MATEMATICA B - Recuperatorio del Primer parcial 11-5-2022

1. a) Calcular: $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^2+2x}\,dx$

Rta
Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x-8}{x^2+2x} = \frac{x-8}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x+2A}{x^2+2x}$$

Luego:

$$(A+B)x + 2A = x - 8$$

Entonces:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A=-8 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } \ (A,B)=(-4,5)$$

Por lo tanto:

$$\frac{x-8}{x^2+2x} = -\frac{4}{x} + \frac{5}{x+2}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x-8}{x^2+2x}\,dx = \int \left(-\frac{4}{x} + \frac{5}{x+2}\right) dx = -4\,\ln|x| + 5\,\ln|x+2| + C$$

b) Con integrales definidas hallar el **área** de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de $f(x) = (2-x)e^{-x/2}$ para $0 \leq x \leq 4$.

Rta
Debemos averiguar en qué puntos del intervalo $[0,4]$ la gráfica de f se encuentra por encima de eje x y en qué puntos se halla por debajo. Dado que f es continua en $[0,4]$ y teniendo en cuenta que

$$f(x)=0 \ \Leftrightarrow \ (2-x)e^{-x/2}=0 \ \Leftrightarrow \ x=2$$

entonces el signo de $f(x)$ ha de ser constante en cada subintervalo $(0,2)$ y $(2,4)$. De hecho:

$$0<x<2 \ \Rightarrow \ f(x)>0$$
$$2<x<4 \ \Rightarrow \ f(x)<0$$

Luego, la región del enunciado es:

$$R = R_1 \cup R_2 \ \text{ donde}$$

$$R_1 = \{(x,y) : \ 0 \leq x \leq 2 \ , \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$
$$R_2 = \{(x,y) : \ 2 \leq x \leq 4 \ , \ f(x) \leq y \leq 0\}$$

Por lo tanto:

$$\text{área}(R) = \text{área}(R_1) + \text{área}(R_2) = \int_0^2 f(x)\,dx - \int_2^4 f(x)\,dx =$$

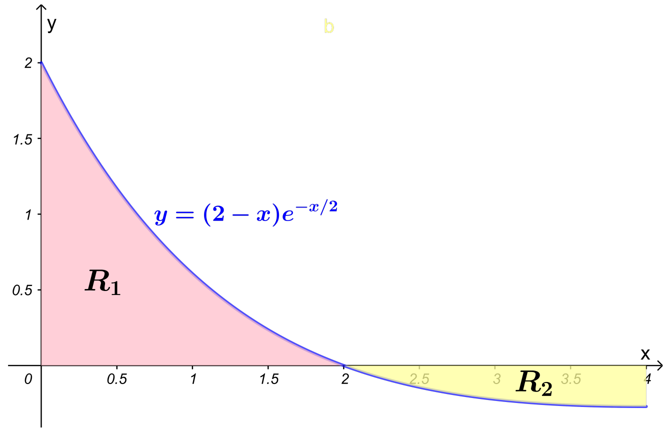

Figura 1: Ejercicio 1b

$$= \int_0^2 (2-x)e^{-x/2}dx - \int_2^4 (2-x)e^{-x/2}dx$$

Búsqueda de primitiva:

$$\int (2-x)e^{-x/2}dx \overset{\substack{\text{por partes:}\\ u=2-x\,;\,du=-dx\\ dv=e^{-x/2}dx\,;\,v=-2e^{-x/2}}}{=} -2(2-x)e^{-x/2} - 2\int e^{-x/2}dx =$$

$$= -2(2-x)e^{-x/2} + 4e^{-x/2} + C = 2xe^{-x/2} + C$$

Entonces:

$$\text{área}(R) = \int_0^2 (2-x)e^{-x/2}dx - \int_2^4 (2-x)e^{-x/2}dx = 2xe^{-x/2}\Big|_0^2 - 2xe^{-x/2}\Big|_2^4 =$$

$$= 4e^{-1} + \left(-8e^{-2} + 4e^{-1}\right) = 8e^{-1} - 8e^{-2}$$

c) Sea R el triángulo del plano limitado por: $x+y=4$, $x+2y=4$, $x=0$. **Plantear** con integrales el volumen del sólido que genera R al rotar alrededor de la recta $y=4$.

