MATEMATICA B - Resolución del 1° parcial (28-04-2023)

1. **Integral definida, indefinida, propiedades y teoremas**

   a) Sea $g(x)$ función integrable tal que $\displaystyle\int_0^4 g(x)\,dx = 5$.

   Calcular (justificar en cada caso): (a1) $\displaystyle\int_0^4 (2g(x)+1)\,dx$; (a2) valor promedio de $g(x)$ en el intervalo $[0,4]$; (a3) $\displaystyle\int_{-4}^4 g(x)\,dx$ en el caso de $g(x)$ función par.

   b) Resolver: (b1) $\displaystyle\int_{-1}^2 (1+3x)|x|\,dx$ (b2) $\displaystyle\int x\cdot\cos(\pi x)\,dx$

Rta

a) (a1) Las constantes son integrables. Por la propiedad de linealidad de la integral definida, como $g(x)$ es integrable en $[0,4]$, también lo es la función $2g(x)+1$ y se verifica:

$$\int_0^4 (2g(x)+1)\,dx = 2\int_0^4 g(x)\,dx + \int_0^4 1\,dx = 2\times 5 + x\Big|_0^4 = 10+4 = 14$$

(a2) El valor promedio de $g(x)$ en $[0,4]$ se calcula como

$$\overline{g}_{[0,4]} = \frac{1}{(4-0)}\int_0^4 g(x)\,dx = \frac{1}{4}\times 5 = \frac{5}{4} = 1,25$$

(a3) Como $g(x)$ es par, verifica $g(-x)=g(x)$, $\forall x\in[-4,4]$. Entonces:

$$\int_{-4}^0 g(x)\,dx \overset{\substack{\text{sustit:}\\ t=-x\\ dt=-dx}}{=} \int_4^0 g(-t)(-\,dt) \overset{\substack{g\,\text{par:}\\ g(-t)=g(t)}}{=} \int_4^0 g(t)(-\,dt) \overset{\text{lin.}}{=} -\int_4^0 g(t)\,dt$$

$$\overset{\text{cambio de signo}}{=} \int_0^4 g(t)\,dt = \int_0^4 g(x)\,dx$$

En base a esto y aplicando aditividad del intervalo de integración:

$$\int_{-4}^4 g(x)\,dx = \int_{-4}^0 g(x)\,dx + \int_0^4 g(x)\,dx = 2\int_0^4 g(x)\,dx = 2\times 5 = 10$$

b) (b1) $f(x) = (1+3x)|x|$ es integrable en $[-1,2]$ por ser continua. Su expresión sin barras de valor absoluto es

$$f(x) = \begin{cases} (1+3x)(-x) & \text{si} \quad -1\le x\le 0 \\ (1+3x)x & \text{si} \quad 0<x\le 2 \end{cases} = \begin{cases} -x-3x^2 & \text{si} \quad -1\le x\le 0 \\ x+3x^2 & \text{si} \quad 0<x\le 2 \end{cases}$$

Aplicando la propiedad de aditividad del intervalo de integración:

$$\int_{-1}^2 (1+3x)|x|\,dx = \int_{-1}^0 (-x-3x^2)\,dx + \int_0^2 (x+3x^2)\,dx =$$

$$= \left(-\frac{x^2}{2}-x^3\right)\Big|_{-1}^0 + \left(\frac{x^2}{2}+x^3\right)\Big|_0^2 = 0 + \left(\frac{1}{2}-1\right) + (10-0) = \frac{19}{2} = 9,5$$

(b2) Aplicamos el método de integración por partes:

$$\int x\,\cos(\pi x)\,dx \overset{\substack{u=x\,;\,du=dx \\ dv=\cos(\pi x)\,dx\,;\,v\overset{[1]}{=}\frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi x)}}{=} uv - \int v\,du =$$

$$= \frac{x}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi x) - \frac{1}{\pi}\int \mathrm{sen}(\pi x)\,dx \overset{[2]}{=} \frac{x}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x) + C$$

[1] y [2] se obtienen por sustitución:

$$[1]: \int \cos(\pi x)\,dx \overset{\substack{t=\pi x \\ dt=\pi dx}}{=} \int \cos(t)\frac{1}{\pi}dt = \frac{1}{\pi}\int \cos(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}(t) + C = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi x) + C$$

así que podemos tomar $v = \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{sen}(\pi x)$

$$[2]: \int \mathrm{sen}(\pi x)\,dx \overset{\substack{t=\pi x \\ dt=\pi dx}}{=} \int \mathrm{sen}(t)\frac{1}{\pi}dt = \frac{1}{\pi}\int \mathrm{sen}(t)\,dt = -\frac{1}{\pi}\cos(t) + C = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) + C$$

2. **Aplicaciones de la integral definida**

   a) Calcular el área encerrada entre el eje x, la función $\mathrm{sen}(x)$ para x entre 0 y π. Graficar.

   b) Calcular el volumen de revolución que genera la región del inciso anterior al girar alrededor del eje x. Graficar.

