TEMA I **Matemática B – 1er Parcial** **03-10-2015**

Apellido y nombre: .... **Legajo N°**..............
Carrera:.. **Grupo:** ....

1	2	3a	3b	4	5	6
1	2	1	1	2	1.5	1.5

1) Resuelva: i) $\int tg(2x)dx$ ii) $\int \frac{2}{1-x^2}\,dx$

2) Complete de manera que resulten verdaderos los siguientes enunciados:

i) $\int_a^b \frac{1}{x}dx = \ln|b| - \ln|a|$ si ....

ii) Si f y g son derivables, $\int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]dx =$..............................

iii) Si f es una función continua, $\int_0^{3x} f(t)\,dt$ *es una primitiva de* ....

iv) Si f es una función continua, el valor promedio de f *en* $[a,b]$ *coincide con* $f(c)$.........
....

3) <u>Plantee</u> las integrales que permiten calcular:

a) el área de la región del plano limitada por las gráficas de $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ y $g(x) = 2x - 1$.

b) el volumen del sólido de revolución que genera la región limitada por $y = \ln x$; $y = 0$ y $x = e$ al rotar alrededor del eje y.

4) Resuelva: i) $y' + \frac{y}{x} = e^x$ ii) $\begin{cases} (x^2+1)y' = 2xy \\ y(0) = 2 \end{cases}$

5) <u>Plantee</u> usando coordenadas polares el cálculo del valor promedio de $f(x,y) = x\,y$ sobre la región del plano limitada por $y = \sqrt{4-x^2}$ e $y = 1$.

6) i) Calcule $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{4-2y} \sqrt{y}\; dz\,dy\,dx$ ii) describa el sólido V sobre el que se calcula esa integral y haga un esquema gráfico del mismo iii) plantee el cálculo de la misma integral proyectando el sólido V en el plano yz.

MATEMÁTICA B – PRIMER PARCIAL 03/10/2015

1) Resuelva: **i)** $\int \boldsymbol{tg(2x)dx}$ **ii)** $\int \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1-x^2}}\, \boldsymbol{dx}$

Rta

i) Mediante la sustitución $u = \cos(2x)$ de modo que $du = -2\, sen(2x)dx$

$$\int tg(2x)dx = \int \frac{sen(2x)}{cos(2x)}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du = -\frac{1}{2}\, ln\,|u| + C = -\frac{1}{2}\, ln\,|cos(2x)| + C$$

ii) Mediante descomposición en fracciones simples:

$$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1-x^2}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{(1-x)(1+x)}} = \frac{\boldsymbol{A}}{\mathbf{1-x}} + \frac{\boldsymbol{B}}{\mathbf{1+x}} = \frac{\boldsymbol{A(1+x)+B(1-x)}}{\mathbf{1-x^2}} = \frac{\boldsymbol{(A-B)x+(A+B)}}{\mathbf{1-x^2}}$$ de modo que $\begin{cases} A-B=0 \\ A+B=2 \end{cases}$ Entonces: $A = 1 = B$

$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{1-x^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1-x}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+x}}$ Por lo tanto:

$$\int \frac{2}{1-x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\, dx = -\, ln\,|1-x| + ln\,|1+x| + C = ln\, \left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$$

2) Complete de manera que resulten verdaderos los siguientes enunciados:

i) $\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{ln}\,|\boldsymbol{b}| - \boldsymbol{ln}\,|\boldsymbol{a}|$ **si** $0 \notin [a\,, b]$

pues en tal caso $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en $[a\,, b]$ y siendo $F(x) = ln\,|x|$ una primitiva de $f(x)$ en $[a\,, b]$

puede aplicarse la regla de Barrow.

ii) Si $\boldsymbol{f}$ **y** $\boldsymbol{g}$ **son derivables,** $\int\, [\boldsymbol{f'(x)g(x)} + \boldsymbol{f(x)g'(x)}]\, \boldsymbol{dx} = \boldsymbol{f(x)g(x)} + \boldsymbol{C}$

pues de acuerdo con la regla de la derivada de un producto: $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

iii) **Si** $\boldsymbol{f}$ **es una función continua,** $\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{3x}} \boldsymbol{f(t)dt}$ **es una primitiva de** $h(x) = 3f(3x)$

pues $H(x) = \int_0^{3x} f(t)dt = F(3x)$ donde $F(u) = \int_0^{u} f(t)dt$

Por la regla de la cadena: $H'(x) = F'(3x).\,3$ siempre y cuando $F'(3x)$ exista.

