Teorema de Stokes

- Teorema de Stokes. Consecuencias y Aplicaciones. Sección **7.5**

Teorema de Stokes

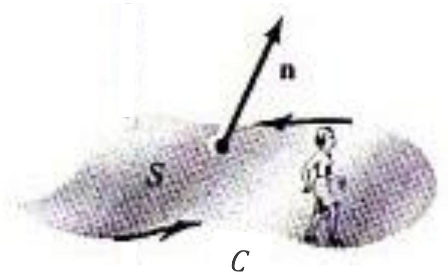
Sea S una superficie orientable, orientada eligiendo un vector normal n. Sea C su frontera, orientada con sentido *positivo**.

Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que $S \; y \; C \subset D$.

Entonces:

$$\oint_C F.T \; ds = \iint_S rotF.n \; dS$$

***** C está orientada con sentido *positivo* si C se orienta de acuerdo a *la orientación inducida por* n. Esto significa que al recorrer C (ubicándonos con el mismo sentido que n) la superficie S queda a nuestra izquierda. (*Cálculo Vectorial*. Marsden y Tromba, 3º edición, pág 505)

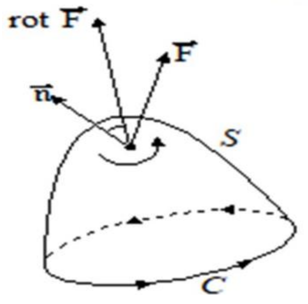


- Forma de la tesis del Teorema de Stokes cuando S es una superficie sin agujeros:

  Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\oint_C F.T \; ds = \iint_S rotF.n \; dS \; ,$$

Aquí C con sentido positivo significa que se verifica la *regla de la mano derecha* con el n elegido.

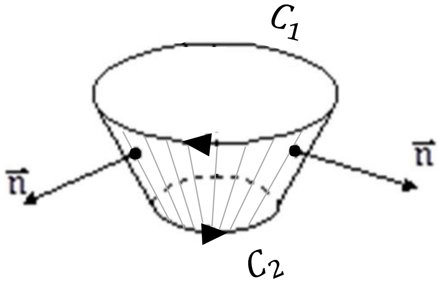


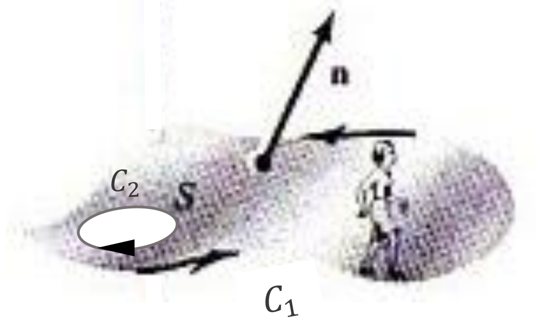
- <u>Forma de la tesis del Teorema de Stokes cuando S es una superficie con un agujero</u>:

Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\oint_C F.T\,ds = \iint_S rotF.n\ dS \quad ,$$

C: $C_1 \cup C_2$.
C_1 y C_2 con orientaciones opuestas para que C tenga sentido positivo.





Como C: $C_1 \cup C_2$:

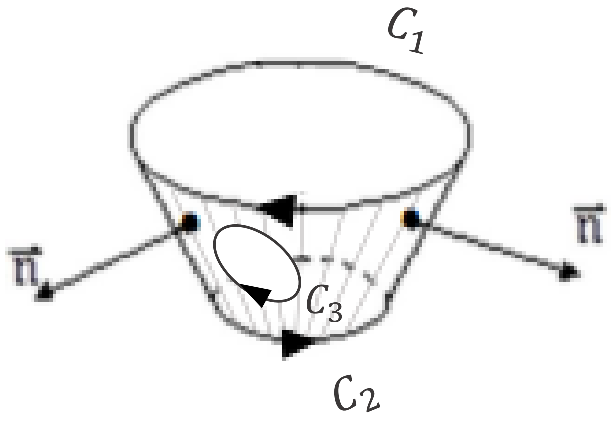
$$\oint_C F.T\,ds = \oint_{C_1} F.T\,ds + \oint_{C_2} F.T\,ds$$

- <u>Forma de la tesis del Teorema de Stokes cuando S es una superficie con dos agujeros</u>:

Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\oint_C F.T\,ds = \iint_S rotF.n\ dS \quad ,$$

C: $C_1 \cup C_2 \cup C_3$
C_1 , C_2 y C_3 orientadas de manera que C tenga sentido positivo.



