MATEMÁTICA B – 1er PARCIAL (04-10-2014) – TEMA 1

1) Suponiendo que f y g son dos funciones continuas en el intervalo $[-1\,,2]$, que $\int_{-1}^{2} g(x)\,dx = 4$ y que $-3 \le f(x) \le 5$, para toda $x \in [-1\,,2]$,

   a) Determine cotas para la integral $\int_{-1}^{2}(f(x) + 3g(x))\,dx$

   b) Enuncie las propiedades de la integral definida que ha utilizado en el inciso anterior.

Rta

a) En primer lugar notemos que la integral $\int_{-1}^{2}(f(x) + 3g(x))\,dx$ existe puesto que el integrando $f(x) + 3g(x)$ es una función continua en el intervalo en cuestión, siendo suma de funciones continuas allí. En segundo lugar observemos que el valor de dicha integral no puede conocerse con los datos con que se cuenta (por ejemplo se desconoce cuál es la función f). Tiene sentido entonces que propongamos cotas para el valor desconocido de esta integral, es decir un par de números reales I y S tales que $I \le \int_{-1}^{2}(f(x) + 3g(x))\,dx \le S$ que nos delimiten al menos un intervalo donde se encuentre el valor de dicha integral. Para ello emplearemos la propiedad de acotamiento de la integral definida (aplicable dado que el integrando es continuo en el intervalo en cuestión, como ya justificamos antes):

$-3 \le f(x) \le 5$, para toda $x \in [-1\,,2]$, implica que

$-9 = (-3)\big(2-(-1)\big) \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \le 5\big(2-(-1)\big) = 15$. Luego -9 y 15 son cotas para $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

Pero aplicando la propiedad de linealidad de la integral definida se tiene:

$$\int_{-1}^{2}(f(x) + 3g(x))\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + 3\int_{-1}^{2} g(x)\,dx$$

Empleando el dato $\int_{-1}^{2} g(x)\,dx = 4$ se tiene además

$$\int_{-1}^{2}(f(x) + 3g(x))\,dx = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + (3 \times 4) = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + 12$$

Sumando 12 a ambos miembros de la desigualdad $-9 \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx \le 15$ se tiene finalmente

$3 = -9 + 12 \le \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + 12 \le 15 + 12 = 27$ de modo que las cotas propuestas son $I = 3$ y $S = 27$

b) Propiedad de linealidad de la integral definida: Si f y g son funciones continuas en el intervalo $[a\,,b]$ y si c es una constante real cualquiera entonces se verifican:

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedad de acotación de la integral definida: Si f es una función continua en el intervalo $[a\,,b]$ y si m y M son números reales tales que $m \le f(x) \le M$ para toda $x \in [a\,,b]$ entonces se cumple:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

2)

a) Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x) = e^{x^2}$ y $G(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$, ¿qué relación hay entre F y G? ¿Por qué?

b) Resuelva: (i) $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^4}dx$ (ii) $\int (tg^3 x + tg\, x)dx$

Rta

(a) Supongamos que $F(x)$ es una primitiva de $f(x) = e^{x^2}$ en un intervalo abierto I. Esto es: $F'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$. Por otra parte podemos aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo para deducir que $G'(x) = f(x)$ para toda $x \in I$, puesto que $f(x) = e^{x^2}$ es continua en I (y de hecho en toda la recta real) siendo composición de continuas allí (exponencial y cuadrática). Deducimos que como F y G tienen la misma derivada en I entonces por la linealidad de la derivada $F - G$ posee derivada nula en dicho intervalo. Pero esto significa necesariamente que esta diferencia es constante en I. Es decir: $F(x) - G(x) = C$ (cte.) para toda $x \in I$. Luego: $F(x) = C + G(x)$ para toda $x \in I$. Otra manera alternativa es la siguiente: como $f(x) = e^{x^2}$ es continua en I entonces por el TFCI y la Regla de Barrow (utilizando que F es una primitiva de f en I) podemos afirmar que $G(x) = \int_0^x f(t)dt = F(t)\Big|_0^x = F(x) - F(0)$ de modo que la diferencia entre F y G es la constante C=F(0).

