Ejercicio Series (1)

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n.2^n}{3^{n-2}}$$

Resolución

Dada la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n.2^n}{3^{n-2}}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n = (-1)^{n+1}.\frac{n.2^n}{3^{n-2}}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n.2^n}{3^n.3^{-2}} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.9.\frac{n}{(\frac{3}{2})^n} = 0$$

porque $(-1)^{n+1}$ oscila entre ± 1 , y $\frac{n}{(\frac{3}{2})^n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito por orden de magnitud.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque a_n toma alternativamente valores positivos y negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} b_n$:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}.\frac{n.2^n}{3^{n-2}}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n.2^n}{3^{n-2}} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{3^{-2}}.\left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} 9.n.\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Esta nueva serie es de términos positivos porque $b_n \geq 0, \forall n \geq 2$, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el CRITERIO DEL COCIENTE.

Calculo el límite:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{9.(n+1).\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{9.n.\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{9.n(1+\frac{1}{n}).\left(\frac{2}{3}\right)^n.\frac{2}{3}}{9.n.\left(\frac{2}{3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{9}.\cancel{n}(1+\frac{1}{n}).\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}.\frac{2}{3}}{\cancel{9}.\cancel{n}.\cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right).\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

Como $L = \frac{2}{3} \leq 1$, entonces la serie $\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=4}^{\infty}(-1)^n.\frac{5^{n+1}}{7^n.(n-1)}$$

Resolución

Dada la serie $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^n.\frac{5^{n+1}}{7^n.(n-1)}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n=(-1)^n.\frac{5^{n+1}}{7^n.(n-1)}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{5^{n+1}}{7^n.(n-1)}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{5^n.5}{7^n.n.(1-\frac{1}{n})}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{5}{(1-\frac{1}{n})}.\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n}{n}=0$$

porque $(-1)^{n+1}$ oscila entre ± 1 , $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ tiende a 1, y $\left(\frac{5}{7}\right)^n$ tiende a cero cuando n tiende a infinito. Por lo que $\frac{\left(\frac{5}{7}\right)^n}{n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque a_n toma alternativamente valores positivos y negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie $\sum\limits_{n=4}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=4}^{\infty}b_n$:

$$\sum_{n=4}^{\infty}\left|(-1)^n.\frac{5^{n+1}}{7^n.(n-1)}\right|=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{7^n.(n-1)}=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{5.5^n}{7^n.(n-1)}=\sum_{n=4}^{\infty}\frac{5}{n-1}.\left(\frac{5}{7}\right)^n$$

Esta nueva serie es de términos positivos porque $b_n\geq 0,\forall n\geq 4$, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el CRITERIO DEL COCIENTE.

Calculo el límite:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n+1-1}.\left(\frac{5}{7}\right)^{n+1}}{\frac{5}{n-1}.\left(\frac{5}{7}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5}{n}.\left(\frac{5}{7}\right)^n.\left(\frac{5}{7}\right)}{\frac{5}{n-1}.\left(\frac{5}{7}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\cancel{5}}{n}.\cancel{\left(\frac{5}{7}\right)^n}.\left(\frac{5}{7}\right)}{\frac{\cancel{5}}{n-1}.\cancel{\left(\frac{5}{7}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}.\left(\frac{5}{7}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n.(1-\frac{1}{n})}{n}.\left(\frac{5}{7}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}.(1-\frac{1}{n})}{\cancel{n}}.\left(\frac{5}{7}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right).\left(\frac{5}{7}\right)=\frac{5}{7}$$

Como $L=\frac{5}{7}\leq 1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=4}^{\infty}|a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=4}^{\infty}a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Ejercicio Series (3)

