

# Integral de Línea de un Campo Escalar

$$\int_C f \, ds$$

- Definición. Cálculo en términos de un parámetro  $t$ . Propiedades. Sección 6.7

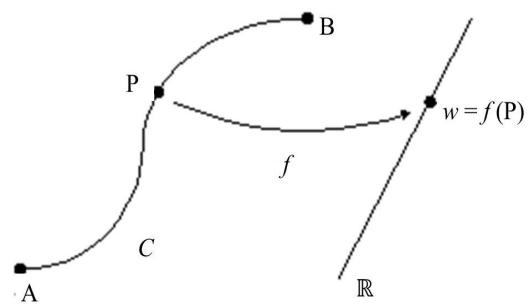
La Integral de Línea  $\int_C f \, ds$  (y  $\int_C F \cdot T \, ds$  que estudiaremos la clase que viene) representa la *generalización* de la Integral Definida,  $\int_a^b f(x) \, dx$ , en el sentido de que en una Integral de Línea se integra sobre una curva  $C$  en vez de integrar sobre un segmento de recta (como lo es el intervalo  $[a, b]$  en  $\int_a^b f(x) \, dx$ )

Aquí  $f = f(x, y, z)$  es continua, o continua a trozos,  $\forall (x, y, z) \in C$ ,  $C \subset \mathbb{R}^3$ .

(o  $f = f(x, y)$  continua, o continua a trozos,  $\forall (x, y) \in C$ ,  $C \subset \mathbb{R}^2$ )

Ahora  $C$ , dominio de  $f$ , es una *curva del espacio* (o del plano).

Supondremos que  $C$  es un arco *acotado* de curva suave.



Vamos a definir a  $\int_C f \, ds$  siguiendo el mismo procedimiento que utilizamos en los casos anteriores:

1. Partitionar el dominio de  $f$ ,  $C$ .
2. Armar las Sumas de Riemann para  $f$ .
3. Refinar la Partición tomando  $n \rightarrow \infty$  en la Suma de Riemann.

1. Partitionar el dominio  $C$  (en  $n$ -subarcos  $\widehat{P_i P_{i+1}}$ ):

$$P_i^* \in \widehat{P_i P_{i+1}} ; \Delta S_i = \text{long}(\widehat{P_i P_{i+1}})$$

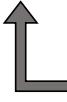
2. Armar las Sumas de Riemann para  $f$ :

$$\sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i \quad (\text{pero } \Delta S_i \text{ ya no es fácil de calcular...})$$

3. Refinar la Partición tomando  $n \rightarrow \infty$  en la Suma de Riemann:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i ; \quad \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i = \int_C f(P) ds : \text{Integral de Línea de } f \text{ a lo largo de } C \quad (ds: \text{diferencial de arco})$$

(si el límite existe). (1)



Necesitamos reescribir la suma  $\sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i$  en la forma  $\sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x$  para poder aplicar el Teorema de Existencia de la Integral:

$$\text{Si } g(x) \text{ es continua en } [a, b] \iff \exists \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x = \int_a^b g(x) dx$$

$\forall$  las posibles Particiones del intervalo  $[a, b]$ .

- Describamos a  $C$  paramétricamente:

$$C: r(t), \quad t \in [a, b]$$

1. Partitionar el dominio  $C$  (partitionando el dominio paramétrico):

$$P: a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b$$

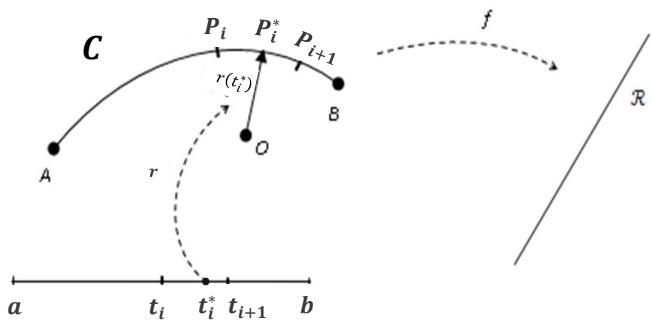
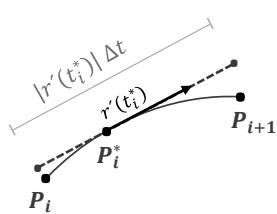
Cada  $P_i \leftrightarrow r(t_i)$ ,  $i = 1 \dots n$ .

