Integral de Superficie de un Campo Vectorial
(Flujo de un Campo Vectorial)

$$\iint_S F.n\, dS$$

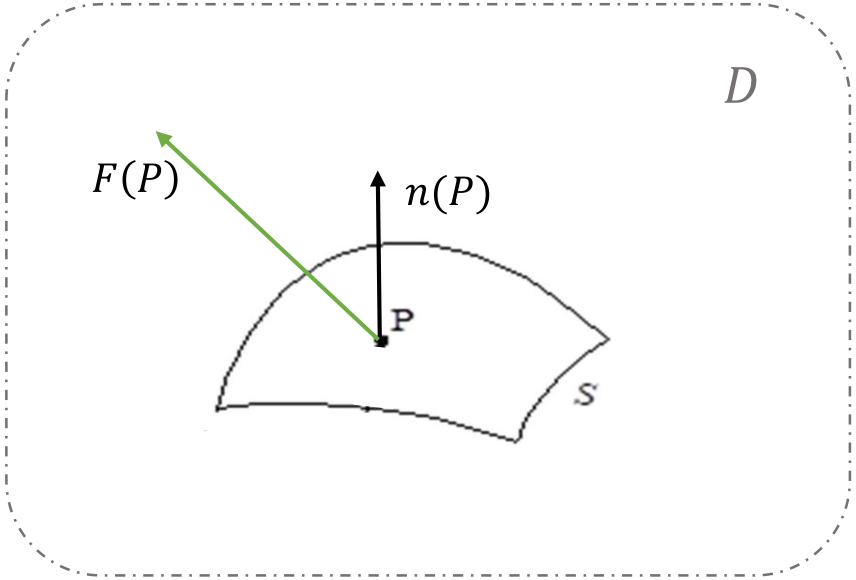
- Definición y cálculo. Sección **7.4**

La Integral de Superficie de un Campo Vectorial, $\iint_S F.n\,dS$, se puede obtener de la Integral de Superficie del Campo escalar, $\iint_S f\ \ dS$, en el caso en que $f = F.n$ (donde n es un Vector Normal a la superficie S, unitario: $n = \frac{N}{|N|}$).
Aquí $f = F.n$ representa la componente de F que es *normal* a la superficie S.

Es por esto que se llama a $\iint_S F.n\,dS$: Integral de Superficie (de la componente Normal) de un Campo Vectorial.

<u>Definamos</u>:

Sea S una superficie acotada y *orientable**. Sea $n = \frac{N}{|N|}$ un vector normal unitario a S.



Sea F un Campo Vectorial con componentes continuas en $D \subset \mathbb{R}^3$.
Supongamos que $S \subset D$.

Si para cada punto $P \in S$ calculamos:

$$F(P).n(P) = f(P)$$

f así definida es continua $\forall\ P \in S$

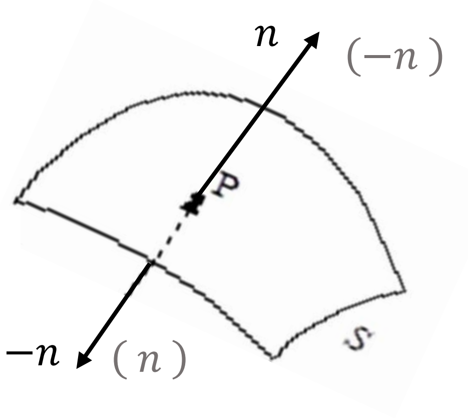
$\therefore$ existe $\iint_S f\ dS$

Reemplazando, obtenemos:

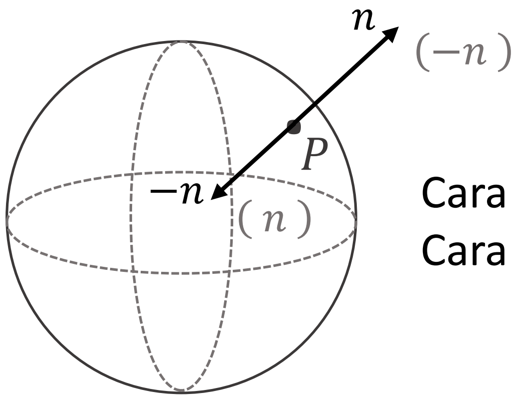
$$\boxed{\iint_S F.n\,dS \quad : \text{ Integral de Superficie del Campo Vectorial } F \text{ a través de } S.}$$

$\left(\begin{array}{c}\text{Flujo de } F \text{ a través de } S,\\ \text{en la dirección de } n\end{array}\right)$

* Aquí *orientable* significa que en S pueden diferenciarse dos caras (cada cara se asocia con la elección de n):



Cara “superior”
Cara “inferior”