Rta

El triángulo del enunciado es

$$R = \left\{(x,y) : 0 \le x \le 4 \; , \; 2 - \frac{x}{2} \le y \le 4 - x\right\}$$

Para $0 \le x \le 4$ los radios interno y externo del sólido son:

$$r(x) = 4 - (4-x) = x \text{ (distancia entre A y B en la figura)}$$

$$R(x) = 4 - \left(2 - \frac{x}{2}\right) = 2 + \frac{x}{2} \text{ (distancia entre A y C en la figura)}$$

Entonces el volumen del sólido de revolución está dado por

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 \left(2 + \frac{x}{2}\right)^2 dx - \pi \int_0^4 x^2 dx$$

2. a) Resolver: $(2xy - 4\cos y)\,dx + (x + 2\operatorname{sen} y)^2\,dy = 0$ con la condición $y(1) = 0$.
   b) Hallar las curvas ortogonales a la familia de parábolas $\mathcal{F} : x - 1 = Cy^2$.

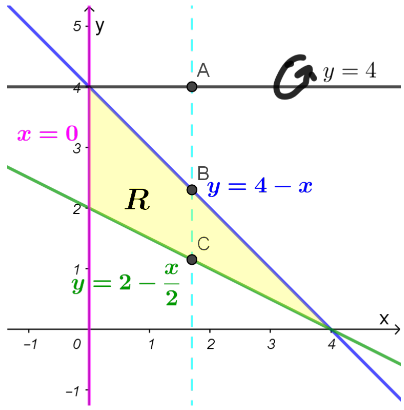

Figura 2: Ejercicio 1c

Rta

a) La ecuación diferencial es

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

donde

$$M(x,y) = 2xy - 4\cos y \qquad\qquad N(x,y) = (x + 2\operatorname{sen} y)^2$$

Se tiene $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2)$ Además

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 4\cos y) = 2x + 4\operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((x + 2\operatorname{sen} y)^2\right) = 2(x + 2\operatorname{sen} y) = 2x + 4\operatorname{sen} y$$

Se verifica la condición necesaria de exactitud: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

La ED será exacta si existe alguna función $f(x,y)$ tal que

$$\begin{cases} f'_x = 2xy - 4\cos y \\ f'_y = (x + 2\operatorname{sen} y)^2 \end{cases}$$

La primera de estas igualdades conduce a:

$$f(x,y) = x^2 y - 4x\cos y + g(y)$$

Derivando respecto de y:

$$f'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y - 4x\cos y + g(y)\right) = x^2 + 4x\operatorname{sen} y + g'(y)$$

Empleando ahora la segunda igualdad, resulta

$$x^2 + 4x\operatorname{sen} y + g'(y) = (x + 2\operatorname{sen} y)^2$$

Es decir:

$$x^2 + 4x\operatorname{sen} y + g'(y) = x^2 + 4x\operatorname{sen} y + 4\operatorname{sen}^2 y$$

así que

$$g'(y) = 4\operatorname{sen}^2 y$$

Entonces

$$g(y) = \int 4\operatorname{sen}^2 y\,dy = 4\int \frac{1 - \cos(2y)}{2}dy = \int (2 - 2\cos(2y))\,dy$$

$$g(y) = 2y - \operatorname{sen}(2y) + K$$

Por lo tanto:

$$f(x, y) = x^2y - 4x\cos y + 2y - \operatorname{sen}(2y) + K$$

La solución general de la ecuación diferencial es pues

$$x^2y - 4x\cos y + 2y - \operatorname{sen}(2y) = C$$

Condición inicial:

$$y(1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -4$$

Esto determina la siguiente solución particular del PVI dado:

$$x^2y - 4x\cos y + 2y - \operatorname{sen}(2y) = -4$$

b) A partir de la ecuación de la familia $\mathcal{F} : x - 1 = Cy^2$, derivando implícitamente respecto de x se obtiene:

$$1 = 2Cyy'$$

Debemos eliminar el parámetro C. Para ello multiplicamos esta ecuación por y y utilizamos la ecuación de la familia dada, del modo siquiente:

$$y = 2\,\overbrace{Cy^2}^{x-1}\,y'$$

Se obtiene así la ecuación diferencial de $\mathcal{F}$:

$$y = 2(x - 1)y'$$

Despejando las pendientes como función del punto (x, y) resulta

$$y' = \frac{y}{2(x-1)}$$

La ecuación diferencial de la familia ortoganl se obtiene planteando la condición de perpendicularidad, expresada en términos de las pendientes como:

$$y' = -\frac{2(x-1)}{y}$$

La familia ortogonal será la solución general de esta nueva ED, que resolvemos por separación de variables:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x-1)}{y}$$

$$y\,dy = -(x - 1)\,dx$$

$$\int y\,dy = -2\int (x-1)\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = -(x-1)^2 + C_2$$

O sea la familia de elipses:

$$\mathcal{F}^{\perp} : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

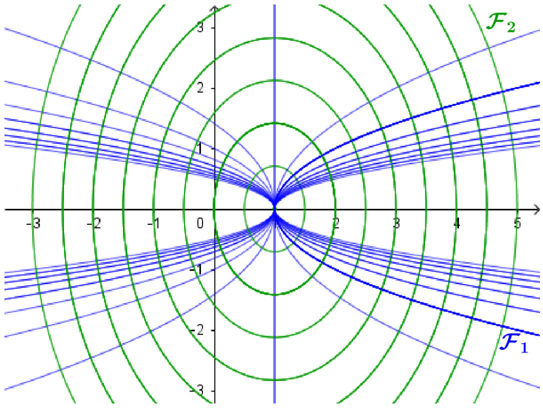

Figura 3: Ejercicio 2b

3. Sea R el paralelogramo limitado por las rectas:

$$y = x - 1 \ , \ y = x - 4 \ , \ x + 2y = -2 \ , \ x + 2y = 4$$

Calcular $I = \displaystyle\iint_R \frac{x+2y}{(x-y)^2} dA_{xy}$ proponiendo un cambio de variables que transforme R en un rectángulo.

Rta

Definiendo

$$T^{-1} : \begin{cases} u = x - y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

se tiene:

$$y = x - 1 \iff x - y = 1 \iff u = 1$$
$$y = x - 4 \iff x - y = 4 \iff u = 4$$
$$x + 2y = -2 \iff v = -2$$
$$x + 2y = 4 \iff v = 4$$

logrando que R se transforme en el rectángulo $T^{-1}(R) = [1, 4] \times [-2, 4]$.

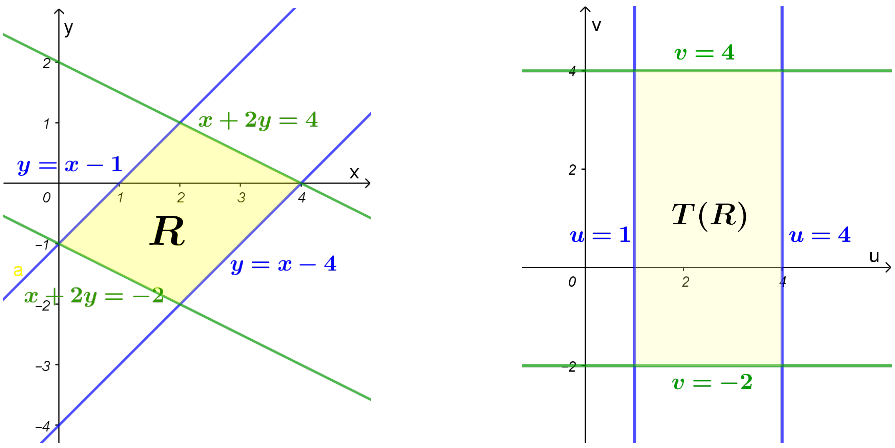

Figura 4: Ejercicio 3

A partir de T^{-1}, despejando x, y en términos de u, v se obtiene

$$T : \begin{cases} x = \frac{2u+v}{3} \\ \\ y = \frac{-u+v}{3} \end{cases}$$

El jacobiano de T está dado por

$$J_T = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{2}{3}\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Aplicando el teorema de cambio de variables en las integrales dobles:

$$I = \iint_R \frac{x+2y}{(x-y)^2} dA_{xy} = \int_1^4 \int_{-2}^4 \frac{v}{u^2}\frac{1}{3}\, dv\, du = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{1}{2}\frac{v^2}{u^2}\Big|_{-2}^4 du =$$

$$= 2\int_1^4 \frac{1}{u^2}\, du = -\frac{2}{u}\Big|_1^4 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}$$