Como C: $C_1 \cup C_2 \cup C_3$:

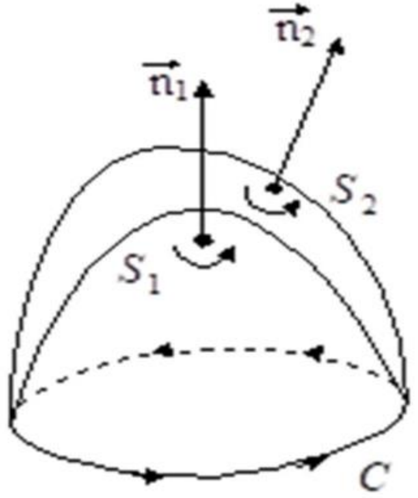
$$\oint_C F.T\,ds = \oint_{C_1} F.T\,ds + \oint_{C_2} F.T\,ds + \oint_{C_3} F.T\,ds$$

… se puede formular para superficies más generales..

Consecuencia del Teorema de Stokes:

El Flujo de un campo rotor no depende de la superficie que atraviesa sinó de su frontera.

…qué significa?. Veamos:



Supongamos dos superficies orientables, S_1 y S_2 , que tienen la misma frontera C.
Supongamos que S_1 y S_2 se orientan eligiendo n_1 y n_2 de manera *consistente* con la orientación de C (según el sentido positivo).
Supongamos algún campo vectorial F, tal que C, S_1, S_2 y F verifiquen las condiciones del Teorema de Stokes.

- Aplicando el Teorema a S_1, C y F : $\oint_C F.T\ ds = \iint_{S_1} rotF.n_1\ dS$
- Aplicando el Teorema a S_2, C y F : $\oint_C F.T\ ds = \iint_{S_2} rotF.n_2\ dS$

La Integral de Línea es la misma en las dos expresiones..

Entonces:

$$\boxed{\iint_{S_1} rotF.n_1\ dS = \iint_{S_2} rotF.n_2\ dS}$$

No importa cuál sea la superficie, la Integral de Flujo de $rotF$ (flujo del *campo rotor*) dará el mismo resultado.
(siempre que la frontera C sea la misma, y se verifique el T. de Stokes)

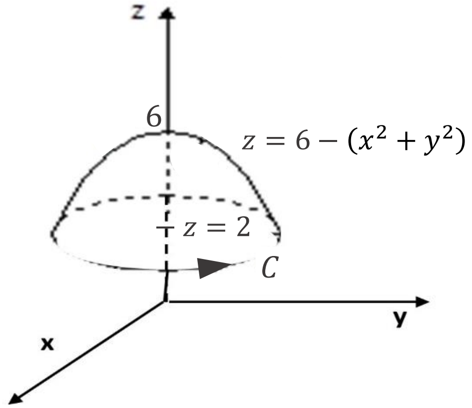
Esta consecuencia será muy útil en los cálculos porque nos permite *elegir* la superficie..

Aplicaciones del Teorema de Stokes:

1. Evaluación de la Circulación de un Campo mediante el cálculo de una Integral de Flujo.
2. Evaluación de una Integral de Flujo mediante el cálculo de la Circulación de un Campo.

1. Evaluación de la Circulación de un Campo mediante el cálculo de una Integral de Flujo:

Ejemplo: Evaluar la circulación de $F(x,y,z) = \left\langle\, x^3 + z^3 + y,\ e^{z^2+y^2} + 7x, \cos(xyz)\,\right\rangle$ a lo largo de la curva $C\colon \begin{cases} z = 6 - (x^2+y^2) \\ z = 2 \end{cases}$, orientada con sentido antihorario cuando se mira desde arriba ($z > 6$).



Daremos el valor de la circulación $\oint_C F.T\ ds$ haciendo uso del Teorema de Stokes.

i) Enunciamos el Teorema a usar:

Teorema de Stokes:
Sea S una superficie orientable, orientada eligiendo un vector normal n. Sea C su frontera, orientada con sentido positivo.
Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que $S\ y\ C \subset D$.
Hipótesis

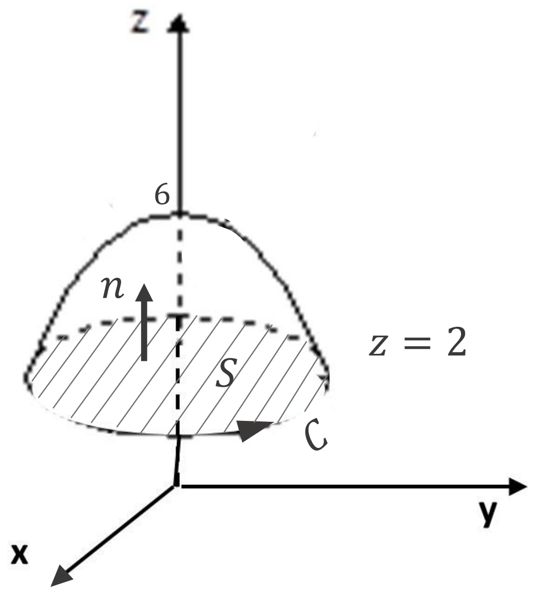
Entonces:

$$\oint_C F.T\ ds = \iint_S rotF.n\ dS$$

Tesis

ii) Identificamos los “elementos” usados en el Teorema:

(aquí usaremos la *libertad de elección de S* que ofrece la consecuencia del T. de Stokes)



- $C: \begin{cases} z = 6 - (x^2 + y^2) \\ z = 2 \end{cases}$, con orientación antihoraria cuando se mira desde arriba ($z > 6$).
- Sea S la porción de plano, de ecuación $z = 2$, encerrada por C.
  Sea S orientada con un vector normal, n, que apunta hacia arriba.
- $F(x, y, z) = \langle x^3 + z^3 + y,\ e^{z^2+y^2} + 7x, \cos(xyz) \rangle$.
- Sea $D = \mathbb{R}^3$.

iii) Verificamos las hipótesis sobre los elementos de ii):

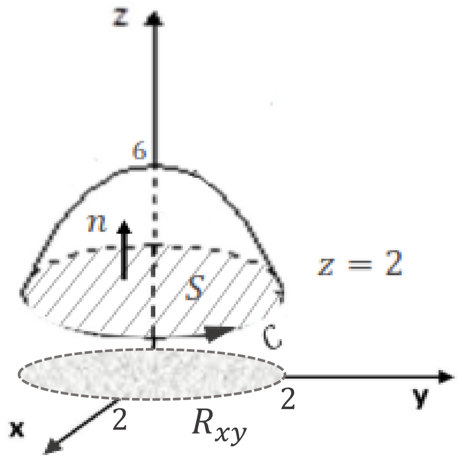
- S es orientable (porque es una porción de plano). S está orientada por un normal n que apunta hacia arriba.
- C es la frontera de S (por construcción de S). C está orientada con sentido positivo (porque tiene orientación antihoraria cuando se mira desde arriba: Luego, al recorrer C ubicándonos según n , S queda a la izquierda).
- F tiene componentes con derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^3$ (porque son funciones polinómicas y composición de polinomio con exponencial y con trigonométrica elemental).
- $S \; y \; C \subset D$ (porque $D = \mathbb{R}^3$).

$\therefore$ El Teorema de Stokes es aplicable.

iv) Aplicamos la Tesis y calculamos:

iv) Aplicamos la Tesis y calculamos:

Por el Teorema de Stokes: $\oint_C F.T\ ds = \iint_S rotF.n\ dS$ ⟵ Calculamos la Integral de Flujo.



Calcularemos: $\iint_S G.n\ dS = \iint_{R_{uv}} G\big(r(u,v)\big).N(u,v)\,dA$, donde aquí $\begin{cases} G = rotF \\ N \text{ apunta hacia arriba.} \end{cases}$

Aquí S: $z = 2$, $(x,y) \in R_{xy}$: $\{(x,y);\ 0 \le x^2 + y^2 \le 4\}$

Podemos usar la parametrización trivial: $\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 2 \end{cases}$, $(u,v) \in R_{uv}\ (= R_{xy})$

O sea:

S: $r(u,v) = \langle u, v, 2\rangle$, $(u,v) \in R_{uv}$: $\{(u,v);\ 0 \le u^2 + v^2 \le 4\}$

$$N(u,v) = r_u(u,v) \times r_v(u,v) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \boldsymbol{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0\,\boldsymbol{i} - 0\,\boldsymbol{j} + 1\,\boldsymbol{k} = \langle 0,0,1\rangle$$

$N(u,v) = \langle 0,0,1\rangle$ ⟵ Ok (apunta hacia arriba).

