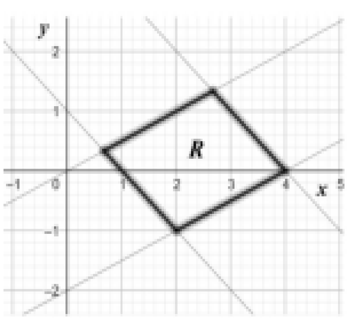
Cambio de Variables en Integrales Dobles

- Transformaciones en el Plano y Cambio de Variables.(sección **4.3**)

→ Al igual que en las Integrales Definidas, los Cambios de Variables en Integrales Dobles nos ayudarán a simplificar los cálculos..

Ejemplo: Calcular $\iint_R \left(\frac{x-2\,y}{x+y}\right)^{20}\, dA$, donde R la región limitada por las gráficas de: $\begin{cases} x-2\,y=0 \\ x-2\,y=4 \\ x+y=1 \\ x+y=4 \end{cases}$



Se encuentra dificultad al:
- Describir R
- Calcular las primitivas

Pero si hacemos: $\begin{cases} u = x+y \\ v = x-2\,y \end{cases}$ entonces: $f(x,y) = \left(\frac{x-2\,y}{x+y}\right)^{20} \longrightarrow \left(\frac{v}{u}\right)^{20} = \underbrace{v^{20}\, u^{-20}}_{\text{fácil de integrar...}}$

...y la región R?... y la Integral Doble??

Observemos:

$x + y = 1 \longrightarrow u = 1$

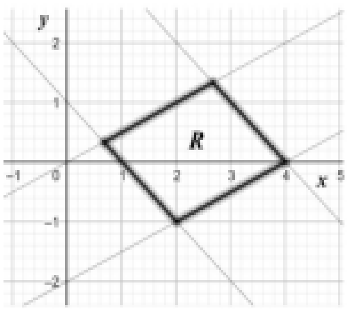
$x + y = 4 \longrightarrow u = 4$

$x - 2\,y = 0 \longrightarrow v = 0$

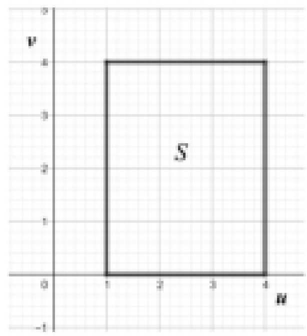
$x - 2\,y = 4 \longrightarrow v = 4$

...teníamos: $\left[\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - 2\,y \end{array}\right.$

Todos los puntos $(x, y) \in R$ se "transforman" en puntos $(u, v) \in S$:



$\xrightarrow{\left[\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - 2\,y \end{array}\right.}$



Lo que hacemos aquí es un ejemplo de Transformación..

$\longrightarrow$ $\displaystyle\iint_S \left(\frac{v}{u}\right)^{20} dA_{uv}$ es sencilla, pero... es igual a $\displaystyle\iint_R \left(\frac{x - 2\,y}{x + y}\right)^{20} dA_{xy}$??: **NO.** Falta aún relacionar dA_{xy} con dA_{uv}

Definición: Un cambio de variables viene dado por una Transformación T de una región S del plano uv en una región R del plano xy, de la forma: $T\!: \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v) \end{cases}$ donde $(u, v) \in S$; $(x, y) \in R$.

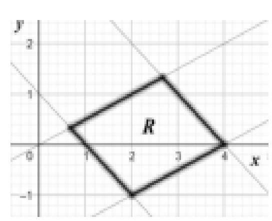
T debe verificar que $\mathrm{X}(u, v)$ y $\mathrm{Y}(u, v)$ tengan 1º´s derivadas continuas en S y que exista la Transformación Inversa $T^{-1}\!: \begin{cases} u = U(x, y) \\ v = V(x, y) \end{cases}$ donde $(x, y) \in R$; $(u, v) \in S$.