4. **Plantear:**
a) con integrales triples, proyectando sobre el plano xz, el cálculo del volumen del sólido del primer octante limitado por:

$$x + z = 2\,,\; y + z = 2\,,\; y + 2z = 4\,,\; x = 0\,,\; z = 0$$

Rta
La región proyección del sólido V sobre el plano xz es el triángulo:

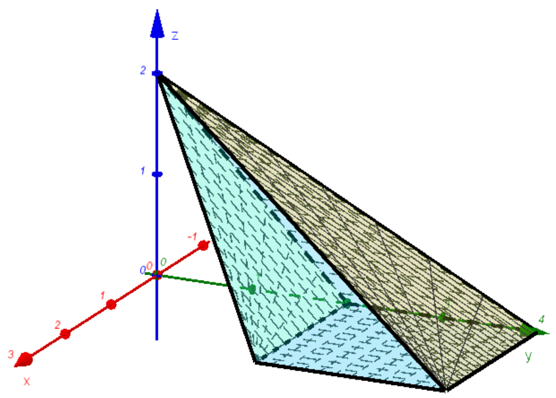

Figura 5: Ejercicio 4a

$$R_{xz} = \{(x,z) :\; 0 \le x \le 2\;,\; 0 \le z \le 2 - x\}$$

Alternativamente, también puede describirse como:

$$R_{xz} = \{(x,z) :\; 0 \le z \le 2\;,\; 0 \le x \le 2 - z\}$$

Para $(x,z) \in R_{xz}$ genérico la variación de y está dada por:

$$2 - z \le y \le 4 - 2z$$

Es decir

$$V = \{(x,y,z) :\; 0 \le x \le 2\;,\; 0 \le z \le 2 - x\;,\; 2 - z \le y \le 4 - 2z\}$$

o también

$$V = \{(x,y,z) :\; 0 \le z \le 2\;,\; 0 \le x \le 2 - z\;,\; 2 - z \le y \le 4 - 2z\}$$

Entonces

$$\operatorname{vol}(V) = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{2-z}^{4-2z} dy\, dz\, dx$$

o también

$$\operatorname{vol}(V) = \int_0^2 \int_0^{2-z} \int_{2-z}^{4-2z} dy\, dx\, dz$$

b) en coordenadas cilíndricas el cálculo de la masa del sólido limitado por: $x^2+(y-1)^2 = 1\,, y+z = 4\,, 2y+z = 4$. La densidad de masa es $f(x,y,z) = yz$.
Rta

Emplearemos las coordenadas cilíndricas $T : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$

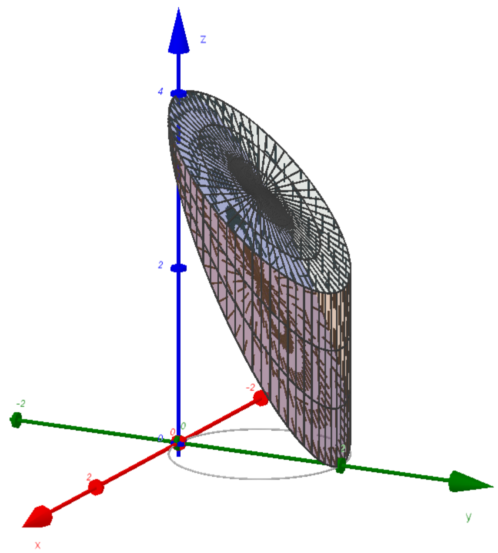

Figura 6: Ejercicio 4b

En el plano xy la región proyección del sólido V es un círculo de radio 1 cuya frontera es la circunferencia:

$$x^2+(y-1)^2 = 1 \;\;\Leftrightarrow\;\; x^2+y^2 = 2y \;\;\Leftrightarrow\;\; r^2 = 2r\operatorname{sen}\theta \;\;\Leftrightarrow\;\; r = 2\operatorname{sen}\theta$$