Pero siendo f continua, el teorema fundamental del cálculo integral asegura que $F'(u) = f(u)$

Por ende: $F'(3x) = f(3x)$

Luego: $H'(x) = F'(3x).\,3 = 3f(3x)$

iv) **Si** $\boldsymbol{f}$ **es una función continua, el valor promedio de** $\boldsymbol{f}$ **en** $[\boldsymbol{a}\,, \boldsymbol{b}]$ **coincide con** $\boldsymbol{f(c)}$ para al menos

un punto $c \in (a\,, b)$. Es decir: existe $c \in (a\,, b)$ tal que $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} = f(c)$

3) Plantee las integrales que permiten calcular:

a) el área de la región del plano limitada por las gráficas de $\boldsymbol{f(x) = x^3 - x^2 - 1}$ y $\boldsymbol{g(x) = 2x - 1}$

Rta Ver el gráfico de la región en otro documento.

Primero analizamos las intersecciones entre ambas gráficas $\begin{cases} y = x^3 - x^2 - 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ de modo que $x^3 - x^2 - 1 = 2x - 1$

O sea: $x^3 - x^2 - 2x = 0$ Es decir: $x(x^2 - x - 2) = 0$ O sea: $x(x+1)(x-2) = 0$

Ambas gráficas se intersecan en puntos de abscisas: $x = -1$, $x = 0$, $x = 2$

Se generan sobre la recta real los intervalos: $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 2)$, $(2, \infty)$

El primero y el último son no acotados por lo que se descartan.

Observemos que $x(x+1)(x-2) = f(x) - g(x)$

Siendo esta diferencia una función continua, y dado que sólo se anula en los tres puntos indicados, tendrá signo constante en los intervalos abiertos que ellos delimitan. Para conocer el signo en cada uno de ellos bastará con hallar el signo de la diferencia en un punto cualquiera del correspondiente intervalo abierto.

$f(-0{,}5) - g(-0{,}5) > 0$ de manera que $f(x) > g(x)$ para toda $x \in (-1, 0)$

$f(1) - g(1) < 0$ de manera que $f(x) < g(x)$ para toda $x \in (0, 2)$

Es decir:

para $x \in (-1, 0)$ es $y_p = g(x)$ e $y_T = f(x)$

para $x \in (0, 2)$ es $y_p = f(x)$ e $y_T = g(x)$

Por lo tanto el área de la región acotada limitada por las gráficas dadas está dada por:

$$\begin{aligned} A(R) &= \int_{-1}^{0} [f(x) - g(x)]\, dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\, dx = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\, dx - \int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x) dx \\ &= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)\Big|_{0}^{2} = \left(0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1\right) - \left(4 - \frac{8}{3} - 4\right) = \frac{3}{4} + \frac{7}{3} \\ &= \frac{37}{12} \end{aligned}$$

b) el volumen del sólido de revolución que genera la región limitada por $\boldsymbol{y = \ln(x)}$, $\boldsymbol{y = 0}$, $\boldsymbol{x = e}$ al rotar alrededor del eje y.

Rta

$$Vol = \pi \int_0^1 [e^2 - (e^y)^2]\, dy = \pi \int_0^1 (e^2 - e^{2y})\, dy = \pi \left(e^2 y - \frac{1}{2}e^{2y}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi(1 + e^2)}{2}$$

4) Resuelva: **i)** $\boldsymbol{y' + \frac{y}{x} = e^x}$ **ii)** $\begin{cases} \boldsymbol{(x^2+1)y' = 2xy} \\ \boldsymbol{y(0) = 2} \end{cases}$

Rta

i) Se trata de una EDO lineal de primer orden. Proponemos una solución general de la forma y=u(x)v(x)

Derivando y reemplazando en la EDO se tiene: $u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = e^x$

Es decir: $u'v + u\left(v' + \frac{1}{x}v\right) = e^x$ (*)

Buscamos una solución particular no trivial $v = v(x)$ de la EDO $v' + \frac{1}{x}v = 0$

Una vez obtenida esta $v = v(x)$, se reemplaza en (*) quedando la EDO $u'v = e^x$

cuya solución general será u=u(x,C)

$v' + \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow ln\,|v| = -ln\,|x| + C_1 \Rightarrow v = \frac{C_2}{x}$

Consideramos la solución particular no trivial $v = \frac{1}{x}$

Entonces: $u'\frac{1}{x} = e^x \Rightarrow u' = xe^x \Rightarrow u = \int xe^x\,dx \Rightarrow u = xe^x - e^x + C$

Por lo tanto la solución general de la EDO lineal es: $y = (xe^x - e^x + C)\frac{1}{x}$

ii) Se trata de un PVI donde la EDO es de variables separables. Encontremos la solución general de la misma.