(b) (i) Integrando por partes: $u = \ln x$; $du = x^{-1}dx$ $dv = x^{-4}dx$; $v = \frac{x^{-3}}{(-3)}$

$$\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x^4}dx \underbrace{=}_{u=\ln x\,;\,dv=x^{-4}dx} -\frac{1}{3}\frac{lnx}{x^3}\Big|_e^{e^2} + \frac{1}{3}\int_e^{e^2}\frac{1}{x^4}dx = -\frac{1}{3}\frac{lnx}{x^3}\Big|_e^{e^2} - \frac{1}{9}\frac{1}{x^3}\Big|_e^{e^2} = \left(-\frac{lnx}{3x^3} - \frac{1}{9x^3}\right)\Big|_e^{e^2} =$$
$$\left(-\frac{\ln(e^2)}{3(e^2)^3} - \frac{1}{9(e^2)^3}\right) - \left(-\frac{lne}{3e^3} - \frac{1}{9e^3}\right) = \left(-\frac{2}{3e^6} - \frac{1}{9e^6}\right) - \left(-\frac{1}{3e^3} - \frac{1}{9e^3}\right) = \frac{4e^{-3}}{9} - \frac{7e^{-6}}{9} = \frac{4e^3 - 7}{9e^6}$$

(ii) Identidad trigonométrica e integración por sustitución:

$$\int (tg^3 x + tg\,x)dx = \int tg\,x\,(tg^2 x + 1)dx = \int tg\,x\,sec^2 x\,dx \underbrace{=}_{t=tg\,x\,;\,dt=sec^2 x\,dx} \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}tg^2 x + C$$

3)

a) Calcule el área de la región del plano limitada por: $y = 3x^3$ e $y = x^3 + 2x$

b) Sea R la región del plano limitada por la mitad superior de la elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ y las rectas $y = 2$; $x = -3$; $x = 3$. Plantee las integrales que permiten calcular el volumen del sólido que genera R al rotar fico

(i) alrededor del eje x (ii) alrededor de la recta $y = 2$

Rta Ver figuras 1 y 2 del documento "Gráficos"

(a) Llamemos $f(x) = 3x^3$ y $g(x) = x^3 + 2x$. En primer lugar determinemos dónde se cortan las gráficas de ambas funciones. Para ello se resuelve: $3x^3 = x^3 + 2x$ sii $2x^3 - 2x = 0$ sii $x(x^2 - 1) = 0$ Soluciones $x = -1$; $x = 0$; $x = 1$ (son las abscisas de los puntos de intersección). La proyección de la región R sobre el eje x es entonces el intervalo $[-1\,,1]$ (pues debe ser de longitud finita).
En segundo lugar debemos determinar cuál es la función "techo" y cuál la función "piso". Dado que $f(x) - g(x)$ es continua en $[-1\,,1]$ (por ser diferencia de tales) y se anula sólo en los tres puntos antes hallados, entonces su signo permanece constante en c/u de los subintervalos $(-1\,,0)$ y $(0\,,1)$. Por ende para saber dicho signo basta con evaluar la diferencia en un punto de cada subintervalo. Por ejemplo:

$x = -\frac{1}{2} \in (-1\,,0)$ y $f\left(-\frac{1}{2}\right) - g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} > 0$ luego $f(x) > g(x)$ para toda $x \in (-1\,,0)$
$x = \frac{1}{2} \in (0\,,1)$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4} < 0$ luego $f(x) < g(x)$ para toda $x \in (0\,,1)$

Por lo tanto: $R = R_1 \cup R_2$ donde
$R_1 = \{(x,y);\ -1 \le x \le 0\ ,\ g(x) \le y \le f(x)\}$ y $R_2 = \{(x,y);\ 0 \le x \le 1\ ,\ f(x) \le y \le g(x)\}$

$$A(R_1) = \int_{-1}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = \int_{-1}^{0} (3x^3 - (x^3 + 2x))\,dx = \int_{-1}^{0} (2x^3 - 2x)\,dx = \left(\frac{1}{2}x^4 - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}$$
$$A(R_2) = \int_{0}^{1} \big(g(x) - f(x)\big)\,dx = \int_{0}^{1} \big((x^3 + 2x) - 3x^3\big)\,dx = \int_{0}^{1} (-2x^3 + 2x)\,dx = \left(-\frac{1}{2}x^4 + x^2\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{1}{2}$$

