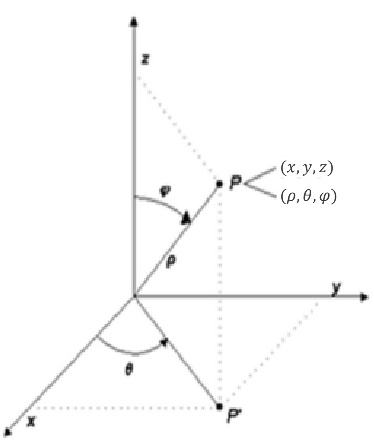
Cambio de Variables en Integrales Triples

- Teorema de Cambio de Variables en Integrales Triples. (sección **5.2**)
- Sistema de Coordenadas Cilíndricas y Cambio de Variables a Coordenadas Cilíndricas. (sección **5.3**)
- Sistema de Coordenadas Esféricas y Cambio de Variables a Coordenadas Esféricas. (sección **5.4**)

Sistema de Coordenadas Esféricas



$\rho > 0 \quad ; \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$

(ρ, θ, φ) son las coordenadas esféricas del punto P

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta sen\varphi \\ y = \rho sen\theta \, sen\varphi \\ z = \rho cos\varphi \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ tg\theta = \dfrac{y}{x} \quad (si \; x \neq 0) \\ tg\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \; (si \; z \neq 0) \end{cases}$$

$$Si \; x = 0 \;\; e \;\; y > 0 \; \rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Si \; x = 0 \;\; e \;\; y < 0 \; \rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$Si \; z = 0 \; \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

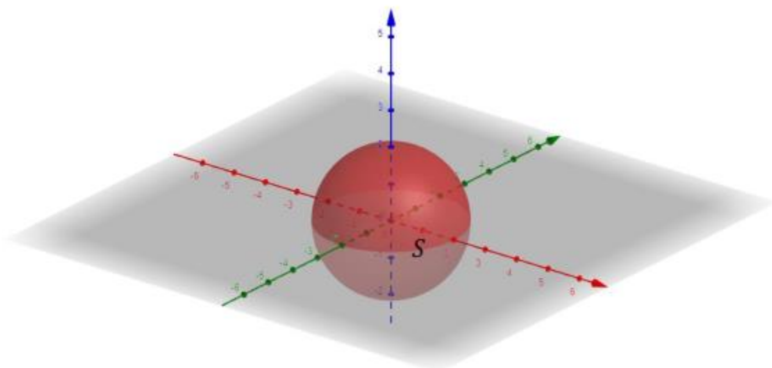
Veamos cómo se describen las Superficies y los Sólidos en coordenadas esféricas:

<u>Ejemplo</u>: Describir en coordenadas esféricas la superficie $S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Reemplazando: $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \rightarrow (\rho\, cos\theta\ sen\varphi)^2 + (\rho\ sen\theta\ sen\ \varphi)^2 + (\rho cos\varphi)^2 = 4$

$\rightarrow \rho^2 sen^2\varphi(cos^2\theta + sen^2\theta) + \rho^2 cos^2\varphi = 4 \rightarrow \rho^2 = 4 \rightarrow \rho = 2$

Entonces:



$S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$

En coordenadas esféricas,

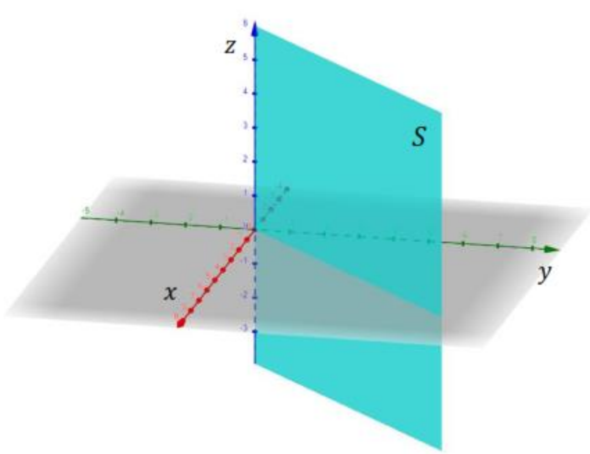
$$S: \boldsymbol{\rho = 2}$$

(Para los puntos de S, ρ es constante e igual a 2, mientras que θ y φ varían libremente)

<u>Ejemplo</u>: Describir en coordenadas esféricas al semiplano de ecuación $y = x$, con $x \geq 0$.