<u>Rta</u>

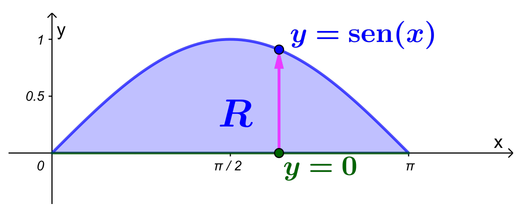

Figura 1: Ejercicio 2a (tema 1)

a) La región cuya área queremos calcular es de tipo I:

$$R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi \,\wedge\, 0 \le y \le \mathrm{sen}\,x\right\}$$

Entonces:

$$\text{área}(R) = \int_0^\pi \mathrm{sen}(x)\,dx = -\cos(x)\Big|_0^\pi = -\cos(\pi) + \cos(0) = -(-1) + 1 = 2$$

b) Para $x \in [0,\pi]$ fijo y genérico, los radios de giro máximo y mínimo alrededor del eje x están dados por:

$$R(x) = \mathrm{sen}(x) \quad ; \quad r(x) = 0$$

Entonces, el volumen del sólido V que se genera es:

$$\mathrm{vol}(V) = \pi\int_0^\pi [R(x)]^2\,dx - \pi\int_0^\pi [r(x)]^2\,dx = \pi\int_0^\pi \mathrm{sen}^2(x)dx =$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{1-\cos(2x)}{2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}(2x)\right)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}$$

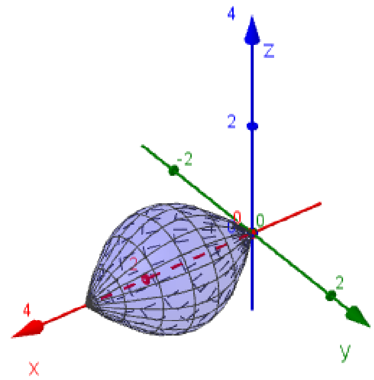

Figura 2: Ejercicio 2b (tema 1)

3. Ecuaciones diferenciales

a) Hallar la solución $y(x)$ al problema de valor inicial $y' + \frac{1}{x}y = 2\,,\; y(1) = 0$.

b) Hallar la familia de curvas ortogonales a: $y = Cx^2$. Graficar ambas familias.

Rta

a) La ecuación diferencial

$$y' + \frac{1}{x}y = 2 \qquad [3]$$

es lineal de primer orden pues tiene la forma

$$y' + p(x)y = q(x) \;\text{ con }\; p(x) = \frac{1}{x}\;,\; q(x) = 2$$

La solución general puede escribirse como producto de dos funciones:

$$y = u(x)v(x) \qquad [4]$$

Derivando respecto de x:

$$y' = u'v + uv' \qquad [5]$$

Reemplazando [4] y [5] en [3]:

$$(u'v + uv') + \frac{1}{x}(uv) = 2$$

Reagrupando términos:

$$u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = 2 \qquad [5]$$

Definimos v como una solución particular no trivial de la ecuación diferencial auxiliar (homogénea):

$$v' + \frac{1}{x}v = 0$$

Ésta se resuelve por separación de variables:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

Integrando ambos miembros:

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{1}{x} dx + C_1$$

Es decir,

$$\ln|v| = -\ln|x| + C_1$$

Aplicando exponencial en ambos miembros:

$$e^{\ln|v|} = e^{-\ln|x| + C_1}$$

O sea,

$$|v| = e^{-\ln|x|} e^{C_1}$$

Llamando $C_2 = e^{C_1}$ resulta:

$$|v| = \frac{C_2}{e^{\ln|x|}}$$

Dado que la exponencial es la inversa del logaritmo,

$$|v| = \frac{C_2}{|x|}$$

Expresando sin barras de valor absoluto:

$$v = \pm\frac{C_2}{x}$$

Llamando $C^* = \pm C_2$ se obtiene:

$$v = \frac{C^*}{x}$$

Escogiendo el valor $C^* = 1$ tenemos:

$$\boxed{v = \frac{1}{x}} \qquad [6]$$

Reemplazando [6] en [5] resulta:

