Física I
Apuntes de Clase 2 -MII
2024

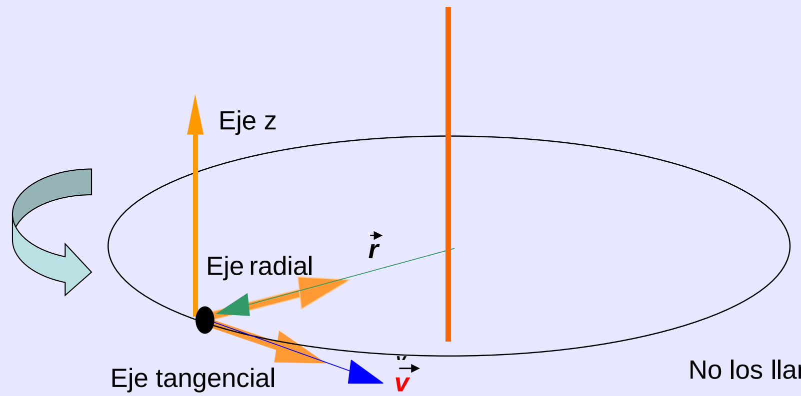
Prof. Susana Conconi

Modelo cuerpo rígido. Momento de inercia. Teorema de Steiner.
Dinámica del cuerpo rígido en movimiento de rotación.
Trabajo y energía en rígidos en rotación

Recordemos ciertos conceptos del Movimiento Circular

Sistema de referencia inercial no puede estar acelerado. No puedo usar el objeto en movimiento circular aunque tenga rapidez constante

Sistema de ejes instantáneos que se mueve con el punto que rota



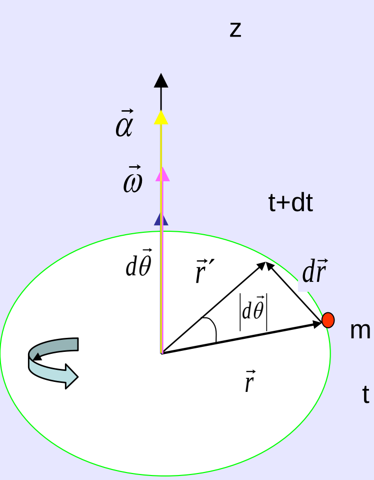
No los llamamos x, y, z

[dθ] en radianes
[ω] radianes /s
[α] radianes/ s^2

$$\vec{v}_{tg} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$|\vec{v}_{tg}| = |\vec{\omega}| \times |\vec{r}|\ sen\ 90^o = \omega . r$$