Reemplazando: $y = x$ (con $x > 0$)$\rightarrow 1 = \frac{y}{x} = \text{tg}\,\theta$ (con $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)$\rightarrow \theta = \text{arctg}(1) = \frac{\pi}{4}$

Entonces:



S: $y = x$, con $x \geq 0$.

La ecuación en coordenadas esféricas de ese *semiplano* se escribe:

$$\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

(para los puntos de S, θ es constante e igual $\frac{\pi}{4}$, mientras que ρ y φ varían libremente)

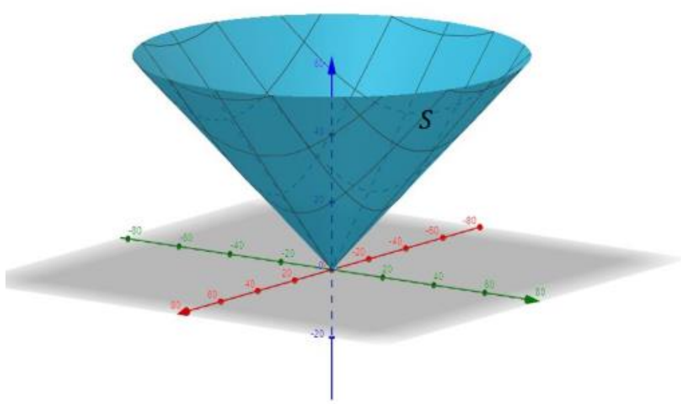
Ejemplo: Describir en coordenadas esféricas al semicono de ecuación $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Reemplazando: $z = \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \rho cos\varphi = \sqrt{(\rho\ cos\theta\ sen\varphi)^2+(\rho\ sen\theta\ sen\ \varphi)^2}$

$$\rho cos\varphi = \sqrt{\rho^2 sen^2\varphi}$$

$$\rho cos\varphi = \rho sen\varphi \rightarrow tg\varphi = 1\ \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Entonces:



S: $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

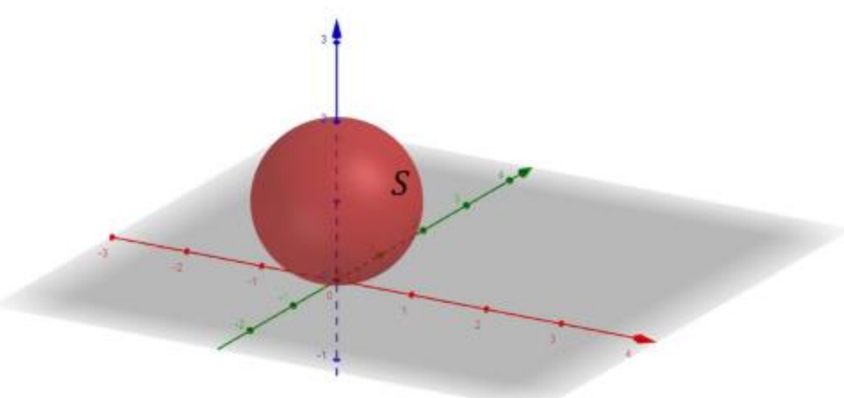
La ecuación en coordenadas esféricas se escribe:

$$\boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{4}}$$

(para los puntos de S, φ es constante e igual $\frac{\pi}{4}$, mientras que ρ y θ varían libremente)