$$u' \frac{1}{x} = 2$$

Entonces

$$u' = 2x$$

por lo que

$$\boxed{u = \int 2x\, dx = x^2 + C} \qquad [7]$$

Reemplazando [6] y [7] en [4] llegamos a la siguiente expresión de la solución general de la ecuación diferencial del enunciado:

$$y = \left(x^2 + C\right) \frac{1}{x}$$

Equivalentemente,

$$\boxed{y = x + \frac{C}{x}} \text{ solución general} \qquad [8]$$

Por otra parte,

$$y(1) = 0 \;\Leftrightarrow\; 0 = 1 + \frac{C}{1} \;\Leftrightarrow\; 0 = 1 + C \;\Leftrightarrow\; C = -1$$

Reemplazando este valor en [8] obtenemos una solución del problema:

$$\boxed{y = x - \frac{1}{x}} \qquad [9]$$

Observaciones: si bien no es una consigna del enunciado,

- se puede aplicar el teorema de existencia y unicidad para justificar que ésta es la única solución del problema (no lo haremos porque esto no se pide en el enunciado).
- se puede verificar fácilmente que [9] es solución del problema dado.

b) $\mathscr{F} : y = Cx^2$ es una familia de parábolas de eje y con vértice en el origen.
Derivando respecto de x se obtiene: $\quad y' = 2Cx$
Multiplicando ambos miembros por x resulta: $\quad xy' = 2Cx^2$
Dado que $y = Cx^2$, se logra eliminar el parámetro C: $\quad xy' = 2y$
Luego, en cada punto (x, y) las curvas de $\mathscr{F}$ tienen pendientes dadas por:

$$y' = \frac{2y}{x}$$

Las pendientes de la familia ortogonar $\mathscr{F}^\perp$ se obtienen por la condición de perpendicularidad de rectas:

$$y' = -\frac{1}{\frac{2y}{x}}$$

Es decir,

$$y' = -\frac{x}{2y}$$

La familia $\mathscr{F}^\perp$ es la solución general de esta nueva ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y}$$

Separando variables,

$$2y\,dy = -x\,dx$$

Integrando ambos miembros:

$$\int 2y\,dy = -\int x\,dx + C^*$$

Entonces

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + C^*$$

Por lo tanto,

$$\mathscr{F}^\perp : \frac{x^2}{2} + y^2 = C^*$$

que es una familia de elipses centradas en el origen cuyos ejes son los coordenados.

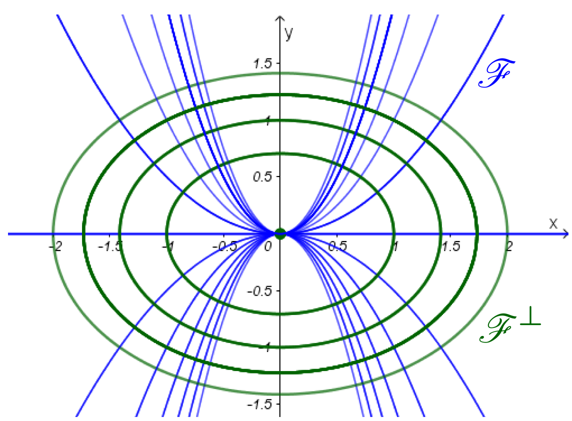

Figura 3: Ejercicio 3b (tema 1)

4. **Integral doble**

a) Sea R la región limitada por: $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$. Plantear la integral que calcula la masa de R con densidad $d(x, y) = e^{-x}$, suponiendo (i) R de tipo I; (ii) R de tipo II; (iii) Calcular la más conveniente.

b) Calcular la integral: $\displaystyle\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} dxdy$, $R : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$.

Rta

a) (i) La descripción de R como región de tipo I es:

$$R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq y \leq e^x\right\}$$

La masa M se plantea como:

$$M = \iint_R d(x, y) dA_{xy} = \int_0^1 \int_0^{e^x} e^{-x}\, dy\, dx$$

(ii) La descripción de R como región de tipo II es $R = R_1 \cup R_2$ donde

$$R_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 1\right\}$$

$$R_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq e \ \wedge \ \ln y \leq x \leq 1\right\}$$

La masa M se plantea como la suma de las masas de R_1 y R_2:

$$M = \iint_R d(x, y) dA_{xy} = \int_0^1 \int_0^1 e^{-x}\, dx\, dy + \int_1^e \int_{\ln y}^1 e^{-x}\, dx\, dy$$

