Ecuaciones Diferenciales

- Problemas de Valor Inicial (PVI) y Teorema de Existencia y Unicidad de la solución a un PVI. Sección **3.5**
- Modelado de Problemas. Sección **3.6**
- Familia de curvas ortogonales. Sección **3.7**

¿Qué es un problema de valor inicial?

Dada una ecuación diferencial ordinaria de 1er orden
y un punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$,
al problema de hallar todas las funciones $y = \varphi(x)$
que sean solución de la ecuación diferencial y
que cumplan que $\varphi(x_0) = y_0$ le decimos
Problema de Valor Inicial

$$\text{PVI:} \begin{cases} \text{EDO de 1er orden} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

($y(x_0) = y_0$: condición inicial)

Ejemplos:

1) $\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' = \frac{sen(x^2)y+y^2}{x^2+1} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y' = \frac{3\,y^{2/3}}{2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'x = 2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Ejemplos:

1) $\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y' = \frac{sen(x^2)y+y^2}{x^2+1} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y' = \frac{3\, y^{2/3}}{2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'x = 2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

¿Tienen solución esos PVI?

En ocasiones no es difícil hallar una solución general y determinar luego los posibles valores de la constante para que se cumpla la condición inicial, pero no siempre es así.

Además...

suponiendo que se ha encontrado una solución del PVI, **¿es única?** o sea, ¿podemos estar seguros de que no existen otras soluciones del PVI?

El siguiente teorema (pág 115 del Libro de la cátedra) establece **condiciones suficientes** bajo las cuales podemos dar respuesta afirmativa a esas preguntas :

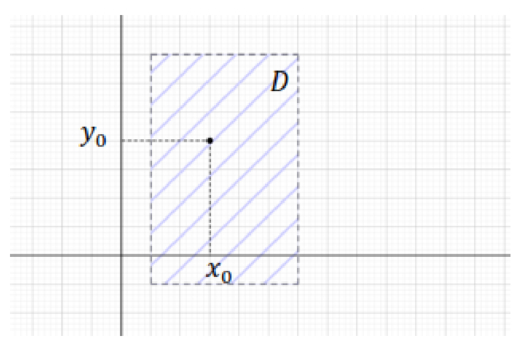
Teorema de Existencia y Unicidad de la solución a un Problema de Valor Inicial

Sea $f(x,y)$ continua en algún rectángulo $D \subset \mathbb{R}^2$, y sea $(x_0, y_0) \in D$. Entonces el Problema de Valor Inicial PVI: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ *tiene*, al menos, una solución.

Si además $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua en D, entonces la solución es *única* en algún intervalo (a,b) al que pertenece x_0.

Las hipótesis del teorema mencionan "un rectángulo $D \subset \mathbb{R}^2$ que tiene en su interior al punto (x_0, y_0)". D podría ser, por ejemplo, el conjunto que se ve rayado en la figura ...

pero también podría ser un conjunto no acotado, como una franja horizontal o vertical del plano [Ej: $D = \{(x,y) : 1 < x < 5\}$; $D = \{(x,y) : -3 < y < 2\}$] o un semiplano [Ej: $D = \{(x,y) : x > 0\}$; $D = \{(x,y) : y < \sqrt{\pi}\}$]



Ejemplo 1: Consideremos el PVI $\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

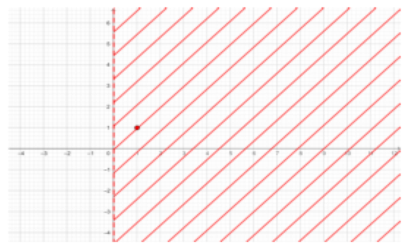
¿Puede aplicarse el teorema anterior a este problema?

Veamos:

$f(x,y) = \frac{x+y}{x^2}$ es continua en todos los puntos (x,y) tales que $x \neq 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{x^2}$ es continua en todos los puntos (x,y) tales que $x \neq 0$

f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0\}$
y el punto $(1,1)$ pertenece a ese conjunto.



Entonces, el teorema de existencia y unicidad de la solución se aplica al

PVI : $\begin{cases} \boldsymbol{y' = \frac{x+y}{x^2}} \\ \boldsymbol{y(1) = 1} \end{cases}$ y garantiza la existencia y unicidad de su solución.

