TEMA 2 MATEMÁTICA B - PRIMER PARCIAL 01-10-2016

Apellido y nombre: .... Legajo Nº......................
Carrera: .... Grupo:......................

1	2a	2b	3	4a	4b	4c	4d	5
1	1	1	1	1	1	1	1	2

1) Integre: i) $\int \frac{1}{x-x^2}\,dx$ ii) $\int \frac{1}{4+x^2}\,dx$

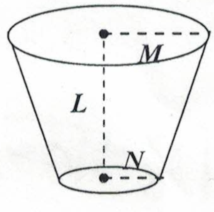
2) a) Halle la curva C que pasa por el punto $(3,2)$ y tiene, en cada punto de coordenadas (x,y), recta tangente con pendiente igual a $x+3y$.

b) Determine la familia de curvas ortogonales a $F_1: \; y^2 = 2x + C$. Grafique.

3) Calcule el área de la región del plano limitada por $y = x\sqrt{6-2x}$ e $y = 3x - x^2$.

4) **Plantee:**

a) con una integral definida, el cálculo del volumen del sólido de revolución representado en la figura.



b) invirtiendo el orden de integración, $\int_1^e \int_{2\ln y}^{3-\ln y} f(x,y)\,dx\,dy$.

c) usando coordenadas polares, el cálculo del valor promedio de $f(x,y) = x^2$ en la región R limitada por $y = \sqrt{4-x^2}$ e $y = \sqrt{3}$.

d) usando coordenadas esféricas, el cálculo del volumen del sólido V limitado por $x^2+y^2+z^2=4$; $x^2+y^2+z^2=9$; $y=2x$ e $y=3x$ en el primer octante .

5) Siendo $F(x) = \int_0^x sen(t^3)\,dt$, analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) La gráfica de F tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

ii) $Dom(F) = \Re$ y F es estrictamente decreciente en $\Re$.

iii) El punto (0,0) pertenece a la gráfica de F y en ese punto la recta tangente es horizontal.

1 . Integre:

i) $\int \frac{1}{x-x^2}dx$

$$x-x^2 = x(1-x) \rightarrow \frac{1}{x-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1-x} = \frac{A(1-x)+Bx}{x-x^2} = \frac{(-A+B)x+A}{x-x^2}$$

$$\begin{cases} -A+B=0 \\ A=1 \end{cases} \rightarrow B=1$$

$$\int \frac{1}{x-x^2}dx = \int (\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x})dx = ln|x| - ln|1-x| + C$$

ii) sustitución $u = \frac{x}{2}, du = \frac{1}{2}dx \rightarrow 2du = dx$

$$\int \frac{1}{4+x^2}dx = \int \frac{1}{4\left[1+\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]}dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+u^2}2du = \frac{1}{2}arctan(u) + C = \frac{1}{2}arctan(\frac{x}{2}) + C$$

2a) Halle la curva C que pasa por el punto $(3,2)$ y tiene en cada punto (x,y) recta tangente con pendiente igual a $x+3y$

$$\begin{cases} y' = x+3y \\ y(3) = 2 \end{cases}$$

$y' = x+3y$ se trata de una EDO lineal de primer orden $(y'-3y=x)$. Proponemos una solución general de la forma $y = u(x).v(x)$ Derivando y reemplazando en la EDO se tiene $u'.v + u.v' - 3uv = x \rightarrow u'v + u(v'-3v) = x$ (*)

Buscamos una solución particular no trivial $v = v(x)$ de la EDO $v'-3v=0$

Una vez obtenida esta $v = v(x)$ se reemplaza en (*) quedando la EDO $u'v = x$

$$v'-3v=0 \rightarrow \frac{dv}{v} = 3dx \rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int 3dx \rightarrow ln|v| = 3x + C \rightarrow v = e^{3x}.C_1 .$$

Consideramos la solución particular no trivial $v = e^{3x}$. Entonces $u'e^{3x} = x$

$\rightarrow u' = xe^{-3x} \rightarrow \int du = \int xe^{-3x}dx \rightarrow u = x\frac{e^{-3x}}{-3} - \frac{e^{-3x}}{9} + C$ Por lo tanto la solución general de la EDO es $y = \left(-\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{e^{-3x}}{9} + C\right).e^{3x}$.

Si reemplazamos el punto $(3,2)$ en la solución general y despejamos C $\rightarrow C = \frac{28}{9}e^{-9}$.

