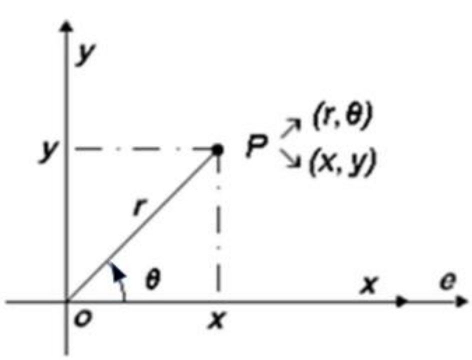
Cambio de variables a Coordenadas Polares

- Sistema de coordenadas polares en el plano (sección **4.4**)
- Cambio de variables a coordenadas polares (sección **4.5**)

Sistema de coordenadas polares en el plano



El punto P del plano queda unívocamente determinado por medio de sus coordenadas cartesianas (x, y) pero también por medio de la distancia entre P y O ("r") y la medida en el sistema radial del ángulo barrido desde el semieje x positivo hasta $\overline{OP}$ en sentido antihorario ("θ").

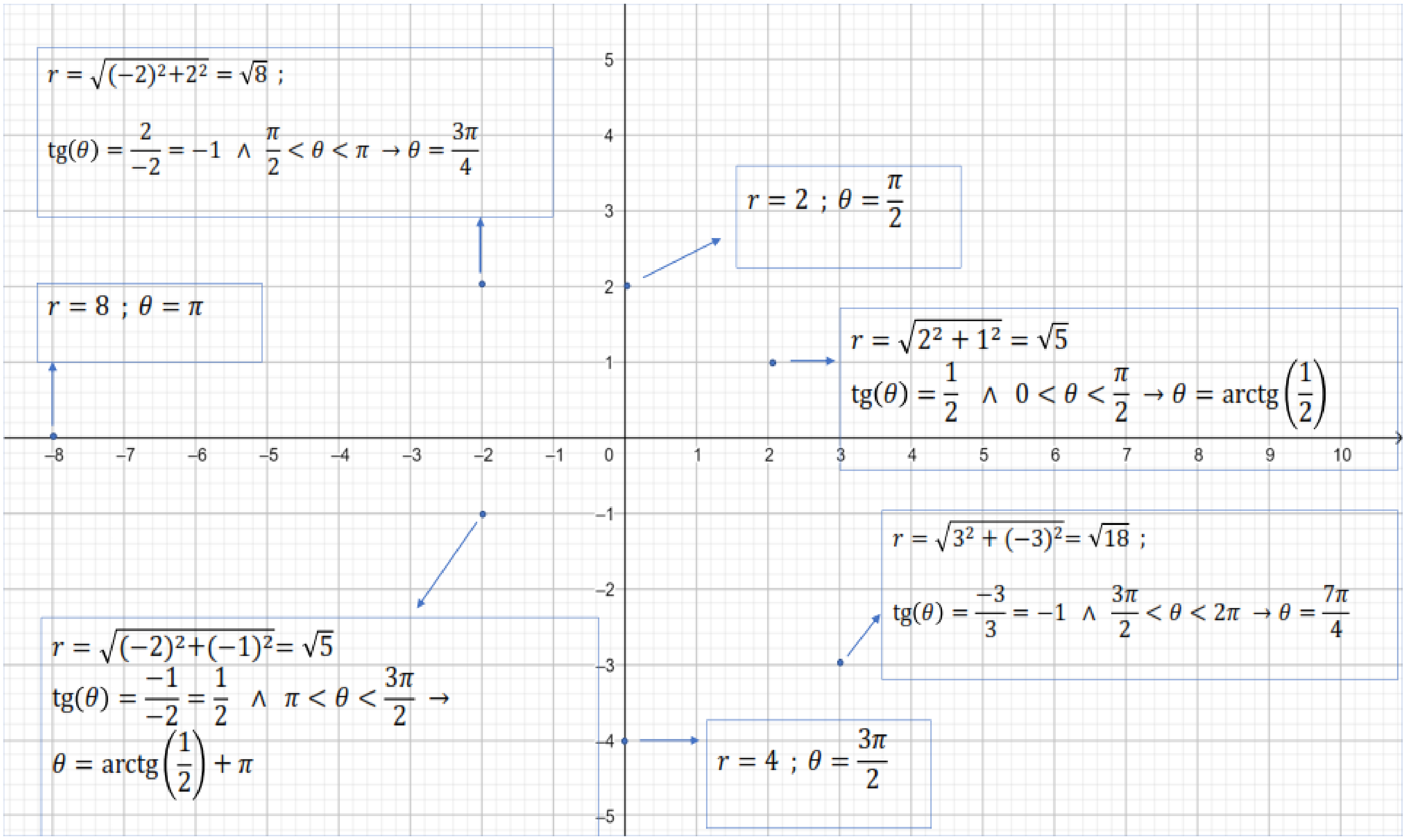
r y θ son números reales, siendo $r > 0$ y $0 \leq \theta < 2\pi$.