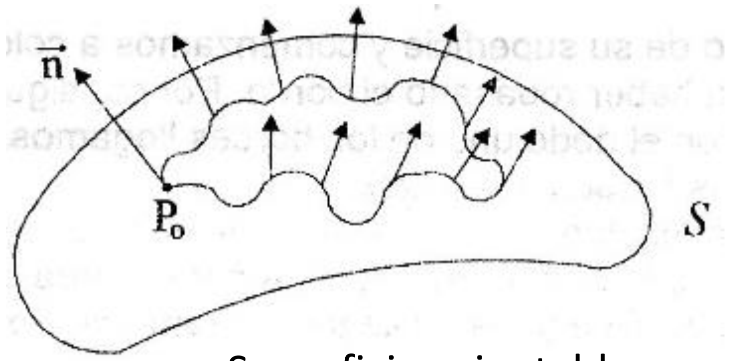


Cara “exterior”
Cara “interior”

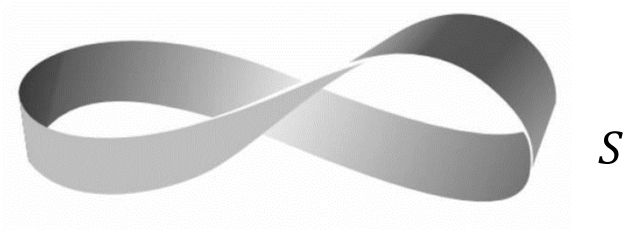
Para superficies orientables, orientar la superficie significa *elegir* el sentido del Normal n.

Formalmente:

Una Superficie suave S se dice **orientable** si un vector normal n, evaluado en $P \in S$, *conserva su sentido* luego de ser trasladado por cada punto de una curva cerrada contenida en S.



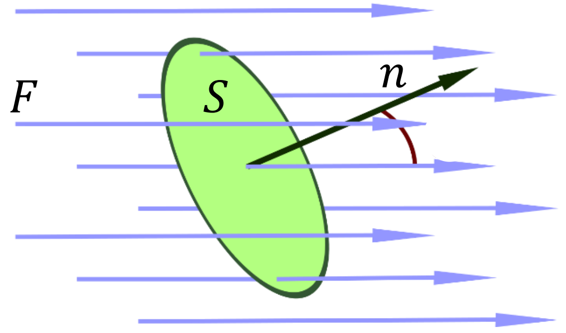
Superficie orientable
(todas aquellas con las que trabajamos)



Superficie no orientable
(cinta de Moëbius)

- Si la superficie S es *cerrada*, la Integral de Flujo de F a través de S se escribe: $\oiint_S F.n\ dS$

- $\iint_S F.n\,dS$ tiene interpretación en Física, en el caso en que F mide el Campo de Velocidades de un fluído en movimiento (y cuando S es la superficie de salida del fluído), como el *Caudal* (cantidad de fluído que atraviesa perpendicularmente a S, por unidad de tiempo).



¿Cómo se calcula $\iint_S F.n\,dS$?

Recordemos que si S se describe como $S: r(u,v)$, $(u,v) \in R_{uv}$, entonces: $\iint_S f\ dS = \iint_{R_{uv}} f\big(r(u,v)\big)\,|N(u,v)|\,dA$

Ahora $f = F.n$, luego:

$$f\big(r(u,v)\big) = F\big(r(u,v)\big).n\big(r(u,v)\big) = F\big(r(u,v)\big).\ \frac{N(u,v)}{|N(u,v)|}$$

Reemplazando:

$$\iint_S F.n\,dS = \iint_{R_{uv}} F\big(r(u,v)\big)\,.\,\frac{N(u,v)}{|N(u,v)|}\ |N(u,v)|\,dA = \iint_{R_{uv}} F\big(r(u,v)\big)\,.\ N(u,v)\ dA$$

En resúmen:

Si F es un Campo Vectorial continuo en los puntos de una superficie orientable y acotada S, entonces existe:

$$\iint_S F.n\,dS$$: Integral de Superficie del campo F a través de S, en la dirección de n. (también: Flujo de F a través de S en dirección de n).

Si S se describe como $S: r(u,v)\,,\ (u,v) \in R_{uv},$ entonces la Integral de Superficie de F se calculará *como una Integral doble*:

$$\iint_S F.n\,dS = \iint_{R_{uv}} F\big(r(u,v)\big)\,.\,N(u,v)\,dA\,, \quad \text{donde } N(u,v) = r_u(u,v) \times r_v(u,v)$$

Esta es la fórmula con la que ***siempre*** calcularemos a la Integral de Flujo $\iint_S F.n\,dS$.

Propiedades:

Dado que la Integral de Superficie de un Campo Vectorial se obtiene de la Integral de Superficie de un Campo Escalar, se verifican las mismas propiedades (linealidad, aditividad en el conjunto de integración, etc).

