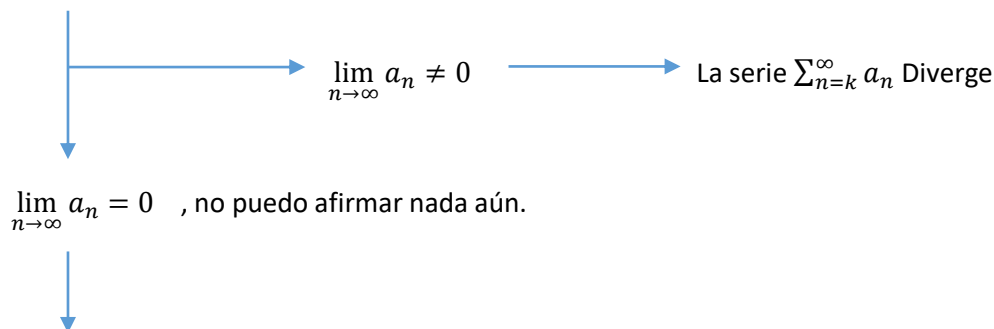


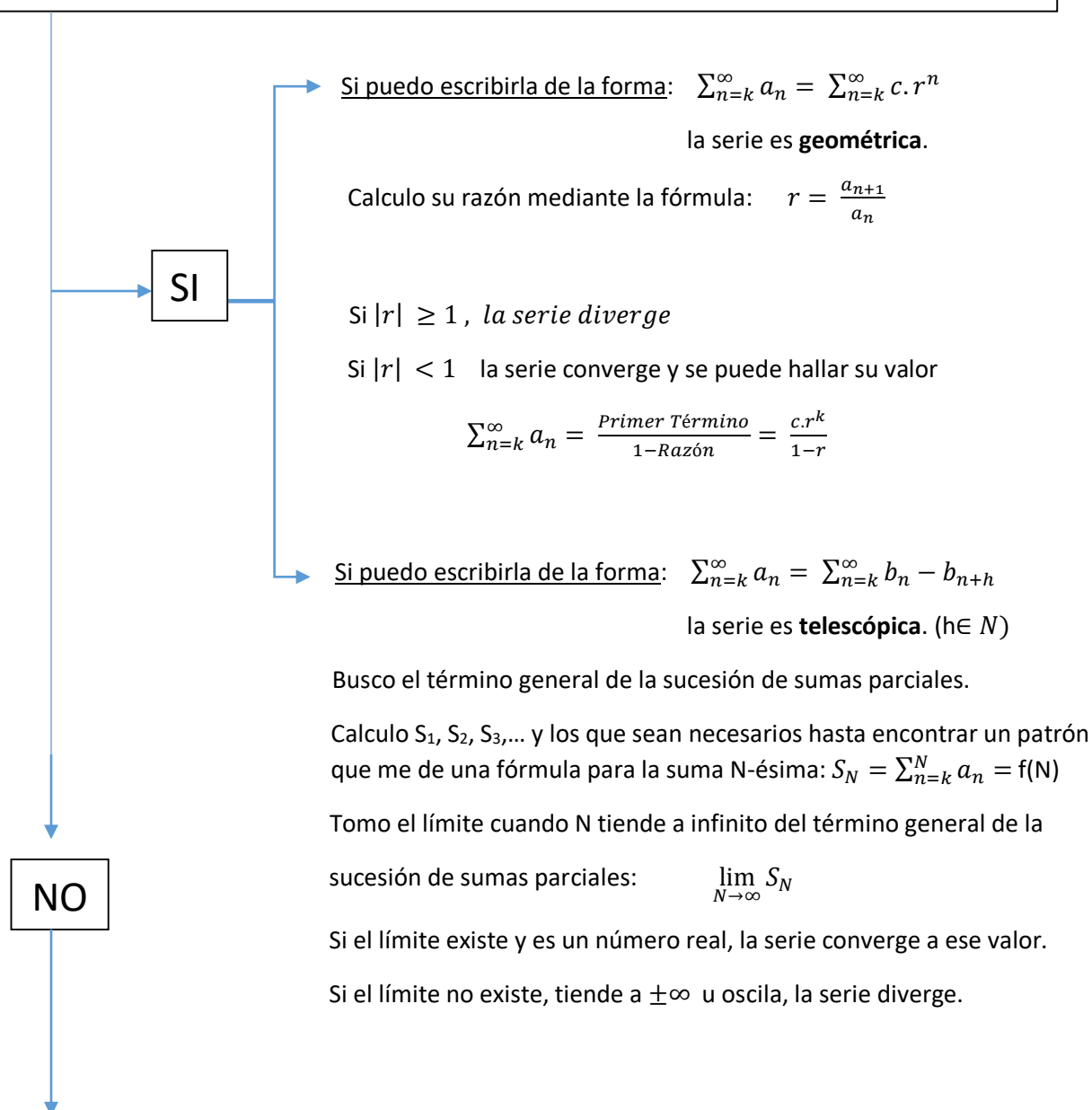
Dada la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, ¿cómo puedo proceder para analizar su convergencia?

PASO 0: Condición necesaria para la convergencia.

Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.



PASO 1: ¿el término general tiene alguna forma característica que me permita analizar su convergencia y hallar su suma?



PASO 2: ¿Estoy trabajando con una serie de términos positivos?

SI

porque $a_n \geq 0, \forall n \geq k$. Entonces busco el criterio que más me conviene.

• CRITERIO DE LA INTEGRAL

Defino una función $f(x)$ tal que $f(n) = a_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k$

Pruebo que f es continua, positiva y decreciente en el intervalo de interés.

