

Teorema de Gauss

- Teorema de Gauss y Aplicaciones. Sección 7.6

Teorema de Gauss

Sea V un sólido del espacio limitado por una frontera S , donde S es orientable (o a trozos) y está orientada por un vector normal, n , exterior al sólido V^* .

Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que S y $V \subset D$.

Entonces:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$

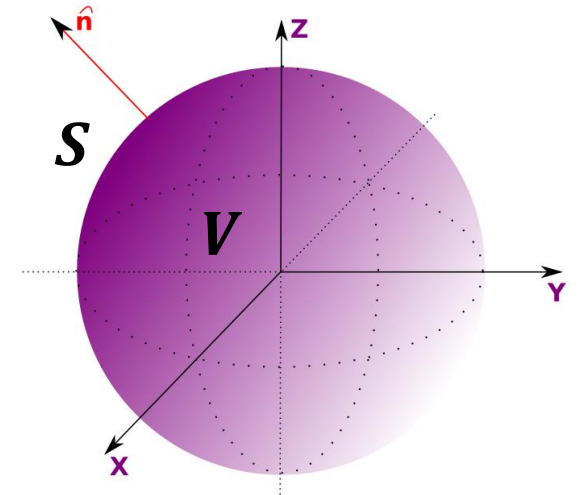
* Observar que n debe ser exterior al sólido V .

Esto ofrece diferentes posibilidades para n , dependiendo de cómo sea V :

- Forma de la tesis del Teorema de Gauss cuando V es un sólido sin agujeros:

Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV, \quad \begin{array}{l} S \text{ es frontera exterior a } V. \\ \text{Aquí } n \text{ exterior al sólido } V \text{ significa} \\ \text{que } n \text{ es exterior a la superficie } S. \end{array}$$



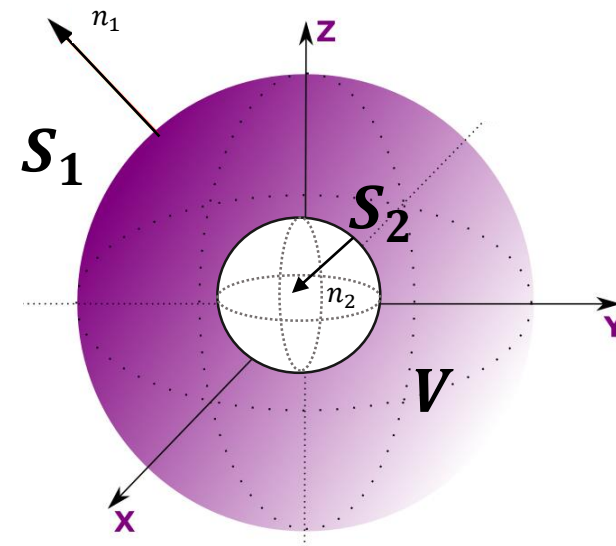
- Forma de la tesis del Teorema de Gauss cuando V es un sólido con un agujero:

Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV, \quad \left[\begin{array}{l} S: S_1 \cup S_2. \\ (S_1 \text{ es frontera exterior a } V \\ \text{y } S_2 \text{ es frontera interior a } V). \\ n_1 \text{ normal exterior a } S_1. \\ n_2 \text{ normal interior a } S_2. \end{array} \right.$$

Como $S: S_1 \cup S_2$:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \oiint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS + \oiint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS$$



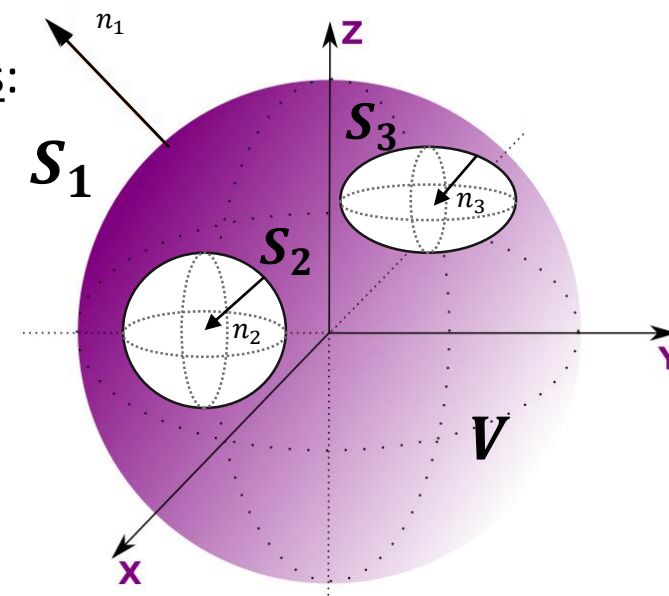
- Forma de la tesis del Teorema de Gauss cuando V es un sólido con dos agujeros:

Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV, \quad \left[\begin{array}{l} S: S_1 \cup S_2 \cup S_3. \\ (S_1 \text{ es frontera exterior a } V, S_2 \\ \text{y } S_3 \text{ son fronteras interiores a } V). \\ n_1 \text{ normal exterior a } S_1. \\ n_2 \text{ y } n_3 \text{ normales interiores a } S_2 \text{ y } S_3. \end{array} \right.$$

Como $S: S_1 \cup S_2 \cup S_3$:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \oiint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS + \oiint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS + \oiint_{S_3} F \cdot n_3 \, dS$$



... se puede formular para sólidos más generales..

Aplicaciones del Teorema de Gauss:

1. Evaluación de una Integral de Flujo mediante el cálculo de una Integral Triple.
2. Evaluación de una Integral Triple mediante el cálculo de una Integral de Flujo .

1. Evaluación de una Integral de Flujo mediante el cálculo de una Integral Triple:

Ejemplo: Dado el campo $F(x, y, z) = \langle 3x + z, 2y + \text{sen}(x), 6z + e^{xy} \rangle$, evalúe el Flujo de F hacia el exterior de la esfera S de ecuación: $x^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

Daremos el valor del Flujo $\oiint_S F \cdot n \, dS$ haciendo uso del Teorema de Gauss.

i) Enunciamos el Teorema a usar:

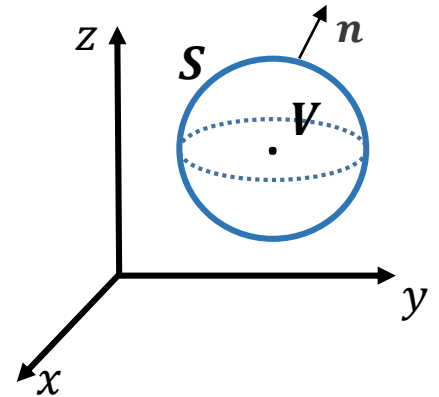
Teorema de Gauss

Sea V un sólido del espacio limitado por una frontera S , donde S es orientable (o a trozos) y está orientada por un vector normal, n , exterior al sólido V .

Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que S y $V \subset D$.

Entonces:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \text{div} F \, dV$$



Hipótesis

Tesis

ii) Identificamos los “elementos” usados en el Teorema:

- $S: x^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

Sea S orientada con normal n , que apunta hacia el exterior de S .

- Sea V : sólido esférico encerrado por S .
- $F(x, y, z) = \langle 3x + z, 2y + \text{sen}(x), 6z + e^{xy} \rangle$.
- Sea $D = \mathbb{R}^3$.

iii) Verificamos las hipótesis sobre los elementos de ii):

- V es un sólido del espacio limitado por S (por construcción de V).
- S es orientable (porque es una esfera). S está orientada por un normal n exterior a V (porque S es frontera exterior a V y n apunta hacia el exterior de S).
- F tiene componentes con derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^3$ (porque son funciones polinómicas, composición de polinomio con exponencial, y trigonométrica elemental).
- S y $V \subset D$ (porque $D = \mathbb{R}^3$).

∴ El Teorema de Gauss es aplicable.

iv) Aplicamos la Tesis y calculamos:

Por el Teorema de Gauss:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \text{div} F \, dV$$

← Calculamos la Integral Triple.

Siendo $F(x, y, z) = \langle 3x + z, 2y + \text{sen}(x), 6z + e^{xy} \rangle$,

$$\text{div}F = \frac{\partial (3x+z)}{\partial x} + \frac{\partial (2y+\text{sen}(x))}{\partial y} + \frac{\partial (6z+e^{xy})}{\partial z} = 3 + 2 + 6 = 11$$

Luego:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \text{div}F \, dV = \iiint_V 11 \, dV = 11 \iiint_V 1 \, dV = 11 \, \text{Vol}(V) = 11 \frac{4}{3} \pi 1^3 = \frac{44}{3} \pi$$

$$\therefore \boxed{\oiint_S F \cdot n \, dS = \frac{44}{3} \pi}$$

Nota 1: Es importante seguir los pasos i), ii), iii) y iv) en *cada ejercicio* para hacerlos de manera completa y ordenada.

