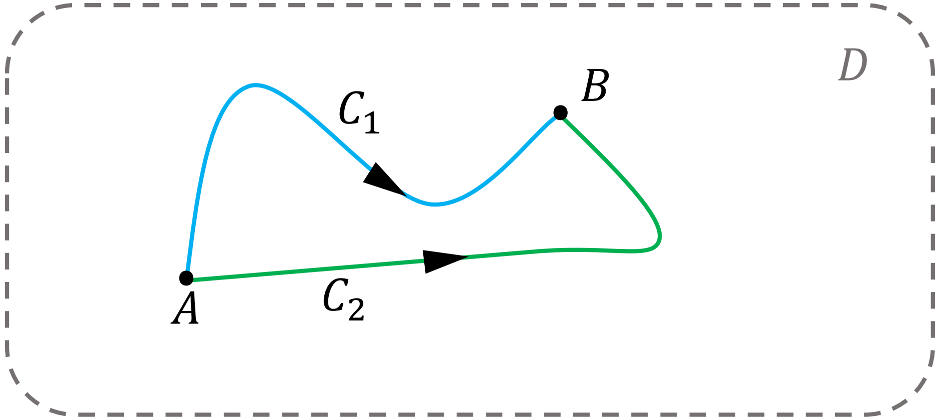
Independencia del Camino de una Integral de Línea

- Independencia del Camino de una Integral de Línea y su relación con los Campos Vectoriales Conservativos. Sección **6.10**

<u>Definición</u>:

La <u>integral de línea</u> de un campo vectorial, $\int_C F.T\,ds$, se dice **Independiente del camino en un conjunto D** si y sólo si su valor es el *mismo* independientemente de la curva donde se integra (considerando todas las curvas suaves a trozos que unen dos puntos <u>fijos</u> A y B, $\forall$ A y B $\in D$)

$$\int_{C_1} F.T\,ds = \int_{C_2} F.T\,ds \quad \begin{cases} \forall\ C_1 \text{ y } C_2 \text{ suaves a trozos y orientadas} \\ \text{desde } A \text{ hasta } B,\ C_1 \text{ y } C_2 \subset D, \\ \text{y } \forall \text{ par de puntos } A \text{ y } B \in D. \end{cases}$$



Dicho en forma equivalente:

La <u>integral de línea</u> de un campo vectorial se dice **Independiente del camino en un conjunto D** si y sólo si $\oint_C F.T\,ds = 0$ paras *todas* las curvas cerradas C, suaves a trozos, $C \subset D$).

¿Cómo demostramos que una integral de línea es independiente del camino?

Problema: Es imposible demostrar que una integral de línea es independiente del camino usando las definiciones de arriba porque deberíamos integrar sobre *todas* las curvas (infinitas!!), que unen dos puntos fijos A y B, para mostrar que la integral dá siempre el mismo resultado..

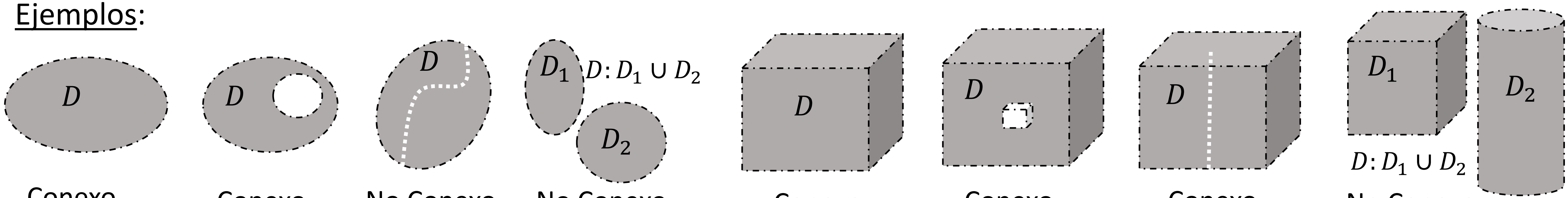
Solución: Recurriremos a algunos Teoremas..

..que, además de ayudarnos a demostrar si una integral de línea no depende del camino de integración, nos mostrarán qué relación hay entre la Independencia del Camino de una integral de línea y los Campos Vectoriales Conservativos..

Antes de enunciar los Teoremas que usaremos, necesitamos de dos definiciones:

Definición: Un conjunto D (del plano o del espacio) se dice CONEXO si *todo* par de puntos en D puede conectarse mediante alguna curva que esté contenida en D.