Ejemplo: Describir en coordenadas esféricas a la esfera de ecuación $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

Aquí:



S: $x^2+y^2+(z-1)^2=1$

Escribamos la ecuación de S en coordenadas esféricas:

$$x^2+y^2+(z-1)^2=1$$

$$x^2+y^2+z^2-2z+1=1$$

$$x^2+y^2+z^2-2z=0$$

$$\rho^2 - 2\,\rho\ \cos\varphi = 0$$

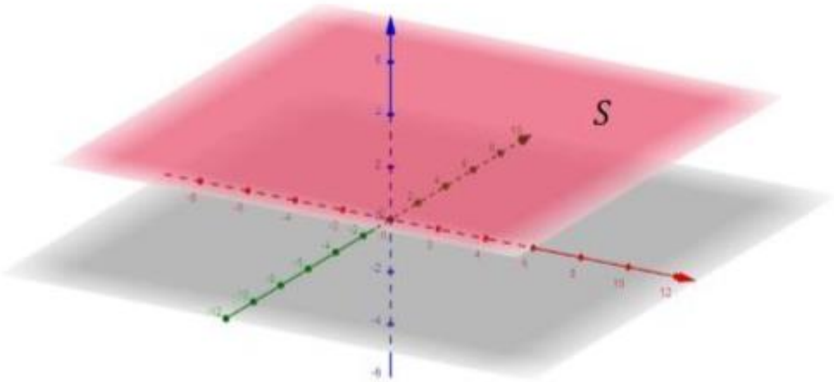
$$\rho\,(\rho - 2\cos\varphi) = 0$$

$$\therefore \quad \rho = 0\ \text{ ó }\ \boldsymbol{\rho = 2\,cos\,\varphi}$$

Aquí θ podrá variar libremente, o sea $0 \le \theta \le 2\pi$, mientras que φ sólo podrá variar hasta $\frac{\pi}{2}$, o sea $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (esto último se vé de la ecuación $\rho = 2\cos(\varphi)$).

Ejemplo: Describir en coordenadas esféricas al plano de ecuación $z = 4$.

Aquí:



$$S:\ z = 4$$

En coordenadas esféricas,

$$S:\ \boldsymbol{\rho cos\varphi = 4}$$

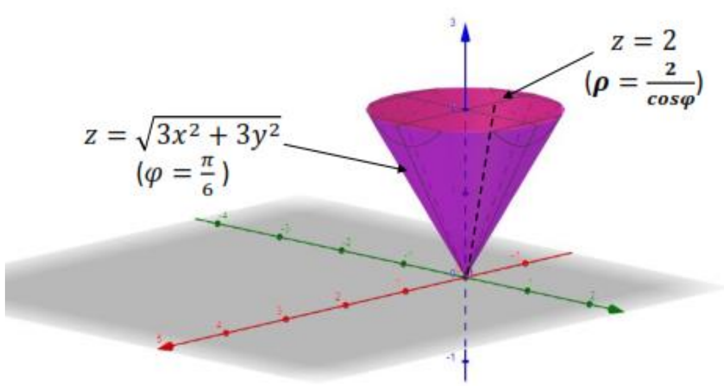
(La coordenada ρ de los puntos que están en el plano S es igual a $\frac{4}{cos\varphi}$)

Aquí θ podrá variar libremente, o sea $0 \leq \theta \leq 2\pi$, mientras que φ sólo podrá variar hasta $\frac{\pi}{2}$ (sin tomar ése valor), o sea $0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$. Esto se vé de la ecuación $\rho\cos(\varphi) = 4$.

… Veamos ahora cómo se describen algunos sólidos:

Ejemplo: Graficar y describir en coordenadas esféricas el sólido V limitado por: $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ y $z = 2$.