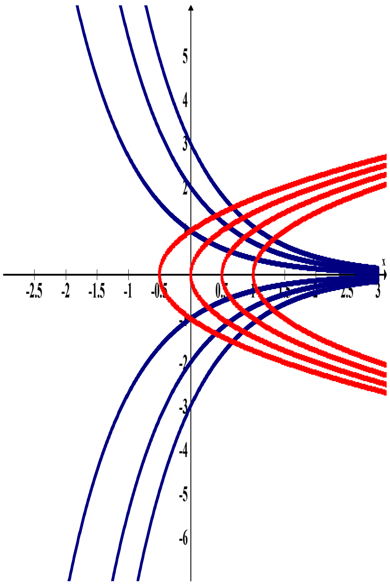
Por lo tanto la curva C será

$$y = \left(-\frac{x}{3}e^{-3x} - \frac{e^{-3x}}{9} + \frac{28}{9}e^{-9}\right).e^{3x} \rightarrow y = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9} + \frac{28}{9}e^{-9}e^{3x}$$

b) Determine la familia de curvas ortogonales a $F_1 : y^2 = 2x + C$. Grafique.

Primero obtenemos la EDO asociada a F_1 para ello derivamos implícitamente la EDO $2yy' = 2$. Esta ya es la ED pues no tiene parámetro esencial. Despejamos $y' \to y' = \frac{1}{y}$ Por lo tanto la EDO asociada a la familia F_2, ortogonal a F_1 será $y' = -y$ .Si resolvemos esta ecuación obtendremos la familia pedida F_2.

$$\to y' = -y \to \frac{dy}{y} = -dx \to \int \frac{dy}{y} = \int -dx \to ln|y| = -x + C \to y = C_1 e^{-x}$$



3) Calcule el área de la región del plano limitada por $y = x\sqrt{6-2x}$ e $y = 3x - x^2$

Primero analizamos las intersecciones entre ambas gráficas $\begin{cases} y = x\sqrt{6-2x} \\ y = 3x - x^2 \end{cases}$

$$x\sqrt{6-2x} = 3x - x^2 \to x(\sqrt{6-2x} - 3 + x) = 0 \to x = 0 \vee \sqrt{6-2x} - 3 + x = 0$$

$$\sqrt{6-2x} = 3 - x \to 6 - 2x = (3-x)^2 = 9 - 6x + x^2 \to -3 + 4x - x^2 = 0 \to o\,sea\ -(x-1)(x-3) = 0$$

Ambas gráficas se intersecan en los puntos de abscisa $x = 0, x = 1, x = 3$.
Se generan sobre la recta real los intervalos $(-\infty, 0), (0,1), (1,3), (3,\infty)$ El primero y el último son no acotados por lo que se descartan. Siendo

$f(x) = x\sqrt{6-2x}$, $g(x) = 3x - x^2$, observemos que

$f(x) - g(x) = x\sqrt{6-2x} - (3x - x^2)$. Siendo esta diferencia una función continua que sólo se anula en los tres puntos indicados tendrá signo constante en los intervalos abiertos que ellos delimitan, para conocer el signo en cada uno de ellos bastará con hallar el signo de la diferencia en un punto cualquiera del correspondiente intervalo.

$f(\frac{1}{2}) - g(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{5}{4} < 0$ de manera que $f(x) < g(x)\ \forall x \in (0,1)$

$f(2) - g(2) = 2\sqrt{2} - 2 > 0$ de manera que $f(x) > g(x)\ \forall x \in (1,3)$

Es decir que para $x \in (0,1) \rightarrow y_{techo} = g(x)\,,\; y_{piso} = f(x)$

Para $x \in (1,3) \rightarrow y_{techo} = f(x)\,,\; y_{piso} = g(x)$

Por lo tanto el área de la región acotada limitada por las gráficas dadas está dada por

