

1a	1b	1c	2a	2b	3	4a	4b	4c
0.75	0.75	1	1.5	1	1.25	1.25	1.25	1.25

MATEMATICA B - Recuperatorio del Primer parcial 11-5-2022

Apellido y nombre:

N° de alumno:

Carrera:

Correo electrónico:

En todos los casos justificar las respuestas. Incluir los cálculos auxiliares. Acompañar con gráficos aclaratorios cuando convenga.

1. a) Calcular: $\int \frac{x-8}{x^2+2x} dx$

b) Con integrales definidas hallar el **área** de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de $f(x) = (2-x)e^{-x/2}$ para $0 \leq x \leq 4$.

c) Sea R el triángulo del plano limitado por: $x+y=4$, $x+2y=4$, $x=0$. **Plantear** con integrales el volumen del sólido que genera R al rotar alrededor de la recta $y=4$.

2. a) Resolver: $(2xy-4\cos y)dx + (x+2\sin y)^2 dy = 0$ con la condición $y(1) = 0$.
b) Hallar las curvas ortogonales a la familia de parábolas $\mathcal{F}: x-1=Cy^2$.

3. Sea R el paralelogramo limitado por las rectas:

$$y = x - 1, y = x - 4, x + 2y = -2, x + 2y = 4$$

Calcular $I = \iint_R \frac{x+2y}{(x-y)^2} dA_{xy}$ proponiendo un cambio de variables que transforme R en un rectángulo.

4. **Plantear:**

a) con integrales triples, proyectando sobre el plano xz , el cálculo del volumen del sólido del primer octante limitado por:

$$x+z=2, y+z=2, y+2z=4, x=0, z=0$$

b) en coordenadas cilíndricas el cálculo de la masa del sólido limitado por: $x^2+(y-1)^2=1$, $y+z=4$, $2y+z=4$. La densidad de masa es $f(x,y,z)=yz$.

c) en coordenadas esféricas el cálculo de $\iiint_V \sqrt{x^2+y^2+z^2} dV$ siendo

$$V = \left\{ (x,y,z) : x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \wedge z \leq \sqrt{3x^2+3y^2} \right\}$$

MATEMATICA B - Recuperatorio del Primer parcial 11-5-2022

1. a) Calcular: $\int \frac{x-8}{x^2+2x} dx$

Rta

Descomponemos el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{x-8}{x^2+2x} = \frac{x-8}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2) + Bx}{x(x+2)} = \frac{(A+B)x + 2A}{x^2+2x}$$

Luego:

$$(A+B)x + 2A = x - 8$$

Entonces:

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 2A=-8 \end{cases} \quad \text{cuya solución es } (A, B) = (-4, 5)$$

Por lo tanto:

$$\frac{x-8}{x^2+2x} = -\frac{4}{x} + \frac{5}{x+2}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x-8}{x^2+2x} dx = \int \left(-\frac{4}{x} + \frac{5}{x+2} \right) dx = -4 \ln |x| + 5 \ln |x+2| + C$$

b) Con integrales definidas hallar el **área** de la región comprendida entre el eje x y la gráfica de $f(x) = (2-x)e^{-x/2}$ para $0 \leq x \leq 4$.

Rta

Debemos averiguar en qué puntos del intervalo $[0, 4]$ la gráfica de f se encuentra por encima de eje x y en qué puntos se halla por debajo. Dado que f es continua en $[0, 4]$ y teniendo en cuenta que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2-x)e^{-x/2} = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

entonces el signo de $f(x)$ ha de ser constante en cada subintervalo $(0, 2)$ y $(2, 4)$. De hecho:

$$0 < x < 2 \Rightarrow f(x) > 0$$

$$2 < x < 4 \Rightarrow f(x) < 0$$

Luego, la región del enunciado es:

$$R = R_1 \cup R_2 \text{ donde}$$

$$R_1 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

$$R_2 = \{(x, y) : 2 \leq x \leq 4, f(x) \leq y \leq 0\}$$

Por lo tanto:

$$\text{área}(R) = \text{área}(R_1) + \text{área}(R_2) = \int_0^2 f(x) dx - \int_2^4 f(x) dx =$$