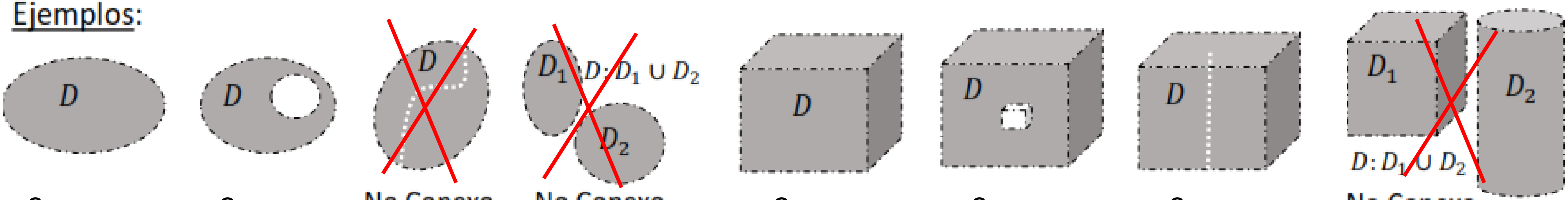
Ejemplos:



Conexo Conexo No Conexo No Conexo Conexo Conexo Conexo No Conexo

Definición: Un conjunto conexo D (del plano o del espacio) se dice SIMPLEMENTE CONEXO si *toda* curva cerrada C, contenida en D, es frontera de alguna superficie S que esté también contenida en D.

Ejemplos:



Conexo y S. Conexo | Conexo pero no S. Conexo | No Conexo | No Conexo | Conexo y S. Conexo | Conexo y S. Conexo | Conexo pero no S. Conexo | No Conexo

A continuación enunciaremos algunos teoremas que relacionan la Independencia del Camino de una Integral de Línea, $\int_C F.T\ ds$, con las características del campo vectorial F y de su dominio D:

Teorema 1

Sea F un campo vectorial definido en un conjunto D. Si se verifica que:

- F tiene componentes continuas en D.
- D es conexo.
- F es conservativo en D.

Entonces:

$\int_C F.T\ ds$ es Independiente del Camino en D, y se calcula como: $\int_C F.T\ ds = f(B) - f(A)$, donde f es una función potencial de F en D, A y B son los puntos inicial y final de C (C: curva suave a trozos contenida en D).

Si C es una curva cerrada y suave a trozos contenida en D, $\oint_C F.T\ ds = 0$.

Teorema 2

Sea F un campo vectorial definido en un conjunto D. Si se verifica que:

- F tiene componentes con derivadas parciales continuas en D.
- D es simplemente conexo.
- $rot(F) = \vec{0}$ en D.

Entonces:

$\int_C F.T\ ds$ es Independiente del Camino en D, y se calcula como: $\int_C F.T\ ds = f(B) - f(A)$, donde f es una función potencial de F en D, A y B son los puntos inicial y final de C (C: curva suave a trozos contenida en D).

Si C es una curva cerrada y suave a trozos contenida en D, $\oint_C F.T\ ds = 0$.

Los dos Teoremas enunciados arriba, junto con la Definición de Campo Vectorial Conservativo:

Definición: Un Campo Vectorial F es un **Campo Conservativo en D** ($D \subset \mathbb{R}^2$ o $D \subset \mathbb{R}^3$)

si, y sólo si, F es un *campo gradiente en D*, o sea si existe un campo escalar f tal que: $\nabla f(P) = F(P), \quad \forall\, P \in D.$

..serán las herramientas que usaremos para analizar la Independencia del Camino y estudiar sus aplicaciones.

Ejemplo 1: Dado el campo vectorial $F = F(x,y) = \langle e^y \cos(x)\,, e^y \operatorname{sen}(x) + 2\,y \rangle$. Su integral de línea, $\int_C F.T\, ds$, es independiente del camino de integración?. Dónde lo es?.

Aquí se nos pide analizar si una integral de línea es independiente del camino. Los teoremas que responden a eso son los teoremas 1 y 2… Cuál usamos??.

Dado que *aquí no se piden cálculos*, el Teorema más sencillo de aplicar será el Teorema 2: (podría ser el 1)

i) Enunciamos el Teorema a usar:

Sea F un campo vectorial definido en D tal que: F tiene componentes con derivadas parciales continuas en D, D es simplemente conexo, y $rot(F) = \vec{0}$ en D.

Entonces:

$\int_C F.T\, ds$ es Independiente del Camino en D, y se calcula como: $\int_C F.T\, ds = f(B) - f(A)$, donde f es una función potencial de F en D, A y B son los puntos inicial y final de C (C: curva suave a trozos contenida en D).

