TEMA I **Matemática B - Primer Parcial** **03 / 05 / 2013**

Apellido y nombre: **Alumno Nº:**
Carrera: **Grupo:**

1			2		3	4			5	
a	**b**	**c**	**a**	**b**		**a**	**b**	**c**	**a**	**b**
0,5	1	1	0.5	0.5	1	1	1	0.5	1.5	1.5

1) a) Suponiendo que f es una función continua, exprese con una integral definida: $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(i/n)\frac{1}{n}$

b) Calcule $\int_0^{\pi} \left[sen\,(x/2) - 2sen(x)\right]dx$. Use el resultado obtenido y el teorema del valor medio para integrales para mostrar que la ecuación $sen\,(x/2) - 2sen(x) + \dfrac{2}{\pi} = 0$ tiene al menos una solución en el intervalo $[0,\pi]$.

c) Sean $g(t) = \begin{cases} 1-t & si\ 0 \le t \le 1 \\ 2\sqrt{t-1} & si\ 1 < t \le 2 \\ 4-t & si\ 2 < t \le 3 \end{cases}$ y $h(x)$ la función integral de g en $[0,3]$. Usando el teorema fundamental del cálculo, <u>sin hallar la expresión analítica de *h(x)*</u> , muestre que *h* es derivable y escriba la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$.

2) Resuelva: **a)** $\int \dfrac{x^2 - x + 2}{x^3 + x}dx$ **b)** $\int_0^1 \dfrac{x}{e^{2x}}dx$

3) Calcule el volumen del sólido de revolución que genera la región limitada por $y = x$ e $y = x^2$ al rotar alrededor del eje y

4) a) Halle la solución general de $\left(y + sen^3 x\right)dx + \left(x + \cos y\right)dy = 0$

b) Halle la solución particular de $y' + \dfrac{y}{x} = e^{-2x}$ que pasa por el punto $\left(-1/2, -2\right)$

c) Halle la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas ortogonales a $x^2 + y^2 = C^2$

5) a) Interprete geométricamente $\int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y} dx\,dy$ y plantee el cálculo de dicha integral invirtiendo el orden de integración.

b) Siendo V el sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$ y los planos $x = y$, $x = 0$, $z = 0$ y $z + y = 4$ en el primer octante , plantee el cálculo de $\iiint_V \left(x^2 + y^2\right)dV$ usando coordenadas cilíndricas.

1) a) Suponiendo que *f* es una función continua, exprese con una integral definida: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(i/n)\frac{1}{n}$

Para poder expresar al límite como una integral definida, debemos ver a la sumatoria como una suma de Riemann. Es decir, cada uno de los términos que se suman debería ser el producto de la longitud del subintervalo x_i por la función f evaluada en un punto x_i^* de ese subintervalo. El tomar el límite cuando n->∞, al ser todos los subintervalos iguales, implica que las longitudes de TODOS los subintervalos tienden a 0.

Como cada término es $f\left(i/n\right)\frac{i}{n}$, entonces $\Delta x_i=\frac{1}{n};\ x_i^*=\frac{i}{n}$. Debido a que son n subintervalos, el intervalo de integración mide $n\cdot\frac{1}{n}=1$. Los puntos x_i^* son $\frac{1}{n};\frac{2}{n};\frac{3}{n};...;\frac{n}{n}$, es decir, el extremo derecho de cada subintervalo del $\left[0;1\right]$.

Luego, como la función es continua, el límite existe, y se expresa: $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(i/n)\frac{1}{n}=\int_0^1 f(x)dx$

b) Calcule $\int_0^{\pi}\left[sen(x/2)-2sen(x)\right]dx$. Use el resultado obtenido y el teorema del valor medio para integrales para mostrar que la ecuación $sen(x/2)-2sen(x)+\frac{2}{\pi}=0$ tiene al menos una solución en el intervalo $\left[0,\pi\right]$.

Buscamos una primitiva: $\int sen\left(x/2\right)dx-2\int sen(x)dx=-2\cos\left(x/2\right)+2\cos(x)+C$. *(la primera integral se resuelve por sustitución).*

Entonces $\int_0^{\pi}\left[sen(x/2)-2sen(x)\right]dx=-2\cos(x/2)+2\cos(x)\Big|_0^{\pi}=\left(0-2\right)-\left(-2+2\right)=-2$.

El valor promedio de $f(x)=sen(x/2)-2sen(x)$ en $\left[0,\pi\right]$ es $\dfrac{\int_0^{\pi} f(x)dx}{\pi-0}=\dfrac{-2}{\pi}$. Como la función es continua en ese intervalo, el teorema del valor medio para integrales nos dice que existe al menos un valor $c\in\left(0;\pi\right)$ tal que $f\left(c\right)=-\frac{2}{\pi}$.