Ejemplo 2:

¿Puede aplicarse el teorema de existencia y unicidad de solución al PVI : $\begin{cases} y' = \frac{sen(x^2)y+y^2}{x^2+1} \\ y(1) = 0 \end{cases}$?

En este caso, tanto $f(x,y)$= $\frac{sen(x^2)y+y^2}{x^2+1}$ como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{sen(x^2)+2y}{x^2+1}$

son continuas en todos los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, por lo tanto

el teorema se aplica y garantiza que el PVI : $\begin{cases} \boldsymbol{y' = \frac{sen(x^2)y+y^2}{x^2+1}} \\ \boldsymbol{y(1) = 0} \end{cases}$ **tiene solución única.**

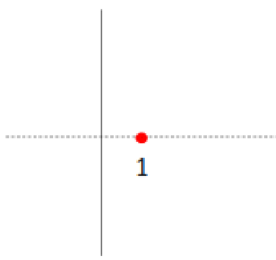
[Lo mismo se podría afirmar para $\begin{cases} y' = \frac{sen(x^2)y+y^2}{x^2+1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$, cualquiera sea (x_0, y_0)]

<u>Ejemplo 3</u>:

¿Puede aplicarse el teorema de existencia y unicidad de solución al PVI : $\begin{cases} y' = \dfrac{3\,y^{2/3}}{2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$

Aquí $f(x,y) = \dfrac{3y^{2/3}}{2}$ es continua en $\mathbb{R}^2$ y por lo tanto, **en virtud del teorema, podemos afirmar que existe al menos una solución para ese PVI.**

Por su parte, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = y^{-1/3}$ no es continua en los puntos (x,y) con $y = 0$



$\therefore$ El Teorema <u>no puede aplicarse</u> para garantizar la unicidad de la solución del PVI dado.

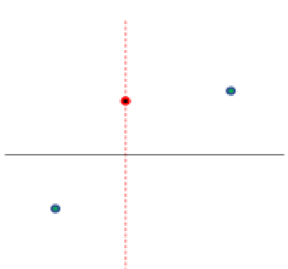
<u>Ejemplo 4</u>: Dado PVI : $\begin{cases} y'x = 2y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

¿Para qué puntos (x_0, y_0) podríamos aplicar el teorema para saber si el PVI : $\begin{cases} y'x = 2y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ tiene solución y si esa solución es única?

Escribamos la ecuación en la forma $y' = f(x,y) = \frac{2y}{x}$

$f(x,y) = \frac{2y}{x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x}$ son continuas en todos los puntos (x,y) salvo en aquellos en los que es $x = 0$.

Si $x_0 = 0$, (x_0, y_0) no está en el interior de ningún rectángulo en el que f sea continua.



Si $x_0 \neq 0$, el teorema se puede aplicar al PVI $\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ (la solución existe y es única)

Si $x_0 = 0$, el teorema no se puede aplicar al PVI $\begin{cases} y' = \frac{2y}{x} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

Podemos verificar lo que hemos hallado por aplicación del Teorema de Existencia y Unicidad, resolviendo los PVI que analizamos antes..
Lo hacemos para los ejemplos 1 y 4:

Ejemplo 1: PVI : $\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Podemos escribir la ecuación $y' = \frac{x+y}{x^2}$ en la forma $y' - \frac{1}{x^2} y = \frac{1}{x}$

[$y' + p(x)y = q(x)$, donde $p(x) = -\frac{1}{x^2}$ y $q(x) = \frac{1}{x}$]

Para resolverla proponemos como solución: $y = u.v$

$u'v + u\,v' - \frac{1}{x^2}uv = \frac{1}{x} \Rightarrow u'v + u\,(v' - \frac{1}{x^2}v) = \frac{1}{x}$ (*)

$v \neq 0 \wedge v' - \frac{1}{x^2}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} - \frac{1}{x^2}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} - \frac{dx}{x^2} = 0 \Rightarrow \ln|v| + \frac{1}{x} = C \Rightarrow$

$\ln|v| - \frac{1}{x} + C \Rightarrow |v| = e^{-1/x + C} = e^{-1/x}e^C \Rightarrow v = \pm e^C e^{-1/x} \Rightarrow v = Ce^{-1/x}$ con $C \neq 0$

Elegimos $v = e^{-1/x}$ y reemplazamos en (*) $\Longrightarrow u'e^{-1/x} = \frac{1}{x} \Rightarrow u' = \frac{1}{x}e^{1/x} \Rightarrow u(x) = \int \frac{e^{1/x}}{x} dx$