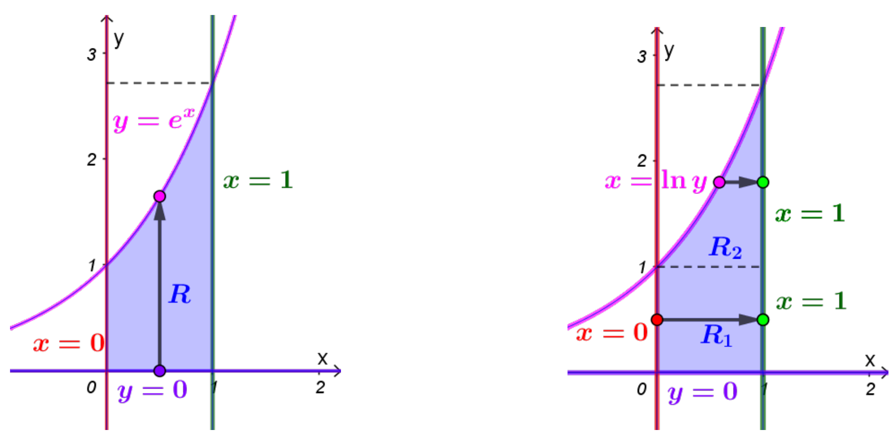

Figura 4: Ejercicio 4a (tema 1)

(iii) Resulta más conveniente el cálculo basado en (i):

$$M = \iint_R d(x, y) dA_{xy} = \int_0^1 \int_0^{e^x} e^{-x}\, dy\, dx = \int_0^1 e^{-x}\, y\Big|_0^{e^x} dx = \int_0^1 e^{-x}\, e^x\, dx = \int_0^1 dx = x\Big|_0^1 = 1$$

b) Tanto la región de integración como el integrando son propicios para su descripción en coordenadas polares:

$$T : \begin{cases} x = r\, \cos\theta \\ y = r\, \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

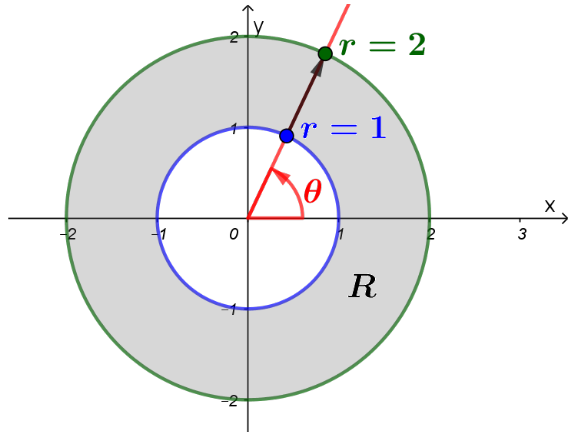

Figura 5: Ejercicio 4b (tema 1)

R es región anular centrada en el origen, con radio interno $r = 1$ y radio externo $r = 2$ pues:

$$x^2 + y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; r^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; r = 1$$

$$x^2 + y^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; r^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; r = 2$$

La descripción de R en coordenadas polares es:

$$R_{r\theta} = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq 2\pi \,,\, 1 \leq r \leq 2\}$$

El integrando $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ en polares resulta: $\quad f(r\,\cos\theta, r\,\operatorname{sen}\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{r^2}} = \dfrac{1}{r}$
El jacobiano en coordenadas polares es $J_T = r$.
Entonces:

$$\iint_R \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dxdy \overset{T}{=} \iint_{R_{r\theta}} \frac{1}{r}\, r\, dA_{r\theta} = \int_0^{2\pi} \int_1^2 dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} r\Big|_1^2 d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = \theta\Big|_0^{2\pi} = 2\pi$$

5. **Integral triple**

   a) Calcular mediante una integral triple el volumen del sólido del primer octante entre los planos $x + y + z = 2 \,, 2x + 2y + z = 2$.

   b) Expresar en coordenadas cilíndricas (adecuadas) la integral $\displaystyle\iiint_D (x^2 + z^2)\, dxdydz$, siendo D el dominio limitado por: $y = 0 \,, y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}\,$, dentro de $x^2 + z^2 = 1$. Describir el cambio de coordenadas propuesto.