(r, θ) son las *coordenadas polares del punto* P.

$P = (0,0)$ queda identificado con cualquiera de los pares $(0, \theta)$, con θ entre 0 y 2π.

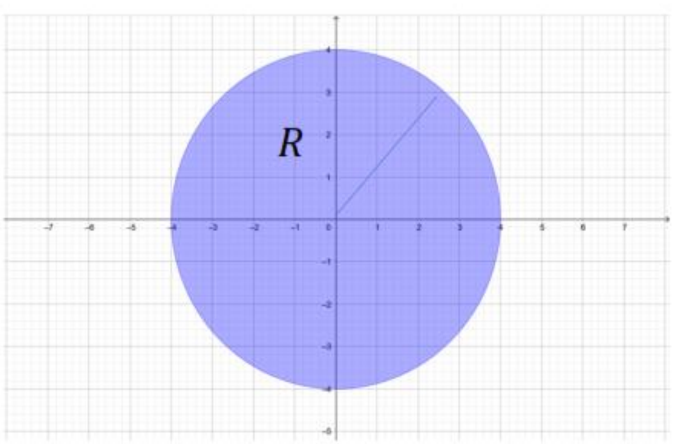
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}(\theta) = \dfrac{y}{x} \quad (si\ x \neq 0) \end{cases}$$

$$si\ x = 0\ entonces\ \theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & si\ y > 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} & si\ y < 0 \end{cases}$$



Descripción analítica de algunas regiones del plano usando coordenadas polares

i)

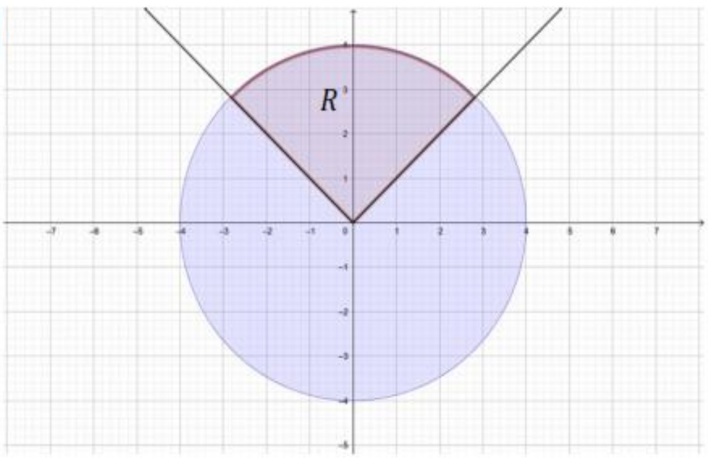


La coordenada polar θ de los puntos que pertenecen a R puede tomar cualquier valor entre 0 y 2π . Para cualquiera de esos valores de θ, la coordenada r de dichos puntos toma todos los valores desde 0 (lo que vale en el origen de coordenadas) hasta 4 (lo que vale sobre la circunferencia frontera de la región)

La descripción analítica de R , en coordenadas polares, es :

$$R = \{(r, \theta); \ 0 \leq \theta < 2\pi \ \wedge 0 \leq r \leq 4\}$$

ii)



R es la región del plano limitada por $y = \sqrt{16 - x^2}$ y las semirrectas $y = x$ e $y = -x$ con $y \geq 0$.