$$P_i^* \in \widehat{P_i P_{i+1}} \quad \text{entonces } \exists t_i^* \in [t_i, t_{i+1}] \text{ tal que } P_i^* \leftrightarrow r(t_i^*)$$

$$\Delta S_i = \text{long}(\widehat{P_i P_{i+1}}) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} |r'(t)| dt$$

Pero si  $n \gg 1$  (partición  $P$  muy fina), la longitud  $\Delta S_i$  de cada subarco es tan pequeña que se puede aproximar con la longitud de una porción de recta tangente:

$$\Delta S_i \cong |r'(t_i^*)| \Delta t, \text{ donde } \Delta t = t_{i+1} - t_i$$



## 2. Armar las Sumas de Riemann para $f$ :

$$\sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n f(r(t_i^*)) \Delta S_i \cong \sum_{i=1}^n f(r(t_i^*)) |r'(t_i^*)| \Delta t = \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t , \quad \text{donde } g(t) = f(r(t)) |r'(t)|.$$

Hemos podido reescribir la Suma de Riemann para  $f$  como una Suma de Riemann para  $g$ , que es apta para aplicar el Teorema de Existencia de la Integral (ya que  $g(t)$  es continua en  $[a, b]$ ).

## 3. Refinar la Partición tomando $n \rightarrow \infty$ en la Suma de Riemann:

Aplicando el Teorema de Existencia de la Integral:  $\exists \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t = \int_a^b g(t) dt = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$

Pero, además:  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i$ .

Eso significa que se verifica **(1)**:  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i = \int_C f(P) ds$

...y también significa que:  $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta S_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(P_i^*) \Delta S_i = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta t \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n g(t_i^*) \Delta t = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$  **(2)**

Comparando **(1)** y **(2)** tenemos finalmente que:

$$\int_C f(P) ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt \quad \text{donde } C: r(t), t \in [a, b]$$

En resumen:

Si  $f$  es una función continua (o continua a trozos) en los puntos de un arco de curva suave y acotado  $C$ , entonces existe:

$$\int_C f ds : \text{Integral de Línea de la función } f \text{ a lo largo de la curva } C.$$

Si  $C$  se describe como  $C: r(t), t \in [a, b]$ , entonces la Integral de Línea se calcula como una Integral definida:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| dt$$



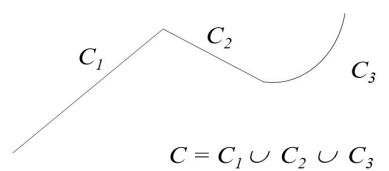
Propiedades: Dado que la Integral de Línea generaliza a la Integral definida, verifican las mismas propiedades.

En particular, las más usadas:

- Aditividad en el conjunto de integración:

Si  $f$  es continua sobre  $C$ , y  $C$  es unión de un número finito de curvas suaves  $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ :

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds + \int_{C_3} f \, ds$$



- Linealidad:

Si  $f$  y  $g$  son continuas sobre la curva suave  $C$ , y  $\alpha$  y  $\beta \in \mathbb{R}$ :

$$\int_C [\alpha f + \beta g] \, ds = \alpha \int_C f \, ds + \beta \int_C g \, ds$$

### Aplicaciones de la Integral de Línea:

1) Si  $f = 1$ ,  $\forall P \in C$ ,  $C: r(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , entonces:

(recordar:  $\int_C f \, ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| \, dt$ )

