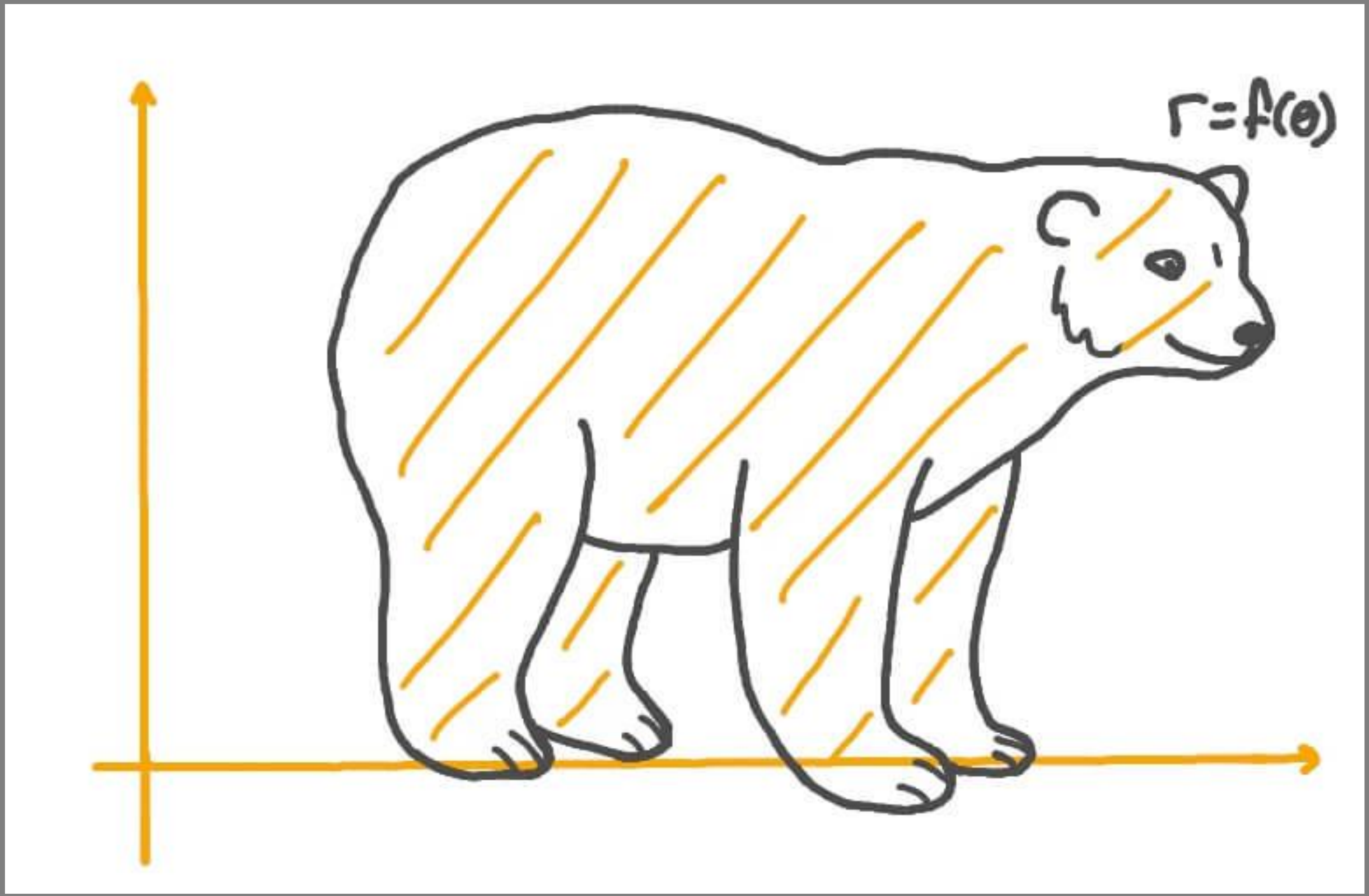
CAMBIO DE VARIABLES

Parte II: Coordenadas Polares



MARCO TEORICO DE REFERENCIA – POLARES.

