MATEMÁTICA B - Recuperatorio 2° parcial resuelto 13-7-2022

1) a) ¿Puede asignársele un valor a la siguiente integral? $\displaystyle\int_2^\infty \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}\,dx$

Rta

La integral dada es impropia pues el intervalo de integración $[2,\infty)$ no está acotado. Como cociente de funciones continuas, la única discontinuidad del integrando ocurre en $x = 0 \notin [2,\infty)$. Siendo pues continuo dicho integrando en $[2,\infty)$, admite primitiva allí, la cual puede hallarse aplicando una sustitución:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}\,dx \overset{\substack{\text{sustit:}\\ u=\frac{\pi}{x}\\ du=-\frac{\pi}{x^2}dx}}{=} -\frac{1}{\pi}\int \operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{\pi}\cos u + C = \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) + C$$

Sea $b \in [2,\infty)$ genérico. Calculemos, aplicando el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, la integral definida en el intervalo acotado:

$$\int_2^b \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\Big|_2^b = \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{b}\right) - \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{b}\right)$$

Analicemos el límite:

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty}\frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{b}\right) = \frac{1}{\pi}$$

Como este límite existe, concluimos que la integral impropia es convergente y puede asignársele el valor:

$$\int_2^\infty \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right)}{x^2}\,dx = \frac{1}{\pi}$$

b) Analice si $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$ diverge o si converge absoluta o condicionalmente.

Rta

El término general de esta serie es: $a_n = (-1)^n\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$, $n \geq 2$.

Su módulo está dado por: $|a_n| = \frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n} = \frac{2\sqrt{n}+1}{n}$

El análisis de la convergencia absoluta requiere estudiar la serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$$

Observar que para n grande:

$$|a_n| = \frac{2\sqrt{n}+1}{n} = \frac{\sqrt{n}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n} = \frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} \approx \frac{2}{\sqrt{n}}$$

Esto sugiere aplicar el criterio de comparación en el límite con la serie auxiliar de término general $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, es decir: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Es necesario calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$$

Como este límite existe y no es cero, el criterio de comparación asegura que las series $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$ y $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes. Pero $\sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente por diferir en un solo término de la p-serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, la cual diverge. Luego, la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$$

es divergente, de modo que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)$ no es absolutamente convergente. Queda por decidir si diverge o si converge condicionalmente. Observemos que se trata de una serie alternada pues:

$$a_n = \overbrace{(-1)^n}^{\text{alterna signo}} \overbrace{\left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right)}^{>0\,,\,\forall n\geq 2}$$

El criterio de Leibniz resulta aplicable pues:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = 0$
- $\{|a_n|\}_{n\geq 2}$ es sucesión decreciente. En efecto, basta observar que $|a_n|$ es suma de dos términos claramente decrecientes. También podemos justificarlo con la función $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x}$, continua en el intervalo $[2,\infty)$, cuya derivada está dada por

  $$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x}} - (2\sqrt{x}+1)}{x^2} = -\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}$$

  Es claro que $f'(x) < 0\,,\ \forall x > 2$. Por lo tanto $f(x)$ decrece en $[2,\infty)$. En particular $|a_n| = f(n)$ también decrece cuando $n \geq 2$.

Luego, por el criterio de Leibniz la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ es convergente.

En conclusión

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) \quad \text{es condicionalmente convergente}$$

2) Plantee el cálculo de $\displaystyle\int_C \frac{x}{\sqrt{4y^2+2}}\,ds$ siendo $C : \begin{cases} y = x \\ z = 1 - x^2 \end{cases}$ porción en el primer octante.

Rta

Se trata de la integral de línea de campo escalar $f(x,y,z) = \dfrac{x}{\sqrt{4y^2+2}}$ a lo largo de la curva C. Observar que f es continua en $\mathbb{R}^3$ (cociente de continuas), en particular sobre C, así que la integral existe.

Una posible parametrización de la curva es $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle \overbrace{t}^{X(t)}, \overbrace{t}^{Y(t)}, \overbrace{1-t^2}^{Z(t)} \rangle\,,\ t \in [0,1]$.

Entonces:

$$\vec{r}'(t) = \langle X'(t), Y'(t), Z'(t)\rangle = \langle 1, 1, -2t\rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2t)^2} = \sqrt{2+4t^2}$$

Por lo tanto

$$\int_C \frac{x}{\sqrt{4y^2+2}}ds = \int_0^1 \frac{X(t)}{\sqrt{4\left(Y(t)\right)^2+2}}|\vec{r}'(t)|dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{t}{\cancel{\sqrt{4t^2+2}}}\cancel{\sqrt{2+4t^2}}dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}t^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

3) Muestre que $\displaystyle\int_C (y+z)\,dx + (x-2z)\,dy + (x-2y)\,dz$ es independiente del camino en $D=\mathbb{R}^3$ y halle su valor a lo largo de $C:\ \vec{r} = \langle \cos(2\pi t), \operatorname{sen}(2\pi t), t\rangle$, $t \in [0,1]$.