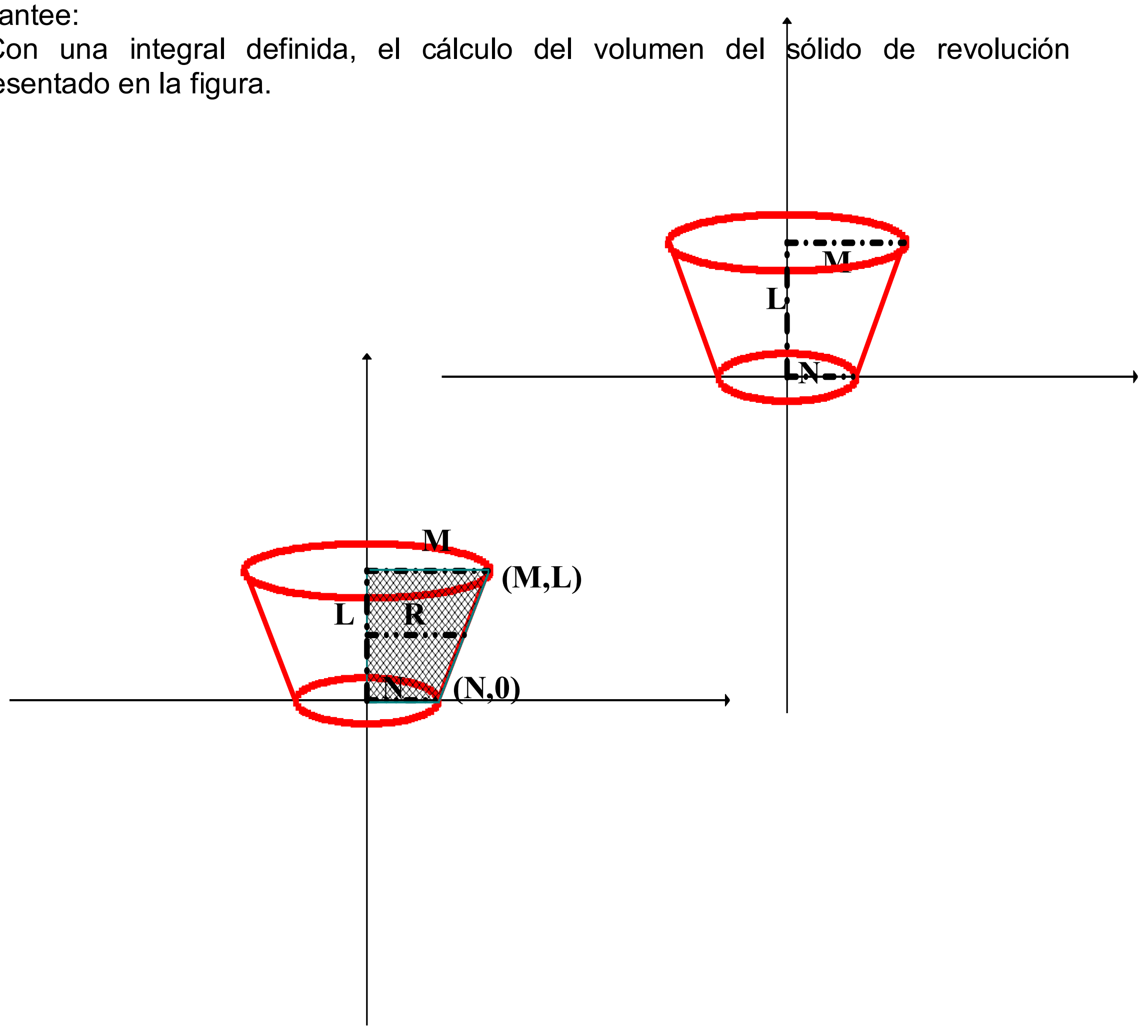
$$\int_0^1 [g(x) - f(x)]dx + \int_1^3 [f(x) - g(x)]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[3x - x^2 - (x\sqrt{6-2x})\right]dx + \int_1^3 \left[x\sqrt{6-2x} - (3x - x^2)\right]dx = \left.\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \left[\left. x\frac{2}{3}.\frac{(6-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2}\right|_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{3}(6-2x)^{\frac{3}{2}}\,dx \right] +$$

$$\left. x\frac{2}{3}.\frac{(6-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2}\right|_1^3 - \int_1^3 -\frac{1}{3}(6-2x)^{\frac{3}{2}}\,dx - \left.(3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3})\right|_1^3 = \frac{223}{30} - \frac{12}{5}\sqrt{6}$$

4) Plantee:

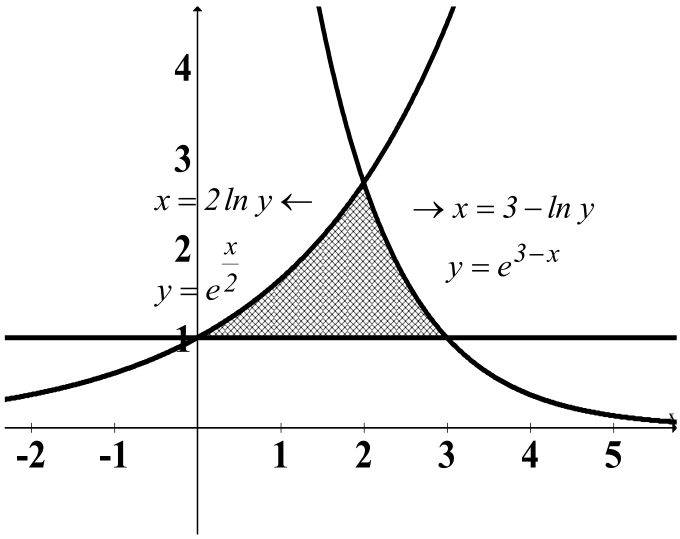
a) Con una integral definida, el cálculo del volumen del sólido de revolución representado en la figura.



