Horarios y enlaces de las clases

Martes y jueves de 8 a 12 hs.

Unirse a la reunión Zoom
https://zoom.us/j/96627475008
ID de reunión: 966 2747 5008

Se abrirán salas simultáneas para la práctica y consultas que se publicarán en Classroom, previamente al inicio.

Los pdf de las clases las vamos a subir a Classroom con un día de anticipación.

Repaso de temas que se deberían haber estudiado previamente a cursar Física I

a) Funciones trigonométricas

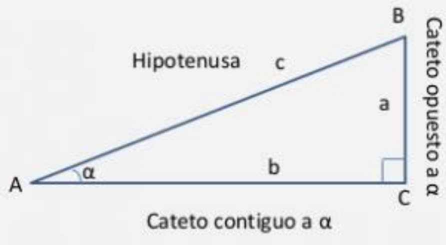
Razones trigonométricas en un triángulo rectángulo

Dado un triángulo rectángulo, se definen sus razones trigonométricas respecto de uno de sus ángulos α como:

$$sen\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{a}{c}$$

$$cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa} = \frac{b}{c}$$

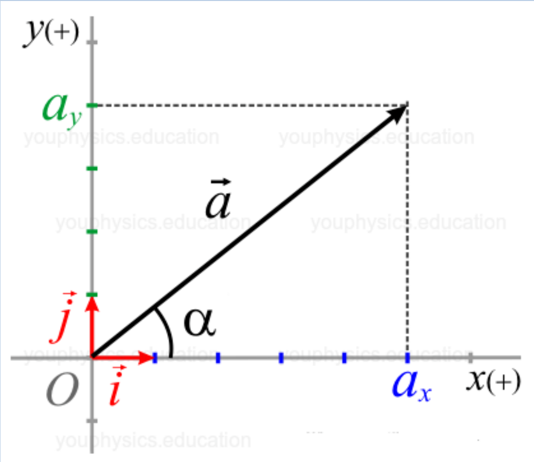
$$tg\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{a}{b}$$



Pitágoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

b) Magnitudes vectoriales



Características de un vector $\vec{a}$

Módulo: Longitud del vector $|\vec{a}|$
Dirección: Dada por la recta de acción
Sentido: Dado por la flecha
Punto de aplicación: Origen del vector

Notación: $\vec{a} = a_x\breve{\imath} + a_y\breve{\jmath}$

a_x , a_y Son las componentes del vector $\vec{a}$

a_x Puede ser : a) mayor que cero, b) menor que cero c) igual a cero

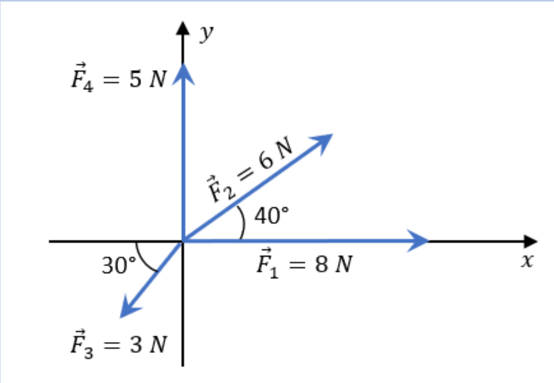
a_y Puede ser : a) mayor que cero, b) menor que cero c) igual a cero

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cos\alpha\, \breve{\imath} + |\vec{a}| \sin\alpha\, \breve{\jmath}$$

Es usual emplear $a = |\vec{a}|$

$$\vec{a} = a\cos\alpha\, \breve{\imath} + a\sin\alpha\, \breve{\jmath}$$

Halle el vector Resultante, suma da cada uno de los vectores. Obtenga: el módulo, dirección y sentido



$$\sum F_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + F_{4x} = F_{Rx}$$

$$\sum F_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + F_{4y} = F_{Ry}$$

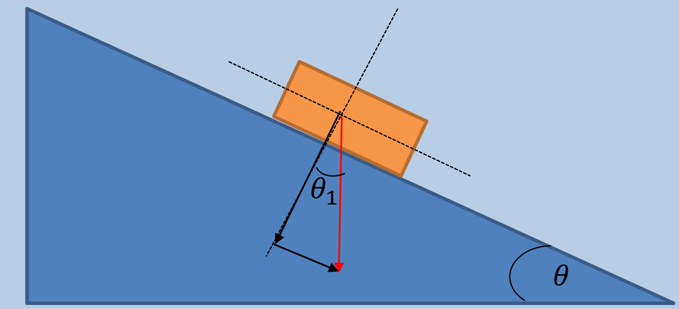
$$F_R = \sqrt{{F_{Ry}}^2 + {F_{Rx}}^2} \qquad \alpha = \tan^{-1}\frac{F_{Ry}}{F_{Rx}}$$

Respuesta: módulo 12,4 N
α= 36°

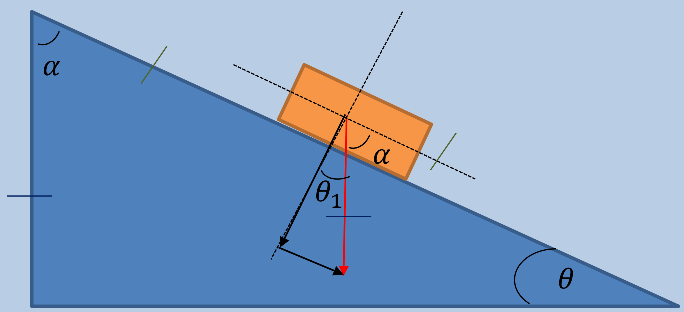
$$\overrightarrow{F_R} = F_{Rx}\breve{\imath} + F_{Ry}\breve{\jmath}$$

Cuando se tratan las componentes,
NO se debe agregar la flecha en
la parte superior de la magnitud.
Son componentes!!!!!!

A lo largo del curso estudiaremos muchas situaciones que involucran planos inclinados



$¿\theta_1 = \theta?$



$$\alpha + \theta + \frac{\pi}{2} = \pi \qquad \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\alpha + \theta_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

$$\theta_1 = \theta$$

c) Análisis dimensional : una herramienta que ayuda a analizar el resultado obtenido en una expresión

Ejemplo: Se obtuvo la siguiente relación de la rapidez con que un cuerpo se mueve verticalmente

$$v = \sqrt[2]{2gh - r^2}$$

g=9,8 m/s^2 , h=2 m, r=0,5m

¿Puede ser correcto el resultado obtenido?

•Objetivo de la clase:

•*Introducir conceptos básicos que permitirán el desarrollo de las sucesivas clases: modelos físicos, marcos de referencia, sistemas de coordenadas.*

•*Definir :el modelo de partícula*
magnitudes cinemáticas.

❖ ¿Qué vamos a estudiar en este curso?

Estudiaremos Mecánica Clásica.

Mecánica: es la rama de la física y de la ingeniería que se ocupa del movimiento de los cuerpos y de las fuerzas que provocan dicho movimiento.

Clásica: este término da el rango de validez en el que nos vamos a mover. Las dimensiones que estudiaremos serán mucho mayores a las atómicas y la velocidades que analizaremos serán muy lejanas a la velocidad de la luz.

❖ ¿En qué marco teórico?

En el marco de las Leyes de Newton. Esta es una teoría del siglo XVII que es válida en nuestros días, siempre que se manejen dimensiones y velocidades en el rango clásico.

❖ Algunas definiciones que incluyen la palabra sistema.

Sistema de coordenadas: herramienta matemática que permite ubicar a los cuerpos en el espacio y en el tiempo. Ejemplo: Sistema de coordenadas cartesianas

Sistema de unidades: conjunto de unidades, se empleará el sistema internacional, SI.

Unidades Básicas o Fundamentales			
	Unidad	Símbolo	Magnitud
1	metro	m	longitud
2	kilogramo	kg	masa
3	segundo	s	tiempo
4	kelvin	K	temperatura
5	amperio	A	intensidad de corriente eléctrica
6	candela	cd	intensidad luminosa
7	mol	mol	cantidad de sustancia

Sistema de referencia: Lugar donde "nos ubicamos mentalmente" para describir el movimiento. Ejemplo: Un persona camina con un libro en la mano. Si el sistema de referencia está ubicado en la persona, el libro está quieto. Si el sistema de referencia está en una persona que está sentada observando, el libro se mueve.

Sistema físico bajo estudio: Esla la parte de la situación que se aisla para estudiar.
Ejemplo: en la situación anterior si se quiere estudiar el movimiento del libro, éste es el sistema físico.

- ¿Cuál es la estrategia que vamos a emplear para estudiar los distintos movimientos?
  El empleo de modelos

- ¿Qué es un modelo?

- Un modelo es una representación simplificada de la situación real que permite resolver el problema tratado de forma relativamente sencilla.

Cuando las predicciones del modelo utilizado se ajustan de manera satisfactoria al comportamiento real, el modelo será válido

- ¿Por qué usaremos modelos?

Porque su empleo permite reducir una amplia variedad de problemas muy complejos a un número limitado de tipos de problemas que pueden resolverse de manera similar.

- ¿Cómo elijo el modelo adecuado?

Un dado objeto real puede modelarse de diferentes maneras de acuerdo a lo que se quiera estudiar.
Ejemplo

a) Se quiere estudiar el movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

En este caso es adecuado modelar a la Tierra como partícula. Significa que se puede considerar a la Tierra como un punto material de cierta masa m. Características del modelo de partícula: Las dimensiones del objeto no interviene en el análisis del movimiento. Es adecuado cuando se estudian movimientos de traslación.

b) Se quiere explicar la existencia del día y de la noche.

El modelo de partícula en este caso no es válido. Deberíamos pensar en una esfera que rota en torno a su eje.

c) Se quiere explicar que la intensidad del campo gravitatorio es algo mayor en los polos que en el Ecuador.

El modelo de esfera ahora no es válido. Se debe asignar a la Tierra un cierto achatamiento en los polos.

d) Se estudia el movimiento de una pelota de tenis lanzada por un jugador.

El modelo adecuado en este caso para la Tierra es un plano, ya que no se tiene en cuenta su rotación.

Conclusión: Es evidente que la Tierra no es un punto, ni una esfera, ni un plano. Estos son modelos que adoptamos para simplificar el estudio de un determinado problema.

Para estudiar los movimientos de los cuerpos necesitamos definir las variables cinemáticas

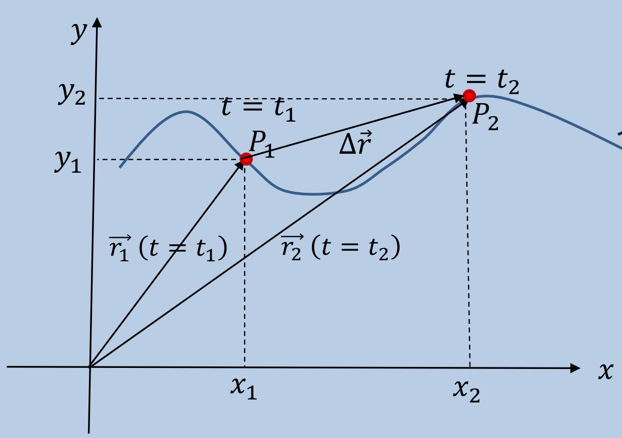
Variables cinemáticas

Se elije un sistema físico que se modela como partícula → Realiza un movimiento de traslación

→ Se representa por un punto material de masa "m"

→ Cantidad de materia

Se elije un sistema de coordenadas cartesianas para ubicar al sistema físico en el espacio y en el tiempo



→ Trayectoria = camino recorrido

$\vec{r_1}$ es el vector posición para $t = t_1$

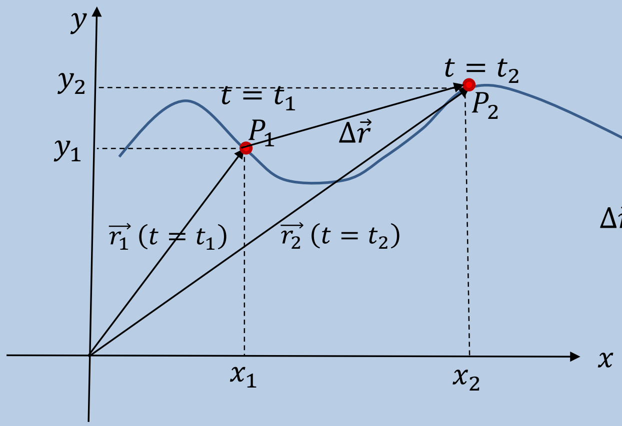
$\vec{r_2}$ es el vector posición para $t = t_2$

} Dependen del sistema de coordenadas

$\vec{r_1} = x_1\check{\imath} + y_1\check{\jmath}$

$\vec{r_2} = x_2\check{\imath} + y_2\check{\jmath}$

Para cualquier tiempo t $\quad \vec{r}(t) = x(t)\check{\imath} + y(t)\check{\jmath}$



Se define el vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2\check{\imath} + y_2\check{\jmath}) - (x_1\check{\imath} + y_1\check{\jmath}) = (x_2 - x_1)\check{\imath} + (y_2 - y_1)\check{\jmath}$$

El desplazamiento no depende del origen de coordenadas

Se define la velocidad media (≠ de la velocidad promedio), magnitud vectorial

$$\overrightarrow{v_{med}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1} = \frac{(x_2 - x_1)\check{\imath}}{t_2 - t_1} + \frac{(y_2 - y_1)\check{\jmath}}{t_2 - t_1} = v_{medx}\check{\imath} + v_{medy}\check{\jmath}$$

Esta velocidad no tiene en cuenta los intervalos dentro de los cuales no hubo movimiento.

Entonces se toman intervalos de tiempo menores y haciendo el límite tendiendo a cero, se obtiene la velocidad instantánea definida como:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = v_x\check{\imath} + v_y\check{\jmath}$$

De manera similar, si la velocidad varía a lo largo del tiempo, se define una aceleración media

$$\overrightarrow{a_{med}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{(v_{2x} - v_{1x})\check{\imath}}{t_2 - t_1} + \frac{\left(v_{2y} - v_{1y}\right)\check{\jmath}}{t_2 - t_1} = a_{medx}\check{\imath} + a_{medy}\check{\jmath}$$

Por último, se define la aceleración instantánea como:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}^2}{dt^2} = a_x\check{\imath} + a_y\check{\jmath}$$

Magnitud	Unidades (SI)
$\vec{r}(t)$	m
$\vec{v}(t)$	m/s
$\vec{a}(t)$	m/s^2

Interpretación Física

- La velocidad es la derivada de la posición respecto del tiempo.

La derivada indica que hay un cambio, en este caso, del vector posición a lo largo del tiempo.

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

- La aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Si la derivada de la velocidad con respecto al tiempo es distinta de cero, indica que hay un cambio del vector velocidad respecto del tiempo.
Como la velocidad es una magnitud vectorial, si cambia alguna de sus características cambia el vector y hay aceleración.

Pregunta:

Un auto toma una curva con una rapidez constante de 80 km/h.
¿El auto está acelerado mientras toma la curva?
¿Si? ¿No? ¿Por qué?

Repaso Clase 1

- Estudiaremos Mecánica Clásica.
- En el marco de las Leyes de Newton

- Sistema de coordenadas
- Sistema de unidades
- Sistema de referencia
- Sistema físico bajo estudio

- La estrategia que vamos a implementar, uso de modelos
- Variables cinemáticas

$$\vec{r}(t) = x(t)\breve{\imath} + y(t)\breve{\jmath} \qquad \Delta\vec{r} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

Clase 2 a)

Leyes de Newton

Objetivos de la clase:

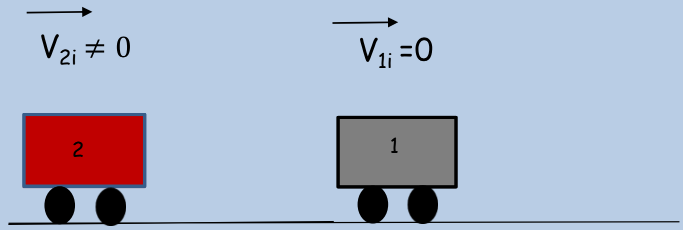
- Introducir las Leyes de Newton
- *Aislar un sistema físico*
- *Identificar el sistema físico en estudio y distinguirlo de su entorno*
- *Aplicar las leyes de Newton a distintas situaciones*

Para introducir las Leyes de Newton, para un sistema físico modelado como partícula, se define una magnitud denominada: cantidad de movimiento, es una magnitud vectorial y se denota con la letra P.

$$\vec{P} = m\vec{v} \quad \begin{cases} p_x = mv_x \\ p_y = mv_y \end{cases}$$

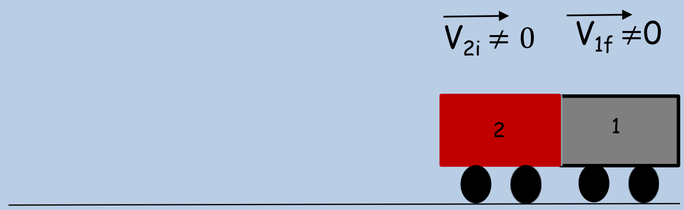
Depende de la masa del cuerpo y de su velocidad

Antes del encuentro t_i

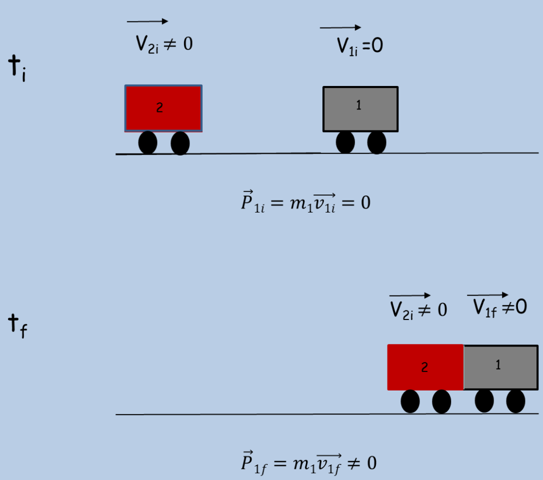


$$\vec{P}_{1i} = m_1\overrightarrow{v_{1i}} = 0$$

Después del encuentro t_f



$$\vec{P}_{1f} = m_1\overrightarrow{v_{1f}} \neq 0$$



Elegimos como sistema bajo estudio el carrito gris (1).

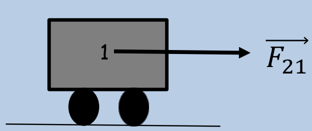
Inicialmente t_i la cantidad de movimiento de (1) vale cero porque está en reposo. $\vec{P}_{1i} = m_1\overrightarrow{v_{1i}} = 0$

En el tiempo final, t_f , inmediatamente luego que lo choca el carro rojo, el carrito gris (1) adquiere una cantidad de movimiento distinta de cero. $\vec{P}_{1f} = m_1\overrightarrow{v_{1f}} \neq 0$

Por lo tanto hubo un cambio de la cantidad de movimiento del carro gris (1)

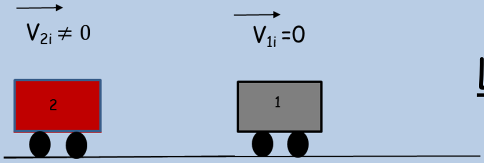
¿Cuál es la causa que produce el cambio de la cantidad del carro gris (1)?

La causa del cambio de la cantidad de movimiento del (1), se debe al carro rojo (2). Este carro ejerció una fuerza sobre el gris hacia la derecha.



Fuerza que hace el carro rojo sobre el gris

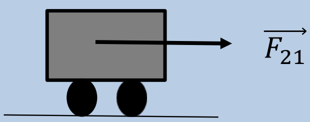
t_i



$\vec{P}_{1i} = m_1\overrightarrow{v_{1i}} = 0$

t_f

$\vec{P}_{1f} = m_1\overrightarrow{v_{1f}} \neq 0$



Fuerza que hace el carro rojo sobre el gris

<u>La Segunda Ley de Newton</u> $\rightarrow$ $$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Agentes $$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$ Sistema físico bajo estudio

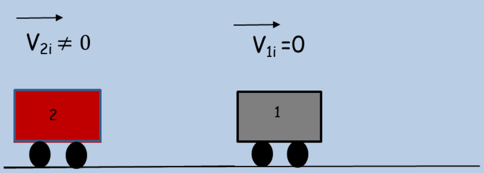
Vamos a representar mediante fuerzas las interacciones con los cuerpos

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = si\ la\ masa\ es\ constante = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Se denomina fuerza resultante $\overrightarrow{F_R}$ a $$\overrightarrow{F_R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = m\,\vec{a}$$

La dirección y sentido de la aceleración es la misma que la fuerza resultante. Igualdad de carácter vectorial

t_i



$\vec{P}_{1i} = m_1\overrightarrow{v_{1i}} = 0$

t_f

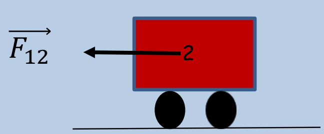
$\vec{P}_{1f} = m_1\overrightarrow{v_{1f}} \neq 0$

Si ahora nuestro sistema físico es el carro rojo (2)

Se puede concluir que éste cambia su cantidad de movimiento antes y después de chocar con el gris (1).

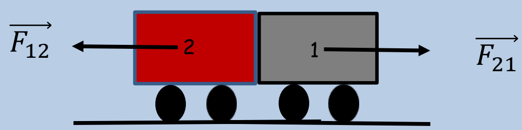
La causa de este cambio en la cantidad de movimiento del carro rojo se debe a que el cuerpo gris le ejerció una fuerza sobre el rojo hacia la izquierda.

Esta descripción está contenida en la tercera ley de Newton



Fuerza que hace el carro gris sobre el rojo

Tercera Ley de Newton, también denominada Ley de Acción-Reacción



Si el cuerpo 2 (agente) ejerce una fuerza sobre el cuerpo 1 (sistema físico) $\overrightarrow{F_{21}}$ denominada acción, el cuerpo 1 ejerce sobre el cuerpo 2 una fuerza de manera simultánea , $\overrightarrow{F_{12}}$ llamada reacción, tal que

$$\overrightarrow{F_{21}} = -\overrightarrow{F_{12}}$$

Los pares Acción-Reacción, tienen el mismo módulo, la misma dirección y sentido opuesto. Están aplicadas en cuerpos diferentes

Primera Ley de Newton

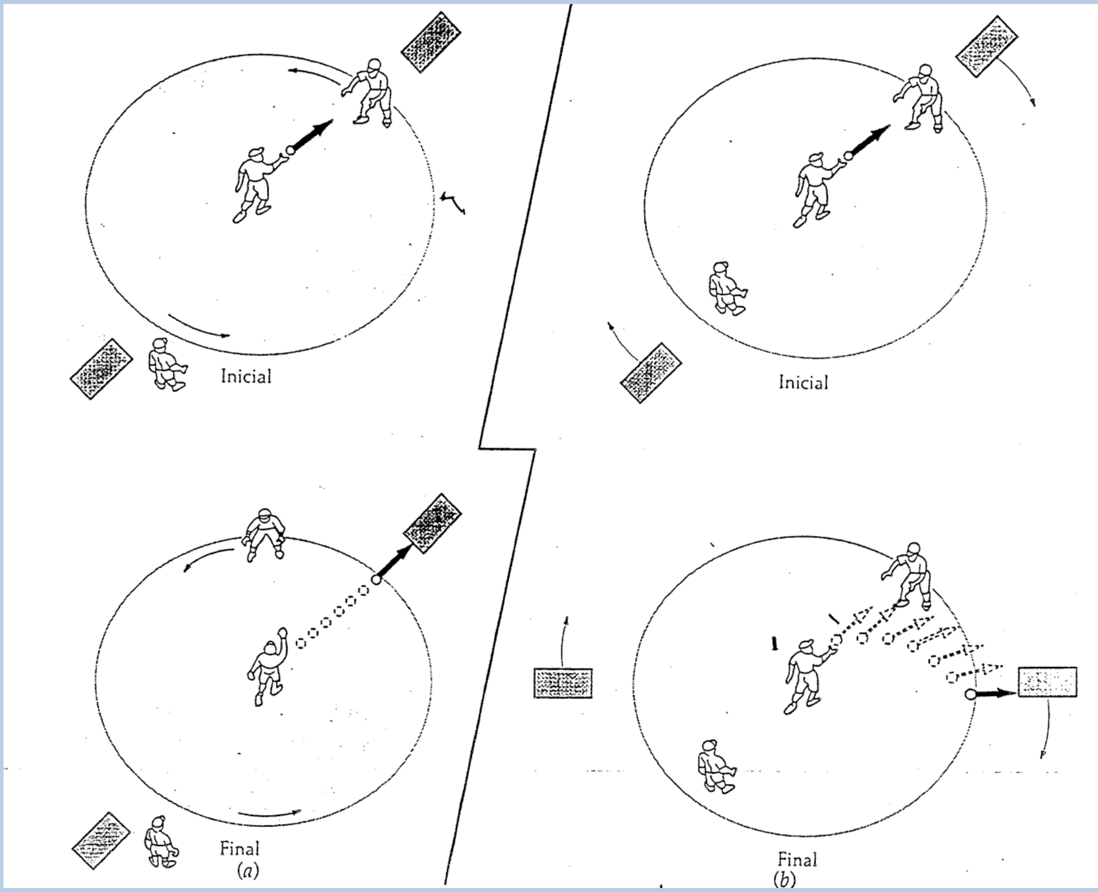
La primera Ley de Newton da el marco de validez de las leyes. Define el sistema de referencia inercial SRI, donde las leyes van a ser válidas.

Si sobre un cuerpo $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = 0$ y se lo observa en reposo $\vec{P} = m\vec{v} = 0$ o con $\vec{P} = m\vec{v} = cte$, entonces el observador está ubicado en un sistema de referencia inercial.

Todos los observadores que están fijos a Tierra se los pueden considerar observadores inerciales.

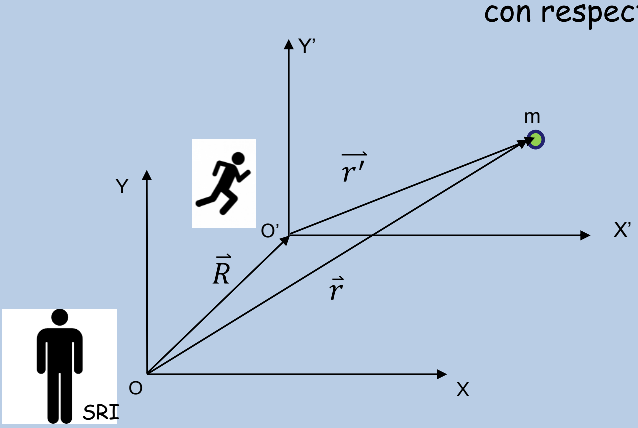
Sistemas que están acelerados no son sistemas de referencia inerciales

Ejemplo:



Transformadas de Galileo

Nos permiten relacionar las descripciones del movimiento de una partícula, que realizan dos observadores inerciales que se mueven uno con respecto de otro con velocidad constante $\vec{V}$



A partir del gráfico, la posición de la partícula de masa m respecto de O esta dada por

$$\vec{r} = \overrightarrow{r'} + \vec{R}$$

Si derivamos a ambos lados respecto del tiempo

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}$$

Los tiempos medidos por ambos son iguales, en mecánica clásica t=t'

$$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{V}$$

Siendo $\overrightarrow{v'}$ la velocidad de la partícula respecto de O'

O, sistema Inercial de referencia fijo a Tierra, velocidad nula

O', sistema Inercial de referencia que se mueve con velocidad constante $\vec{V}$ respecto del fijo

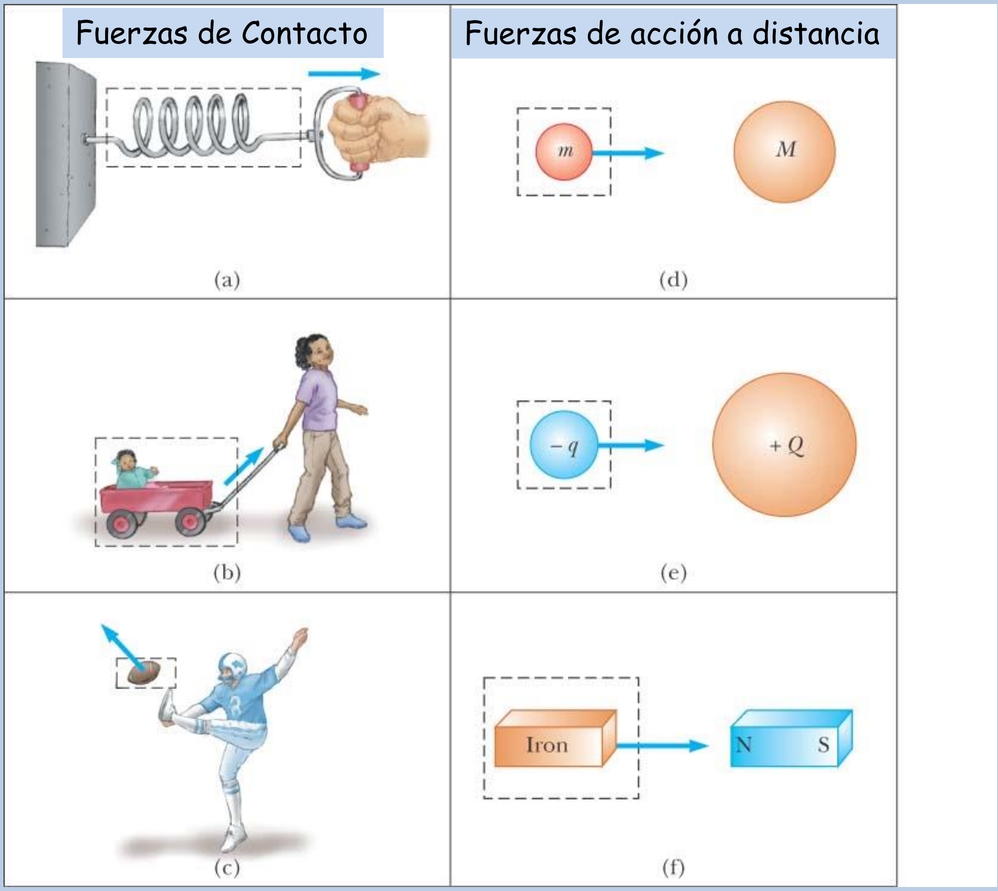
$$\vec{v} = \overrightarrow{v'} + \vec{V}$$

Si derivamos nuevamente a ambos lados con respecto al tiempo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{v'}}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{a'}$$

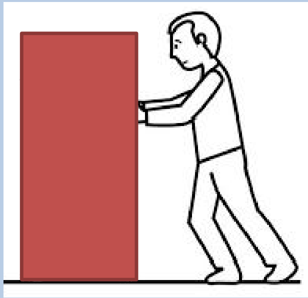
<u>Conclusión</u>: los observadores ubicados en SRI que se mueven uno con respecto a otro con velocidad constante, miden la misma aceleración del cuerpo de masa m. Como la aceleración está directamente vinculada a las fuerzas, todos los observadores son equivalentes.



Ejercicio N°3

Juan intenta mover un ropero empujándolo. La fuerza que hace sobre el ropero, ¿es igual, mayor o menor a la que el ropero hace sobre él? Contestar para las siguientes situaciones:

a) Si no logra moverlo.
b) Si logra mover el ropero y éste se desplaza a velocidad constante.
c) Si logra mover el ropero con aceleración constante.



Un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba. Realice el diagrama de fuerzas cuando: a) sube. b) llega al punto más alto. c) baja. Determine la aceleración en cada caso

Repaso Clase 1

- Leyes de Newton (sistema modelado como partícula)

Primera Ley de Newton

La primera Ley de Newton da el marco de validez de las leyes. Define el sistema de referencia inercial SRI, donde las leyes van a ser válidas.

Si sobre un cuerpo $\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = 0$ y se lo observa en reposo $\vec{P} = m\vec{v} = 0$ o con $\vec{P} = m\vec{v} = cte$, entonces el observador está ubicado en un sistema de referencia inercial.

Todos los observadores que están fijos a Tierra se los pueden considerar observadores inerciales.

Sistemas que están acelerados NO son sistemas de referencia inerciales

La Segunda Ley de Newton

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad \vec{P} = m\vec{v}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = si\ la\ masa\ es\ constante = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

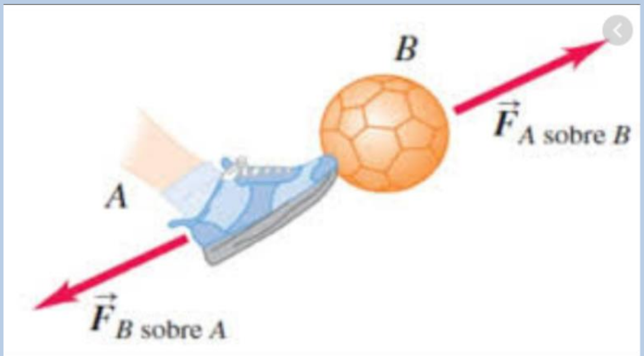
$$\overrightarrow{F_R} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = m\,\vec{a}$$

Tercera Ley de Newton, también denominada Ley de Acción-Reacción

Si el cuerpo A (agente) ejerce una fuerza sobre el cuerpo B (sistema físico) denominada acción, $\overrightarrow{F_{AB}}$, el cuerpo B ejerce sobre el cuerpo A una fuerza de manera simultánea, llamada reacción, $\overrightarrow{F_{BA}}$, tal que

$$\overrightarrow{F_{AB}} = -\overrightarrow{F_{BA}}$$

Las fuerzas de Acción-Reacción tienen DIFERENTES puntos de aplicación



- Transformadas de Galileo

Nos permiten relacionar las descripciones del movimiento de una partícula, que realizan dos observadores inerciales que se mueven uno con respecto de otro con velocidad constante $\vec{V}$.

