Series de Números Reales.

- Series de términos cualesquiera. Convergencia absoluta y condicional

sección **2.7** y **2.8**

Vimos:

1º Clase de Series

- Definición de Convergencia:
  $\lim_{n\to\infty} S_n = S \quad \leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge
- Propiedades de las series.
- Criterio de la Divergencia:
  $\lim_{i\to\infty} a_i \neq 0 \ \to \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ diverge

Aquí los a_i pueden tomar cualquier valor (cualquier *signo*).

2º Clase de Series

- Criterio de la Integral.
- Criterio de Comparación directa.
- Criterio de Comparación en el límite.
- Criterio de la raíz.
- Criterio del cociente.

Aquí los a_i deben ser *positivos.* (Series de términos positivos)

- Criterio de Leibniz.

Aplicable sólo a series *alternadas.*

3º Clase de Series

- ¿Qué sucede con los Criterios de la 2º Clase cuando en las Series aparecen términos *negativos*?.
- ¿Se pueden distinguir distintos *tipos* de convergencia en una Serie?.

- ¿Qué sucede con los Criterios de la 2º Clase cuando en las Series aparecen términos *negativos*?:

a) Algunos términos negativos:

Si una Serie tiene un número finito de términos negativos, podemos *sustraerlos* y analizar la convergencia de la Serie que queda (serie de términos positivos) ya que, por propiedad de las Series, la convergencia no se altera si se suprimen o agregan un número finito de términos a una Serie:
Si $\sum_{i=N}^{\infty} a_i$ converge (diverge), entonces: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge (diverge).

b) Todos los términos negativos:

Si una Serie tiene todos los términos negativos, $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i < 0$, podemos definir $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$, $b_i = -a_i$ y analizar su convergencia.
Por propiedad de las Series, la convergencia de $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ dictará la convergencia de $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$:
Si $\sum_{i=1}^{\infty}(-a_i)$ converge (diverge), entonces: $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ converge (diverge).

c) Infinitos términos negativos mezclados con infinitos términos positivos (se dice *Serie de términos cualesquiera*):

Ejemplos:

$$\underbrace{\textbf{1)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \quad , \quad \textbf{2)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n^2}}_{\text{Tienen } grupos \text{ de términos con igual signo..}} \quad , \quad \underbrace{\textbf{3)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5} \quad , \quad \textbf{4)}\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}}_{\text{Cambian signo en forma } alternada..}$$

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n)$

Usaremos el Criterio de la Divergencia: $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Aquí $a_n = \cos(n)$: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \cos(n) \nexists \ (\neq 0) \to \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n) \quad \text{diverge}}$

… en los ejemplos **2)**, **3)**, y **4)** el Criterio de la Divergencia no es aplicable..

Teorema de Convergencia absoluta

Dada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ Serie de términos cualesquiera.

Si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en *forma absoluta*.

* Si $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverge pero $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge en *forma condicional*.

Analicemos, con éste Teorema, los ejemplos **2)**, **3)**, y **4)**:

Ejemplo **2)**: Analizar la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n^2}$

Aquí $a_n = \dfrac{sen(n)}{n^2} \quad \therefore \quad |a_n| = \left|\dfrac{sen(n)}{n^2}\right| = \dfrac{|sen(n)|}{|n^2|} = \dfrac{|sen(n)|}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sen(n)|}{n^2}$$

Criterio de Comparación Directa: Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ donde $0 \le a_n \le b_n$

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.
- Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

$$-1 \le sen(n) \le 1$$

$$0 \le |sen(n)| \le 1$$

$$0 \le \frac{|sen(n)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2}$$

Si $b_n = \frac{1}{n^2}$, sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge pues es Serie p, con $p > 1$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, por el Criterio de Comparación Directa: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sen(n)|}{n^2}$ converge.

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|sen(n)|}{n^2}$ converge, por Teorema de Convergencia absoluta: $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n^2} \text{ converge en forma absoluta.}}$

Ejemplo **3)**: Analizar la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5}$

Es una Serie alternada, pero **antes** de aplicar el Cr. de Leibniz, aplicaremos el Teorema de Convergencia absoluta:

Aquí $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^5} \quad \therefore \quad |a_n| = \left|\dfrac{(-1)^n}{n^5}\right| = \dfrac{|(-1)^n|}{|n^5|} = \dfrac{1}{n^5}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$$

Esta es una Serie convergente pues es Serie p, con $p = 5 > 1$.

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ converge, por Teorema de Convergencia absoluta:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^5} \quad \text{converge en forma absoluta.}}$$

(Observar que ya no hace falta analizar con el Criterio de Leibniz..)

Ejemplo **4)**: Analizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ ← Otra vez una Serie alternada. **Antes** de aplicar el Cr. de Leibniz, aplicaremos el Teorema de Convergencia absoluta:

Aquí $a_n = \frac{(-1)^n}{n} \therefore |a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \frac{1}{n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ← Esta es una Serie divergente pues es Serie p, con $p = 1$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, el Teorema de Convergencia absoluta no es aplicable.

(Sin embargo, el análisis de arriba **sirve** ya que si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ llega a ser convergente, el estudio de arriba me dice qué tipo de convergencia tiene la Serie: convergencia *condicional*).

Ahora sí, analizamos la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ con el Criterio de Leibniz:

Sea: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Aquí $b_n = \frac{1}{n}$

Criterio de Leibniz: Sea la serie alternada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$, $b_n > 0$.

- Si $\{b_n\}$ es decreciente: $b_n \geq b_{n+1}$
- Si $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Entonces: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n$ converge.

- $n + 1 \geq n$, $\forall\, n \geq 1$.

  $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+1} \quad \therefore \quad b_n = \frac{1}{n} \geq b_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, la sucesión $\left\{b_n = \frac{1}{n}\right\}$ es decreciente.

- $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$

Por el Criterio de Leibniz, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge pero $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right|$ diverge: $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge en forma condicional.}}$

Resumiendo:
Dada una Serie de números reales, para analizar la convergencia conviene:

- Para Series de términos positivos:
  - Criterio de la Divergencia
  - Criterio de la Integral.
  - Criterio de Comparación directa.
  - Criterio de Comparación en el límite.
  - Criterio de la raíz.
  - Criterio del cociente.

- Para Series con *algunos* términos negativos o con *todos* los términos negativos

  Llevar la Serie a Serie de términos positivos y estudiarla. Su convergencia dictará la convergencia de la Serie original (por propiedad de las Series).

- Para Series de términos *cualesquiera* (infinitos términos negativos mezclados con infinitos términos positivos):

1. Intentar aplicar el Criterio de la Divergencia a la Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:
   a) Si el Criterio es aplicable: La Serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge*.
   b) Si el Criterio no es aplicable: ir al paso 2.

2. Estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$:
   a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge: la Serie original $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge en forma absoluta*.
   b) Si $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge: estudiar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (Cr. de Leibniz si es alternada)
   $*$**)** Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge en forma condicional*.

Nota: Para el caso 2.b) sólo consideraremos Series Alternadas.