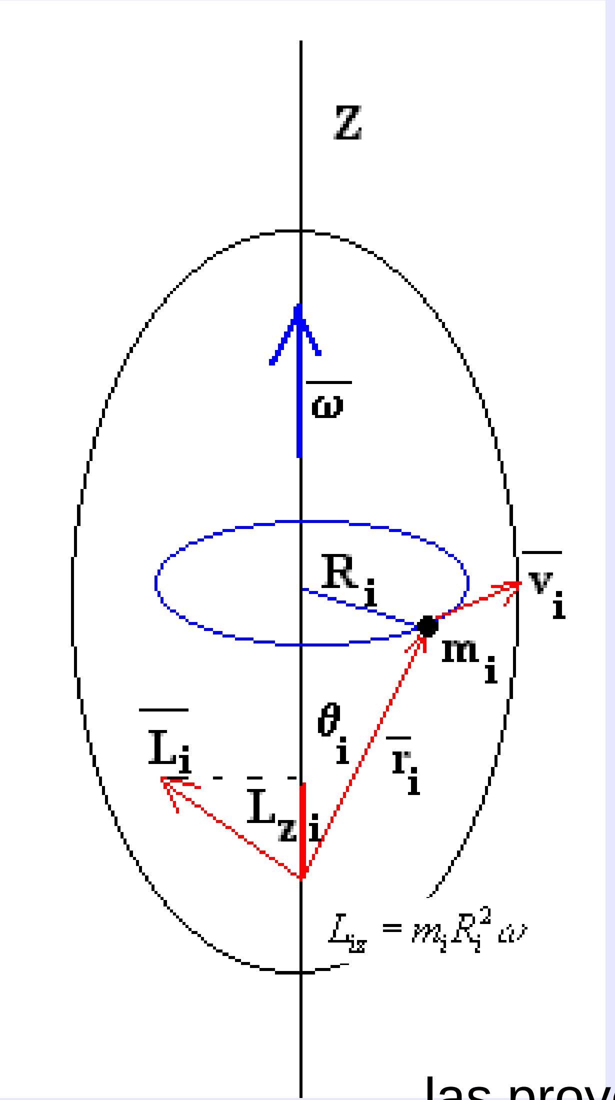
Física I
Apuntes de Clase 4 -MII
2024

Momento Cinético de un Cuerpo Rígido en rototraslación.
Principio de Conservación del Momento Cinético de un Cuerpo Rígido.
Precesión

Prof. Susana Conconi

Cuerpo rígido

Sistema de partículas en el que las distancias entre las partículas son fijas



En el movimiento de un rígido que rota alrededor de un eje fijo, cada partícula, de masa m_i se mueve con una velocidad v_i en una circunferencia, de radio $R_{i,}$ centrada en el eje de rotación.

$$v_i = \omega \cdot r_i$$

El momento cinético de cada partícula esta dado por

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times m_i \boldsymbol{v}_i \qquad \text{y} \qquad L_i = r_i\, m_i v_i$$

Su proyección sobre el eje de rotación Z es:

$$L_{iz} = m_i v_i r_i \cos(90 - \theta_i)$$

$$L = L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i v_i r_i \cos(90 - \theta_i)$$

las proyecciones en el plano perpendicular a Z se cancelan

$$L = L_z = \sum L_{iz} = \sum m_i v_i r_i \cos(90-\theta_i)$$

vi $= \omega_i\, R_i$ y $r_i \cos(90-\theta_i) = R_i$ distancia al eje

$$L = L_z = \sum m_i\, R_i^2\, \omega i = \omega \underbrace{\sum m_i\, R_i^2}$$

Momento de Inercia : I
Unidades: kg m^2

$$\boxed{\mathbf{L_z = I\, \boldsymbol{\omega}}}$$

$$\boxed{d\mathbf{L} / dt =}\; d\,(I\boldsymbol{\omega})\,/dt = I\, d\boldsymbol{\omega}/dt = \boxed{I\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\tau}_e = I\, \boldsymbol{\alpha}}$$

Que es lo obtenido para la 2da ley para rotación de los cuerpos rígidos

Para un sistema de partículas:

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext,O} = \frac{d\,\vec{L}_{tot,O}}{dt}}$$

2da Ley de Newton para la rotación

donde: $\vec{L}_{tot,O} = \sum_i \vec{L}_{i,O} = \sum_i \vec{r}_{i,O} \times \vec{p}_{i,O}$ y $\vec{\tau}_{ext,O} = \vec{r}_{i,O} \times \vec{F}_{ext}$

Para un cuerpo rígido:

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext,O} = \frac{d\,\vec{L}_O}{dt}}$$

donde: $\vec{\tau}_{ext,O} = \vec{r} \times \vec{F}_{ext,O}$

y $\boxed{\vec{L}_O = I_O\,\vec{\omega}}$

I_O = momento de inercia respecto al sistema de referencia con origen en "O"

Conservación del momento angular en un rígido

Si $\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext,O} = 0}$ ⇒ $\dfrac{d\,\vec{L}_O}{dt} = 0$ ⇒ $\boxed{\vec{L}_O = cte}$

Ojo!! $\vec{L}$ es un vector!!..... ⇒

⇒ $\vec{L}_{i,O} = \vec{L}_{f,O}$ ⇒ $\begin{cases} L_x = cte \\ L_y = cte \\ L_z = cte \end{cases}$

Principio de conservación del momento angular

"Si el torque externo neto que actúa sobre un objeto es 0, su momento angular permanecerá constante"

Ya vimos que es muy útil considerar las ecuaciones respecto al CM:

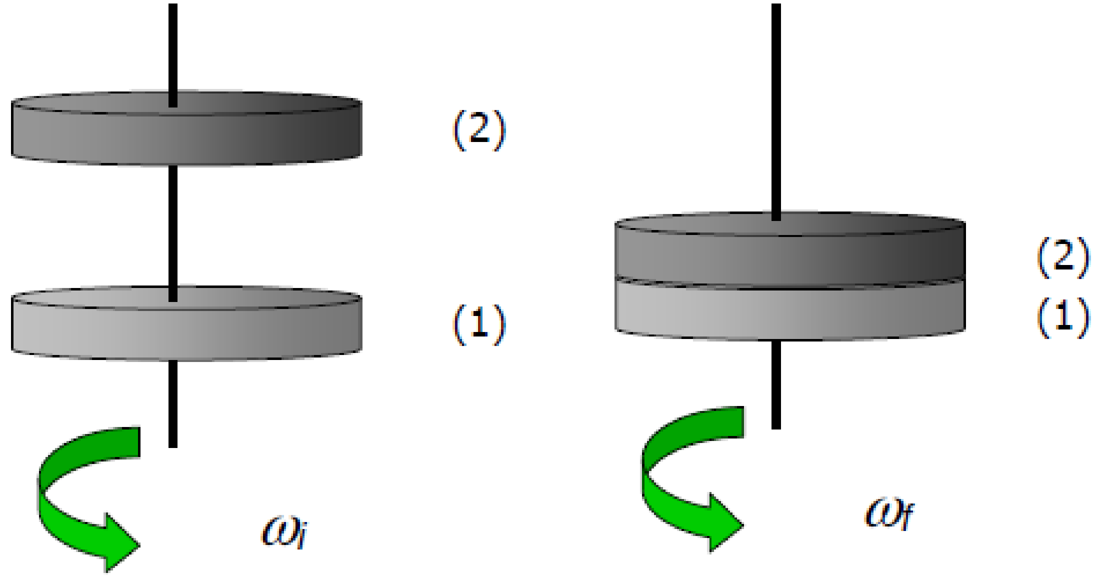
$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{rel,CM} = \frac{d\,\vec{L}_{rel,CM}}{dt}}$$

donde: $\vec{\tau}_{rel,CM} = \vec{r}_{i,CM} \times \vec{F}_{i,ext}$

y $\boxed{\vec{L}_{rel,CM} = I_{CM}\,\vec{\omega}}$

Ejemplo 1:

Una mesa giratoria con un disco de 200 g de masa (1) y 8 cm de radio gira con una velocidad angular de 2 rev/s alrededor de un eje vertical sin rozamiento. Un disco idéntico que inicialmente no gira (2), cae repentinamente sobre el primero. La fricción entre los dos hace que terminen girando con la misma velocidad angular. ¿Qué velocidad angular tiene la combinación?



$$\tau^{ext}_{rel,CM} = 0$$

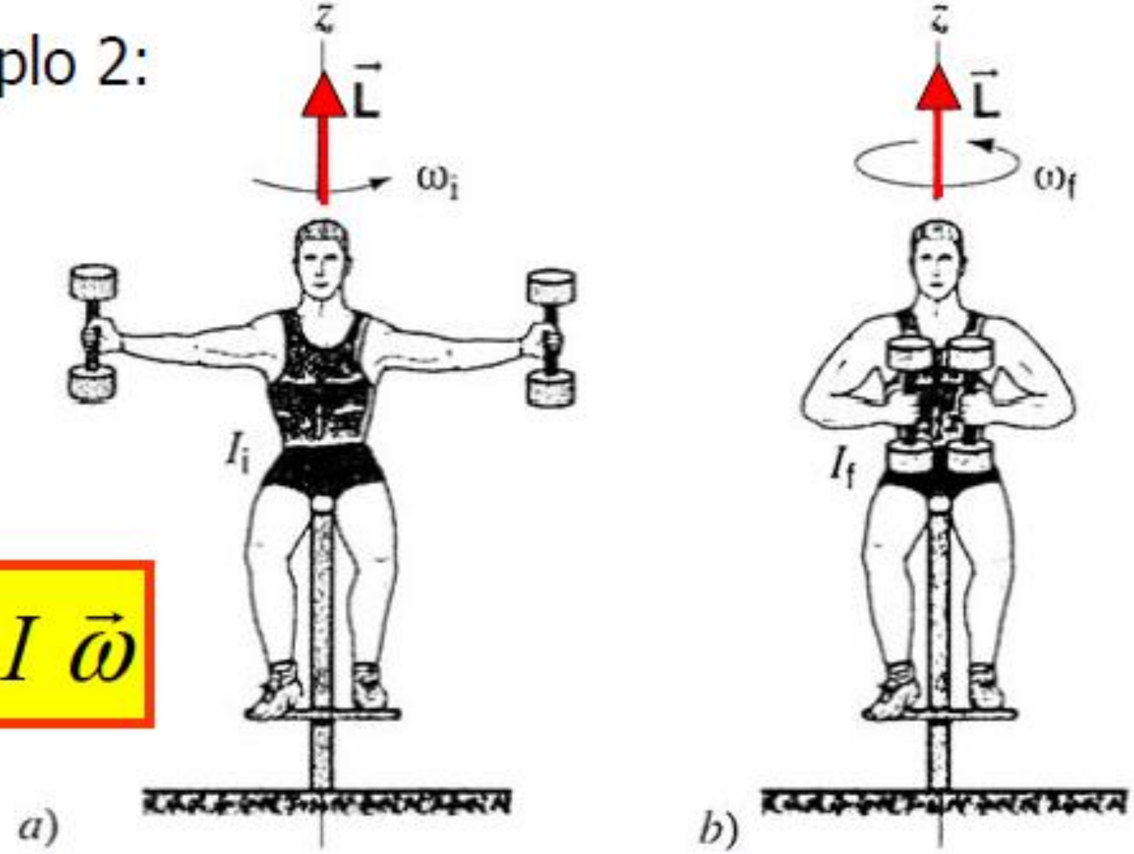
$$\Downarrow$$

$$L_{z,tot,i} = L_{z,tot,f}$$

$$L_{z,i}(1) + \cancel{L_{z,i}(2)} = L_{z,f}(1+2) \Rightarrow I_1\,\omega_1 = I_{1+2}\,\omega_f$$

$$\frac{1}{2}M_1 R_1^2\,\omega_i = \frac{1}{2}\underbrace{(M_1 + M_2)}_{2M_1} R_1^2\,\omega_f \Rightarrow \boxed{\omega_f = \frac{1}{2}\omega_i = 1\,rev/s}$$

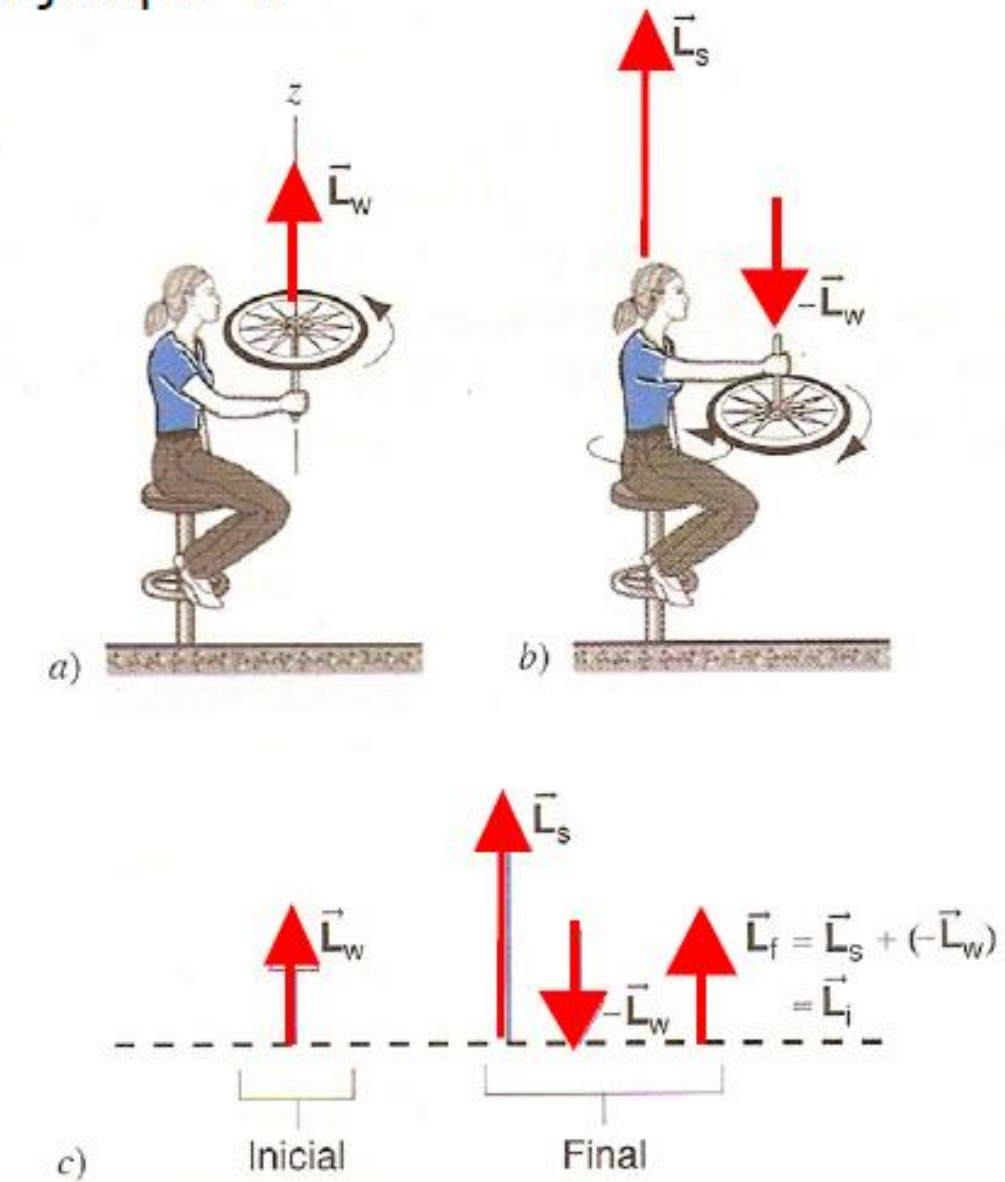
Ejemplo 2:



$$\boxed{\vec{L} = I\,\vec{\omega}}$$

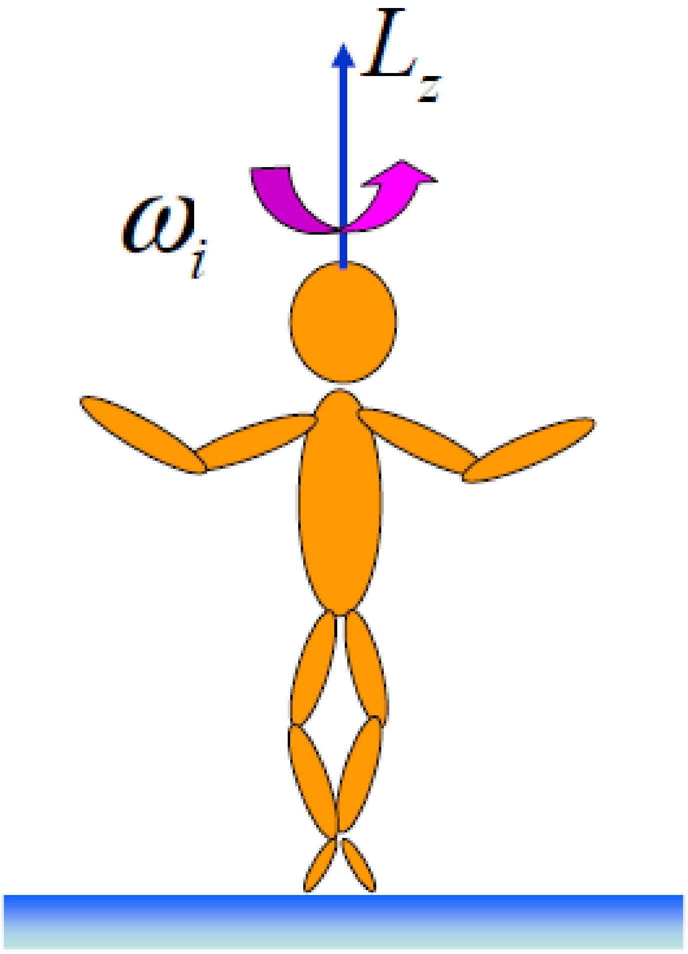
a) En esta configuración el sistema (estudiante + pesas) tiene mayor inercia rotacional y menor velocidad angular. b) Aquí el estudiante ha tirado hacia adentro las pesas, produciendo menor inercia rotacional y, por tanto, mayor velocidad angular. El momento angular $\vec{L}$ posee el mismo valor en ambos casos.

Ejemplo 4:



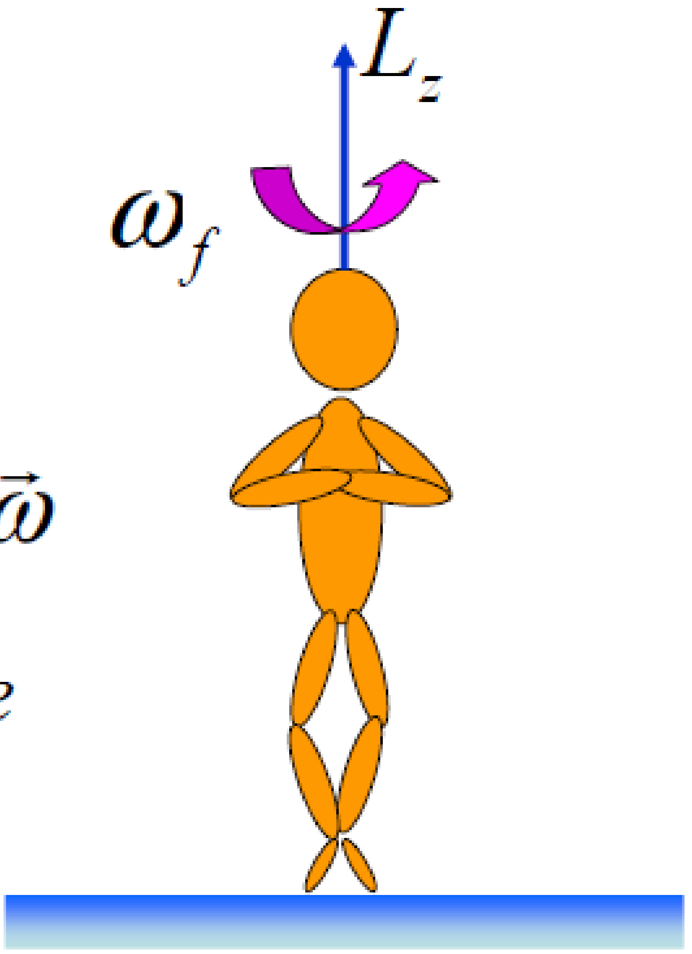
Estudiante con bicicleta

Ejemplo 5: bailarina clásica



$$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$$

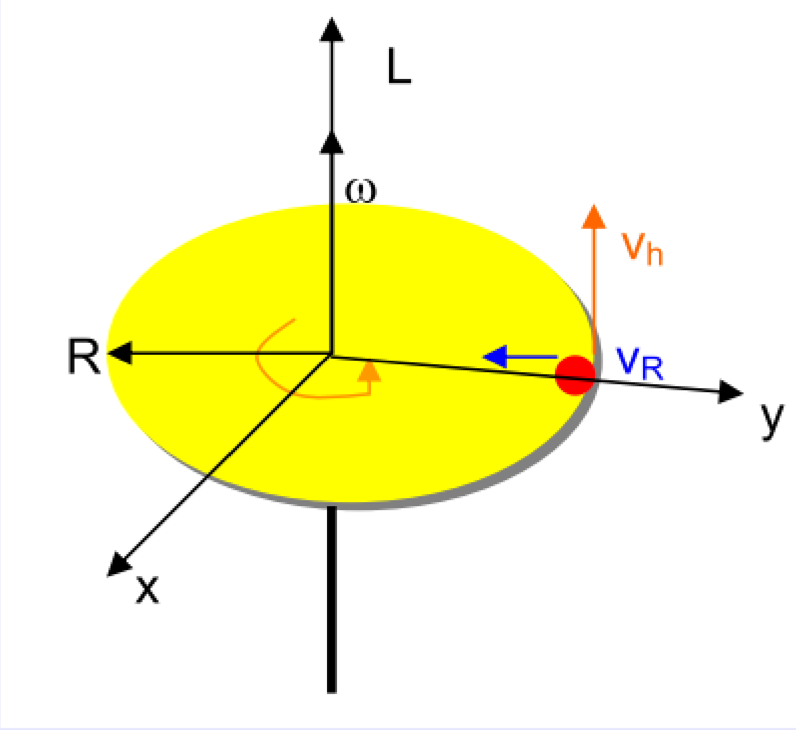
$$\vec{L} = cte$$



$$I_i > I_f \Rightarrow \omega_i < \omega_f$$

Una plataforma horizontal de 100 Kg. de masa gira alrededor de un eje vertical que pasa por un centro y da 10 r.p.m. Un hombre de 60 Kg se encuentra en estas condiciones en el borde de la plataforma. ¿Con qué velocidad angular comenzará a girar la plataforma si el hombre se traslada desde el borde hacia el centro de la misma?. Considerar que la plataforma es un disco circular homogéneo y que el hombre es una masa puntual.