Conclusión: Todos los observadores ubicados en SRI que se mueven uno con respecto a otro con velocidad constante, son equivalentes.
Miden la misma aceleración.
No hay sistemas de referencia inerciales absolutos.

Clase 2 b)

Leyes de Newton

Objetivos de la clase:

- Aplicar las Leyes de Newton a diferentes situaciones.
- Aislar e identificar al sistema físico en estudio y distinguirlo de su entorno.
- *Introducir vínculos entre las partes de un sistema.*

En esta clase vamos a continuar con la clase 2 de la guía, identificando tanto al sistema físico bajo estudio como a los agentes con los que interactúa.

Agregaremos vínculos entre las partes del sistema físico y analizaremos cuáles son las supociones que haremos sobre ellos.

El tratamiento de los vínculos lo haremos resolviendo ejercicios de la guía en donde están incluidos.

Vínculos ideales

Cuerdas ideales

Masa despreciable
Inextensible
Transmiten la tensión sin modificarla
Actúan por tensión

Varillas ideales

Masa despreciable
Inextensible
Transmiten la tensión sin modificarla
Actúan por tensión o Compresión

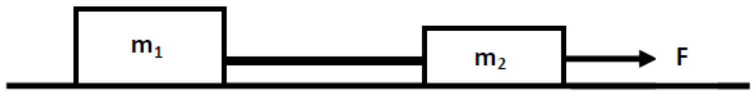
Poleas ideales

Masa despreciable
Sin roce en el eje
Pemiten cambiar la dirección de la tensión

Superficies ideales

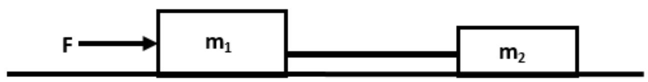
lisas ➔ la fuerza de contacto que ejerce la superficie sobre el sistema físico tiene dirección perpendicular a la superficie

Dos objetos de masa m_1 y m_2 situados sobre una mesa pulida (se puede considerar que no hay fuerza de roce) están unidos por una cuerda de masa despreciable. Sobre uno de ellos se ejerce una fuerza F hacia la derecha, como se muestra en la figura:



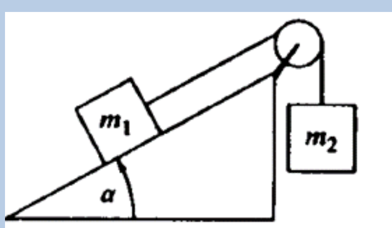
a) Analizar las fuerzas que actúan sobre la soga, ¿sus magnitudes son iguales?
b) Realizar el diagrama de cuerpo libre sobre el bloque m_1 y m_2.
c) Hallar la expresión para la aceleración del sistema.
d) Hallar la expresión para la tensión (fuerza)sobre la cuerda.
e) Si la cuerda se cambia por una varilla rígida, pero aún de masa despreciable,¿Los resultados obtenidos en los incisos a), b) y c) cambiarán?

Si se reemplaza el esquema anterior por el indicado a continuación, ¿El sentido de las fuerzas sobre la varilla varía? Justificar.



Si en esta última situación se reemplazara la varilla por una soga ideal, qué conclusiones obtendría al comparar la varilla ideal con la soga ideal.

Determine la aceleración con que se moverán los cuerpos y la tensión en las cuerdas de las figura si m_1 = 20 kg, m_2 = 18 kg y α= 30°.



Clase 3

Fuerzas no constantes

Objetivos de la Clase

<u>Tratamiento de fuerzas que no son constantes</u>

- Ley de gravitación universal de Newton.
- Ley de Hooke.
- Fuerza de roce: analizar el comportamiento de la componente de la fuerza de contacto paralela a la superficie, distinguir entre los casos estáticos y dinámicos.

En las clases anteriores empleamos las Leyes de Newton en situaciones en las que consideramos constantes a las fuerzas actuantes.

Si bien las Leyes nos vinculan las fuerzas con la variación de la cantidad de movimiento en el tiempo, no nos dan la función, ni la dependencia con sus variables, la relación matemática que tienen aquellas fuerzas que NO son constantes.

En esta clase comenzamos con el análisis de sistemas sobre los que actúan fuerzas variables

Ley de Gravitación Universal

Introducción histórica

Desde la época de los griegos existían dos problemas que eran objeto de investigación:

1) La tendencia que los objetos, tales como piedras, mostraban al caer hacia la Tierra cuando se los soltaba.

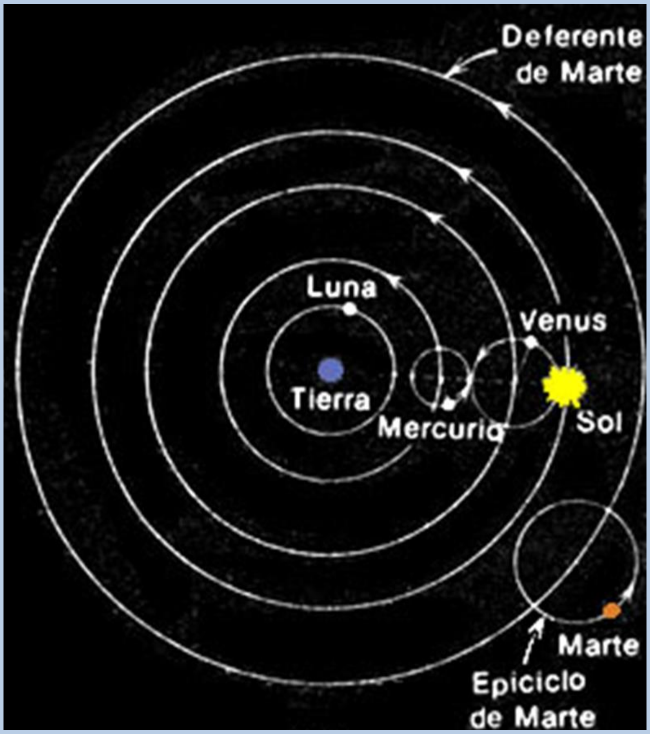
2) Los movimientos de los planetas, incluyendo al Sol y a la Luna que, en esos tiempos, estaban clasificados como tales

➢ Claudio Ptolomeo (griego) en el siglo II dc propuso como modelo del sistema solar:

Sistema geocéntrico.

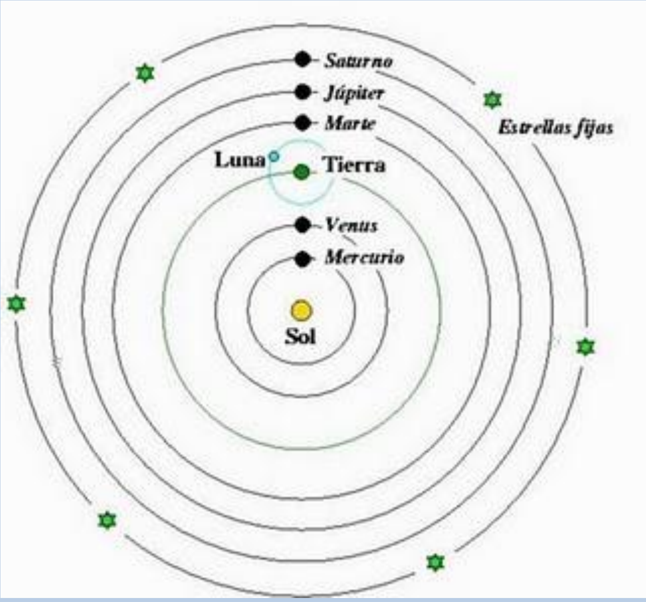
Las órbitas circulares no explicaban el movimiento de los planetas.

Introduce el concepto de epiciclo



➢ Copérnico (siglo XVI) propuso como modelo del sistema solar:

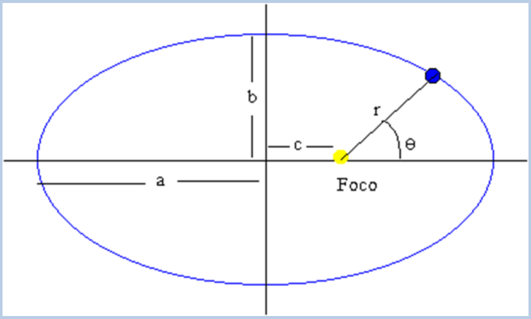
Sistema heliocéntrico.



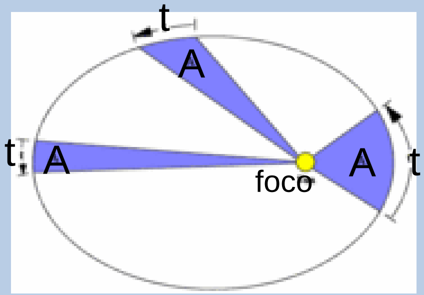
- Tycho Brahe, astrónomo de la época (1546-1601) toma datos de observación.
- Johanes Kepler (1571-1630), basado en un análisis riguroso de los datos, propuso tres leyes que describen el movimiento de los planetas.

Las Leyes de KEPPLER son fenomenológicas

Primera ley : Los planetas describen órbitas elípticas estando el Sol en uno de sus focos



Segunda ley: El vector posición de cualquier planeta respecto del Sol, barre áreas iguales de la elipse en tiempos iguales.



Tercera ley : Los cuadrados de los período, T, de revolución son proporcionales a los cubos de los semiejes mayores de la elipse.

$$T^2 = k \cdot a^3$$

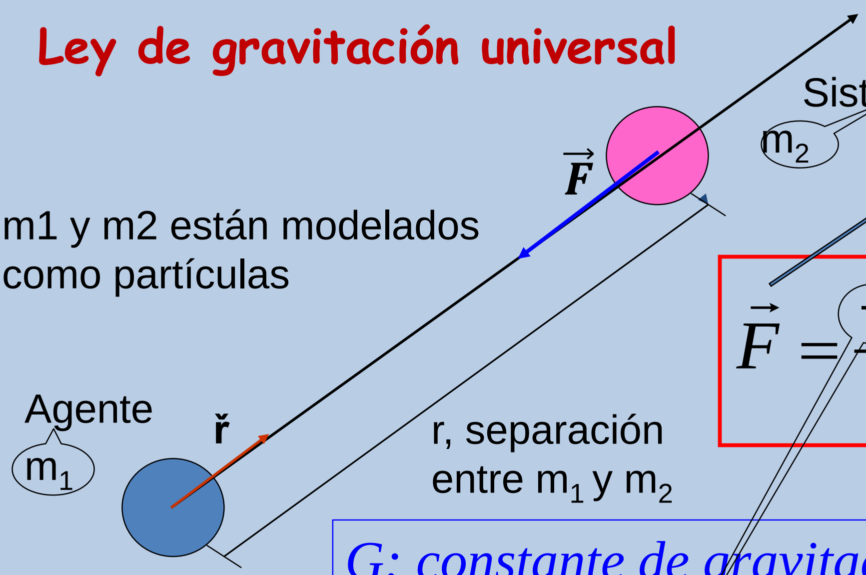
Años después, Isaac Newton pudo derivar las Leyes de Kepler de sus leyes de la Mecánica y formuló la ley de Gravitación Universal.

Newton pudo utilizar el mismo concepto para explicar el movimiento de los planetas y de los cuerpos que caen cerca de la superficie terrestre.

NEWTON

Ley de gravitación universal

m1 y m2 están modelados como partículas



Se pone de manifiesto cuando al menos una de las masas tiene un valor muy grande

$$\boxed{\vec{F} = \frac{-G\, \overbrace{m_1 m_2}}{r^2}\, \breve{r}}$$

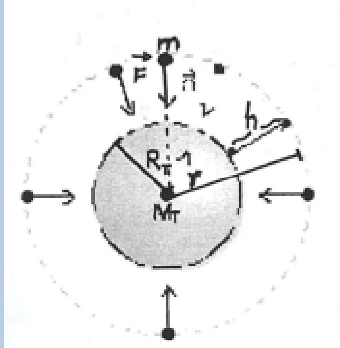
G: constante de gravitación universal

$G = 6{,}67x\ 10^{-11}\ N\ m^2\ kg^{-2}$

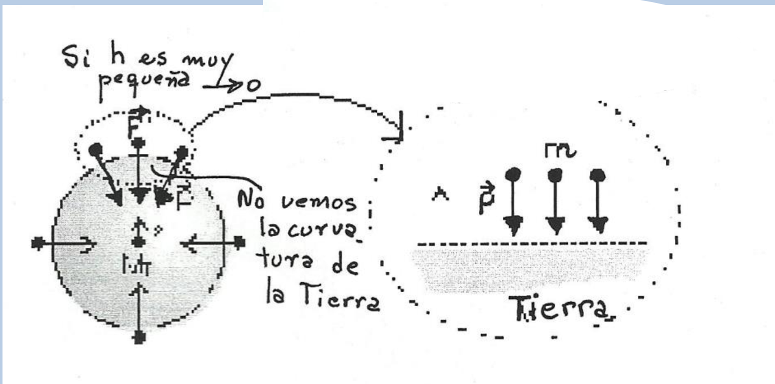
m1 y m2 están aislados

F es atractiva, interacción a distancia.

Cuerpos sobre la superficie terrestre o a una altura *h* pequeña comparada con el radio terrestre.



$$\vec{F} = \frac{-G\, M_T m}{\left(R_T + h\right)^2}\,\breve{r}$$



$$\vec{F} = \frac{-G\, M_T m}{\left(R_T\right)^2}\,\breve{r}$$

$$\frac{GM_T}{\left(R_T\right)^2} = ¿?$$

$$\frac{GM_T}{\left(R_T\right)^2} = 9{,}8\; m/s^2$$

$$\vec{F} = \frac{-G\, M_T m}{\left(R_T\right)^2}\,\breve{r} = \vec{P}(peso) = m\vec{g}$$

Esta aproximación se llama modelo de Tierra Plana

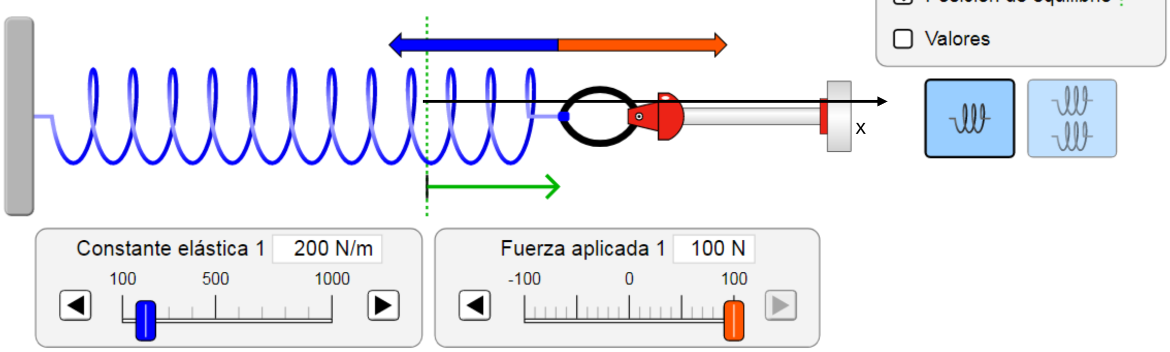
Ley de Hooke

Es una ley experimental

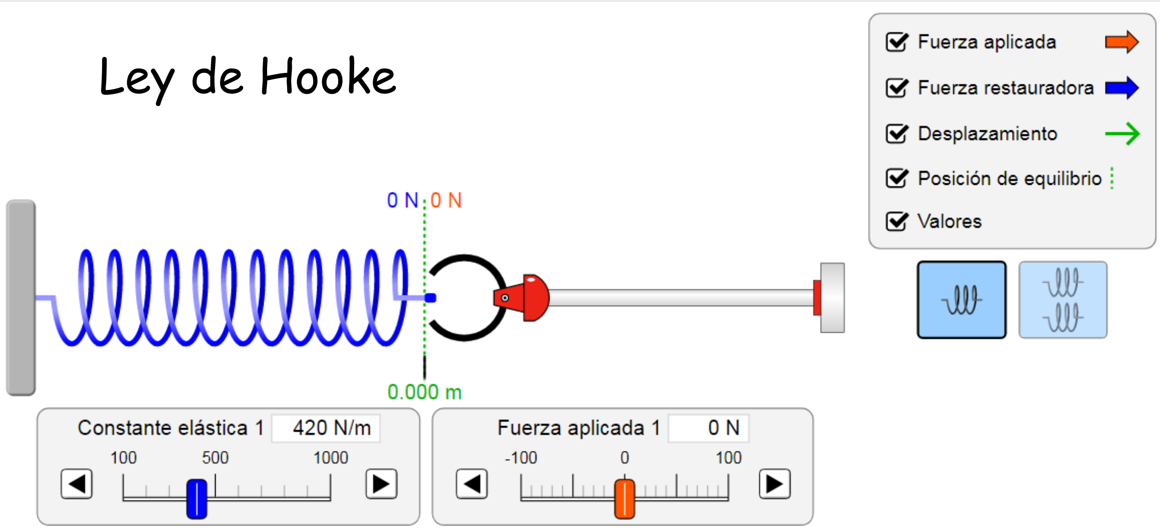
La fuerza que hace el resorte sobre el cuerpo satisface la Ley de Hooke. En una dimensión $F=-kx$

Apartamiento de la posición de equilibrio

Constante del resorte. Da cuenta del tipo o calidad del resorte



Ley de Hooke



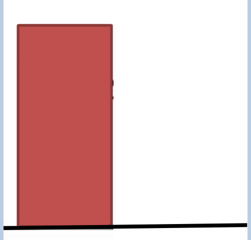
https://phet.colorado.edu/sims/html/hookes-law/latest/hookes-law_es.html

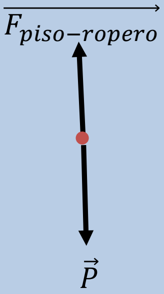
Fuerza de roce

Consideremos inicialmente un bloque, (el ropero) como sistema físico, apoyado sobre una superficie horizontal rugosa

¿Qué agentes actúan sobre el ropero?

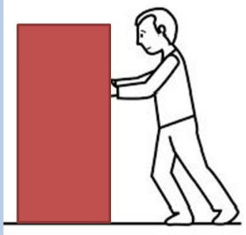
¿Cuál es el diagrama de fuerzas?

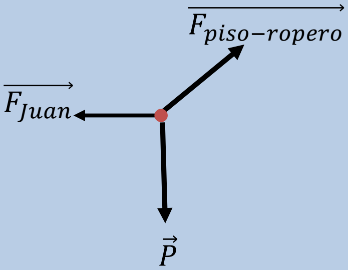




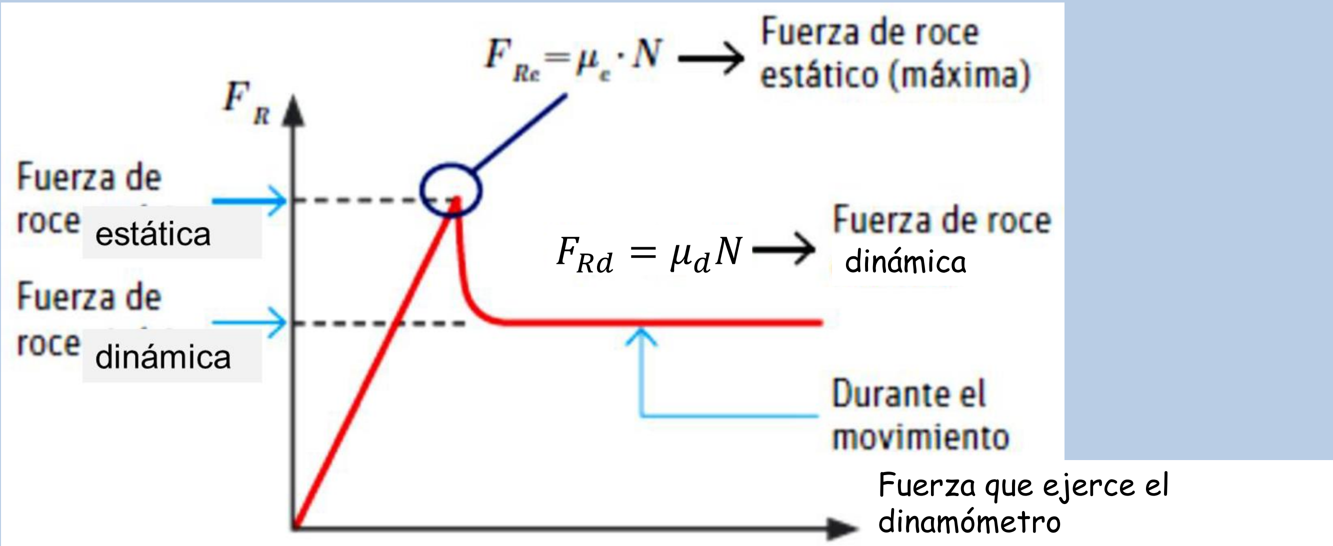
A continuación se acerca Juan e intenta mover el ropero pero no lo logra.

En estas condiciones:¿Cuál es el diagrama de fuerzas? ¿Cuántas fuerzas habría que agregar?¿Una o dos?





Lo que es interesante observar es que al principio el dinamómetro ejerce una fuerza. Este hecho se puede afirmar porque el resorte se estira a medida que se aumenta esta fuerza. Mientras se produce este proceso, el cuerpo permanece en reposo (Tramo lineal en rojo en el esquema)
A continuación, empieza a moverse el cuerpo. En este momento se observa que el estiramiento del resorte disminuye y luego permanece constante.
Este comportamiento se puede representar como:

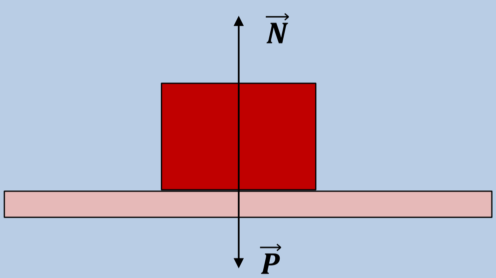


Analizaremos la situación en el marco teórico de las leyes de Newton:

Elegimos como sistema bajo estudio el bloque y lo modelamos como partícula.

Agentes :

a) Inicialmente: la tierra, la superficie.

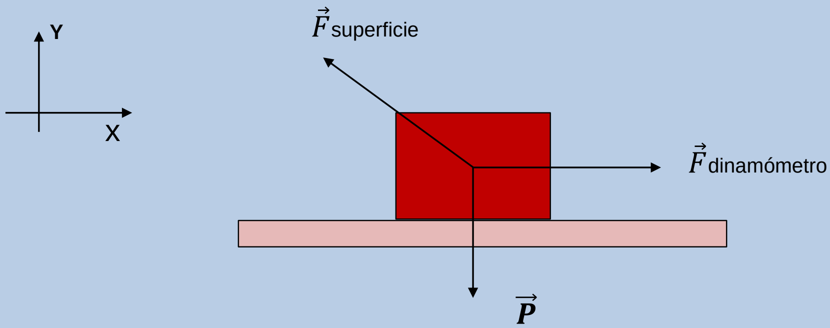


- La superficie ejerce la Normal y la Tierra, la fuerza peso.
- Observamos que la fuerza que hace la superficie es perpendicular a ella.
- El sistema físico está en reposo, entonces la suma de fuerza vale cero.

b) En un instante posterior, comienza a actuar el dinamómetro.

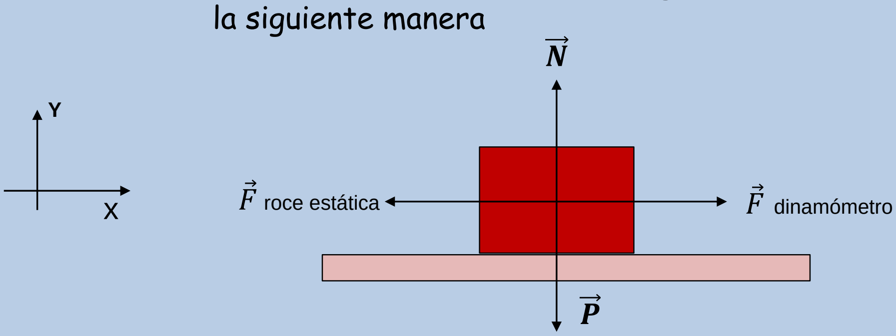
Agentes : Tierra, superficie y dinamómetro.

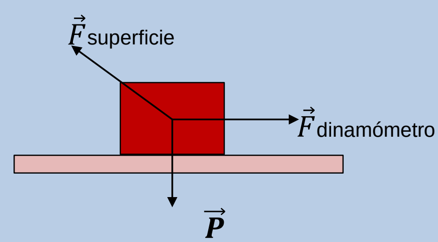
¿Cuál es el diagrama de fuerzas en estas condiciones?



¿Qué sucedió?
Bajo estas condiciones, al sistema lo seguimos observando en reposo. Por lo tanto, la suma de fuerzas debe ser cero, tanto en el eje x como en el y. La superficie deja de hacer una fuerza con dirección vertical. La dirección es la indicada en la figura.

Para tratar la situación de manera mas simple, descomponemos la fuerza que hace la superficie sobre el cuerpo en sus componentes. Una componente vertical, llamada normal y una componente horizontal, la fuerza de roce. Entonces el diagrama anterior lo podemos representa de la siguiente manera





Aplicamos la segunda Ley de Newton

$$\sum F_x = F_{dina} - F_{roce\ est} = 0 \Longrightarrow \text{No hay movimiento} \Longrightarrow F_{dina} = F_{roce\ est}$$

$$\sum F_y = N - P = 0$$

Si se sigue aumentando la fuerza que ejerce el dinamómetro, mientras sigue el cuerpo en reposo, sigue aumentando la fuerza de roce hasta que adquiere su valor máximo.

$$F_{roce\ estática\ máxima} = \mu_e N$$

μ_e Se denomina coeficiente de roce estático

En este instante seguimos considerando que continua en reposo, de modo que la suma de fuerzas las seguimos pensando que valen cero.

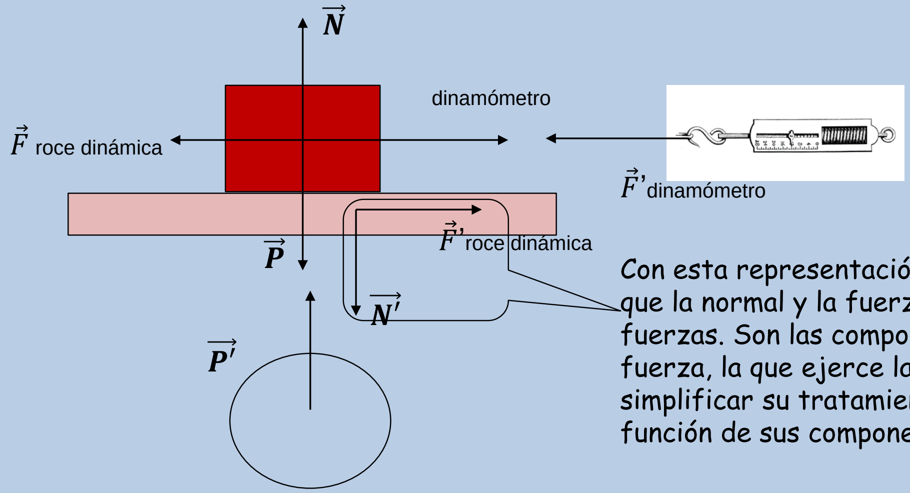
A continuación comienza el movimiento y esta fuerza de roce estática se convierte en dinámica mientras dure el movimiento.

$$F_{roce\ dinámica} = \mu_d N$$

μ_d Se denomina coeficiente de roce dinámico

μ_e es mayor que μ_d y ambos coeficientes dan cuenta de la calidad de las superficies en contacto.

Una vez iniciado el movimiento:



Con esta representación se quiere destacar que la normal y la fuerza de roce NO so dos fuerzas. Son las componentes de una única fuerza, la que ejerce la superficie. Para simplificar su tratamiento, la estudiamos en función de sus componentes.

En el gráfico con letras primadas se indican las reacciones a las respectivas fuerzas.

$$\sum F_x = F_{dina} - F_{roce\ dinámica} = ma$$

$$\sum F_y = N - P = 0$$

a) Un señor camina por la calle (suponer que en cada momento sólo un pie está en contacto con el piso). Realizar un diagrama de las fuerzas que actúan sobre él. Explique cualquier cambio en su estado de movimiento utilizando las leyes de Newton.

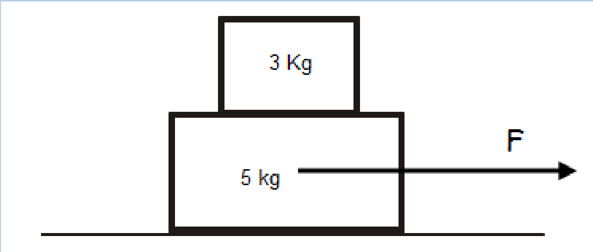
¿Agentes?

¿Actúa la fuerza de roce? ¿En qué dirección y sentido?
Cuando caminamos, la fuerza que ejercemos sobre el piso: ¿hacia dónde va? ¿En este caso debemos representar la reacción?
¿Esta fuerza de roce es estática o dinámica?

Ejercicio 10

Un bloque de 3 kg está colocado encima de otro de 5 kg. Suponer que no hay roce con el piso. El coeficiente de fricción estático y dinámico entre los bloques es 0.2 y 0.1, respectivamente.

a) Realizar el esquema de fuerzas que actúan sobre cada uno de los cuerpos señalando el agente que la ejerce.
b) Dibujar en diagramas separados las reacciones a las fuerzas indicadas en a).
c) ¿Cuál es la máxima fuerza F que puede aplicarse de modo que el sistema deslice y los bloques se mantengan unidos?
d) ¿Cuál es la aceleración de cada uno de los cuerpos cuando se aplica una fuerza F = 20 N?



Clase 4 (clase V de la Guía)

Cinemática de la partícula e independencia de movimientos

Objetivos de la Clase:

-Aplicar las leyes de la dinámica newtoniana al movimiento en una y dos dimensiones de un sistema físico, modelado como partícula, con aceleración constante.

-Predecir la posición y velocidad de una partícula conocidas las fuerzas que actúan sobre ellas y las condiciones iniciales (posición y velocidad para un instante de tiempo dado).

¿Qué significa predecir la posición y la velocidad de los cuerpos?

Es conocer la posición $\overrightarrow{r(t)}$ y la velocidad $\overrightarrow{v(t)}$ de los cuerpos para todo instante de tiempo t.

En la clase de hoy vamos a obtener estas expresiones a partir de las fuerzas que actúan y del conocimiento de las condiciones iniciales, solamente cuando la aceleración es constante (en módulo, dirección y sentido)

¿Qué son las condiciones iniciales?

Si comenzamos a medir el tiempo para *un tiempo t=t_0 las condiciones iniciales van a estar dadas por el valor que toma el vector posición y el vector velocidad para el instante inicial.* Es decir:

$$\vec{r}\,(t = t_0) = \overrightarrow{r_0}$$

$$\vec{v}\,(t = t_0) = \overrightarrow{v_0}$$

La aceleración está dada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \qquad \vec{a}dt = d\vec{v}(t) \qquad \int_{t_0}^{t} \vec{a}dt = \int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t)$$

Como la aceleración es constante, se puede sacar de la integral.

$$\vec{a}\int_{t_0}^{t} dt = \int_{\vec{v}(t_0)}^{\vec{v}(t)} d\vec{v}(t)$$ Integrando $$\vec{a}(t - t_0) = \vec{v}(t) - \vec{v}(t_0)$$

despejando $\vec{v}(t) = \vec{v}(t_0) + \vec{a}(t - t_0)$ Y considerando $t = t_0 = 0$

Se obtiene la expresión buscada de la velocidad $\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}\ t$

$$\begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{0y} + a_y t \end{cases}$$ Componentes x e y

Vimos que:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \vec{v}(t)dt = \vec{r}(t)$$ Si integramos $$\int_{t_0}^{t} \vec{v}(t)dt = \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t)$$

Recordando que

$$\vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}t$$

Reemplazamos la velocidad en la integral

$$\int_{t_0}^{t} (\overrightarrow{v_0} + \vec{a}t)dt = \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t)$$

Distribuimos $$\int_{t_0}^{t} \overrightarrow{v_0}dt + \int_{t_0}^{t} \vec{a}tdt = \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t) \qquad \overrightarrow{v_0}\int_{t_0}^{t} dt + \vec{a}\int_{t_0}^{t} tdt = \int_{\vec{r}(t_0)}^{\vec{r}(t)} d\vec{r}(t)$$

Integrando y reacomodando los términos, se obtiene la expresión de la posición en función de todo tiempo t

Se eligió $t = t_0 = 0$

$$\overrightarrow{v_0}\,t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$$

$$\overrightarrow{v_0}\, t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0)$$

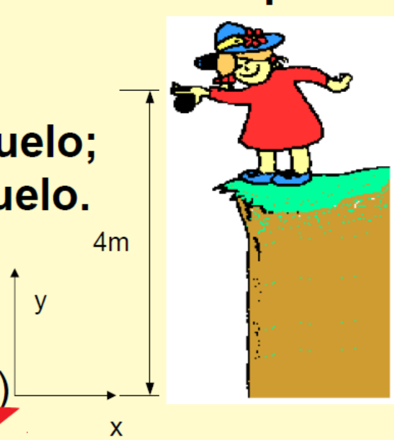
$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}\, t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{array} \right.$$

Se han podido determinar las expresiones de la posición y la velocidad para todo tiempo t de una partícula que se mueve con aceleración constante $\vec{a}$.
Por lo tanto se puede predecir en qué posición estará y con que velocidad se moverá para todo tiempo t.

