Ecuaciones Diferenciales

- Ecuaciones Diferenciales Exactas (sección 3.3)
- Ecuaciones Diferenciales Lineales (sección 3.4.4)

Método de resolución:

Ecuaciones Diferenciales Exactas

La EDO $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ es una Ecuación Diferencial Exacta en $D \subset \mathbb{R}^2$ si existe una función $f(x,y)$ tal que: $P(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ y $Q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, $\forall\,(x,y) \in D$.

En ese caso: $f(x,y) = C$ es la solución general de la ecuación diferencial.

- Ejemplo: La ecuación diferencial $y\,dx + x\,dy = 0$ es exacta?. Dónde lo es?.

Aquí $P(x,y) = y$ y $Q(x,y) = x$. Es sencillo ver que $f(x,y) = xy$ verifica las condiciones $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$\therefore$ $\boxed{y\,dx + x\,dy = 0 \text{ es una EDO exacta en } D: \mathbb{R}^2}$ $\boxed{xy = C, \quad C \in \mathbb{R}, \text{ es la solución general}}$

- Ejemplo: La ecuación diferencial $(y^3 + e^x)\,dx + (3xy^2 + 4)\,dy = 0$ es exacta?. Dónde lo es?

Aquí $P(x,y) = (y^3 + e^x)$ y $Q(x,y) = (3xy^2 + 4)$. Ya no es sencillo proponer $f(x,y)$…

$\Longrightarrow$ Criterio de Exactitud..

__Criterio de Exactitud__:

Sea $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, donde $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ tienen derivadas parciales continuas en $D \subset \mathbb{R}^2$.

$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ es exacta en D si y sólo si: $\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$, $\forall\,(x,y) \in D$.

- __Ejemplo__: La ecuación diferencial $(y^3 + e^x)\,dx + (3xy^2 + 4)\,dy = 0$ es exacta?. Dónde lo es?

$P(x,y) = (y^3 + e^x)$ y $Q(x,y) = (3xy^2 + 4)$ tienen derivadas continuas en $\mathbb{R}^2$ pues son polinómicas y exponencial.

$\dfrac{\partial P(x,y)}{\partial y} = 3y^2 = \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$ $\therefore$ $\boxed{\text{la EDO es exacta en } D = \mathbb{R}^2.}$

…cuál es la solución general?

Como $(y^3 + e^x)\,dx + (3xy^2 + 4)\,dy = 0$ es exacta $\Rightarrow \exists\, f(x,y)$ tal que: $\begin{cases} P(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & (1) \\ Q(x,y) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} & (2) \end{cases}$

$\longrightarrow$ Con (1) y (2) reconstruimos $f(x,y)$ y luego:

$f(x,y) = C$ será la solución general.

$(y^3 + e^x)\,dx + (3xy^2 + 4)\,dy = 0$ es exacta $\Rightarrow \exists\, f(x,y)$ tal que: $\begin{cases} (y^3 + e^x) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} & (1) \\ (3xy^2 + 4) = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} & (2) \end{cases}$

$\longrightarrow$ Con (1) y (2) reconstruimos $f(x,y)$ y luego:

$f(x,y) = C$ será la solución general.

De (1): $f(x,y) = \displaystyle\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx = \int (y^3 + e^x)\,dx = x\,y^3 + e^x + g(y)$

$\therefore$ $f(x,y) = x\,y^3 + e^x + g(y)$ $\longleftarrow$ $g(y) = ??$

Derivamos $f(x,y)$ respecto de y: $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 3\,x\,y^2 + g'(y)$

Usamos (2): $3\,x\,y^2 + g'(y) = 3xy^2 + 4 \longrightarrow g'(y) = 4$ $\therefore$ $g(y) = 4y + k$, $k \in \mathbb{R}$,

Reemplazamos en $f(x,y)$: $f(x,y) = x\,y^3 + e^x + 4y + k$

Luego: $f(x,y) = x\,y^3 + e^x + 4y + k = C,$ $C - k \equiv C$

$\therefore$ $\boxed{x\,y^3 + e^x + 4y = C}$, $C \in \mathbb{R}$, es la solución general.

Método de resolución: <u>Ecuaciones Diferenciales Lineales</u>

Una EDO se dice <u>Lineal de primer orden</u> si es de la forma: $y' + p(x)\,y = q(x)$.

La solución general se obtiene de proponer $y(x) = u(x)v(x)$, y reemplazar en la EDO para hallar $u(x)$ y $v(x)$.

- <u>Ejemplo</u>: Halle la solución general de $y' + 4\,y = x\,e^{-4\,x}$.

Proponemos $y = u\,.\,v$ (no nulos) y reemplazamos en la ecuación:

$$u'v + u\,v' + 4\,u\,v = x\,e^{-4\,x}$$

$$u'v + u\,[v' + 4\,v] = x\,e^{-4\,x} \longleftarrow \begin{cases} v' + 4\,v = 0 & (1) \\ u'v = x\,e^{-4\,x} & (2) \end{cases}$$

Ambas son EDO de variables separables…

De (1):
$$\frac{d\,v}{dx} + 4\,v = 0$$
$$\frac{d\,v}{v} + 4\,dx = 0$$
$$\int \frac{d\,v}{v} + \int 4\,dx = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$\int \frac{d\,v}{v} + \int 4\,dx = C$$

Teníamos: $\begin{cases} v' + 4\,v = 0 & (1) \\ u'v = x\,e^{-4\,x} & (2) \end{cases}$

$$\ln|v| + 4\,x = C$$
$$\ln|v| = C - 4\,x$$
$$|v| = e^{C-4\,x} = e^{C}.e^{-4\,x}$$
$$v = \pm\,e^{C}.e^{-4\,x}$$
$$v = k\,e^{-4\,x}\,, \qquad k \in \mathbb{R}_0$$

$\longleftarrow$ Elegimos $k = 1$ $\therefore$ $\boxed{v = e^{-4\,x}}$

Reemplazamos $v = e^{-4\,x}$ en (2) y hallamos u:

$$u'\,e^{-4\,x} = x\,e^{-4\,x}$$
$$u' = x \qquad \therefore \qquad \boxed{u = \frac{x^2}{2} + C}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

Con u y v armamos $y = u\,.\,v$, la solución general de $y' + 4\,y = x\,e^{-4\,x}$:

$$\boxed{y = \left[\frac{x^2}{2} + C\right].e^{-4\,x}}\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$