Rta

La integral de línea del enunciado corresponde al campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \langle y+z, x-2z, x-2y\rangle$$

Observar que $\vec{F} \in C^1(D)$ con $D=\mathbb{R}^3$, puesto que las componentes de $\vec{F}$ tienen derivadas parciales polinómicas (constantes). Dado que D es un dominio abierto simplemente conexo, bastará mostrar que el rotor del campo es el vector nulo en D:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y+z & x-2z & x-2y \end{vmatrix} = (-2-(-2))\vec{i} - (1-1)\vec{j} + (1-1)\vec{k} = \langle 0,0,0\rangle = \vec{0}$$

Luego, en virtud del teorema de equivalencias en independencia del camino, la integral de línea de $\vec{F}$ es independiente del camino en D y $\vec{F}$ es conservativo en D. Además, es sencillo obtener la familia de funciones potenciales $f(x,y,z)$ asociadas a $\vec{F}$ en D, planteando $\vec{\nabla}f = \vec{F}$, es decir:

$$\begin{cases} f'_x = y+z & (1) \\ f'_y = x-2z & (2) \\ f'_z = x-2y & (3) \end{cases}$$

De (1):

$$f(x,y,z) = \int (y+z)\,dx = xy + xz + g(y,z)$$

Derivando respecto de y:

$$f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(xy+xz+g(y,z)\right) = x + g'_y(y,z)$$

Comparando con (2):

$$x + g'_y(y,z) = x - 2z$$

Entonces:

$$g'_y(y,z) = -2z \ \text{ así que } \ g(y,z) = -2yz + h(z)$$

Luego:

$$f(x,y,z) = xy + xz - 2yz + h(z)$$

Derivando respecto de z:

$$f'_z = \frac{\partial}{\partial z}\left(xy+xz-2yz+h(z)\right) = x - 2y + h'(z)$$

Comparando con (3):

$$x - 2y + h'(z) = x - 2y \ \text{ de manera que } \ h'(z) = 0 \ \text{ es decir } \ h(z) = C\,(\text{cte})$$

Por lo tanto la familia de funciones potenciales de $\vec{F}$ en D es

$$f(x,y,z) = xy + xz - 2yz + C$$

Los extremos inicial y final de C son respectivamente $A = \vec{r}(0) = \langle 1, 0, 0\rangle$ y $B = \vec{r}(1) = \langle 1, 0, 1\rangle$. Luego, por el teorema fundamental de las integrales de línea:

$$\int_C (y+z)\,dx + (x-2z)\,dy + (x-2y)\,dz = \int_A^B \vec{\nabla} f \cdot d\vec{r} =$$
$$= f(B) - f(A) = f(1,0,1) - f(1,0,0) = (0+1-0) - (0+0+0) = 1$$

4) Obtenga el valor de las siguientes integrales. De ser posible aplique algún teorema. Justifique.

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{y^2}\,dx + \frac{4x}{y^3}\,dy$, C la frontera antihoraria de la región del primer cuadrante limitada por: $xy = 1$, $x + y = 2$, $y = 2$.

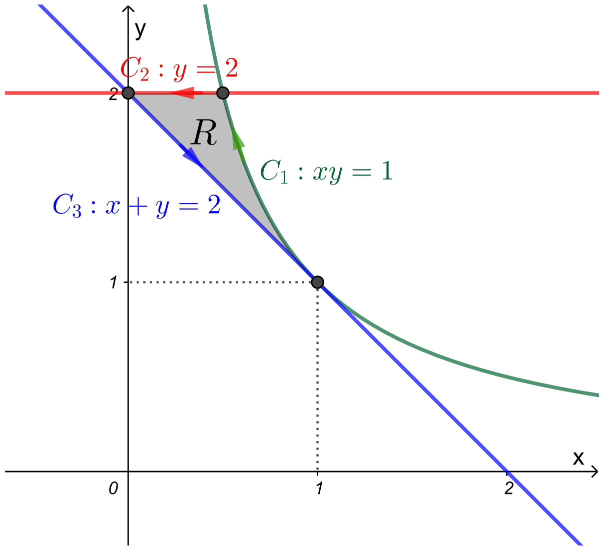

Figura 1: Ejercicio 4a Tema 1

<u>Rta</u>
La integral de línea del enunciado corresponde al campo vectorial

$$\vec{F}(x,y) = \left\langle \overbrace{\frac{1}{y^2}}^{M(x,y)} , \overbrace{\frac{4x}{y^3}}^{N(x,y)} \right\rangle$$

Se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{4}{y^3}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{2}{y^3} \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{12x}{y^4}$$

Como estas derivadas parciales son funciones racionales, es claro que son continuas en $D = \{(x,y) : \; y > 0\}$, es decir $\vec{F} \in C^1(D)$.
La región del enunciado es de tipo 2:

$$R = \left\{ (x,y) : 1 \leq y \leq 2 \;\wedge\; 2 - y \leq x \leq \frac{1}{y} \right\}$$

La frontera de R es la curva C del enunciado. Es cerrada (punto final e inicial coinciden), simple (no tiene autointersecciones) y suave a trozos $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Su orientación es antihoraria como lo especifica el enunciado.
Además: $R \subset D$ y $C \subset D$.
El teorema de Green es aplicable. Se verifica pues la igualdad:

$$\oint_C \frac{1}{y^2}\,dx + \frac{4x}{y^3}\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA_{xy} = \iint_R \frac{6}{y^3}\,dAxy$$

Para hallar el valor de la circulación del miembro izquierdo a partir de la igualdad anterior, evaluamos la integral doble del miembro derecho:

$$\iint_R \frac{6}{y^3}\,dA_{xy} = \int_1^2 \int_{2-y}^{1/y} \frac{6}{y^3}\,dxdy = \int_1^2 \frac{6x}{y^3}\Big|_{x=2-y}^{x=1/y} dy = \int_1^2 \left(\frac{6}{y^4} - \frac{6(2-y)}{y^3}\right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{6}{y^4} - \frac{12}{y^3} + \frac{6}{y^2}\right) dy = \left(-\frac{2}{y^3} + \frac{6}{y^2} - \frac{6}{y}\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - 3\right) - (-2 + 6 - 6) = \frac{1}{4}$$

Conclusión:

$$\oint_C \frac{1}{y^2}\,dx + \frac{4x}{y^3}\,dy = \frac{1}{4}$$

b) $\oint_C yz\,dx - 4xy\,dy + \frac{1}{z}\,dz$ siendo $C : \begin{cases} 2y + z = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$. Elija orientaciones e indíquelas en un gráfico.