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{r_0} + \overrightarrow{v_0}\, t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad\qquad \vec{v}(t) = \overrightarrow{v_0} + \vec{a}t$$

Ejemplo de cinemática unidimensional

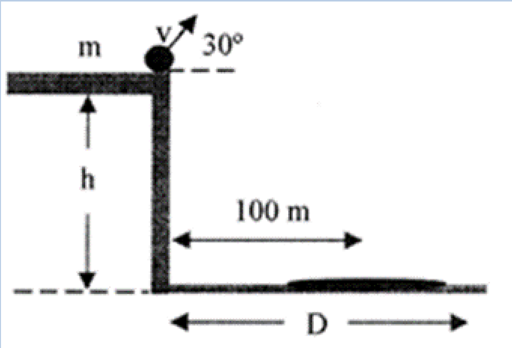
Una niña que se encuentra al borde de un acantilado deja caer una pelota desde una altura de 4m respecto al suelo. Determinar:
a) la aceleración de la pelota;
b) el tiempo que tarda en llegar al suelo;
c) la velocidad con la que llega al suelo.

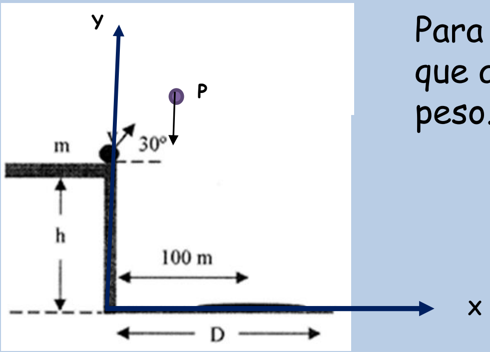


Primero, definimos:
<u>sistema bajo estudio:</u> pelota
<u>SRI:</u> uno fijo a la Tierra (modelo plano)
<u>unidades:</u> MKS
<u>sistema de coordenadas</u>

Ejemplo de movimiento en el plano

Se lanza una pelota desde una meseta que está a una altura h con respecto al piso, con una velocidad cuyo módulo inicial es de 8m/s y su dirección forma un ángulo de 30º por encima de la horizontal. A 100m del pie de la meseta se coloca una canasta. a) ¿Cuál debe ser el valor de *h* para que la pelota caiga dentro de ella. b) ¿Cuál es el valor de la altura máxima? c) ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzarla? d) Determine el modulo y el ángulo de la velocidad con que llega al piso.





Para analizar estas situaciones comenzamos por analizar las fuerzas que actúan. A lo largo de toda la trayectoria la única fuerza es el peso.

Debido a que la fuerza resultante actúa en la dirección vertical, el movimiento en el eje "y" es acelerado y el movimiento en el eje "x" es con velocidad constante.
A esta mirada se le llama independencia de movimiento

El siguiente paso podría ser elegir la ubicación del sistema de coordenadas y lo dibujamos

Se determina el valor de la aceleración, respetando el sistema de coordenadas elegido.

Se expresan las ecuaciones horarias y se asignan los valores de las condiciones iniciales, de acuerdo al problema y al sistema de coordenadas.

Se determinan los valores pedidos.

Encuentro

Afirmamos que dos sistemas físicos (cuerpo 1 y cuerpo 2) modelados como partículas se encuentran cuando coinciden en el mismo lugar en el mismo tiempo.

Esta condición se expresa como:

$$\vec{r_1}(t = t_E) = \vec{r_2}(t = t_E)$$

La posición del cuerpo 1 para el tiempo de encuentro es igual a la posición del cuerpo 2 para ese mismo tiempo, medidas en el mismo sistema de coordenadas
Las relaciones anteriores se pueden expresar en función de sus componentes:

$$x_1(t = t_E) = x_2(t = t_E)$$

$$y_1(t = t_E) = y_2(t = t_E)$$

Un niño lanza una pelota con una velocidad inicial de 20 m/s que forma un ángulo de 45 ° respecto de la horizontal. Simultáneamente otro jugador que está a 50 m del niño, comienza a correr para alcanzar la pelota a la misma altura con que fue lanzada. ¿En qué sentido debe correr y con qué velocidad?

Clase 5

Movimiento Circular

Objetivos de la Clase:

-Aplicar las leyes de la dinámica newtoniana al movimiento de un sistema físico, modelado como partícula, que realiza un movimiento circular.

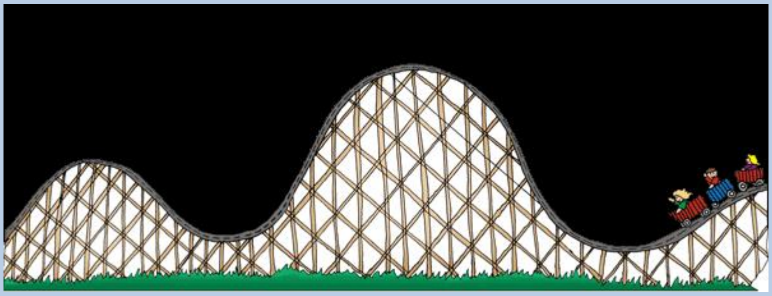
-Predecir la posición y velocidad de una partícula conocidas las fuerzas que actúan sobre ellas y las condiciones iniciales (posición y velocidad para un instante de tiempo dado) que realiza un movimiento circular.

Movimiento Circular

Un cuerpo modelado como partícula realiza un movimiento circular, cuando la trayectoria que describe es una circunferencia o un tramo de ella.

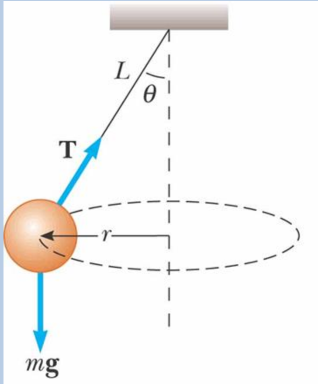
Ejemplos:

Un auto tomando una curva
Ejercicio 2

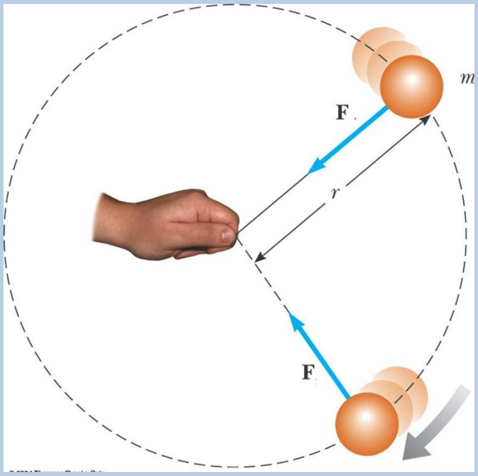


Un móvil en una montaña rusa
Ejercicio 4

Péndulo Cónico
Ejercicio 3



Circunferencia vertical
Ejercicio 5



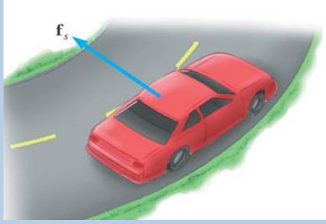
Características del movimiento circular:

- Es un movimiento acelerado. Si recordamos la definición de aceleración:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Si el cuerpo describe un tramo de una circunferencia, al menos está cambiando la dirección del vector velocidad, por lo tanto cambia el vector, aun cuando, su módulo permanezca constante. Por lo tanto está acelerado.

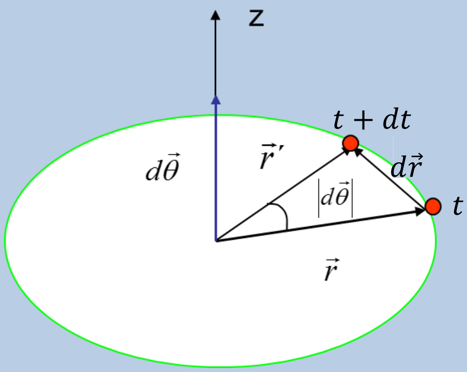
- Tiene que estar actuando al menos una fuerza neta que apunte hacia el centro de la circunferencia que permita que se produzca el movimiento circular.



Para estudiar el movimiento circular necesitamos definir variables acordes a la geometría.

Vamos a cambiar los ejes coordenados x,y que veníamos usando por los ejes radial, tangencial y z, como veremos más adelante.

Comenzamos suponiendo que un cuerpo, modelado como partícula, realiza un movimiento circular en sentido antihorario.



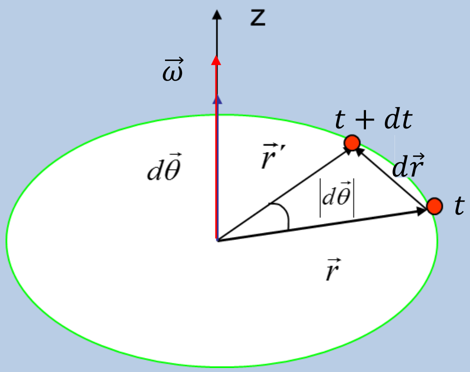
Se define el vector $d\vec{\theta}$, llamado diferencial de ángulo barrido por el vector posición **r** en el tiempo dt.

$d\vec{\theta}$
- dirección perpendicular a la circunferencia
- módulo dado por el ángulo barrido
- sentido dado por la regla de la mano derecha

Si se deriva con respecto al tiempo, se obtiene la velocidad angular ω

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

- dirección dada por $d\vec{\theta}$
- sentido dado por la regla de la mano derecha

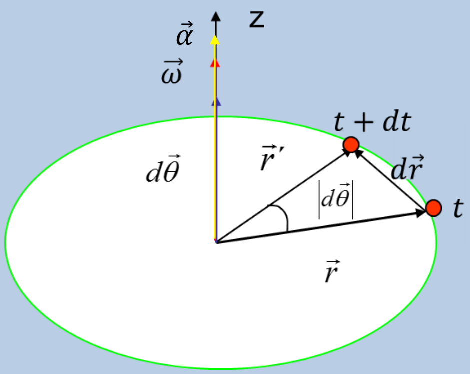


Finalmente, si derivamos $\vec{\omega}$ con respecto al tiempo, vamos a obtener una aceleración, denominada aceleración angular y se denota con $\vec{\alpha}$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2}$$

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Tiene la dirección de $d\vec{\omega}$, si aumenta $\vec{\omega}$, $\vec{\alpha}$ tiene el mismo sentido que $\vec{\omega}$. Si disminuye, tiene sentido opuesto



Unidades en que se expresan las variables cinemáticas:

[d$\vec{\theta}$] en radianes

[$\vec{\omega}$] radianes /s

[$\vec{\alpha}$] radianes/ s^2

En la clase anterior determinamos las expresiones de $\vec{r}(t)$ y $\vec{v}(t)$ para un movimiento, con $\vec{a}$ =cte.

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_o t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

Encontramos que a medida que la partícula gira, la dirección de $\vec{\alpha}$ =cte. Por lo tanto, si además conocemos las condiciones iniciales (θ_0, ω_0) podemos obtener por similitud las ecuaciones horarias del movimiento circular, suponiendo que el módulo de la aceleración angular es constante.

En este caso, tendremos solo componente z .

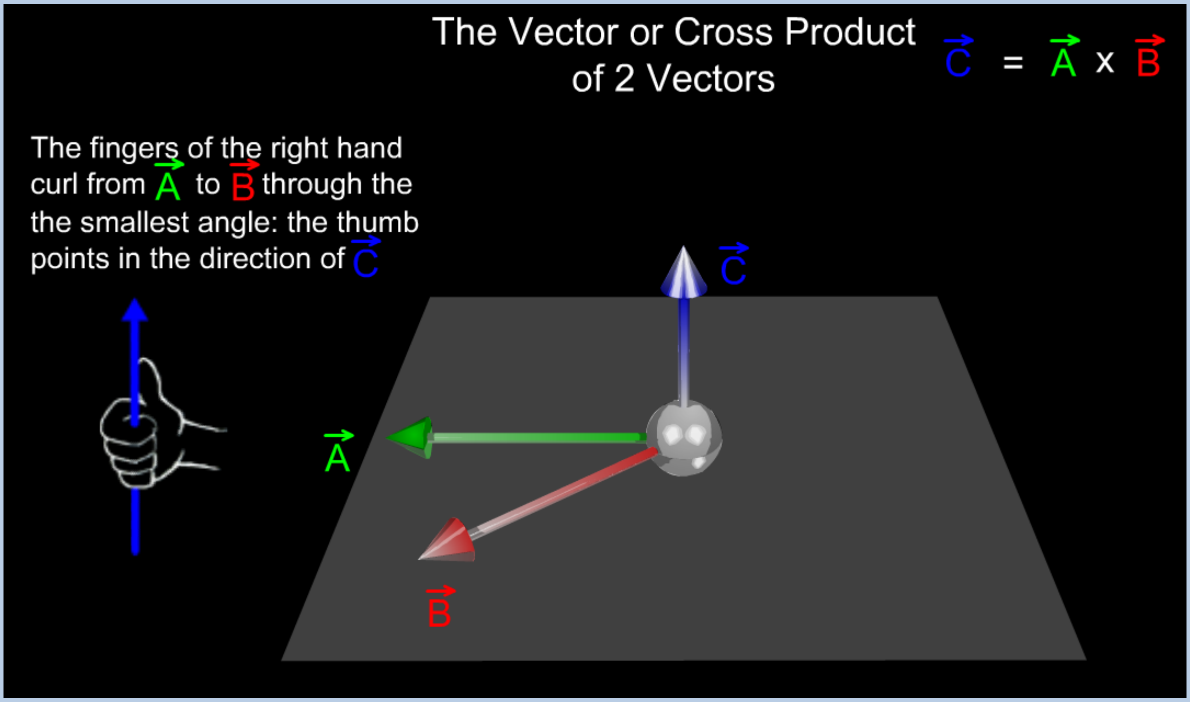
$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

¿Cómo se vinculan las variables cinemáticas angulares con las lineales?

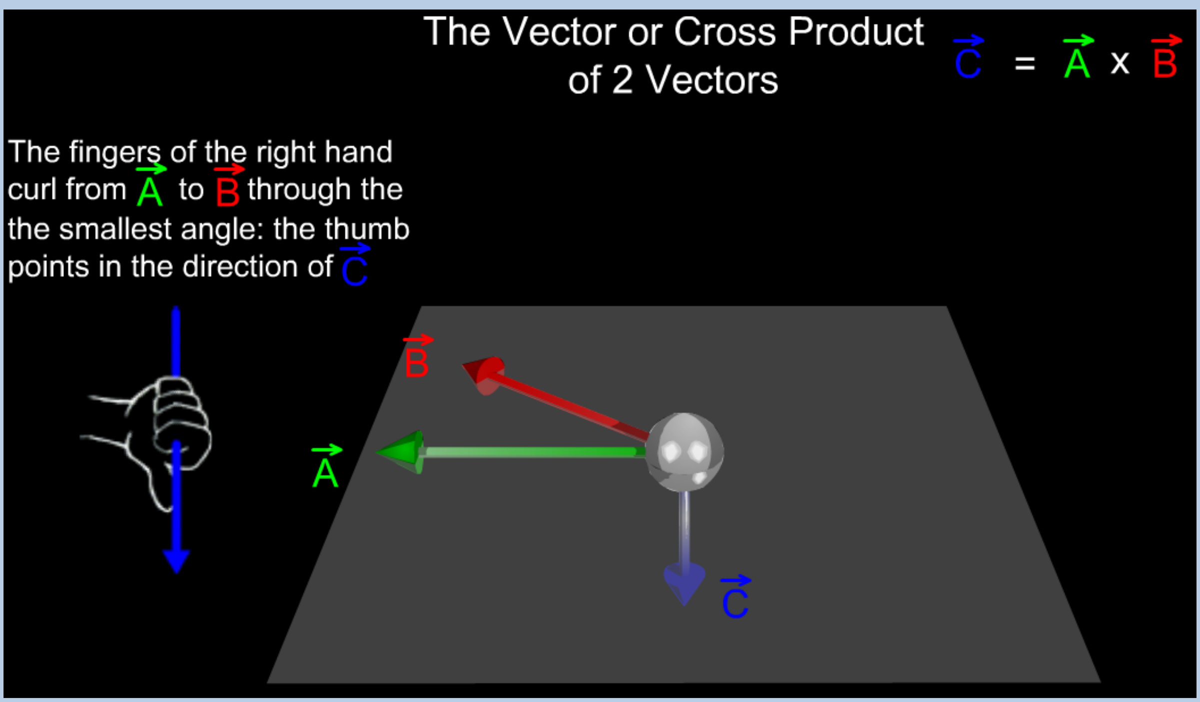
Para relacionarlas, comenzaremos por repasar el producto vectorial de dos vectores o también llamado producto cruz.

El resultado de un producto cruz $\vec{A} \times \vec{B}$ da como resultado un vector $\vec{C}$ que es perpendicular al plano definido por $\vec{A} \times \vec{B}$ y sigue la regla de la mano derecha



$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\, sen\, (\vec{A}, \vec{B})$



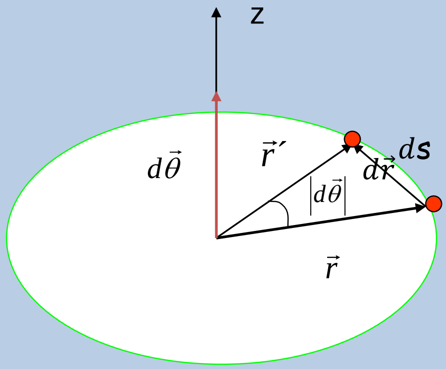
$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$

$|\vec{C}| = |\vec{A}||\vec{B}|\, sen\, (\vec{A}, \vec{B})$

Empleando la definición de radián

Arco = ángulo x el radio

ds= dθ . r   y aproximamos $ds \cong |d\vec{r}|$

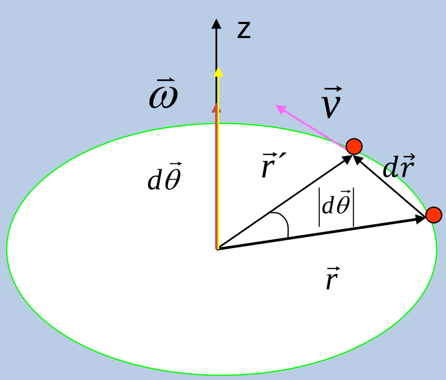


Vectorizando la expresión anterior $$d\vec{r} = d\vec{\theta} \times \vec{r}$$

Si dividimos por dt

Obtenemos la velocidad tangencial $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = \dfrac{d\vec{\theta} \times \vec{r}}{dt}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



$$|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}| \sin 90°$$

$$v = \omega r$$

Si derivamos la velocidad con respecto al tiempo, obtendremos la aceleración resultante

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\overrightarrow{a_{Res}} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a_{Res}} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\overrightarrow{a_{Res}} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\overrightarrow{a_{Res}} = \overrightarrow{a_{tang}} + \overrightarrow{a_{centrípeta}}$$

$$\overrightarrow{a_{Res}} = \overrightarrow{a_{tang}} + \overrightarrow{a_{centrípeta}}$$

$$\overrightarrow{a_{tangencial}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

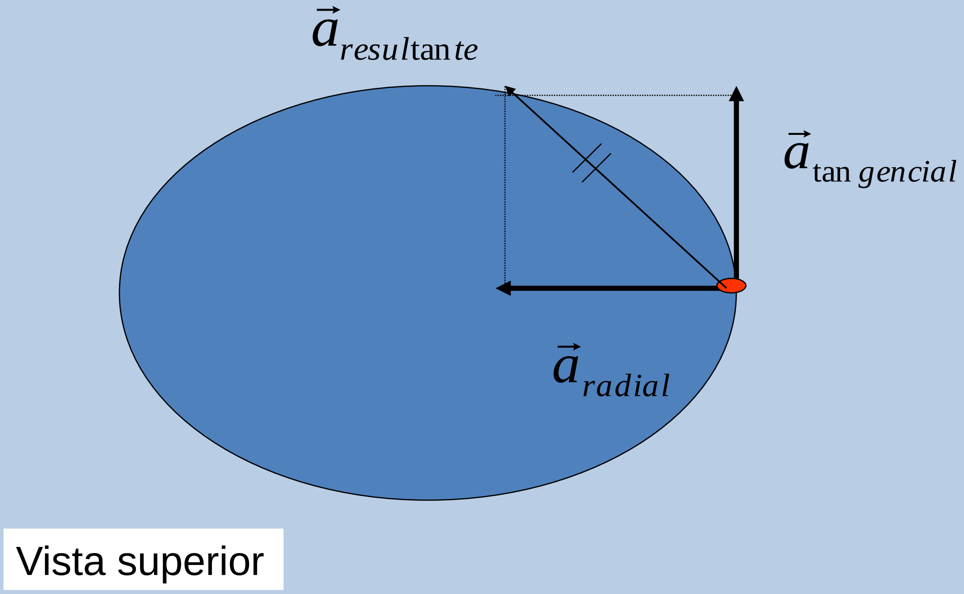
Da cuenta del cambio de módulo del vector velocidad

$$\left|\overrightarrow{a_{tangencial}}\right| = |\vec{\alpha}||\vec{r}| \sin 90 = \alpha r$$

$$\overrightarrow{a_{centrípeta}} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

Da cuenta del cambio de dirección del vector velocidad

$$\left|\overrightarrow{a_{centrípeta}}\right| = |\vec{\omega}||\vec{v}| \sin 90 = \omega v = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$



Estrategias para resolver los ejercicios de movimiento circular:

- Visualizar la circunferencia o tramo de circunferencia que describe la partícula. En ese plano se dibuja el eje radial. Éste, nace en la partícula y se dirige positivo hacia el centro de la circunferencia.

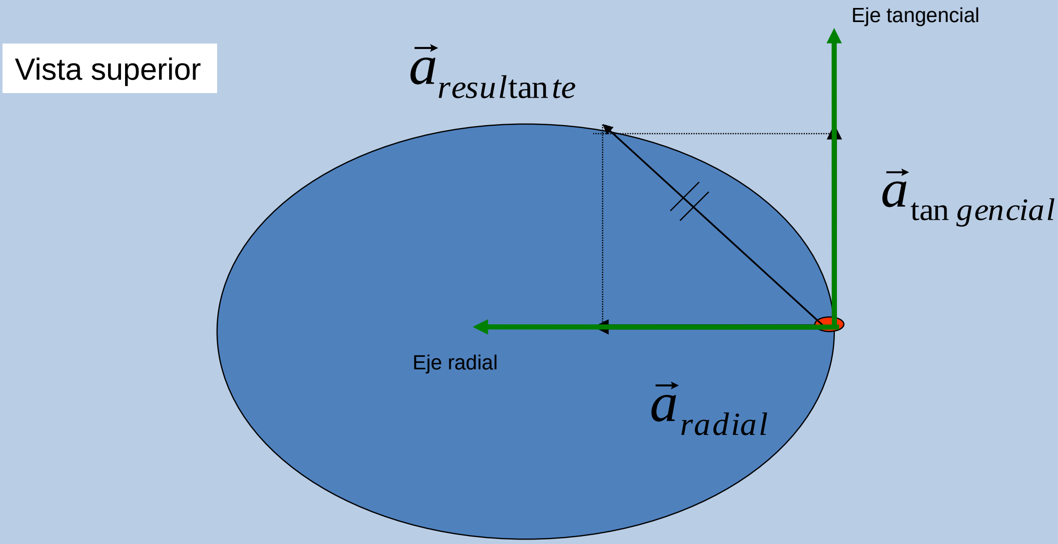
- El eje tangencial, como su nombre lo indica es tangente a la trayectoria, se dibuja

- El eje z es perpendicular al plano determinado por los ejes radial y tangencial.

- De acuerdo al ejercicio, puede ser irrelevante el eje z o el eje tangencial.

Sobre el eje radial SIEMPRE va a estar actuando una fuerza resultante que va a ser la responsable del movimiento circular.

- Una vez dibujados los ejes, se representan las fuerzas y se plantea la segunda Ley de Newton para cada uno de los ejes, de la manera usual que hicimos anteriormente



$$\sum F_r = ma_r = m\omega^2 R = m\frac{v^2}{R}$$

$$\sum F_{tang} = ma_{tang} = m\alpha R$$

Ejercicio 2

Un auto toma una curva plana de radio constante R. El coeficiente de roce estático es μ_e y el coeficiente de roce dinámico es μ_d

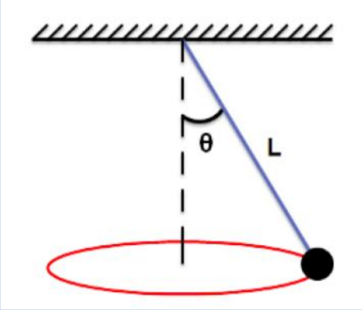
a) Hallar la velocidad máxima con que puede tomar la curva sin derrapar. ¿De qué variables depende esta velocidad.

b) Si la curva se hubiera diseñado con un peralte de ángulo α y se pudiera despreciar el roce, hallar la velocidad máxima con que puede tomar la curva sin derrapar.

Ejercicio 3

Una partícula de masa m=50gr que está atada a una cuerda de longitud L=50cm gira como un péndulo cónico con un ángulo θ=60°.

a) Realizar el diagrama de fuerzas que actúan sobre la partícula.
b) ¿Cuál es la tensión que ejerce la cuerda?
c) ¿Cuál es el módulo de la velocidad de la partícula? Y ¿Cuál es el valor de la aceleración centrípeta? Representar.
d) ¿Cuál es el valor de la aceleración tangencial?



Clase 6

Trabajo y Energía cinética

Objetivos de la Clase

- *Introducir los conceptos de Trabajo Mecánico y Energía cinética.*
- *Investigar la relación entre dichas magnitudes para llegar al enunciado del teorema que relaciona la magnitud Trabajo con la magnitud Energía cinética.*
- *Presentar el concepto de Potencia.*

Continuamos con el objetivo de la mecánica: predecir. Es decir, se quiere encontrar las expresiones de

$$\vec{r}\,(t)$$
$$\vec{v}\,(t)$$

Para todo tiempo t. Estas relaciones fueron obtenidas cuando el sistema físico bajo estudio tiene aceleración constante y si se conocían las condiciones iniciales

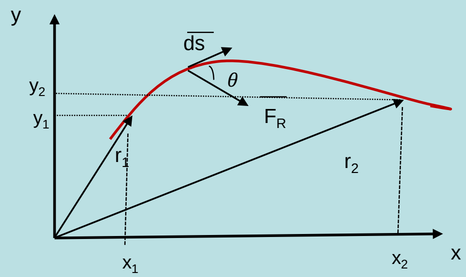
- Sin embargo, existen varias situaciones de interés en que las fuerzas no son constantes y dependen de la posición.

Ejemplo: a) Fuerza de atracción gravitatoria
b) Fuerza elástica, obedece la Ley de Hooke

- Para resolver estas situaciones, se introduce el concepto de Trabajo Mecánico de una fuerza.

Seguimos modelando al sistema físico como una partícula.

Cuando un cuerpo se desplaza desde el punto de coordenadas (x_1 , y_1) hasta otro (x_2, y_2) por una fuerza resultante $\overrightarrow{F_R}$, el trabajo realizado por dicha fuerza se define como:



El trabajo, W_{F_R}, a partir de su definición es el resultado de un producto escalar y por lo tanto es una magnitud escalar. Por lo tanto, puede ser: $W_{F_R}>0$; $W_{F_R}<0$ o $W_{F_R}=0$.

Unidades de [W_{F_R}] =N.m= Joule

$$W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R} \,.\, d\vec{s}$$

$$\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \left|\overrightarrow{F_R}\right| . \left|d\vec{s}\right| cos\theta$$

$$\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R} \,.\, d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_{Rx}\, dx + \int_{y_1}^{y_2} F_{Ry}\, dy$$

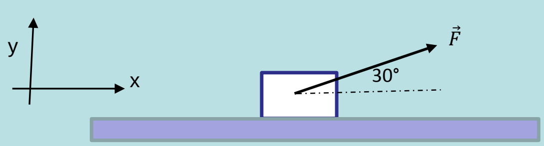
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{F_R} = F_{Rx}\, \breve{\imath} + F_{Ry}\, \breve{\jmath} \\ \overrightarrow{dr} = dx\, \breve{\imath} + dy\, \breve{\jmath} \end{array}\right\} \overrightarrow{F_R} \,.\, \overrightarrow{dr} = F_{Rx}\; dx + F_{Ry}\, dy$$

Se puede obtener el trabajo siguiendo cualquiera de los dos caminos, el que nos resulte más simple.

Ejemplo

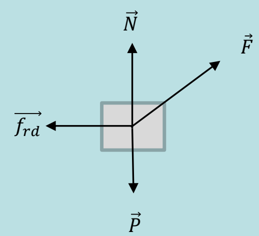
Un bloque es empujado 1,20 m sobre una superficie horizontal, mediante una fuerza de 49 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. La fuerza de rozamiento es de 9,8 N.

a) ¿Qué trabajo ha realizado el agente exterior que ejerce la fuerza de 49 N?
b) ¿Cuál es el trabajo de la normal?
c) ¿Cuál es el trabajo del peso?
d) ¿Cuál es el trabajo de la fuerza de rozamiento?
e) ¿Cuál es el trabajo total?



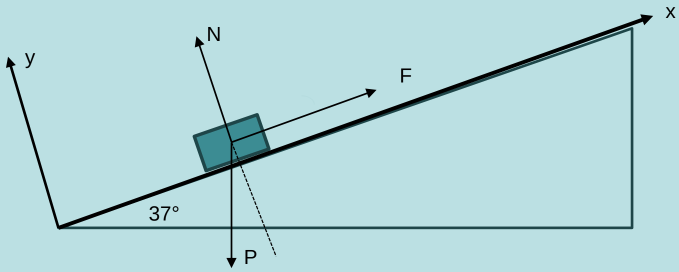
$$W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \left|\overrightarrow{F_R}\right| . \left|d\vec{s}\right| cos\theta$$

$$W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R} \,.\, d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_{Rx}\, dx + \int_{y_1}^{y_2} F_{Ry}\, dy$$



Un cuerpo de 2 kg se mueve 2 m hacia arriba, sobre un plano inclinado de 37°, por una fuerza de F=100 N como muestra la figura. En ese punto, se quita la fuerza y el cuerpo recorre nuevamente 2m hacia abajo. Determine el trabajo hecho por: a) F b) la normal c) el peso cuando sube d) el peso cuando baja.