Analizo si la integral impropia $\int_k^\infty f(x) \cdot dx$ converge o diverge.

Eso nos indicará la convergencia o divergencia de la serie $\sum_{n=k}^\infty a_n$

Es útil para funciones con primitivas simples.

• CRITERIO DE LA RAÍZ

Calculo el límite: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$

Si $L < 1$, la serie converge; Si $L > 1$ la serie diverge; Si $L = 1$ el criterio no decide.

Es útil cuando a_n tiene a n tanto en la base como en el exponente.

• CRITERIO DEL COCIENTE

Calculo el límite: $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Si $L < 1$, la serie converge; Si $L > 1$ la serie diverge; Si $L = 1$ el criterio no decide.

Es útil si a_n tiene multiplicaciones, divisiones o factoriales.

• CRITERIO DE COMPARACIÓN DIRECTA CON $\sum_{n=k}^\infty b_n$

- Sea $0 \leq a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k$.

Si la serie $\sum_{n=k}^\infty b_n$ es convergente, entonces $\sum_{n=k}^\infty a_n$ también lo es.

- Sea $0 \leq b_n \leq a_n, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq k$

Si la serie $\sum_{n=k}^\infty b_n$ es divergente, entonces $\sum_{n=k}^\infty a_n$ también lo es.

Son útiles cuando a_n es comparable de forma sencilla con series-p o geométricas.

• CRITERIO DE COMPARACIÓN EN EL LÍMITE $\sum_{n=k}^\infty b_n$

Elijo otra serie $\sum_{n=k}^\infty b_n$, de la que yo conozco sencillamente su convergencia. Debe ser de términos positivos: $b_n \geq 0, \forall n \geq k$.

Calculo el límite $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$. Si el resultado es un número real positivo, ambas series tienen igual comportamiento (ambas convergen o ambas divergen)

NO

Porque a_n toma valores positivos y negativos.

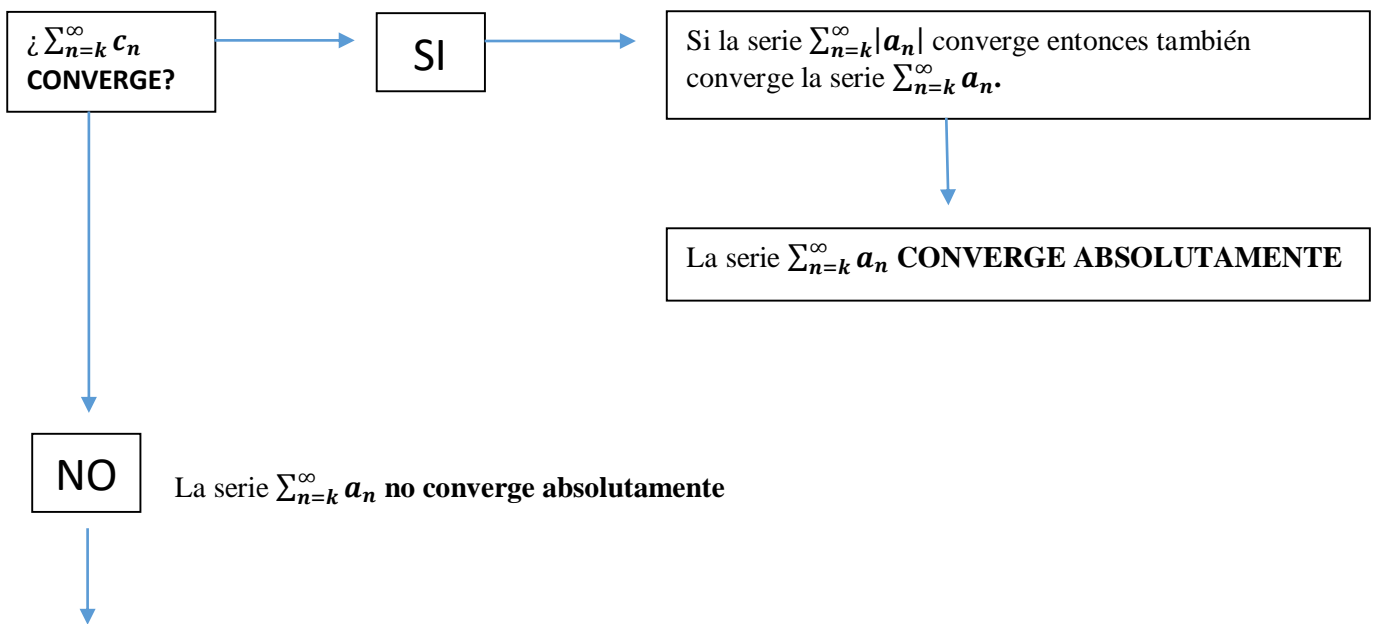
PASO 3: Análisis de convergencia absoluta

Trabaja con una nueva serie cuyo término general es el valor absoluto de la serie que estamos estudiando.

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n = \sum_{n=k}^{\infty} |a_n|$$

Esta nueva serie es de términos positivos: $c_n \geq 0, \forall n \geq k$

Por lo tanto la podemos estudiar con cualquiera de los criterios del PASO 2.



PASO 4: Análisis de convergencia condicional

- **CRITERIO DE LEIBNIZ**

Sirve para series que son de tipo alternadas, es decir que se las puede escribir de la forma:

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n = \sum_{n=k}^{\infty} (-1)^n b_n$$

Debemos probar que se cumplen las siguientes hipótesis:

1. $b_n \geq 0, \forall n \geq k$;
2. $\{b_n\}$ es decreciente
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$

Si las hipótesis se cumplen podemos afirmar que la serie $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ **CONVERGE**

CONDICIONALMENTE