Finalmente: $A(R) = A(R_1) + A(R_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

(b) (i) $R(x) = 2\ ;\ r(x) = \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}$ Luego: $Vol = \pi \int_{-3}^{3} \left[2^2 - \left(\sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}\right)^2\right] dx$

(ii) $R(x) = 2 - \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}\ ;\ r(x) = 0$ Luego: $Vol = \pi \int_{-3}^{3} \left(2 - \sqrt{4 - \frac{4x^2}{9}}\right)^2 dx$

4)

a) ¿Qué significa que la ecuación diferencial $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ sea exacta? ¿Cómo se expresa la solución general en ese caso? ¿Cuál es una condición necesaria para que $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ sea una ecuación diferencial exacta?

b) Halle $y = \varphi(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1\,,2)$ y tiene, en cada punto $(x\,,y)$ con $x \neq 0$, pendiente igual a $x^4 + \frac{3y}{x}$

Rta

(a) Que dicha ED sea exacta en un abierto conexo D del plano significa que existe alguna función $f(x,y)$ con derivadas parciales de primer orden continuas en D tal que $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = df(x,y)$ en cada punto de D. Es decir que: $P(x,y) = f_x(x,y)$ y $Q(x,y) = f_y(x,y)$ en cada punto de D. La solución general es la familia de curvas de nivel de f contenidas en D de manera que se expresa como $f(x,y) = C$ siendo C una constante o parámetro general. Para que la ED anterior sea exacta es necesario que se verifique la condición $Q_x(x,y) = P_y(x,y)$ en todo punto de D. Esto es así porque si la ED es exacta se tiene en cada punto de D:

$$Q_x(x,y) = f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = P_y(x,y)$$

Porque las derivadas parciales de segundo orden de f son continuas en D (porque ellas son las derivadas parciales de primer orden de P y de Q las cuales se habían supuesto continuas en D) por lo cual las “cruzadas” son iguales.

(b) Se trata de un problema de valor inicial $\begin{cases} y' = x^4 + \frac{3y}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$ Para resolverlo comenzamos hallando la solución general de la ED: $y' = x^4 + \frac{3y}{x}$ que es lineal de primer orden $y' - \frac{3y}{x} = x^4$. Se propone solución general de la gorma: $y = u\,v$ donde u y v se determinan de la manera siguiente: $y' = u'v + u\,v'$. Reemplazando y e y' en la ED se tiene: $u'v + u\,v' - \frac{3}{x}\,u\,v = x^4$ es decir $u'v + u\left(v' - \frac{3}{x}\,v\right) = x^4$ (**)

La función v se toma como una solución particular no trivial de la ED $v' - \frac{3}{x}\,v = 0$

Una vez obtenida v se la reemplaza en la ecuación (**) obteniendo la ED : $u'v = x^4$. Se toma u como la solución general de esta ED.

$$v' - \frac{3}{x}\,v = 0 \quad \Leftrightarrow \quad v' = \frac{3}{x}\,v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{dx} = \frac{3}{x}\,v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dv}{v} = 3\,\frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|v| = 3\ln|x| + C_1 \quad \Leftrightarrow \quad e^{\ln|v|} = e^{3\ln|x| + C_1} \quad \Leftrightarrow \quad |v| = e^{C_1} e^{3\ln|x|} \quad \Leftrightarrow \quad |v| = e^{C_1}\left(e^{\ln|x|}\right)^3 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad |v| = C_2\,|x|^3 \quad \Leftrightarrow \quad |v| = C_2\,|x^3| \quad \Leftrightarrow \quad v = C_3\,x^3$$

Solución particular no trivial: por ejemplo tomando $C_3 = 1$ obtenemos $v = x^3$

Luego: $u'v = x^4 \quad \Leftrightarrow \quad u'x^3 = x^4 \quad \Leftrightarrow \quad u' = x \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2}\,x^2 + C$ siendo C constante general.