Pero entonces existe un $c\in\left(0;\pi\right)$ que satisface $sen(c/2)-2sen(c)=-\frac{2}{\pi}$, que es equivalente a $sen(c/2)-2sen(c)+\frac{2}{\pi}=0$. Por lo tanto la ecuación del problema tiene al menos una solución en el intervalo $\left[0;\pi\right]$.

c) Sean $g(t)=\begin{cases}1-t & si\ 0\le t\le 1\\ 2\sqrt{t-1} & si\ 1<t\le 2\\ 4-t & si\ 2<t\le 3\end{cases}$ y $h(x)$ la función integral de *g* en $\left[0,3\right]$. Usando el teorema fundamental del cálculo, <u>sin hallar la expresión analítica de *h(x)*</u>, muestre que *h* es derivable y escriba la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x=2$.

Por ser $h(x)=\int_0^x g(t)dt$, *podemos usar el TFC para demostrar que* $h'(x)=g(x)$, *pero debemos verificar la hipótesis del teorema, es decir, primero hay que mostrar que* $g(t)$ *es continua en* $[0;3]$.
Podemos decir que $g(t)$ *es continua en* $(0;1)$ *por ser lineal, en* $(1;2)$ *por ser composición de continuas, y en* $(2;3)$ *también por ser lineal. Faltaría estudiar los puntos de pegado,*

<u>t=1</u>:

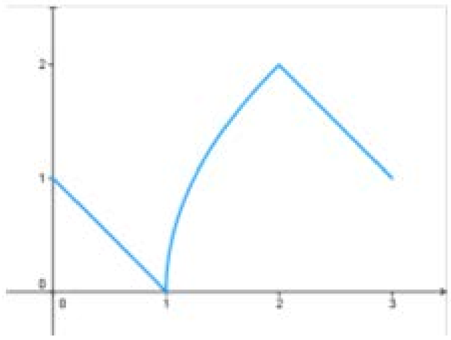
a) *Existe g(1)=0*
b) $\lim_{t\to 1^+} 2\sqrt{t-1}=0$ *y* $\lim_{t\to 1^-} 1-t=0$ *por lo tanto existe el* $\lim_{t\to 1} g(t)$
c) *g(1)=* $\lim_{t\to 1} g(t)$

Por lo tanto, g es continua en t=1

<u>t=2:</u>

a) *Existe g(2)=0*
b) $\lim_{t\to 2^-} 2\sqrt{t-1}=2$ *y* $\lim_{t\to 2^+} 4-t=2$ *por lo tanto existe el* $\lim_{t\to 2} g(t)$
c) *g(2)=* $\lim_{t\to 1} g(t)$

Por lo tanto, g es continua en t=1



También podríamos hacer el gráfico y ver que efectivamente hay continuidad en todo $[0;3]$. *Por lo tanto, se puede asegurar que* h *es derivable, y* $h'(x)=g(x)$.

Para encontrar la ecuación de la recta tangente en $x=2$, *debemos calcular* $h(2)$ *y* $h'(2)$, *para volcarlas en la ecuación* $y-h(2)=h'(2)(x-2)$.

Por un lado, $h'(2)=g(2)=2\sqrt{2-1}=2$. *Además* $h(2)=\int_0^2 g(t)dt$.

Para calcular esta integral usamos la propiedad de aditividad:

$$\int_0^2 g(t)dt=\int_0^1 g(t)dt+\int_1^2 g(t)dt=\int_0^1 (1-t)dt+\int_1^2 2\sqrt{t-1}dt=\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{4}{3}(t-1)^{3/2}\right)\Big|_1^2=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{3}-0\right)=\frac{11}{6}$$

La ecuación de la recta tangente es: $y-\dfrac{11}{6}=2(x-2)$.