$$\vec{a}_{result} = \vec{a}_{\tan} + \vec{a}_{radial}$$

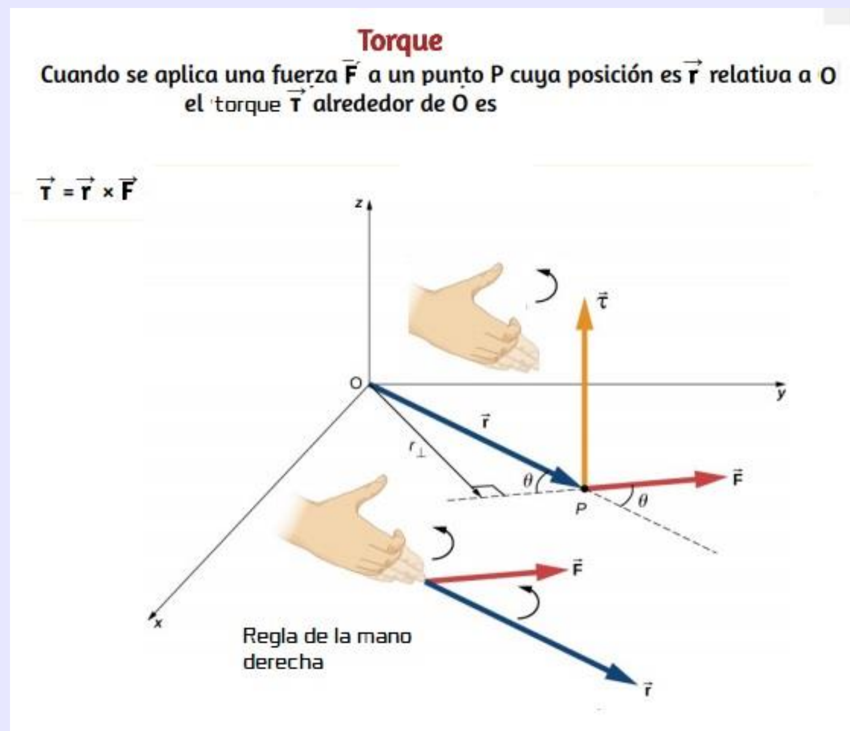


$\vec{a}_{\tan} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$ cambio del módulo de ***v***

$$|\vec{a}_{\tan}| = |\vec{\alpha}|\,|\vec{r}|\ sen\ 90 = \alpha\ r$$

$\vec{a}_{rad} = \vec{\omega} \times \vec{v}$ cambio de la dirección de ***v***

$$|\vec{a}_{rad}| = |\vec{\omega}|\,|\vec{v}|\ sen\ 90 = \omega\ v = \omega^2\ r = \frac{v^2}{r}$$



Momento de Fuerza respecto de “o” o

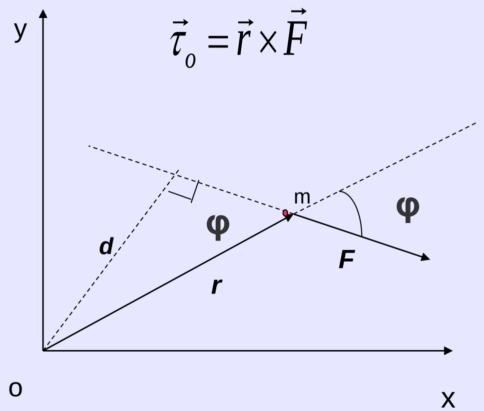
Torque (τ) respecto de “o”

Es el producto vectorial entre el vector posición respecto a “o” (r) y la fuerza aplicada

La **dirección** es perpendicular al plano xy.

El **sentido**, la regla de la mano derecha

$$\vec{\tau}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$



Φ es el ángulo que deter-minan los dos vectores cuando los aplicamos en un mismo punto.

d es la mínima distancia entre la recta de acción de F y “o”: **brazo de palanca**

El módulo es

$$|\tau_o| = |r|.|F|.sen\ \varphi$$

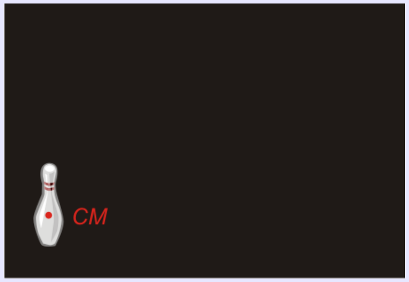
$$|d| = |r|.sen\ \varphi$$

$$|\tau_o| = |d|.|F|$$

Esta magnitud mide la tendencia de la fuerza a imprimir a la partícula un movimiento de rotación respecto al punto O fijo

Modelo de Cuerpo rígido

Un **sólido rígido es un sistema de partículas en el cual las distancias relativas entre ellas permanecen constantes**. Cuando las distancias entre las partículas que constituyen un sólido varían, dicho sólido se denomina **deformable**



El bolo describe un movimiento complejo, en el que gira y al mismo tiempo va desplazándose hacia la derecha y verticalmente.
Como el sólido es un sistema de partículas, podemos calcular la **aceleración de su centro de masas** utilizando la segunda ley de Newton. Las únicas fuerzas externas que actúan sobre él (despreciando el rozamiento) son los pesos de las partículas que lo constituyen. La aceleración de su centro de masas es:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{M}\sum \vec{F}_{ext} = \frac{1}{M}\sum m_i\,\vec{g} = \vec{g}$$

El centro de masas del sólido se mueve como un punto de masa igual a la masa total del sistema lanzada al aire. Por tanto, **describe un movimiento parabólico**.