$(x^2+1)y' = 2xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2+1}\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \Rightarrow ln\,|y| = ln\,(x^2+1) + C_1$

Es decir: $y = C\,(x^2+1)$

Ahora reemplazamos el punto $(0\,,2)$ en la ecuación de esta familia de curvas integrales: $2 = C$

La solución del PVI dado (que puede probarse que es única) resulta entonces: $y = 2\,(x^2+1)$

5) Plantee usando coordenadas polares el cálculo del valor promedio de $\boldsymbol{f(x,y) = xy}$ sobre la región del plano limitada por $\boldsymbol{y = \sqrt{4 - x^2}}$ e $\boldsymbol{y = 1}$

Rta Ver el gráfico de la región del plano en otro documento.

La región R que menciona el enunciado es la porción del círculo de radio 2 centrado en el origen que se encuentra sobre o por encima de la recta horizontal $y = 1$.

El valor promedio de f sobre R es: $\bar{f}_R = \frac{\iint_R f(x,y)dA_{xy}}{Area\ (R)} = \frac{\iint_R f(x,y)\,dA_{xy}}{\iint_R 1\,dA_{xy}}$

Los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta que forman la frontera de R son:

$$\begin{cases} y = \sqrt{4-x^2} \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 3 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3}\ ,\ y = 1$$

Coordenadas polares consideradas: $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,sen\,\theta \end{cases}$

Estos puntos corresponden a los ángulos polares mínimo θ_1 y máximo θ_2 respectivamente. Se tiene:

$tg\,(\theta) = \frac{y}{x}$ de modo que $tg\,(\theta_1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $tg\,(\theta_2) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Y dado que θ_1 pertenece al primer cuadrante se tiene: $\theta_1 = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

Por simetría de R respecto del eje de ordenadas, se tiene: $\theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

En cuanto a la variación de r es claro que para un θ genérico en el intervalo $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ se tiene

$r_m(\theta) \le r(\theta) \le r_M(\theta)$ donde $r_m(\theta)$ se obtiene de la recta y $r_M(\theta)$ de la circunferencia.

Recta: $y = 1 \Rightarrow r\,sen\,\theta = 1 \Rightarrow r_m(\theta) = \frac{1}{sen\,\theta} = cosec\,\theta$

Circunferencia: $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2 \Rightarrow r_M(\theta) = 2$

Por lo tanto: $\bar{f}_R = \frac{\iint_R f(x,y)\, dA_{xy}}{\iint_R 1\, dA_{xy}} = \frac{\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{cosec(\theta)}^{2} r^3 \cos(\theta)\, sen\,(\theta)\, dr\, d\theta}{\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \int_{cosec(\theta)}^{2} r\, dr\, d\theta}$

6) i) Calcule $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{4-2y} \sqrt{y}\; dz\; dy\; dx$; ii) Describa el sólido V sobre el que se calcula esta integral y haga un esquema gráfico del mismo ; (iii) Plantee el cálculo de la misma integral proyectando el sólido V en el plano yz

Rta . Ver el gráfico del sólido en otro documento.

i) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{4-2y} \sqrt{y}\; dz\; dy\; dx = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{y}\, z \Big|_0^{4-2y} dy\; dx = \int_0^1 \int_0^2 \sqrt{y}\,(4-2y)\, dy\; dx =$

$= \int_0^1 \int_0^2 (4y^{1/2} - 2y^{3/2})\, dy\; dx = \int_0^1 \left(\frac{8}{3}\, y^{3/2} - \frac{4}{5}\, y^{5/2}\right)\Big|_0^2 dx =$

$= \int_0^1 \left(\frac{8}{3}\, 2^{3/2} - \frac{4}{5}\, 2^{5/2}\right) dx = \left(\frac{8}{3}\, 2^{3/2} - \frac{4}{5}\, 2^{5/2}\right) x \Big|_0^1 = \frac{16}{3}\sqrt{2} - \frac{16}{5}\sqrt{2} = \frac{32\sqrt{2}}{15}$