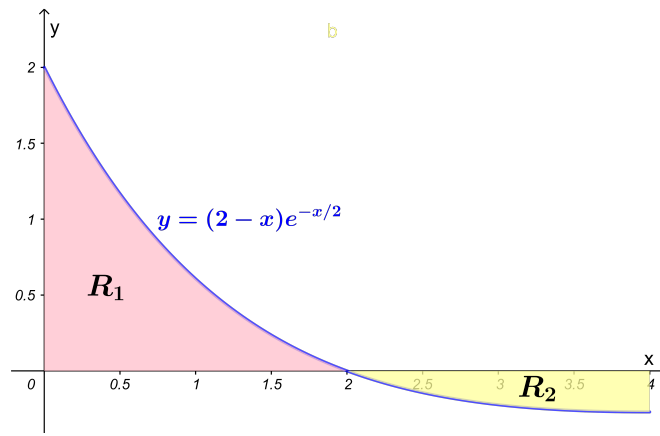


Figura 1: Ejercicio 1b

$$= \int_0^2 (2-x)e^{-x/2} dx - \int_2^4 (2-x)e^{-x/2} dx$$

Búsqueda de primitiva:

$$\begin{aligned} \int (2-x)e^{-x/2} dx & \stackrel{\text{por partes:}}{=} \int \underbrace{u=2-x}_{du=-dx} \underbrace{dv=e^{-x/2} dx}_{v=-2e^{-x/2}} = -2(2-x)e^{-x/2} - 2 \int e^{-x/2} dx = \\ & = -2(2-x)e^{-x/2} + 4e^{-x/2} + C = 2xe^{-x/2} + C \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{área}(R) &= \int_0^2 (2-x)e^{-x/2} dx - \int_2^4 (2-x)e^{-x/2} dx = 2xe^{-x/2} \Big|_0^2 - 2xe^{-x/2} \Big|_2^4 = \\ &= 4e^{-1} + (-8e^{-2} + 4e^{-1}) = 8e^{-1} - 8e^{-2} \end{aligned}$$

c) Sea R el triángulo del plano limitado por: $x+y=4$, $x+2y=4$, $x=0$. **Plantear** con integrales el volumen del sólido que genera R al rotar alrededor de la recta $y=4$.

Rta

El triángulo del enunciado es

$$R = \left\{ (x, y) : 0 \leq x \leq 4, 2 - \frac{x}{2} \leq y \leq 4 - x \right\}$$

Para $0 \leq x \leq 4$ los radios interno y externo del sólido son:

$$r(x) = 4 - (4 - x) = x \text{ (distancia entre A y B en la figura)}$$

$$R(x) = 4 - \left(2 - \frac{x}{2}\right) = 2 + \frac{x}{2} \text{ (distancia entre A y C en la figura)}$$

Entonces el volumen del sólido de revolución está dado por

$$V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^4 \left(2 + \frac{x}{2}\right)^2 dx - \pi \int_0^4 x^2 dx$$

2. a) Resolver: $(2xy - 4 \cos y) dx + (x + 2 \operatorname{sen} y)^2 dy = 0$ con la condición $y(1) = 0$.
- b) Hallar las curvas ortogonales a la familia de parábolas $\mathcal{F} : x - 1 = Cy^2$.

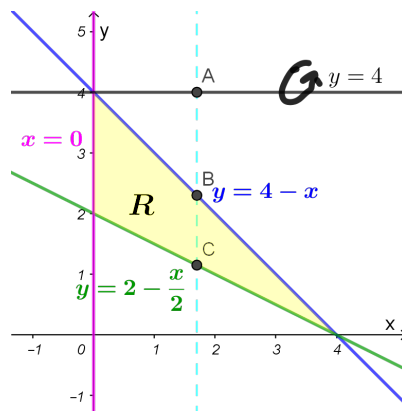


Figura 2: Ejercicio 1c

Rta

a) La ecuación diferencial es

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

donde

$$M(x, y) = 2xy - 4 \cos y \quad N(x, y) = (x + 2 \sin y)^2$$

Se tiene $M, N \in C^1(\mathbb{R}^2)$ Además

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} (2xy - 4 \cos y) = 2x + 4 \sin y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} ((x + 2 \sin y)^2) = 2(x + 2 \sin y) = 2x + 4 \sin y$$

Se verifica la condición necesaria de exactitud: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