Para describir la región en coordenadas polares, comencemos por escribir las ecuaciones de las curvas que forman la frontera de R en esas coordenadas :

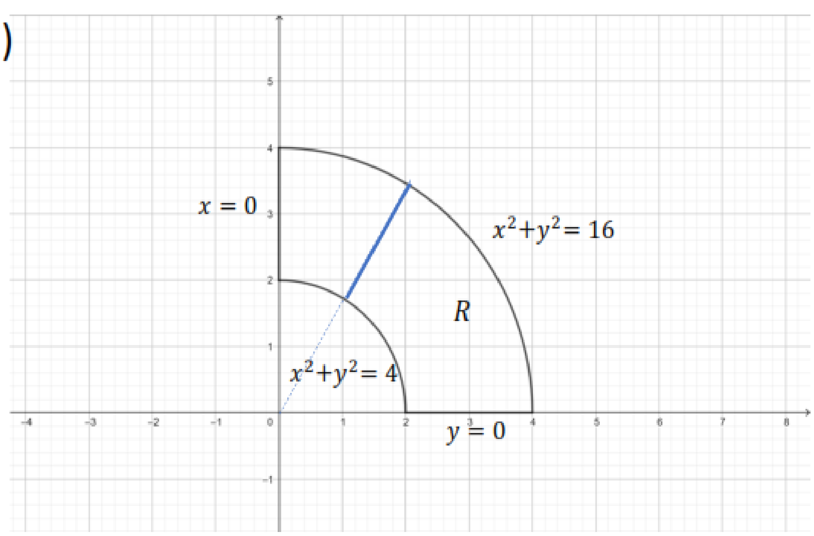
- $y = \sqrt{16 - x^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 16 \rightarrow$
$\rightarrow r^2 = 16 \rightarrow \boldsymbol{r = 4}$

- $semirrecta\ y = x \rightarrow \frac{y}{x} = 1$
$\mathrm{tg}(\theta) = 1$ con $0 < \theta < \frac{\pi}{2} \rightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{4}}$

- $semirrecta\ y = -x \rightarrow \frac{y}{x} = -1$
$\mathrm{tg}(\theta) = -1$ con $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \rightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{3\pi}{4}}$

$$R = \left\{(r, \theta);\ \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \ \wedge\ 0 \leq r \leq 4\right\}$$

iii)



$y = 0\ , con\ x > 0 \rightarrow \boldsymbol{\theta = 0}$

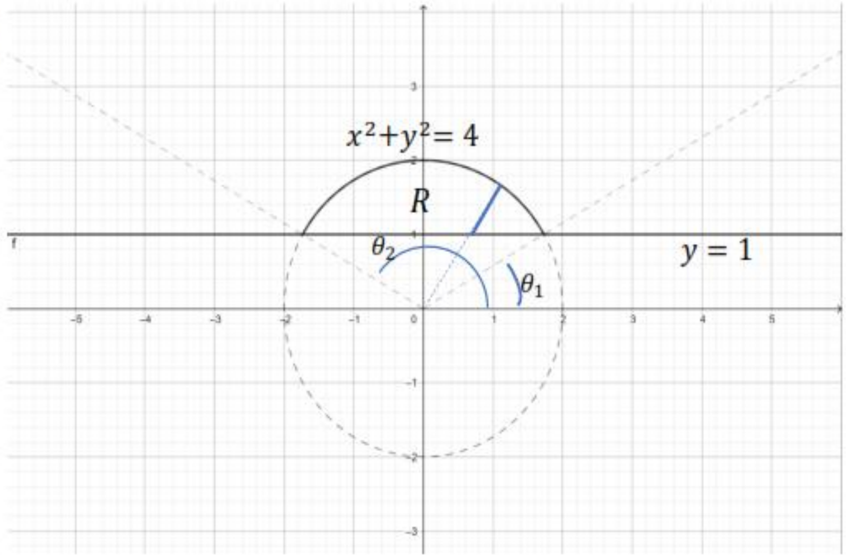
$x = 0\ , con\ y > 0 \rightarrow \boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{2}}$