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{(n+2).4^n}{9^{n+1}}$$

Resolución

Dada la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{(n+2).4^n}{9^{n+1}}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n=(-1)^{n+1}.\frac{(n+2).4^n}{9^{n+1}}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.\frac{(n+2).4^n}{9^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n.(1+\frac{2}{n}).4^n}{9^n.9}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.\frac{(1+\frac{2}{n})}{9}.\frac{n}{\left(\frac{9}{4}\right)^n}=0$$

porque $(-1)^{n+1}$ oscila entre ±1 , $\left(1-\frac{2}{n}\right)$ tiende a 1 cuando n tiende a infinito y $\frac{n}{(\frac{9}{4})^n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito por orden de magnitud.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque a_n toma alternativamente valores positivos y negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=3}^{\infty}b_n$:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}.\frac{(n+2).4^n}{9^{n+1}}\right|=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n+2).4^n}{9^{n+1}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(n+2).4^n}{9^n.9}=\sum_{n=3}^{\infty}(n+2).\frac{1}{9}.\left(\frac{4}{9}\right)^n$$

Esta nueva serie es de términos positivos porque $b_n\geq0,\forall n\geq3$, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el CRITERIO DEL COCIENTE.

Calculo el límite:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1+2).\frac{1}{9}.\left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{(n+2).\frac{1}{9}.\left(\frac{4}{9}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+3).\cancel{\frac{1}{9}}.\cancel{\left(\frac{4}{9}\right)^n}.\left(\frac{4}{9}\right)}{(n+2).\cancel{\frac{1}{9}}.\cancel{\left(\frac{4}{9}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}.\left(1+\frac{3}{n}\right).\left(\frac{4}{9}\right)}{\cancel{n}.\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{n}\right).\left(\frac{4}{9}\right)}{\left(1+\frac{2}{n}\right)}=\frac{4}{9}$$

Como $L=\frac{4}{9}\leq1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty}|a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n.\frac{3^{n-1}}{8^n.(n+5)}$$

Resolución

Dada la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n.\frac{3^{n-1}}{8^n.(n+5)}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n=(-1)^n.\frac{3^{n-1}}{8^n.(n+5)}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{3^{n-1}}{8^n.(n+5)}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{3^n.3^{-1}}{8^n.(n+5)}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{1}{3}.\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^n}{n+5}=0$$

porque $(-1)^n$ oscila entre ±1, $\left(\frac{3}{8}\right)^n$ tiende a cero y (n+5) tiende a infinito, cuando n tiende a infinito. Por lo que $\frac{\left(\frac{3}{8}\right)^n}{n+5}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque a_n toma alternativamente valores positivos y negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=2}^{\infty}b_n$:

$$\sum_{n=3}^{\infty}\left|(-1)^n.\frac{3^{n-1}}{8^n.(n+5)}\right|=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{8^n.(n+5)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{3^n.3^{-1}}{8^n.(n+5)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{3}.\frac{1}{n+5}.\left(\frac{3}{8}\right)^n$$

Esta nueva serie es de términos positivos porque $b_n\geq 0,\forall n\geq 2$, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el CRITERIO DEL COCIENTE.

Calculo el límite:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{n+1+5}.\left(\frac{3}{8}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}.\frac{1}{n+5}.\left(\frac{3}{8}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{3}}.\frac{1}{n+6}.\left(\frac{3}{8}\right)^n.\left(\frac{3}{8}\right)}{\cancel{\frac{1}{3}}.\frac{1}{n+5}.\left(\frac{3}{8}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+5).\cancel{\left(\frac{3}{8}\right)^n}.\left(\frac{3}{8}\right)}{(n+6).\cancel{\left(\frac{3}{8}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n.(1+\frac{5}{n}).\left(\frac{3}{8}\right)}{n.(1+\frac{6}{n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}.(1+\frac{5}{n}).\left(\frac{3}{8}\right)}{\cancel{n}.(1+\frac{6}{n})}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{5}{n})}{(1+\frac{6}{n})}.\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{8}$$

Como $L=\frac{3}{8}\leq 1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=2}^{\infty}|a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=3}^{\infty}a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Ejercicio Series (5)

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n^2.3^n}{4^{n+1}}$$

Resolución

Dada la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n^2.3^n}{4^{n+1}}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n = (-1)^{n+1}.\frac{n^2.3^n}{4^{n+1}}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.\frac{n^2.3^n}{4^n.4} = \lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.\frac{1}{4}.\frac{n^2}{(\frac{4}{3})^n} = 0$$

porque $(-1)^{n+1}$ oscila entre ± 1 , y $\frac{n^2}{(\frac{4}{3})^n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito por orden de magnitud.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque a_n toma alternativamente valores positivos y negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}.\frac{n^2.3^n}{4^{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2.3^n}{4^{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Esta nueva serie es de términos positivos porque $b_n \geq 0, \forall n \geq 1$, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el CRITERIO DEL COCIENTE.