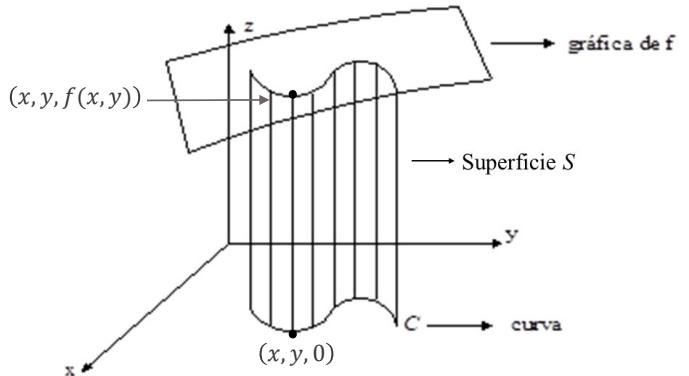
$$\int_C 1 \, ds = \int_a^b |r'(t)| \, dt = L_c \quad \therefore \quad \boxed{\int_C ds = L_c}$$

2) Si  $C$  representa a un *alambre* y  $f$ : *densidad lineal de masa del alambre*  $C$ , entonces la masa del alambre se calcula como:

$$\boxed{\int_C f \, ds = m_c}$$

3) Si  $C$  es una curva del plano y  $f = f(x, y)$  es una función continua, tal que  $f(x, y) \geq 0$  sobre  $C$ , entonces el área de la superficie vertical  $S$  (que comienza en los puntos  $(x, y, 0)$  de la curva  $C$  y termina en los puntos  $(x, y, f(x, y))$  de la gráfica de  $f$ ), se calcula como:

$$\boxed{\int_C f \, ds = A_S}$$



Ejemplo: Calcular la *masa* de un alambre cuya forma coincide con el arco de curva  $C: x^2 + y^2 = 4$ , con  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ , siendo  $f(x, y) = xy$  su densidad lineal de masa.

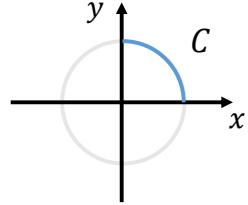
Calcularemos:  $m_c = \int_C f \, dS = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| \, dt$ :

$$C: r(t) = \langle 2 \cos(t), 2 \sin(t) \rangle, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$r'(t) = \langle -2 \sin(t), 2 \cos(t) \rangle$$

$$|r'(t)| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{(-2 \sin(t))^2 + (2 \cos(t))^2} = 2.$$

$$\begin{aligned} m_c &= \int_C f \, ds = \int_C x \, y \, ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos(t) 2 \sin(t) 2 \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos(t) \sin(t) \, dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8 \cos(t) \sin(t) \, dt = 4 \sin^2(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 4 \sin^2(0) = 4 \quad \therefore \quad \boxed{m_c = 4} \end{aligned}$$



Nota: Notar que en el ejemplo hemos parametrizado la curva  $C$  con sentido antihorario.

Pero, a los fines de calcular la Integral de línea, podríamos haber usado *cualquier otra* parametrización de esa curva, incluso aquellas que la orienten de manera diferente: **El resultado de la Integral de Línea de un Campo Escalar no depende de la parametrización (ni de la orientación) de la curva.**

Se verifica:

Propiedad:

$$\int_C f \, ds = \int_{-C} f \, ds$$

Aquí  $-C$  es el arco de curva que coincide con  $C$  pero que tiene orientación *contraria*.

La Propiedad de arriba se refiere a la Invarianza de la Integral de Línea (del campo escalar) frente a cambios de orientación: El resultado de la Integral de Línea de un campo escalar *no depende* de la orientación de la curva.

## En el Módulo:

Los conceptos asociados a  $\int_C f \, ds$  se deducen en la sección **6.7**, para llegar finalmente a la Fórmula de Cálculo para la Integral de Línea del Campo Escalar:

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(r(t)) |r'(t)| \, dt , \quad \text{siendo } C: r(t), t \in [a, b].$$

Las Propiedades y las Interpretaciones (aplicaciones) se comentan al pie de la pág 209 y pág 210.

La sección **6.7.1** es de Ejercicios.

Como material adicional, adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1a) y 3a) de la sección **6.7.1**.

→ Próxima Clase: sección **6.8**.