Representación Vectorial de Superficies

- Parametrización y Representación Vectorial Paramétrica de Superficies.

Vector Normal a una Superficie Parametrizada. Sección **7.1**

Recordemos que, para poder definir (y calcular) a las Integrales de Línea $\int_C f\ ds$, fue necesario primero describir vectorialmente a las curvas C, $C: r(t),\ t \in [a, b]$.

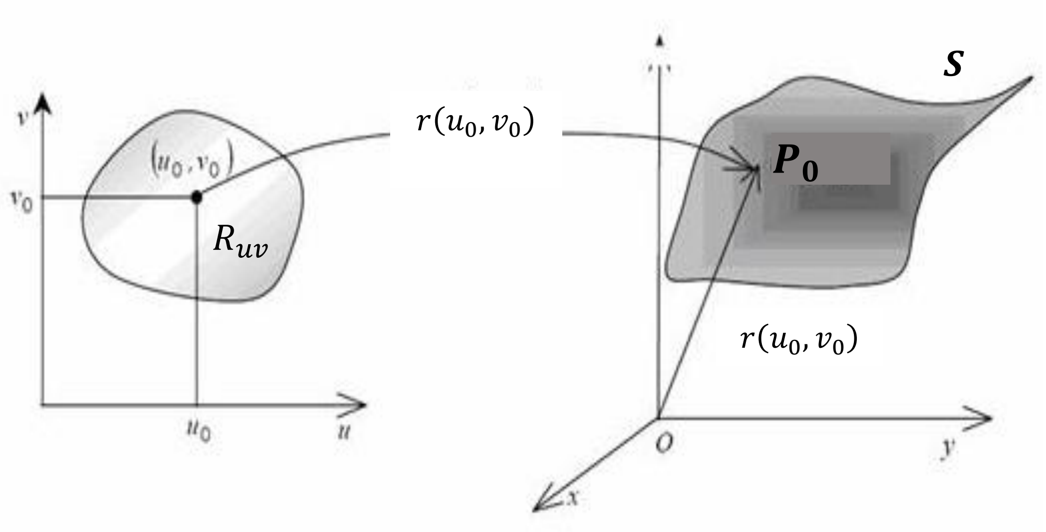
De la misma manera ahora, para poder definir (y calcular) a las *Integrales de Superficie* $\iint_S f\ dS$, necesitaremos primero describir vectorialmente a las superficies S:

La descripción vectorial de una superficie se logra a través de una **Función vectorial paramétrica**:

$$S\!:\ r\!:\ R_{u\,v} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$

$$r(u,v) = \langle x(u,v), y(u,v), z(u,v) \rangle$$

$$(\ r(u,v) = x(u,v)\ \boldsymbol{i} + y(u,v)\ \boldsymbol{j} + z(u,v)\ \boldsymbol{k}\ )$$



Si $P_0\!: (x_0, y_0, z_0) \in S$, entonces existe $(u_0, v_0) \in R_{u\,v}$ tal que:

$$r(u_0, v_0) = \langle x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0) \rangle = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle \leftrightarrow P_0$$

O sea, cada punto $P \in S$ es el extremo de un vector, $r(u,v)$, que nace en el origen.

<u>Propiedades</u> <u>de la función vectorial paramétrica $r(u, v)$</u>:

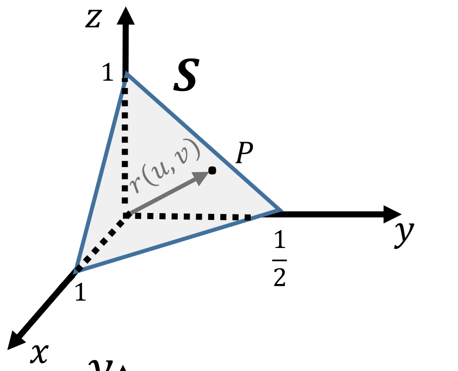
- Debido a su carácter *vectorial*, $r(u, v)$ verifica todas las propiedades de los vectores (suma, producto escalar, producto vectorial...).
- Debido a su carácter *funcional*, $r(u, v)$ obedece a todas las operaciones de las funciones (límite, continuidad, derivabilidad respecto de u y v,..).

Las *derivadas parciales* de una función vectorial $r(u, v)$ resultarán de interés pues con ellas podremos calcular un Vector Normal a la Superficie (después..).

