

Teorema de Gauss

- Teorema de Gauss y Aplicaciones. Sección 7.6

Teorema de Gauss

Sea V un sólido del espacio limitado por una frontera S , donde S es orientable (o a trozos) y está orientada por un vector normal, n , exterior al sólido V^* .

Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que S y $V \subset D$.

Entonces:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$

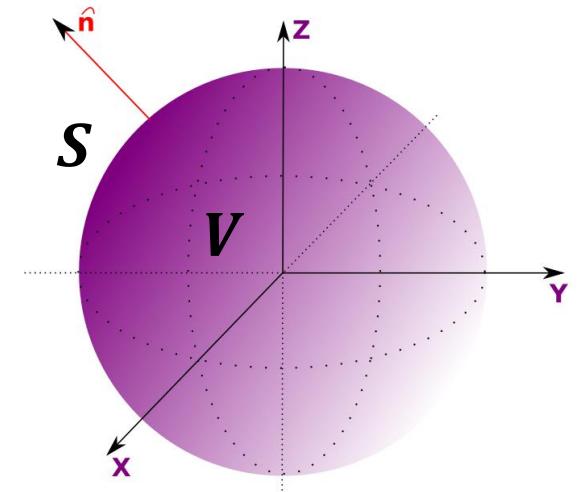
* Observar que n debe ser exterior al sólido V .

Esto ofrece diferentes posibilidades para n , dependiendo de cómo sea V :

- Forma de la tesis del Teorema de Gauss cuando V es un sólido sin agujeros:
Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV , \quad S \text{ es frontera exterior a } V.$$

Aquí n exterior al sólido V significa que n es exterior a la superficie S .



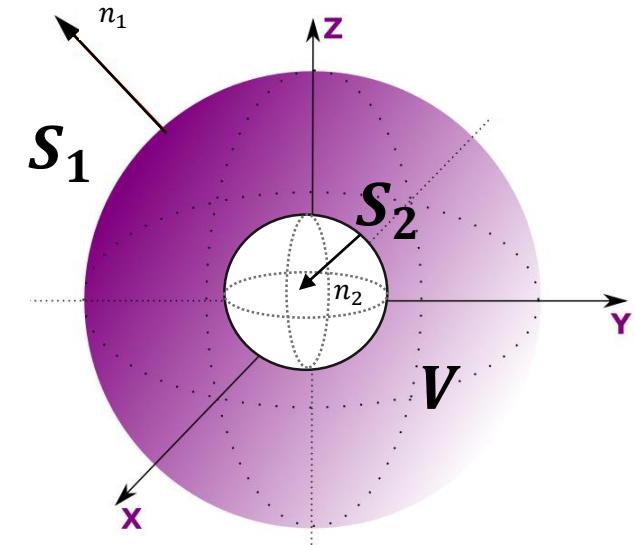
- Forma de la tesis del Teorema de Gauss cuando V es un sólido con un agujero:

Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV , \quad \left[\begin{array}{l} S: S_1 \cup S_2 . \\ (\text{S_1 es frontera exterior a V} \\ \text{y S_2 es frontera interior a V}). \\ n_1 \text{ normal exterior a } S_1 . \\ n_2 \text{ normal interior a } S_2 . \end{array} \right]$$

Como $S: S_1 \cup S_2 :$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot n_1 dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot n_2 dS$$



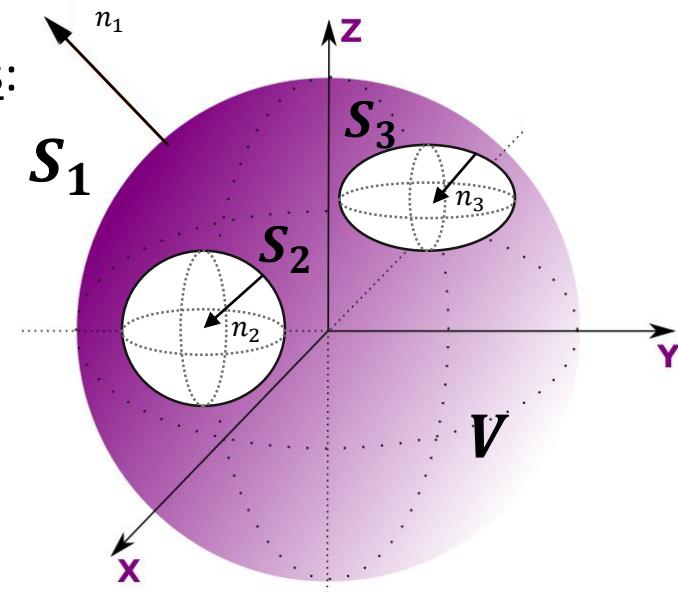
- Forma de la tesis del Teorema de Gauss cuando V es un sólido con dos agujeros:

Si se verifican las condiciones del teorema:

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F} dV , \quad \left[\begin{array}{l} S: S_1 \cup S_2 \cup S_3 . \\ (\text{S_1 es frontera exterior a V, S_2} \\ \text{y S_3 son fronteras interiores a V}). \\ n_1 \text{ normal exterior a } S_1 . \\ n_2 \text{ y } n_3 \text{ normales interiores a } S_2 \text{ y } S_3 . \end{array} \right]$$

Como $S: S_1 \cup S_2 \cup S_3 :$

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \iint_{S_1} \mathbf{F} \cdot n_1 dS + \iint_{S_2} \mathbf{F} \cdot n_2 dS + \iint_{S_3} \mathbf{F} \cdot n_3 dS$$



... se puede formular para sólidos más generales..

Aplicaciones del Teorema de Gauss:

1. Evaluación de una Integral de Flujo mediante el cálculo de una Integral Triple.
2. Evaluación de una Integral Triple mediante el cálculo de una Integral de Flujo .

1. Evaluación de una Integral de Flujo mediante el cálculo de una Integral Triple:

Ejemplo: Dado el campo $F(x, y, z) = \langle 3x + z, 2y + \operatorname{sen}(x), 6z + e^{xy} \rangle$, evalúe el Flujo de F hacia el exterior de la esfera S de ecuación: $x^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 1$.

Daremos el valor del Flujo $\iint_S F \cdot n \, dS$ haciendo uso del Teorema de Gauss.

i) Enunciamos el Teorema a usar:

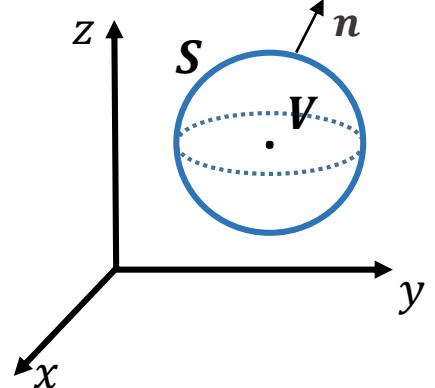
Teorema de Gauss

Sea V un sólido del espacio limitado por una frontera S , donde S es orientable (o a trozos) y está orientada por un vector normal, n , exterior al sólido V .

Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que S y $V \subset D$.

Entonces:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$



Hipótesis

Tesis

ii) Identificamos los “elementos” usados en el Teorema:

- $S: x^2 + (y - 4)^2 + (z - 3)^2 = 1$.
Sea S orientada con normal n , que apunta hacia el exterior de S .
- Sea V : sólido esférico encerrado por S .
- $F(x, y, z) = \langle 3x + z, 2y + \operatorname{sen}(x), 6z + e^{xy} \rangle$.
- Sea $D = \mathbb{R}^3$.

iii) Verificamos las hipótesis sobre los elementos de ii):

- V es un sólido del espacio limitado por S (por construcción de V).
- S es orientable (porque es una esfera). S está orientada por un normal n exterior a V (porque S es frontera exterior a V y n apunta hacia el exterior de S).
- F tiene componentes con derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^3$ (porque son funciones polinómicas, composición de polinomio con exponencial, y trigonométrica elemental).
- S y $V \subset D$ (porque $D = \mathbb{R}^3$).

∴ El Teorema de Gauss es aplicable.

iv) Aplicamos la Tesis y calculamos:

Por el Teorema de Gauss:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$

← Calculamos la Integral Triple.

Siendo $F(x, y, z) = \langle 3x + z, 2y + \operatorname{sen}(x), 6z + e^{xy} \rangle$,

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial (3x+z)}{\partial x} + \frac{\partial (2y+\operatorname{sen}(x))}{\partial y} + \frac{\partial (6z+e^{xy})}{\partial z} = 3 + 2 + 6 = 11$$

Luego:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \iiint_V 11 \, dV = 11 \iiint_V 1 \, dV = 11 \operatorname{Vol}(V) = 11 \frac{4}{3} \pi 1^3 = \frac{44}{3} \pi$$

$$\therefore \boxed{\iint_S F \cdot n \, dS = \frac{44}{3} \pi}$$

Nota 1: Es importante seguir los pasos i), ii), iii) y iv) en *cada ejercicio* para hacerlos de manera completa y ordenada.