En nuestro ejemplo: $\left[\begin{array}{l} u = x + y \\ v = x - 2\,y \end{array}\right.$ representa a T^{-1}, o sea: $T^{-1}\!: \begin{cases} u = x + y \\ v = x - 2\,y \end{cases}$; $(x, y) \in R$; $(u, v) \in S$.

...quién es T ?

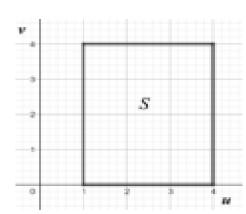
Despejando x e y de T^{-1}, hallamos: $x = \dfrac{2\,u + v}{3}$; $y = \dfrac{u - v}{3}$

$\therefore \quad T\!: \begin{cases} x = \dfrac{2\,u + v}{3} \\ y = \dfrac{u - v}{3} \end{cases}$ donde $(u, v) \in S$; $(x, y) \in R$.



$\xrightarrow{T^{-1}}$

$\xleftarrow[T]{}$



<u>Definición</u>: Dada la Transformación $T: \begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases}$ donde $(u,v) \in S$; $(x,y) \in R$, se define el <u>Jacobiano</u> de T, J_T, como: $J_T = x_u\, y_v \,-\, y_u\, x_v$.

<u>Notación</u>: $J_T = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = x_u\, y_v \,-\, y_u\, x_v$

En general: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a\,d \,-\, c\,b$

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ se llama *determinante de la matriz* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

<u>Propiedad</u>: $J_{T^{-1}} = \dfrac{1}{J_T}$

<u>Teorema de Cambio de Variables en Integrales Dobles</u>

Sea T Transformación de S en R, $T: \begin{cases} x = X(u,v) \\ y = Y(u,v) \end{cases}$ donde $(u,v) \in S$; $(x,y) \in R$.

Sea, además, $f(x,y)$ continua en R.

Entonces: $$\iint_R f(x,y)\, dA_{xy} = \iint_S f\big(X(u,v), Y(u,v)\big)\, |\, J_T \,|\, dA_{uv}$$

En nuestro ejemplo: $\displaystyle\iint_R \left(\frac{x-2\,y}{x+y}\right)^{20} dA$, R limitada por las gráficas de: $\left[\begin{array}{l} x-2\,y=0 \\ x-2\,y=4 \end{array}\right.$; $\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+y=4 \end{array}$

Sea $T^{-1}: \begin{cases} u = x+y \\ v = x-2\,y \end{cases}$; $(x,y) \in R$.

$x+y=1 \longrightarrow u=1$
$x+y=4 \longrightarrow u=4$
;
$x-2\,y=0 \longrightarrow v=0$
$x-2\,y=4 \longrightarrow v=4$

...despejando: $T: \begin{cases} x = \frac{2\,u+v}{3} \\ y = \frac{u-v}{3} \end{cases}$; $(u,v) \in S = \{(u,v);\quad 1 \le u \le 4\,,\ 0 \le v \le 4\}$.

$$J_T = x_u\, y_v \,-\, y_u\, x_v = \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \qquad \therefore \qquad J_T = -\frac{1}{3}$$

Usando el Teorema de Cambio de Variables:

$$\iint_R f(x,y)\, dA_{xy} = \iint_S f\big(X(u,v), Y(u,v)\big)\, |\, J_T \,|\, dA_{uv} \quad ;$$

donde: $f(x,y) = \left(\dfrac{x-2\,y}{x+y}\right)^{20}$

$f\big(X(u,v), Y(u,v)\big) = \left(\dfrac{v}{u}\right)^{20}$

$$\therefore \quad \iint_R \left(\frac{x-2\,y}{x+y}\right)^{20} dA_{xy} = \iint_S \left(\frac{v}{u}\right)^{20} \left|-\frac{1}{3}\right| dA_{uv} = \frac{1}{3}\int_1^4\!\!\int_0^4 v^{20}\ u^{-20}\, dv\, du = \cdots$$