Aquí:



- $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \rightarrow z = \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow$

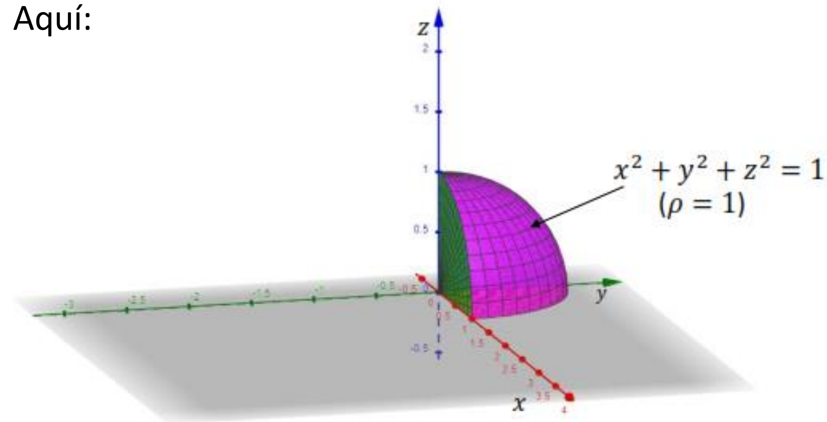
$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = tg\varphi \rightarrow \boldsymbol{\varphi = \frac{\pi}{6}}$$

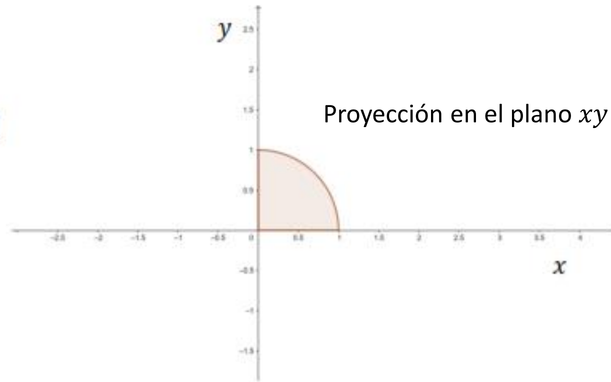
- $z = 2 \rightarrow \rho cos\varphi = 2 \rightarrow \boldsymbol{\rho = \frac{2}{cos\varphi}}$

$$\boldsymbol{V = \left\{(\rho, \theta, \varphi);\ 0 \leq \theta < 2\pi\ \wedge\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6}\ \wedge\ 0 \leq \rho \leq \frac{2}{cos\varphi}\right\}}$$

Ejemplo: Graficar y describir en coordenadas esféricas el sólido V limitado por: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y los planos coordenados, en el primer octante.

Aquí:

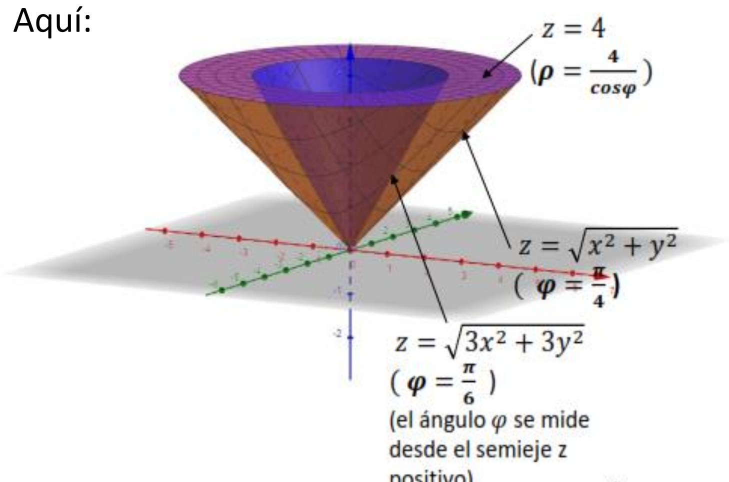




$$V = \left\{(\rho, \theta, \varphi); 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \wedge\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ \wedge\ 0 \le \rho \le 1\right\}$$

Ejemplo: Graficar y describir en coordenadas esféricas el sólido V limitado por: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ y $z = 4$.