2) Resuelva: **a)** $\displaystyle\int \frac{x^2-x+2}{x^3+x}dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{e^{2x}}dx$

a) La primera integral se resuelve por fracciones simples, debemos factorizar el denominador: $\dfrac{x^2-x+2}{x^3+x}=\dfrac{x^2-x+2}{x\cdot(x^2+1)}$. *Por haber un factor lineal y un factor cuadrático irreducible, lo expresamos como:* $\dfrac{x^2-x+2}{x\cdot(x^2+1)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$. *Hay que buscar los valores de las tres constantes.*

$$\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x\cdot(x^2+1)}=\frac{x^2-x+2}{x^3+x}$$

$\begin{cases} A+B=1 \\ C=-1 \\ A=2 \end{cases} \Rightarrow A=2; B=-1; C=-1$ *Entonces* $\frac{x^2-x+2}{x^3+x}=\frac{2}{x}+\frac{-x-1}{x^2+1}$. *Integramos:*

$$\int\frac{2}{x}+\frac{-x-1}{x^2+1}dx=2\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{x}{x^2+1}dx-\int\frac{1}{x^2+1}dx=2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|-arctg(x)+C$$

(la segunda integral sale por sustitución).

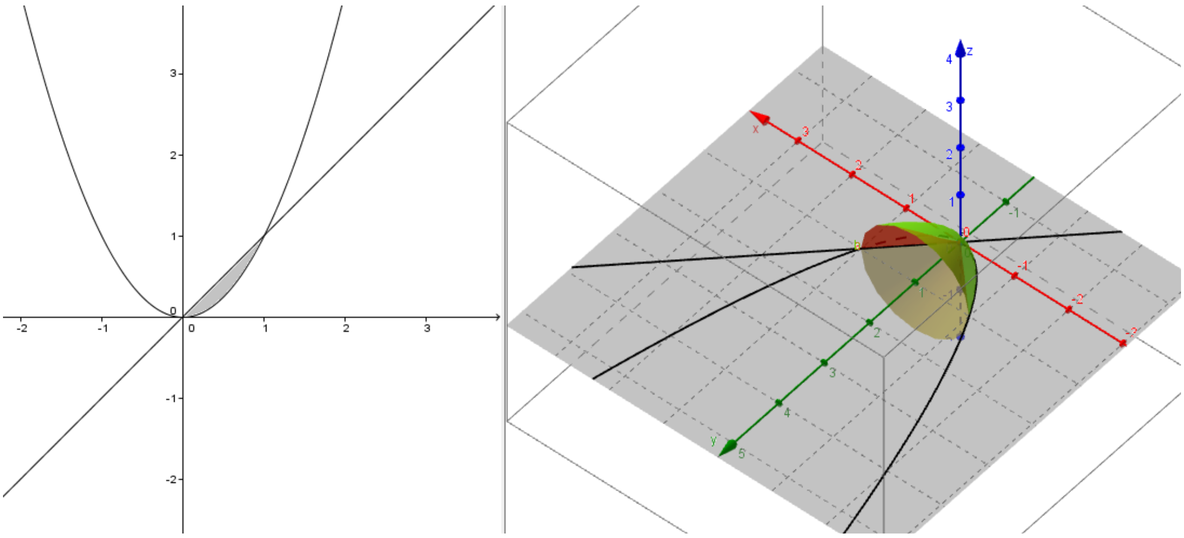
b) Para resolver esta integral definida, primero buscamos una primitiva, usando el método de integración por partes. Tomo $u=x;\ dv=e^{-2x}dx\Rightarrow du=dx;\ v=-\frac{1}{2}e^{-2x}$.

$$\int\frac{x}{e^{2x}}dx=\int x\cdot e^{-2x}dx=x\cdot\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)-\int-\frac{1}{2}e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

Aplicando Barrow: $\int_0^1 x\cdot e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big|_0^1=\left(-\frac{1}{2}e^{-2}-\frac{1}{4}e^{-2}\right)-\left(0-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{4}e^{-2}+\frac{1}{4}$

3) Calcule el volumen del sólido de revolución que genera la región limitada por $y=x$ e $y=x^2$ al rotar alrededor del eje y

El sólido que se genera al rotar esa región alrededor del eje "y" es un sólido que tiene una cavidad. Por lo tanto, tengo que calcular dos volúmenes: el del sólido sin la cavidad y el de la cavidad. Y luego, restar esos volúmenes.



Para calcular el volumen del sólido sin la cavidad, tengo en cuenta solamente el paraboloide que se obtiene al hacer girar la parábola alrededor del eje y.
La variable "y" varía entre 0 y 1, y el radio está dado por R=$\sqrt{y}$
Por lo tanto el volumen es:

$$V=\int_0^1\pi\left(\sqrt{y}\right)^2dy=\pi\int_0^1 ydy=\pi\frac{y^2}{2}\Big|_0^1=\pi\frac{1}{2}$$

Para calcular el volumen de la cavidad, tengo en cuenta solamente el cono que se obtiene al girar la recta alrededor del eje y.
La variable "y" varía entre 0 y 1, y el radio está dado por R=y
Por lo tanto el volumen es:

$$V = \int_0^1 \pi\,(y)^2 dy = \pi \int_0^1 y^2 dy = \pi \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \pi\frac{1}{3}$$