<u>Ejemplo 1</u>: Describir vectorialmente a la superficie S, gráfica de $x + 2\,y + z = 1$, en el 1º octante.

Proponemos ecuaciones paramétricas :
(parametrización *trivial*)

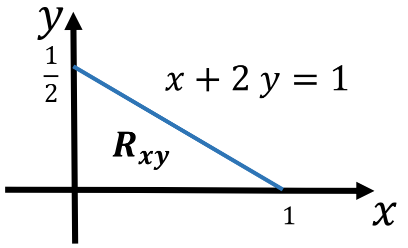
$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1 - u - 2\,v \end{cases}, \qquad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq \frac{1-u}{2} \end{matrix}$$



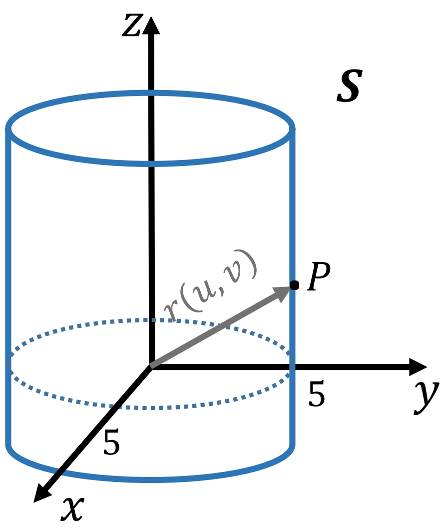
Luego:

$$S\colon\ r(u, v) = \langle x(u, v), y(u, v), z(u, v)\rangle = \langle u, v, 1 - u - 2v\rangle\,, \quad (u, v) \in R_{uv}.$$

$$R_{uv}\colon \left\{(u, v);\ \ 0 \leq u \leq 1\ ,0 \leq v \leq \frac{1-u}{2}\right\}$$



Ejemplo 2: Describir vectorialmente a la superficie S, gráfica de $x^2 + y^2 = 25$.



Proponemos ecuaciones paramétricas:
(parametrización *cilíndrica*)

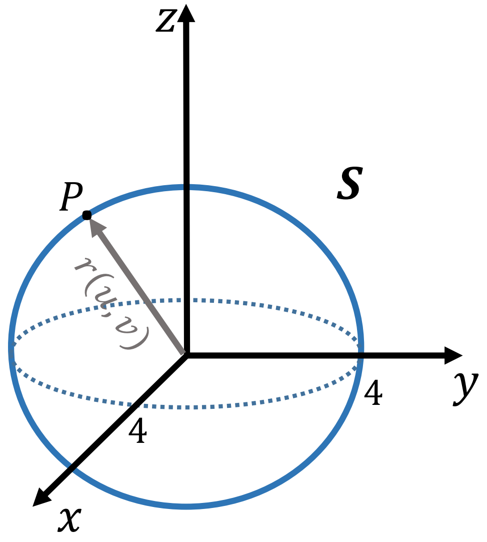
$$\begin{cases} x = 5\cos(u) \\ y = 5\,sen(u) \\ z = v \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 2\pi \\ v \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Luego:

$$S:\ r(u,v) = \langle 5\cos(u), 5\,sen(u), v \rangle, \quad (u,v) \in R_{uv}.$$

$$R_{uv}: \{(u,v);\ 0 \leq u \leq 2\pi, v \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 3: Describir vectorialmente a la superficie S, gráfica de $x^2 + y^2 + z^2 = 16$.



Proponemos ecuaciones paramétricas:
(parametrización *esférica*)

$$\begin{cases} x = 4\cos(u)sen(v) \\ y = 4\,sen(u)sen(v) \\ z = 4\cos(v) \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq \pi \end{matrix}$$

Luego:

$$S:\ r(u,v) = \langle 4\cos(u)sen(v), 4\,sen(u)sen(v), 4\cos(v) \rangle, \quad (u,v) \in R_{uv}.$$