En esta región la variación del ángulo polar es $0 \le \theta \le \pi$.
Para $(x,y) \in R_{xy}$ genérico, la variación de z es

$$4-2y \le z \le 4-y$$

que expresado en coordenadas cilíndricas resulta

$$4-2r\operatorname{sen}\theta \le z \le 4-r\operatorname{sen}\theta$$

Entonces

$$V_{r\theta z} = \{(r,\theta,z) :\; 0 \le \theta \le \pi,\; r \le 2\operatorname{sen}\theta\;,\; 4-2r\operatorname{sen}\theta \le z \le 4-r\operatorname{sen}\theta\}$$

La densidad de masa $f(x,y,z) = yz$ en coordenadas cilíndricas es

$$f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, z) = r\operatorname{sen}\theta\, z$$

La masa del sólido está representada por

$$M = \iiint_V yz\, dV_{xyz} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} \int_{4-2r\,\text{sen}\,\theta}^{4-r\,\text{sen}\,\theta} r\,\text{sen}\,\theta\, z\, r\, dz\, dr\, d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} \int_{4-2r\,\text{sen}\,\theta}^{4-r\,\text{sen}\,\theta} r^2\,\text{sen}\,\theta\, z\, dz\, dr\, d\theta$$

donde hemos incluido el factor jacobiano de la transformación en coordenadas cilíndricas (módulo).

c) en coordenadas esféricas el cálculo de $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV$ siendo

$$V = \left\{(x,y,z) :\ x^2+y^2+(z-2)^2 \le 4 \ \wedge\ z \le \sqrt{3x^2+3y^2}\right\}$$

<u>Rta</u>

Emplearemos las coordenadas esféricas $T : \begin{cases} x = \rho\cos\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ y = \rho\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$

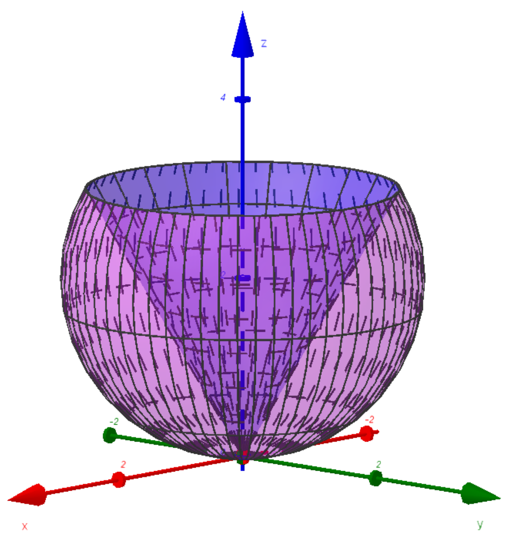

Figura 7: Ejercicio 4c

Recordemos que:

$$x^2+y^2+z^2 = \rho^2 \qquad\qquad \text{tg}\,\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}$$

La frontera de V consta de una esfera y un semicono, que en coordenadas esféricas están dadas por:

$$x^2+y^2+(z-2)^2 = 4 \ \Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2-4z+4 = 4 \ \Leftrightarrow\ x^2+y^2+z^2 = 4z \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \rho^2 = 4\rho\cos\varphi \ \Leftrightarrow\ \rho = 4\cos\varphi$$

$$z = \sqrt{3x^2+3y^2} \ \Leftrightarrow\ \text{tg}\,\varphi = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{3x^2+3y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \ \Leftrightarrow\ \varphi = \text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Luego, la descripción del sólido en coordenadas esféricas es

$$V_{\rho\theta\varphi} = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : \; 0 \le \theta \le 2\pi \; , \; \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \; , \; 0 \le \rho \le 4\cos\varphi \right\}$$

El integrando $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ en coordenadas esféricas es

$$f(\rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi, \rho\cos\varphi) = \rho$$

Por lo tanto:

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\varphi} \rho\,\rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{4\cos\varphi} \rho^3 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

donde se ha incluido el factor jacobiano en coordenadas esféricas (módulo).