$$T^{-1}:\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

$$|J_{T^{-1}}| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial r}{\partial x} & \dfrac{\partial r}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \theta}{\partial x} & \dfrac{\partial \theta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\dfrac{y}{x^2}\right) & \dfrac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{vmatrix}$$

$$|J_{T^{-1}}| = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

$$|J_{T^{-1}}| = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$|J_{T^{-1}}| = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\boxed{|J_{T^{-1}}| = \left|\frac{\partial r\theta}{\partial xy}\right| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{r}}$$

SITUACION 1: Para reflexionar en clase

Una región R del plano XY está limitada por las curvas

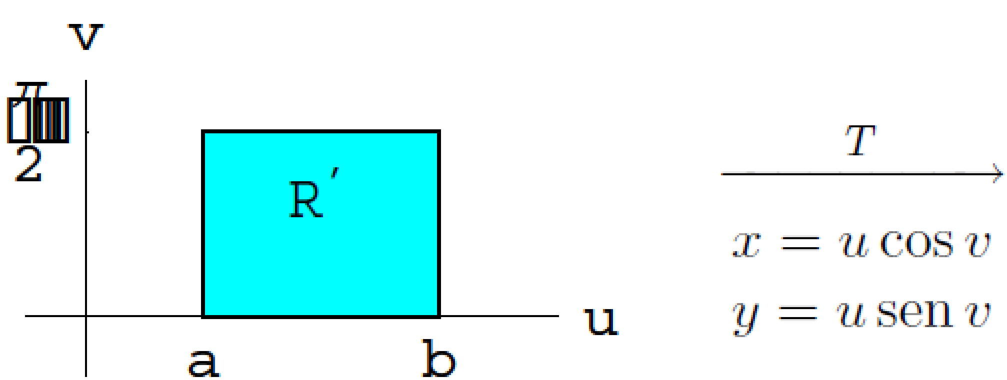
$$x^2 + y^2 = a^2,\ x^2 + y^2 = b^2,\ x = 0,\ y = 0,$$

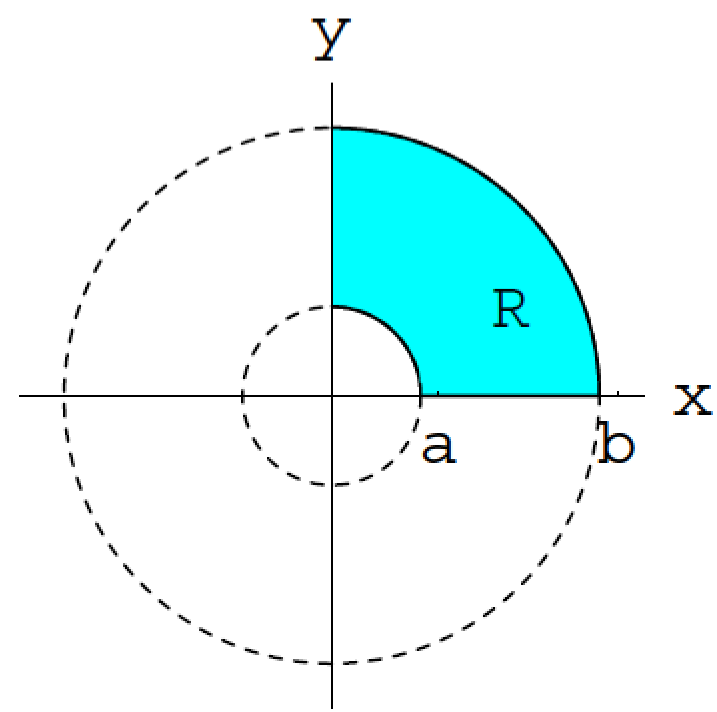
con $0 < a < b$, en el primer cuadrante.

a) Determinar la región R' en la cual se transforma R por la transformación $x = u\cos v,\ y = r\,\mathrm{sen}\,v$.

b) Estudiar lo que ocurre si $a = 0$.

c) Calcular $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.