Aquí:



- $z = \sqrt{x^2 + y^2} \to \cdots \quad \to \ \varphi = \frac{\pi}{4}$
- $z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \to \cdots \quad \to \ \varphi = \frac{\pi}{6}$
- $z = 4 \to \rho cos\varphi = 4 \quad \to \ \rho = \frac{4}{cos\varphi}$

$$V = \left\{(\rho, \theta, \varphi); 0 \le \theta \le 2\pi \wedge\ \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}\ \wedge\ 0 \le \rho \le \frac{4}{cos\varphi}\right\}$$

Cambio de variables a coordenadas esféricas

La relación entre las coordenadas esféricas (ρ, θ, φ) y las cartesianas (x, y, z) define una Transformación:

$$T: \begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\, sen(\varphi) \\ y = \rho\, sen(\theta) sen(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}, \qquad (\rho, \theta, \varphi) \in V^*, \qquad (x, y, z) \in V.$$

Esto es así porque las funciones que componen la Transformación, $x = \rho\cos(\theta)\, sen(\varphi)$; $y = \rho\, sen(\theta) sen(\varphi)$; $z = \rho\cos(\varphi)$, tienen primeras derivadas continuas y porque T admite inversa T^{-1}:

$$T^{-1}: \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \qquad x \neq 0 \\ \tan\varphi = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \qquad z \neq 0 \end{cases} , \qquad T^{-1}: \begin{cases} \rho = \sqrt{y^2 + z^2}, \qquad x = 0, \qquad z \neq 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\ (x = 0, y > 0) \text{ ó } \theta = \dfrac{3\,\pi}{2}\ (x = 0, y < 0) \\ \tan\varphi = \dfrac{\sqrt{y^2}}{z} = \dfrac{|y|}{z}, \qquad x = 0, \qquad z \neq 0 \end{cases}$$

$$T^{-1}: \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z = 0, x \neq 0 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \qquad x \neq 0 \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \qquad z = 0 \end{cases} , \qquad T^{-1}: \begin{cases} \rho = \sqrt{y^2} = |y|, \qquad x = 0, \qquad z = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\ (x = 0, y > 0) \text{ ó } \theta = \dfrac{3\,\pi}{2}\ (x = 0, y < 0) \\ \varphi = \dfrac{\pi}{2}, \qquad z = 0 \end{cases}$$

Luego, según el Teorema de Cambio de Variables, podremos usar la Transformación T para cambiar las variables en una Integral Triple a las coordenadas esféricas.

Aplicando el Teorema de Cambio de Variables a la Transformación esférica:

$$\boxed{\iiint_V f(x, y, z)\, dV_{xyz} = \iiint_{V^*} f(\rho\cos(\theta)\, sen(\varphi), \rho\, sen(\theta) sen(\varphi), \rho\cos(\varphi))\, |\, \boldsymbol{J_T}\, |\ dV^*{}_{\rho\theta\varphi}}$$

(donde debe entenderse que V^* es la descripción del sólido, V, en las coordenadas esféricas).

Necesitamos aún calcular el Jacobiano del cambio de variables, J_T:

(…veremos que $|\, \boldsymbol{J_T}\, | = \boldsymbol{\rho^2\, sen(\varphi)}$)

Recordar que:

$$J_T = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} - \frac{\partial y}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} + \frac{\partial z}{\partial u}\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

En nuestro caso:

$$T: \begin{cases} x = \rho\cos(\theta)\,sen(\varphi) \\ y = \rho\,sen(\theta)sen(\varphi) \\ z = \rho\cos(\varphi) \end{cases}$$ (o sea: $(u,v,t) \to (\rho,\theta,\varphi)$)