Entonces la solución general de la ED es: $y = \left(\frac{1}{2}\,x^2 + C\right)x^3$

Para hallar la solución particular que pasa por el punto $(1, 2)$ reemplazamos en la ecuación anterior $x = 1$ e $y = 2$ y obtenemos el valor particular de la constante: $2 = \left(\frac{1}{2}\,1^2 + C\right)1^3 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{3}{2}$

Luego la solución del PVI dado es: $y = \left(\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{3}{2}\right)x^3$

5)

a) Hallar el volumen del sólido limitado por $y = x^2$; $x + y = 2$; $z = 0$; $z = y$
b) Siendo V el sólido limitado por $x^2 + (y-1)^2 = 1$; $z = 0$; $z = y$, plantee el cálculo de $\iiint_V (x^2 + y^2)\,dV$ usando coordenadas cilíndricas

Rta Ver figuras 3 y 4 del documento "Gráficos"

(a) La región proyección del sólido V sobre el plano xy es $R = \{(x,y): -2 \le x \le 1 \; ; \; x^2 \le y \le 2 - x\}$

Las funciones “piso” y “techo” son: $z_P = 0$; $z_T = y$

Es decir: $V = \{(x,y,z) : -2 \le x \le 1 \,,\, x^2 \le y \le 2 - x \,,\, 0 \le z \le y\}$

Con integrales dobles se tiene:

$$Vol(V) = \int_{-2}^{1}\int_{x^2}^{2-x} y\,dy\,dx = \int_{-2}^{1} \frac{1}{2}\,y^2 \Big|_{x^2}^{2-x} dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \left((2-x)^2 - x^4\right)dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{1} (4 - 4x + x^2 - x^4)\,dx = \frac{1}{2}\left(4x - 2x^2 + \frac{1}{3}\,x^3 - \frac{1}{5}\,x^5\right)\Big|_{-2}^{1} = \frac{36}{5}$$

El planteo con integrales triples sería: $Vol(V) = \int_{-2}^{1} \int_{x^2}^{2-x} \int_0^{y} 1\, dz\ dy\ dx$ (cálculo similar)

(b) La región proyección del sólido V sobre el plano xy es el círculo $R = \{(x,y):\ x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

Las funciones "piso" y "techo" son: $z_P = 0$; $z_T = y$

Se tiene cambiando a coordenadas cilíndricas de eje z: $T: \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\ sen\ \theta \\ \quad z = z \end{cases}$ con jacobiano $J_T = r$

La variación de θ y de r se obtienen de R. Claramente: $0 \leq \theta \leq \pi$ en tanto que r varía desde 0 hasta tocar la circunferencia borde de R que es $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Para obtener el límite superior para r reescribimos esta ecuación en cilíndricas y despejamos:

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ sii $x^2 + y^2 = 2y$ sii $r^2 = 2r\ sen\ \theta$ sii $r = 2\ sen\ \theta$

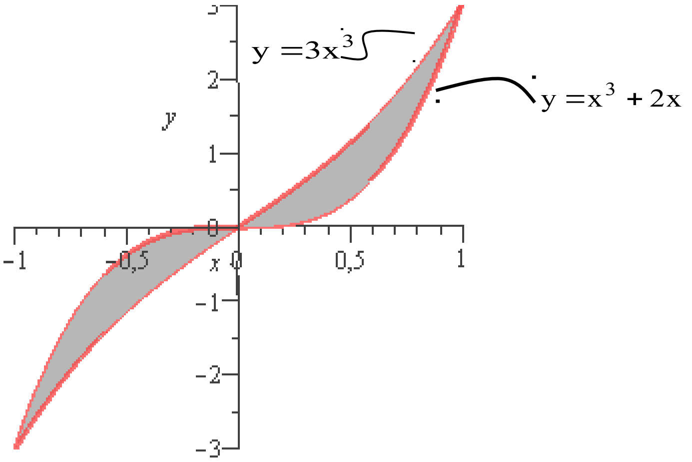
Luego el planteo queda:

$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2)\, dV = \int_0^{\pi} \int_0^{2sen\,\theta} \int_0^{r\ sen\,\theta} r^2\, r\, dz\, dr\, d\theta = \int_0^{\pi} \int_0^{2sen\,\theta} \int_0^{r\ sen\,\theta} r^3\ dz\ dr\, d\theta$$