Nota 2: Si la Integral Triple no pudiera ser calculada *por fórmula*, deberá resolverse aplicando las técnicas de cálculo desarrolladas en el 2º Módulo.

Nota 3: Si alguna hipótesis no se verifica, el Teorema no será aplicable (deberemos calcular la Integral de Flujo).

2. Evaluación de una Integral Triple mediante el cálculo de una Integral de Flujo:

→ Aplicación geométrica del Teorema de Gauss: Determinación del volúmen de un sólido mediante el cálculo de una Integral de Flujo.

Supongamos que tenemos un campo vectorial $F = \langle P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \rangle$ y un sólido V cuya frontera es S , tales que se *verifican las condiciones* pedidas en el Teorema de Gauss.

Supongamos, además, que F es tal que: $\operatorname{div}F = 1$.

Entonces:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div}F \, dV = \iiint_V 1 \, dV = \operatorname{Vol}(V)$$

O sea:

$$\operatorname{Vol}(V) = \iint_S F \cdot n \, dS , \text{ para } F, S, \text{ y } V \text{ que verifican las hipótesis del Teorema de Gauss}$$

y tal que $\operatorname{div}F = 1$.

...qué campo F debo tomar???. Cualquiera que, verificando las hipótesis del Teorema, cumpla que $\operatorname{div}F = 1$.

Por ejemplo:

$$F = \langle x, 0, 0 \rangle, \quad F = \langle 0, y, 0 \rangle, \quad F = \langle 0, 0, z \rangle, \quad F = \left\langle e^{yz} \operatorname{sen}(y^3), x + y, \frac{\cos(xy)}{x^2 + 1} \right\rangle, \dots$$

El más usado: $F = \left\langle \frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{z}{3} \right\rangle$.

Ejemplo: Calcule el volumen del sólido encerrado por las superficies gráficas de $z = 1 - (x^2 + y^2)$ y $z = 0$, usando una Integral de Flujo.

i) Enunciamos el Teorema a usar:

Teorema de Gauss

Sea V un sólido del espacio limitado por una frontera S , donde S es orientable (o a trozos) y está orientada por un vector normal, n , exterior al sólido V .

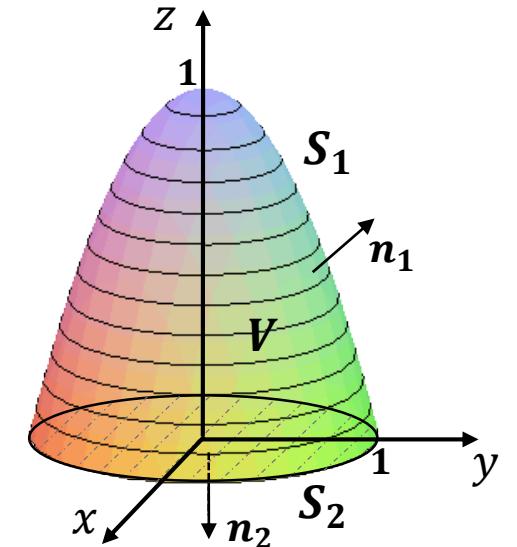
Sea F un campo vectorial con componentes con derivadas parciales continuas en un abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, tal que S y $V \subset D$.

Entonces:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$$

ii) Identificamos los elementos usados en el Teorema:

- Sea V : sólido encerrado por $S = S_1 \cup S_2$.
- S_1 : porción de $z = 1 - (x^2 + y^2)$ con $0 \leq z \leq 1$. Sea S_1 orientada por normal n_1 con 3º componente positiva;
- S_2 : porción de $z = 0$ encerrada por S_1 . Sea S_2 orientada por normal n_2 con 3º componente negativa.
- Sea $F(x, y, z) = \langle x, 0, 0 \rangle$.
- Sea $D = \mathbb{R}^3$.



iii) Verificamos las hipótesis sobre los elementos de ii):

- V es un sólido del espacio limitado por S (por construcción de V).
- S es orientable a trozos (porque está formada como unión de dos superficies orientables: paraboloide y plano).
- S está orientada con normal exterior a V (porque $S = S_1 \cup S_2$, es frontera exterior a V . Ver gráfico).
- F tiene componentes con derivadas parciales continuas en $D = \mathbb{R}^3$ (porque son funciones polinómicas).
- S y $V \subset D$ (porque $D = \mathbb{R}^3$).