Aplicando la 2da ley de Newton a un sistema de partículas podemos describir el movimiento de traslación del centro de masas de un sólido rígido

Además del movimiento de traslación de su centro de masas, el sólido describe un movimiento de rotacion.

2da ley de Newton: válida únicamente para describir movimientos de **traslación,** => debemos encontrar **otra ecuación** que permita analizar el movimiento rotacional. Observando el sólido **desde un sistema de referencia situado en su centro de masas**: **su movimiento es únicamente de rotación**

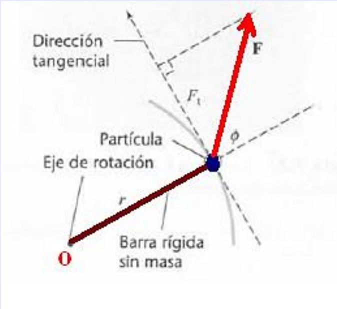
La 2da ley de Newton en la rotación

Si aplicamos una fuerza F a una partícula m en el extremo de una barra rígida y de masa despreciable de longitud r, y hay un eje perpendicular a la barra que pasa por un extremo y alrededor del cual puede girar libremente, la partícula se mueve solo sobre un circulo de radio r. En la dirección tangencial, aplicando la 2da Ley:

$\vec{F}_{tg} = m\,\vec{a}_{tg}$ y sabemos que $\vec{a}_{tg} = \vec{r} \times \vec{\alpha}$

$\vec{F}_{tg} = m\,\vec{r} \times \vec{\alpha}$

$$r.\,F_{tg} = m\,r^2 \times \alpha$$



Momento de $\vec{F} = \vec{\tau}$

$\tau = m\,r^2 \times \alpha$ si esa partícula es una de todas las partículas de un sistema:

$$\tau_i = m_i\,r^2_i \times \alpha$$

$$\tau_i = m_i\, r_i^2 \,.\, \alpha$$

τ_i es el torque neto sobre cada partícula i y sumando sobre todas las partículas del sistema:

$$\Sigma\tau_i = \Sigma\, m_i\, r_i^2 \,.\, \alpha \quad = (\Sigma\, m_i\, r_i^2\,).\, \alpha$$

Llamamos a este término: $\Sigma\, m_i\, r_i^2$ **Momento de inercia de las partículas respecto a un eje : I.**

Ya vimos que en un sistema de partículas los torque internos se anulan por lo que finalmente nos queda

$$\tau_{i\ neto} = \Sigma\tau_{i\ ext} = (\Sigma\, m_i\, r_i^2\,).\, \alpha = I.\, \alpha$$

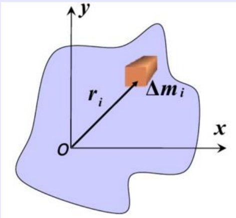
$$\boxed{\Sigma\tau_{i\ ext} = I.\, \alpha}$$

que es la 2da Ley de Newton para la rotación de un sistema de particulas y tambien para un rígido en rotación pura

MOMENTO DE INERCIA DE UN SÓLIDO

Es una magnitud escalar que viene dada por: $I = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$