SITUACION 1: Para reflexionar en clase

a) La región R es la indicada en la figura. Por la transformación dada, las circunferencias $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 = b^2$ se convierten en las rectas $u = a$, $u = b$, respectivamente. Asimismo, el segmento $x = 0$ comprendido entre $a \le y \le b$ se convierte en $v = \pi/2$, con $a \le u \le b$ y el segmento $y = 0$, $a \le x \le b$ se transforma en $v = 0$, $a \le u \le b$. En definitiva, la región R' buscada es el rectángulo mostrado en la figura.

Se podía haber razonado también diciendo que, por ser u la distancia desde el origen del plano XY y v el ángulo medido a partir del eje positivo de abscisas, es claro que la región que se busca estará dada por $a \le u \le b$, $0 \le v \le \pi/2$, como se indica en la figura.

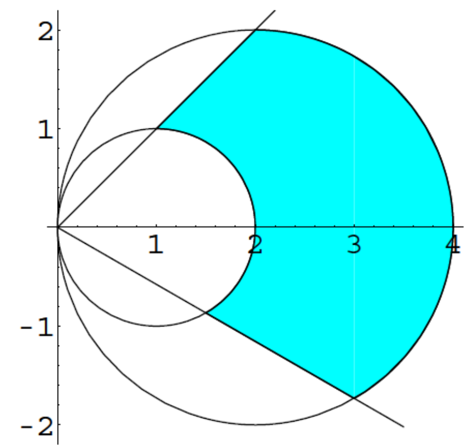
b) Si $a = 0$, la región R se convierte en un cuadrante de un región circular de radio b y R' sigue siendo un rectángulo. La razón para esto es que el punto $x = 0$, $y = 0$ se aplica en $u = 0$, $v =$ indeterminada y la transformación no es biunívoca en este punto, llamado por esta razón punto singular.

El punto c) ha sido resuelto en la clase teórica

SITUACION 2: CALCULO DE MASA

Calcular el área de la región $R = \{(x,y) : 2x \leq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 \leq 4x,\ y \leq x,\ \frac{-x}{\sqrt{3}} \leq y\}$ y la masa del cuerpo con densidad $\rho(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ y contenido en dicha región.

Si escribimos las curvas frontera de R en coordenadas polares, los límites de la región:



$$-\pi/6 \leq \vartheta \leq \pi/4,\ 2\cos\vartheta \leq r \leq 4\cos\vartheta.$$

Como $J\left(\frac{x,y}{r,\vartheta}\right) = r$, las integrales quedan:

$$\text{Área} = \iint_R dxdy = \int_{-\pi/6}^{\pi/4}\left(\int_{2\cos\vartheta}^{4\cos\vartheta} r\,dr\right)d\vartheta = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} \frac{12\cos^2\vartheta}{2}\,d\vartheta = \frac{6+3\sqrt{3}+5\pi}{4}.$$

$$\text{Masa} = \iint_R \rho(x,y)\,dxdy = \int_{-\pi/6}^{\pi/4}\left(\int_{2\cos\vartheta}^{4\cos\vartheta} r\cdot\frac{r\,\mathrm{sen}\,\vartheta}{r^2}\,dr\right)d\vartheta = \int_{-\pi/6}^{\pi/4} 2\,\mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{4}$$

Para comentarios

SITUACION 3: PARA ANALIZAR EN CLASE

Transformar la siguiente integral doble a coordenadas polares y resolverla:

$$\int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} x\, dy.$$

La integral propuesta se resuelve entonces como sigue:

$$I = \int_{\pi/4}^{\pi/3} dv \int_0^{2\sec v} u^2 \cos v\, du = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos v}{3} \cdot 8 \sec^3 v\, dv = \frac{8}{3} \operatorname{tg} v \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{8}{3}(\sqrt{3}-1).$$

SITUACION 4: PROPUESTAS PARA LOS ALUMNOS

Calcular el volumen del s'olido W definido por: donde $a > 0$.

$$W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,\ x^2 + y^2 \leq ax,\ z \geq 0\},$$

$$\begin{aligned} V &= \iint_R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx dy = 2\int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{a\cos\vartheta} r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr \right) d\vartheta \\ &= -\frac{2}{3}\int_0^{\pi/2} (a^3 \operatorname{sen}^3\vartheta - a^3) d\vartheta = \frac{(3\pi - 4)a^3}{9}. \end{aligned}$$

Propuestas para analizar y debatir en clase

Cambiar a coordenadas polares la integral $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ en los siguientes casos:

i) D es el círculo: $x^2+y^2 \leq ax,\ a>0$.

ii) D es el recinto del primer cuadrante limitado por las curvas: $x+y=1$ y $x^2+y^2=1$.