SFE= Disco (CR) + hombre (Partícula)



m_P= 100 Kg
m_H= 60 Kg

ω= 10rpm = 10 x 2 π / 60 = 1.04 1/s

$$\sum \vec{\tau}_{ext,O} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

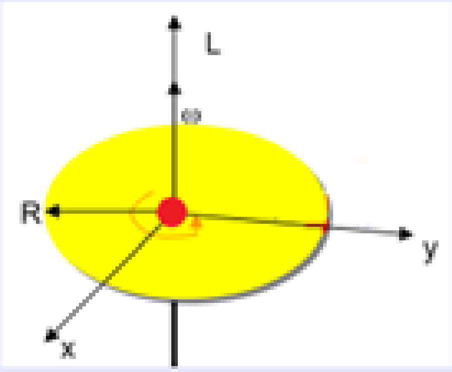
$$\tau^{ext}_{rel.CM} = 0$$

$$L_{z,tot,i} = L_{z,tot,f}$$

Es verdad que no hay torques externos?

$$L^z_{CM,i} = L^z_{P,i} + L^z_{H,i} = \underbrace{I_{P,CM}\cdot \omega_i}_{\text{CR}} + \underbrace{m_H\, v_{tg}\, R}_{\text{partícula}}$$

Como el hombre gira solidario con la plataforma tienen la misma velocidad angular ω y $v_{tg} = \omega R$



$$L^z_{CM,i} = I_{P,CM}\cdot \omega_i + m_H \,.\, \omega_i\, R^2$$

$$L^z_{CM,i} = (I_{P,CM} + m_H \,.\, R^2)\,\omega_i$$

$$L^z_{CM,f} = I_{P,CM}\, \omega_f$$

$$(I_{P,CM} + m_H \,.\, R^2)\,\omega_i = I_{P+H,CM}\, \omega_f$$

$$(1/2\, m_P R^2 + m_H \,.\, R^2)\,\omega_i = 1/2\, (m_P + m_H)\, R^2\, \omega_f$$

$$\frac{(1/2\, m_P R^2 + m_H \,.\, R^2)\,\omega_i}{1/2\, (m_P + m_H)\, R^2} = \omega_f$$

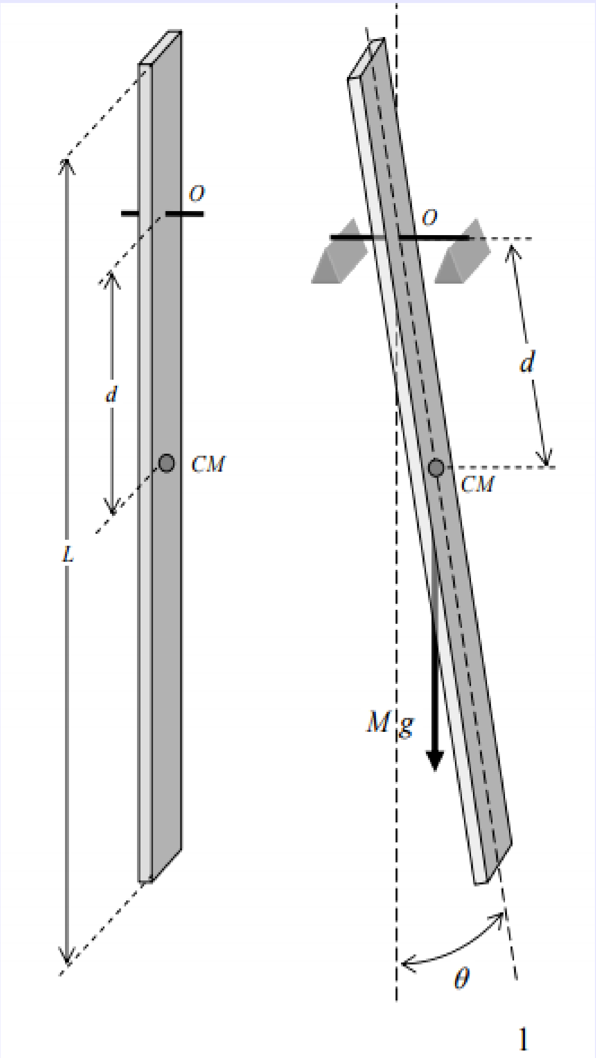
Rta: 2,3 1/seg

Péndulo físico

Sólido rígido de forma arbitraria que puede oscilar en un plano vertical alrededor de un eje perpendicular a ese plano que contenga a su centro de masas. El punto de intersección del eje con dicho plano es el punto de suspensión O. La posición de equilibrio es aquella en que el centro de masas se encuentra en la misma vertical y por debajo del punto de suspensión.

Ej:
Una varilla delgada homogénea de longitud L. La distancia del *CM* al punto de suspensión *O* es *d*.

Oscilaciones:
Cuando el péndulo se separa de la vertical un ángulo θ, el peso Mg crea un momento recuperador con respecto al punto de suspensión O.

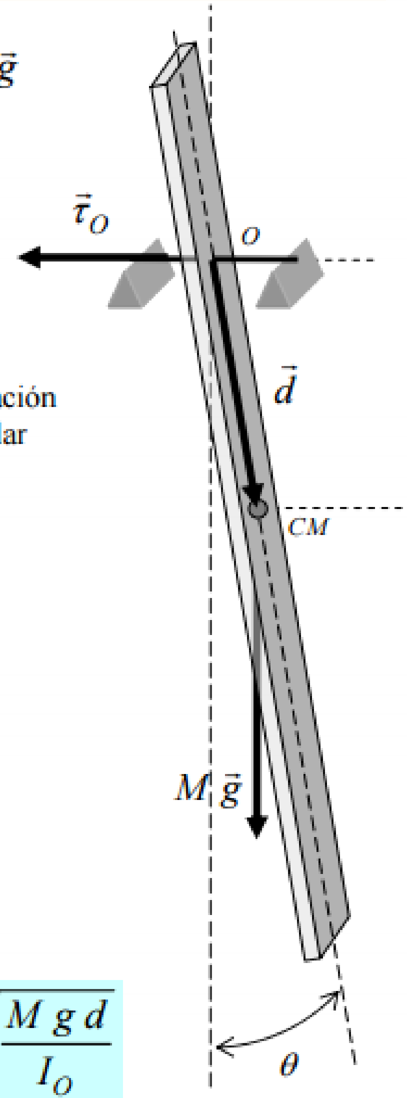


Calculamos el momento del peso respecto a O cuando el ángulo formado por la varilla con la vertical es θ

$$\vec{\tau}_O = \vec{d} \times M\,\vec{g}$$

Este vector momento $\vec{\tau}_O$ tiene un sentido tal que tiende a llevar de nuevo al péndulo a la posición de equilibrio; por eso se llama momento recuperador, y su módulo tiene el valor

$$\tau_O = M\,g\,d\sin\theta$$



Dinámica de la oscilación

Ley fundamental de la dinámica de rotación:

$$\underbrace{\vec{\tau}_O}_{\text{Momento recuperador}} = \underbrace{I_O}_{\text{Momento de inercia}}\ \underbrace{\vec{\alpha}}_{\text{Aceleración angular}}$$

Momento recuperador y momento de inercia medidos respecto al mismo punto O.