Para calcular $rotF(u,v).N(u,v)$, Como $N(u,v) = \langle 0,0,1\rangle$, sólo hará falta calcular la 3º componente de $rotF$:

$$rot(F) = \nabla \times F = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3 + z^3 + y & e^{z^2+y^2} + 7x & \cos(xyz) \end{vmatrix} = \boldsymbol{i}(\dots) - \boldsymbol{j}(\dots) + \boldsymbol{k}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ x^3 + z^3 + y & e^{z^2+y^2} + 7x \end{vmatrix} = \langle \dots, \dots, 6\rangle$$

$$rotF\big(r(u,v)\big)\,.\,N(u,v) = \langle \dots, \dots, 6\rangle \,.\, \langle 0,0,1\rangle = 6$$

Luego:

$$\oint_C F.T\ ds = \iint_S rotF.n\ dS = \iint_{R_{uv}} rotF\big(r(u,v)\big)\,.\,N(u,v)\ dA = \iint_{R_{uv}} 6\ dA = 6\iint_{R_{uv}} 1\ dA = 6\,A_{R_{uv}} = 6\,\pi\,2^2 = 24\,\pi$$

$$\therefore \qquad \boxed{\oint_C F.T\ ds = 24\,\pi}$$

<u>Nota 1</u>: Es importante seguir los pasos i), ii), iii) y iv) en *cada ejercicio* para hacerlos de manera completa y ordenada.

<u>Nota 2</u>: Los "elementos" que no estén dados en el ejercicio *deben ser definidos*, para luego verificar las hipótesis.

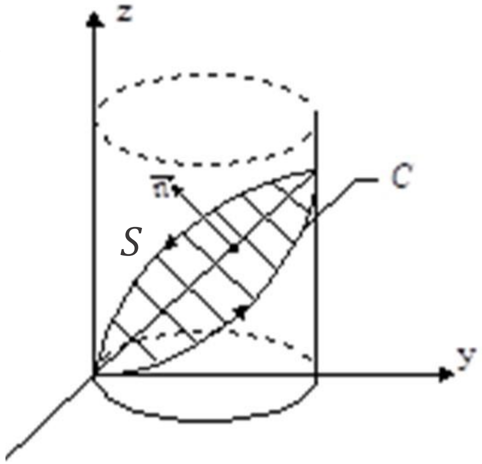
<u>Nota 3</u>: Podríamos haber elegido *cualquier otra superficie* S (que tenga a C como frontera), llegando al <u>mismo</u> resultado. Sin embargo, la elección de la porción de *plano* lleva a las cuentas más simples.

<u>Nota 3</u>: Si alguna hipótesis no se verifica, el Teorema no será aplicable (deberemos calcular la Integral de Línea).

2. Evaluación de una Integral de Flujo mediante el cálculo de la Circulación de un Campo:

Ejemplo: Sean el campo $F(x,y,z) = \left\langle \frac{x}{y+2}, \frac{z-1}{y+2}, x \right\rangle$ y la superficie $S: z = y$, interior a $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientada por n con 3º componente positiva.

Calcule $\iint_S rotF.n\, dS$ aplicando, siempre que sea posible, el teorema de Stokes



Daremos el valor de $\iint_S rotF.n\, dS$ haciendo uso del Teorema de Stokes.

i) Enunciamos el Teorema a usar:

Teorema de Stokes:

Sea S una superficie orientable, orientada eligiendo un vector normal n. Sea C su frontera, orientada con sentido positivo.

Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que $S\ y\ C \subset D$.

Entonces:

$$\oint_C F.T\, ds = \iint_S rotF.n\ dS$$

ii) Identificamos los elementos usados en el Teorema:

- S: $z = y$, interior a $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientada por n con 3º componente positiva.
- Sea C curva frontera de S, orientada con sentido antihorario cuando se mira desde arriba.
- $F(x,y,z) = \left\langle \frac{x}{y+2}, \frac{z-1}{y+2}, x \right\rangle$.
- Sea $D = \mathbb{R}^3 - \{(x,y,z);\ \ y = -2\}$.

iii) Verificamos las hipótesis sobre los elementos de ii):

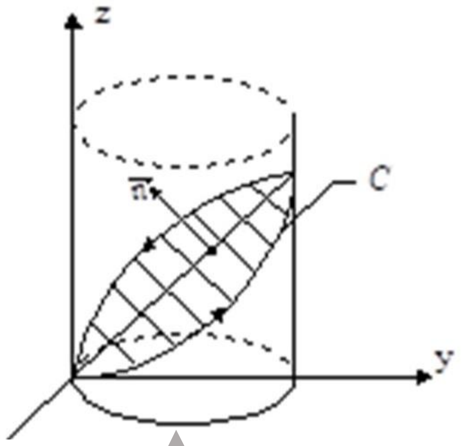
- S es orientable (porque es una porción de plano). S está orientada por n con 3º componente positiva.
- C es la frontera de S (por construcción). C está orientada con sentido positivo (porque tiene orientación antihoraria cuando se mira desde arriba: Luego, al recorrer C ubicándonos según n , S queda a la izquierda).
- F tiene componentes con derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^3 - \{(x, y, z);\ \ y = -2\}$ (porque son cocientes de polinomios, con denominador no nulo en D).
- $S\ y\ C \subset D$ (porque ningún punto de S o de C tiene coordenada $y = -2$. Ver gráfico).