Gráficos de los ejercicios del parcial

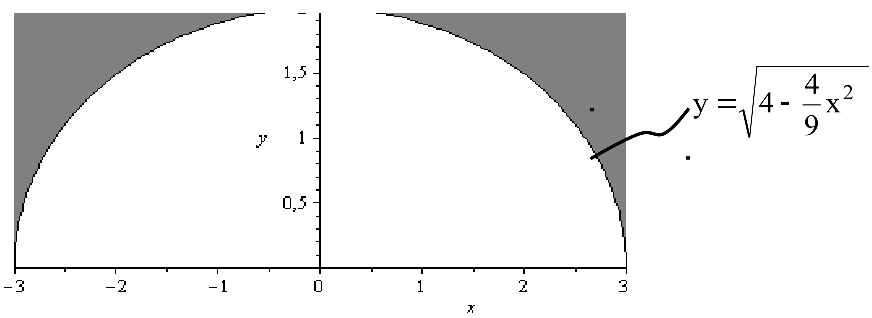
Ejercicio 3a) Figura 1

Región del plano limitada las curvas dadas.



Ejercicio 3b) Figura 2

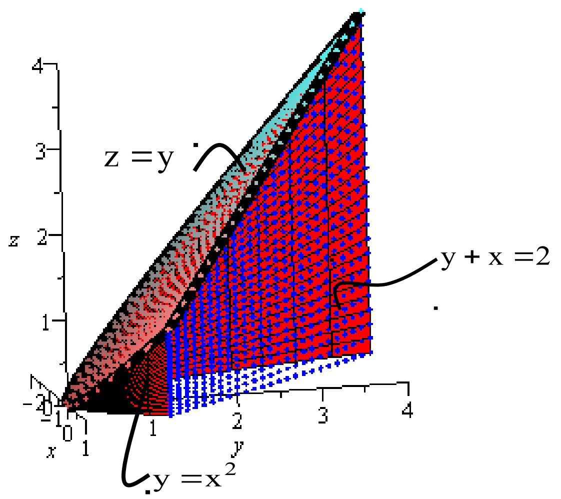
y



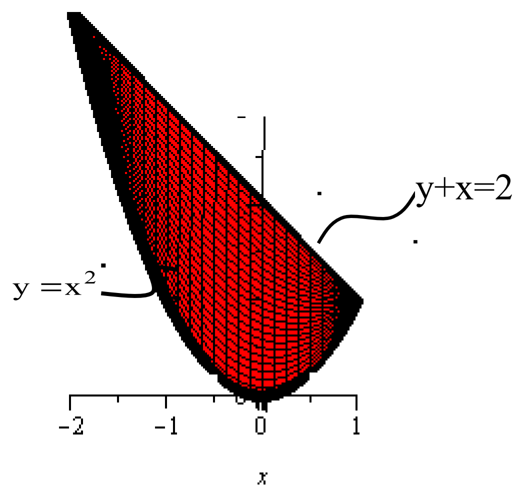
y

Ejercicio 5a) Figura 3

Gráfico del sólido.



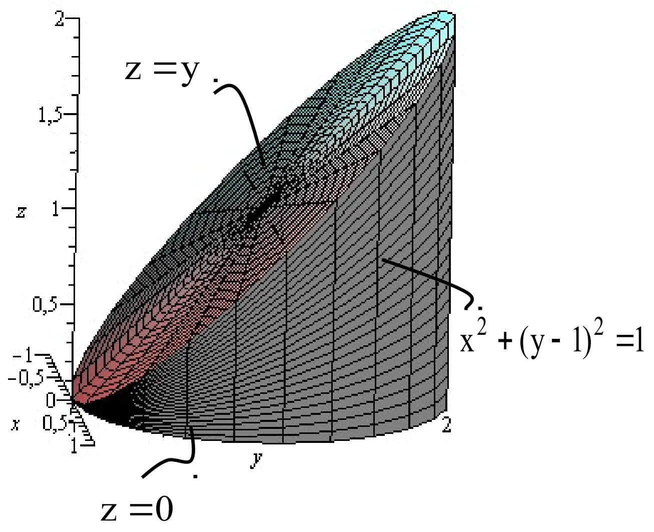
Proyección del sólido en el plano xy.



y

Ejercicio 5b) Figura 4

Gráfico del sólido V.



Proyección del sólido V en el plano xy.