$y(x) = \left[\int \frac{e^{1/x}}{x} dx\right] e^{-1/x}$ es solución general de $y' = \frac{x+y}{x^2}$

Podemos escribirla en la forma:

$$y(x) = \left[\int_1^x \frac{e^{1/t}}{t} dt + C\right] e^{-1/x}$$

Para que sea $y(1) = 1$: $1 = Ce^{-1} \Rightarrow C = e$

$y(x) = \left[\int_1^x \frac{e^{1/t}}{t} dt + e\right] e^{-1/x}$ es la solución del PVI $\begin{cases} y' = \frac{x+y}{x^2} \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Ejemplo 4: Analicemos éste ejemplo para la condición inicial $(x_0, y_0) = (0{,}0)$. O sea:

PVI : $\begin{cases} y' x = 2y \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Según vimos el teorema de existencia y unicidad de la solución no puede aplicarse en este caso.

¿Tiene solución ese problema?

Cualquiera sea $C \in \mathbb{R}$, $y = Cx^2$ es solución de ese PVI. En efecto:

i) Si $y = Cx^2 \Rightarrow y' = 2Cx \Rightarrow y'x = 2Cx^2 = 2y \quad [y'x = 2y]$

ii) $0 = C0^2 \quad [y(0) = 0]$

Este PVI tiene entonces infinitas soluciones.

Modelado de Problemas

Un Modelo matemático es la traducción al lenguaje matemático de algo que sucede en la realidad.

Al traducir al lenguaje matemático el problema bajo estudio, se introducen funciones y ecuaciones (en general, Ecuaciones Diferenciales) para poder describir la característica que queremos estudiar.

Ejemplo: Modelo de enfriamiento de Newton:

Problema: Consideremos una sustancia cuya temperatura T es más alta que la del ambiente que la rodea. La experiencia nos dice que la temperatura descenderá hasta igualar la del medio externo. Pensemos, por ejemplo, en un recipiente con un líquido a temperatura $T_0 = 100\ ºC$ que se coloca en la heladera… ¿Cómo varía la Temperatura de la sustancia a medida que transcurre el tiempo?.

Recurrimos a la Ley de Enfriamiento de Newton:

"la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del medio (más frío) que la rodea".

Modelemos el problema: Si definimos:

- $T(t)$ la temperatura de la sustancia en el tiempo t
- T_0 la temperatura de la sustancia en el instante inicial ($t = 0$)
- T_{ext} la temperatura del ambiente externo.

Podremos traducir el problema en un PVI:

- $T(t)$ la temperatura de la sustancia
- T_0 temperatura inicial (en $t = 0$)
- T_{ext} temperatura del exterior

"la velocidad de enfriamiento es proporcional a la diferencia entre la temperatura de la sustancia y la del medio que la rodea".

$T'(t)$: velocidad de enfriamiento

$$T'(t) \propto [T(t) - T_{ext}] \qquad \therefore \qquad T'(t) = k\,[T(t) - T_{ext}]$$

Tenemos así nuestro Modelo de enfriamiento:

$$\begin{cases} T'(t) = k\,[T(t) - T_{ext}] \\ T(0) = T_0 \end{cases} \longleftarrow$$

Es un Problema de Valor Inicial.
(T_0 , T_{ext} , y k deben ser datos del problema)

Por ejemplo: $\begin{cases} T'(t) = -5\,[T(t) - 2] \\ T(0) = 100 \end{cases}$

En el Módulo:

La Definición de Problema de Valor Inicial y el Teorema de Existencia y Unicidad están en la Sección **3.5**.

La sección **3.5.1** es de Ejercicios:
- En el ejercicio 2 se debe analizar (no se pide resolver) como el ejemplo 4 visto arriba.
- En el ejercicio 3iv) primero se debe establecer el PVI y luego analizar.

El Modelado de Problemas se discute, mediante ejemplos, en la Sección **3.6**.
La ejercitación aquí consiste en *completar* cada ejemplo, respondiendo lo que se pide.

La aplicación Familias de curvas ortogonales se discute en la sección **3.7**, con ejercicios en la sección **3.7.1**.

Fin del Capítulo 3.

⟶ Próxima Clase: Secciones **4.1** y **4.2**.