Si C es una curva cerrada y suave a trozos contenida en D, su circulación vale cero.

ii) Identificamos los elementos usados en el Teorema:

- $F(x,y) = \langle e^y \cos(x)\,, e^y \operatorname{sen}(x) + 2\,y \rangle$.
- Sea $D = \mathbb{R}^2$.

iii) Verificamos las hipótesis sobre los elementos de ii):

- F tiene componentes $M(x,y) = e^y \cos(x)\,,\;\; N(x,y) = e^y \operatorname{sen}(x) + 2\,y$. M y N tienen derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^2$ (porque son suma y producto de funciones trigonométrica, exponencial y polinómica).
- D es simplemente conexo (al ser $D = \mathbb{R}^2$ se verifica que toda curva cerrada C contenida en D es frontera de alguna superficie que esté también contenida en D).
- $rot(F) = \vec{0}$ en D?. Verifiquemos:

$$rot(F) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^y \cos(x) & e^y \operatorname{sen}(x) + 2y & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^y \operatorname{sen}(x) + 2y & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ e^y \cos(x) & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ e^y \cos(x) & e^y \operatorname{sen}(x) + 2y \end{vmatrix} =$$

$$= \langle\, 0, 0, 0 \,\rangle = \vec{0}.$$

$\therefore$ El Teorema es aplicable.

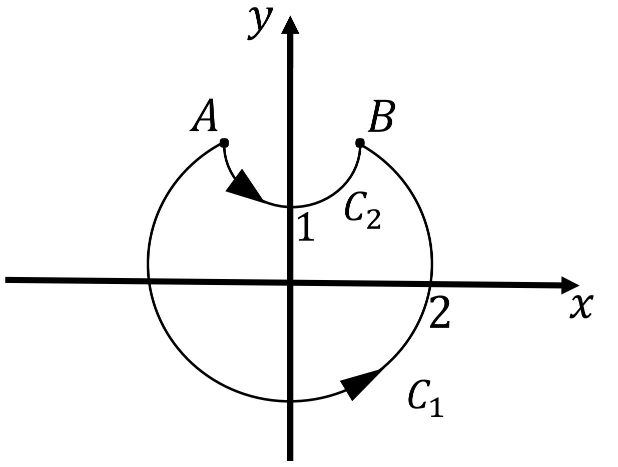
iv) Aplicamos la Tesis:

Por el Teorema que hemos enunciado, podemos afirmar que: $\boxed{\int_C F.T\,ds \text{ es Independiente del Camino en } D: \mathbb{R}^2}$

Ejemplo 2: Dado el campo vectorial $F = F(x, y) = \langle e^y \cos(x) \,, e^y \operatorname{sen}(x) + 2\, y \rangle$. Evaluar su integral de línea a lo largo de las curvas C_1 y C_2 , con las orientaciones indicadas en la figura.
Aplique, siempre que sea posible, algún resultado teórico.

C_1: $x^2 + y^2 = 4$, desde A: $\left(\frac{-\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4}\right)$ hasta B: $\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4}\right)$.

C_2: $x^2 + (y-2)^2 = 1$, desde A: $\left(\frac{-\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4}\right)$ hasta B: $\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4}\right)$.



Aquí se nos pide *evaluar la integral de línea*. Los teoremas que responden a eso son los teoremas 1 y 2. Cuál usamos?.
En éste caso será más práctico usar el Teorema 1: (podría ser el 2, pero necesitamos f..)

i) Enunciamos el Teorema a usar:

Sea F un campo vectorial definido en D tal que: F tiene componentes continuas en D, D es conexo, y F es conservativo en D.
Entonces:
$\int_C F.T\, ds$ es Independiente del Camino en D, y se calcula como: $\int_C F.T\, ds = f(B) - f(A)$, donde f es una función potencial de F en D, A y B son los puntos inicial y final de C (C: curva suave a trozos contenida en D).
Si C es una curva cerrada y suave a trozos contenida en D, su circulación vale cero.

ii) Identificamos los elementos usados en el Teorema:

- $F(x,y) = \langle e^y \cos(x)\,, e^y \operatorname{sen}(x) + 2\,y \rangle$.
- Sea $D = \mathbb{R}^2$.

iii) Verificamos las hipótesis sobre los elementos de ii):

- F tiene componentes $M(x,y) = e^y \cos(x)\,,\ \ N(x,y) = e^y \operatorname{sen}(x) + 2\,y$. M y N son continuas en $D = \mathbb{R}^2$ (porque son suma y producto de funciones trigonométrica, exponencial y polinómica).
- D es conexo (al ser $D = \mathbb{R}^2$ se verifica que todo par de puntos en D puede conectarse mediante alguna curva que esté contenida en D).
- F es conservativo en D?. Verifiquemos: (y, de paso, hallamos f para luego calcular..)

Si F es conservativo en $D = \mathbb{R}^2$, deberá existir $f(x,y)$ tal que $\nabla f(x,y) = F, \quad \forall\,(x,y) \in D$. ← Es el 2º ejemplo de la Clase 21.