Módulo de la aceleración angular: $\alpha = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

$$\tau_O = -M\,g\,d\sin\theta = I_O\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Momento recuperador: $\tau_O = -M\,g\,d\sin\theta$

$$I_O\frac{d^2\theta}{dt^2} + M\,g\,d\sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{M\,g\,d}{I_O}\sin\theta = 0$$

Cuando el ángulo θ es lo bastante pequeño ($\theta < 15^o$) $\sin\theta \to \theta$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{M\,g\,d}{I_O}\theta = 0}$$

Ecuación MAS $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{M\,g\,d}{I_O}}}$$

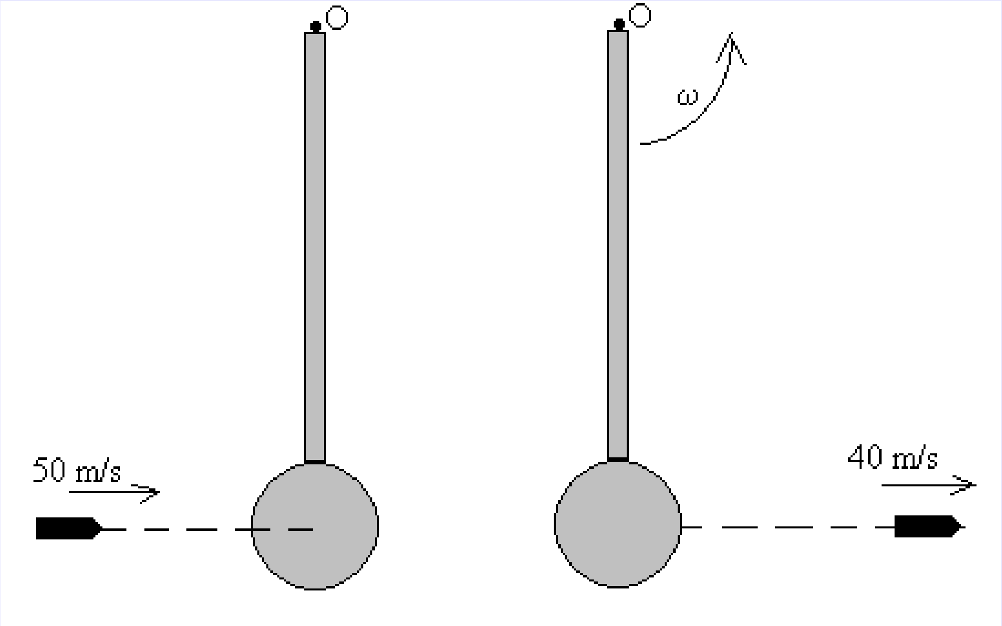
Período del movimiento (T) : $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_O}{M\,g\,d}}}$

Ej. Conservación momento angular en colisión

Una bala de 150 g que lleva una velocidad horizontal de 50 m/s atraviesa por el centro el cilindro de un péndulo. Después del choque la bala se mueve con una velocidad de 40 m/s. El péndulo puede girar alrededor de O y está formado por una varilla delgada de 100 g de masa y 30 cm de longitud, y un cilindro de 600 g de masa y 5 cm de radio.

a) Calcular la velocidad angular del péndulo después del choque. y la energía perdida en el mismo. ¿Cual es la rapidez del cm?

b) ¿Se conservó la cantidad de movimiento en el choque?



Datos:

m_v= 0,100 Kg

L= 0,3 m

m_c= 0,600 Kg

R = 0,05 m

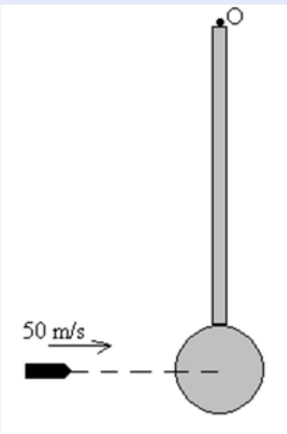
mb = 0,15 Kg

vib= 50m/s

vfb= 40m/s

Momento de inercia del péndulo respecto de un eje que pasa por el extremo de la varilla (o). Tomamos varilla como CR y cilindro como particula

$$I_O = I_{cmv} + m_v (L/2)^2 + Io_c = (1/12.\ m_v\ L^2 + m_v\ (L/2)^2 + m_c\ (L+R)^2$$



$$I_O = (1/12\ 0{,}1\ 0{,}3^2 + 0{,}1\ .\ 0{,}15^2) + (\ 0{,}6\ .\ 0{,}35^2) = \ 0{,}077 kg.m^2$$

Principio de conservación del momento angular

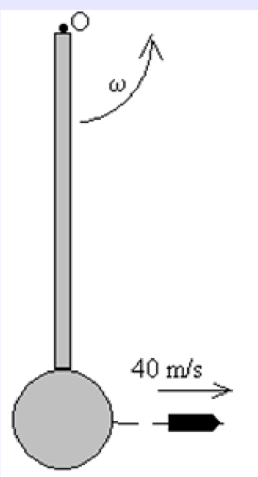
Al chocar el proyectil aparece una fuerza en el pivote que se opone al desplazamiento, pero no hace torque respecto al pivote.

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext,O} = \frac{d\ \vec{L}_{tot,O}}{dt}}$$

$$\tau_{,O}^{ext} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$L_{z,tot,i} = L_{z,tot,f}$$

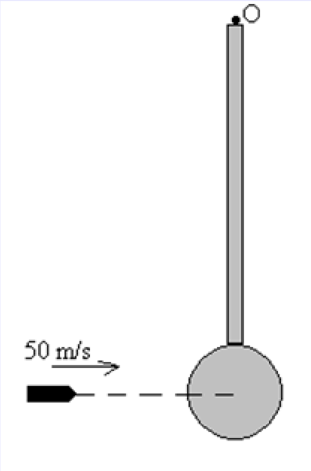


$$L^z{}_i = m_b\ .\ vi_b\ .\ (L+R)$$

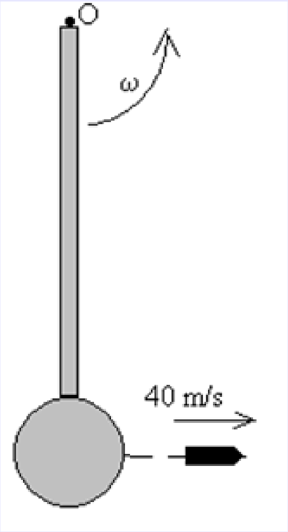
$$L^z{}_f = m_b\ .\ vf_b\ .\ (L+R) + I_o\ \omega$$

$$0.15 \cdot 50 \cdot 0.35 = 0.15 \cdot 40 \cdot 0.35 + 0{,}077.\omega \qquad \omega = 6{,}81 \text{ rad/s}$$

Variación de Energía cinética en el choque



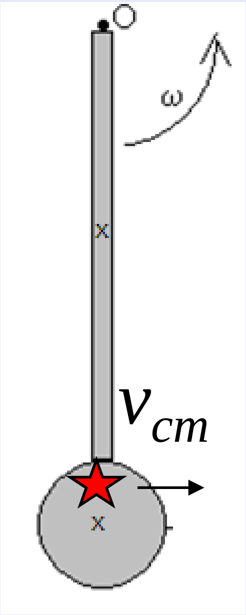
$$\Delta E = E_{cf} - E_{ci}$$



$$\Delta E = \tfrac{1}{2} I_o \, \omega_f^{2} + \tfrac{1}{2} m_b \, v_{fb}^{2} - \tfrac{1}{2} m_b \, vi_b^{2}$$

$$\Delta E = \tfrac{1}{2}\, 0{,}077 kg.m^2 \; 6{,}81^2 \; 1/s^2 + \tfrac{1}{2}\, 0{,}15 \; Kg \;\; 40^2 m^2/s^2 - \tfrac{1}{2}\, 0{,}15 \; Kg \; 50^2 m^2/s^2$$

$$\Delta E = 1{,}78 \; Joul + 120 joul - 187.5 Joul = -65{,}7 \; Joul$$



¿Cual es la rapidez del cm?