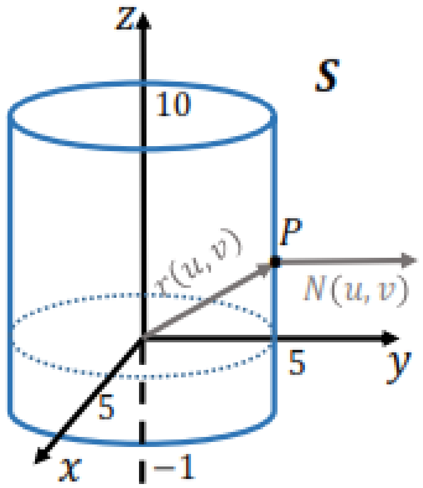
Excepto el comportamiento frente a cambios de orientación de *S*:

Propiedad:

El resultado de la Integral de Superficie de un Campo Vectorial *depende* de la orientación de la Superficie S: el valor de la Integral *cambia de signo* cuando se cambia la orientación de S (n ó $-n$).
O sea:

$$\iint_{R_{uv}} F(r(u,v)) \, . \underbrace{\left(r_u(u,v) \times r_v(u,v)\right)}_{N(u,v)} \, dA = -\iint_{R_{uv}} F(r(u,v)) \, . \underbrace{\left(r_v(u,v) \times r_u(u,v)\right)}_{-N(u,v)} \, dA$$

Ejemplo: Sea S: $x^2 + y^2 = 25$, donde $-1 \le z \le 10$. Sea $F = \langle -y\, e^z,\ x\, e^z,\ z^3\, x\, y \rangle$.
Calcule el Flujo de F hacia el exterior de S.



Calcularemos: $\iint_S F.n \ dS = \iint_{R_{uv}} F\big(r(u,v)\big)\,.N(u,v)\,dA$, donde $N(u,v)$ debe ser *exterior* a S.

S: $r(u,v) = \langle 5\cos(u), 5\,sen(u), v \rangle$, $(u,v) \in R_{uv}$

R_{uv}: $\{(u,v);\ 0 \le u \le 2\pi, -1 \le v \le 10\}$

$N(u,v) = r_u(u,v) \times r_v(u,v) = \langle 5\,cos(u), 5\,sen(u), 0 \rangle$ (ver ejemplo de Clase 26)

Evaluando en un punto, por ejemplo P_0: $(0,5,3)$, se puede ver que N es exterior (ver ejemplo de Clase 26):

$(u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 3\right)$ es tal que $r(u_0, v_0) \leftrightarrow P_0$, pues: $r\left(\frac{\pi}{2}, 3\right) = \left\langle 5\,cos(\frac{\pi}{2}), 5\,sen(\frac{\pi}{2}), 3 \right\rangle = \langle 0, 5, 3 \rangle \leftrightarrow P_0$: $(0,5,3)$

$N(P_0) = N(u_0, v_0) = N\left(\frac{\pi}{2}, 3\right) = \left\langle 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), 5\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right), 0 \right\rangle = \langle 5, 0, 0 \rangle$ ⟵ Graficando $N(P_0)$ se vé que es exterior.

$$F\big(r(u,v)\big)\,.N(u,v) = \langle -5\,sen(u)\,e^v, 5\cos(u)\,e^v, v^3\, 5\cos(u)\, 5\,sen(u) \rangle \,. \langle 5\,cos(u), 5\,sen(u), 0 \rangle = 0$$

$$\iint_S F.n\,dS = \iint_{R_{uv}} F\big(r(u,v)\big)\,.\ N(u,v)\,dA = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{10} 0\,dv\,du = 0 \qquad \therefore \qquad \boxed{\iint_S F.n\,dS = 0}$$

Nota: Si $N(u,v)$ fuera *interior*, deberíamos hacer $-N(u,v)$ (multiplicar c/componente por -1) para calcular el Flujo.

En el Módulo:

En la sección **7.4** se desarrollan los conceptos relacionados con la Integral de Flujo.

En los 2 primeros párrafos se encontrarán las Definiciones de: Superficie suave, Vector normal unitario, y Superficie Orientable.

En la pág 254 se presenta a la Integral de Flujo y se dan interpretaciones físicas en el marco de la hidrodinámica y electrodinámica.
La Fórmula de Cálculo para la Integral de Flujo se discute en la sección **7.4.1** .
Observación: En la sección **7.4.1** hallarán *otra* expresión para la fórmula de cálculo de la Integral de Flujo.
Notar que ésa fórmula es válida *sólo* en el caso de que *S* sea "gráfica de función". Por el contrario, la fórmula de cálculo dada en la clase es aplicable a *cualquier* superficie *S* orientable (inclusive cuando sea gráfica de función).

En las págs 256 a 258 se muestran 2 ejemplos de cálculo.

En la pág 258 se muestra otra notación usada a veces para la Integral de Flujo.

La sección **7.4.3** es de Ejercicios:

·**)** El ej 1 es de cálculo. En 1b no usar la r(u,v) dada, proponer una parametrización trivial.
·**)** En el ej 2 se hace uso de la notación alternativa (pág 258): Se resuelve siempre con la fórmula vista en clase.
·**)** En el ej 3 se hace uso de la aplicación física dada al pie de pág 254. Notar la diferencia entre los incisos i) e ii):
En i) la superficie es abierta mientras que en ii) es cerrada.
·**)** En el ej 4 (ambos incisos) se debe calcular *cada* Integral de la igualdad propuesta para mostrar que son iguales.

Adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1b) y 1h) de la sección **7.4.3**.

⟶ Próxima Clase: sección **7.5**.