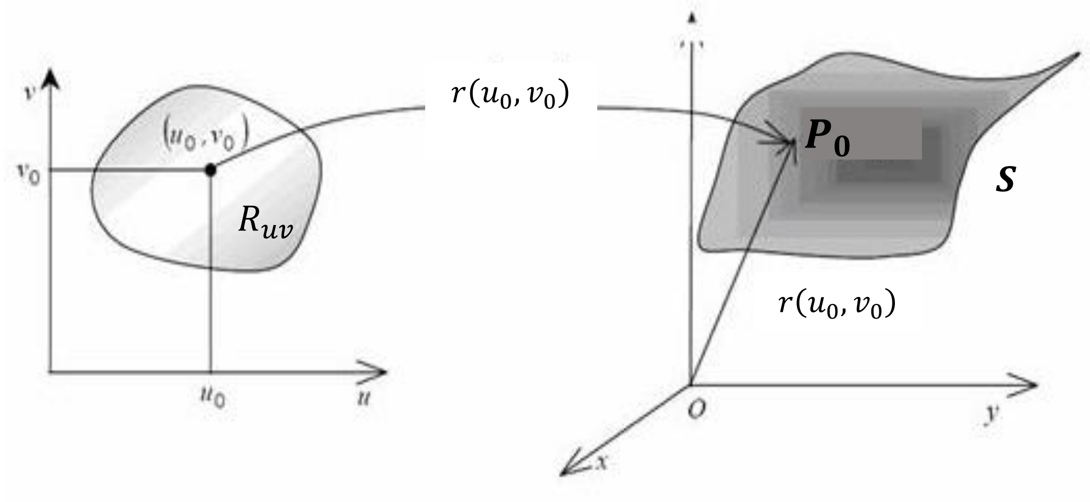
$$R_{uv}: \{(u,v);\ 0 \leq u \leq 2\pi, 0 \leq v \leq \pi\}$$

<u>Vector Normal a una Superficie Parametrizada</u>:

Sea S una superficie parametrizada y sea $P_0 \in S$

S: $r(u,v)$, $\quad (u,v) \in R_{u\,v}$

existe $(u_0, v_0) \in R_{u\,v}$ tal que: $r(u_0, v_0) \leftrightarrow P_0$

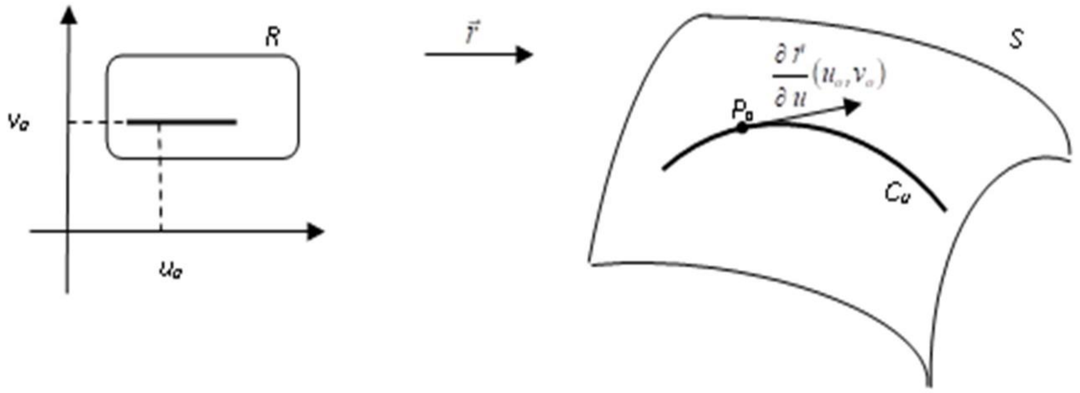


Supongamos que hacemos:

a) $v = v_0$

C_u: $r(u, v_0)$: *u-curva*. (cuando $u = u_0$, C_u pasa por P_0)

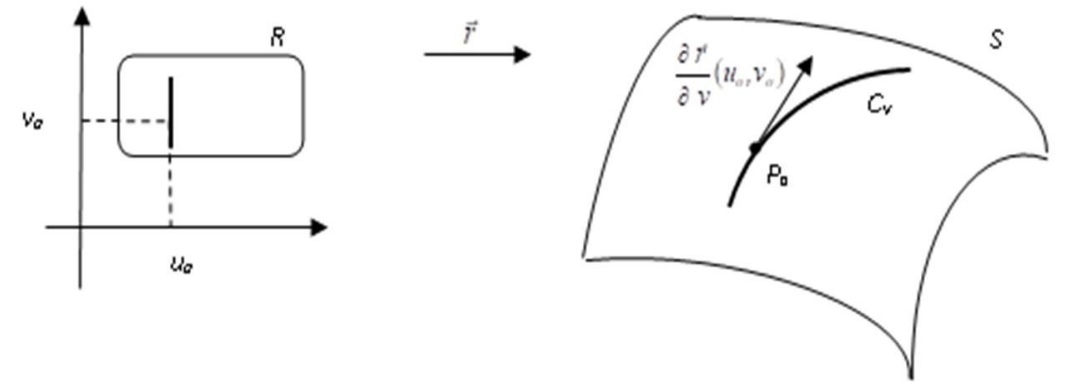
$$\left.\frac{\partial\, r(u, v_0)}{\partial\, u}\right|_{u_0} = r_u(u_0, v_0)$$: vector tangente a C_u en P_0.