Veamos:

$$\nabla f(x,y) = \langle f_x, f_y \rangle = \langle e^y \cos(x)\,, e^y \operatorname{sen}(x) + 2\,y \rangle \quad \therefore \quad \begin{cases} 1)\ f_x = e^y \cos(x) \\ 2)\ f_y = e^y \operatorname{sen}(x) + 2\,y \end{cases}$$

De *1)*:

$$f(x,y) = \int f_x\ dx = \int e^y \cos(x)\ \ dx = e^y\, sen(x) + g(y) \qquad \therefore \qquad f(x,y) = e^y\, sen(x) + g(y)$$

Usando *2)*:

$$f_y = e^y\, sen(x) + g'(y) = e^y\, sen(x) + 2\,y \qquad \therefore \qquad g'(y) = 2\,y \quad \rightarrow \quad g(y) = y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Luego: $\quad f(x,y) = e^y\, sen(x) + y^2 + k, \qquad k \in \mathbb{R}.$

Como existe f tal que $\nabla f(x,y) = F, \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2,$ concluímos que:

$F(x,y) = \langle e^y \cos(x)\,, e^y \operatorname{sen}(x) + 2\,y \rangle$ es un campo vectorial conservativo en $D = \mathbb{R}^2$.

∴ El Teorema es aplicable.

iv) Aplicamos la Tesis y calculamos:

Por el Teorema que hemos enunciado, podemos afirmar que:

$\int_C F.T\,ds$ es Independiente del Camino en D, y se calcula como: $\int_C F.T\,ds = f(B) - f(A),$ donde f es función potencial de F en D, A y B son los puntos inicial y final de C (C: curva suave a trozos contenida en D).

- Para C_1:

C_1 es suave porque es un arco de circunferencia. $C_1 \subset D = \mathbb{R}^2$. Entonces:

$$\int_{C_1} F.T\,ds = f(B) - f(A) = f\left(\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4}\right) - f\left(\frac{-\sqrt{15}}{4}, \frac{7}{4}\right) = \left(e^{\frac{7}{4}}\ sen\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right) + \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) - \left(e^{\frac{7}{4}}\ sen\left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right) + \left(\frac{7}{4}\right)^2\right) =$$

$$= 2\,e^{\frac{7}{4}}\ sen\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{\int_{C_1} F.T\,ds = 2\,e^{\frac{7}{4}}\ sen\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}$$

- Para C_2:

  C_2 es suave porque es un arco de circunferencia. $C_2 \subset D = \mathbb{R}^2$. C_2 une los mismos puntos que C_1.
  Como hemos mostrado que la integral de línea de F es independiente del camino de integración, podemos afirmar que:

$$\boxed{\int_{C_2} F.T\,ds = \int_{C_1} F.T\,ds = 2\,e^{\frac{7}{4}}\ sen\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)}$$

<u>Nota 1</u>: Es importante seguir los pasos i), ii), iii) y iv) en *cada ejercicio* para hacerlos de manera completa y ordenada.

<u>Nota 2</u>: No siempre tendremos la posibilidad de *elegir* entre los cuatro Teoremas. Por ejemplo, si el campo vectorial dado fuera: $F(x,y) = \left\langle \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\rangle$, donde $D: \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$,

$F(x,y,z) = \left\langle \frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{z}{x^2+y^2} \right\rangle$, donde $D: \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z)\,;\, z \in \mathbb{R}\}$,

como D (en ambos ejemplos) es conexo, pero *no simplemente conexo*, <u>no se pueden</u> utilizar los Teoremas 3 y 4 para mostrar Independencia del Camino ó calcular la Circulación.

En el módulo:

Para éste tema, Independencia del Camino de una Integral de Línea, **no seguiremos** la exposición dada en la sección **6.10** sinó que trabajaremos con lo expuesto en ésta clase.

La sección **6.10.1** es de Ejercicios. Tener en cuenta que:

a) Todos los ejercicios de ésa sección deben ser resueltos utilizando alguno de los Teoremas y/o la Definición de Campo Conservativo (o sea, sin resolver la Integral de Línea).

b) El Ejercicio 3 se resuelve *gráficamente*, analizando el signo de $F.T$ (recordar que T es el vector tangente a la curva C, luego el signo de $F.T$ dependerá del ángulo que se forme entre F y T).

c) En el ejercicio 5 usar la Definición de Campo Conservativo (o sea, resolver de la misma manera que los ejercicios de la sección 6.5.1).

Como material adicional, adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1a) y 4c) de la sección **6.10.1**.

Fin del capítulo 6.

→ Próxima Clase: sección **7.1**.