Ecuaciones Diferenciales

- Definiciones generales (sección 3.1)
- Ecuaciones de Variables Separables (sección 3.2)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^5 = y\, t^2 \,, \qquad y'\, y - x\cos(x) = 0 \,, \qquad e^{y\, y'''} + tg(xy) = 0$$

Definición: Una Ecuación Diferencial es una ecuación en donde la incógnita es una función, que aparece en la ecuación junto con sus derivadas.

$\longrightarrow$ Aparecen en todas las ramas de la Ciencia al estudiar el comportamiento de cualquier sistema.

En nuestra 1º Clase: " hallar el desplazamiento de un móvil entre $t = 0$ y $t = 4$ si $\mathrm{v(t)} = t^2$ "

$v(t) = x'(t)$, $x(t)$: función desplazamiento del móvil $\therefore$ $x'(t) = t^2$ $\longleftarrow$ es una ecuación diferencial!!.

Clasificación:
- Tipo $\rightarrow$ Ordinaria / Parcial
- Orden
- Grado

- Una <u>Ecuación Diferencial **Ordinaria**</u> es una ecuación que vincula a una función desconocida de la variable x, con sus derivadas respecto de x, y con la variable independiente x.

<u>Ejemplo</u>: $y' + 3\,y\,(y')^3 = sen(x)$, $e^{y\,y'''} + tg(xy) = 0$ ⟵ La función desconocida es $y = y(x)$.

- Una <u>Ecuación Diferencial **Parcial**</u> es una ecuación que vincula a una función desconocida de varias variables, con sus derivadas parciales y con la variables independientes.

<u>Ejemplo</u>: $\dfrac{\partial^2 y}{\partial\, x^2} + \left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^5 = y\,t^2$ ⟵ La función desconocida es $y = y(x,t)$.

- El **<u>Orden</u>** de una Ecuación Diferencial es el mayor de los órdenes de las derivadas involucradas .

- El **<u>Grado</u>** de una Ecuación Diferencial es el mayor exponente al que aparece elevada la derivada de mayor orden .

<u>Nosotros</u>: <u>Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) de Orden 1 y Grado 1</u>

Se pueden expresar de distintas formas

- $F(x,y,y') = 0$: forma implícita — Ej: $y'\,y - x\cos(x) = 0$
- $y' = f(x,y)$: forma explícita — Ej: $y' = \dfrac{x\cos(x)}{y}$; $si\ y \neq 0$
- $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$: forma diferencial — Ej: $\underbrace{\mathrm{d}y - \dfrac{x\cos(x)}{y}\,dx}\, = 0$, $y' = \dfrac{dy}{dx}$

$$P(x,y) = -\frac{x\cos(x)}{y}\ , \quad Q(x,y) = 1$$

Nuestro objetivo será:

<u>resolver las EDO</u> ⟵ Significa hallar la **solución** de la Ecuación Diferencial.

Dada una EDO, **una solución** en un intervalo (a, b) es una función y = $y(x)$ derivable en (a, b) tal que, al reemplazar en la ecuación "y" por "$y(x)$" e "y´" por "$y´(x)$", la igualdad se verifica.

- Ejemplo: La función $y(x) = x^2$ es una solución de la EDO $y´ - 2x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Verifiquemos: $y´(x) = 2x$, reemplazamos en la EDO: $(2x) - 2x = 0$. $\therefore$ $y(x) = x^2$ es una solución de $y´ - 2x = 0$ en $\mathbb{R}$.

- Ejemplo: La función $y(x) = x^2 + 15$ es *otra* solución de la EDO $y´ - 2x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Verifiquemos: $y´(x) = 2x$, reemplazamos en la EDO: $(2x) - 2x = 0$. $\therefore$ $y(x) = x^2 + 15$ es otra solución de $y´ - 2x = 0$ en $\mathbb{R}$.

…entonces $y(x) = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$, es la familia de soluciones de $y´ - 2x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se dice que $y(x) = x^2 + C$ es la **Solución General** de $y´ - 2x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dada una EDO, **la Solución General** en un intervalo (a, b), es una familia de funciones y = $y(x; C)$, derivable en (a, b), y que depende de un parámetro C, tal que, al reemplazar en la ecuación y por $y(x; C)$ e y´ por $y´(x; C)$, la igualdad se verifica.

Al elegir un valor del parámetro, $C = C_0$, se obtiene **una Solución Particular** $y(x; C_0)$

- Ejemplo: La familia de funciones $y(x; C) = x^2 + C$ es la solución general de $y´ - 2x = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Verificación: $y´(x; C) = 2x$, reemplazamos en la EDO: $(2x) - 2x = 0$.

Si elegimos $C = 15$: $y(x; 15) = x^2 + 15$ es una solución particular de $y´ - 2x = 0$ en $\mathbb{R}$.

Notación:

- $y = x^2 + C$ es la solución general escrita en forma explícita.
- $y - x^2 = C$ es la solución general escrita en forma implícita.

Método de resolución: <u>Ecuaciones de Variables Separables</u>

Una EDO de primer orden es de **<u>Variables Separables</u>** si se puede expresar en la forma:

$$p(x)dx + q(y)dy = 0.$$

La solución general es: $\int p(x)dx + \int q(y)dy = C.$

- <u>Ejemplo</u>: Hallar la solución general de $2x\,dx + 2y\,dy = 0.$

La EDO dada es de variables separables, con $p(x) = 2x$ y $q(y) = 2y$. Luego:

$$2x\,dx + 2y\,dy = 0$$

$$\int 2x\,dx + \int 2y\,dy = C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$\boxed{x^2 + y^2 = C}$ $\quad C \in \mathbb{R}^+,$ es la solución general de la EDO, escrita en forma implícita.

- <u>Ejemplo</u>: Hallar la solución general de $y' + y^2 = 0.$

La EDO dada no está en la forma $p(x)\,dx + q(y)\,dy = 0$. La llevamos a ésa forma para aplicar el método:

$$y' + y^2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$$

$dy + y^2\,dx = 0$ ⟵ Reescribimos la EDO en forma diferencial pero con variables "mezcladas"...

$\frac{1}{y^2}\,dy + dx = 0$ ⟵ Ahora sí, hemos separado las variables pero tenemos que pedir que $y \neq 0$ ...

$$\int \frac{1}{y^2}\,dy + \int dx = C\,, \qquad C \in \mathbb{R}$$

$\frac{-1}{y} + x = C \quad \therefore \quad \boxed{y = \frac{1}{x - C}}$ $\quad C \in \mathbb{R},$ es la solución general de la EDO, escrita en forma explícita.

$\ldots y = 0??$ Se puede ver que la función $y(x) = 0$ también es solución de la EDO: es Solución <u>Singular</u>.

⟶ <u>Solución Singular</u>: solución de una EDO que no se obtiene de la solución general.