L=2m
F=100 N



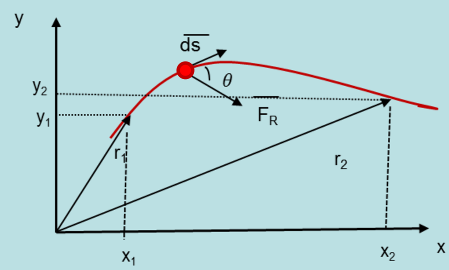
$$W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} |\overrightarrow{F_R}|.|d\vec{s}|cos\theta$$

$$W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R}.d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_{Rx}\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_{Ry}\,dy$$

Teorema de Trabajo y Energía Cinética

Supongamos que sobre un cuerpo de masa *m* actúan fuerzas cuya resultante es $\overrightarrow{F_R}$ y lo desplaza desde el punto de coordenadas (x_1 , y_1) hasta el punto (x_2, y_2). El cuerpo pasa de una velocidad inicial $\overrightarrow{V_1}$ a una $\overrightarrow{V_2}$. El trabajo total o neto realizado por $\overrightarrow{F_R}$ está dado por:

$$W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R}.d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_{Rx}\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_{Ry}\,dy$$



Por la segunda ley de Newton

$$\overrightarrow{F_R} = \sum_i^n \overrightarrow{F_i} = m\vec{a} \left\{ \begin{array}{l} F_{Rx} = \sum_i^n F_{ix} = ma_x = m\dfrac{dv_x}{dt}\dfrac{dx}{dx} = mv_x\dfrac{dv_x}{dx} \\ F_{Ry} = \sum_i^n F_{iy} = ma_y = m\dfrac{dv_y}{dt}\dfrac{dy}{dy} = mv_y\dfrac{dv_y}{dy} \end{array} \right.$$

$$\overrightarrow{F_R} = \sum_i^n \overrightarrow{F_i} = m\vec{a} \quad \begin{cases} F_{Rx} = \sum_i^n F_{ix} = ma_x = m\dfrac{dv_x}{dt}\dfrac{dx}{dx} = mv_x\dfrac{dv_x}{dx} \\ F_{Ry} = \sum_i^n F_{iy} = ma_y = m\dfrac{dv_y}{dt}\dfrac{dy}{dy} = mv_y\dfrac{dv_y}{dy} \end{cases}$$

$$F_{Rx}\,dx = mv_x dv_x \quad , \quad F_{Ry}\,dy = mv_y dv_y$$

$$W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R}\,.\,d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_{Rx}\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_{Ry}\,dy = \int_{v_{x1}}^{v_{x2}} m\,v_x dv_x + \int_{v_{y1}}^{v_{y2}} mv_y\,dv_y$$

$$W_{F_R} = \boxed{\frac{1}{2}mv_{x2}^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_{x1}^2} + \boxed{\frac{1}{2}mv_{y2}^2} - \boxed{\frac{1}{2}mv_{y1}^2}$$

$$W_{F_R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$W_{F_R} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Se define la energía cinética E_C como:

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2$$

Obteniendo finalmente

Teorema de Trabajo y Energía Cinética

$$W_{F_R} = \sum W_{F_i} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_c(2) - E_c(1) = \Delta E_c$$

Teorema de Trabajo y Energía Cinética

$$W_{F_R} = \sum W_{F_i} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Al concepto de trabajo le podemos asociar tres miradas

1) Geométrico, área bajo la curva, ejercicio 4, $W_F = \int_{x_1}^{x_2} F_x \, dx$

2) Proceso de transferencia de energía. Se hace trabajo sobre un sistema y como consecuencia el sistema adquiere energía cinética.

3) El operativo $W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R} \, . \, d\vec{s}$

Muchas veces se está interesado en conocer como varía con el tiempo el trabajo que se realiza.

A la rapidez con que una fuerza o una máquina produce trabajo se denomina Potencia

Potencia Media

$$Pot = \frac{W}{\Delta t}$$

Potencia Instantánea

$$Pot = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \, . d\vec{r}}{dt} = \vec{F} . \vec{v}$$

La unidad de la potencia es Watt

Fuerzas Conservativas

Cuando una partícula, sobre la que actúan fuerzas, se mueve describiendo una trayectoria cerrada y el trabajo que realiza una de ellas es cero, entonces esa fuerza es Conservativa

Si $\vec{F}$ es una fuerza conservativa, entonces, el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada vale cero

$$\oint \overrightarrow{F}.d\vec{r} = 0$$

Clase 7 Trabajo y Energía Mecánica

Objetivo de la clase:

- *Introducir el concepto de energía potencial.*
- *Introducir el concepto de energía mecánica y presentar el teorema de Trabajo y Energía Mecánica.*
- *Introducir el principio de conservación de la energía mecánica.*

En la clase anterior definimos el trabajo mecánico

$$W_{F_R} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R} \, . \, d\vec{s}$$

$$\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \left|\overrightarrow{F_R}\right| . \left|d\vec{s}\right| cos\theta$$

$$\int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \overrightarrow{F_R} \, . \, d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_{Rx} \, dx + \int_{y_1}^{y_2} F_{Ry} \, dy$$

Además obtuvimos la relación entre el trabajo neto que realizan todas las fuerzas y la energía cinética.

Teorema de Trabajo y Energía Cinética

$$W_{F_R} = \sum W_{F_i} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

Analizamos un ejercicio donde un cuerpo apoyado sobre un plano inclinado subía por la acción de una fuerza. Vimos que el trabajo de la fuerza peso en la trayectoria cerrada, cuando sube y baja por dicho plano, nos dio cero. A partir de este hecho definimos la fuerza conservativa.

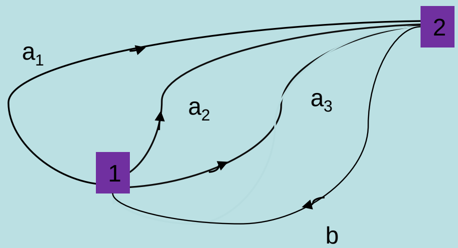
Fuerzas Conservativas

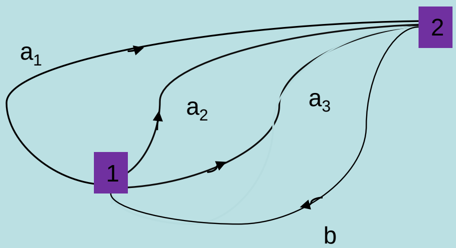
Cuando una partícula, sobre la que actúan fuerzas, se mueve describiendo una trayectoria cerrada y el trabajo que realiza una de ellas es cero, entonces esa fuerza es Conservativa

Si $\vec{F}$ es una fuerza conservativa, entonces, el trabajo realizado a lo largo de una trayectoria cerrada vale cero.
Este concepto se expresa matemáticamente como:

$$\oint \overrightarrow{F}. d\vec{r} = 0$$

Supongamos que la partícula pasa del punto 1 al punto 2 por distintas trayectorias a_1, a_2, a_3. Es posible imaginar una trayectoria *b* para pasar de 2 a 1. Las trayectorias a_1b, a_2b y a_3b serán cerradas y valdrá cero el trabajo en recorrerla.





$$W_{12}(a_1) + W_{21}(b) = 0$$

$$W_{12}(a_2) + W_{21}(b) = 0$$

$$W_{12}(a_3) + W_{21}(b) = 0$$

Si despejamos

$$\left.\begin{aligned} W_{12}(a_1) &= -W_{21}(b) \\ W_{12}(a_2) &= -W_{21}(b) \\ W_{12}(a_3) &= -W_{21}(b) \end{aligned}\right\}$$

Estas expresiones están indicando que el trabajo a lo largo de cualquier trayectoria es el mismo cuando la fuerza es conservativa

Por lo tanto, el trabajo no depende del camino sino de los puntos inicial y final. Las funciones que cumplen con esta condición se llaman funciones de estado. De estas funciones solamente podemos conocer sus variaciones de un punto a otro. Esto, nos permite asignar un valor cero arbitrariamente a la función en algún lugar de referencia que nos resulte cómodo. En este caso la función de estado se llama energía potencial

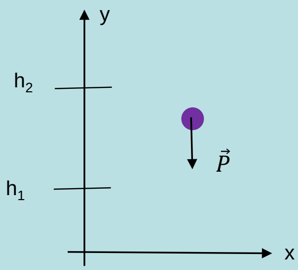
Se define la variación de energía potencial como

$$W_{FC} = -\Delta E_P$$

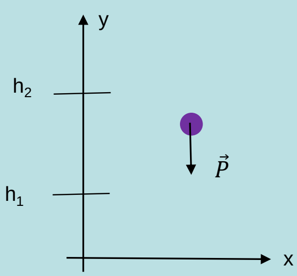
En la clase anterior vimos que la fuerza peso es una fuerza conservativa. Ahora vamos a obtener su función potencial asociada.

Ejemplo: Un cuerpo que se modela como partícula, es arrojado verticalmente hacia arriba. Determine el trabajo realizado por el peso mientras sube desde una posición h_1 , respecto del piso hasta otra h_2

Elegimos el eje "y" positivo hacia arriba y con el origen en el piso.



$$W_{Peso} = \cancel{\int_{x_1}^{x_2} P_x\, dx} + \int_{y_1}^{y_2} P_y\, dy$$



$$W_{Peso} = \int_{y_1}^{y_2} P_y\, dy \;= -\int_{h_1}^{h_2} mg\, dy$$

$$W_{Peso} = -(mgh_2 - mgh_1)$$

Se define la variación de energía potencial como

$$W_{FC} = -\Delta E_P = -\left(E_p(2) - E_p(1)\right)$$

$$W_{Peso} = -(mgh_2 - mgh_1) = -\left(E_p(2) - E_p(1)\right)$$

Se concluye por comparación que la energía potencial, en este caso llamada energía potencial gravitatoria

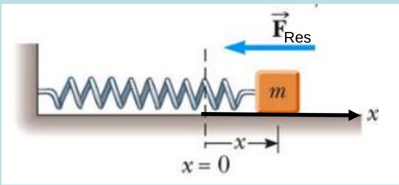
$$E_{Potencial\ Gravitatoria} = mgh$$

Donde h es la altura respecto de un nivel de referencia al que elegimos arbitrariamente nulo

Ejemplo 2: Un resorte de constante k está unido a un cuerpo apoyado sobre una superficie horizontal si roce. Se aparta al cuerpo de su posición de equilibrio y se lo libera. Determine el trabajo realizado por el resorte cuando el cuerpo se desplaza desde una posición x=0 hasta otra *x* y vuelve a x=0 . Si empleamos la ley de Hooke $F_{Resorte} = -kx$

El trabajo en el camino de ida, desde o a *x*

$$W_{FResorte} = \int_0^x -kx\,dx = -\frac{1}{2}kx^2$$



El trabajo en el camino de vuelta desde *x* a 0

$$W_{FResorte} = \int_x^0 -kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2$$

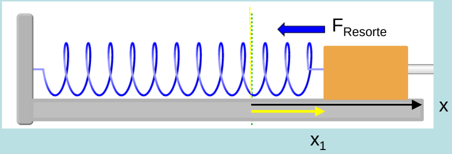
El trabajo neto del resorte en el camino de ida y vuelta, una trayectoria cerrada, vale cero.

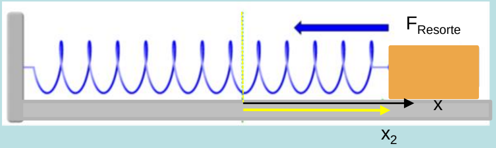
Conclusión: La fuerza que ejerce el resorte es Conservativa

Nuestra tarea ahora es encontrar la expresión de la energía potencial asociada al resorte.

Empleamos la misma idea que utilizamos con la fuerza peso.

Ejemplo 3: Un resorte de constante k está unido a un cuerpo apoyado sobre una superficie horizontal sin roce. Se aparta al cuerpo de su posición de equilibrio y se lo libera. Determine el trabajo realizado por el resorte cuando el cuerpo se desplaza desde una posición x_1 hasta otra x_2





$$W_{Resorte} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\,dx = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right) = -\Delta E_{pot\ Elástica} = -\left(E_{Pe}(2) - E_{Pe}(1)\right)$$

La **Energía Potencial Elástica** está dada por

$$E_{Pot\ Elas} = \frac{1}{2}kx^2$$

Teorema de trabajo y energía Mecánica

Partimos del teorema de trabajo y energía cinética

$$W_{F_R} = \sum W_{F_i} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

Sobre el sistema físico están actuando fuerzas, las cuales se pueden clasificar en fuerzas Conservativas y fuerzas No Conservativas. Esto nos lleva a clasificar al trabajo como: trabajo realizado por la fuerzas conservativas y trabajo realizado por las fuerzas No Conservativas. Por lo tanto:

$$W_{FR} = W_{Neto} = W_{FC} + W_{FNC} = \Delta E_C$$

$$W_{FC} = -\Delta E_{Pot}$$

$$-\Delta E_{Pot} + W_{FNC} = \Delta E_C$$

$$W_{FNC} = \Delta E_C + \Delta E_{Pot}$$

$$W_{FNC} = \Delta E_C + \Delta E_{Pot}$$

Si sobre el sistema físico está presente un resorte y la fuerza peso, entonces hay, en principio, una energía potencial elástica y una energía potencial gravitatoria.

Teorema de trabajo y energía Mecánica

$$W_{FNC} = \Delta E_C + \Delta E_{Pot\ Gravitatoria} + \Delta E_{Pot\ elástica}$$

$$W_{FNC} = E_{Cf} - E_{Ci} + E_{PGf} - E_{PGi} + E_{PEf} - E_{PEi}$$

Energía Mecánica = Energía cinética + Energía potencial Gravitatoria + Energía potencial elástica

El trabajo realizado por todas las fuerzas No conservativas es igual a la variación de la Energía Mecánica

$$\boxed{W_{FNC} = E_{Mec}(f) - E_{Mec}(i) = \Delta E_{Mecánica}}$$

Teorema de trabajo y energía Mecánica

$$\boxed{W_{FNC} = E_{Mec}(f) - E_{Mec}(i) = \Delta E_{Mecánica}}$$

¿Bajo qué condiciones se conserva o es constante la energía mecánica?

Para que la energía mecánica sea constante, su variación debe valer cero. Por lo tanto, se debe verificar:

$$\Delta E_{Mecánica} = 0$$

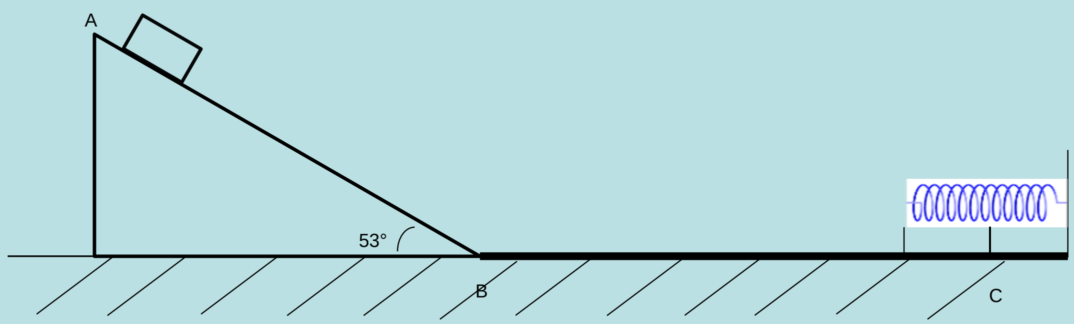
Pero la variación de energía mecánica, de acuerdo a lo expresado en el recuadro anterior

$$W_{FNC} = \Delta E_{Mecánica}$$

Por lo tanto, lo que debe valer cero es el lado izquierdo de la expresión, es decir el trabajo de las fuerzas No conservativas.

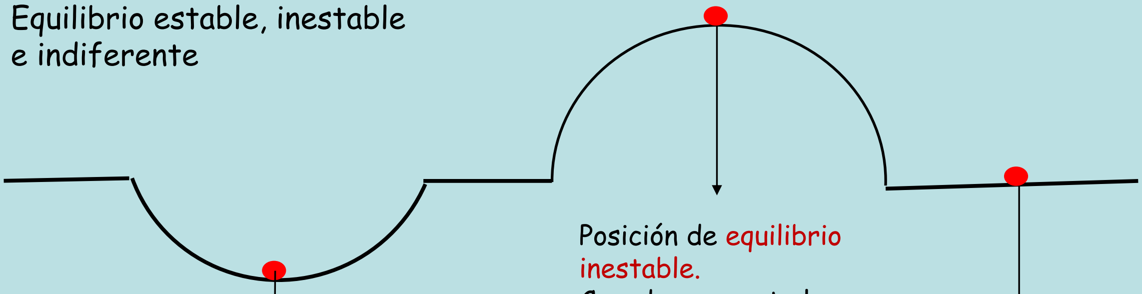
La energía mecánica se conserva si el trabajo total de las fuerzas No Conservativas vale cero

Un cuerpo de 2 kg cae partiendo del reposo (A), del extremo superior de un plano inclinado de 53° y de 1,2 m de longitud. Luego, recorre un plano horizontal rugoso hasta chocar contra un resorte de constante k=1000 N/m al que comprime 0,08m y queda momentáneamente en reposo (C). Calcule:
a) la velocidad del cuerpo en la unión de los planos (B). b) el trabajo de la fuerza de roce entre los puntos B y C.



Movimiento Armónico Simple (MAS)

Equilibrio estable, inestable e indiferente



Posición de equilibrio estable.
Cuando se aparta a la partícula de este punto y se la libera, se genera una fuerza restauradora que provoca que el cuerpo regrese a su posición de equilibrio.

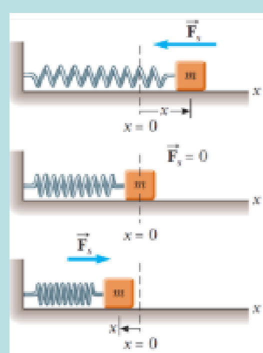
Posición de equilibrio inestable.
Cuando se aparta la partícula de ese punto, no regresa por si sola a ese punto

Posición de equilibrio indiferente.
Cuando se aparta la partícula de ese punto sigue en equilibrio

Cuando un cuerpo se aparta de suposición de equilibrio estable y se lo libera, comienza a oscilar respecto de su poción de equilibrio.

Ejemplo: péndulo simple

sistema masa resorte



Una clase de movimiento oscilatorio es el movimiento armónico simple, tal como el cuerpo sujeto a un resorte

Vimos en clases anteriores que:

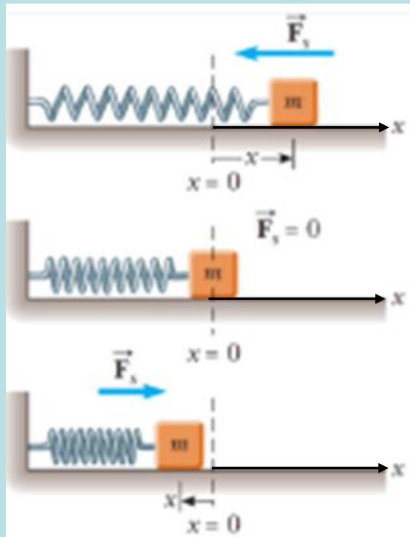
La fuerza que hace el resorte sobre el cuerpo satisface la Ley de Hooke. En una dimensión

$$F = -kx$$

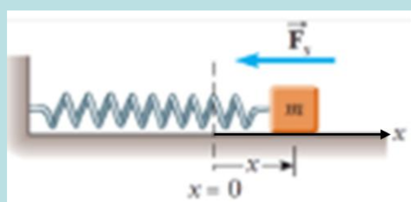
Apartamiento de la posición de equilibrio

Constante del resorte. Da cuenta del tipo o calidad del resorte

El signo negativo significa que es una fuerza recuperadora



Si aplicamos la segunda ley:



Suponemos que la superficie es lisa

$$\sum F_x = ma_x$$

$$-kx(t) = ma_x$$

$$-kx(t) = m\frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} + kx(t) = 0$$

Si dividimos por m y definimos: $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

Esta expresión es una ecuación diferencial de segundo orden homogénea y es la que satisface un cuerpo que está realizando un movimiento armónico simple

Esta clase de ecuaciones diferenciales las van a estudiar formalmente en Matemática C. Ahora trataremos de encontrar su solución a partir de observar el movimiento, por ejemplo de un sistema masa-resorte

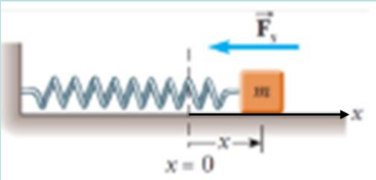
Características del MAS:

- Movimiento oscilatorio: se mueve desde un lado y hacia otro de la posición de equilibrio
- Movimiento periódico: las variables cinemáticas se repiten, luego de transcurrir un tiempo denominado período. Se denota con T al período

¿Qué funciones conocen que son oscilatorias y periódicas?

Las funciones que tienen esas características, oscilatorias y periódicas, son senos y cosenos

Se propone como solución a:



$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

Posición del cuerpo para todo tiempo t

Fase del movimiento

Fase inicial (t=0) del movimiento

Amplitud del movimiento. Mayor apartamiento de la posición de equilibrio

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Frecuencia angular

Para que la solución esté totalmente definida se deben conocer las condiciones iniciales:

$$t = 0 \qquad \begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ v(t=0) &= v_0 \end{aligned}$$

¿Cómo sabemos que la expresión propuesta es una solución de la ecuación diferencial?

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega^2 x(t) = 0$$

Debemos derivarla dos veces y verificar que satisface la igualdad. Concretamente:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$$

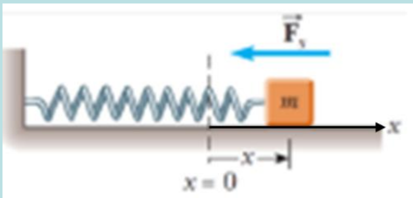
$$\frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \theta_0)$$

$$\frac{dx(t)^2}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0)$$

$$-A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) + \omega^2 A \cos(\omega t + \theta_0) = 0$$

Se ha verificado que la expresión propuesta es solución de la ecuación diferencial.
Les dejo para que verifiquen que si usan la función seno, es también solución

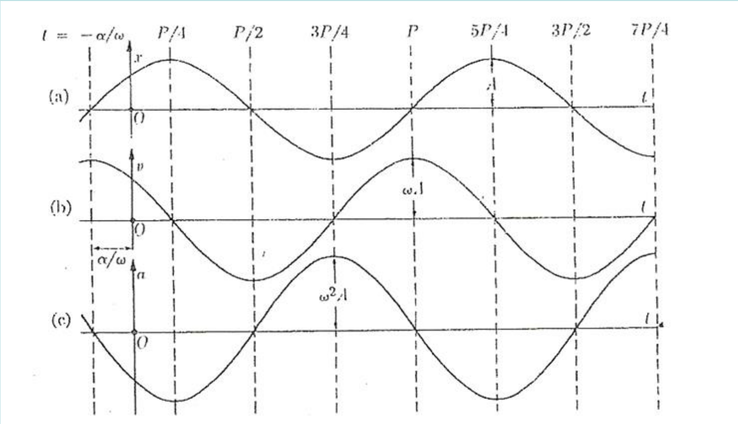
Variables cinemáticas

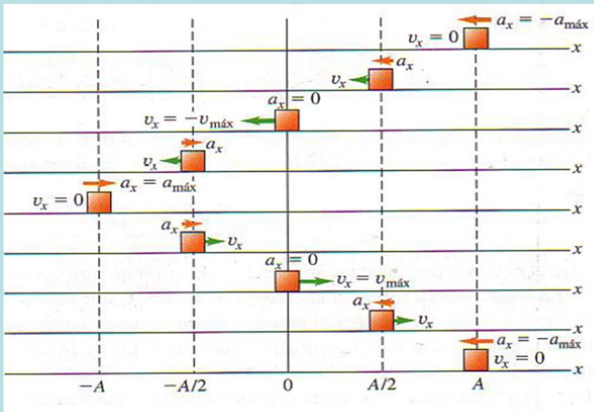


Posición $\quad a) \quad x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0)$

Velocidad $\quad b) \quad v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \theta_0)$

Aceleración $\quad c) \quad a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \theta_0) = -\omega^2 x(t)$





A partir del análisis surge que en los extremos del movimiento la velocidad vale cero y la aceleración adquiere, en módulo, su mayor valor.

En la posición de equilibrio la velocidad es máxima, en módulo, y la aceleración es nula.

El período del movimiento T se relaciona con la frecuencia angular por medio de:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Resultando

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

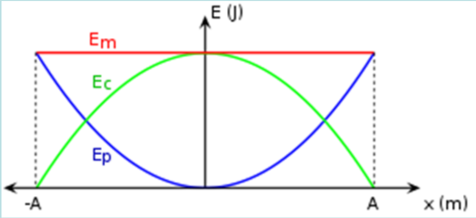
Se define la frecuencia f como el número de oscilaciones por unidad de tiempo

$$\mathrm{f} = \frac{1}{T}$$

Energía del movimiento armónico simple

En la clase anterior vimos que la fuerza que ejerce el resorte es conservativa y que su energía potencial elástica se expresa como:

$$E_{Pot\ elástica} = \frac{1}{2}kx^2$$



La energía cinética

$$E_{cinética} = \frac{1}{2}mv^2$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \qquad x^2(t) = A^2\cos(\omega t + \theta_0)^2$$

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega\sin(\omega t + \theta_0) \qquad v^2(t) = A^2\omega^2\sin(\omega t + \theta_0)^2$$

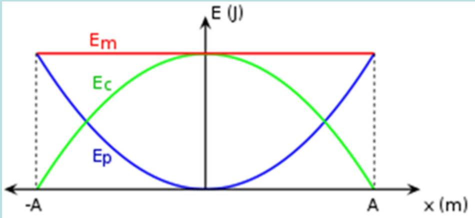
Por lo tanto la energía mecánica va a ser

$$E_{mec} = E_{potencial} + E_{cinética} = \frac{1}{2}kA^2\cos(\omega t + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin(\omega t + \theta_0)^2$$

$$E_{mec} = E_{cinética} + E_{potencial} = \frac{1}{2}kA^2\cos(\omega t + \theta_0)^2 + \frac{1}{2}m\,A^2\omega^2\sin(\omega t + \theta_0)^2$$

k

$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2$$

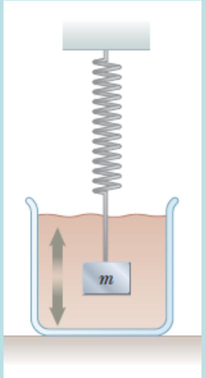


$$\boxed{W_{FNC} = \Delta E_{Mecánica} = E_{Mec}\,(f) - E_{Mec}(i)}$$

Por lo tanto como $W_{FNC} = 0$ la energía mecánica en el MAS es constante e igual a

$$E_{mec} = \frac{1}{2}kA^2 = cte\ en\ cualquier\ punto\ de\ la\ trayectoria$$

MOVIMIENTO ARMÓNICO AMORTIGUADO



En muchos sistemas reales, fuerzas no conservativas como la fricción o la resistencia del aire retardan el movimiento del sistema. En consecuencia, la energía mecánica del sistema disminuye en el tiempo y se dice que el movimiento está amortiguado.

La figura bosqueja uno de tales sistemas: un objeto unido a un resorte y sumergido en un líquido viscoso.

Un tipo común de fuerza retardadora es del tipo $\vec{R} = -b\vec{v}$ (donde b es una constante llamada coeficiente de amortiguamiento) donde la fuerza es proporcional a la rapidez del objeto en movimiento y actúa en la dirección opuesta a la velocidad del objeto respecto al medio. Si además actúa una fuerza restauradora ejercida por un resorte, la segunda ley de Newton se puede escribir como:

$$\sum F_x = -kx - bv_x = ma_x$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Cuando la fuerza retardadora es pequeña en comparación con la fuerza restauradora máxima (b pequeño), la solución de la ecuación diferencial está dada por:

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

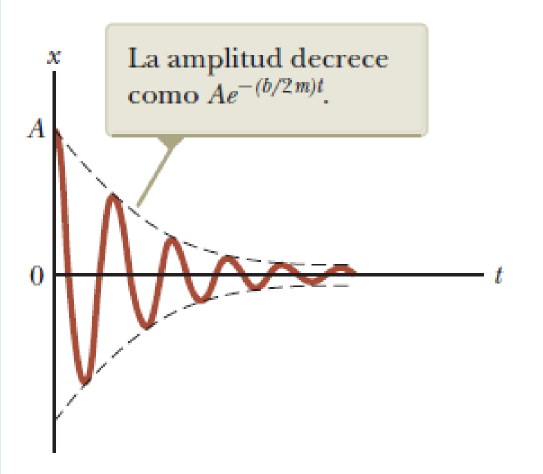
γ

Es conveniente expresar la frecuencia angular de un oscilador amortiguado en la forma

La figura muestra la posición como función del tiempo para un objeto que oscila en presencia de una fuerza retardadora. Cuando la fuerza retardadora es pequeña, el carácter oscilatorio del movimiento se conserva pero la amplitud disminuye exponencialmente en el tiempo, con el resultado de que al final el movimiento cesa. Cualquier sistema que se comporte de esta forma se conoce como oscilador amortiguado. Las líneas negras discontinuas en la figura, que definen la envoltura de la curva oscilatoria, representan el factor exponencial de la ecuación solución x(t)

$$x = Ae^{-(b/2m)t}\cos(\omega t + \phi)$$

cuando b es pequeño



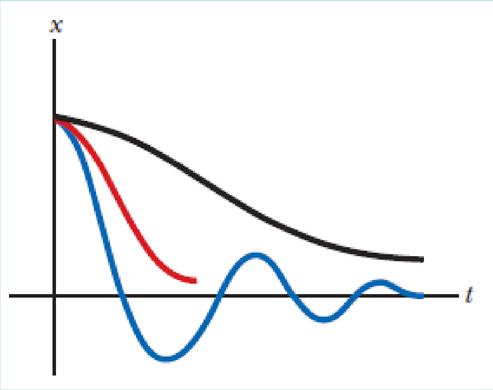
Cuando la magnitud de la fuerza retardadora es pequeña, tal que b/2m < ω_0, se dice que el sistema está subamortiguado. El movimiento resultante se representa mediante la curva azul de la figura.

Cuando b alcanza un valor crítico b_c tal que $b_c/2m = \omega_0$, el sistema no oscila y se dice que está críticamente amortiguado. En este caso el sistema, una vez liberado del reposo en alguna posición de no equilibrio, se aproxima pero no pasa a través de la posición de equilibrio. La gráfica de posición frente a tiempo para este caso es la curva roja.

Si el medio es tan viscoso que la fuerza retardadora es grande en comparación con la fuerza restauradora (es decir, si b/2m > ω_0), el sistema está sobreamortiguado.

De nuevo el sistema desplazado, cuando tiene libertad para moverse, no oscila, sino simplemente regresa a la posición de equilibrio. Conforme el mortiguamiento aumenta, el intervalo de tiempo requerido para que el sistema se aproxime al equilibrio también aumenta, como indica la curva negra.

Para sistemas críticamente amortiguados y sobreamortiguados, no hay frecuencia angular ω, y la solución en la ecuación diferencial no es válida.

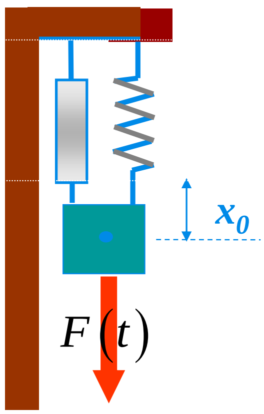


MOVIMIENTO ARMONICO FORZADO

Ecuación diferencial

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos(\omega_f t)$$

$$2\gamma=\mu/m$$



Agente Exterior (oscilatorio y periódico).

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_f t)$$ donde: $$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

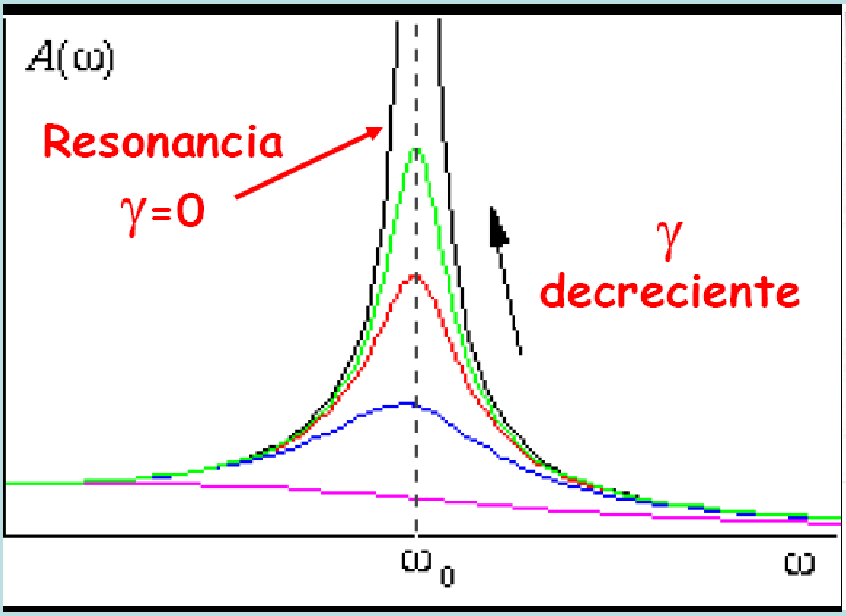
Solución:

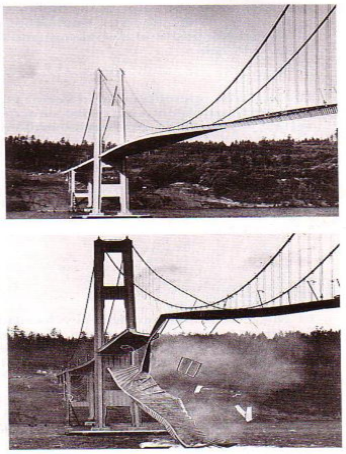
$$x(t) = A.\cos(\omega_f t + \alpha)$$

La Amplitud es :

$$A = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f^2 - \omega_0^2\right)^2 + 4.\gamma^2.\omega_f^2}}$$

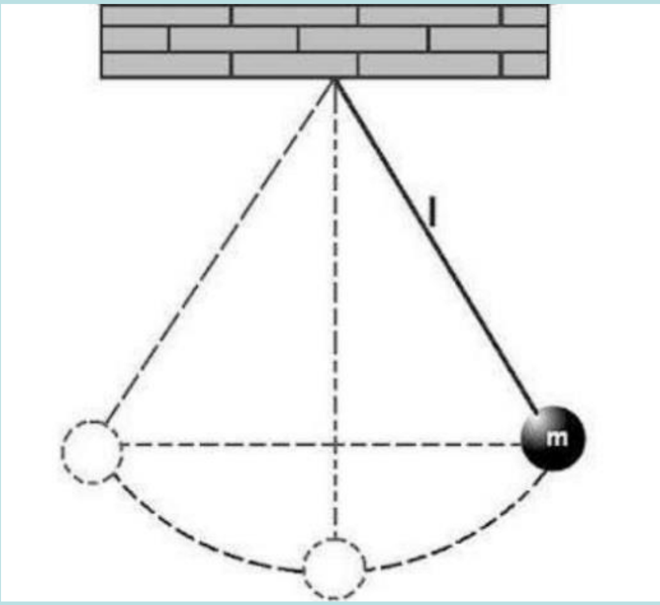
FENÓMENO DE RESONANCIA





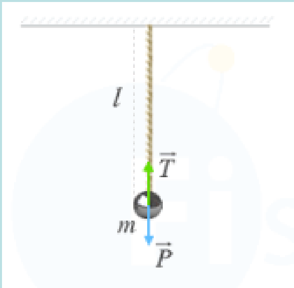
13.28 El puente Tacoma Narrows se desplomó cuatro meses y seis días después de abrirse al tráfico. El claro principal tenía 2800 pies de longitud y 39 pies de anchura, con vigas de 8 pies de altura para darle rigidez en ambos costados. La amplitud máxima de las vibraciones torsionales fue de 35°; la frecuencia fue de cerca de 0.2 Hz.

https://www.youtube.com/watch?v=SzObC64E2Ag



Péndulo Simple

Consta de un hilo ideal de longitud *l* con una masa puntual en un extremo y el otro extremo está fijo.