Luego:

$$J_T = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta)\,sen(\varphi) & sen(\theta)sen(\varphi) & \cos(\varphi) \\ -\rho\,sen(\theta)\,sen(\varphi) & \rho\cos(\theta)sen(\varphi) & 0 \\ \rho\cos(\theta)\cos(\varphi) & \rho\,sen(\theta)\cos(\varphi) & -\rho\,sen(\varphi) \end{vmatrix} = \cdots = (*)$$

$$(*) = -\rho^2\,sen(\varphi) \qquad \therefore \qquad \boxed{J_T = -\rho^2\,sen(\varphi)}$$

Cuidado: en la Integral se introduce $|J_T| = \rho^2\,sen(\varphi)$

Resumiendo:

Dada $\iiint_V f(x,y,z)\,dV_{xyz}$,

para aplicar el cambio de variables definido por $\begin{cases} \boldsymbol{x = \rho cos\theta sen\varphi} \\ \boldsymbol{y = \rho sen\theta\, sen\varphi} \\ \boldsymbol{z = \rho cos\varphi} \end{cases}$ tenemos que:

i) describir el sólido V en coordenadas esféricas ($V \to V^*$)

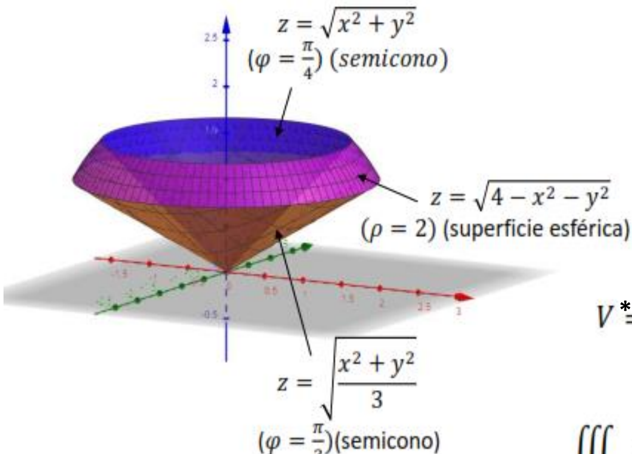
ii) reemplazar $f(x,y,z)$ por $f(\rho cos\theta sen\varphi, \rho cos\theta sen\varphi, \rho cos\varphi)$

iii) reemplazar dV_{xyz} por $\rho^2 sen\varphi\, dV_{\rho\theta\varphi}$

$$\iiint_V f(x,y,z)dV_{xyz} = \iiint_{V^*} f(\boldsymbol{\rho cos\theta sen\varphi}, \boldsymbol{\rho cos\theta sen\varphi}, \boldsymbol{\rho cos\varphi})\boldsymbol{\rho^2 sen\varphi}\,dV_{\rho\theta\varphi}$$

Ejemplo: Plantear usando coordenadas esféricas: $\iiint_V (x^2+y^2+z^2)\,dV_{xyz}$ siendo V el sólido limitado por $z=\sqrt{x^2+y^2}$; $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$ y $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

Tenemos:



$$z=\sqrt{x^2+y^2}\ \to\cdots\to\varphi=\frac{\pi}{4}$$

$$z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}\ \to\cdots\to\varphi=\frac{\pi}{3}$$

$$z=\sqrt{4-x^2-y^2}\ \to x^2+y^2+z^2=4\to\rho=2$$

$$V^*=\left\{(\rho,\theta,\varphi);\,0\le\theta<2\pi\ \wedge\ \frac{\pi}{4}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\wedge 0\le\rho\le 2\right\}$$

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dV_{xyz}=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^2\rho^2\,\rho^2 sen\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

En el Módulo:

El Sistema de coordenadas Esféricas y el Cambio de Variables a coordenadas Esféricas se desarrolla, con varios ejemplos, en la sección **5.4**.

La Ejercitación está en la sección **5.4.1**.

Fin del Capítulo 5.