Observemos que el sólido de la figura se genera haciendo rotar la región sombreada en torno al eje y. Podemos hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(M,L)\ y\ (N,0) \rightarrow y = \dfrac{L}{M-N}(x-N) \rightarrow x = y\dfrac{(M-N)}{L} + N$

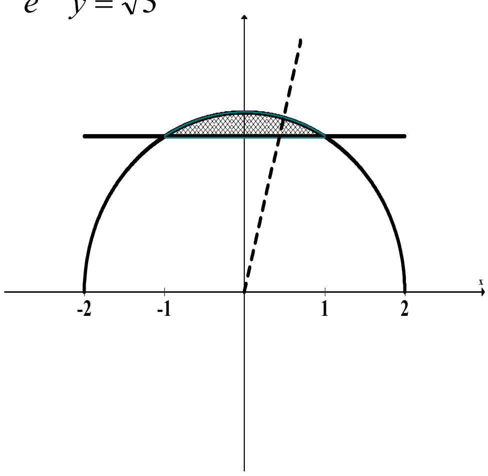
$$Vol = \int_0^L \pi\left(y\frac{(M-N)}{L} + N \right)^2 dy$$

b) Invirtiendo el orden de integración, $\displaystyle\int_1^e \int_{2\ln y}^{3-\ln y} f(x,y)\,dx\,dy$



$$\int_1^e \int_{2\ln y}^{3-\ln y} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \int_1^{e^{\frac{x}{2}}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_2^3 \int_1^{e^{3-x}} f(x,y)\,dy\,dx$$

c) Usando coordenadas polares, el cálculo del valor promedio de $f(x,y) = x^2$ en la región R limitada por $y = \sqrt{4-x^2}\ e \quad y = \sqrt{3}$



Primero describimos la región R en coordenadas polares $\left(\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r sen\theta \end{cases}\right)$, para ello veamos las ecuaciones polares de las curvas frontera:

$$y = \sqrt{4 - x^2} \rightarrow y^2 + x^2 = 4 \rightarrow r = 2\ (circunferencia)$$
$$y = \sqrt{3} \rightarrow r\ sen\theta = \sqrt{3} \rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{sen\theta}\quad (recta)$$

A partir del gráfico concluimos que $\theta_{mín}\ y\, \theta_{máx}$ son los que corresponden a los puntos de intersección de ambas fronteras

$$\rightarrow \frac{\sqrt{3}}{sen\theta} = 2 \rightarrow sen\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \theta_{mín} = arctan(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{3}, \theta_{máx} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$$

Para la variación de r para un θ genérico en el intervalo $(\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi)$ se tiene $r_m(\theta) < r < r_M(\theta)$. Donde $r_m(\theta)$ se obtiene de la recta y $r_M(\theta)$ de la circunferencia. Es decir $\frac{\sqrt{3}}{sen\theta} \leq r \leq 2$

Por lo tanto el valor promedio de $f(x,y) = x^2$ sobre R es $v_p = \dfrac{\iint\limits_R x^2 dA}{\iint\limits_R 1dA}$, haciendo el cambio de variables a coordenadas polares $v_p = \dfrac{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}}^{2} (r\cos\theta)^2\, r dr d\theta}{\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi}\int_{\frac{\sqrt{3}}{sen\theta}}^{2} r dr d\theta}$

d) Usando coordenadas esféricas el cálculo del volumen del sólido V limitado por $x^2 + y^2 + z^2 = 4\ ; x^2 + y^2 + z^2 = 9; y = 2x; y = 3x$ en el primer octante.