Por último, resto ambos volúmenes para obtener el volumen pedido:

$$\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{1}{6}\pi$$

4) a) Halle la solución general de $\left(y + sen^3 x\right)dx + \left(x + \cos y\right)dy = 0$

Sean $P(x,y) = y + sen^3 x$ *;* $Q(x,y) = x + \cos y$*. Veamos si la ecuación es exacta:* $\frac{dP}{dy} = 1$*;* $\frac{dQ}{dx} = 1$*.*

Como coinciden, es exacta. Buscamos la función $f(x,y)$ *que cumple* $\frac{df}{dx} = P(x,y)$ *;* $\frac{df}{dy} = Q(x,y)$*.*

$f(x,y) = \int Q(x,y)dy = \int (x + \cos y)dy = xy + sen(y) + g(x)$*.*

También debe cumplir: $\frac{df}{dx} = y + g'(x) = y + sen^3 x$*. Entonces*

$$g(x) = \int sen^3 x\ dx = \int sen^2 x \cdot senx\ dx = \int (1-\cos^2 x)senxdx = \int senx - senx\cdot\cos^2 xdx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$$

Luego, $f(x,y) = xy + sen(y) - \cos(x) + \frac{\cos^3 x}{3} + C$*, y la solución general de la ecuación es* $xy + sen(y) - \cos(x) + \frac{\cos^3 x}{3} + C = 0$*.*

b) Halle la solución particular de $y' + \frac{y}{x} = e^{-2x}$ **que pasa por el punto** $\left(-\tfrac{1}{2},-2\right)$

La ecuación es lineal, entonces definimos: $y = u\cdot v \to y' = u'v + uv'$*, y reemplazamos:*

$u'v + uv' + \frac{uv}{x} = e^{-2x} \Rightarrow u'v + u\left(v' + \frac{v}{x}\right) = e^{-2x}$*. Pedimos la condición* $v' + \frac{v}{x} = 0$*, y resolvemos:*

$\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x} \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int -\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|v| = -\ln|x| + C \Rightarrow v = x^{-1}\cdot K$*. Tomando* $K = 1 \to v = \frac{1}{x}$*.*

Volviendo a la ecuación original: $u'v = e^{-2x} \Rightarrow u'\frac{1}{x} = e^{-2x} \Rightarrow u' = xe^{-2x} \Rightarrow u = \int xe^{-2x}dx$*.*

Pero esta es la integral del ejercicio 2b, entonces $u = \int xe^{-2x}dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C$*.*

Armamos $y = uv = \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C\right)\frac{1}{x}$*. Esta es la solución general, falta pedir que pase por el punto* $\left(-\tfrac{1}{2},-2\right)$*. Haciendo* $x = -\tfrac{1}{2}$*;* $y = -2$*:* $-2 = \left(\frac{1}{4}e^{1} - \frac{1}{4}e^{1} + C\right)\cdot\frac{1}{-\tfrac{1}{2}} = -2C \Rightarrow C = 1$*.*

La solución particular es $y = \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + 1\right)\frac{1}{x}$

c) Halle la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas ortogonales a $x^2 + y^2 = C^2$**.**

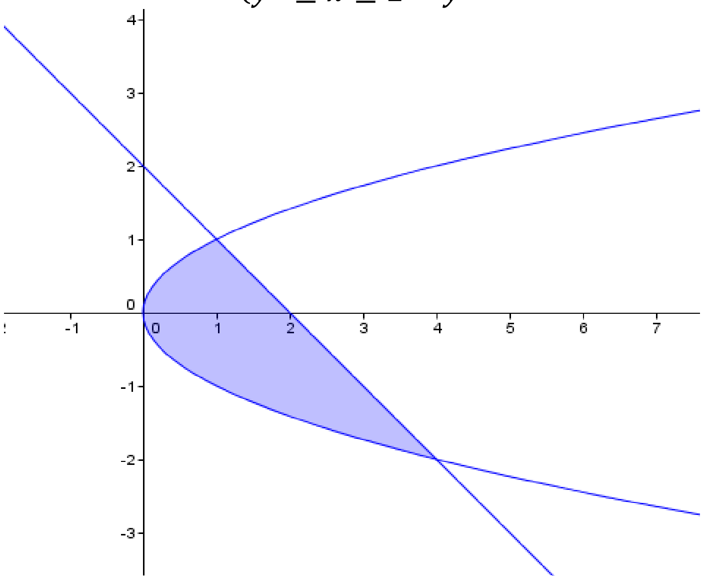
Derivando implícitamente se obtiene: $2x + 2yy' = 0$*. Como en esta ecuación ya no hay parámetros, es la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas dada. Pero me piden la ecuación diferencial asociada a la familia de curvas ortogonales, que se obtiene sustituyendo y' por -1/y' en esa ecuación:*