Posición del centro de masa respecto del extremo O de la varilla

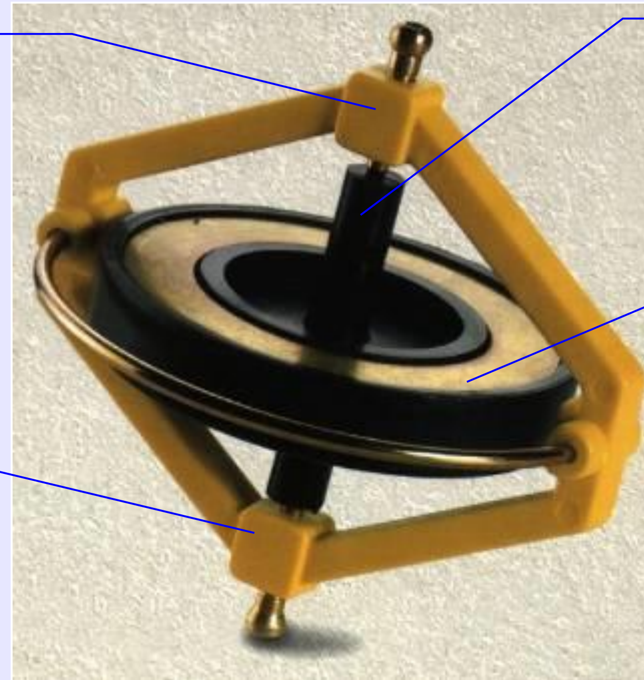
$$x_{cm} = \frac{m_v . L/2 + (m_c . (L+R)}{m_v + m_c}$$

$$x_{cm} = \frac{0.1\ Kg \cdot 0.15 m + 0.6 Kg \cdot 0.35}{0.7\ Kg} = 0.32\ m$$

La rapidez del cm: $v_{cm} = \omega \cdot x_{cm} = 2.18\ m/s$

Anexo: Giróscopos

Cojinetes

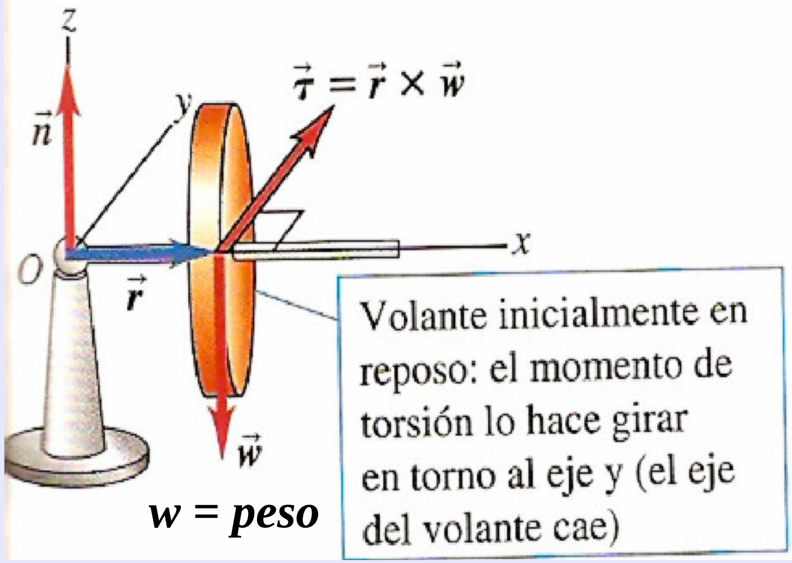


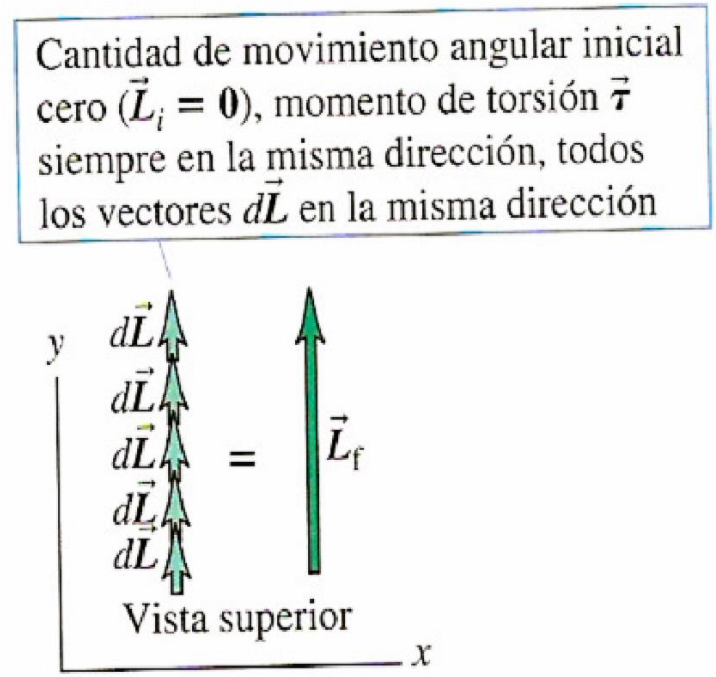
Eje

Volante/
Rotor

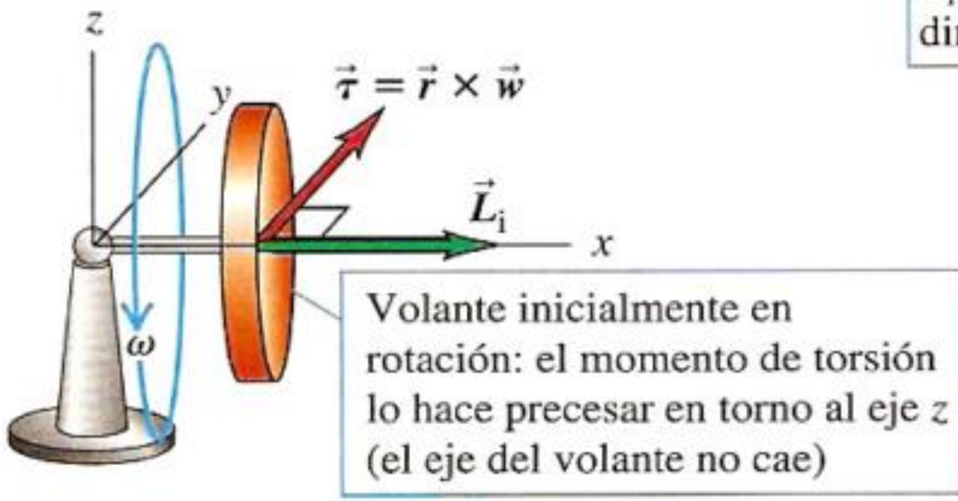
Giróscopos y precesión:

¿qué ocurre si la rueda no gira?