Depende del eje de giro (puesto que el radio de giro de cada partícula depende del eje).
Sólido: constituido por un gran número de partículas,
Pasamos de sistema discreto a **sistema continuo**. Sumatoria a integral:



$$I = \int dm\, R^2$$

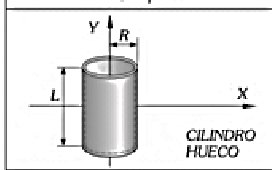
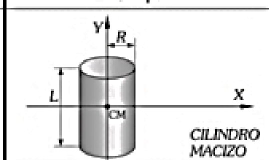
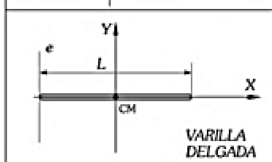
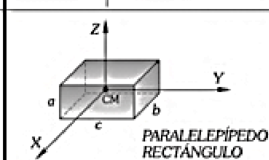
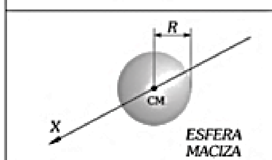
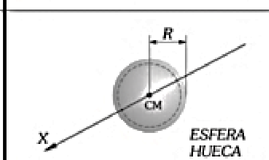
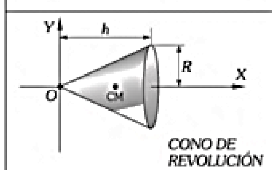
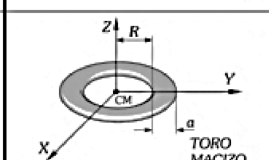
dm es un diferencial de masa del sólido y *R* su distancia al eje de giro del mismo. Como *dm* está relacionado con la densidad ρ del sólido, si éste es **homogéneo**, podemos sustituir *dm* y sacar la densidad de la integral:

$$dm = \rho\, dV \qquad I = \rho \int R^2 dV$$

dV es un diferencial de volumen del sólido y, para calcular el momento de inercia de un sólido homogéneo es preciso resolver la integral.

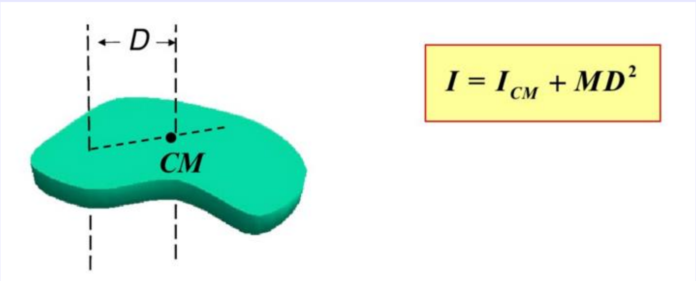
En general se calculan respecto a un eje que pasa por el CM

MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS SÓLIDOS HOMOGÉNEOS

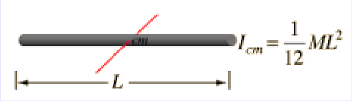
Cuerpo	Momentos de inercia	Cuerpo	Momentos de inercia
 CILINDRO HUECO	$I_{yy} = MR^2$ $I_{xx} = \frac{1}{2}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$	 CILINDRO MACIZO	$I_{yy} = \frac{1}{2}MR^2$ $I_{xx} = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$
 VARILLA DELGADA	$I_{yy} = \frac{1}{12}ML^2$ $I_{ee} = \frac{1}{3}ML^2$	 PARALELEPÍPEDO RECTÁNGULO	$I_{xx} = \frac{1}{12}M(a^2+c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}M(c^2+b^2)$
 ESFERA MACIZA	$I_{xx} = \frac{2}{5}MR^2$	 ESFERA HUECA	$I_{xx} = \frac{2}{3}MR^2$
 CONO DE REVOLUCIÓN	$I_{xx} = \frac{3}{10}MR^2$ $I_{yy} = \frac{3}{20}MR^2 + \frac{1}{10}Mh^2$	 TORO MACIZO	$I_{zz} = 2MR^2 + \frac{3}{2}Ma^2$ $I_{xx} = MR^2 + \frac{5}{4}Ma^2$

Teorema de los ejes paralelos o Teorema de Steiner

«El momento de inercia alrededor de cualquier eje que es paralelo y que se encuentra a una distancia D del eje que pasa por el centro de masa es:



Para una barra delgada:

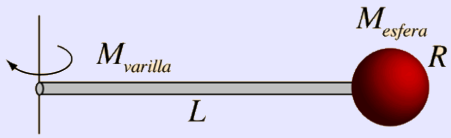


Respecto al CM de la barra

Respecto al extremo de la barra

Composición de Momentos de Inercia

El momento de inercia de un objeto compuesto, se puede obtener por la suma de los momento de sus partes constituyentes



$$I = \frac{1}{3} M_{varilla} L^2 + \frac{2}{5} M_{esfera} R^2 + M_{esfera} (L+R)^2$$

$$I = I_{\text{varilla sobre un extremo}} + I_{\text{esfera sobre el centro}} + \text{Contribución de ejes paralelos}$$

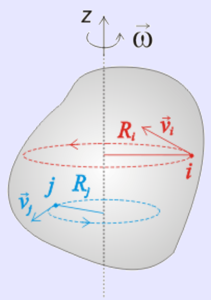
Dependiendo de las dimensiones y masas de la esfera y la barra, el primer y segundo término podrían ser despreciable respecto al tercero y podemos considerar a la esfera como masa puntual con **I: M_{esfera} (L + R)^2**

Ej: masa varilla: 2kg
masa esfera: 3kg
L varilla: 2m
R esfera: 1m

Ivar: 2,7kgm2
Iesf cm: 1,2 kgm2
Ejes paralelos: 27 kgm2

Energía de rotación

La **energía cinética de un sistema** es la suma de las energías cinéticas de las partículas que lo forman. Cuando un sólido rígido gira en torno a un eje que pasa por su centro de masas las partículas describen un movimiento circular al eje con la **misma velocidad angular ω** pero con una **velocidad lineal distinta** según sea la distancia de la partícula al eje de giro



$v_i = R_i\,\omega$

$v_j = R_j\,\omega$

La **energía cinética** del sólido causada por el movimiento de rotación:

$$E_{c(rot)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$$

La sumatoria es el **momento de inercia** del sólido con respecto al **eje** de rotación, luego:

Nos queda que la **energía cinética rotacional** (respecto al eje que pasa por el centro de masas) es:

$$E_{c(rot)} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

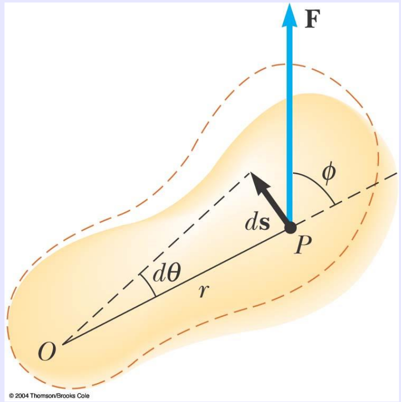
Teorema de trabajo y energía cinética para un rígido que rota respecto de un eje fijo

Eje fijo: perpendicular al plano y pasa por O

Fuerza externa **F**, $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Bajo la acción de $\boldsymbol{\tau}$ el cuerpo rígido rota

Cuando rota un $d\theta$ el punto de aplicación de la fuerza se desplaza $d\mathbf{s}$



Trabajo y energía de un rígido en rotación pura

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \qquad d\mathbf{s} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$$

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r} \qquad W = \int d\boldsymbol{\theta} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

$$\boxed{W = \int d\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}} \qquad \boxed{\Sigma \tau_{i\ ext,O} = I.\ \alpha}$$

$$W = \int d\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau} = \int d\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{I}.\boldsymbol{\alpha} = \int d\boldsymbol{\theta}\ \boldsymbol{I}.\ d\boldsymbol{\omega}/dt$$

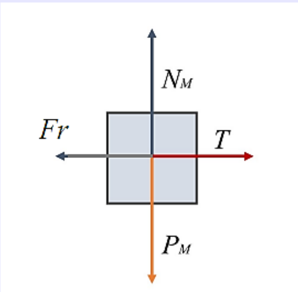
$$W = \int d\theta/dt\ \ \boldsymbol{I}.\ d\boldsymbol{\omega} = \int \boldsymbol{\omega}\ .I\ d\boldsymbol{\omega} = I \int \boldsymbol{\omega}.\ d\boldsymbol{\omega} = ½\ \boldsymbol{I}\ [\ \omega_f^2 - \omega_i^2]$$

$$\boxed{W = \int d\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\tau}} = \boxed{½\ \boldsymbol{I}\ [\ \omega_f^2 - \omega_i^2]}$$