Rta

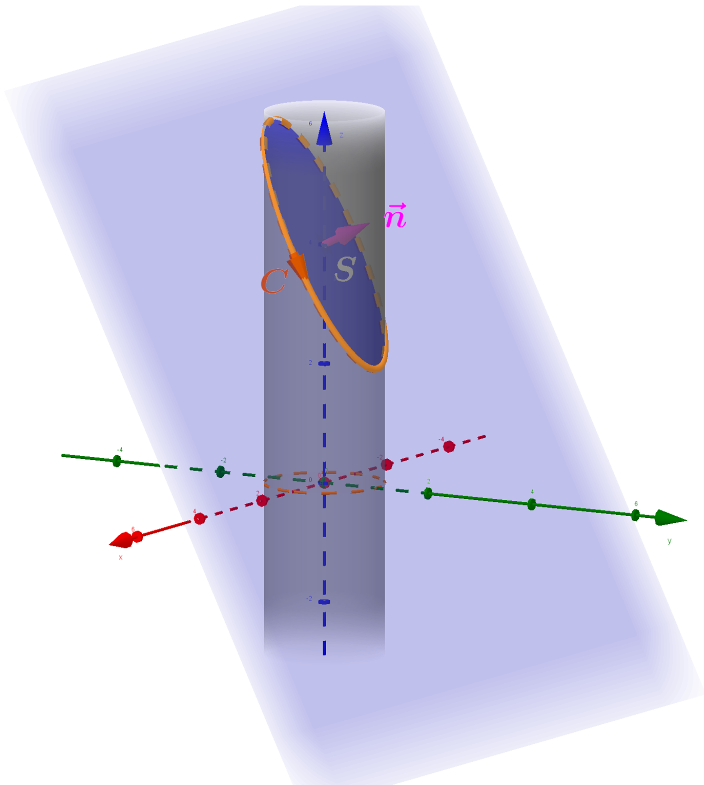

Figura 2: Ejercicio 4b Tema 1

- La integral de línea corresponde al campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left\langle yz, -4xy, \frac{1}{z}\right\rangle$. Sus componentes así como las derivadas parciales de las mismas son funciones racionales con denominadores no nulos en el conjunto abierto $D = \{(x,y,z) : z > 0\}$, es decir $\vec{F} \in C^1(D)$. Notar que D es la porción del espacio estrictamente por encima del plano xy.
- La curva C es una elipse de manera que es cerrada, simple y suave. Elijamos orientarla en sentido antihorario cuando se la mira desde $2y + z > 4$.
- Sea S la porción del plano $2y + z = 4$ con $x^2 + y^2 \leq 1$ (es decir limitada por el cilindro). Se trata de una superficie acotada, orientable (tiene dos caras) y su borde es la curva C. Para orientar S compatiblemente con la orientación de C, la regla de la mano derecha impone elegir el vector normal $\vec{n}$ con tercera componente positiva (ver figura 2).

- Tanto S como C yacen estrictamente por encima del plano xy así que $S \subset D$ y $C \subset D$.

El teorema de Stokes es aplicable. Vale entonces la igualdad:

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$$

Para hallar el valor de la circulación del miembro izquierdo aplicando el teorema, debemos evaluar la integral de flujo del miembro derecho.
El rotor del campo vectorial está dado por:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & -4xy & 1/z \end{vmatrix} = \langle 0, y, -4y - z\rangle$$

Parametrizamos S trivialmente proyectándola sobre el plano xy, es decir con parámetros $u = x\,, v = y$:

$$S : \vec{r} = \vec{r}(x, y) = \langle x, y, 4 - 2y\rangle \ , \ (x, y) \in R_{xy}$$

$$R_{xy} = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Llamando $f(x, y) = 4 - 2y$, el vector normal correspondiente a esta parametrización es:

$$\vec{N}_{xy} = \pm\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}\right) = \pm\langle -f'_x, -f'_y, 1\rangle = \pm\langle 0, 2, 1\rangle$$

Como debe tener tercera componente positiva, resulta:

$$\vec{N}_{xy} = \langle 0, 2, 1\rangle$$

Evaluamos el rotor sobre la superficie parametrizada:

$$\operatorname{rot}(\vec{F})\,(\vec{r}(x, y)) = \langle 0, y, -4y - (4 - 2y)\rangle = \langle 0, y, -2y - 4\rangle$$

Reducimos el flujo del rotor a una integral doble en la región paramétrica:

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{R_{xy}} \operatorname{rot}(\vec{F})\,(\vec{r}(x, y)) \cdot \vec{N}_{xy}\, dA_{xy} =$$

$$= \iint_{R_{xy}} \langle 0, y, -2y - 4\rangle \cdot \langle 0, 2, 1\rangle\, dA_{xy} = \iint_{R_{xy}} (2y - 2y - 4)\, dA_{xy} = \iint_{R_{xy}} (-4)\, dA_{xy} =$$

$$= -4 \iint_{R_{xy}} 1\, dA_{xy} = -4\, \text{área}(R_{xy}) = -4\pi$$

donde hemos calculado el área de R_{xy} teniendo en cuenta que es un círculo de radio 1.
Conclusión:

$$\oint_C yz\, dx - 4xy\, dy + \frac{1}{z}\, dz = -4\pi$$

5) Grafique el sólido $V = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \geq 1\,,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\right\}$. Muestre que el flujo de $\vec{F}(x, y, z) = \langle \frac{y}{\operatorname{sen} z}, x, z^2\rangle$ a través de la frontera de V con vector normal exterior, puede hallarse mediante una integral triple. **Plantee** el cálculo de dicha integral en coordenadas esféricas.
Rta

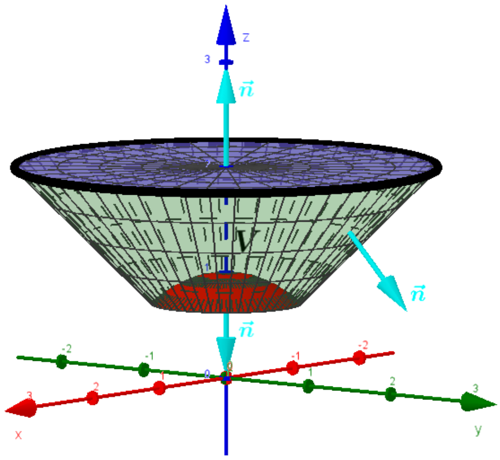

Figura 3: Ejercicio 5 Tema 1

- Las componentes del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left\langle \dfrac{y}{\operatorname{sen} z}, x, z^2 \right\rangle$ y sus derivadas parciales son funciones continuas en el conjunto abierto $D = \{(x,y,z) : 0 < z < \pi\}$, es decir $\vec{F} \in C^1(D)$. En efecto, las dos últimas componentes son polinómicas, al igual que sus derivadas parciales, en tanto la primera componente y sus derivadas parciales son cocientes de funciones continuas (en ellas el factor $\operatorname{sen} z$ en el denominador se anula cuando $z = k\pi$,$k \in \mathbb{Z}$, o sea sobre planos paralelos al plano xy, donde z es constante e igual a un múltiplo entero de π).
- El sólido V del enunciado es acotado y su frontera es una superficie cerrada $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, orientable, orientada con vector normal $\vec{n}$ exterior, como se muestra en la figura 3 (S_1 es la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ por encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, S_2 es la porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ por fuera de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ y S_3 es la porción del plano $z = 2$ por encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$).
- Tanto V como S yacen estrictamente entre los planos $z = 0$ y $z = \pi$ (sin tocarlos), así que $V \subset D$ y $S \subset D$.

El teorema de Gauss es aplicable. Vale entonces la igualdad:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

Para hallar el valor del flujo del miembro izquierdo aplicando el teorema, debemos evaluar la integral triple del miembro derecho.
La divergencia del campo vectorial está dada por:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\operatorname{sen} z}\right) + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial z^2}{\partial z} = 0 + 0 + 2z = 2z$$

En el sistema de coordenadas esféricas $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$ las superficies que limitan al sólido son:

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ es decir } \rho = 1$$

$$S_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ o sea } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 1 \text{ así que } \varphi = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$S_3 : z = 2 \text{ equivale a } \rho \cos\varphi = 2 \text{ de modo que } \rho = \frac{2}{\cos\varphi}$$

El sólido V queda descrito así:

$$V^* = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi \, , \, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \, , \, 1 \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\varphi} \right\}$$

Entonces, aplicando el cambio de variables en la integral triple, resulta:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{F}) \, dV_{xyz} = \iiint_V 2z \, dV_{xyz} = \iiint_{V^*} 2\rho \cos\varphi \, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi \, dV_{\rho\theta\varphi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^{\frac{2}{\cos\varphi}} 2\rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Conclusión:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}_{\text{ext}} \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_1^{\frac{2}{\cos\varphi}} 2\rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

MATEMÁTICA B - Recuperatorio 2° parcial resuelto 13-7-2022

1) a) ¿Puede asignársele un valor a la siguiente integral? $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\cos\left(\frac{\pi}{e^x}\right)dx$

Rta

La integral dada es impropia pues el intervalo de integración $[0,\infty)$ no está acotado.
El integrando es una función continua en $[0,\infty)$, siendo producto de funciones continuas (notar que la exponencial nunca se anula). Admite entonces primitiva allí, la cual puede hallarse aplicando una sustitución:

$$\int e^{-x}\cos\left(\frac{\pi}{e^x}\right)dx \overset{\substack{\text{sustit:}\\ u=\pi e^{-x}\\ du=-\pi e^{-x}dx}}{=} -\frac{1}{\pi}\int \cos u\,du = -\frac{1}{\pi}\operatorname{sen} u + C = -\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{e^x}\right)+C$$

Sea $b\in[0,\infty)$ genérico. Calculemos, aplicando el teorema fundamental del cálculo y la regla de Barrow, la integral definida en el intervalo acotado:

$$\int_0^b e^{-x}\cos\left(\frac{\pi}{e^x}\right)dx = -\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{e^x}\right)\Big|_0^b = -\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{e^b}\right)+\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\pi = -\frac{1}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{e^b}\right)$$

Analicemos el límite:

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\cos\left(\frac{\pi}{e^x}\right)dx = \lim_{b\to\infty}\frac{(-1)}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{e^b}\right)=0$$

Como este límite existe, concluimos que la integral impropia es convergente y puede asignársele el valor:

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos\left(\frac{\pi}{e^x}\right)dx = 0$$

b) Analice si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge o si converge absoluta o condicionalmente.