$\therefore$ El Teorema de Stokes es aplicable.

iv) Aplicamos la Tesis y calculamos:

Por el Teorema de Stokes: $$\oint_C F.T\ ds = \iint_S rotF.n\ dS$$

Calculamos la Integral de Línea.



Proyección de C en el plano xy.

Calcularemos: $\oint_C F.T\ ds = \int_a^b F\big(r(t)\big)\,.r'(t)dt$.

Como $S\!: z = y$, interior a $x^2 + (y-1)^2 = 1$, entonces $C\!: \begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ z = y \end{cases}$

Podemos proponer: $\begin{cases} x = \cos(t) \\ (y-1) = sen(t) \\ z = 1 + sen(t) \end{cases} \quad \therefore\ y = 1 + sen(t)$

O sea:

$C\!:\ r(t) = \langle \cos(t)\,, 1 + \ sen(t), 1 + \ sen(t) \rangle\ ,\ \ t \in [0, 2\pi].$

$$r'(t) = \langle -\,sen(t), \cos(t), \cos(t)\rangle$$

$$F\big(r(t)\big) = \left\langle \frac{\cos(t)}{(1+\ sen(t))+2}, \frac{(1+\ sen(t))-1}{(1+\ sen(t))+2}, \cos(t) \right\rangle = \left\langle \frac{\cos(t)}{sen(t)+3}, \frac{sen(t)}{sen(t)+3}, \cos(t) \right\rangle$$

$$F\big(r(t)\big)\,.\,r'(t) = \left\langle \frac{\cos(t)}{sen(t)+3}, \frac{sen(t)}{sen(t)+3}, \cos(t) \right\rangle .\langle -\,sen(t), \cos(t), \cos(t)\rangle = cos^2(t)$$

Luego:

$$\iint_S rotF.n\ dS = \oint_C F.T\ ds = \int_a^b F\big(r(t)\big).r'(t)dt = \int_0^{2\pi} cos^2(t)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos(2t)}{2}dt = \left(\frac{t}{2}+\frac{sen(2t)}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi$$

$$\therefore \qquad \boxed{\iint_S rotF.n\ dS = \pi}$$

Nota 1: Es importante seguir los pasos i), ii), iii) y iv) en *cada ejercicio* para hacerlos de manera completa y ordenada.

Nota 2: Los “elementos” que no estén dados en el ejercicio *deben ser definidos*, para luego verificar las hipótesis.

Nota 3: Si alguna hipótesis no se verifica, el Teorema no será aplicable (deberemos calcular la Integral de Flujo).

En el Módulo:

El Teorema de Stokes está desarrollado en la sección **7.5**, pág 261.

Observación: El enunciado del Teorema que se muestra en la sección **7.5** (pág 261) corresponde al caso en que la superficie S *no tiene agujeros*. Es por eso que se define la orientación de C según la *regla de la mano derecha* (ésta regla está explicada en una publicación subida la clase pasada, clase 28).

La consecuencia del Teorema de Stokes se comenta debajo del enunciado del Teorema.

Las Aplicaciones del Teorema de Stokes (aplicaciones **1)** y **2)** de arriba) se desarrollan en la sección **7.5.1**.

La "*Aplicación del Teorema de Stokes al caso de superficies con dos curvas frontera*" (págs 265 y 266) no será considerada (pues nosotros ya hemos enunciado el Teorema en su forma general).

En las págs 266 y 267 se discute un ejemplo especial: El caso en que la superficie S es *cerrada*.

La "*Interpretación del rotor*", págs 267 y 268, no será considerada.

La sección **7.5.2** es de Ejercicios:

·) El ejercicio 1 corresponde a la aplicación **1)**.

·) El ejercicio 2 corresponde a la aplicación **2)**.

·) Los ejercicios 3 y 4 son de índole teórica.

·) En el ejercicio 5, el Teorema de Stokes no es aplicable:

a) La tarea es explicar correctamente cuál de las hipótesis no se verifica y el motivo.

b) En la parte que se pide hallar el valor de la circulación, se debe resolver la integral de línea (porque el Teorema no es aplicable para la curva dada).

c) En la parte que se pregunta si el Campo es conservativo en el D dado, se debe responder usando la Definición de Campos Conservativos (o sea, buscando la función potencial).

Adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1a) y 2a) de la sección **7.5.2**.

→ Próxima Clase: sección **7.6**.