$x^2 + y^2 = 4 \rightarrow \boldsymbol{r = 2}$

$x^2 + y^2 = 16 \rightarrow \boldsymbol{r = 4}$

$$R = \left\{(r, \theta); 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ \wedge 2 \leq r \leq 4\right\}$$

iv)



R es la región interior a $x^2+y^2=4$, con $y \geq 1$. Escribamos las ecuaciones de las curvas que forman la frontera de R en coordenadas polares:

- $y = 1 \rightarrow \boldsymbol{r\,sen\theta = 1 \rightarrow r = \frac{1}{sen\theta}}$
- $x^2+y^2=4 \rightarrow \boldsymbol{r = 2}$

La coordenada polar θ de los puntos que pertenecen a R puede tomar cualquier valor entre θ_1 y θ_2.

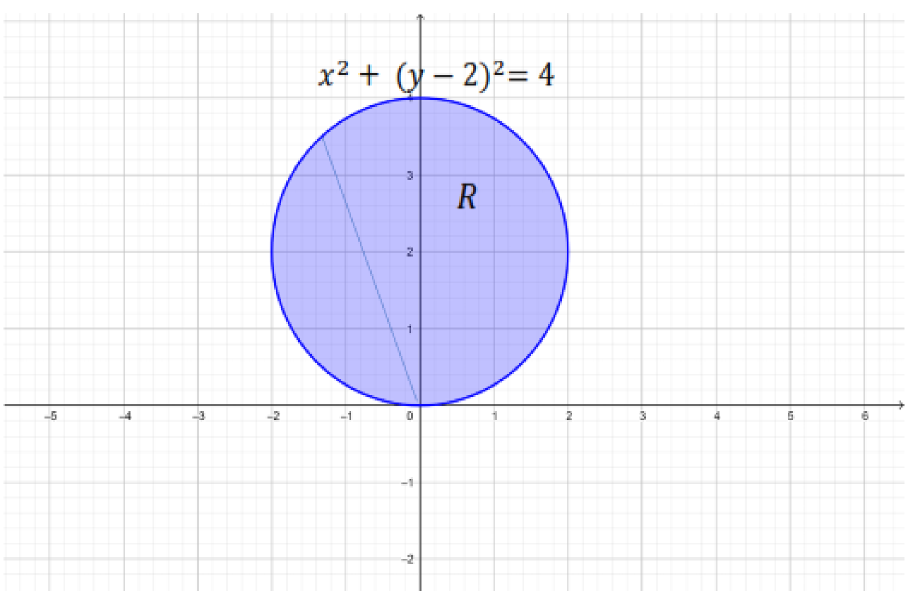
$$\begin{cases} r = 2 \\ rsen\theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \ 2sen\theta = 1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ sen\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6} \ ; \ \theta_2 = \frac{5\pi}{6}.$$

Para cualquiera de los valores de θ entre $\frac{\pi}{6}$ y $\frac{5\pi}{6}$, la coordenada r de los puntos que pertenecen a R toma todos los valores desde $\frac{1}{sen\theta}$ (lo que vale sobre la recta) hasta 2 (lo que vale sobre la circunferencia).

$$R = \left\{(r,\theta);\ \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \ \wedge \frac{1}{sen\theta} \leq r \leq 2\right\}$$

v)



$$R = \{(x,y);\ \ x^2+(y-2)^2 \leq 4\}$$

$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$
$$\rightarrow r^2 - 4\mathrm{rsen}\theta = 0 \rightarrow \boldsymbol{r = 4sen\theta}$$