Rta

El término general de esta serie es: $a_n=(-1)^{n+1}\left(\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $n\geq 1$.

Su módulo está dado por: $|a_n|=\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\dfrac{2+\sqrt{n}}{n}$

El análisis de la convergencia absoluta requiere estudiar la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Observar que para n grande:

$$|a_n|=\frac{2+\sqrt{n}}{n}=\frac{\sqrt{n}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+1\right)}{n}=\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+1}{\sqrt{n}}\approx\frac{1}{\sqrt{n}}$$

Esto sugiere aplicar el criterio de comparación en el límite con la serie auxiliar de término general $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$, es decir: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$. Es necesario calcular el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\frac{2}{\sqrt{n}}+1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{n}}+1\right)=1$$

Como este límite existe y no es cero, el criterio de comparación asegura que las series $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes. Pero $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ es divergente por ser una p-serie con $p = \frac{1}{2} < 1$. Luego, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

es divergente, de modo que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ no es absolutamente convergente. Queda por decidir si diverge o si converge condicionalmente. Observemos que se trata de una serie alternada pues:

$$a_n = \overbrace{(-1)^{n+1}}^{\text{alterna signo}} \overbrace{\left(\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}^{>0\,,\,\forall n \geq 1}$$

EL criterio de Leibniz resulta aplicable pues:

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$
- $\{|a_n|\}_{n\geq 1}$ es sucesión decreciente. En efecto, basta observar que $|a_n|$ es suma de dos términos claramente decrecientes. También podemos justificarlo con la función $f(x) = \dfrac{2+\sqrt{x}}{x}$, continua en el intervalo $[1,\infty)$, cuya derivada está dada por

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} - (2+\sqrt{x})}{x^2} = -\frac{4+\sqrt{x}}{2x^2}$$

  Es claro que $f'(x) < 0\,,\, \forall x > 1$, lo que muestra que $f(x)$ decrece en $[1,\infty)$. En particular $|a_n| = f(n)$ también decrece cuando $n \geq 1$.

Luego, por el criterio de Leibniz la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente.

En conclusión

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{es condicionalmente convergente}$$

2) Plantee el cálculo de $\displaystyle\int_C \frac{2x}{\sqrt{1+16y}}\,ds$ siendo $C : \begin{cases} y = 2x^2 \\ y + z = 2 \end{cases}$ porción en el primer octante.

Rta

Se trata de la integral de línea de campo escalar $f(x,y,z) = \dfrac{2x}{\sqrt{1+16y}}$ a lo largo de la curva C. Observar que f es continua en $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y > -\frac{1}{16}\right\}$ (cociente de continuas), en particular sobre C, así que la integral existe.

Una posible parametrización de la curva es $C : \vec{r} = \vec{r}(t) = \langle \overbrace{t}^{X(t)}, \overbrace{2t^2}^{Y(t)}, \overbrace{2-2t^2}^{Z(t)} \rangle\,,\ t \in [0,1]$. Entonces:

$$\vec{r}'(t) = \langle X'(t), Y'(t), Z'(t) \rangle = \langle 1, 4t, -4t \rangle$$

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{(X'(t))^2 + (Y'(t))^2 + (Z'(t))^2} = \sqrt{1^2 + (4t)^2 + (-4t)^2} = \sqrt{1+32t^2}$$

Por lo tanto

$$\int_C \frac{2x}{\sqrt{2+16y}}\,ds = \int_0^1 \frac{2X(t)}{\sqrt{1+16Y(t)}} |\vec{r}'(t)|\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{2t}{\cancel{\sqrt{1+32t^2}}} \cancel{\sqrt{1+32t^2}}\,dt = \int_0^1 2t\,dt = t^2\Big|_0^1 = 1$$

3) Muestre que $\displaystyle\int_C (z-2y)\,dx + (z-2x)\,dy + (x+y)\,dz$ es independiente del camino en $D=\mathbb{R}^3$ y halle su valor a lo largo de $C:\ \vec{r}=\langle \cos(\pi t), \mathrm{sen}(\pi t), t\rangle$, $t\in[0,2]$.

Rta

La integral de línea del enunciado corresponde al campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z)=\langle z-2y, z-2x, x+y\rangle$$

Observar que $\vec{F}\in C^1(D)$ con $D=\mathbb{R}^3$, puesto que las componentes de $\vec{F}$ tienen derivadas parciales polinómicas (constantes). Dado que D es un dominio abierto simplemente conexo, bastará mostrar que el rotor del campo es el vector nulo en D:

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z-2y & z-2x & x+y\end{vmatrix}=(1-1)\vec{i}-(1-1)\vec{j}+((-2)-(-2))\vec{k}=\langle 0,0,0\rangle=\vec{0}$$