La ED será exacta si existe alguna función $f(x, y)$ tal que

$$\begin{cases} f'_x = 2xy - 4 \cos y \\ f'_y = (x + 2 \sin y)^2 \end{cases}$$

La primera de estas igualdades conduce a:

$$f(x, y) = x^2 y - 4x \cos y + g(y)$$

Derivando respecto de y :

$$f'_y = \frac{\partial}{\partial y} (x^2 y - 4x \cos y + g(y)) = x^2 + 4x \sin y + g'(y)$$

Empleando ahora la segunda igualdad, resulta

$$x^2 + 4x \sin y + g'(y) = (x + 2 \sin y)^2$$

Es decir:

$$x^2 + 4x \sin y + g'(y) = x^2 + 4x \sin y + 4 \sin^2 y$$

así que

$$g'(y) = 4 \sin^2 y$$

Entonces

$$g(y) = \int 4 \sin^2 y dy = 4 \int \frac{1 - \cos(2y)}{2} dy = \int (2 - 2 \cos(2y)) dy$$

$$g(y) = 2y - \operatorname{sen}(2y) + K$$

Por lo tanto:

$$f(x, y) = x^2y - 4x \cos y + 2y - \operatorname{sen}(2y) + K$$

La solución general de la ecuación diferencial es pues

$$x^2y - 4x \cos y + 2y - \operatorname{sen}(2y) = C$$

Condición inicial:

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow C = -4$$

Esto determina la siguiente solución particular del PVI dado:

$$x^2y - 4x \cos y + 2y - \operatorname{sen}(2y) = -4$$

b) A partir de la ecuación de la familia $\mathcal{F} : x - 1 = Cy^2$, derivando implícitamente respecto de x se obtiene:

$$1 = 2Cyy'$$

Debemos eliminar el parámetro C . Para ello multiplicamos esta ecuación por y y utilizamos la ecuación de la familia dada, del modo siguiente:

$$y = 2 \overbrace{Cy^2}^{x-1} y'$$

Se obtiene así la ecuación diferencial de \mathcal{F} :

$$y = 2(x - 1)y'$$

Despejando las pendientes como función del punto (x, y) resulta

$$y' = \frac{y}{2(x - 1)}$$

La ecuación diferencial de la familia ortogonal se obtiene planteando la condición de perpendicularidad, expresada en términos de las pendientes como:

$$y' = -\frac{2(x - 1)}{y}$$

La familia ortogonal será la solución general de esta nueva ED, que resolvemos por separación de variables:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2(x - 1)}{y}$$

$$y \, dy = -(x - 1) \, dx$$

$$\int y \, dy = -2 \int (x - 1) \, dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 + C_1 = -(x - 1)^2 + C_2$$

O sea la familia de elipses:

$$\mathcal{F}^\perp : (x - 1)^2 + \frac{y^2}{2} = C$$

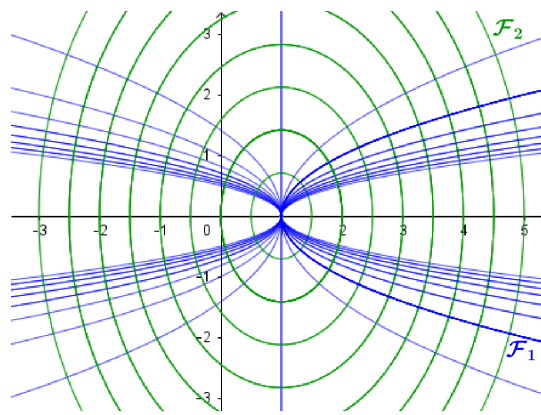


Figura 3: Ejercicio 2b

3. Sea R el paralelogramo limitado por las rectas:

$$y = x - 1, y = x - 4, x + 2y = -2, x + 2y = 4$$

Calcular $I = \iint_R \frac{x + 2y}{(x - y)^2} dA_{xy}$ proponiendo un cambio de variables que transforme R en un rectángulo.

Rta

Definiendo

$$T^{-1} : \begin{cases} u = x - y \\ v = x + 2y \end{cases}$$

se tiene:

$$y = x - 1 \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow u = 1$$

$$y = x - 4 \Leftrightarrow x - y = 4 \Leftrightarrow u = 4$$

$$x + 2y = -2 \Leftrightarrow v = -2$$

$$x + 2y = 4 \Leftrightarrow v = 4$$

logrando que R se transforme en el rectángulo $T^{-1}(R) = [1, 4] \times [-2, 4]$.