La coordenada polar θ de los puntos que pertenecen a R puede tomar cualquier valor desde 0 (lo que vale en el semieje $x\ positivo$) y π (lo que vale en el semieje $x\ negativo$). Para cualquiera de esos valores de θ, la coordenada r de los puntos de la región toma todos los valores desde 0 (lo que vale en el origen de coordenadas) hasta $\boldsymbol{4sen\theta}$ (lo que vale sobre la circunferencia frontera de la región).

$$R = \{(r,\theta);\ \ 0 \leq \theta < \pi \ \ \wedge 0 \leq r \leq 4sen\theta\}$$

Cambio de variables a coordenadas polares

La relación entre las coordenadas polares (r, θ) y las coordenadas cartesianas (x, y) define una Transformación:

$$T: \begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\, sen(\theta) \end{cases}, \qquad (r, \theta) \in S, \qquad (x, y) \in R.$$

Esto es así porque las funciones que componen la Transformación, $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\, sen(\theta)$, tienen primeras derivadas continuas y porque T admite inversa T^{-1}:

$$T^{-1}: \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \qquad x \neq 0 \end{cases}, \qquad T^{-1}: \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}, \qquad x = 0, y > 0 \end{cases}, \qquad T^{-1}: \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \dfrac{3\,\pi}{2}, \qquad x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Según el Teorema de Cambio de Variables, podremos usar la transformación T para cambiar las variables en una Integral Doble a las coordenadas polares.

Necesitamos calcular el Jacobiano del cambio de variables:

Tener presente que siendo $\begin{cases} x = r\, cos\theta \\ y = r\, sen\theta \end{cases}$, el jacobiano de x e y respecto a r y θ es :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -rsen\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = rcos^2\theta + rsen^2\theta = r, \text{ luego, } \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = r$$

Entonces, en virtud del Teorema de Cambio de Variables aplicado a la Transformación polar:

$$\boxed{\iint_R f(x, y)\, dA_{xy} = \iint_{R_{r\theta}} f(r\cos\theta, r\, sen\theta)\, r\, dA_{r\theta}}$$

(donde debe entenderse que $R_{r\theta}$ es la descripción de la región R en las coordenadas polares).

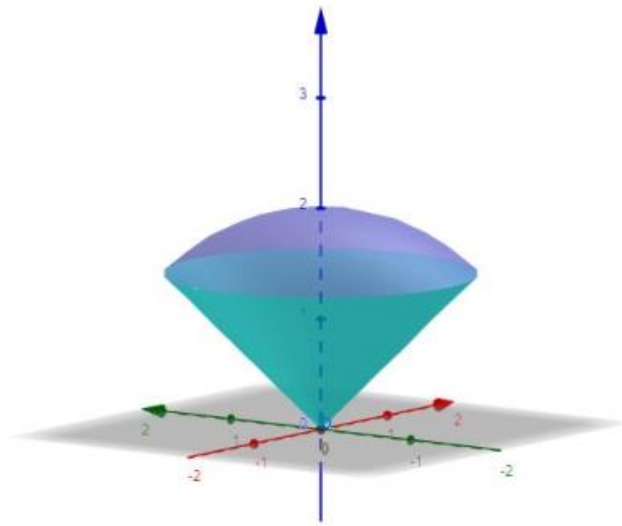
Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo Plantear el cálculo del volumen del sólido limitado por las superficies de ecuación $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ usando coordenadas polares.

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la ecuación de un semicono.

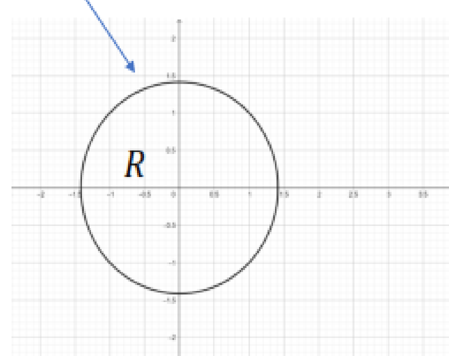
$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ es la ecuación un hemisferio de la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (se trata del hemisferio donde es $z \geq 0$)

A la derecha hay un gráfico del sólido limitado por esas dos superficies.