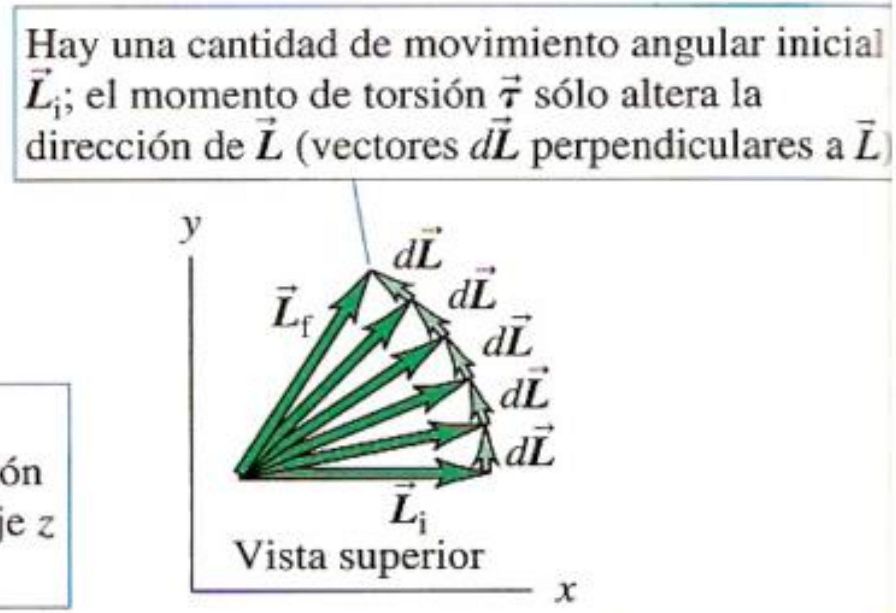




$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



(a)

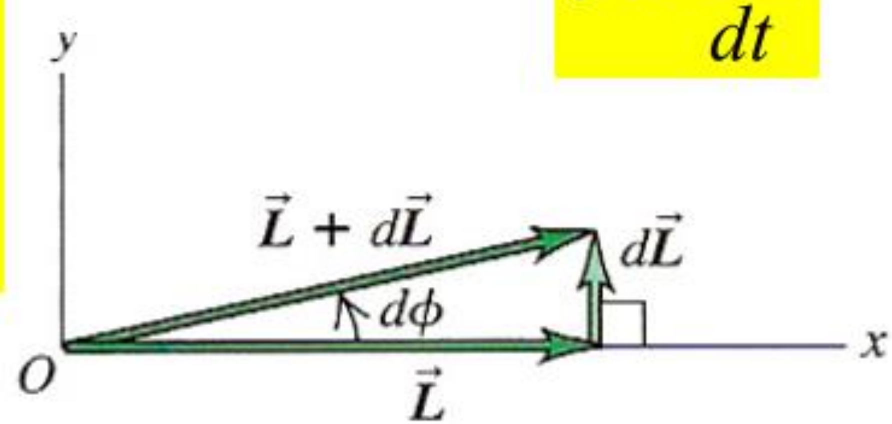


(b)

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

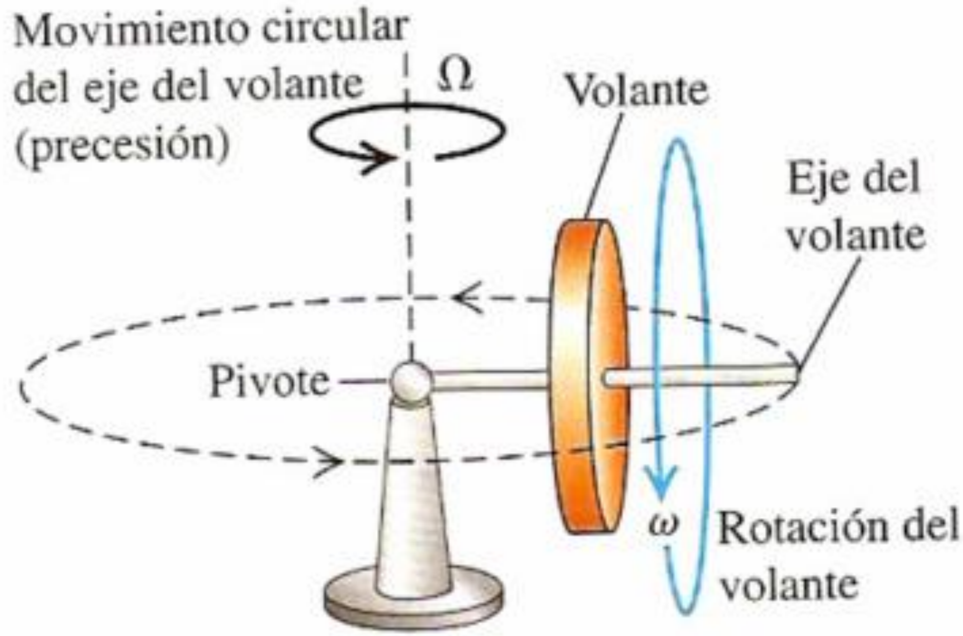
¡¡¡ Ahora le imprimimos una rotación a la rueda!!!