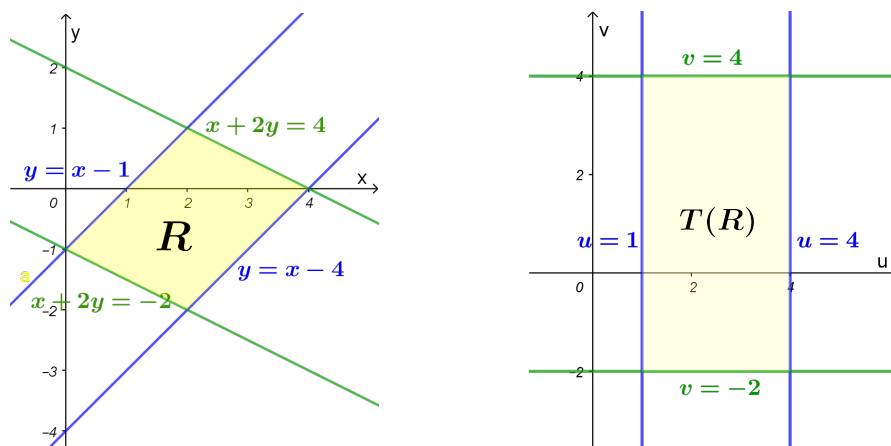


Figura 4: Ejercicio 3

A partir de T^{-1} , despejando x, y en términos de u, v se obtiene

$$T : \begin{cases} x = \frac{2u+v}{3} \\ y = \frac{-u+v}{3} \end{cases}$$

El jacobiano de T está dado por

$$J_T = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) \frac{1}{3} = \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Aplicando el teorema de cambio de variables en las integrales dobles:

$$\begin{aligned} I &= \iint_R \frac{x+2y}{(x-y)^2} dA_{xy} = \int_1^4 \int_{-2}^4 \frac{v}{u^2} \frac{1}{3} dv du = \frac{1}{3} \int_1^4 \left. \frac{1}{2} \frac{v^2}{u^2} \right|_{-2}^4 du = \\ &= 2 \int_1^4 \frac{1}{u^2} du = -\frac{2}{u} \Big|_1^4 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

4. Plantear:

a) con integrales triples, proyectando sobre el plano xz , el cálculo del volumen del sólido del primer octante limitado por:

$$x+z=2, y+z=2, y+2z=4, x=0, z=0$$

Rta

La región proyección del sólido V sobre el plano xz es el triángulo:

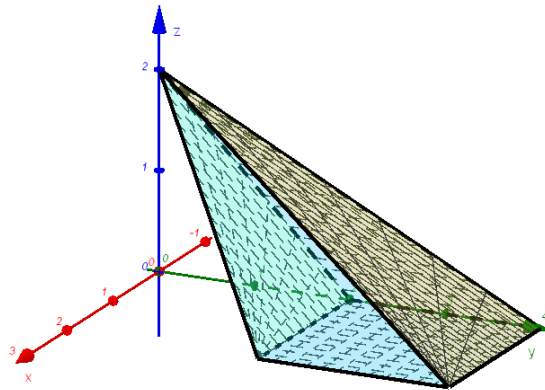


Figura 5: Ejercicio 4a

$$R_{xz} = \{(x, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 2-x\}$$

Alternativamente, también puede describirse como:

$$R_{xz} = \{(x, z) : 0 \leq z \leq 2, 0 \leq x \leq 2-z\}$$

Para $(x, z) \in R_{xz}$ genérico la variación de y está dada por:

$$2-z \leq y \leq 4-2z$$

Es decir

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq z \leq 2-x, 2-z \leq y \leq 4-2z\}$$

o también

$$V = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq 2, 0 \leq x \leq 2-z, 2-z \leq y \leq 4-2z\}$$

Entonces

$$\text{vol}(V) = \int_0^2 \int_0^{2-x} \int_{2-z}^{4-2z} dy \, dz \, dx$$

o también

$$\text{vol}(V) = \int_0^2 \int_0^{2-z} \int_{2-z}^{4-2z} dy \, dx \, dz$$

b) en coordenadas cilíndricas el cálculo de la masa del sólido limitado por: $x^2 + (y-1)^2 = 1$, $y+z=4$, $2y+z=4$. La densidad de masa es $f(x, y, z) = yz$.