Nota 2: Si la Integral Triple no pudiera ser calculada *por fórmula*, deberá resolverse aplicando las técnicas de cálculo desarrolladas en el 2º Módulo.

Nota 3: Si alguna hipótesis no se verifica, el Teorema no será aplicable (deberemos calcular la Integral de Flujo).

2. Evaluación de una Integral Triple mediante el cálculo de una Integral de Flujo:

→ Aplicación geométrica del Teorema de Gauss: Determinación del volúmen de un sólido mediante el cálculo de una Integral de Flujo.

Supongamos que tenemos un campo vectorial $F = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \rangle$ y un sólido V cuya frontera es S , tales que se *verifican las condiciones* pedidas en el Teorema de Gauss.

Supongamos, además, que F es tal que: $\operatorname{div} F = 1$.

Entonces:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \iiint_V 1 \, dV = \operatorname{Vol}(V)$$

O sea:

$$\operatorname{Vol}(V) = \oiint_S F \cdot n \, dS, \quad \text{para } F, S, \text{ y } V \text{ que verifican las hipótesis del Teorema de Gauss y tal que } \operatorname{div} F = 1.$$

...qué campo F debo tomar??. Cualquiera que, verificando las hipótesis del Teorema, cumpla que $\operatorname{div} F = 1$.

Por ejemplo:

$$F = \langle x, 0, 0 \rangle, \quad F = \langle 0, y, 0 \rangle, \quad F = \langle 0, 0, z \rangle, \quad F = \left\langle e^{yz} \operatorname{sen}(y^3), x + y, \frac{\cos(xy)}{x^2 + 1} \right\rangle, \quad \dots$$

El más usado: $F = \left\langle \frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3} \right\rangle$.

Ejemplo: Calcule el volumen del sólido encerrado por las superficies gráficas de $z = 1 - (x^2 + y^2)$ y $z = 0$, usando una Integral de Flujo.

i) Enunciamos el Teorema a usar:

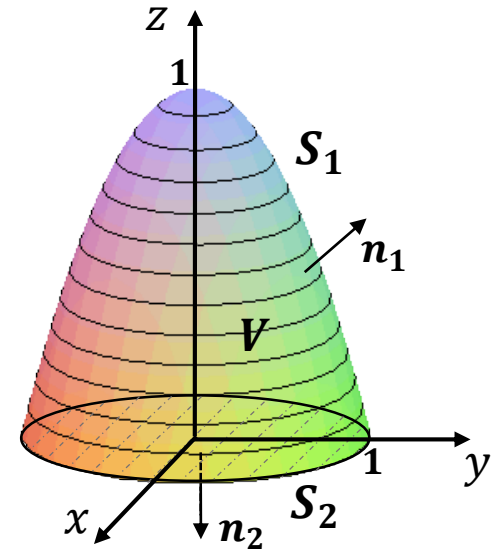
Teorema de Gauss

Sea V un sólido del espacio limitado por una frontera S , donde S es orientable (o a trozos) y está orientada por un vector normal, n , exterior al sólido V .

Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que S y $V \subset D$.

Entonces:

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$



ii) Identificamos los elementos usados en el Teorema:

- Sea V : sólido encerrado por $S = S_1 \cup S_2$.
- S_1 : porción de $z = 1 - (x^2 + y^2)$ con $0 \leq z \leq 1$. Sea S_1 orientada por normal n_1 con 3º componente positiva;
- S_2 : porción de $z = 0$ encerrada por S_1 . Sea S_2 orientada por normal n_2 con 3º componente negativa.
- Sea $F(x, y, z) = \langle x, 0, 0 \rangle$.
- Sea $D = \mathbb{R}^3$.

iii) Verificamos las hipótesis sobre los elementos de ii):

- V es un sólido del espacio limitado por S (por construcción de V).
- S es orientable a trozos (porque está formada como unión de dos superficies orientables: paraboloide y plano).
- S está orientada con normal exterior a V (porque $S, S = S_1 \cup S_2$, es frontera exterior a V . Ver gráfico).
- F tiene componentes con derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^3$ (porque son funciones polinómicas).
- S y $V \subset D$ (porque $D = \mathbb{R}^3$).

