen y atraviese al sólido, sobre el segmento de la semirrecta violeta que queda contenido en el sólido, el punto que tiene menor coordenada ρ es el que está sobre la esfera $x^2+y^2+z^2=1\ (\rho=1)$ y el punto con mayor ρ está sobre la semiesfera superior de .
$x^2+y^2+(z-1)^2=1\ (x^2+y^2+z^2=2z \rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\varphi \rightarrow \rho = 2\cos\varphi)$. Por lo tanto se tiene que $\boxed{1 \le \rho \le 2\cos\varphi}$

$$\boxed{div(\vec{F}) = \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(-2xy)}{\partial y} + \frac{\partial(\sqrt{z})}{\partial z} = 2x - 2x + \frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}}$$

Luego, retomando las integrales en (*):

$$\boxed{\oiint_S \vec{F}.\vec{n}\, dS = \iiint_V \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{z}}}^{div(\vec{F})} dV_{xyz} \underbrace{=}_{\substack{cambio\\ de\ var.\\ a\ coord\\ esféricas}} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_1^{2cos\varphi} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\rho cos\varphi}}}_{\frac{1}{2\sqrt{z}}} \underbrace{\rho^2 sen\varphi\ d\rho d\varphi d\theta}_{dV_{xyz}}}$$