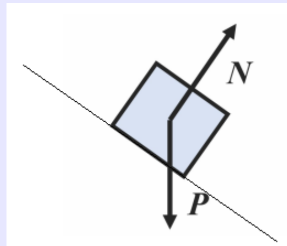
Trabajo del momento de la fuerza

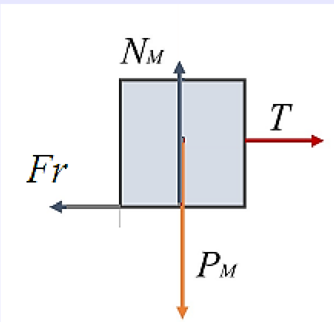
Variación de la energía cinética de rotación

Diagrama de cuerpo libre de un cuerpo rígido

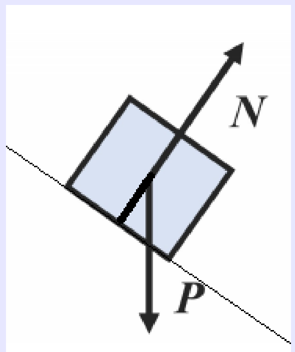


Modelo de partícula





Modelo cuerpo rígido



Comparación de las ecuaciones del movimiento de rotación y de traslación

Movimiento Rotacional alrededor de un eje fijo		***Movimiento lineal***	
Velocidad angular :	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Velocidad lineal:	$v = \frac{dx}{dt}$
Aceleración angular:	$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$	Aceleración lineal:	$a = \frac{dv}{dt}$
Torque resultante:	$\Sigma\tau = I\alpha$	Fuerza resultante:	$\Sigma F = Ma$
Leyes cinemática:	$\alpha = \text{constante}$ $\omega = \omega_0 + \alpha t$ $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	Leyes cinemática:	$a = \text{constante}$ $v = v_0 + at$ $x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ $v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
Trabajo:	$W = \int \tau d\theta$	Trabajo:	$W = \int F_x dx$
Energía rotacional:	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$	Energía traslacional:	$K = \frac{1}{2}mv^2$
Potencia:	$P = \tau\omega$	Potencia:	$P = Fv$
Momento angular:	$L = I\omega$	Momentum lineal:	$p = mv$
Torque resultante:	$\tau = \frac{dL}{dt}$	Fuerza resultante:	$F = \frac{dp}{dt}$

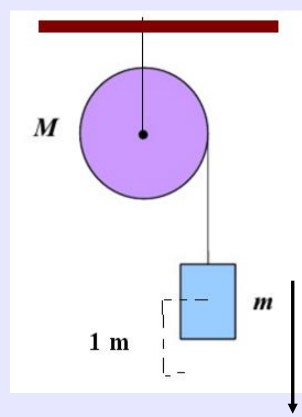
¿Cómo trabajar con las leyes de Newton en la rotacion?

1) Definir el **sistema de estudio** y **modelo**
2) Elegir un **sistema de referencia inercial** y
3) de **coordenadas**
4) Identificar todas las **interacciones** actuantes (**agentes**)
5) Hacer un **diagrama** de **cuerpo libre (cuerpo rigido)**
6) Ubicar **acciones** y **reacciones**
7) Identificar las **variables conocidas** y las **incógnitas**
8) Utilizar las **ecuaciones (2da Ley para traslación y rotacion)**

$$\boxed{\sum \bar{F} = m\,\bar{a}}$$

$$\boxed{\Sigma\vec{\tau}_{o\,ext} = I.\,\vec{\alpha}}$$

Ej:
Consideremos un disco con un eje fijo (polea) de masa M= 5,0 kg y radio R= 0.2 con un bloque de masa m = 1 kg colgando de una cuerda arrollada alrededor del disco, Se libera el sistema partiendo del reposo.
a) Calcular la aceleración del bloque y la tensión de la cuerda.
b) Por consideraciones energéticas calcular la velocidad del bloque cuando ha caído 1 m.