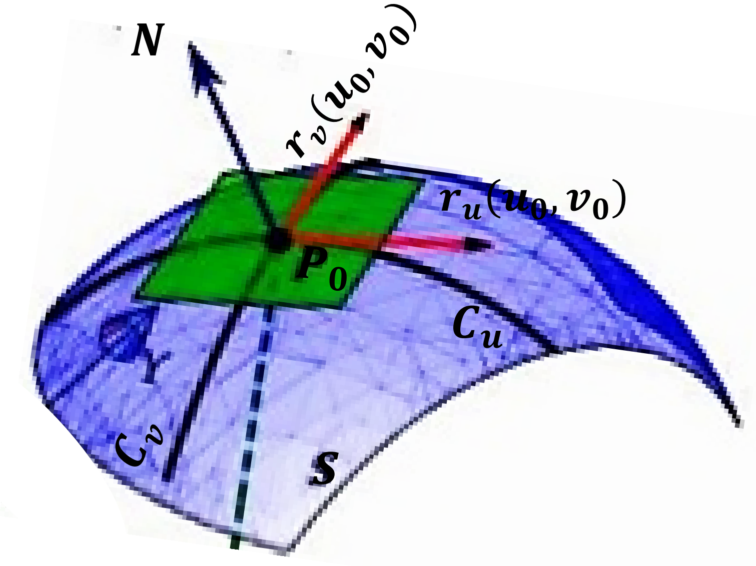
b) $u = u_0$

C_v: $r(u_0, v)$: *v-curva*. (cuando $v = v_0$, C_v pasa por P_0)

$$\left.\frac{\partial\, r(u_0, v)}{\partial\, v}\right|_{v_0} = r_v(u_0, v_0)$$: vector tangente a C_v en P_0.



Si $r_u(u_0, v_0)$ y $r_v(u_0, v_0)$ son *<u>no-colineales</u>* ($r_u(u_0, v_0) \neq \alpha\, r_v(u_0, v_0)$) determinarán un plano tangente a S en P_0 , cuyo vector normal N es:

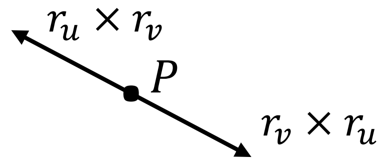


$$\underbrace{N(u_0, v_0) = r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0)}_{\text{Vector Normal a } S \text{ en } P_0.}$$

Definimos entonces un Vector Normal, N, en cada punto de una superficie parametrizada:

Sea S: $r(u, v)$, $(u, v) \in R_{u\,v}$. Si las componentes de $r(u, v)$ son derivables en $R_{u\,v}$ y si $r_u(u, v) \neq \alpha\, r_v(u, v)$, entonces: $N(u, v) = r_u(u, v) \times r_v(u, v)$ es un **Vector Normal a S en P**, siendo $P \leftrightarrow r(u, v)$.

<u>Observación</u>: $r_v(u, v) \times r_u(u, v)$ *también* es un vector normal, opuesto al de arriba:
(se verifica que: $r_u \times r_v = -(r_v \times r_u)$)



<u>Definición</u>: Una superficie parametrizada S se dice **<u>suave</u>** si N tiene componentes continuas en $R_{u\,v}$, y $N \neq \vec{0}$.
Esto sucederá si $r(u, v)$ tiene componentes con derivadas continuas en $R_{u\,v}$ y si $r_u \neq \alpha\, r_v$.

Ejemplo: Hallar y graficar un vector normal a $S: x^2 + y^2 = 25$ en $P_0: (0,5,3)$.