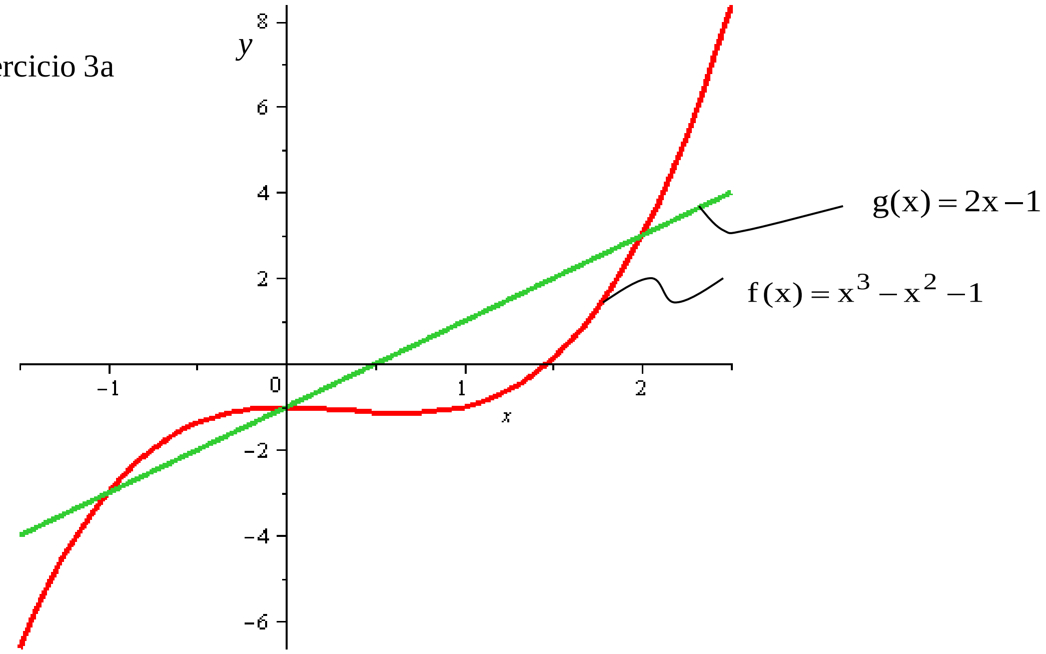
ii) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \le x \le 1\ ,\ 0 \le y \le 2\ , 0 \le z \le 4 - 2y\}$

El sólido tiene forma de "cuña", se proyecta sobre el rectángulo $[0\,,1] \times [0\,,2]$ del plano xy, siendo su piso y su techo los planos $z = 0$ y $2y + z = 4$

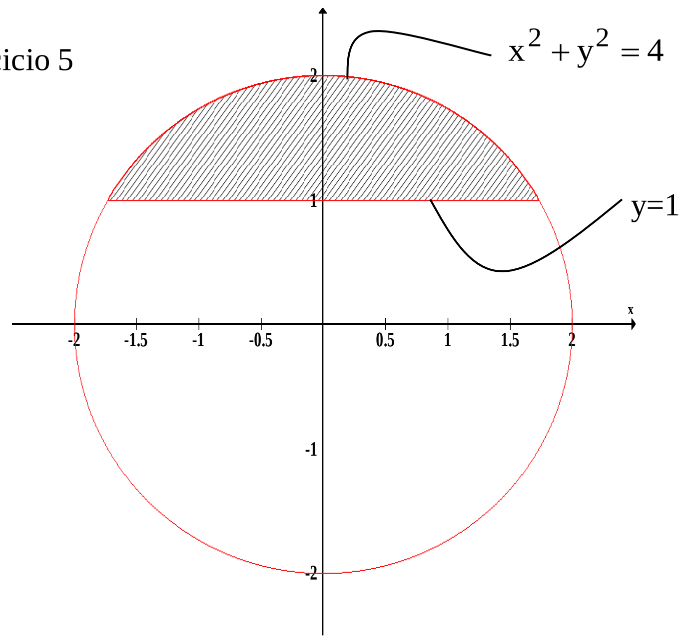
iii) $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^{4-2y} \sqrt{y}\; dz\; dy\; dx = \int_0^2 \int_0^{4-2y} \int_0^1 \sqrt{y}\; dx\; dz\; dy = \int_0^4 \int_0^{2-z/2} \int_0^1 \sqrt{y}\; dx\; dy\; dz$

Cualquiera de las dos últimas es una respuesta correcta.

Ejercicio 3a



Ejercicio 5



Ejercicio 6