Describimos al sólido V utilizando coordenadas esféricas $\left(\begin{cases} x = \rho\cos\theta sen\varphi \\ y = \rho sen\theta sen\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}\right)$

Para ello obtenemos las ecuaciones esféricas de sus fronteras

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \rightarrow \rho = 2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \rightarrow \rho = 3$$

$y = 2x \rightarrow tan\theta = \frac{y}{x} = 2 \rightarrow \theta = arctan(2)$

$y = 3x \rightarrow tan\theta = \frac{y}{x} = 3 \rightarrow \theta = arctan(3)$

De la condición que el sólido esté en el primer octante se tiene que $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

Por lo tanto el cálculo del volumen en coordenadas esféricas estará dado por la siguiente integral: $vol(V) = \iiint_V 1dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_{arctan 2}^{arctan 3} \int_2^3 \rho^2 sen\varphi \, d\rho d\theta d\varphi$

5) Siendo $F(x) = \int_0^x sen(t^3)dt$, analice si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

i) La gráfica de F tiene un punto de inflexión en $x = 0$.

Para que la gráfica de F tenga un punto de inflexión en $x = 0$ debe haber cambio de concavidad allí. Recordemos que si $F''(x) > 0$ en un intervalo (a,b) entonces la gráfica de F es cóncava hacia arriba en (a,b) y si $F''(x) < 0$ en (a,b) entonces la gráfica de F es cóncava hacia abajo en el intervalo (a,b).

Por lo tanto para saber si F tiene un punto de inflexión en $x = 0$ analicemos si cambia de signo $F''(x)$ en $x = 0$.

Como $sen(t^3)$ es continua en R, el Teorema fundamental del cálculo me permite concluir que $F'(x) = sen(x^3)$ para cualquier $x \in R$, luego se tiene que $F''(x) = 3x^2 cos(x^3)$ Esta función se anula solo cuando $x = 0$ y cuando $x^3 = n\frac{\pi}{2}$ $siendo\ n\ impar$ .Siendo F'' continua, podemos concluir que en los intervalos $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}},0)$ $(0,\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}})$ tiene signo constante. Para conocer el signo en cada intervalo bastará con evaluar F'' en un punto cualquiera del intervalo correspondiente.

$F''(-1) = 3cos(-1) > 0 \rightarrow F''(x) > 0$ en el intervalo $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2}},0) \rightarrow$ la gráfica de F es cóncava hacia arriba allí.

$F''(1) = 3cos(1) > 0 \rightarrow F''(x) > 0$ en el intervalo $(0,\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}) \rightarrow$ la gráfica de F es cóncava hacia arriba también allí.

La gráfica de F **no** tiene punto de inflexión en $x = 0$.

ii) $Dom(F) = R$ y F es estrictamente creciente en R.

La función $f(t) = sen(t^3)$ es continua en el intervalo $[0,x]$ para cualquier $x \geq 0$ (pues es continua en R por ser composición de funciones continuas en R), por lo tanto queda definida la integral $\int_0^x sen(t^3)dt$ <u>para cualquier $x \geq 0$</u> (Ver definición 3 de la guía 1)

Además f es continua en $[x,0]$ siendo x cualquier número real negativo, por lo tanto queda definida la integral $\int_0^x sen(t^3)dt$ <u>para cualquier $x < 0$</u> (Ver definición 4 de la guía 1) <u>Concluimos que $Dom(F) = R$.</u>

Para saber si F es estrictamente creciente en R podemos estudiar el signo de F', (Recordemos que si $F' > 0$ en (a,b) entonces F crece en dicho intervalo y si $F' < 0$ en el intervalo (a,b) entonces F decrece en dicho intervalo)

$F'(x)$ solo se anula cuando $x^3 = n\pi$ siendo n un número entero (recordemos que $F'(x) = sen(x^3)$). Siendo F' continua, podemos concluir que en el intervalo $(\sqrt[3]{-\pi},0)$ tiene signo constante. Para conocerlo bastará con evaluar F' en un punto cualquiera del intervalo.

$F'(-1) = sen\left[(-1)^3\right] < 0 \rightarrow F$ <u>decrece</u> en $(\sqrt[3]{-\pi},0)$

Concluimos que F <u>no es estrictamente creciente</u> en R.

iii) El punto $(0,0)$ pertenece a la gráfica de F y en ese punto la recta tangente es horizontal.

$F(0) = \int_0^0 sen(t^3)dt = 0$ (Recordar que por convención $\int_a^a f(x)dx = 0$). <u>Por lo tanto el punto $(0,0)$ pertenece a la gráfica de F.</u>

La pendiente de la recta tangente a la gráfica de F en el punto (0,0) está dada por $F'(0) = sen(0^3) = 0$ .Concluimos que la recta tangente en dicho punto tiene pendiente nula es decir es horizontal.