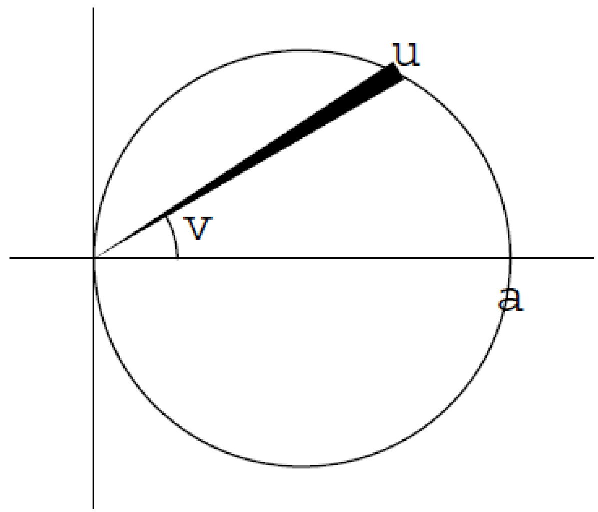
iii) D es el cuadrado $[0,1]\times[0,1]$.

iv) D es el recinto del primer cuadrante limitado por la curva $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

v) $D=\{(x,y): 0\leq x\leq 1,\ x^2\leq y\leq x\}$.

la integral $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ i) D es el círculo: $x^2+y^2 \leq ax$, $a>0$.

i) Si escribimos la ecuación de la circunferencia en coordenadas polares (haciendo el cambio $x = u\cos v$, $y = u \operatorname{sen} v$), obtenemos $u^2 = au\cos v$, es decir $u = 0$ ó $u = a\cos v$.

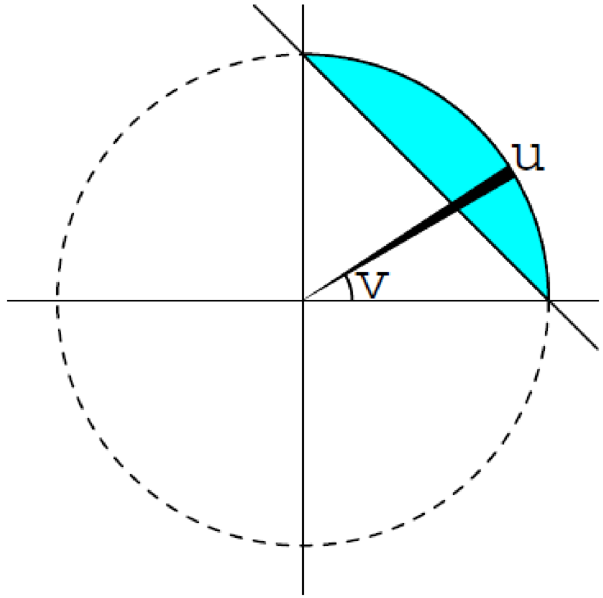


De la gráfica adjunta deducimos que, en coordenadas polares, la región verifica las condiciones $-\pi/2 \leq v \leq \pi/2$, $0 \leq u \leq a\cos v$. Así pues, la integral se escribe (teniendo en cuenta el jacobiano de la transformación) como:

$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dv \int_0^{a\cos v} u \cdot f(u\cos v, u \operatorname{sen} v)\,du.$$

ii) D es el recinto del primer cuadrante limitado por las curvas: $x + y = 1$ y $x^2 + y^2 = 1$.