$$2x + 2y(-\frac{1}{y'}) = 0$$

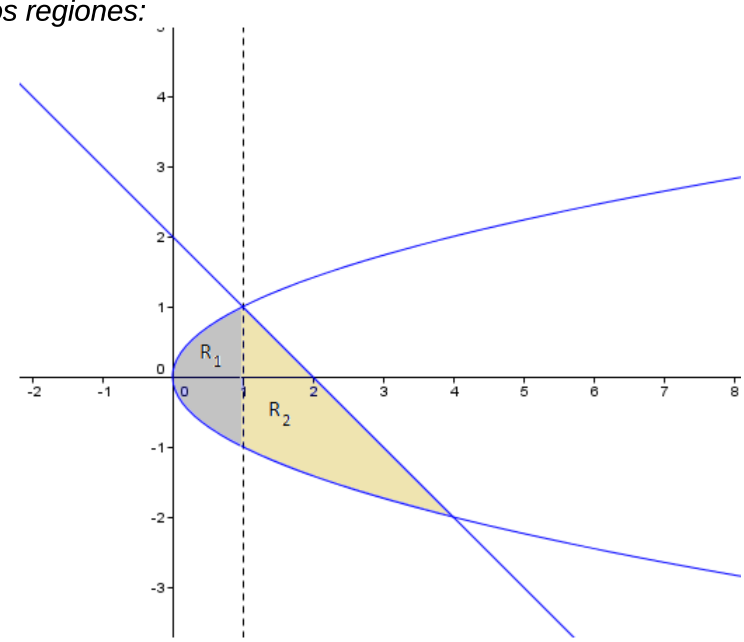
5) a) Interprete geométricamente $\int_{-2}^{1}\int_{y^2}^{2-y} dx\,dy$ **y plantee el cálculo de dicha integral invirtiendo el orden de integración.**

Interpretación geométrica: La integral doble de f(x,y)=1 en una cierta región nos da el área de esa región.
En este caso, la región está dada por

$$\begin{cases} -2 \le y \le 1 \\ y^2 \le x \le 2 - y \end{cases}$$



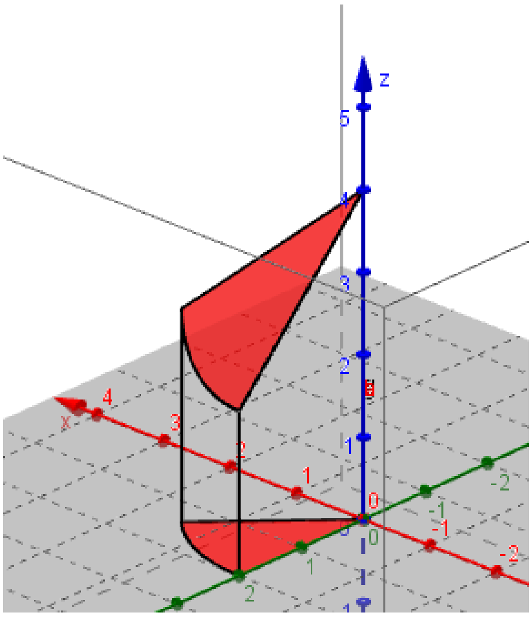
La región está descripta como tipo 2. Tenemos que describirla ahora como tipo 1. Pero para eso hay que subdividirla en dos regiones:



Las gráficas se cortan en los puntos (4,-2) y (1,1). La integral queda entonces:

$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dydx + \int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{2-x} dydx$$

b) Siendo V el sólido limitado por $x^2 + y^2 = 4$ **y los planos** $x = y$ **,** $x = 0$ **,** $z = 0$ **y** $z + y = 4$ **en el primer octante , plantee el cálculo de** $\iiint_V (x^2 + y^2) dV$ **usando coordenadas cilíndricas.**



Los planos x=0 (plano yz), y=x, y el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ *son las "paredes" del sólido. El plano z=0 es el piso y el plano z=4-y es el techo (sombreados en la figura) Usando coordenadas cilíndircas, la integral quedaría planteada del siguiente modo:*

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{4-rsen(\theta)} r^2 rdzdrd\theta$$