M= 5 kg
R = 0,2 m
m = 1kg

SFE: Polea + Bloque

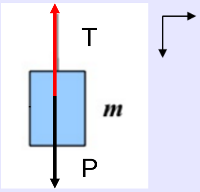
SRI Tierra

Polea : modelo Cuerpo Rigido

Bloque: modelo de partícula

Soga ideal y no desliza

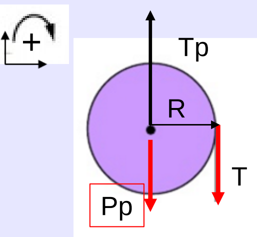
DCL Bloque



$$\sum F_x = P - T = m\,a$$

$$m\;g - T = m\,a$$

DCL Polea



$$\Sigma\tau_{o\ ext}^{\ z} = R\,.T = I_{cm}.\ \alpha$$

$$I_{cm} = ½\ m_p\,R^2$$

$$\cancel{R}\,.T = \frac{1/2\ m_p\,R^{\cancel{2}}\,a}{\cancel{R}}$$

$$T = 1/2\ m_p\,a$$

$$m\,g - 1/2\ m_p\,a = m\,a$$

Como la soga no desliza sobre la polea, hay un vinculo entre la aceleración del bloque y la aceleración de un punto en el borde de la polea, que se relaciona con la aceleracion angular de la polea según:

$$a = R.\ \alpha$$

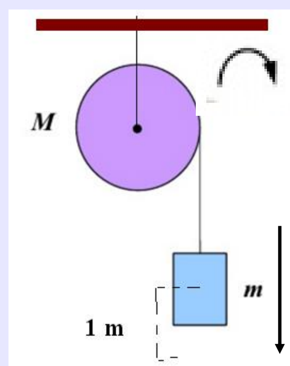
$$a = \frac{m}{½\ m_p + m}\ g$$

$$T = 1/2\ m_p\ a$$

Rtas.
a = 2,8 m/s^2
T= 7,0 N

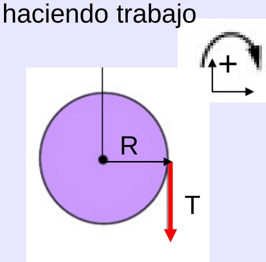
Si Mp=0, ¿con que aceleración caería el bloque?¿ y T?

b) Por consideraciones energéticas calcular la velocidad del bloque cuando ha caído 1 m



Es un sistema de 1 cuerpo rigido (cilindro) y una particula (bloque). Veo si hay fuerzas internas haciendo trabajo

Trabajo de torque de T=

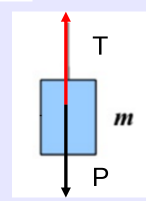


$$\boxed{W = \int d\theta\ .\boldsymbol{\tau}}$$

Y $\quad d\mathbf{s} = d\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}$

$$W_{\text{torque de T}} = \int d\mathbf{s}\ /\ \mathbf{r}\ .\ \boldsymbol{\tau} = \int (d\mathbf{s}\ /\ R\ ).\ \ R.T$$

$$\boxed{W = \int \mathbf{F}\ .\ d\mathbf{s}}$$



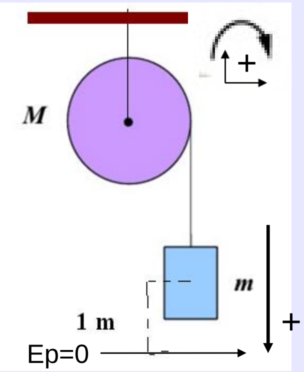
$$\boxed{W_{\text{torque de T}} = \int T\ \ d\mathbf{s}}$$

$$\boxed{W_T = \int T\ .\ ds\ (-1) = -\int T\ .\ ds}$$

El trabajo del Torque de T se cancela con el trabajo de T, **no hay trabajo de F internas no conservativas**