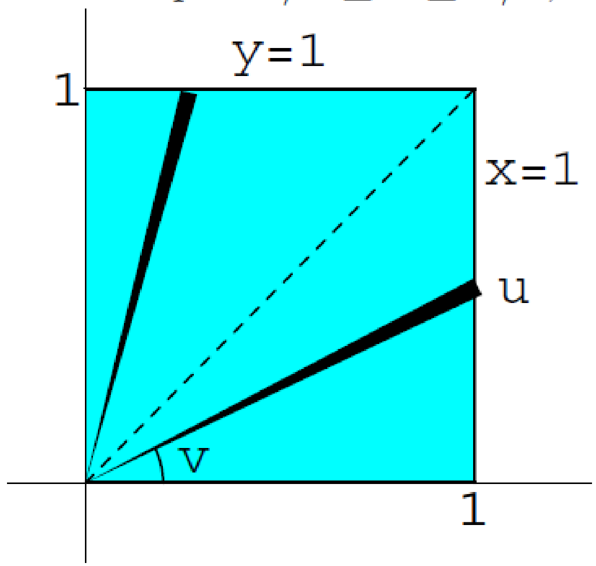
ii) La circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ se escribe en coordenadas polares como $u = 1$, mientras que la recta $x + y = 1$ tiene por ecuación $u = \dfrac{1}{\cos v + \operatorname{sen} v}$. En el primer cuadrante, el ángulo v está comprendido entre 0 y $\pi/2$.



Con estos datos, la integral se escribe como:

$$I = \int_0^{\pi/2} dv \int_{\frac{1}{\cos v + \operatorname{sen} v}}^{1} u \cdot f(u \cos v, u \operatorname{sen} v)\, du.$$

iii) En este caso debemos dividir la región en dos triángulos: el primero de ellos limitado por las rectas $x = y$, $x = 1$ e $y = 0$, lo que en coordenadas polares corresponde a $0 \le v \le \pi/4$, $0 \le u \le 1/\cos v$; el segundo triángulo está limitado por las rectas $x = y$, $y = 1$ y $x = 0$, y su expresión en coordenadas polares está dada por $\pi/4 \le v \le \pi/2$, $0 \le u \le 1/\operatorname{sen} v$.

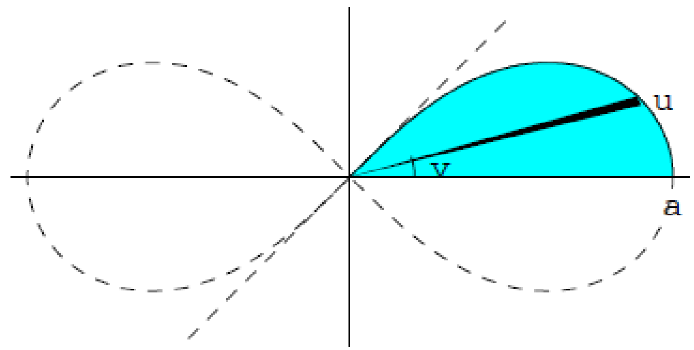


La integral doble se escribe entonces como:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{\frac{1}{\cos v}} u\cdot f(u\cos v, u\operatorname{sen} v)\,du + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dv \int_0^{\frac{1}{\operatorname{sen} v}} u\cdot f(u\cos v, u\operatorname{sen} v)\,du.$$

iv) D es el recinto del primer cuadrante limitado por la curva $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

iv) La curva dada es la lemniscata de la figura que, en coordenadas polares, se expresa por la ecuación $u^2 = a^2 \cos 2v$.

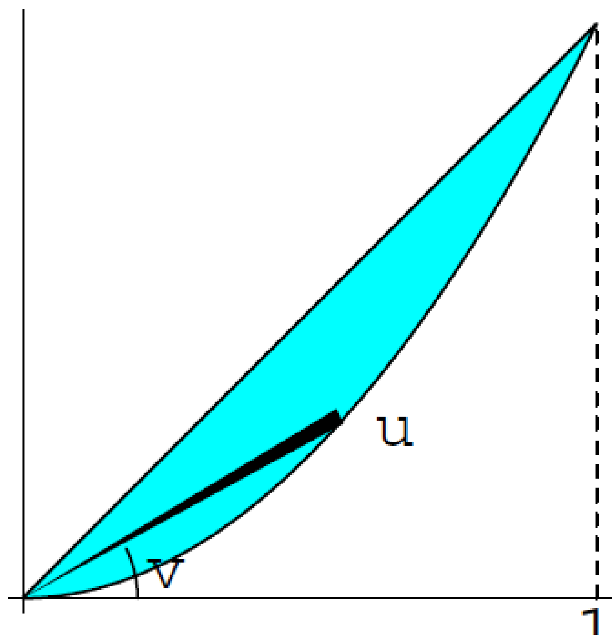


En el primer cuadrante, la región está comprendida entre los valores $0 \leq v \leq \pi/4$, así que la integral se expresa como:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{a\sqrt{\cos 2v}} u \cdot f(u \cos v, u \operatorname{sen} v)\, du.$$

la integral $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ v) $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$.