Luego, en virtud del teorema de equivalencias en independencia del camino, la integral de línea de $\vec{F}$ es independiente del camino en D y $\vec{F}$ es conservativo en D. Además, es sencillo obtener la familia de funciones potenciales $f(x,y,z)$ asociadas a $\vec{F}$ en D, planteando $\vec{\nabla}f=\vec{F}$, es decir:

$$\begin{cases} f'_x = z-2y & (1)\\ f'_y = z-2x & (2)\\ f'_z = x+y & (3)\end{cases}$$

De (1):

$$f(x,y,z)=\int (z-2y)\,dx = zx-2yx+g(y,z)$$

Derivando respecto de y:

$$f'_y=\frac{\partial}{\partial y}\left(zx-2yx+g(y,z)\right)=-2x+g'_y(y,z)$$

Comparando con (2):

$$-2x+g'_y(y,z)=z-2x$$

Entonces:

$$g'_y(y,z)=z \text{ así que } g(y,z)=yz+h(z)$$

Luego:

$$f(x,y,z)=zx-2yx+yz+h(z)$$

Derivando respecto de z:

$$f'_z=\frac{\partial}{\partial z}\left(zx-2yx+yz+h(z)\right)=x+y+h'(z)$$

Comparando con (3):

$$x+y+h'(z)=x+y \text{ de manera que } h'(z)=0 \text{ es decir } h(z)=C\,(\text{cte})$$

Por lo tanto la familia de funciones potenciales de $\vec{F}$ en D es

$$f(x,y,z)=zx-2yx+yz+C$$

Los extremos inicial y final de C son respectivamente $A=\vec{r}(0)=\langle 1,0,0\rangle$ y $B=\vec{r}(2)=\langle 1,0,2\rangle$. Luego, por el teorema fundamental de las integrales de línea:

$$\int_C (z-2y)\,dx+(z-2x)\,dy+(x+y)\,dz=\int_A^B \vec{\nabla}f\cdot d\vec{r}=$$

$$=f(B)-f(A)=f(1,0,2)-f(1,0,0)=(2-0+0)-(0+0+0)=2$$

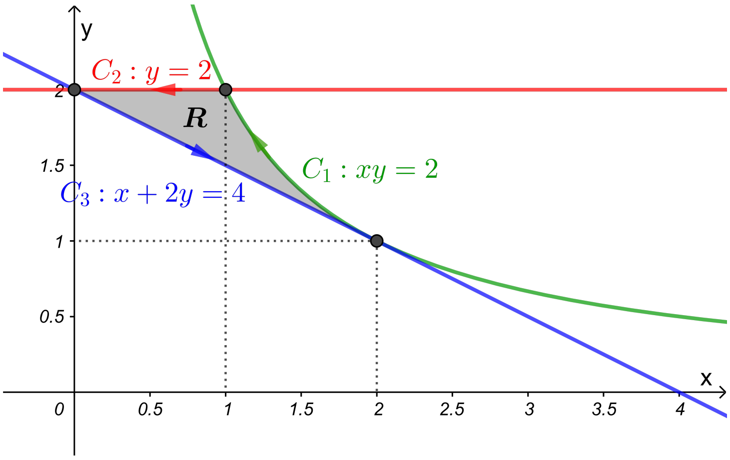

Figura 4: Ejercicio 4a Tema 2

4) Obtenga el valor de las siguientes integrales. De ser posible aplique algún teorema. Justifique.

a) $\oint_C \frac{1}{y}\,dx + \frac{x}{y^2}\,dy$, C la frontera antihoraria de la región del primer cuadrante limitada por: $xy = 2$, $x + 2y = 4$, $y = 2$.

Rta

La integral de línea del enunciado corresponde al campo vectorial

$$\vec{F}(x, y) = \left\langle \overbrace{\frac{1}{y}}^{M(x,y)} , \overbrace{\frac{x}{y^2}}^{N(x,y)} \right\rangle$$

Se tiene:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = 0 \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\frac{1}{y^2} \qquad\qquad \frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{2x}{y^3}$$

Como estas derivadas parciales son funciones racionales, es claro que son continuas en $D = \{(x, y) : \ y > 0\}$, es decir $\vec{F} \in C^1(D)$.

La región del enunciado es de tipo 2:

$$R = \left\{(x, y) : 1 \leq y \leq 2 \ \wedge \ 4 - 2y \leq x \leq \frac{2}{y}\right\}$$

La frontera de R es la curva C del enunciado. Es cerrada (punto final e inicial coinciden), simple (no tiene autointersecciones) y suave a trozos $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$. Su orientación es antihoraria como lo especifica el enunciado.

Además: $R \subset D$ y $C \subset D$.

El teorema de Green es aplicable. Se verifica pues la igualdad:

$$\oint_C \frac{1}{y}\,dx + \frac{x}{y^2}\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA_{xy} = \iint_R \frac{2}{y^3}\,dAxy$$

Para hallar el valor de la circulación del miembro izquierdo a partir de la igualdad anterior, evaluamos la integral doble del miembro derecho:

$$\iint_R \frac{2}{y^2}\,dA_{xy} = \int_1^2 \int_{4-2y}^{2/y} \frac{2}{y^2}\,dxdy = \int_1^2 \left.\frac{2x}{y^2}\right|_{x=4-2y}^{x=2/y} dy = \int_1^2 \left(\frac{4}{y^3} - \frac{2(4-2y)}{y^2}\right) dy =$$

$$= \int_1^2 \left(\frac{4}{y^3} - \frac{8}{y^2} + \frac{4}{y}\right) dy = \left(-\frac{2}{y^2} + \frac{8}{y} + 4\ln y\right)\Big|_1^2 =$$

$$= \left(-\frac{1}{2} + 4 + 4\ln 2\right) - (-2+8+0) = 4\ln 2 - \frac{5}{2}$$

Conclusión:

$$\oint_C \frac{1}{y}\,dx + \frac{x}{y^2}\,dy = 4\ln 2 - \frac{5}{2}$$

b) $\displaystyle\oint_C 2yz\,dx + xz\,dy + \frac{1}{z}\,dz$ siendo $C : \begin{cases} x+z=2 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$. Elija orientaciones e indíquelas en un gráfico.