∴ El Teorema de Gauss es aplicable.

iv) Aplicamos la Tesis, **mostramos que el resultado será un volumen**, y calculamos:

Por el Teorema de Gauss:
$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$

Siendo $F(x, y, z) = \langle x, 0, 0 \rangle$, $\operatorname{div} F = 1$. Luego:
$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \iiint_V 1 \, dV = \operatorname{Vol}(V)$$

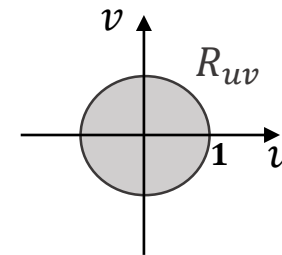
Calcularemos entonces la integral de Flujo de F .

Como $S = S_1 \cup S_2$:
$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS,$$
 donde cada Integral de Flujo se calculará como:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{R_{uv}} F(r(u, v)) \cdot N(u, v) \, dA$$

- Para S_1 : $z = 1 - (x^2 + y^2)$, con $0 \leq z \leq 1$:

$$S_1: r(u, v) = \langle u, v, 1 - (u^2 + v^2) \rangle, \quad (u, v) \in R_{uv}: \{(u, v); 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\}$$



$$N(u, v) = r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = \langle 2u, 2v, 1 \rangle \quad \longleftarrow \text{Ok (3º componente positiva).}$$

$$F(r(u, v)) \cdot N(u, v) = \langle u, 0, 0 \rangle \cdot \langle 2u, 2v, 1 \rangle = 2u^2$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS &= \iint_{R_{uv}} F(r(u, v)) \cdot N(u, v) \, dA = \iint_{R_{uv}} 2u^2 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2(r \cos \theta)^2 r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \cos^2(\theta) \left. \frac{r^4}{4} \right|_0^1 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{4} \cos^2(\theta) \, d\theta = \dots = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\iint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS = \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

- Para S_2 : $z = 0$, con $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$:

$$S_2: r(u, v) = \langle u, v, 0 \rangle, \quad (u, v) \in R_{uv}: \{(u, v); 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\}$$

$$N(u, v) = r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 1 \rangle$$

\longleftarrow (3º componente positiva, contrario a lo que se pide \therefore

Defino $N = -\langle 0, 0, 1 \rangle = \langle 0, 0, -1 \rangle$.

$$F(r(u, v)) \cdot N(u, v) = \langle u, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 0, -1 \rangle = 0$$

$$\iint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS = \iint_{R_{uv}} F(r(u, v)) \cdot N(u, v) \, dA = \iint_{R_{uv}} 0 \, dA = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\iint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS = 0}$$

$$\oiint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Finalmente obtenemos el valor del volumen:

$$\boxed{Vol(V) = \oiint_S F \cdot n \, dS = \frac{\pi}{2}}$$

En el Módulo:

El Teorema de Gauss está desarrollado en la sección **7.6**.

Las Aplicaciones del Teorema de Gauss se desarrollan en la sección **7.6.1**:

- 1)** La evaluación de una Integral de Flujo mediante el cálculo de la Integral Triple (pág 271, con 1 ejemplo). Esta es la aplicación más usada.
- 2)** La evaluación de una Integral Triple mediante el cálculo de una Integral de Flujo. Esta no es la aplicación más usada, excepto por un caso: La determinación del Volúmen de un Sólido mediante el cálculo de una Integral de Flujo. La fórmula para calcular el volúmen se deduce al pie de la pág 272.

El tema: “*Interpretación de la Divergencia*” (págs 272 y 273) no será considerado.

La sección **7.6.2** es de Ejercicios:

-) Los ejercicios 1 al 7 corresponden a la aplicación **1**).
-) Los ejercicios 8 y 9 corresponden a la aplicación **2**).

Adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1a) y 3) de la sección **7.6.2**.

Fin del Módulo II .

•) Los ejercicios 8 y 9 corresponden a la aplicación **2**).

Adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1a) y 3) de la sección **7.7.1**.

Fin del Módulo II .