v) La ecuación de la parábola $y = x^2$ se expresa en coordenadas polares por $u \operatorname{sen} v = u^2 \cos^2 v$, o bien $u = \operatorname{sen} v / \cos^2 v$.

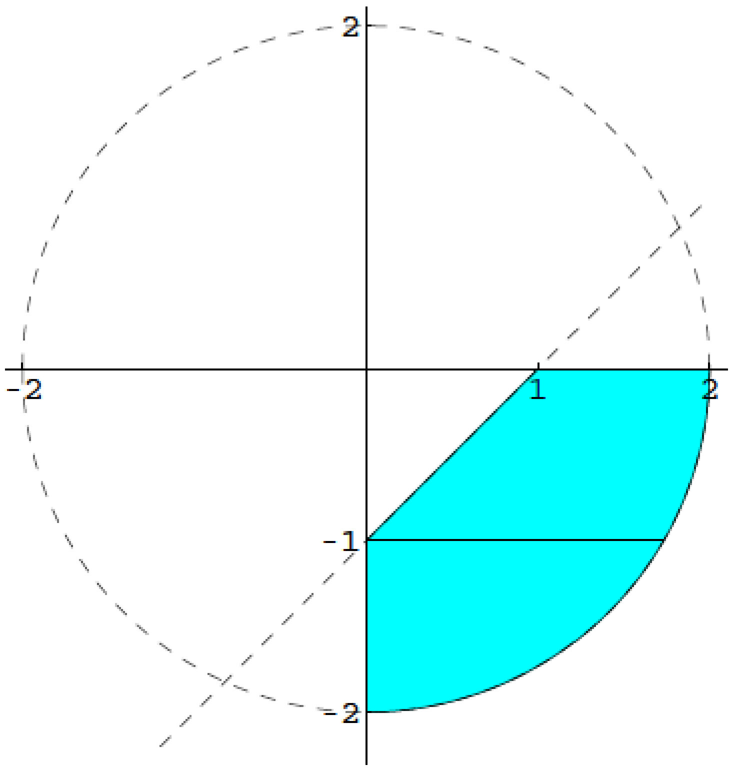


La región de integración está comprendida entre los valores $v = 0$ y $v = \pi/4$ (correspondiente a la recta $y = x$). Así pues, la integral se expresa así:

$$I = \int_0^{\pi/4} dv \int_0^{\operatorname{sen} v/\cos^2 v} u \cdot f(u\cos v, u \operatorname{sen} v)\,du.$$

PROPUESTA DE INVESTIGACION

Dados $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0, x - y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4\right\}$ y $f(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{-1/2}$, calcular $I = \iint_A f(x,y)\,dxdy$.



PROPUESTA DE INVESTIGACION

Si escribimos la integral en coordenadas cartesianas, debemos descomponer la región en dos partes. Por tanto (vista como región de tipo II),

$$I = \int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-1/2} dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{1+y}^{\sqrt{4-y^2}} \left(x^2+y^2\right)^{-1/2} dx.$$

Si escribimos la integral en coordenadas polares, los extremos de integración para la variable r son $r\cos\vartheta - r\,\mathrm{sen}\,\vartheta = 1$ (pues corresponde a la recta $x-y=1$) y $r=2$ (pues corresponde a la circunferencia $x^2+y^2=4$).

Por otra parte, los extremos de integración de la variable ϑ son $-\pi/2$ y 0 (pues la región está contenida en el cuarto cuadrante) o bien $3\pi/2$ y 2π.

PROPUESTA DE INVESTIGACION

Así pues, el planteamiento correcto de la integral es

$$I=\int_{-\pi/2}^{0}d\theta\int_{(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)^{-1}}^{2}dr=\int_{3\pi/2}^{2\pi}d\theta\int_{(\cos\theta-\operatorname{sen}\theta)^{-1}}^{2}dr$$

(el jacobiano se simplifica con el valor de la función).