Rta

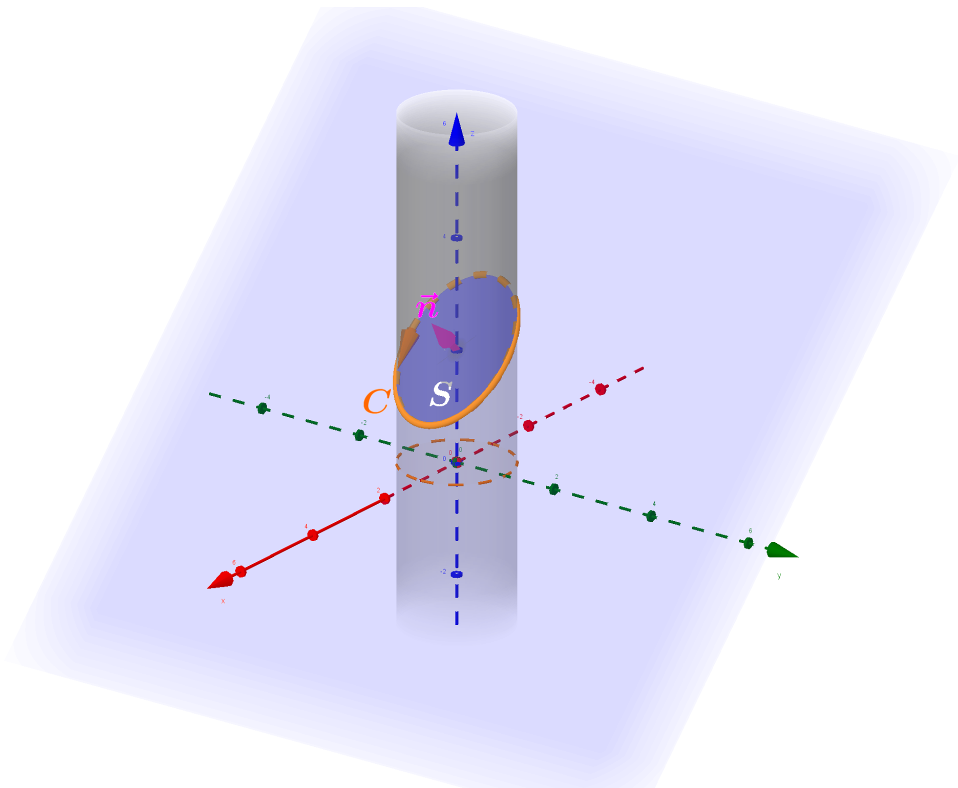

Figura 5: Ejercicio 4b Tema 2

- La integral de línea corresponde al campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left\langle 2yz, xz, \frac{1}{z}\right\rangle$. Sus componentes así como las derivadas parciales de las mismas son funciones racionales con denominadores no nulos en el conjunto abierto $D = \{(x,y,z) : z > 0\}$, es decir $\vec{F} \in C^1(D)$. Notar que D es la porción del espacio estrictamente por encima del plano xy.
- La curva C es una elipse de manera que es cerrada, simple y suave. Elijamos orientarla en sentido antihorario cuando se la mira desde $y + z > 4$.
- Sea S la porción del plano $2y + z = 4$ con $x^2 + y^2 \leq 1$ (es decir limitada por el cilindro). Se trata de una superficie acotada, orientable (tiene dos caras) y su borde es la curva C. Para orientar S compatiblemente con la orientación de C, la regla de la mano derecha impone elegir el vector normal $\vec{n}$ con tercera componente positiva (ver figura 5).
- Tanto S como C yacen estrictamente por encima del plano xy así que $S \subset D$ y $C \subset D$.

El teorema de Stokes es aplicable. Vale entonces la igualdad:

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_S \operatorname{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$$

Para hallar el valor de la circulación del miembro izquierdo aplicando el teorema, debemos evaluar la integral de flujo del miembro derecho.
El rotor del campo vectorial está dado por:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 2yz & xz & 1/z \end{vmatrix} = \langle -x, 2y, -z \rangle$$

Parametrizamos S trivialmente proyectándola sobre el plano xy, es decir con parámetros $u = x\,, v = y$:

$$S : \vec{r} = \vec{r}(x,y) = \langle x, y, 2-x \rangle \ , \ (x,y) \in R_{xy}$$

$$R_{xy} = \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \leq 1 \right\}$$

Llamando $f(x,y) = 2-y$, el vector normal correspondiente a esta parametrización es:

$$\vec{N}_{xy} = \pm \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} \right) = \pm \langle -f'_x, -f'_y, 1 \rangle = \pm \langle 1, 0, 1 \rangle$$

Como debe tener tercera componente positiva, resulta:

$$\vec{N}_{xy} = \langle 1, 0, 1 \rangle$$

Evaluamos el rotor sobre la superficie parametrizada:

$$\operatorname{rot}(\vec{F})\left(\vec{r}(x,y)\right) = \langle -x, 2y, -(2-x) \rangle = \langle -x, 2y, x-2 \rangle$$