Elegimos como sistema bajo estudio la masa *m,* los agentes con los cuales interactúa son la Tierra y la soga.

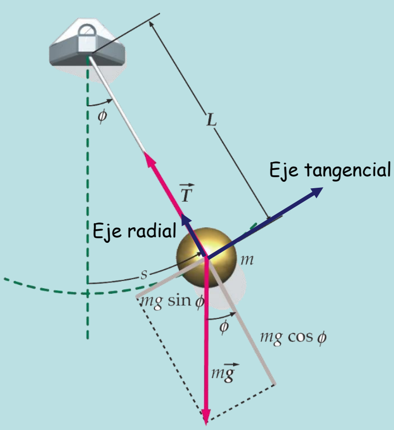
Si partimos de la situación en la cual el péndulo está en reposo, lo apartamos un ángulo ϕ de su posición de equilibrio y lo liberamos, el cuerpo comienza a oscilar.

Los ejes adecuados para describir el movimiento son el eje tangencial y el radial, indicados en la figura.

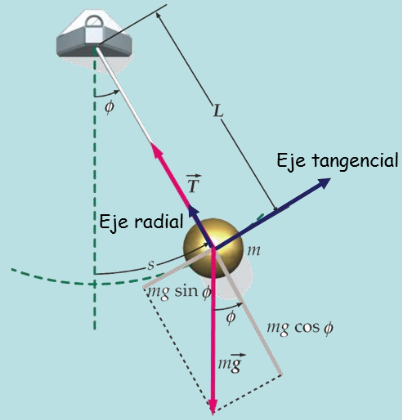
Aplicando la Segunda Ley de Newton:

$$\sum F_{rad} = T - mg\cos\phi = ma_{radial} = m\frac{v^2}{l}$$

$$\sum F_{tangencial} = -mg\sin\phi = ma_{tangencial} = m\alpha l$$



Analizaremos en detalle la componente de la fuerza en la dirección tangencial



$$\sum F_{tangencial} = -mg\sin\phi = ma_{tangencial} = m\alpha l$$

Si el apartamiento de la posición de equilibrio es pequeño, $\phi \leq 0,244$ radianes (alrededor de los 14 grados sexagesimales), es válida la aproximación:

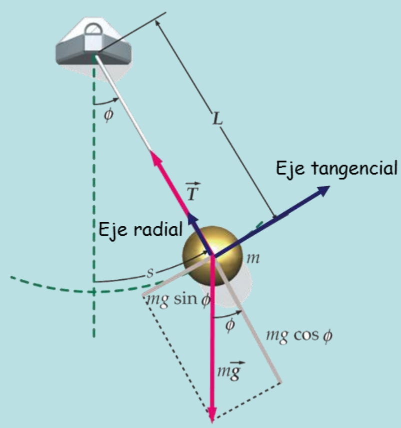
$$\sin\phi \approx \phi, expresado\ en\ radianes$$

$$\sum F_{tangencial} = -mg\phi = m\frac{d^2\phi}{dt^2}l$$

Si dividimos por la masa y por la longitud del hilo, se obtiene

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + \omega^2\phi = 0 \qquad \omega^2 = \frac{g}{l}$$



$$\phi(t) = \phi_{max}\sin(\omega t + \theta_0)$$

Se concluye que para pequeños apartamientos de la posición de equilibrio, el péndulo realiza un movimiento armónico simple, debido a que la posición del ángulo en función del tiempo satisface dicha ecuación diferencial.

Recordamos que el período del movimiento está vinculado con ω por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Por lo tanto el período de un péndulo simple está dado por:

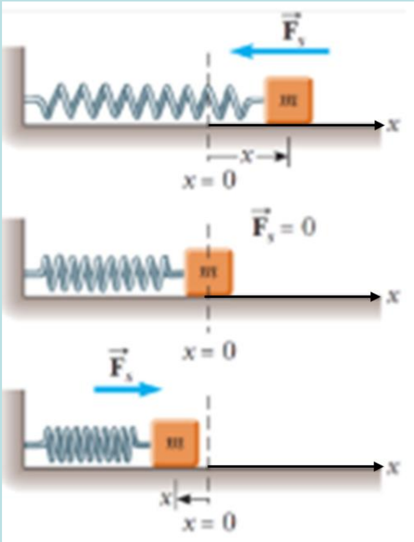
$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Depende de la longitud del hilo y de la gravedad, NO depende de la masa

Ejercicio 3

Un objeto de 4,5kg oscila adosado a un resorte horizontal con una amplitud de 3,8cm.
Su aceleración máxima es $26 m/s^2$. Determine:

a) La constante del resorte.
b) La frecuencia de la oscilación y el período del movimiento.
c) La posición del cuerpo en función del tiempo suponiendo que el tiempo se comienza a medir en el punto de máxima amplitud.
d) El valor de x, v y a para t= 2 seg. Interprete los signos.

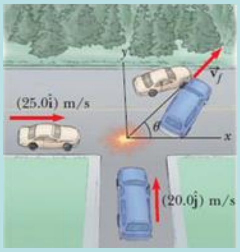


Clase 9

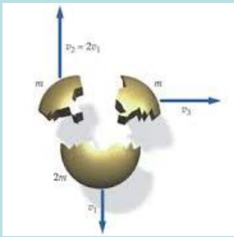
Modelo : Sistema de partículas

En las clases previas estudiamos situaciones en las que los sistemas físicos fueron modelados como partículas.
A partir de ahora nos va a interesar analizar otros movimientos por ejemplo:

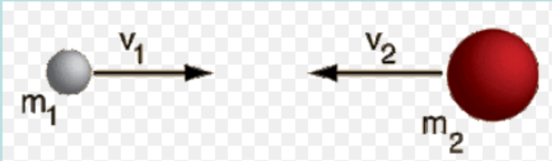
a) El choque de dos autos en una esquina.



b) Un proyectil luego de haber estallado en tres partes



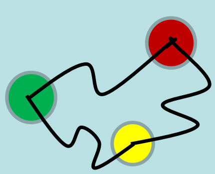
c) Choque frontal de dos bolas



El modelo de partícula no es válido para estudiar estos ejemplos.

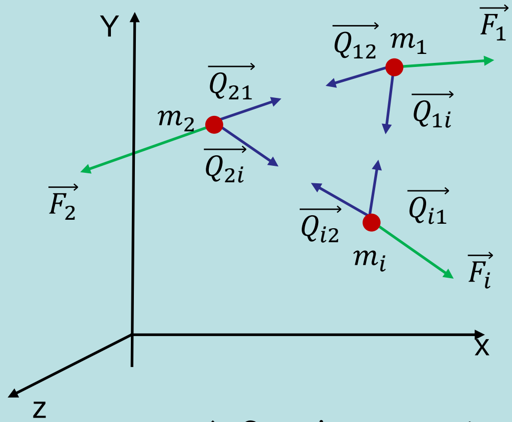
Introducimos entonces el modelo: Sistema de partículas

- Cuando un conjunto de partículas están vinculadas entre sí por fuerzas, forman un sistema de partículas.
- Si dicho sistema se mueve por el efecto de fuerzas exteriores, el movimiento de cada una de las partículas que lo componen puede ser muy complicado, pero es muy simple si lo describimos como un todo.
- Arrojo un conjunto de pelotas unidas por sogas o elásticos……



- Introducir cualitativamente el centro de masas
- El centro de masas es el lugar dónde se puede pensar que está concentrada toda la masa del sistema y dónde están actuando todas las fuerzas externas.
- Si estudiamos el movimiento del centro de masas, el planteo se simplifica. Podemos pensar al centro de masas como si fuera una partícula, de esta manera recuperamos todo lo aprendido anteriormente para una partícula, pero aplicado al centro de masas del sistema.

❖ Vamos a suponer un sistema físico formado por partículas que interactúan mediante fuerzas externas e internas.

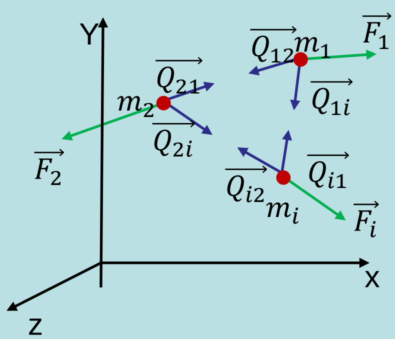


$\overrightarrow{F_1}$ $\overrightarrow{F_2}$ $\overrightarrow{F_i}$ Fuerzas externas

$\overrightarrow{Q_{i1}}$ Fuerza interna

Fuerza sobre la partícula i que ejerce la partícula 1

❖ Se quiere encontrar cuál es la expresión de la Segunda Ley de Newton cuando nuestro sistema físico bajo estudio se modela como un sistema de partículas



Sabemos aplicar la Segunda Ley Newton sobre una partícula. Por ejemplo, a la 1, 2 e i

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{Q_{12}} + \overrightarrow{Q_{1i}} = m_1\overrightarrow{a_1}$$

$$\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{Q_{21}} + \overrightarrow{Q_{2i}} = m_2\overrightarrow{a_2}$$

$$\overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{Q_{i1}} + \overrightarrow{Q_{i2}} = m_i\overrightarrow{a_i}$$

Notemos que por la Tercera Ley

$$\overrightarrow{Q_{12}} = -\overrightarrow{Q_{21}} \qquad \overrightarrow{Q_{i2}} = -\overrightarrow{Q_{2i}} \qquad \overrightarrow{Q_{1i}} = -\overrightarrow{Q_{i1}}$$

Si sumamos miembro a miembro las expresiones de la Segunda Ley para cada partícula

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_i} = m_1\overrightarrow{a_1} + m_2\overrightarrow{a_2} + m_i\overrightarrow{a_i}$$

Las fuerzas internas se cancelan

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_i} = m_1\overrightarrow{a_1} + m_2\overrightarrow{a_2} + m_i\overrightarrow{a_i}$$

Las fuerzas internas se cancelan

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{i\ Externas}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{a_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d^2\overrightarrow{r_i}(t)}{dt^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{i\ Externas}} = \frac{d^2 \sum m_i\overrightarrow{r_i}(t)}{dt^2}$$

Se define: $M = \sum m_i = masa\ total\ del\ sistema. Multiplico\ y\ divido\ por\ M$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{i\ Externas}} = M\frac{d^2 \sum m_i\overrightarrow{r_i}(t)}{dt^2 \sum m_i}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_{i\ Externas}} = M\frac{d^2 \sum m_i\overrightarrow{r_i}(t)}{dt^2 \sum m_i}$$

Si recordamos la expresión de la Segunda Ley para una partícula de masa M

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} = M\frac{d^2\overrightarrow{r_i}(t)}{dt^2}$$

Por comparación surge que la expresión destacada en rojo se comporta como el vector posición de una partícula, es la definición de centro de masas, $\vec{r}_{CM}$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i\vec{r}_i(t)}{\sum m_i}$$

El centro de masas es el lugar en donde "puedo imaginar" que está concentrada toda la masa del sistema y dónde están actuando todas las fuerzas.

Con este concepto se puede recuperar todo lo aprendido para una partícula pero, en este caso, para aplicarlo al centro de masas del sistema.

El vector posición centro de masas se define como:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}$$

$$y_{CM} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}$$

Si derivamos el vector posición del CM respecto del tiempo, se obtiene la velocidad del centro de masas

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\overrightarrow{r_{CM}}}{dt}$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

$$v_{x_{CM}} = \frac{\sum m_i v_{x_i}}{\sum m_i}$$

$$v_{y_{CM}} = \frac{\sum m_i v_{y_i}}{\sum m_i}$$

Retomamos la expresión remarcada con rojo en una diapositiva anterior

$$\sum \vec{F}_{i\ ext} = M \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{r_{CM}}(t)$$

$$\sum \vec{F}_{i\ ext} = M \frac{d}{dt} \overrightarrow{v_{CM}}$$

$$\sum \vec{F}_{i\ ext} = \frac{d}{dt} M \overrightarrow{v_{CM}}$$

$$\sum \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d}{dt} M\overrightarrow{v_{CM}}$$

Se define la cantidad de movimiento del centro de masas $\overrightarrow{P_{CM}}$ (vectorial)

$$\overrightarrow{P_{CM}} = M\overrightarrow{v_{CM}} = \sum m_i \vec{v}_i$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt}}$$

Esta expresión es la Segunda Ley de Newton para un sistema de partículas. Si seguimos desarrollándola, encontramos la expresión que vamos a emplear más usualmente

$$\sum \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt} = \frac{dM\overrightarrow{v_{CM}}}{dt} = M\frac{d\overrightarrow{v_{CM}}}{dt} = M\overrightarrow{a_{CM}}$$

$$\boxed{\sum \vec{F}_{i\,ext} = M\overrightarrow{a_{CM}}}$$

Conservación de la cantidad de movimiento

Así como en la clase anterior estábamos interesados en saber bajo qué condiciones se conserva la energía mecánica, ahora queremos averiguar bajo qué condiciones se conserva la cantidad de movimiento del centro de masas.

¿Qué condiciones se deben cumplir para que se conserve la cantidad de movimiento?

La Segunda Ley para un sistema de partículas establece

$$\boxed{\sum \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt}}$$

Si la suma de fuerzas externas (lado izquierdo de la igualdad) vale cero, la derivada de la cantidad de movimiento del centro de masas respecto del tiempo (lado derecho) por ser una igualdad debe valer cero también. Por lo tanto, cuando una derivada vale cero, implica que la magnitud, en este caso la Cantidad de movimiento es constante

Segunda Ley de Newton

$$\boxed{\sum \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt}}$$

Expresado formalmente:

$$Si \sum \vec{F}_{i\,ext} = 0, entonces\ por\ la\ Segunda\ Ley\ \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt} = 0, por\ lo\ tanto\ \overrightarrow{P_{cM}}(t_i) = \overrightarrow{P_{cM}}(t_f) = cte$$

Por ser la cantidad de movimiento una magnitud vectorial, se puede expresar la conservación en sus componentes

$$Si \sum F_{i\,ext\,x} = 0, entonces\ por\ la\ Segunda\ Ley\ \frac{dP_{CM\,x}}{dt} = 0, por\ lo\ tanto\ P_{CM\,x}(t_i) = P_{CM\,x}(t_f) = cte$$

$$Si \sum F_{i\,ext\,y} = 0, entonces\ por\ la\ Segunda\ Ley\ \frac{dP_{CM\,y}}{dt} = 0, por\ lo\ tanto\ P_{CM\,y}(t_i) = P_{CM\,y}(t_f) = cte$$

Si $\sum \vec{F}_{i\,ext} \neq 0$ Se define una magnitud vectorial, el impulso lineal $\vec{I}$

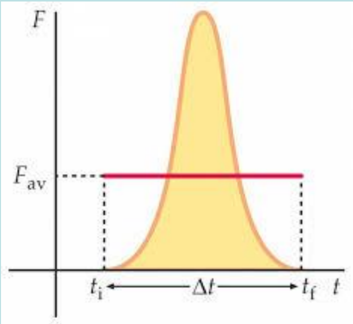
$$\boxed{\sum \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt}}$$

$$\sum \vec{F}_{i\,ext}\,dt = d\overrightarrow{P_{CM}}$$

$$\vec{I} = \int_0^t \sum \vec{F}_{i\,ext}\,dt = \int_{\vec{P}_{CM\,i}}^{\vec{P}_{CM\,f}} d\overrightarrow{P_{CM}} = \overrightarrow{P_{CM}}(t_f) - \overrightarrow{P_{CM}}(t_i) = M\overrightarrow{v_{CM}}(t_f) - M\overrightarrow{v_{CM}}(t_i)$$

$$\vec{I} = M\overrightarrow{v_{CM}}(t_f) - M\overrightarrow{v_{CM}}(t_i)$$

El concepto de Impulso toma relevancia cuando se producen choques o explosiones. En estos casos las fuerzas que intervienen tienen las características de ser muy intensas y duran un intervalo de tiempo corto.
Si se representa una fuerza impulsiva tiene un comportamiento similar al del gráfico siguiente:



Se define la fuerza media en el intervalo $\Delta t = t_f - t_i$

$$\overrightarrow{F_m} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_i}^{t_f} \overrightarrow{F_{Neta}}\, dt \; = \frac{\vec{I}}{\Delta t}$$

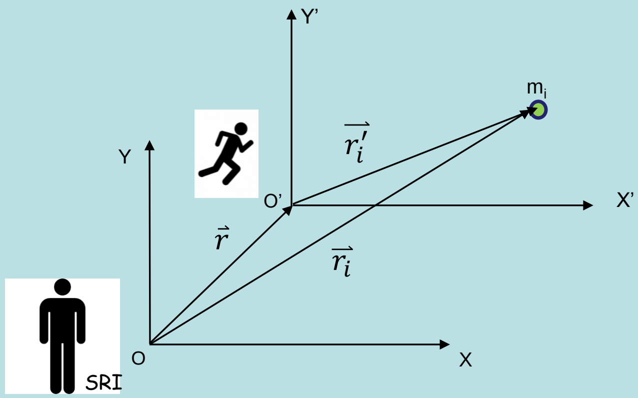
La fuerza media es la fuerza constante que produce el mismo impulso en el intervalo Δt , como se indica en el gráfico.
La fuerza media se puede calcular si se conoce el cambio de la cantidad de movimiento y el intervalo de tiempo en que se produce el choque.

Ejercicio 4 (Modificado)

Un coche pequeño de 1,2tn circula hacia el este a 60km/h cuando choca en un cruce (en el que hay una mancha de aceite) con un camión de 3tn que circulaba hacia el norte a 40km/h. El coche y el camión se acoplan como un solo cuerpo a consecuencia del choque. a) ¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema coche-camión? b) Determine la velocidad del conjunto después de la colisión (módulo, dirección y sentido). c) Halle el valor de la velocidad del centro de masas antes y después de la colisión. ¿Qué puede concluir? d) De los valores de la energía cinética antes y después del impacto. ¿Se conservó la energía cinética del sistema? Justifique todas las respuestas.

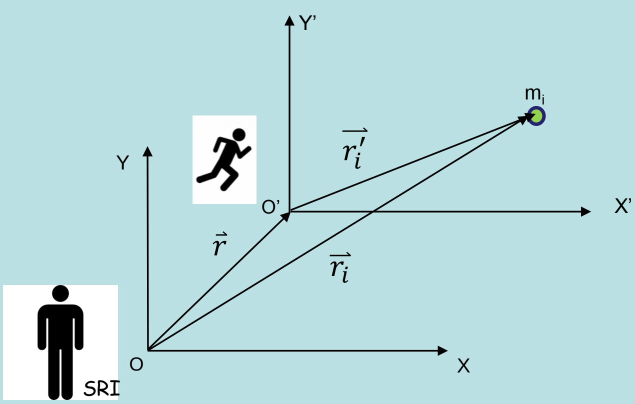
Energía cinética de un sistema de partículas

Un sistema de n partículas se mueve con respecto a un sistema de referencia inercial fijo con respecto a la Tierra. Cada partícula tiene una velocidad $\overrightarrow{v_i}$ con respecto de dicho referencial al que le asociamos un sistema de coordenadas con origen en O.
La energía cinética del sistema de partículas será la suma de las energía cinética de cada una de sus partículas respecto de dicho sistema.



$$E_{cinética\ total} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Se elige otro sistema de coordenadas con origen en O' que se mueve con velocidad $\vec{v}$ con respecto a O



A partir del gráfico, analizando solamente para la partícula m_i

$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_i'} + \vec{r}$$

Si derivamos a ambos lados respecto del tiempo

$$\frac{d\overrightarrow{r_i}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_i'}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}$$

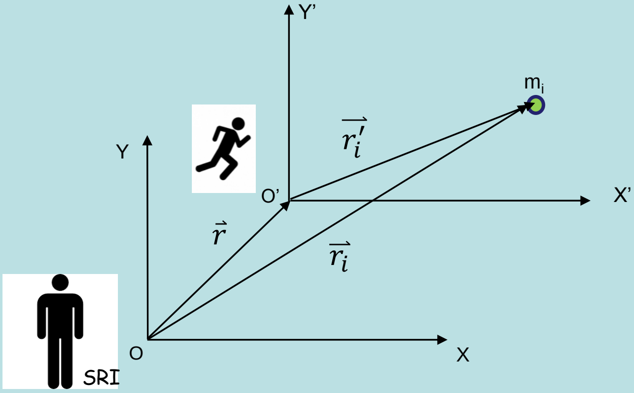
$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_i'} + \vec{v}$$

Siendo v_i' la velocidad de la partícula i respecto de O'

Entonces, la energía cinética se puede expresar como

$$E_{Cinética\ Total} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left(\overrightarrow{v_i'} + \vec{v}\right)\left(\overrightarrow{v_i'} + \vec{v}\right) = \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[v^2 + {v'}_i^2 + 2\vec{v}\overrightarrow{v_i'}\right]$$

$$E_{Cinética\ Total} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i\, {v'}_i^2 + \vec{v} \sum_i m_i\, \overrightarrow{v_i'}$$



$$E_{Cinética\ Total} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i\, {v'}_i^2 + \vec{v} \sum_i m_i\, \overrightarrow{v_i'}$$

$$E_{Cinética\ Total} = \frac{1}{2} M v^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i\, {v'}_i^2 + \vec{v} \sum_i m_i\, \overrightarrow{v_i'}$$

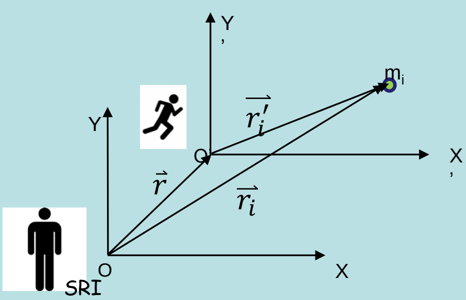
Si recordamos la definición del centro de masas y su velocidad

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \qquad \vec{v}_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{\sum m_i}$$

Si se elige a O' como el sistema Centro de Masas, la velocidad del centro de masas respecto del centro de masas vale cero, ya que

$$\vec{v}'_{CM} = \frac{\sum m_i \vec{v}'_i}{\sum m_i} = 0$$

Por lo tanto, el tercer término de la energía cinética se anula.



$$E_{Cinética\ Total} = \frac{1}{2} M v^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i\, {v'}_i^2 + \cancel{\vec{v} \sum_i m_i\, \overrightarrow{v_i'}}$$

$$E_{Cinética\ Total} = \frac{1}{2} M {V_{CM}}^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i\, {v'}_i^2$$

$$E_{Cinética\ Total} = E_{Cinética\ del\ CM} + E_{Cinética\ Relativa\ al\ CM}$$

Podemos pensar que la energía de un sistema de partículas está compuesta por dos términos. Uno, es la energía cinética del centro de masas, ya que es la energía cinética de una masa igual a la masa total del sistema y que se mueve con la velocidad del centro de masas. El otro término es la energía cinética de las partículas respecto del centro de masas

<u>Teorema de trabajo y energía cinética para un sistema de partículas</u>

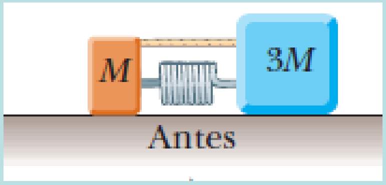
No voy a desarrollar formalmente este teorema, realizaré una descripción de una situación experimental

Para empezar retomemos el enunciado del teorema de trabajo y energía cinética cuando el sistema bajo estudio es una partícula

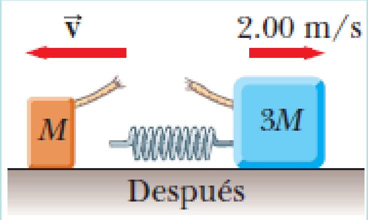
$$W_{F_{Resultante}} = \sum W_{F_i} = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

- Cuando el sistema es una partícula, todas las fuerzas son externas.
- Cuando el sistema físico es un sistema de partículas, las fuerzas pueden ser externas al sistema o internas.
- En principio es de esperar que tanto las fuerzas externas como las internas realicen trabajo.
- Algunos podrían afirmar que como la suma de todas fuerzas internas da cero, entonces su trabajo valdría cero también. Esta última afirmación no es correcta y lo podemos analizar en la siguiente experiencia

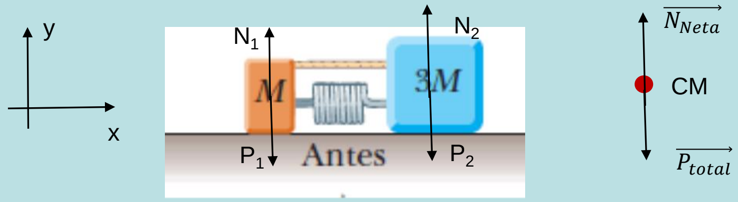
Consideremos los dos cuerpos unidos por medio de un resorte y un hilo que los sujeta inicialmente como se muestra en la figura.



El sistema físico elegido consiste de los dos cuerpos y el resorte (de masa despreciable). Lo modelamos como un sistema de dos partículas.
Inicialmente los cuerpos están en reposo. Por lo tanto la energía cinética inicial vale cero.
Finalmente se corta el hilo y se observa que los cuerpos se alejan uno respecto del otro.



Si analizamos la dinámica, las fuerzas externas que actúan sobre cada cuerpo son: el peso y la normal. Además, como se desprecia el roce, la suma neta de fuerzas externas es cero.



$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_x = 0$$

El trabajo neto de las fuerzas externas vale cero, pero la energía cinética cambió. Inicialmente vale cero y finalmente se mueven con una energía cinética diferente de cero. Por lo tanto, esa variación de energía debe provenir de un trabajo de fuerzas internas. En este caso el que realiza trabajo es el resorte.

Teorema de trabajo y energía cinética para un sistema de partículas

$$W_{F\ externas} + W_{F\ Internas} = \Delta E_{cinética} = \Delta E_{cinética\ \ CM} + \Delta E_{cinética\ Rel}$$

Se puede seguir analizando qué parte de la energía cinética se modificó en este caso

$$W_{F\ Internas} = \Delta E_{cinética} = \Delta E_{cinética\ \ CM} + \Delta E_{cinética\ Rel}$$

En esta clase vimos la Segunda Ley para el sistema de partículas y la condición para la conservación de la cantidad de movimiento del centro de masas:

$$\sum \vec{F}_{i\ ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt}$$

$$Si \sum \vec{F}_{i\ ext} = 0, entonces\ por\ la\ Segunda\ Ley\ \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt} = 0, por\ lo\ tanto\ \overrightarrow{P_{cM}}(t_i) = \overrightarrow{P_{cM}}(t_f) = cte$$

En el ejemplo tratado

$$\overrightarrow{P_{cM}}(t_i) = \overrightarrow{P_{cM}}(t_f) = cte = M\overrightarrow{V_{CM}}$$

Se concluye entonces

$$W_{F\ Internas} = \Delta E_{cinética} = \Delta E_{cinética\ Rel}$$

Se realizó trabajo interno y el cambio de energía cinética se debe solamente al cambio de energía cinética relativa al centro de masas

Choques

Consideraciones:
- ✓ Se desprecia el roce con la superficie.
- ✓ Choque frontal, unidimensional

Bajo estas suposiciones:

$$W_{F\ Internas} = \Delta E_{cinética\ Rel}$$

$$\Delta E_{cinética\ Rel} \leq 0$$

Surgen 3 posibles situaciones

1) $\Delta E_{c\ Rel} = 0$ ⟹ choque elástico. Única situación de conservación de energía cinética

2) $\Delta E_{c\ Rel} = E_{c\ Rel}(f) - E_{c\ Rel}(i) < 0$ ⟹ Choque plástico. Luego del impacto quedan pegados. Máxima pérdida de energía. Se mueven con la velocidad del centro de masas.

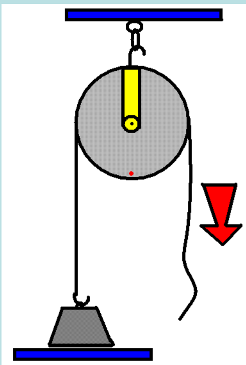
3) $\Delta E_{c\ Rel} = a$ ⟹ Choque inelástico. $-E_{c\ Rel} < a < 0$

Ejercicio 4 (Modificado)

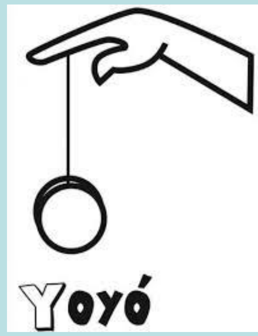
Un coche pequeño de 1,2tn circula hacia el este a 60km/h cuando choca en un cruce (en el que hay una mancha de aceite) con un camión de 3tn que circulaba hacia el norte a 40km/h. El coche y el camión se acoplan como un solo cuerpo a consecuencia del choque. a) ¿Se conserva la cantidad de movimiento del sistema coche-camión? b) Determine la velocidad del conjunto después de la colisión (módulo, dirección y sentido). c) Halle el valor de la velocidad del centro de masas antes y después de la colisión. ¿Qué puede concluir? d) De los valores de la energía cinética antes y después del impacto. ¿Se conservó la energía cinética del sistema? Justifique todas las respuestas.

Torque o Momento de fuerza. Momento Angular de una partícula y de un sistema de partículas.

A partir de ahora vamos a estar interesados en estudiar los siguientes movimientos:



El movimiento de rotación de la polea respecto de su eje que está fijo



El movimiento de un yoyó que rota y se traslada

Queremos abrir una puerta. ¿Cómo hacemos?

¿Aplicamos una fuerza? ¿En dónde la aplicamos?

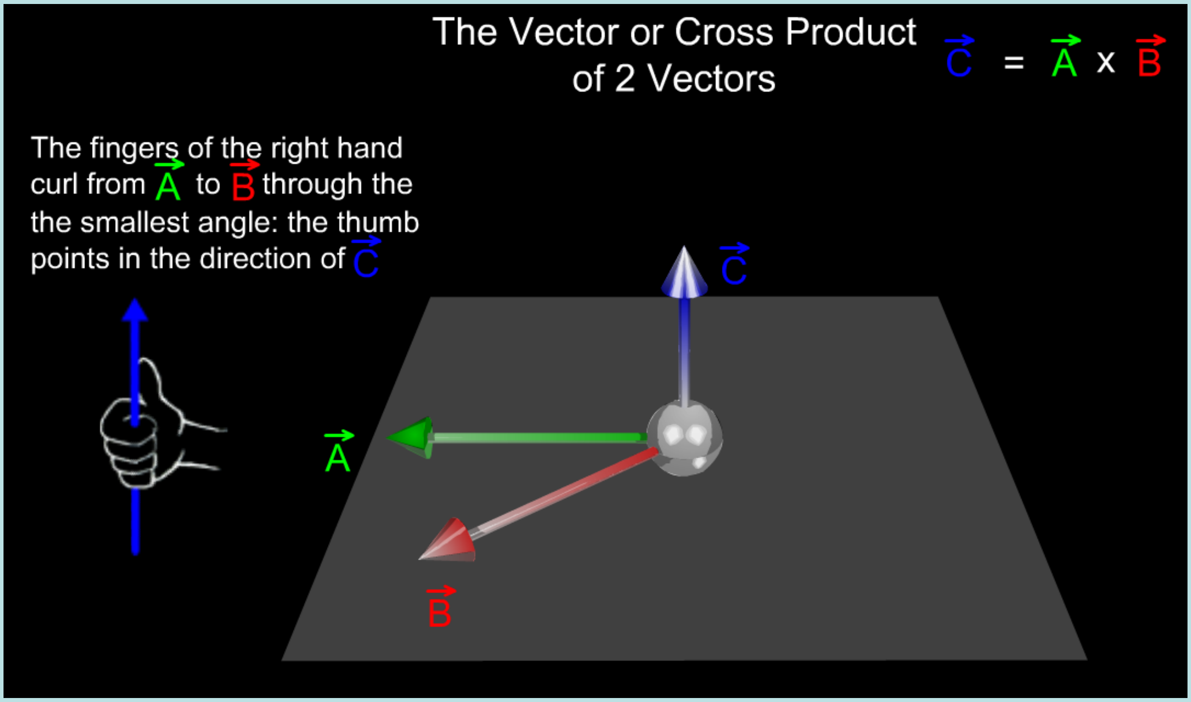
Si ejerzo la fuerza sobre la bisagra: ¿Se abre?