La integral resultante, es compleja de resolver, sustituciones: $z=\tau g\frac{\theta}{2}$, $x=2\operatorname{arc}\tau gz$, $dx=\frac{2dz}{1+z^2}$, $\cos x=\frac{1-z^2}{1+z^2}$, $\operatorname{sen}x=\frac{2z}{1+z^2}$ $\therefore$

$$\int\frac{d\theta}{3\cos\theta+4\operatorname{sen}\theta}=\int\frac{\frac{2dz}{1+z^2}}{3\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}\right)+4\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)}=\int\frac{\frac{2dz}{\cancel{1+z^2}}}{\frac{3-3z^2+8z}{\cancel{1+z^2}}}=\int\frac{2dz}{-3(z^2-\frac{8}{3}z-1)}=-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{z^2-\frac{8}{3}z-1},$$

$z^2-\frac{8}{3}z-1=(z^2-\frac{8}{3}z+\frac{16}{9})-1-\frac{16}{9}=(z-\frac{4}{3})^2-(\frac{5}{3})^2$, luego: $=-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{(z-\frac{4}{3})^2-(\frac{5}{3})^2}$, sea: $w=z-\frac{4}{3}$, $dw=dz$

$=-\frac{2}{3}\int\frac{dz}{(z-\frac{4}{3})^2-(\frac{5}{3})^2}$, sea: $w=z-\frac{4}{3}$, $dw=dz$ $\quad =-\frac{2}{3}\frac{1}{2(\frac{5}{3})}\ell\eta\left|\frac{z-\frac{4}{3}-\frac{5}{3}}{z-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}}\right|+c=-\frac{1}{5}\ell\eta\left|\frac{3z-9}{3z+1}\right|+c$, como: $z=\tau g\,\frac{\theta}{2}$,

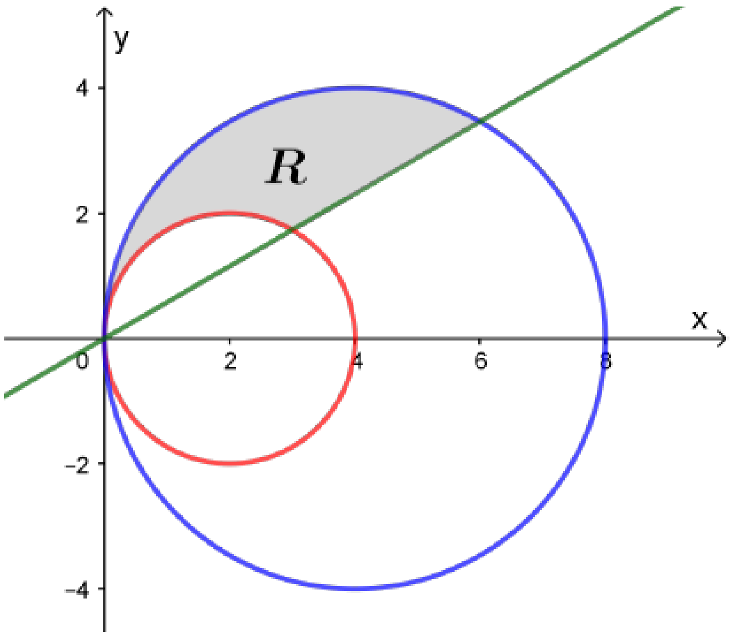
se tiene: $=-\frac{1}{5}\ell\eta\left|\frac{3\tau g\,\frac{\theta}{2}-9}{3\tau g\,\frac{\theta}{2}+1}\right|+c$

Respuesta: $\int\frac{d\theta}{3\cos\theta+4\operatorname{sen}\theta}=-\frac{1}{5}\ell\eta\left|\frac{3\tau g\,\frac{\theta}{2}-9}{3\tau g\,\frac{\theta}{2}+1}\right|+c$