<u>Rta</u>

a) Consideremos los tetraedros V_1 de vértices $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 2)$ y V_2 de vértices $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$. Ambos son sólidos xy-proyectables:

$$V_1 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1 \,,\, 0 \leq y \leq 1 - x \,,\, 0 \leq z \leq 2 - 2x - 2y\big\}$$

$$V_2 = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2 \,,\, 0 \leq y \leq 2 - x \,,\, 0 \leq z \leq 2 - x - y\big\}$$

Si V es el sólido del enunciado, conviene expresar su volumen como la diferencia:

$$\operatorname{vol}(V) = \operatorname{vol}(V_2) - \operatorname{vol}(V_1) = \iiint_{V_2} 1\, dV_{xyz} - \iiint_{V_1} 1\, dV_{xyz}$$

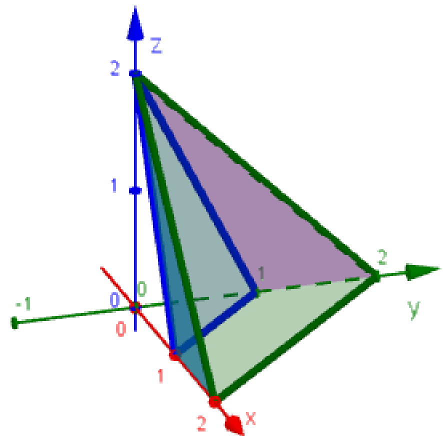

Figura 6: Ejercicio 5a (tema 1)

$$\mathrm{vol}(V_2) = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_0^{2-x-y} dz\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} z\Big|_0^{2-x-y} dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} (2-x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^2 \left(2y - xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{2-x} dx = \int_0^2 \left(2(2-x) - x(2-x) - \frac{1}{2}(2-x)^2\right) dx =$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)^2\,dx = \int_0^2 \frac{4-4x+x^2}{2} dx = \int_0^2 \left(2 - 2x + \frac{1}{2}x^2\right) dx =$$

$$= \left(2x - x^2 + \frac{1}{6}x^3\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\mathrm{vol}(V_1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{2-2x-2y} dz\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} z\Big|_0^{2-2x-2y} dy\,dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} (2-2x-2y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2y - 2xy - y^2\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 \left(2(1-x) - 2x(1-x) - (1-x)^2\right) dx =$$

$$= \int_0^1 (1-x)^2 dx = -\frac{1}{3}(1-x)^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto:

$$\mathrm{vol}(V) = \mathrm{vol}(V_2) - \mathrm{vol}(V_1) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

b) El dominio D es el sólido de tres caras, limitado por izquierda por el plano $y = 0$, por derecha por la semiesfera $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$, y lateralmente por el cilindro circular $x^2 + z^2 = 1$ de eje y. Combiene realizar un cambio a las coordenadas cilíndricas de eje y dadas por:

$$T : \begin{cases} x = r\,\cos\theta \\ y = y \\ z = r\,\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

La semiesfera $y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$ se expresa en cilíndricas como $y = \sqrt{9 - r^2}$
El cilindro $x^2 + z^2 = 1$ se traduce en $r = 1$.
La descripción del sólido en cilíndricas es

$$D_{r\theta y} = \left\{(r, \theta, y) : 0 \le \theta \le 2\pi\,,\ 0 \le r \le 1\,,\ 0 \le y \le \sqrt{9 - r^2}\right\}$$

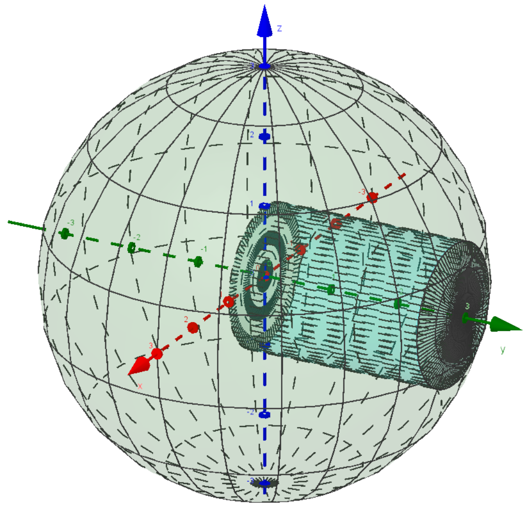

Figura 7: Ejercicio 5b (tema 1)

El integrando $f(x, y, z) = x^2 + z^2$ expresado en cilíndricas resulta $f(r\, \cos\theta, y, r\, \operatorname{sen}\theta) = r^2$
El jacobiano en coordenadas cilíndricas es $J_T = r$.
Por lo tanto:

$$\iiint_D (x^2 + z^2)\, dV_{xyz} = \iiint_{D_{r\theta y}} r^2\, r\, dV_{r\theta y} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-r^2}} r^3\, dy\, dr\, d\theta$$