¿En dónde conviene poner el picaporte para abrir fácilmente la puerta?

¿Es casualidad que los picaportes se ubican lo más lejos de las bisagras o hay una razón física?

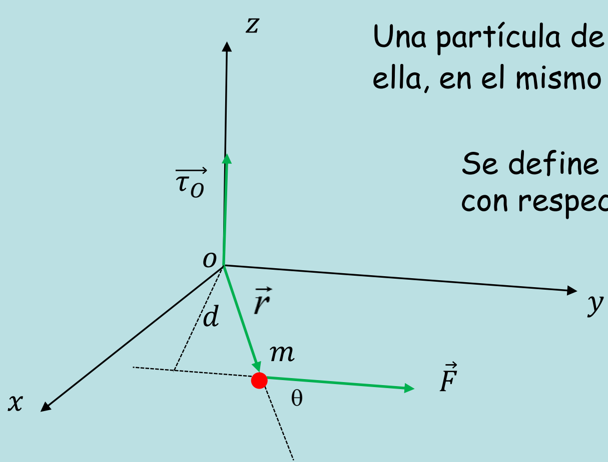
Parecería que en estas situaciones comienza a importa no sólo la fuerza, sino cuál es su punto de aplicación. Además, veremos que es importante cómo está distribuida la masa en los cuerpos.

Comenzamos a estudiar rotaciones de los cuerpos como un todo respecto de un eje fijo. Para alcanzar este objetivo necesitamos conocer las herramientas matemáticas que nos permitan describir el movimiento de rotación.



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \qquad \left|\vec{C}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \, sen\,(\vec{A},\vec{B})$$

<u>Momento de Fuerza respecto de "o" o Torque respecto de "o"</u>

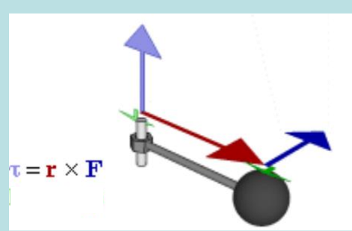


Una partícula de masa m está en el plano "xy" y sobre ella, en el mismo plano, actúa una fuerza $\vec{F}$.

Se define el torque o momento de fuerza con respecto a "o", $\overrightarrow{\tau_O}$

$$\overrightarrow{\tau_{\boxed{0}}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Tiene que pertenecer a SRI



$$|\overrightarrow{\tau_0}| = |\vec{r}|\left|\vec{F}\right| \sin\theta$$

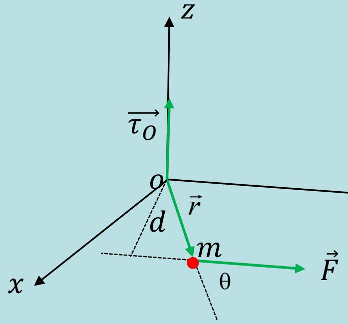
$$|\overrightarrow{\tau_0}| = \left|\vec{F}\right| \underbrace{\boxed{|\vec{r}|\sin\theta}}_{d}$$

$$|\overrightarrow{\tau_0}| = \left|\vec{F}\right| \mathrm{d}$$

d=Distancia perpendicular a la recta de acción de F y que pasa por "O"

$\overrightarrow{\tau_0}$ Es un vector perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Sigue la regla de la mano derecha

Ahora vamos a suponer que $\vec{F}$ es la fuerza neta o resultante que actúa sobre la partícula



$$\overrightarrow{\tau_0} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Si $\quad \vec{F} = \sum \overrightarrow{F_i} = \frac{d\vec{P}}{dt}$

$$\overrightarrow{\tau_0} = \vec{r} \times \sum \overrightarrow{F_i} = \sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \vec{r} \times \frac{d\vec{P}}{dt}$$

Esta expresión indica que es equivalente el torque de la fuerza resultante a sumar los torques de cada una de las fuerzas

$$\frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \cancel{\vec{v} \times \vec{p}} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

El término se anula porque la velocidad y la cantidad de movimiento son vectores paralelos. Por lo tanto, el ángulo que forman entre sí es cero y el seno de cero vale cero.

El origen "o", debe pertenecer a un sistema de referencia Inercial

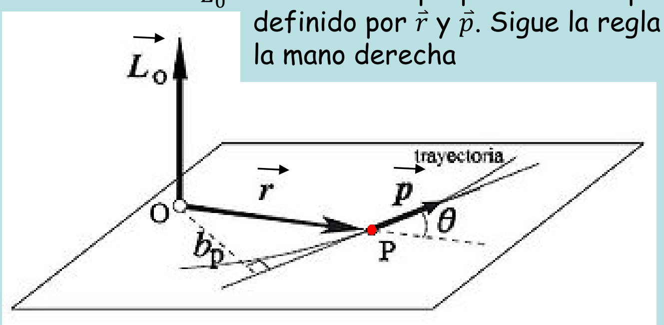
$$\overrightarrow{\tau_{0\,resultante}} = \sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \frac{d\overrightarrow{(\vec{r} \times \vec{p})}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\tau_{0\,resultante}} = \sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \frac{d\overrightarrow{(\vec{r} \times \vec{p})}}{dt}$$

Se define una magnitud $\overrightarrow{L_o}$ para una partícula de masa m que se traslada con velocidad $\vec{v}$ denominada como:

Momento Cinético, Momento angular, Momento de la cantidad de movimiento

$\overrightarrow{L_0}$ Es un vector perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{p}$. Sigue la regla de la mano derecha



$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\left|\overrightarrow{L_0}\right| = |\vec{r}||\vec{p}| \sin\theta$$

El origen "o", debe pertenecer a un sistema de referencia Inercial

$$\left|\overrightarrow{L_0}\right| = |\vec{p}|\,\boxed{|\vec{r}|\sin\theta}$$

b_p

b_p =Distancia perpendicular a la recta de acción de P y que pasa por "o"

$$\overrightarrow{\tau_{0\,resultante}} = \sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \frac{d\overrightarrow{(\vec{r} \times \vec{p})}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\tau_{0\,resultante}} = \sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = \frac{d\overrightarrow{(\vec{r} \times \vec{p})}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

Segunda Ley de Newton para la rotación

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}}$$

Comienza a surgir una similitud entre las ecuaciones que describen el movimiento de traslación y el de rotación

$$\boxed{\sum \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Segunda Ley de Newton para la traslación

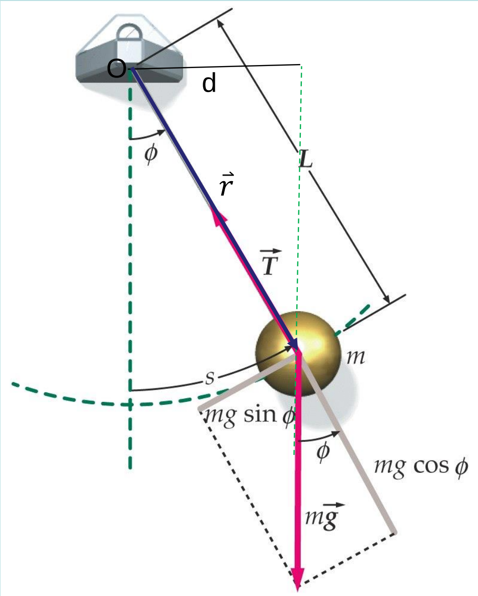
<u>¿Bajo que condiciones se conserva $\overrightarrow{L_0}$?</u>

Si seguimos la línea de razonamiento anteriormente empleada para la conservación de magnitudes físicas, la respuesta es:

$$\sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

$$Si \sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = 0, entonces\ por\ la\ Segunda\ Ley\ para\ la\ rotación\ \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = 0, por\ lo\ tanto\ \overrightarrow{L_O}(t_i) = \overrightarrow{L_O}(t_f) = cte$$

<u>Ejemplo</u>: Un péndulo simple de longitud L y masa m se aparta de su posición de equilibrio y se lo libera. a) Determine el torque neto o resultante respecto del punto donde cuelga, cuando está apartado un ángulo ϕ respecto del equilibrio. b) ¿Se conserva el momento cinético respecto del mismo lugar? c) ¿Se conserva la cantidad de movimiento?



Para dar el valor del torque neto, empezaremos por analizar las fuerza que actúan y si éstas generan torque.

Sobre la partícula, la soga ejerce la tensión T y la Tierra la fuerza peso $\overrightarrow{mg}$.

¿La tensión T realiza torque respecto de O?

$$\overrightarrow{\tau_0} = \vec{r} \times \vec{F}$$

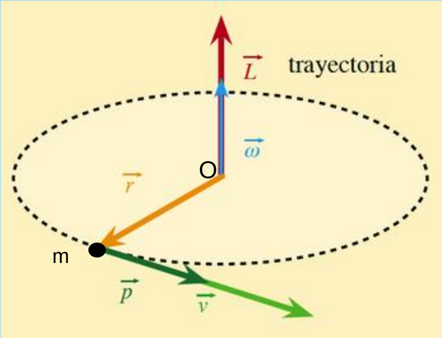
¿El peso $\overrightarrow{mg}$ realiza torque respecto de O? ¿Qué valor tiene?

a) $\sum \tau_{O=mgl \sin \varphi}$ $\Longrightarrow$ El torque neto es perpendicular al plano de la pantalla y entrante

b) No. ¿Por qué?

c) No. ¿Por qué?

Una partícula de masa *m* describe un movimiento circular.
El momento cinético o angular respecto del centro de su trayectoria "o" está dado por



$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} \qquad \left|\overrightarrow{L_O}\right| = |\vec{r}||m\vec{v}| \sin 90°$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad |\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}| \sin 90°$$

$$\left|\overrightarrow{L_O}\right| = |\vec{r}|m|\vec{\omega}||\vec{r}| = mr^2\omega$$

Se define el momento de inercia de la partícula respecto a un eje que pase por O, I_O como:

$I_O = m\,r^2$ Con esta definición, nos queda $\overrightarrow{L_O} = I_O\vec{\omega}$ La Segunda Ley para la rotación se expresa como

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt} = I_O\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$

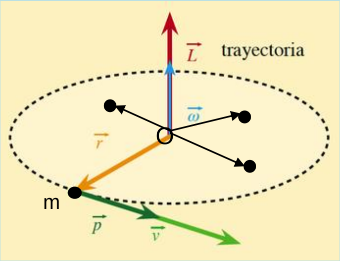
Nuevamente surgen las similitudes entre rotación y traslación

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = I_O\vec{\alpha} \qquad \sum \vec{F_i} = m\vec{a} \qquad I_O = m\,r^2$$

Si se extiende el análisis a un sistemas de partículas que se traslada, se obtiene que el torque neto o resultante, se debe solamente a los torques externas

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{OExternos}}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} \qquad \overrightarrow{L_O} = \sum_i \overrightarrow{l_{iO}} \qquad \overrightarrow{l_{iO}} = \vec{r_i} \times \vec{p_i}$$

Si el sistema de partículas está rotando en un mismo plano con la misma velocidad angular con respecto de un eje fijo, las expresiones anteriores, se pueden expresar como:



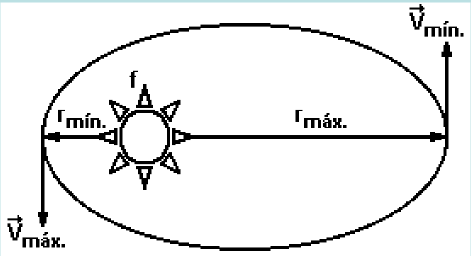
Cada partícula tiene un vector posición $\vec{r_i}$ $\quad I_O = \sum_i m_i {r_i}^2 \quad \overrightarrow{L_O} = I_O\vec{\omega}$

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{OExternos}}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt} = \frac{I_O d\vec{\omega}}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$

Ejercicio 3

La Tierra describe una órbita elíptica alrededor del Sol, estando éste en uno de los focos de la elipse. Cuando la Tierra está en la posición más alejada del Sol (afelio) el 2 de julio, su distancia al sol es de $1{,}52 \times 10^{11}$m y su velocidad orbital es de $2{,}93 \times 10^{4}$ m/s.

Halle su velocidad orbital en la posición más cercana al Sol (perihelio) aproximadamente 6 meses después, cuando su distancia al Sol es de $1{,}47.10^{11}$m. Justifique el procedimiento.



Sistema: tierra

Agente: sol

Acción del sol sobre la Tierra: Atracción gravitatoria

Dirección : hacia el sol.

¿La fuerza de atracción gravitatoria genera torque respecto del Sol?

$$\sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

La respuesta, que nos permitiría plantear para resolver el ejercicio

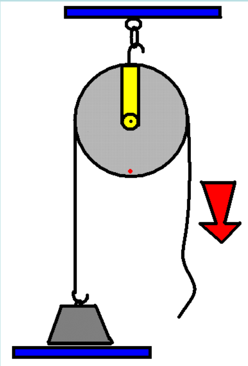
$$Si \sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = 0, entonces\ por\ la\ Segunda\ Ley\ para\ la\ rotación\ \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = 0, por\ lo\ tanto\ \overrightarrow{L_O}(t_i) = \overrightarrow{L_O}(t_f) = cte$$

$$r_{max} m v_{min} = r_{min} m v_{max}$$

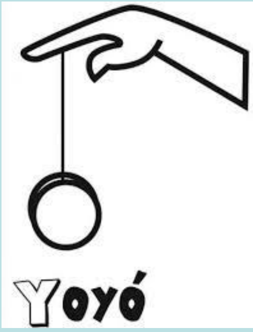
Repaso Clase 1
Mod 2

A partir de ahora vamos a estar interesados en estudiar los siguientes movimientos:

Queremos abrir una puerta. ¿Cómo hacemos?



El movimiento de rotación de la polea respecto de su eje que está fijo



El movimiento de un yoyó que rota y se traslada

En estas situaciones comienza a importa no sólo la fuerza, sino cuál es su punto de aplicación así cómo está distribuida la masa en los cuerpos.

Comenzamos a estudiar rotaciones de los cuerpos como un todo respecto de un eje fijo. Para alcanzar este objetivo necesitamos conocer las herramientas matemáticas que nos permitan describir el movimiento de rotación.

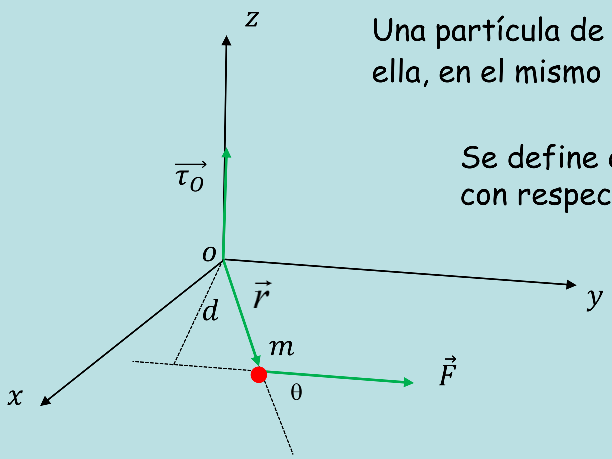
<u>Momento de Fuerza respecto de "o" o Torque respecto de "o"</u> $\overrightarrow{\tau_0}$

<u>Momento Cinético, Momento angular, Momento de la cantidad de movimiento respecto de "o"</u> $\overrightarrow{L_o}$

<u>Segunda Ley de Newton para la rotación</u>

Comenzamos estudiando estas magnitudes cuando el sistema bajo estudio es una partícula y continuamos con el modelo sistema de partículas

Momento de Fuerza respecto de "o" o Torque respecto de "o"



Una partícula de masa m está en el plano "xy" y sobre ella, en el mismo plano, actúa una fuerza $\vec{F}$.

Se define el torque o momento de fuerza con respecto a "o", $\overrightarrow{\tau_O}$

$$\overrightarrow{\tau_0} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Tiene que pertenecer a SRI

$$|\overrightarrow{\tau_0}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\theta$$

$$|\overrightarrow{\tau_0}| = |\vec{F}||\vec{r}|\sin\theta$$

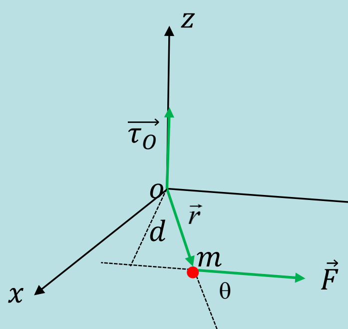
d

$$|\overrightarrow{\tau_0}| = |\vec{F}|\text{d}$$

d=Distancia perpendicular a la recta de acción de F y que pasa por "O"

$\overrightarrow{\tau_0}$ Es un vector perpendicular al plano definido por $\vec{r}$ y $\vec{F}$. Sigue la regla de la mano derecha

Ahora vamos a suponer que $\vec{F}$ es la fuerza neta o resultante que actúa sobre la partícula



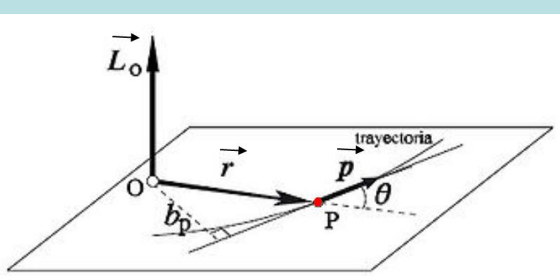
$$\overrightarrow{\tau_0} = \vec{r} \times \vec{F}$$

En la clase anterior hicimos las cuentas y llegamos a la siguiente expresión

$$\overrightarrow{\tau_{0\,resultante}} = \sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = \frac{d\overline{(\vec{r} \times \vec{p})}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

El origen "o", debe pertenecer a un sistema de referencia Inercial

Definimos una magnitud $\overrightarrow{L_o}$ para una partícula de masa m que se traslada con velocidad $\vec{v}$ denominada como: Momento Cinético o Momento angular



$$\overrightarrow{L_O} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad \vec{p} = m\vec{v} \qquad |\overrightarrow{L_0}| = |\vec{r}||\vec{p}| \sin\theta$$

$$|\overrightarrow{L_0}| = |\vec{p}||\vec{r}|\sin\theta$$

b_p

$$|\overrightarrow{L_0}| = |\vec{p}|b_p$$

b_p =Distancia perpendicular a la recta de acción de P y que pasa por "o"

$$\overrightarrow{\tau_{0\,resultante}} = \sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \frac{d\left(\overrightarrow{\vec{r}\times\vec{p}}\right)}{dt} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

Segunda Ley de Newton para la rotación

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}}$$

Comienza a surgir una similitud entre las ecuaciones que describen el movimiento de traslación y el de rotación

$$\boxed{\sum \vec{F_i} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Segunda Ley de Newton para la traslación

<u>¿Bajo que condiciones se conserva $\overrightarrow{L_0}$?</u>

Si seguimos la línea de razonamiento anteriormente empleada para la conservación de magnitudes físicas, la respuesta es:

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}$$

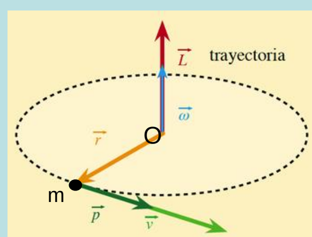
$$Si \sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = 0, entonces\ por\ la\ Segunda\ Ley\ para\ la\ rotación\ \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = 0, por\ lo\ tanto\ \overrightarrow{L_O}(t_i) = \overrightarrow{L_O}(t_f) = cte$$

❖ Una partícula de masa *m* describe un movimiento circular con velocidad angular $\vec{\omega}$

$$\overrightarrow{L_O} = I_O\vec{\omega}$$

$$I_O = m\,r^2$$

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_O}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt} = I_O\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$

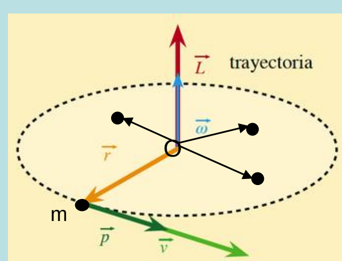


❖ Un sistema de partículas de masa total M describe un movimiento circular, cada una de ellas con la misma velocidad angular $\vec{\omega}$

$$\overrightarrow{L_O} = I_O\vec{\omega}$$

$$I_O = \sum_i m_i {r_i}^2$$

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{OExternos}}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt} = \frac{I_O d\vec{\omega}}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$



Mod 2 Clase 2

Paralelismo entre las variables asociadas al movimiento de traslación y las de rotación

Partícula que se traslada con velocidad $\vec{v}$

Segunda Ley de Newton para la traslación

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Partícula que rota con velocidad angular $\vec{\omega}$

Segunda Ley de Newton para la rotación

$$\sum \overrightarrow{\tau_{iO}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt} = I_O\frac{d\vec{\omega}}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$

$$\vec{F}_i \longrightarrow \overrightarrow{\tau_{iO}}$$

$$\vec{P} \longrightarrow \overrightarrow{L_0}$$

$$m \longrightarrow I_0$$

$$\vec{v} \longrightarrow \vec{\omega}$$

$$\vec{a} \longrightarrow \vec{\alpha}$$

Extenderemos lo estudiado anteriormente para introducir el modelo de cuerpo rígido

Modelo cuerpo rígido: Conjunto de partículas rígidamente vinculadas. La separación promedio entre ellas es constante, aun cuando actúen agentes externos como fuerzas y torques.

Si bien todos los objetos de la naturaleza son deformables en cierto grado, el modelo de cuerpo rígido es muy bueno y simplifica el análisis del movimiento.

Ejemplos: rueda, puerta, esfera, cilindro. Sólidos en general.

¿Cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento de rotación respecto de un eje fijo?

$$\sum \overrightarrow{\tau_{iOExternos}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt}(si\ I_0 es\ constante) = \frac{I_O d\vec{\omega}}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$

No lo voy a demostrar pero, la expresión anterior es válida también cuando "O" es el Centro de masas del sistema

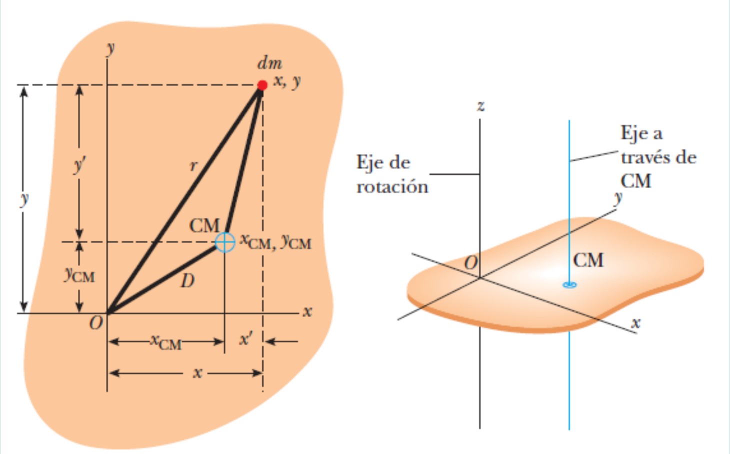
$$\sum \overrightarrow{\tau_{i\,CM\,Externos}} = \frac{d\overrightarrow{L_{CM}}}{dt} = \frac{dI_{CM}\vec{\omega}}{dt}(si\ I_{CM} es\ constante) = \frac{I_{CM}d\vec{\omega}}{dt} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

Los cuerpos en realidad no están constituidos por masas discretas, sino que tienen una distribución continua de materia. La sumatoria que aparece en el momento de inercia se reemplaza por una integral y el momento de inercia toma la forma:

$$I_O = \int r^2\,dm$$

Nosotros no vamos a calcular momentos de inercia de varillas, esferas, etc, utilizaremos los valores que figuran en las tablas.

Existe una relación muy útil para determinar algunos momentos de Inercia dada por el Teorema de Steiner.



Teorema de Steiner o de los ejes paralelos

Establece la relación que existe entre el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje que pasa por "O" y el momento de inercia del cuerpo respecto de un eje paralelo que pasa por el centro de masa.

$$I_O = I_{CM} + MD^2$$

Radio de giro

Cualquiera sea la forma de un cuerpo, siempre es posible encontrar una distancia al eje de rotación en la cual se pude pensar que está concentrada toda la masa sin modificar su momento de inercia respecto de dicho eje. Esta distancia se llama radio de giro del cuerpo respecto del eje dado y se representa por k

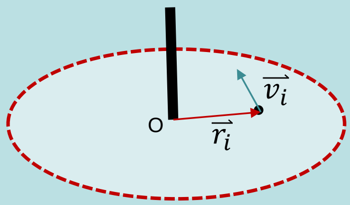
$$k^2 = \frac{I}{M}$$

Energía cinética de un cuerpo rígido que rota respecto de un eje fijo

Cuando un cuerpo gira alrededor de un eje fijo, la velocidad $\vec{v_i}$ de la partícula i situada a una distancia $\vec{r_i}$ del eje de rotación es $\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i}$, siendo $\vec{\omega}$ la velocidad angular del cuerpo.

El módulo de la velocidad tangencial está dado por: $|\vec{v}| = |\vec{\omega}||\vec{r}| \sin 90° = \omega r_i$

La energía cinética de la partícula i



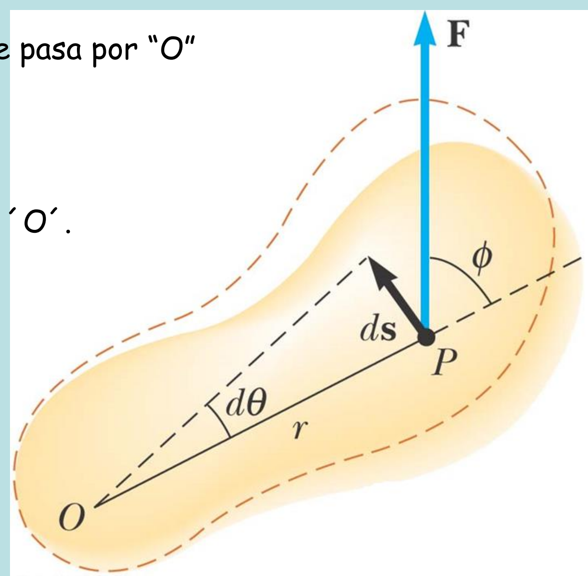
$$\frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i {r_i}^2 \omega^2$$

La energía cinética total del cuerpo

$$E_{cinética\ total} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i {r_i}^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \sum_i (m_i {r_i}^2)\, \omega^2 = \frac{1}{2} I_O \omega^2$$

Así, la energía cinética de un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo está dada por una expresión totalmente análoga a la energía cinética de una partícula, correspondiendo el momento de inercia con la masa y la velocidad angular con la velocidad lineal.

Un cuerpo rígido rota con respecto a un eje fijo que pasa por “O”



Eje fijo: perpendicular al plano y pasa por O

Una fuerza externa F genera un torque respecto de ´O´.

$$\vec{\tau_0} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Bajo la acción de un torque el cuerpo rígido rota

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{OExternos}}} = \frac{d\vec{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt} = \frac{I_O d\vec{\omega}}{dt} = I_O \vec{\alpha}$$

Cuando rota un $d\vec{\theta}$ el punto de aplicación de la fuerza se desplaza $d\vec{s}$ y genera un trabajo

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int \vec{F} \cdot d\vec{\theta} \times \vec{r} = \int \vec{\tau_O} \cdot d\vec{\theta}$$

$$\vec{A}(\vec{B} \times \vec{C}) = -\vec{B}(\vec{A} \times \vec{C})$$
$$\vec{F}(d\vec{\theta} \times \vec{r}) = -d\vec{\theta}(\vec{F} \times \vec{r})$$
$$(\vec{A} \times \vec{B}) = -(\vec{B} \times \vec{A})$$
$$(\vec{F} \times \vec{r}) = -(\vec{r} \times \vec{F})$$

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{OExternos}}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt}\,(si\ I_0 es\ constante) = \frac{I_O d\vec{\omega}}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$

Si $\overrightarrow{\tau_0}$ es el torque neto resultante, el trabajo neto se puede expresar como

$$W = \int \overrightarrow{\tau_O}\cdot d\vec{\theta} = \int \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt}\cdot d\vec{\theta} = \int \vec{\omega}\, dI_0\vec{\omega} = I_0\int_{\overrightarrow{\omega_i}}^{\overrightarrow{\omega_f}} \vec{\omega}\cdot d\vec{\omega}$$

$\vec{\omega}$

$$W = \int \overrightarrow{\tau_O}\cdot d\vec{\theta} = \frac{1}{2} I_0^2\omega_f^2 - \frac{1}{2} I_0^2\omega_i^2$$

Trabajo de torque

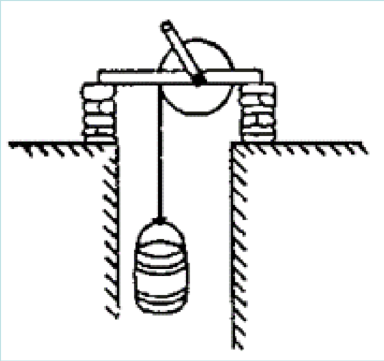
$$W_{\vec{\tau}} = \int \vec{\tau}.d\vec{\theta}$$

Teorema de trabajo y energía cinética de un cuerpo rígido que rota respecto de un eje fijo O

$$\sum W_{\overrightarrow{\tau_{i\,Ext}}} = \Delta E_{C\ Rotación} = \frac{1}{2} I_O\omega_f^2 - \frac{1}{2} I_O\omega_i^2$$

La suma de los trabajos realizados por los torques externos es igual al cambio de la energia cinética de rotación

El balde de un aljibe, de masa 3kg, cuelga sujeto a una cuerda que está enrollada en un eje cilíndrico apoyado sobre cojinetes sin fricción. La masa del eje es de 4kg y su radio r=0,4m. Si se suelta el balde desde el reposo, determine: a) La tensión de la cuerda. b) Las aceleraciones de los cuerpos. c) Utilizando consideraciones energéticas, la velocidad del balde cuando desciende 3 m. Justifique. El momento de inercia del cilindro respecto de un eje que pasa por su centro de masa es $I_{CM} = \frac{1}{2} M.r^2$.



Mod 2 Clase 3

Modelo de Cuerpo Rígido

Modelo cuerpo rígido: Conjunto de partículas rígidamente vinculadas. La separación promedio entre ellas es constante, aun cuando actúen agentes externos como fuerzas y torques.

Si bien todos los objetos de la naturaleza son deformables en cierto grado, el modelo de cuerpo rígido es muy bueno y simplifica el análisis del movimiento.

Ejemplos: rueda, puerta, esfera, cilindro. Sólidos en general.

Comenzamos estudiando:

Movimiento de rotación de un cuerpo rígido respecto de un eje fijo

¿Cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento de rotación respecto de un eje fijo?