CALCULO DE AREA : AGUDIZA TU INGENIO

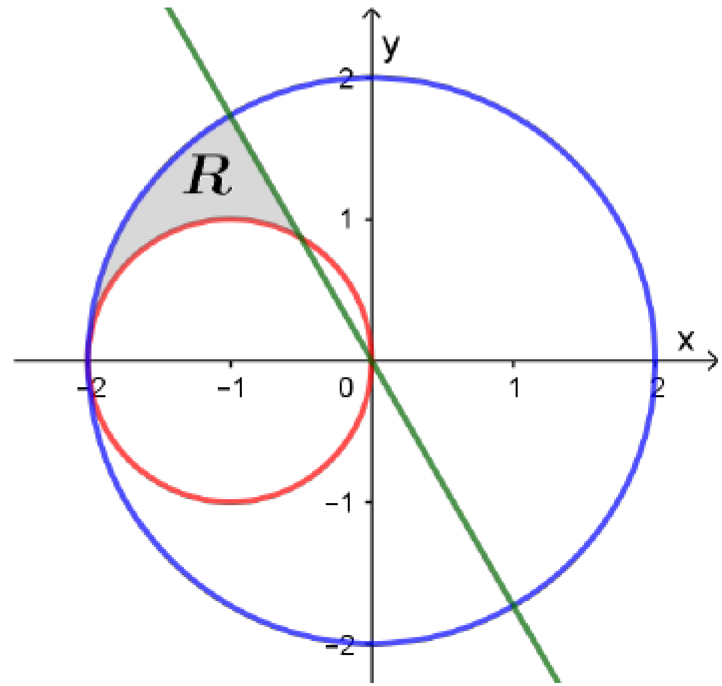
R la región del primer cuadrante limitada por:

$$(x-2)^2+y^2=4\,,\ (x-4)^2+y^2=16\,,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}}$$



R la región del segundo cuadrante limitada por:

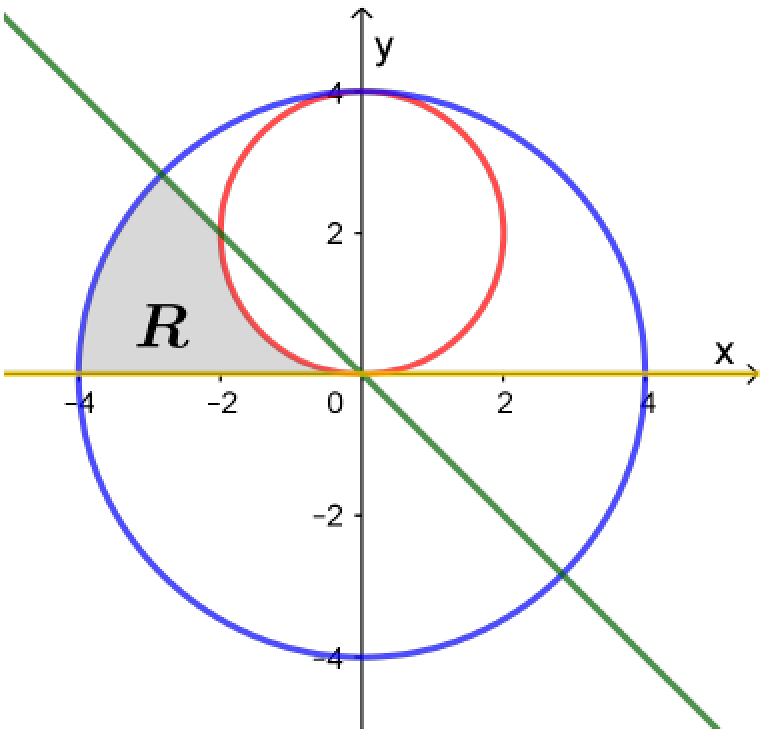
$$(x+1)^2+y^2=1\,,\ x^2+y^2=4\,,\ y=-\sqrt{3}x$$



CALCULO DE AREA : AGUDIZA TU INGENIO

R la región del segundo cuadrante limitada por:

$$x^2 + (y-2)^2 = 4\,,\; x^2 + y^2 = 16\,,\; y = -x\,,\; y = 0$$



R la región del cuarto cuadrante limitada por:

$$x^2 + (y+1)^2 = 1\,,\; x^2 + (y+2)^2 = 4\,,\; y = -x$$