Rta

Emplearemos las coordenadas cilíndricas $T : \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$

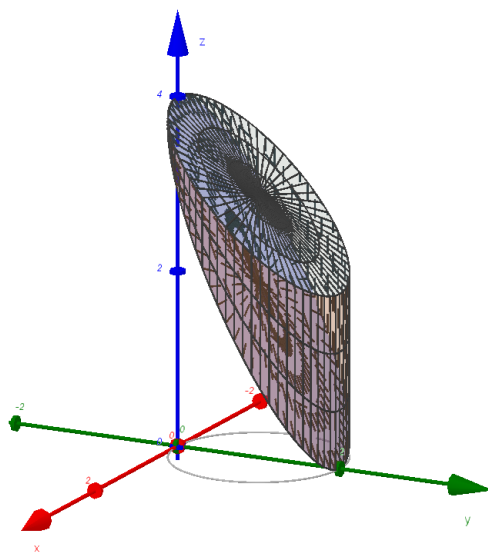


Figura 6: Ejercicio 4b

En el plano xy la región proyección del sólido V es un círculo de radio 1 cuya frontera es la circunferencia:

$$x^2 + (y-1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 2y \Leftrightarrow r^2 = 2r \sin \theta \Leftrightarrow r = 2 \sin \theta$$

En esta región la variación del ángulo polar es $0 \leq \theta \leq \pi$.

Para $(x, y) \in R_{xy}$ genérico, la variación de z es

$$4 - 2y \leq z \leq 4 - y$$

que expresado en coordenadas cilíndricas resulta

$$4 - 2r \sin \theta \leq z \leq 4 - r \sin \theta$$

Entonces

$$V_{r\theta z} = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq \pi, r \leq 2 \sin \theta, 4 - 2r \sin \theta \leq z \leq 4 - r \sin \theta\}$$

La densidad de masa $f(x, y, z) = yz$ en coordenadas cilíndricas es

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = r \sin \theta z$$

La masa del sólido está representada por

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V yz \, dV_{xyz} = \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} \int_{4-2r\sin\theta}^{4-r\sin\theta} r \sin\theta \, z \, r \, dz \, dr \, d\theta = \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\sin\theta} \int_{4-2r\sin\theta}^{4-r\sin\theta} r^2 \sin\theta \, z \, dz \, dr \, d\theta \end{aligned}$$

donde hemos incluido el factor jacobiano de la transformación en coordenadas cilíndricas (módulo).

c) en coordenadas esféricas el cálculo de $\iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dV$ siendo

$$V = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 + (z-2)^2 \leq 4 \wedge z \leq \sqrt{3x^2 + 3y^2} \right\}$$

Rta

Emplearemos las coordenadas esféricas $T : \begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$

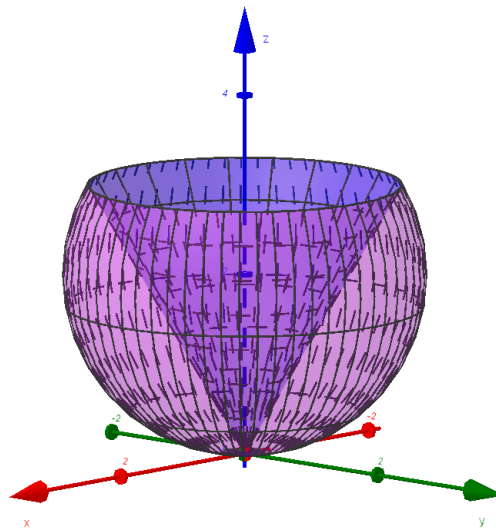


Figura 7: Ejercicio 4c

Recordemos que:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \quad \text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

La frontera de V consta de una esfera y un semicono, que en coordenadas esféricas están dadas por:

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \rho^2 = 4\rho \cos \varphi \Leftrightarrow \rho = 4 \cos \varphi$$

$$z = \sqrt{3x^2 + 3y^2} \Leftrightarrow \text{tg } \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3x^2 + 3y^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \varphi = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Luego, la descripción del sólido en coordenadas esféricas es

$$V_{\rho\theta\varphi} = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 4 \cos \varphi \right\}$$

El integrando $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en coordenadas esféricas es

$$f(\rho \cos \theta \sin \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \varphi) = \rho$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \iiint_V \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dV &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \varphi} \rho \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \int_0^{4 \cos \varphi} \rho^3 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \end{aligned}$$

donde se ha incluido el factor jacobiano en coordenadas esféricas (módulo).