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{O Externos}}} = \frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \frac{dI_O\vec{\omega}}{dt} (si\ I_0 es\ constante) = \frac{I_O d\vec{\omega}}{dt} = I_O\vec{\alpha}$$

No lo voy a demostrar pero, la expresión anterior es válida también cuando “O” es el Centro de masas del sistema

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{CM\ Externos}}} = \frac{d\overrightarrow{L_{CM}}}{dt} = \frac{dI_{CM}\vec{\omega}}{dt} (si\ I_{CM} es\ constante) = \frac{I_{CM} d\vec{\omega}}{dt} = I_{CM}\vec{\alpha}$$

Trabajo de torque

$$W_{\vec{\tau}} = \int \vec{\tau}.d\vec{\theta}$$

Teorema de trabajo y energía cinética de un cuerpo rígido que rota respecto de un eje fijo O

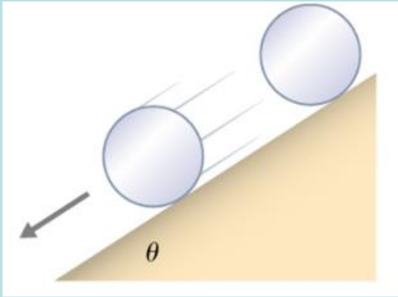
$$\sum W_{\overrightarrow{\tau_{i\,Ext}}} = \Delta E_{C\ Rotación} = \frac{1}{2} I_O \omega_f^2 - \frac{1}{2} I_O \omega_i^2$$

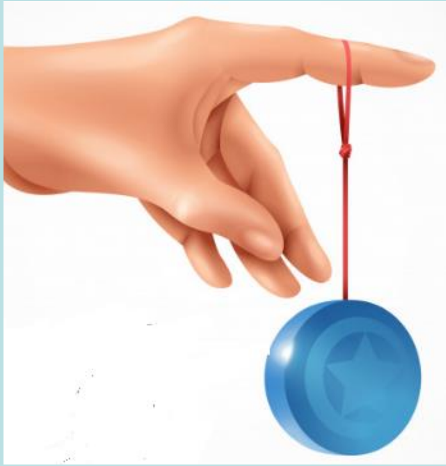
La suma de los trabajos realizados por los torques externos es igual al cambio de la energía cinética de rotación

Movimiento de rototraslación de un cuerpo rígido

(es el movimiento más general de un cuerpo rígido)

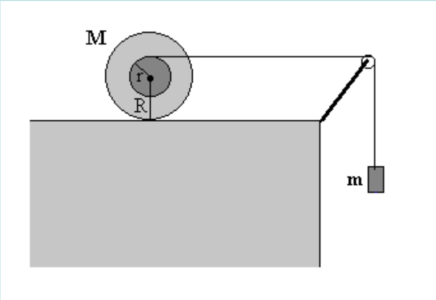
Ejercicio 2





Ejercicio 9

Parecido al Ejercicio 10



Movimiento de rototraslación de un cuerpo rígido

(es el movimiento más general de un cuerpo rígido)

Movimiento de traslación del centro de masas

+

Movimiento de rotación respecto de un eje que pasa por el centro de masas

$$\boxed{\sum \vec{F}_{i\ ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt}}$$

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\tau_{i_{CM\ Externos}}} = \frac{d\overrightarrow{L_{CM}}}{dt}}$$

$$\overrightarrow{P_{CM}} = M\overrightarrow{v_{CM}}$$

$$\overrightarrow{L_{CM}} = I_{CM}\vec{\omega}$$

Si la masa es constante

Si I_{CM} es constante

(1) $$\boxed{\sum \vec{F}_{i\ ext} = M\overrightarrow{a_{CM}}}$$

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\tau_{i_{CM\ Externos}}} = I_{CM}\vec{\alpha}}$$ (2)

En el lado izquierdo de la igualdad están los agentes externos, lado derecho sistema bajo estudio

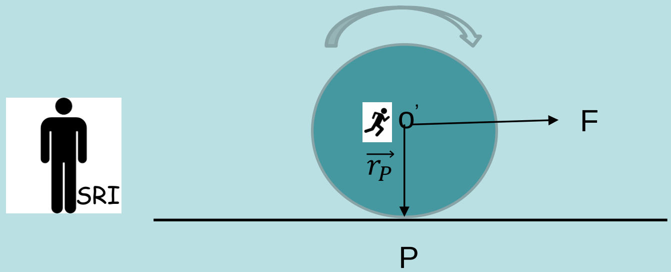
a) Las expresiones (1) y (2) pueden estar vinculadas o relacionadas . Ejemplo de esta situación: un cuerpo rígido rueda sin deslizar

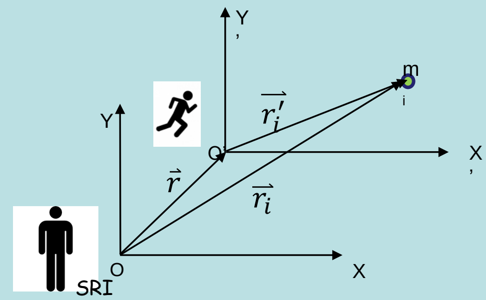
b) Las expresiones (1) y (2) pueden ser independientes. Ejemplos de esta situación se tratarán en la clase siguiente.

Movimiento de rodadura sin deslizamiento

Vamos a estudiar el caso de un cilindro que rueda sobre un plano horizontal bajo el efecto de una fuerza F que pasa por el centro del cilindro.

En este ejemplo no nos va a importar cómo empezó a rotar el cilindro. Analizamos una vez que está en movimiento





$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{r_i'} + \vec{r}$$

$$\overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{v_i'} + \vec{v}$$

La velocidad del punto P de contacto entre la superficie y el cilindro está dado por:

$$\overrightarrow{V_P} = \overrightarrow{V_P'} + \overrightarrow{V_{CM}} \qquad \overrightarrow{V_P} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_P} + \overrightarrow{V_{CM}}$$

Si el cuerpo rueda sin deslizar, es decir en cada instante la generatriz del cilindro que está en contacto con el plano está en reposo, la velocidad del punto P es cero y queda:

$$\overrightarrow{V_P} = 0 \qquad \overrightarrow{V_{CM}} = -\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_P}$$

Si derivamos respecto del tiempo miembro a miembro

$$\overrightarrow{a_{CM}} = -\vec{\alpha} \times \overrightarrow{r_P} - \vec{\omega} \times \cancel{\overrightarrow{V_P}} \qquad \overrightarrow{a_{CM}} = -\vec{\alpha} \times \overrightarrow{r_P}$$

Conclusión: si el cuerpo rueda sin deslizar: $\boxed{\overrightarrow{V_P} = 0}$

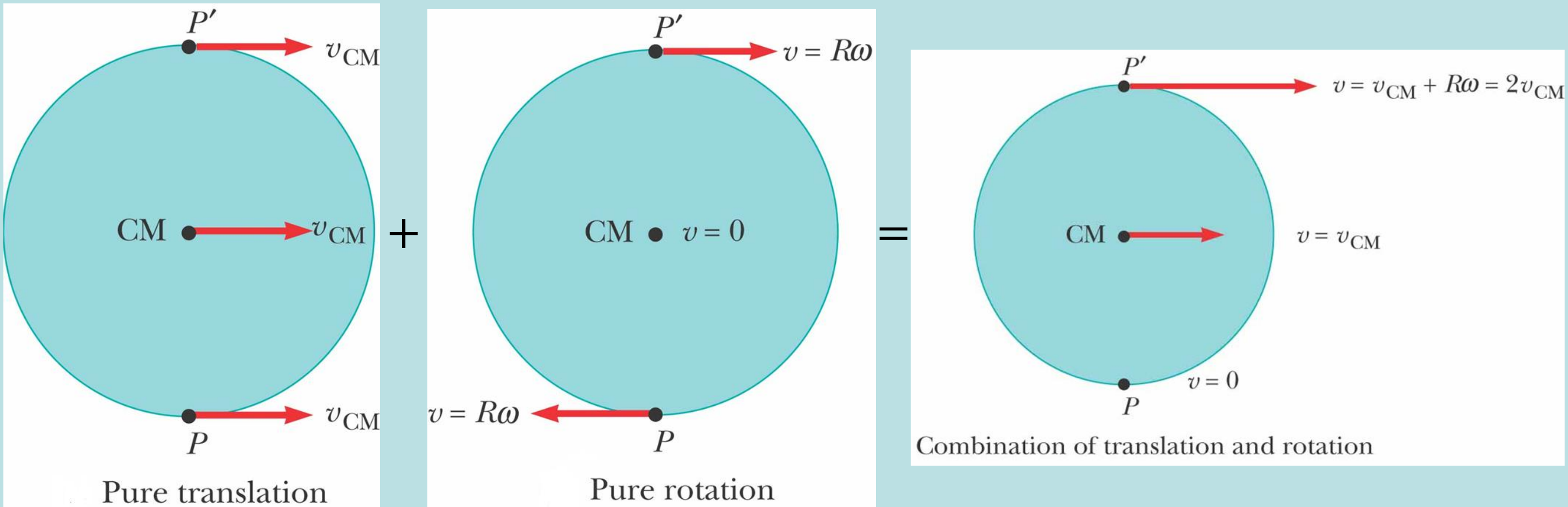
Consecuencias:
$$\begin{cases} \overrightarrow{V_{CM}} = -\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_P} \\ \overrightarrow{a_{CM}} = -\vec{\alpha} \times \overrightarrow{r_P} \end{cases}$$

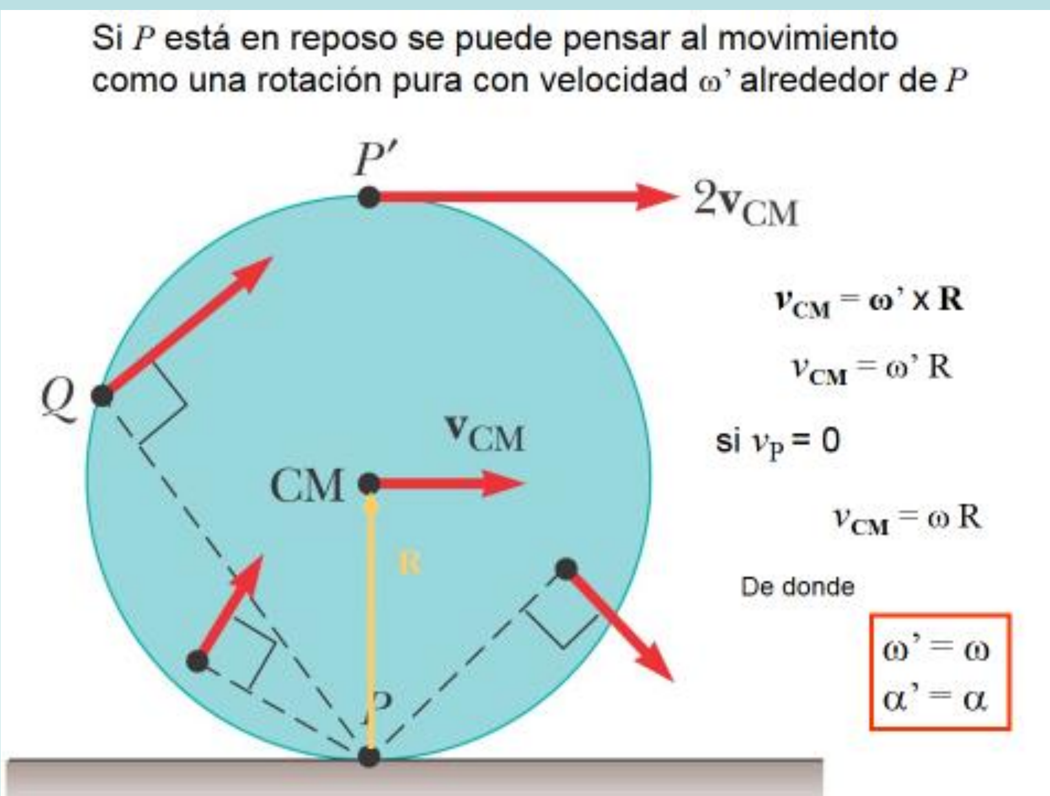
Si expresamos las variables cinemáticas en módulos $\boxed{V_{CM} = \omega r \quad y \quad a_{CM} = \alpha r}$

Eje instantáneo de rotación

Otra manera de abordar el movimiento de rodadura sin deslizamiento es por medio del eje instantáneo de rotación

De acuerdo a la descripción general del movimiento de un cuerpo rígido, se puede pensar como una combinación de un movimiento de traslación + un movimiento de rotación respecto de un eje que pasa por el centro de masas del cuerpo.





El eje que pasa por P y es perpendicular al plano de la pantalla se denomina eje instantáneo de rotación

¿Qué ecuaciones dinámicas describen el movimiento?

Como es una rotación pura respecto del eje instantáneo

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{Eje\ ins}}} = I_{Eje\ inst}\,\vec{\alpha}$$

Teorema de trabajo y energía cinética para un cuerpo rígido que se rototraslada

De acuerdo a la descripción general del movimiento de un cuerpo rígido, se puede pensar como una combinación de un movimiento de traslación + un movimiento de rotación respecto de un eje que pasa por el centro de masas del cuerpo.
Desde el punto de vista energético, esto se puede expresar:

$$\sum W_F\,(traslación) + \sum W_\tau\,(rotación) = \int \overrightarrow{F_R}.d\vec{s} + \int \overrightarrow{\tau_N}.d\vec{\theta} = \frac{1}{2}Mv_{fCM}^2 - \frac{1}{2}Mv_{iCM}^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2$$

$$\sum W_F\,(traslación) + \sum W_\tau\,(rotación) = \Delta E_{cinética\ traslación} + \Delta E_{cinética\ rotación}$$

Si separamos las fuerzas y los torques en conservativos y no conservativos se llega a:

$$\sum W_{FNC}\,(traslación) + \sum W_{\tau NC}\,(rotación) = \Delta E_{cinética\ traslación} + \Delta E_{cinética\ rotación} + \Delta E_{Pot\ grav} + \Delta E_{Pot\ elas}$$

$$\sum W_{FNC}\,(traslación) + \sum W_{\tau NC}\,(rotación) = \frac{1}{2}Mv_{fCM}^2 - \frac{1}{2}Mv_{iCM}^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgh_f - Mgh_i + \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

¿Bajo qué condiciones se conserva la Energía Mecánica en movimiento de Rototraslación?

Si $\quad \sum W_{FNC}\,(traslación) + \sum W_{\tau NC}\,(rotación) = 0$

$$\Delta E_{cinética\ traslación} + \Delta E_{cinética\ rotación} + \Delta E_{Pot\ grav} + \Delta E_{Pot\ elas} = 0$$

$$E_{Mec}\,(i) = E_{Mec}\,(f)$$

$$E_{Mec}\,(i) = \frac{1}{2}Mv_{iCM}^2 + \frac{1}{2}I\omega_i^2 + Mgh_i + \frac{1}{2}kx_i^2 = \frac{1}{2}Mv_{fCM}^2 + \frac{1}{2}I\omega_f^2 + Mgh_f + \frac{1}{2}kx_f^2 = E_{Mec}\,(f)$$

Discutir el trabajo de la fuerza de roce en rodadura sin delizamiento

Un cilindro homogéneo de masa m y radio *R* rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal, que empalma con una rampa ascendente inclinada un ángulo θ con respecto a la horizontal. El cilindro alcanza la base de la misma y asciende por ella, también sin deslizar. Hacer un dibujo esquemático de la superficie sobre la que se mueve el cilindro.

a) Hacer un diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cilindro durante su movimiento en el plano horizontal indicando qué agente las ejerce (analizar si las fuerzas propuestas condicen con el movimiento en condición de rodadura).

b) Ídem a) durante el ascenso.

c) En algún momento, durante el ascenso el cilindro se detiene momentáneamente y comienza a rodar cuesta abajo. Hacer el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cilindro durante el descenso.

d) Hallar una expresión para la aceleración lineal del CM en cada uno de los tramos analizados en base a los datos suministrados, e indique el sentido de la misma en cada caso.

e) Plantear el diagrama de las fuerzas que actúan sobre el cilindro cuando este vuelve a encontrarse sobre la superficie horizontal.

f) ¿Cómo interviene la rugosidad de la superficie en el movimiento del cilindro? ¿Cambiaría el tipo de movimiento si la superficie de la pista fuese lisa, como?

g) Repetir d) empleando el concepto *eje instantáneo de rotación.*

Equilibrio de un cuerpo rígido

De acuerdo a la descripción general del movimiento de un cuerpo rígido, se lo puede pensar como una combinación de un movimiento de traslación + un movimiento de rotación respecto de un eje que pasa por el centro de masas del cuerpo.

Si ahora nuestro interés es estudiar un cuerpo rígido en equilibrio, siguiendo la misma idea, las condiciones que se deberían verificar son:

Equilibrio de traslación + Equilibrio de rotación

$$\sum \vec{F}_{i\ ext} = 0 \qquad\qquad \sum \overrightarrow{\tau_{i_{CM\ Externos}}} = 0$$

$$\Downarrow$$

Esta expresión está indicando que es sistema físico puede estar en reposo o moviéndose con velocidad contante

Existe una expresión que relaciona los torques respecto de dos sistemas, uno el centro de masas y el otro un sistema fijo a Tierra y es la siguiente

$$\boxed{\overrightarrow{\tau_o} = \overrightarrow{\tau_{CM}} + \overrightarrow{R_{CM}} \times \sum \overrightarrow{F_{i\,Ext}}}$$

Por lo tanto, si el sistema está en equilibrio de traslación:

$$\sum \vec{F}_{i\ ext} = 0$$

Si se incluye esta condición en la expresión anterior, se concluye que

$$\boxed{\overrightarrow{\tau_o} = \overrightarrow{\tau_{CM}}}$$

Esta relación está indicando que cuando el sistema está en equilibrio de traslación se pueden tomar los torques respecto de cualquier punto fijo. Se elige entonces el consideremos más sencillo.

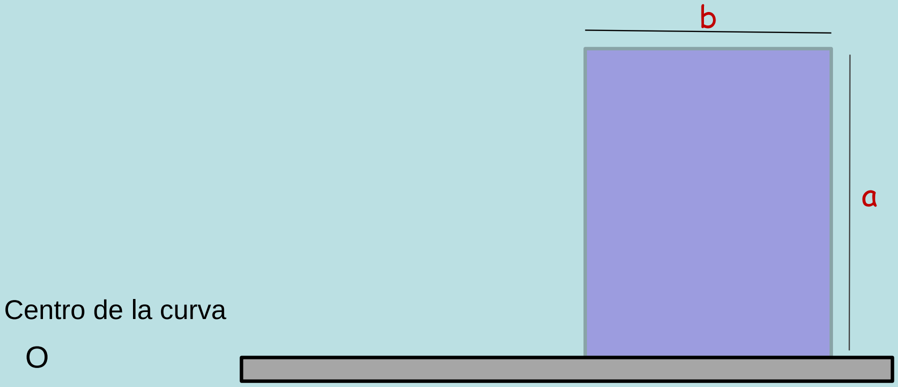
Ojo !!! Puede suceder que el cuerpo esté en equilibrio de rotación pero no esté en equilibrio de traslación. Bajo estas condiciones :

$$\sum \vec{F}_{i\ ext} = M\overrightarrow{a_{CM}} \qquad \sum \overrightarrow{\tau_{i_{CM\ Externos}}} = 0$$

Entonces, el único lugar permitido para tomar los torques es el centro de masas del sistema

Un camión debe transportar una caja más alta que ancha con un contenido frágil (cuyo CM coincide con su centro geométrico). El camino por donde transita el camión tiene muchas curvas y el conductor no teme que la caja deslice, porque la superficie es suficientemente rugosa. En cambio, sí teme que la caja vuelque. Por ello comienza a hacer hipótesis sobre esta posibilidad para calcular la velocidad máxima con que tomar cada curva.

Si la caja tiene altura a y ancho b; la superficie un coeficiente de roce conocido, μ_e , y la curva tiene un radio R. Encuentre la expresión de la velocidad máxima con que puede tomar la curva sin volcar, en función de los datos conocidos.

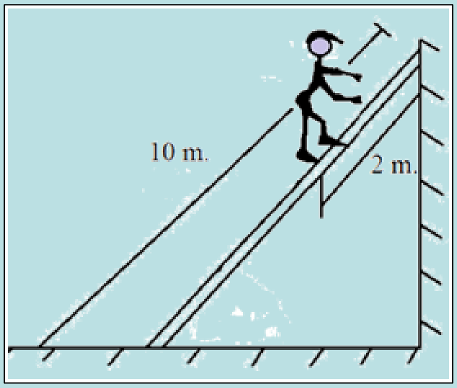


La escalera de la imagen tiene 10 m de longitud y 200 N. de peso. Descansa sobre un piso horizontal, apoyándose además sobre una pared lisa.

a) Realizar el diagrama de fuerzas.

b) Calcular la fuerza de roce hecha por el piso sobre la escalera para evitar que la misma resbale cuando un hombre que pesa 600 N se encuentra a 2 m del extremo superior de la misma.

c) Si el coeficiente de roce es 0.3, ¿se mantiene la escalera sin resbalar?



Movimiento de rototraslación de un cuerpo rígido

(es el movimiento más general de un cuerpo rígido)

Movimiento de traslación del centro de masas + Movimiento de rotación respecto de un eje que pasa por el centro de masas

$$\boxed{\sum \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt}}$$

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\tau_{i\,CM\,Externos}} = \frac{d\overrightarrow{L_{CM}}}{dt}}$$

$$\overrightarrow{P_{CM}} = M\overrightarrow{v_{CM}}$$

$$\overrightarrow{L_{CM}} = I_{CM}\vec{\omega}$$

Si la masa es constante

Si I_{CM} es constante

(1) $$\boxed{\sum \vec{F}_{i\,ext} = M\overrightarrow{a_{CM}}}$$

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\tau_{i\,CM\,Externos}} = I_{CM}\vec{\alpha}}$$ (2)

En el lado izquierdo de la igualdad están los agentes externos, lado derecho sistema bajo estudio

En la clase anterior analizamos un movimiento en el que las expresiones (1) y (2) están vinculadas o relacionadas, rodadura sin deslizamiento.

En los ejemplos que siguen, en general, la traslación y la rotación no necesariamente van a estar vinculadas.

¿Bajo qué condiciones se conserva o permanece constante el Momento Angular de un cuerpo rígido respecto de su centro de masas?

$$\boxed{\sum \overrightarrow{\tau_{i\,CM\,Externos}} = \frac{d\overrightarrow{L_{CM}}}{dt}}$$

$$\boxed{Si \sum \overrightarrow{\tau_{i\,CM\,Externos}} = 0, entonces\ \frac{d\overrightarrow{L_{CM}}}{dt} = 0, luego\ \overrightarrow{L_{CM}}\,(i) = \overrightarrow{L_{CM}}\,(f)}$$

¿Bajo qué condiciones se conserva o permanece constante la Cantidad de Movimiento del centro de masas de un cuerpo rígido?

$$\boxed{\sum \vec{F}_{i\,ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt}}$$

$$\boxed{Si \sum \overrightarrow{F_{i\,Externas}} = 0, entonces\ \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt} = 0, luego\ \overrightarrow{P_{CM}}\,(i) = \overrightarrow{P_{CM}}\,(f)}$$

Si el Momento angular No se conserva, como consecuencia, surge un Impulso Angular **J**

$$\sum \overrightarrow{\tau_{i_{CM\ Externos}}} = \frac{d\overrightarrow{L_{CM}}}{dt} \qquad \sum \overrightarrow{\tau_{i_{CM\ Externos}}} dt = d\overrightarrow{L_{CM}}$$

$$\vec{J} = \int_0^t \sum \overrightarrow{\tau_{i_{CM\ Externos}}} dt = \int_{\vec{L}_{CM\ i}}^{\vec{L}_{CM\ f}} d\overrightarrow{L_{CM}} = \overrightarrow{L_{CM}}(t_f) - \overrightarrow{L_{CM}}(t_i) = I\overrightarrow{\omega_f}(t_f) - I\overrightarrow{\omega_i}(t_i)$$

Si la Cantidad de Movimiento del centro de masas No se conserva, como consecuencia, surge un Impulso Linear I

$$\sum \vec{F}_{i\ ext} = \frac{d\overrightarrow{P_{CM}}}{dt} \qquad \sum \vec{F}_{i\ ext}\, dt = d\overrightarrow{P_{CM}}$$

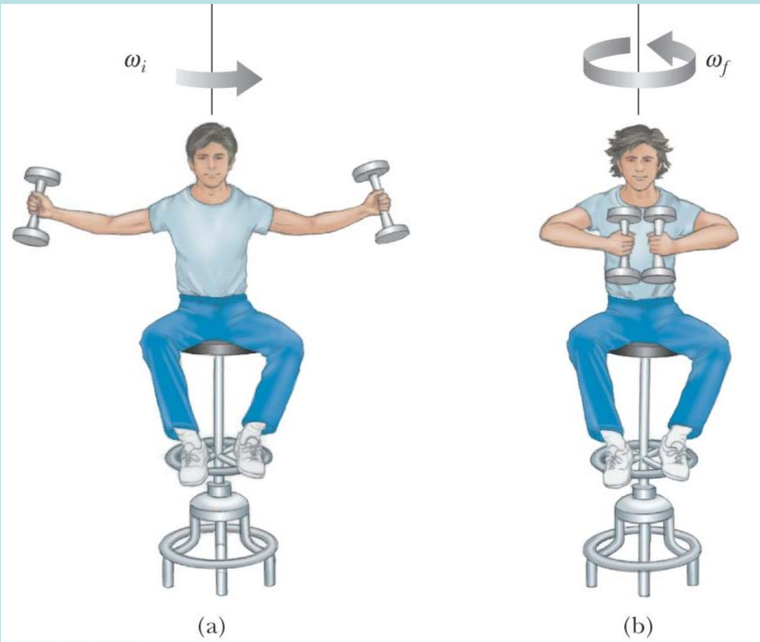
$$\vec{I} = \int_0^t \sum \vec{F}_{i\ ext}\, dt = \int_{\vec{P}_{CM\ i}}^{\vec{P}_{CM\ f}} d\overrightarrow{P_{CM}} = \overrightarrow{P_{CM}}(t_f) - \overrightarrow{P_{CM}}(t_i) = M\overrightarrow{v_{CM}}(t_f) - M\overrightarrow{v_{CM}}(t_i)$$

Un estudiante esta sentado sobre un banco que gira libremente y sostiene dos pesas, cada una de las cuales tiene una masa de 3 Kg. Cuando extiende sus brazos de manera horizontal, las pesas están a **1m** del eje de giro y su velocidad angular es de **0,75 rad/seg.** Se supone que el momento de inercia del estudiante, junto con el banco, es de **3 Kgm²** y que permanece constante. El estudiante acerca los pesos hacia si horizontalmente, hasta unas posiciones situadas a **0,3 m** del eje de giro.

a) ¿Se conserva el momento cinético del sistema: estudiante+banco+pesas antes y después de acercar sus brazos?

b) Calcule la nueva velocidad angular del sistema rotatorio.

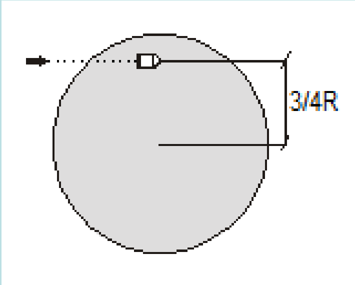
c) Calcule la energía cinética del sistema antes y después de acercar las pesas. Varía o permanece constante. Justifique.



(a) (b)

Un disco (masa M=4kg y momento de inercia respecto de un eje perpendicular al dibujo y que pasa por el CM $I_{CM}=\frac{1}{2}MR^2$ con R= 0,8 m) se encuentra en reposo sobre una superficie horizontal de roce despreciable, cuando es atravesado a una distancia $d=\frac{3}{4}R$ de su CM, por un proyectil de masa m=0,2kg y velocidad v=40m/s en la forma indicada en la figura. El proyectil atraviesa el disco, saliendo con una energía cinética final igual a $\frac{1}{4}$ de la energía cinética inicial.

a) ¿Qué tipo de movimiento efectuará la plataforma después del impacto con el proyectil?
b) Analice si se conserva o no la cantidad de movimiento y el momento cinético respecto del centro de masas del sistema. Indicar cuál es el sistema físico elegido.
c) Determine la velocidad de rotación y de traslación de la plataforma.
d) Si se repite la experiencia pero con la única diferencia de que la plataforma esté pivoteada en su centro de masas, varían las respuestas anteriores?
e) La energía cinética inicial y la final ¿Permanece constante o varia? Justifique



Cuerpos Deformables

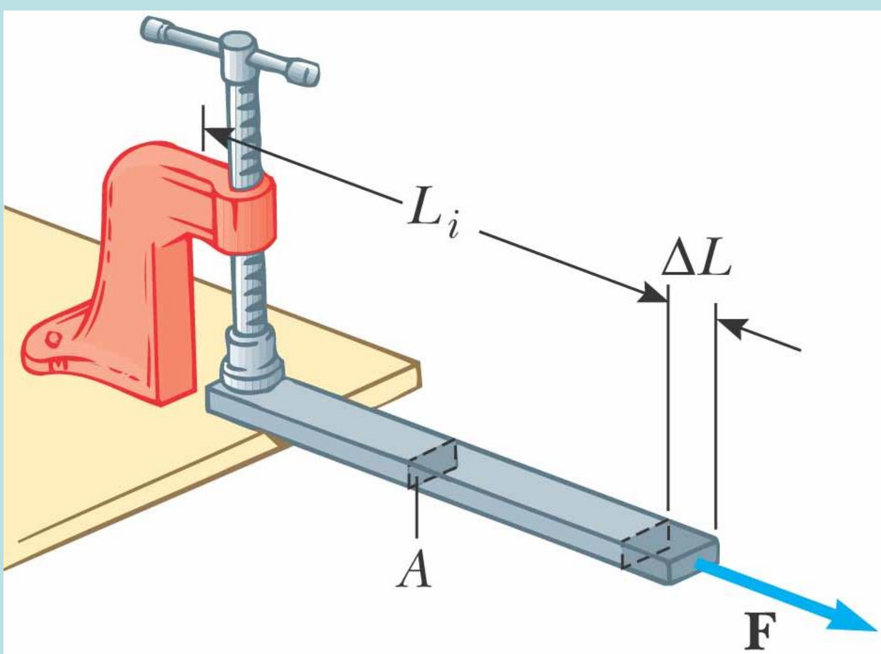
Hasta ahora, hemos estudiado sistemas físicos que pueden modelarse como partícula, sistemas de partículas y como cuerpo rígido.

En esta clase vamos a introducir sistemas físicos bajo estudio que los modelaremos como cuerpos deformables.

Cuando dos cuerpos sólidos ejercen entre sí fuerzas de contacto, ambos se deforman, existiendo entre ellos una superficie de contacto, aunque puede ser pequeña es finita.

Si bien la fuerza la representamos mediante un vector único, realmente es la resultante de un conjunto de fuerzas distribuidas.

Comenzaremos analizando un cuerpo que tiene una de sus dimensiones mucho mayor que las otras. Sobre el cuerpo se ejercen fuerzas que son normales a las superficies. Estas fuerzas son de compresión o de tensión como en la figura y producen como consecuencia que el cuerpo se deforme



Se define una magnitud, que depende del material:

Módulo de Young = mide la resistencia del sólido a cambiar su longitud

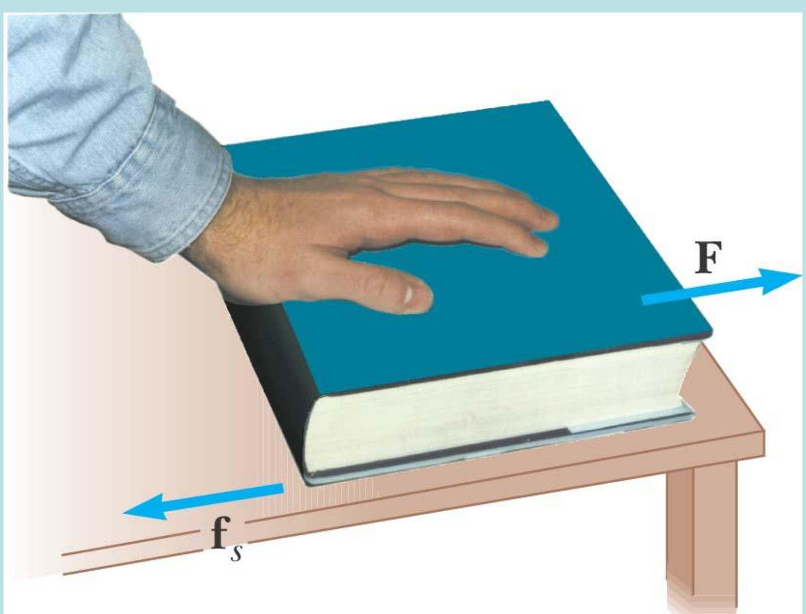
Se manifiesta ante esfuerzos de tensión o compresión

(fuerza perpendicular a la superficie)

$$Y(\text{Módulo de Young}) = \frac{\text{esfuerzo de tensión}}{\text{deformación unitaria}} = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

Esfuerzos de corte o cizalladura

La Fuerza es paralela a la superficie

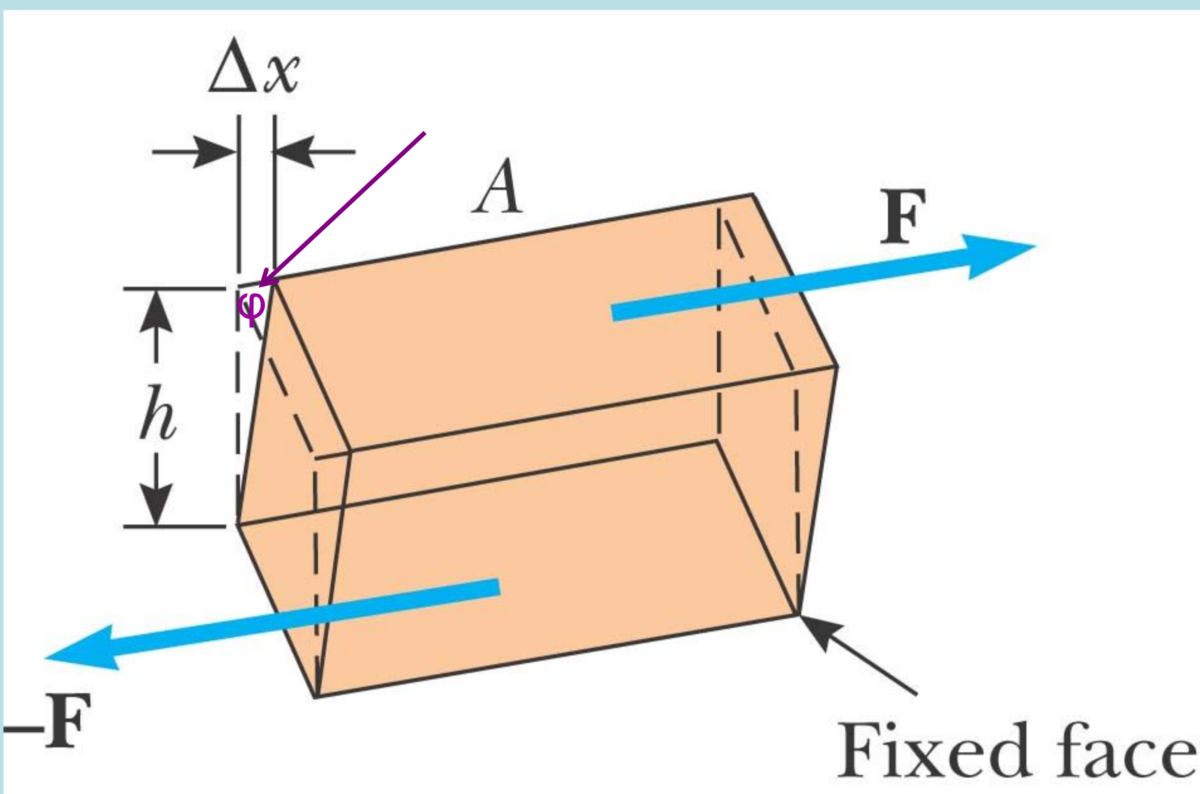


Módulo de torsión: mide la resistencia del sólido a cambiar de forma

- Se manifiesta ante esfuerzos de corte o cizalladura (fuerza paralela a la superficie)

- $\mu = \dfrac{\text{esfuerzo de corte}}{\text{deformación unitaria}} = \dfrac{F/A}{\Delta x/h}$

- También puede decribirse por un ángulo



¿Qué pasará si en lugar de un sólido tenemos un líquido o un gas?

