Ejercicio Series (TEMA 1)

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{\sqrt{n}+3^n}$$

Resolución

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{\sqrt{n}+3^n}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n = \frac{sen(n)}{\sqrt{n}+3^n}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{\sqrt{n}+3^n} = 0$$

porque $sen(n)$ oscila entre ± 1 , y $\sqrt{n}+3^n$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque el denominador de a_n es positivo pero el numerador toma tanto valores positivos como negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie de los valores absolutos de los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sen(n)}{\sqrt{n}+3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sen(n)|}{\sqrt{n}+3^n}$$

Esta nueva serie es de términos positivos, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el criterio de COMPARACIÓN DIRECTA.

Sabemos que $0 \leq |sen(n)| \leq 1, \forall n \in N$

Además $3^n \leq \sqrt{n}+3^n$, por lo que $\frac{1}{\sqrt{n}+3^n} \leq \frac{1}{3^n}$

Luego

$$0 \leq \frac{|sen(n)|}{\sqrt{n}+3^n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}+3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

Tomamos a $b_n = \frac{1}{3^n}$. Vemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$.

Como $|r| = \frac{1}{3} < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Entonces por el criterio de Comparación Directa, como se cumple la desigualdad $0 \leq |a_n| \leq b_n, \forall n \in N$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Ejercicio Series (TEMA 2)

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n+2^n}$$

Resolución

Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n+2^n}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n = \frac{sen(n)}{n+2^n}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n+2^n} = 0$$

porque $sen(n)$ oscila entre ± 1 , y $n+2^n$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque el denominador de a_n es positivo pero el numerador toma tanto valores positivos como negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie de los valores absolutos de los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sen(n)}{n+2^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sen(n)|}{n+2^n}$$

Esta nueva serie es de términos positivos, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el criterio de COMPARACIÓN DIRECTA.

Sabemos que $0 \leq |sen(n)| \leq 1, \forall n \in N$

Además $2^n \leq n+2^n$, por lo que $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$

Luego

$$0 \leq \frac{|sen(n)|}{n+2^n} \leq \frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

Tomamos a $b_n = \frac{1}{2^n}$. Vemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{2}$.

Como $|r| = \frac{1}{2} < 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Entonces por el criterio de Comparación Directa, como se cumple la desigualdad $0 \leq |a_n| \leq b_n, \forall n \in N$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{n+3^n}$$

Resolución

Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{n+3^n}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n = \frac{cos(n)}{n+3^n}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{cos(n)}{n+3^n} = 0$$

porque $cos(n)$ oscila entre ± 1 , y $n+3^n$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque el denominador de a_n es positivo pero el numerador toma tanto valores positivos como negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie de los valores absolutos de los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{cos(n)}{n+3^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|cos(n)|}{n+3^n}$$

Esta nueva serie es de términos positivos, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el criterio de COMPARACIÓN DIRECTA.

Sabemos que $0 \le |cos(n)| \le 1, \forall n \in N$

Además $3^n \le n+3^n$, por lo que $\frac{1}{n+3^n} \le \frac{1}{3^n}$

Luego

$$0 \le \frac{|cos(n)|}{n+3^n} \le \frac{1}{n+3^n} \le \frac{1}{3^n}$$

Tomamos a $b_n = \frac{1}{3^n}$. Vemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{3}$.

Como $|r| = \frac{1}{3} < 1$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Entonces por el criterio de Comparación Directa, como se cumple la desigualdad $0 \le |a_n| \le b_n, \forall n \in N$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{n+n^2}$$

Resolución

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{n+n^2}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n = \frac{cos(n)}{n+n^2}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{cos(n)}{n+n^2} = 0$$

porque $cos(n)$ oscila entre ± 1 , y $n + n^2$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque el denominador de a_n es positivo pero el numerador toma tanto valores positivos como negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie de los valores absolutos de los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{cos(n)}{n+n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|cos(n)|}{n+n^2}$$

Esta nueva serie es de términos positivos, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el criterio de COMPARACIÓN DIRECTA.

Sabemos que $0 \leq |cos(n)| \leq 1, \forall n \in N$

Además $n^2 \leq n + n^2$, por lo que $\frac{1}{n+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$

Luego

$$0 \leq \frac{|cos(n)|}{n+n^2} \leq \frac{1}{n+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Tomamos a $b_n = \frac{1}{n^2}$. Vemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie-p con $p = 2 > 1$. Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Entonces por el criterio de Comparación Directa, como se cumple la desigualdad $0 \leq |a_n| \leq b_n, \forall n \in N$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{\sqrt{n}+4^n}$$

Resolución

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n)}{\sqrt{n}+4^n}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n = \frac{cos(n)}{\sqrt{n}+4^n}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{cos(n)}{\sqrt{n}+4^n} = 0$$

porque $cos(n)$ oscila entre ± 1 , y $\sqrt{n}+4^n$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque el denominador de a_n es positivo pero el numerador toma tanto valores positivos como negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie de los valores absolutos de los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{cos(n)}{\sqrt{n}+4^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|cos(n)|}{\sqrt{n}+4^n}$$

Esta nueva serie es de términos positivos, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el criterio de COMPARACIÓN DIRECTA.

Sabemos que $0 \leq |cos(n)| \leq 1, \forall n \in N$

Además $4^n \leq \sqrt{n}+4^n$, por lo que $\frac{1}{\sqrt{n}+4^n} \leq \frac{1}{4^n}$

Luego

$$0 \leq \frac{|cos(n)|}{\sqrt{n}+4^n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}+4^n} \leq \frac{1}{4^n}$$

Tomamos a $b_n = \frac{1}{4^n}$. Vemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{1}{4}$.

Como $|r| = \frac{1}{4} < 1$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Entonces por el criterio de Comparación Directa, como se cumple la desigualdad $0 \leq |a_n| \leq b_n, \forall n \in N$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n^2 + \sqrt{n}}$$

Resolución

Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n^2+\sqrt{n}}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n = \frac{sen(n)}{n^2 + \sqrt{n}}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{sen(n)}{n^2 + \sqrt{n}} = 0$$

porque $sen(n)$ oscila entre ± 1 , y $n^2 + \sqrt{n}$ tiende a infinito cuando n tiende a infinito.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque el denominador de a_n es positivo pero el numerador toma tanto valores positivos como negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie de los valores absolutos de los términos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{sen(n)}{n^2 + \sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sen(n)|}{n^2 + \sqrt{n}}$$

Esta nueva serie es de términos positivos, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el criterio de COMPARACIÓN DIRECTA.

Sabemos que $0 \leq |sen(n)| \leq 1, \forall n \in N$

Además $n^2 \leq n^2 + \sqrt{n}$, por lo que $\frac{1}{n^2+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$

Luego

$$0 \leq \frac{|sen(n)|}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2 + \sqrt{n}} \leq \frac{1}{n^2}$$

Tomamos a $b_n = \frac{1}{n^2}$. Vemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ es una serie-p con $p = 2 > 1$. Luego la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Entonces por el criterio de Comparación Directa, como se cumple la desigualdad $0 \leq |a_n| \leq b_n, \forall n \in N$, la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.