Reducimos el flujo del rotor a una integral doble en la región paramétrica:

$$\iint_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{R_{xy}} \operatorname{rot}(\vec{F})\left(\vec{r}(x,y)\right) \cdot \vec{N}_{xy}\, dA_{xy} =$$

$$= \iint_{R_{xy}} \langle -x, 2y, x-2 \rangle \cdot \langle 1, 0, 1 \rangle\, dA_{xy} = \iint_{R_{xy}} (-x + x - 2)\, dA_{xy} = \iint_{R_{xy}} (-2)\, dA_{xy} =$$

$$= -2 \iint_{R_{xy}} 1\, dA_{xy} = -2\, \text{área}(R_{xy}) = -2\pi$$

donde hemos calculado el área de R_{xy} teniendo en cuenta que es un círculo de radio 1.
Conclusión:

$$\oint_C 2yz\, dx + xz\, dy + \frac{1}{z}\, dz = -2\pi$$

5) Grafique el sólido $V = \left\{ (x,y,z) : z \geq \sqrt{x^2+y^2}\,,\, 1 \leq z \leq 2 \right\}$. Muestre que el flujo de $\vec{F}(x,y,z) = \langle y, \dfrac{x}{\operatorname{sen} z}, z^2 \rangle$ a través de la frontera de V con vector normal exterior, puede hallarse mediante una integral triple. **Plantee** el cálculo de dicha integral en coordenadas esféricas.
Rta

- Las componentes del campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \left\langle y, \dfrac{x}{\operatorname{sen} z}, z^2 \right\rangle$ y sus derivadas parciales son funciones continuas en el conjunto abierto $D = \{(x,y,z) : 0 < z < \pi\}$, es decir $\vec{F} \in C^1(D)$. En efecto, la primera y la tercera componentes son polinómicas, al igual que sus derivadas parciales, en tanto la segunda componente y sus derivadas parciales son cocientes de funciones continuas (en ellas el factor $\operatorname{sen} z$ en el denominador se anula cuando $z = k\pi$,$k \in \mathbb{Z}$, o sea sobre planos paralelos al plaano xy, donde z es constante e igual a un múltiplo entero de π).

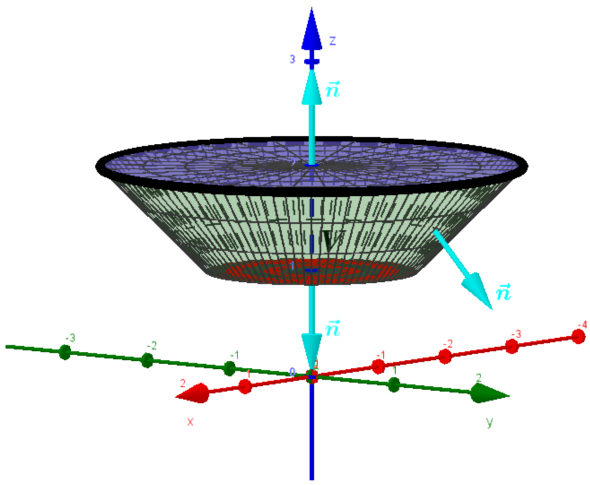

Figura 6: Ejercicio 5 Tema 2

- El sólido V del enunciado es acotado y su frontera es una superficie cerrada $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$, orientable, orientada con vector normal $\vec{n}$ exterior, como se muestra en la figura 6 (S_1 es la porción del plano $z = 1$ por encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, S_2 es la porción del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ entre los planos $z = 1$ y $z = 2$ y S_3 es la porción del plano $z = 2$ por encima del cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$).
- Tanto V como S yacen estrictamente entre los planos $z = 0$ y $z = \pi$ (sin tocarlos), así que $V \subset D$ y $S \subset D$.

El teorema de Gausses aplicable. Vale entonces la igualdad:

$$\oiint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

Para hallar el valor del flujo del miembro izquierdo aplicando el teorema, debemos evaluar la integral triple del miembro derecho.
La divergencia del campo vectorial está dado por:

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{\operatorname{sen} z}\right) + \frac{\partial z^2}{\partial z} = 0 + 0 + 2z = 2z$$

En el sistema de coordenadas esféricas $\begin{cases} x = \rho \cos\theta \operatorname{sen}\varphi \\ y = \rho \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$ las superficies que limitan al sólido son:

$$S_1 : z = 1 \text{ es decir } \rho\cos\varphi = 1 \text{ esto es } \rho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$S_2 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ o sea } \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = 1 \text{ así que } \varphi = \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$S_3 : z = 2 \text{ equivale a } \rho\cos\varphi = 2 \text{ de modo que } \rho = \frac{2}{\cos\varphi}$$

El sólido V queda descrito así:

$$V^* = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq \theta \leq 2\pi\, ,\, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\, ,\, \frac{1}{\cos\varphi} \leq \rho \leq \frac{2}{\cos\varphi} \right\}$$

Entonces, aplicando el cambio de variables en la integral triple, resulta:

$$\iiint_V \operatorname{div}(\vec{F})\, dV_{xyz} = \iiint_V 2z\, dV_{xyz} = \iiint_{V^*} 2\rho\cos\varphi\, \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, dV_{\rho\theta\varphi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi}} 2\rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Conclusión:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}_{\text{ext}}\, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi}} 2\rho^3 \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$