∴ El Teorema de Gauss es aplicable.

iv) Aplicamos la Tesis, **mostramos que el resultado será un volumen**, y calculamos:

Por el Teorema de Gauss: $\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV$

Siendo $F(x, y, z) = \langle x, 0, 0 \rangle$, $\operatorname{div} F = 1$. Luego: $\iint_S F \cdot n \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dV = \iiint_V 1 \, dV = \operatorname{Vol}(V)$

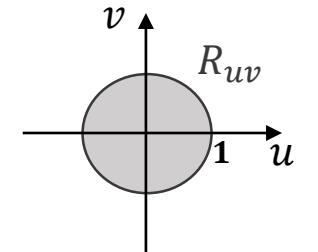
Calcularemos entonces la integral de Flujo de F .

Como $S = S_1 \cup S_2$: $\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS$, donde cada Integral de Flujo se calculará como:

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{R_{uv}} F(r(u, v)) \cdot N(u, v) \, dA$$

- Para S_1 : $z = 1 - (x^2 + y^2)$, con $0 \leq z \leq 1$:

$$S_1: r(u, v) = \langle u, v, 1 - (u^2 + v^2) \rangle, \quad (u, v) \in R_{uv}: \{(u, v); 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\}$$



$$N(u, v) = r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = \langle 2u, 2v, 1 \rangle \quad \leftarrow \text{Ok (3º componente positiva).}$$

$$F(r(u, v)) \cdot N(u, v) = \langle u, 0, 0 \rangle \cdot \langle 2u, 2v, 1 \rangle = 2u^2$$

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS &= \iint_{R_{uv}} F(r(u, v)) \cdot N(u, v) \, dA = \iint_{R_{uv}} 2u^2 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2(r \cos \theta)^2 r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \cos^2(\theta) \frac{r^4}{4} \Big|_0^1 \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{4} \cos^2(\theta) \, d\theta = \dots = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \boxed{\iint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS = \frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

- Para S_2 : $z = 0$, con $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$:

$$S_2: r(u, v) = \langle u, v, 0 \rangle, \quad (u, v) \in R_{uv}: \{(u, v); 0 \leq u^2 + v^2 \leq 1\}$$

$$N(u, v) = r_u(u, v) \times r_v(u, v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \langle 0, 0, 1 \rangle \quad \leftarrow \text{(3º componente positiva, \underline{contrario} a lo que se pide :).}$$

Defino $N = -\langle 0, 0, 1 \rangle = \langle 0, 0, -1 \rangle$.

$$F(r(u, v)) \cdot N(u, v) = \langle u, 0, 0 \rangle \cdot \langle 0, 0, -1 \rangle = 0$$

$$\iint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS = \iint_{R_{uv}} F(r(u, v)) \cdot N(u, v) \, dA = \iint_{R_{uv}} 0 \, dA = 0 \quad \therefore \quad \boxed{\iint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS = 0}$$

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_{S_1} F \cdot n_1 \, dS + \iint_{S_2} F \cdot n_2 \, dS = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

Finalmente obtenemos el valor del volumen:

$$Vol(V) = \iint_S F \cdot n \, dS = \frac{\pi}{2}$$

En el Módulo:

El Teorema de Gauss está desarrollado en la sección **7.6**.

Las Aplicaciones del Teorema de Gauss se desarrollan en la sección **7.6.1**:

1) La evaluación de una Integral de Flujo mediante el cálculo de la Integral Triple (pág 271, con 1 ejemplo).
Esta es la aplicación más usada.

2) La evaluación de una Integral Triple mediante el cálculo de una Integral de Flujo. Esta no es la aplicación más usada, excepto por un caso: La determinación del Volúmen de un Sólido mediante el cálculo de una Integral de Flujo. La fórmula para calcular el volúmen se deduce al pie de la pág 272.

El tema: “*Interpretación de la Divergencia*” (págs 272 y 273) no será considerado.

La sección **7.6.2** es de Ejercicios:

-) Los ejercicios 1 al 7 corresponden a la aplicación **1**).
-) Los ejercicios 8 y 9 corresponden a la aplicación **2**).

Adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1a) y 3) de la sección **7.6.2**.

Fin del Módulo II .

.) Los ejercicios 8 y 9 corresponden a la aplicación **2**).

Adjuntamos 2 ejercicios resueltos: 1a) y 3) de la sección **7.7.1**.

Fin del Módulo II .