En sistemas de poleas y sogas, podemos considerar que no hay trabajos de fuerzas internas y ver si hay trabajos de fuerzas externas no conservativas. En este caso: no hay fuerzas externas no conservativas haciendo trabajo, solo el peso del bloque y es conservativa

$$W_{nc} = \Delta E_M = 0 \quad \rightarrow \quad E_Mi = E_Mf$$



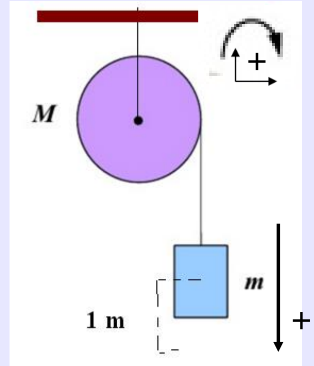
Estado inicial: m en reposo, hi= 1 m arriba de la posición final. La polea en reposo

Estado final: m con velocidad vf en nivel 0 de E potencial. Polea girando con velocidad angular ω

$$E_mi = m\,g\,h_i + \cancel{\tfrac{1}{2}\,m\,v_i^2} + \cancel{\tfrac{1}{2}\,I_{cm}\,\omega_i^2}$$

$$E_mf = \cancel{m\,g\,h_f} + \tfrac{1}{2}\,m\,v_f^2 + \tfrac{1}{2}\,I_{cm}\,\omega_f^2$$

$$m\,g\,h_i = \tfrac{1}{2}\,m\,v_f^2 + \tfrac{1}{2}\,I_{cm}\,\omega_f^2 \qquad I_{cm} = \tfrac{1}{2}\,M\,R^2$$



$$m\,g\,h_i = \tfrac{1}{2}\,m\,v_f^2 + \tfrac{1}{2}\,I_{cm}\,\omega_f^2$$

Como la soga no desliza sobre la polea, hay un vinculo entre la velocidad del bloque y la velocidad tangencial de un punto en el borde de la polea, que se relaciona con la velocidad angular de la polea según

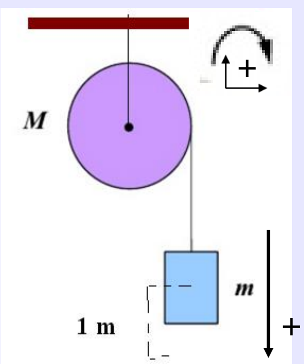
$$v = \omega\,R$$

Para dejar todo en función de v_f, reemplazo ω

$$m\,g\,h_i = \tfrac{1}{2}\,m\,v_f^2 + \tfrac{1}{2}\,I_{cm}\,v_f^2/\,R^2$$

$$m\,g\,h_i = \tfrac{1}{2}\,m\,v_f^2 + \tfrac{1}{2}\,(\,\tfrac{1}{2}\,M\,\cancel{R^2})\;v_f^2/\,\cancel{R^2}$$

$$m\,g\,h_i = \tfrac{1}{2}\,m\,v_f^2 + 1/4\,M\;v_f^2 = (\tfrac{1}{2}\,m + 1/4\,M\,)\,v_f^2$$



$$m\,g\,h_i = (\tfrac{1}{2}\,m + 1/4\,M\,)\,v_f^2$$

$$v_f^2 = \frac{m\,g\,h_i}{(\tfrac{1}{2}\,m + 1/4\,M\,)}$$

$$v_f = \sqrt{\frac{m\,g\,h_i}{(\tfrac{1}{2}\,m + 1/4\,M\,)}}$$

$$\boxed{v_f = 2{,}36\ m/s}$$