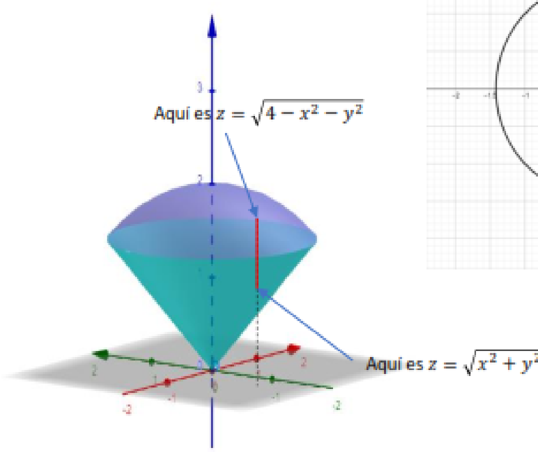


Se vé que el sólido es proyectable sobre el plano xy. Para identificar la región de proyección, *eliminamos* z entre las ecuaciones dadas. Con eso hallaremos la ecuación del *borde* de la proyección:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \end{cases} \rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 4 - x^2 - y^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 2$$



El sólido se proyecta en la región R del plano xy y tiene como "piso" al semicono y como "techo" a la superficie esférica .



O sea, podemos describirlo así:

$$V = \left\{(x, y, z); (x, y) \in R \wedge \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{4 - x^2 - y^2}\right\}$$

Y entonces:

$$volumen\ de\ V = \iint_R \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dA$$

Plantearemos el cálculo de esa integral usando coordenadas polares.

Siendo $\begin{cases} x = r\ cos\theta \\ y = r\ sen\theta \end{cases}$,

es $R_{r\theta} = \{(r, \theta);\ \ 0 \leq \theta < 2\pi\ \wedge 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$,

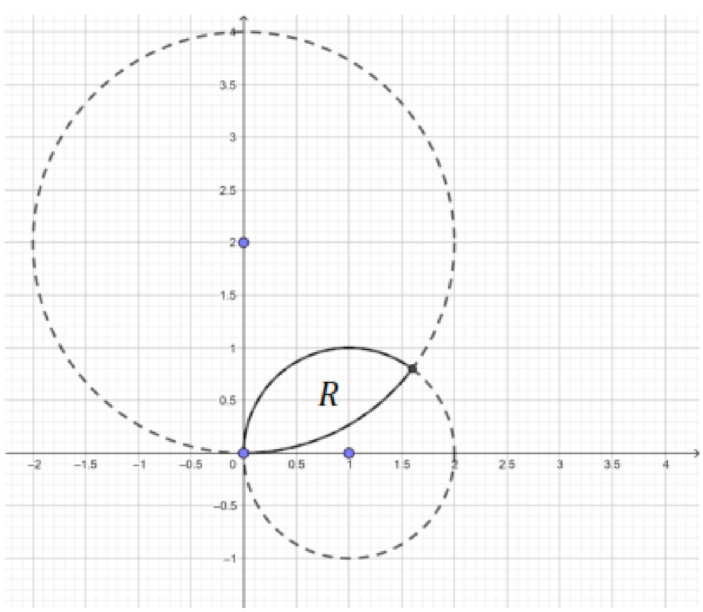
el integrando $\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}$ pasa a ser : $\sqrt{4 - r^2}\ - r$,

y, como ya sabemos, el valor absoluto del Jacobiano es igual a r.

Entonces:

$$volumen\ de\ V = \iint_R \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dA = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - r^2}\ - r\ \right) r dr d\theta$$

Ejemplo Plantear el cálculo del área de la región del plano
$R = \{(x, y);\ \ x^2 + (y - 2)^2 \leq 4 \wedge\ (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$
usando coordenadas polares.



$$área\ de\ R = \iint_R\ dA$$

Plantearemos el cálculo de la integral aplicando el cambio de variables $\begin{cases} x = r\ cos\theta \\ y = r\ sen\theta \end{cases}$

Para ello tendremos que:

i)describir la región en términos de r y θ,

Las ecuaciones de las curvas que forman la fronte de R son:

$x^2 + (y - 2)^2 = 4 \rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$
$\rightarrow r^2 - 4rsen\theta = 0 \rightarrow \boldsymbol{r = 4sen\theta}$
$(x - 1)^2 + y^2 = 1 \rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 0$
$\rightarrow r^2 - 2rcos\theta = 0 \rightarrow \boldsymbol{r = 2cos\theta}$

En los puntos de R, los valores de θ van desde 0 (lo que vale en el semieje x $positivo$) hasta $\frac{\pi}{2}$ (lo que vale en el semieje y $positivo$).

Pero la variación de r no es la misma para cada uno de esos valores de θ:

Para $0 \leq \theta \leq \theta_1$, $0 \leq r \leq 4sen\theta$

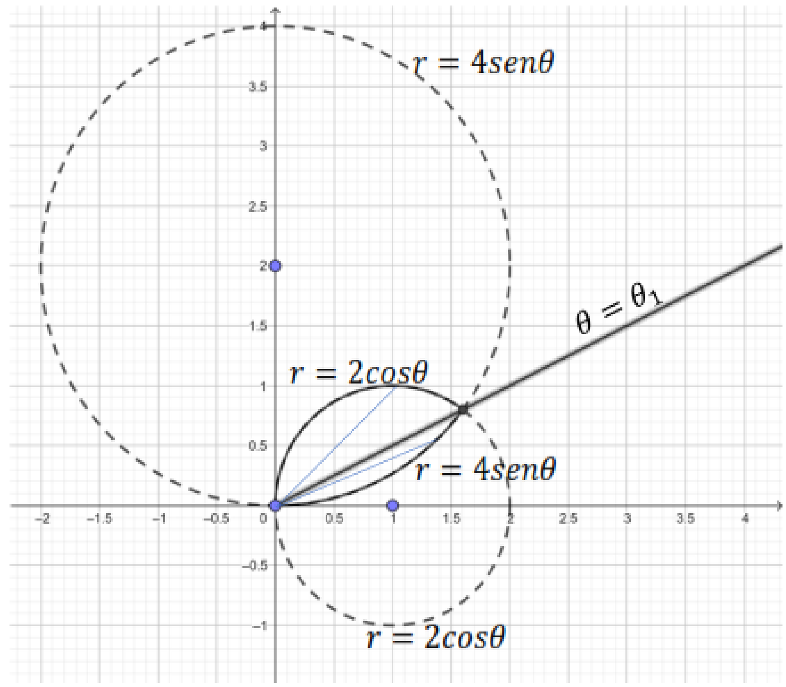
Para $\theta_1 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq r \leq 2\cos\theta$

Para determinar el valor de θ_1 :

$$\begin{cases} \boldsymbol{r = 4sen\theta} \\ \boldsymbol{r = 2cos\theta} \end{cases} \to 4\ sen\theta = 2cos\theta \to$$

$$tg\theta = \frac{1}{2}\ \ (siendo\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \to$$

$$\theta = \boldsymbol{arct}\left(\boldsymbol{\frac{1}{2}}\right) \leftarrow \theta_1$$



Entonces: $R_{r\theta} = \left\{(r,\theta);\ 0 \leq \theta \leq \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \wedge 0 \leq r \leq 4sen\theta\right\} \cup \left\{(r,\theta);\ \text{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ \wedge\ 0 \leq r \leq 2cos\theta\right\}$

Tener presente que siendo $\begin{cases} x = r\ cos\theta \\ y = r\ sen\theta \end{cases}$, el jacobiano de x e y respecto a r y θ es :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos\theta & sen\theta \\ -rsen\theta & rcos\theta \end{vmatrix} = rcos^2\theta + rsen^2\theta = r\ ,\ \text{luego, } \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = r$$

Entonces,

$$\text{área de } R = \iint_R dA = \int_0^{arctg\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{4sen\theta} rdrd\theta\ +\ \int_{arctg\left(\frac{1}{2}\right)}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2cos\theta} rdrd\theta$$