En el Ejemplo 2 vimos que:

S: $r(u,v) = \langle 5\, cos(u), 5\, sen(u), v\rangle$, $\qquad (u,v) \in R_{uv}: \{(u,v);\ 0 \leq u \leq 2\,\pi\,, v \in \mathbb{R}\}$

Primero buscamos (u_0, v_0) tal que $r(u_0, v_0) \leftrightarrow P_0$:

$$r(u_0, v_0) = \langle 5\, cos(u_0), 5\, sen(u_0), v_0\rangle = \langle 0, 5, 3\rangle \longrightarrow \begin{cases} 5\cos(u_0) = 0 \\ 5\, sen(u_0) = 5 \\ v_0 = 3 \end{cases} \quad \therefore \quad (u_0, v_0) = \left(\frac{\pi}{2}, 3\right).$$

Ahora calculamos N (y luego lo evaluaremos en (u_0, v_0)) :

$$r_u(u,v) = \langle -5\, sen(u), 5\, cos(u), 0\rangle$$

$$r_v(u,v) = \langle 0, 0, 1\rangle$$

$$N(u,v) = r_u(u,v) \times r_v(u,v) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -5sen(u) & 5cos(u) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} 5cos(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} -5sen(u) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} -5sen(u) & 5cos(u) \\ 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

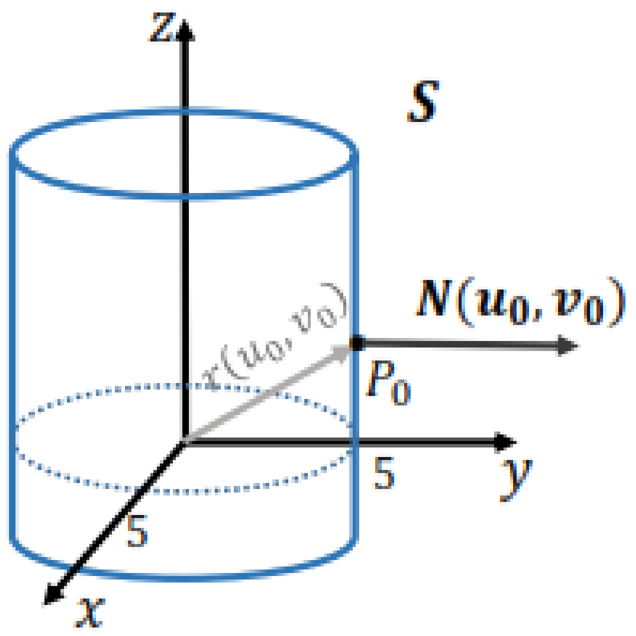
$$= 5\, cos(u)\, \boldsymbol{i} - \big(-5\, sen(u)\big)\, \boldsymbol{j} + 0\, \boldsymbol{k} = \langle 5\, cos(u), 5\, sen(u), 0\rangle$$

$$\therefore \quad \boxed{N(u,v) = \langle 5\cos(u), 5\, sen(u), 0\rangle}$$

Evaluamos el vector normal N en $P_0: (0,5,3)$:

$$N(P_0) = N(u_0, v_0) = N\left(\frac{\pi}{2}, 3\right) = \left\langle 5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right), 5\,sen\left(\frac{\pi}{2}\right), 0\right\rangle = \langle 0,5,0\rangle$$

$\therefore \quad \boxed{N(P_0) = \langle 0,5,0\rangle}$



En el módulo:

El tema Superficies Paramétricas se desarrolla en la sección **7.1**.

La definición de Función Vectorial Paramétrica $r(u, v)$ está en la página 235.

Entre las páginas 236 y 237 se muestran tres ejemplos importantes, en donde se presentan los 3 tipos de parametrización que usaremos a lo largo del curso: Parametrización Cilíndrica (primer ejemplo), Parametrización Esférica (segundo ejemplo) y Parametrización Trivial (tercer ejemplo).

La definición de Superficie Suave está en el 1º párrafo de la página 239.

La fórmula para calcular un Vector Normal a una Superficie Parametrizada se desarrolla en las páginas 239 y 240.

La Ejercitación se encuentra en la Actividad de la página 238 y en el ejercicio 1 de la sección **7.2.1**.

Como material adicional, adjuntamos 2 ejercicios resueltos: el 2º ejercicio de la Actividad de página 238, y el ejercicio 1a) de la sección **7.2.1**.

→ Próxima Clase: secciones **7.2** y **7.3**.