$$\vec{L} \neq \text{cte}$$

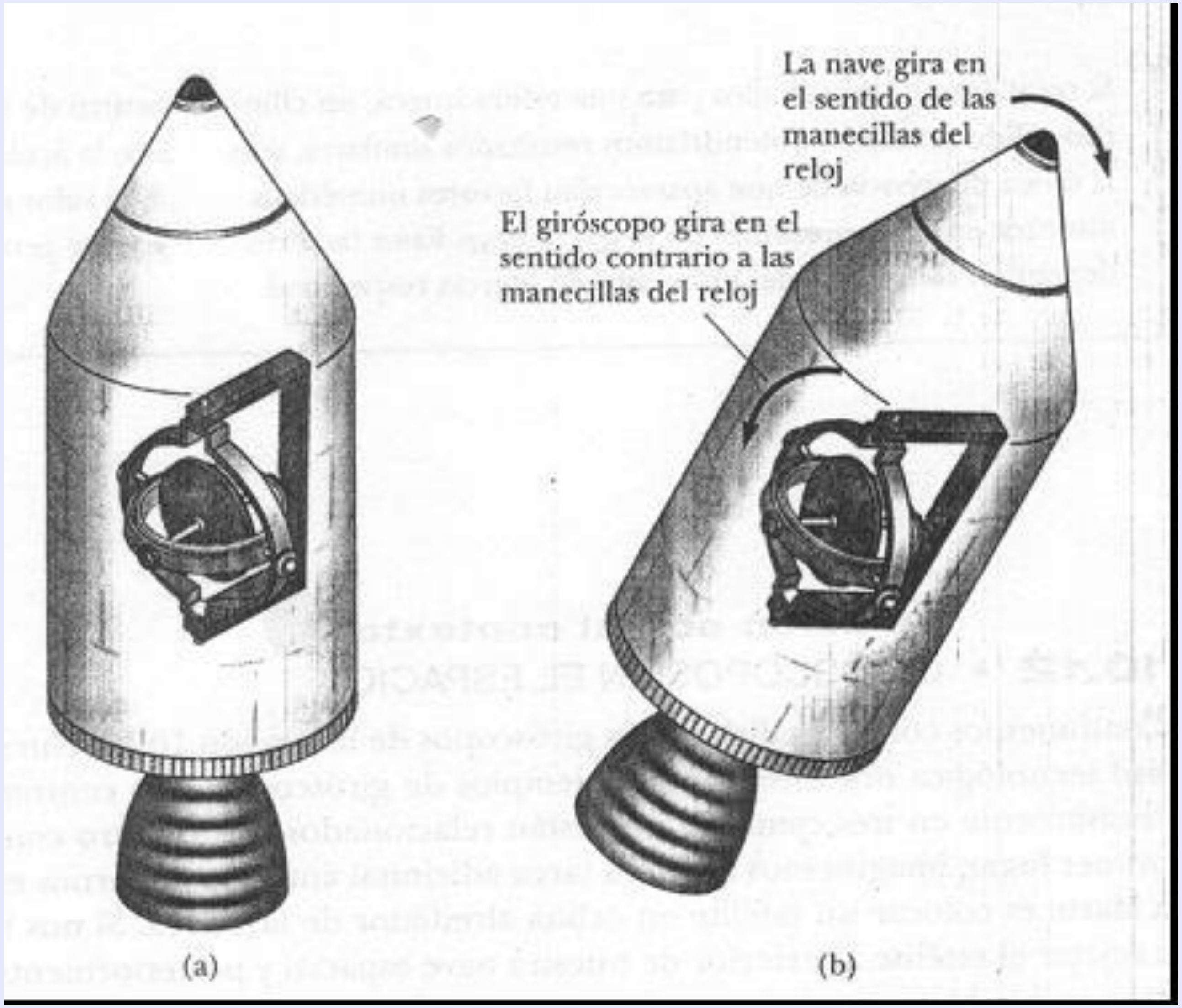


Eje de la rueda apoyado en un extremo

$$\Omega = \frac{wr}{I\,\omega}$$

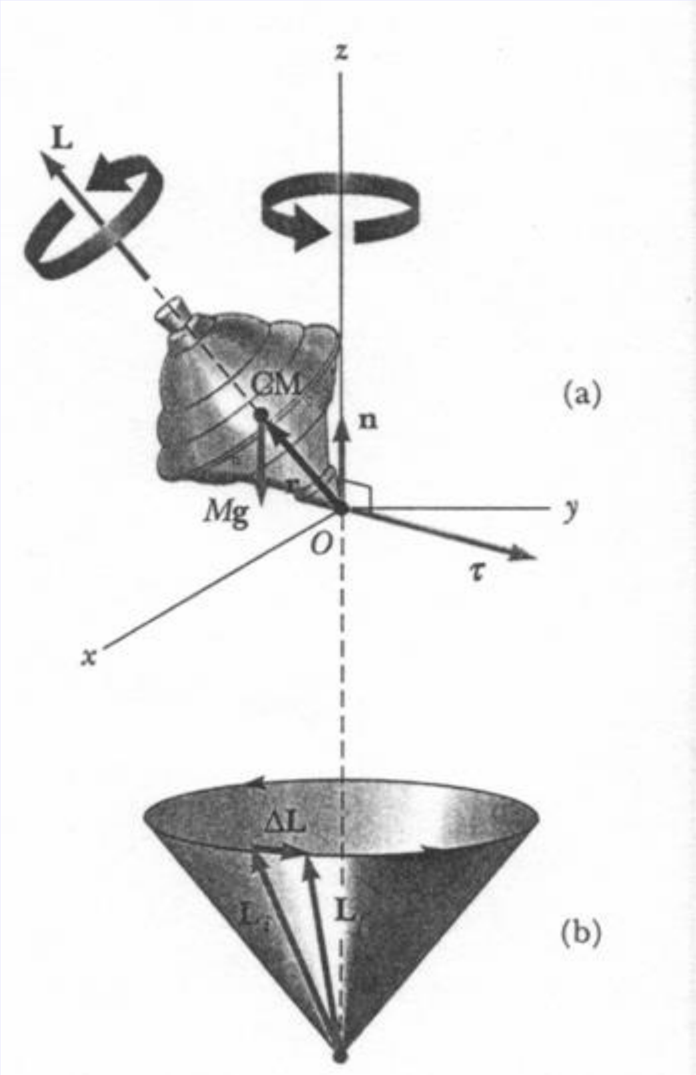


Puesto que el volante gira con rapidez angular ω, el volante y el eje no caen, sino que tienen un movimiento circular horizontal llamado precesión. La velocidad angular de la "precesión" es Ω.



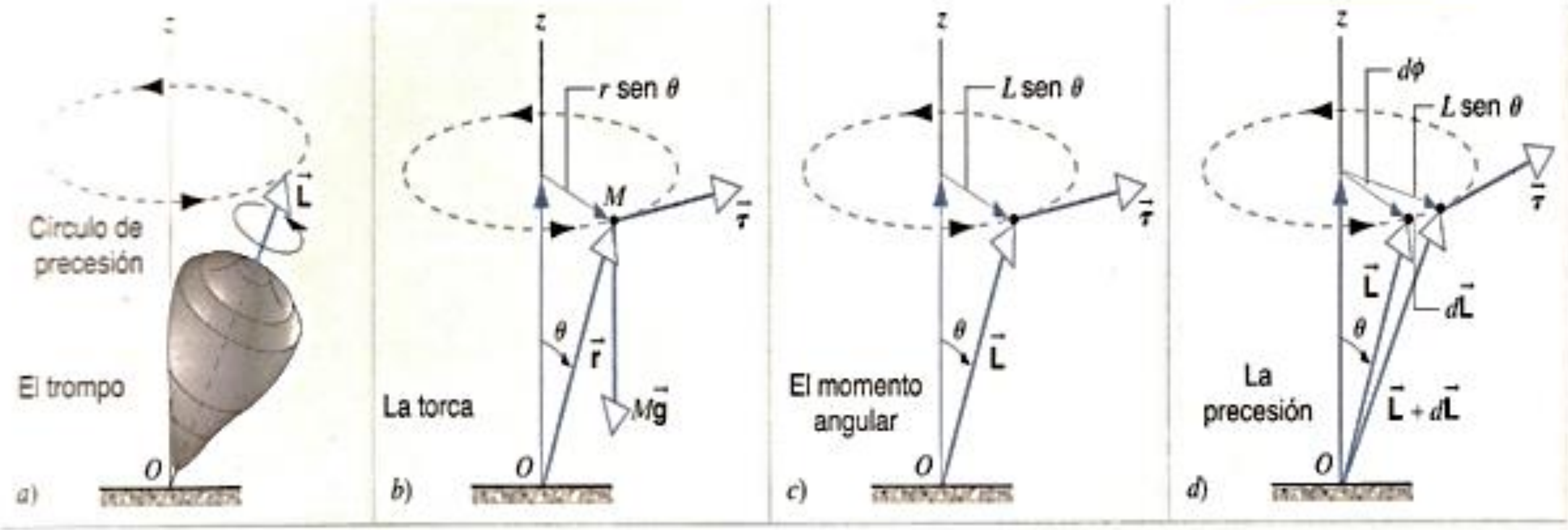
Una nave lleva un giróscopo. Normalmente no gira . Cuando se lo hace rotar, la nave gira en sentido contrario, para que el momento angular del sistema se conserve

TROMPOS



El trompo que gira

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



Nuevamente **L**≠ cte

Sin embargo L_z = cte

Videos demostrativos de la conservación de L

https://youtu.be/nXr0t1ynCcg

https://youtu.be/_8kEVzDiqHk

https://youtu.be/Dg8ogh7J6xc