Dada la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, <u>¿cómo puedo proceder para analizar su convergencia?</u>

PASO 0: Condición necesaria para la convergencia.

Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ → La serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ Diverge

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, no puedo afirmar nada aún.

PASO 1: ¿el término general tiene alguna forma característica que me permita analizar su convergencia y <u>hallar su suma</u>?

SI

<u>Si puedo escribirla de la forma</u>: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} c.r^n$

la serie es **geométrica**.

Calculo su razón mediante la fórmula: $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Si $|r| \geq 1$, $la\ serie\ diverge$

Si $|r| < 1$ la serie converge y se puede hallar su valor

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \frac{Primer\ Término}{1-Razón} = \frac{c.r^k}{1-r}$$

<u>Si puedo escribirla de la forma</u>: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} b_n - b_{n+h}$

la serie es **telescópica**. (h$\in N$)

Busco el término general de la sucesión de sumas parciales.

Calculo S_1, S_2, S_3,… y los que sean necesarios hasta encontrar un patrón que me de una fórmula para la suma N-ésima: $S_N = \sum_{n=k}^{N} a_n$ = f(N)

Tomo el límite cuando N tiende a infinito del término general de la sucesión de sumas parciales: $\lim_{N\to\infty} S_N$

Si el límite existe y es un número real, la serie converge a ese valor.

Si el límite no existe, tiende a $\pm\infty$ u oscila, la serie diverge.

NO

PASO 2: ¿Estoy trabajando con una serie de términos positivos?

SI

porque $a_n \geq 0$, $\forall n \geq k$. Entonces busco el criterio que más me conviene.

- **CRITERIO DE LA INTEGRAL**

  Es útil para funciones con primitivas simples.

  Defino una función f(x) tal que $f(n) = a_n$, $\forall n \in N, n \geq k$

  Pruebo que f es continua, positiva y decreciente en el intervalo de interés.

  Analizo si la integral impropia $\int_k^{\infty} f(x).dx$ converge o diverge.

  Eso nos indicará la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$

- **CRITERIO DE LA RAÍZ**

  Es útil cuando a_n tiene a n tanto en la base como en el exponente.

  Calculo el límite: $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

  Si L < 1, la serie converge; Si L>1 la serie diverge; Si L =1 el criterio no decide.

- **CRITERIO DEL COCIENTE**

  Es útil si a_n tiene multiplicaciones, divisiones o factoriales.

  Calculo el límite: $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

  Si L < 1, la serie converge; Si L>1 la serie diverge; Si L =1 el criterio no decide.

- **CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA CON $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$**
  - Sea $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n \in N,\ n \geq k$.

    Si la serie $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ también lo es.
  - Sea $0 \leq b_n \leq a_n$, $\forall n \in N,\ n \geq k$

    Si la serie $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ también lo es.

  Son útiles cuando a_n es comparable de forma sencilla con series-p o geométricas.

- **CRITERIO DE COMPARACIÓN EN EL LÍMITE $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$**

  Elijo otra serie $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$, de la que yo conozco sencillamente su convergencia. Debe ser de términos positivos: $b_n \geq 0$, $\forall n \geq k$.

  Calculo el límite $L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Si el resultado es un número real positivo, ambas series tienen igual comportamiento (ambas convergen o ambas divergen)

NO

Porque a_n toma valores positivos y negativos.

PASO 3: Analizo convergencia absoluta

Trabajo con una nueva serie cuyo término general es el valor absoluto de la serie que estamos estudiando.

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n = \sum_{n=k}^{\infty} |a_n|$$

Esta nueva serie es de términos positivos: $C_n \geq 0 \,, \forall n \geq k$

Por lo tanto la podemos estudiar con cualquiera de los criterios del PASO 2.

¿$\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ **CONVERGE?**

SI

Si la serie $\sum_{n=k}^{\infty} |a_n|$ converge entonces también converge la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$.

La serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ **CONVERGE ABSOLUTAMENTE**

NO

La serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ **no converge absolutamente**

PASO 4: Analizo convergencia condicional

- **CRITERIO DE LEIBNIZ**
  Sirve para series que son de tipo alternadas, es decir que se las puede escribir de la forma:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n b_n$$

  Debemos probar que se cumplen las siguientes hipótesis:

  1. $b_n \geq 0 \,, \forall n \geq k;$
  2. $\{ b_n \}$ es decreciente
  3. $\lim_{n \to \infty} b_n = 0$

Si las hipótesis se cumplen podemos afimar que la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ **CONVERGE CONDICIONALMENTE**