Calculo el límite:

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{\frac{n^2}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{\cancel{4}}.\left(\frac{3}{4}\right)^n.\left(\frac{3}{4}\right)}{\frac{n^2}{\cancel{4}}.\left(\frac{3}{4}\right)^n} == \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right).\frac{n^2.[1+(\frac{1}{n})^2].\cancel{(\frac{3}{4})^n}}{n^2.\cancel{(\frac{3}{4})^n}} == \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right).\frac{\cancel{n^2}.[1+(\frac{1}{n})^2]}{\cancel{n^2}}$$

$$L = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right).\left[1+\left(\frac{1}{n}\right)^2\right] = \frac{3}{4}$$

Como $L = \frac{3}{4} \leq 1$, entonces la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.

Enunciado

Analice si la siguiente serie es divergente o si converge absoluta o condicionalmente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{(n+1)^2.2^{n-1}}{7^n}$$

Resolución

Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.\frac{(n+1)^2.2^{n-1}}{7^n}$, llamo a_n a su término general.

$$a_n=(-1)^n.\frac{(n+1)^2.2^{n-1}}{7^n}$$

(1) Verifico si la Condición necesaria para la convergencia se satisface. Tomo el límite del término general de la serie cuando n tiende a infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{(n+1)^2.2^{n-1}}{7^n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^n.\frac{(n+1)^2.2^n.2^{-1}}{7^n}=\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}.\frac{1}{2}.\frac{(n+1)^2}{(\frac{7}{2})^n}=0$$

porque $(-1)^n$ oscila entre ±1 , y $\frac{(n+1)^2}{(\frac{7}{2})^n}$ tiende a cero cuando n tiende a infinito por orden de magnitud.

Como se satisface la condición necesaria para la convergencia, no puedo afirmar nada sobre la convergencia de la serie.

(2) La serie que estoy estudiando no es de términos positivos, porque a_n toma alternativamente valores positivos y negativos.

Entonces estudio su convergecia absoluta, analizando a la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}b_n$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}.\frac{1}{2}.\frac{(n+1)^2}{(\frac{7}{2})^n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}.\frac{(n+1)^2}{(\frac{7}{2})^n}$$

Esta nueva serie es de términos positivos porque $b_n\geq 0, \forall n\geq 1$, lo que me permite estudiar su convergencia mediante el CRITERIO DEL COCIENTE.

Calculo el límite:

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}.\frac{(n+1+1)^2}{(\frac{7}{2})^{n+1}}}{\frac{1}{2}.\frac{(n+1)^2}{(\frac{7}{2})^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}.\frac{(n+2)^2}{(\frac{7}{2})^n.(\frac{7}{2})}}{\cancel{\frac{1}{2}}.\frac{(n+1)^2}{(\frac{7}{2})^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2.(\frac{7}{2})^n}{(n+1)^2.(\frac{7}{2})^n.(\frac{7}{2})}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2.\left(1+\frac{2}{n}\right)^2.\cancel{(\frac{7}{2})^n}}{n^2.\left(1+\frac{1}{n}\right)^2.\cancel{(\frac{7}{2})^n}.(\frac{7}{2})}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{7}.\frac{\cancel{n^2}.\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{\cancel{n^2}.\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{7}.\frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=\frac{2}{7}$$

Como $L=\frac{2}{7}\leq 1$, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ converge.

Por lo tanto la serie $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ CONVERGE ABSOLUTAMENTE.