¿Qué modelo podemos usar para describir a un líquido o a un gas?

Sólidos elásticos, líquidos y gases pueden describirse mediante el modelo de **sistema de partículas**

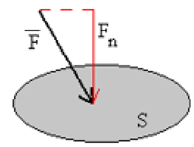
Fluido: sistema de muchas partículas (gas o líquido)

Las fuerzas que ejerce un líquido o un gas sobre el recipiente que los contiene están también distribuidas sobre el área de contacto entre ambos

¿Que dirección tienen?

Fluido ideal ➔ perpendicular a la superficie

Concepto de presión



Se define presión como el cociente entre la componente normal de la fuerza sobre una superficie y el área de dicha superficie.

Definimos presión (P) = Fuerza (componente normal) /Area = F_n /S

La unidad de medida recibe el nombre de Pascal (Pa).

La fuerza que ejerce un fluido ideal en equilibrio sobre un cuerpo sumergido en cualquier punto es perpendicular a la superficie del cuerpo. La presión es una magnitud escalar y es una característica del punto del fluido en equilibrio, que dependerá únicamente de sus coordenadas como veremos en la siguiente página.

Densidad

La densidad ρ de un elemento pequeño de cualquier material, es su masa Δm dividida su volumen ΔV:

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Si la densidad ρ de un objeto tiene el mismo valor en todos sus puntos, será igual a su masa dividida su volumen:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

Analizaremos fluidos en reposo

Es familiar que:

- La presión atmosférica disminuye cuando aumenta la altura (este hecho lo "sufren" los jugadores de futbol cuando van a jugar a países como Perú, Ecuador)

- La presión en un lago o en el océano aumenta con la profundidad por debajo de la superficie
(estos cambio son percibidos por los buzos).

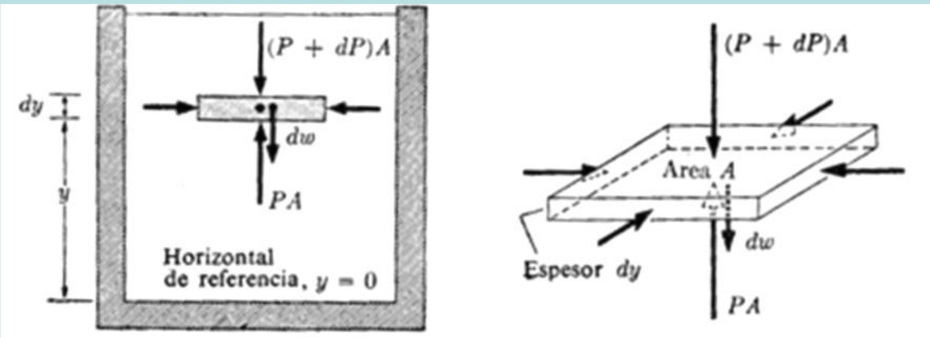
Vamos a calcular la expresión general de la presión respecto de la altura.

Teorema fundamental de la hidrostática

- Tenemos un fluido en equilibrio dentro de un recipiente al que analizaremos aplicando las leyes de Newton.

- Elegimos como sistema bajo estudio un elemento de fluido en forma de lámina delgada, cuyo espesor es dy y cuyas caras tienen un área A, el cual también se encuentra en equilibrio (observado desde un sistema de referencia inercial ubicado en Tierra)

- Sistema bajo estudio: fluído
- Modelado: fluido ideal.
- Estado dinámico: reposo.
- Agentes externos: fluidos que rodea y la Tierra



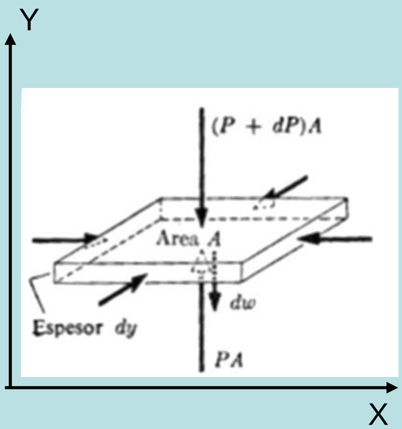
- Si ρ es la densidad del fluido, la masa del elemento es ρAdy.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

- La fuerza ejercida sobre el elemento por el fluido que lo rodea es en todo punto normal a su superficie, fluido ideal.

- Por simetría, la fuerza resultante sobre su borde es nula

- Representemos por P la presión en la cara inferior del elemento y por P+dP la presión en su cara superior.



- La fuerza hacia arriba sobre la cara inferior es PA y la fuerza hacia abajo sobre la cara superior es (P+dP)A.

- Puesto que el fluido está en equilibrio, aplicando la segunda ley de Newton,

$$\sum F_x = 0\,, \sum F_y = 0$$

$$PA-(P+dP)A-\rho Agdy=0$$

$$dP/dy = -\rho g$$

$$dP/dy = -\rho g$$

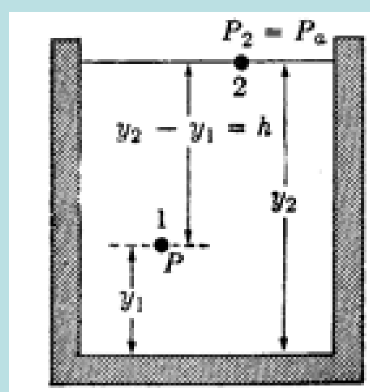
- Las magnitudes ρ y g son ambas positivas, asi que un dy positiva (un incremento de altura) va acompañado de una dP negativa (disminuye la presión).
- Si P1 y P2 son las presiones a las alturas y1 e y2 por encima de un cierto nivel de referencia, entonces la integración de la ecuación anterior, cuando ρ y g son constantes, da:

Teorema fundamental de la hidrostática

$$P2-P1=-\rho g(y2-y1)$$

$$P1=P2+\rho g(y2-y1)$$

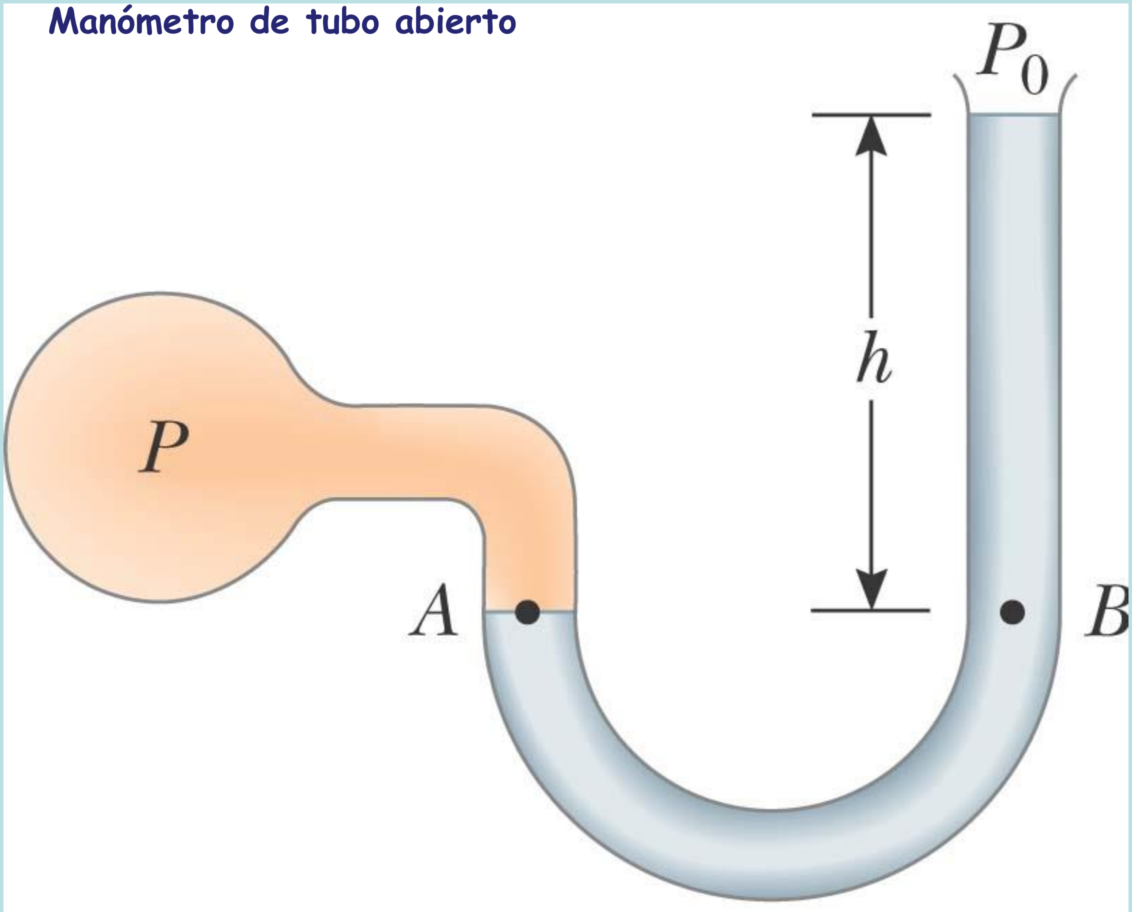
- Si aplicamos esta ecuación a un líquido contenido en un recipiente abierto tal como el representado en la figura.
- Si tomamos el punto 1 a cualquier nivel y representamos por P a la presión en ese punto y tomamos el nivel 2 en la superficie donde la presión es la atmosférica, Pa, entonces



$$P = Pa + \rho gh$$

Observar que la presión es independiente de la forma del recipiente y que es la misma para todos los puntos situados a igual profundidad

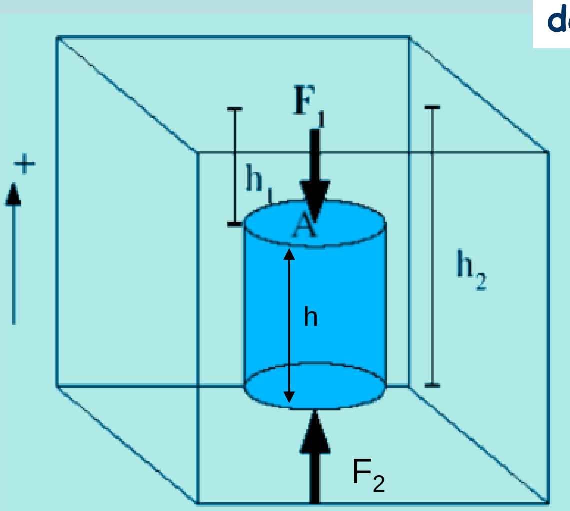
Manómetro de tubo abierto



<u>Principio de Arquímedes</u>

- **Todo cuerpo sumergido en un fluido en equilibrio, recibe una fuerza vertical y dirigida hacia arriba, que es igual al peso del fluido desplazado por el cuerpo**
- **La posición de la línea de acción del empuje está aplicado en el centro de gravedad del fluido desplazado.**

La fuerza neta que ejerce el fluido de densidad ρ_f sobre el cuerpo está dada por:



$$\begin{aligned} F_n &= F_2 - F_1 \\ &= \rho_f\, g\,(h_2 - h_1)\, A \\ &= \rho_f\, g\, V \end{aligned}$$

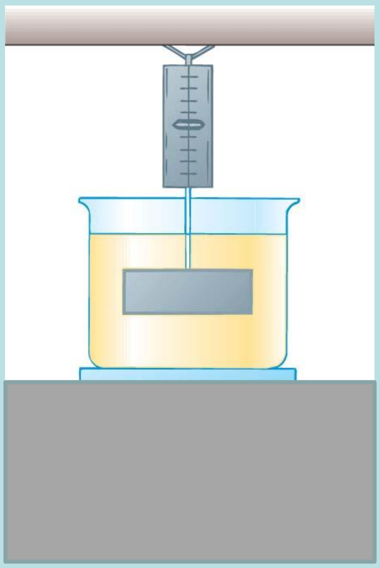
$$F_n = E = \rho_f g V_S$$

Empuje

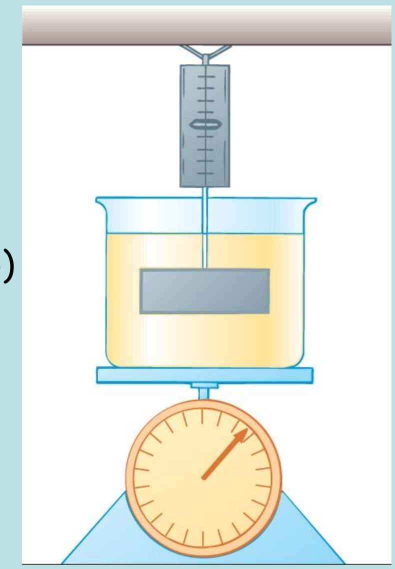
Una piedra de 1kg de masa que cuelga de un dinamómetro se encuentra suspendida bajo la superficie del agua, siendo la indicación del dinamómetro de 7,8 N.

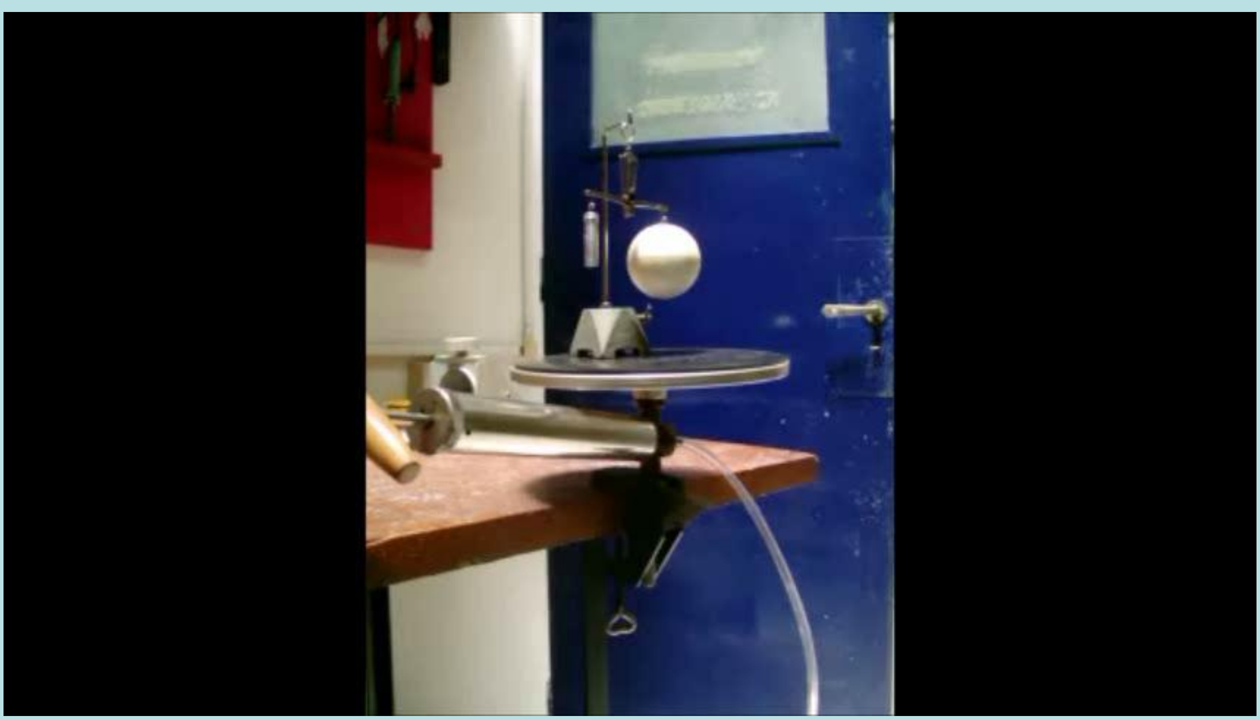
a) ¿Cuál es la fuerza de empuje que ejerce el agua sobre la piedra?
b) Si el recipiente con agua pesa 9,8 N, ¿cuál será la indicación de la balanza mostrada en la figura cuando la piedra esté suspendida debajo de la superficie del agua

a)



b)





Fluidos ideales en movimiento

En la clase anterior estudiamos fluidos en reposo.

Modelamos al fluido como ideal y obtuvimos dos resultados importantes

1) Cuando elegimos como sistema bajo estudio al fluido, en nuestro caso elegimos agua en un recipiente y aplicamos la segunda ley de Newton obtuvimos: el teorema de la hidrostática:

$P_{inf} = P_{sup} + \rho_F gh$ donde h es la diferencia de altura entre el nivel inferior y el superior.

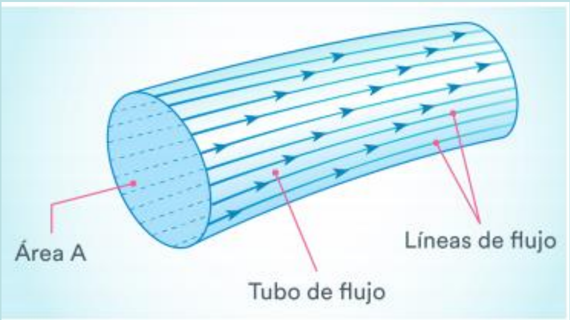
2) Cuando elegimos como sistema bajo estudio a un cuerpo sumergido en un fluido, obtuvimos como resultado al Principio de Arquímedes

$$E = \rho_F g V_S$$

Ahora empezamos a estudiar fluidos en movimiento

Pensamos al fluido como un modelo de capas, constituido por tubos concéntricos axiales. Si lo observamos desde arriba tendrá un aspecto parecido al siguiente esquema

Si se observa lateralmente un tubo de fluido, tiene el aspecto mostrado en la figura

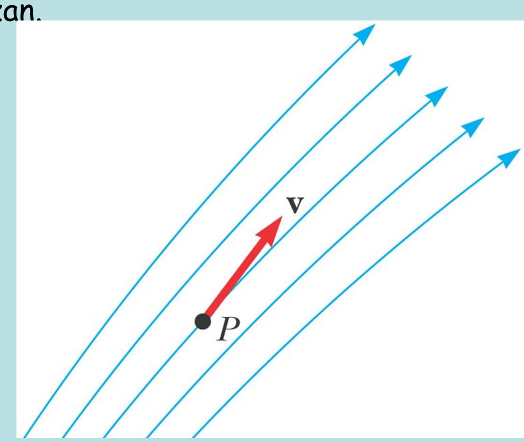


Se denomina línea de corriente a la trayectoria seguida por un elemento de fluido móvil. En general, la velocidad de un elemento varía tanto en magnitud como en dirección a lo largo de la línea de flujo.

Condiciones de fluido ideal en movimiento

Suponemos:

- Fluido No viscoso: Entre las capas de fluido no hay rozamiento interno, ni tampoco con la tubería.
- Fluido incompresible: Es equivalente a decir que la densidad es constante.
- Flujo estacionario: La velocidad del fluido en cada punto es constante y tiene el mismo valor sobre toda el área perpendicular al movimiento del fluido
- Flujo No turbulento o régimen laminar: Los tubos de fluido son rectos y paralelos. Las líneas de corriente no se cruzan.

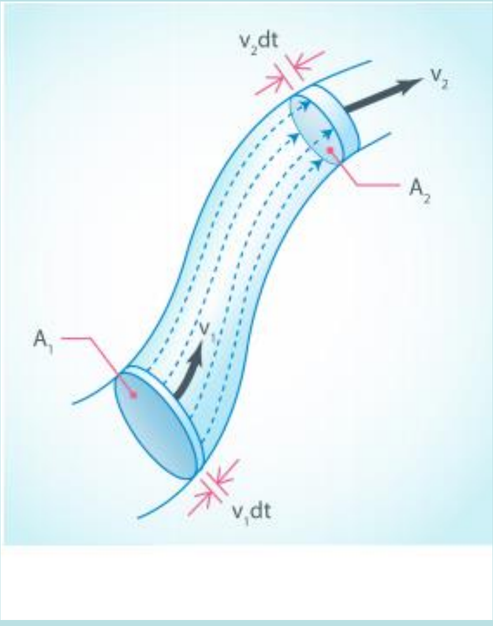


Si el fluido es ideal, entonces:

a) Además, suponemos que no hay fuentes ni sumideros de fluidos, entonces se conserva la masa. Como consecuencia se obtiene la ecuación de continuidad.

Ecuación de continuidad

Tomamos una rodaja de fluido entre dos secciones transversales de áreas A_1 y A_2. Sean v_1 y v_2 las velocidades en estas secciones. Entonces, el volumen de fluido que entra en el tubo a través de A_1 en un intervalo de tiempo dt es el contenido en el cilindro de área A_1 y altura v_1 dt, osea $A_1 v_1$ dt. Si ρ es la densidad del fluido, la masa que entra está dada por $\rho A_1 v_1$ dt . Análogamente la que sale a través de A_2 es $\rho A_2 v_2$ dt (mas ancha). Por lo tanto:



$$m_{entra} = m_{sale}$$

$$\rho A_1 v_1 dt = \rho A_2 v_2 dt$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

Llamada ecuación de continuidad

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = cte$$

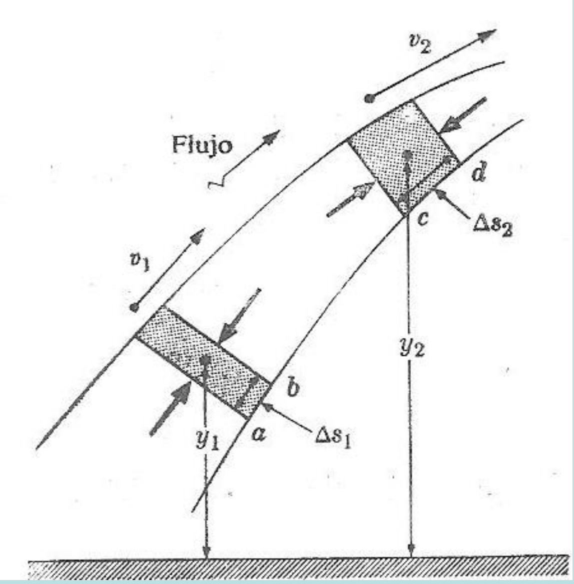
Una consecuencia de la ecuación de continuidad es que la velocidad es máxima en los puntos en que el área transversal es mínima.

Se define el caudal $Q = Av$

Se mide en litros /seg o m^3/s.
Conceptualmente está indicando la conservación de la masa.

b) La conservación de la energía da como consecuencia la Ecuación de Bernoulli

Cuando un fluido circula a lo largo de un tubo de fluido de sección variable, la velocidad cambia. Por lo tanto el fluido está sometido a una fuerza neta, lo que significa que la presión tiene que estar variando a lo largo del tubo, aunque la altura no se modifique.



Teorema de Bernoulli (1738)

- Surge de aplicar el teorema de trabajo y energía a un fluido en movimiento.
- El teorema de trabajo y energía es una consecuencia de emplear las Leyes de Newton

Estudiamos el movimiento de un elemento de fluido:
Estado 1 (P_1, v_1, A_1, y_1) y estado 2 (P_2, v_2, A_2, y_2)
Sobre el elemento de fluido actúa el fluido que lo rodea, la Tierra y la pared de la cañería.

El trabajo que ejerce el fluido que rodea el elemento de fluido está dado por dos contribuciones: la del fluido que se ubica por debajo del sistema físico y la otra parte, por el fluido de la parte superior.

$$W_{Neto} = W_{abajo} + W_{arriba}$$

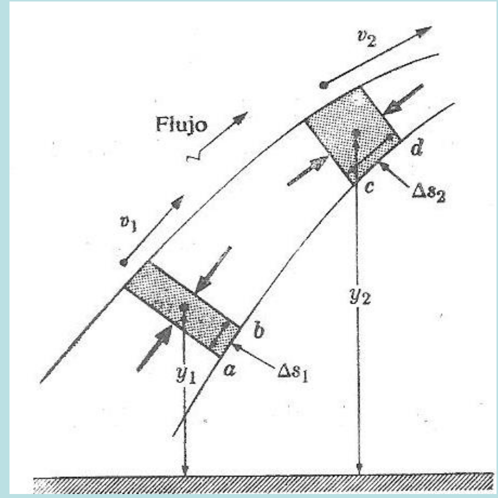
$$W_{abajo} = \int_a^c \vec{F}.d\vec{s} = \int_a^c F.ds = \int_a^c PAds$$

De manera similar para el trabajo del fluido superior

$$W_{arriba} = \int_b^d \vec{F}.d\vec{s} = -\int_b^d F.ds = -\int_b^d PAds$$

Por lo tanto el trabajo neto está dado por

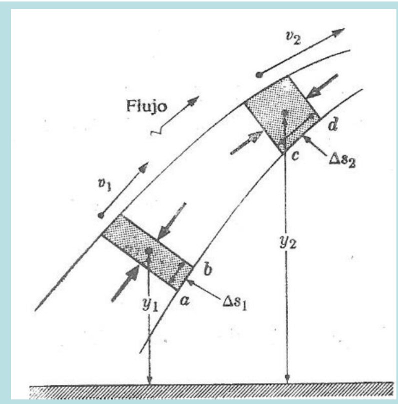
$$W_{Neto} = \int_a^c PAds - \int_b^d PAds = \int_a^b PAds + \int_b^c PAds - \int_b^c PAds - \int_c^d PAds$$



$$W_{Neto} = \int_a^c PAds - \int_b^d PAds = \int_a^b PAds + \cancel{\int_b^c PAds} - \cancel{\int_b^c PAds} - \int_c^d PAds$$

$$W_{Neto} = \int_a^b PAds - \int_c^d PAds$$

Las distancias entre a y b y de c a d son suficientemente pequeñas para que las presiones y las áreas puedan considerarse constantes a lo largo de ellas. Entonces

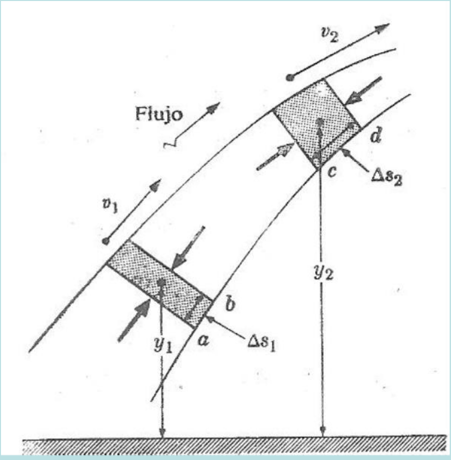


$W_{Neto} = P_1 A_1 \Delta S_1 - P_2 A_2 \Delta S_2$ Pero el volumen del elemento $V_{volumen} = A_1 \Delta S_1 = A_2 \Delta S_2$

$$W_{Neto} = P_1 V_1 - P_2 V_2 = (P_1 - P_2)V$$

Si ρ es la densidad del fluido, m es la masa del elemento y empleamos el teorema de trabajo y energía mecánica

$$W_{Neto} = (P_1 - P_2)V = (P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \Delta E_{mec} \qquad \rho = \frac{m}{\mathrm{Vol}}$$



$$(P_1 - P_2)\frac{m}{\rho} = \Delta E_{mec} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_2 - mgy_1$$

Dividiendo a ambos lados por m y multiplicando por ρ

$$(P_1 - P_2) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

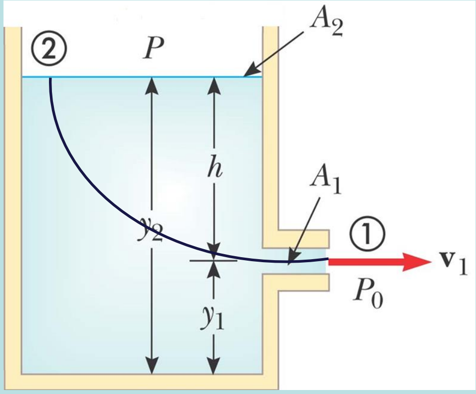
$$\boxed{P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 = cte} \Longrightarrow \text{Ecuación de Bernoulli}$$

Presiones absolutas

En algunos ejercicios como dato se da la presión manométrica en lugar de la absoluta $P_{manométrica} = P_{absoluta} - P_{atmosférica}$

Aplicaciones de Bernoulli: Torricelli

Un depósito de agua tiene un pequeño orificio a una distancia h de la superficie del agua. Determine la velocidad del agua cuando sale por el orificio



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2$$

$$P_1 = P_2 = P_{atmosférica}$$

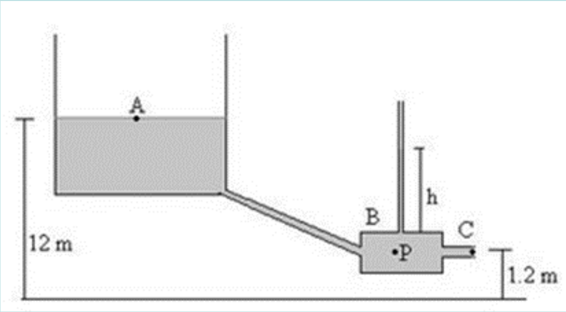
$$A_2 \gg A_1$$

Por continuidad $A_1 v_1 = A_2 v_2$

$$v_2 \cong 0$$

$$v_1 = \sqrt{2gh}$$

Del depósito A de la figura sale agua continuamente pasando través de depósito cilíndrico B por el orificio C. El nivel de agua en A está a una altura de 12 m sobre el suelo. La altura del orificio C es de 1,2m sobre el suelo. El radio del depósito cilíndrico B es 10cm y del orificio C, 4cm. Determine:



a) La velocidad del agua que sale por el orificio C.
b) La presión del agua en el punto P del depósito pequeño B.
c) La altura h del agua en el manómetro abierto vertical.

DATO: *la presión atmosférica es 101293 Pa.*

Ondas Mecánicas

¿Qué es una onda mecánica?

Un onda mecánica es una perturbación física en un medio material (sólido, líquido o gaseoso)

Consideremos una piedra que se arroja en un lago en reposo.

Las partículas del medio son desplazadas de su posición de equilibrio y sufren fuerzas de restauración que tienden a volverlas a su posición original.

Las ondas transportan energía y cantidad de movimiento

La propagación de energía mediante una perturbación como ésta se conoce como movimiento ondulatorio mecánico.

Clasificación de las ondas

1. Según su naturaleza (medio en el que se propagan)

ONDAS MECÁNICAS:
Perturbaciones que viajan por un medio material (sólido, líquido o gaseoso) con una velocidad característica. Las partículas del medio son desplazadas de suposición de equilibrio y sufren fuerzas de restitución que tienden a volverlas a su posición original. No hay transporte neto de materia y necesitan un medio para propagarse.

ONDAS ELECTROMAGNETICAS:
Perturbaciones que se propagan en el espacio sin necesidad de un medio material, por lo tanto pueden propagarse en el vacío. Son producidas por oscilaciones de campos eléctricos y magnéticos.

ONDAS GRAVITACIONALES:
Perturbaciones que alteran la geometría misma del espacio-tiempo y aunque es común representarlas viajando en el vacío, técnicamente no se puede afirmar que se desplacen por ningún espacio sino que en sí mismas son alteraciones del espacio-tiempo.

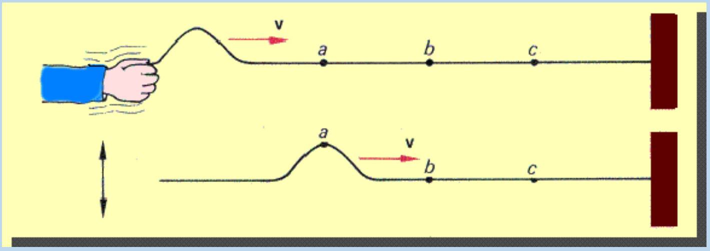
Clasificación de las ondas:

1. Dirección de la partícula en movimiento
   Ondas Transversales
   Ondas Longitudinales
2. Número de dimensiones
   Unidimensionales (a lo largo de una cuerda o un resorte)
   Bidimensionales (ondas superficiales de agua)
   Tridimensionales (ondas sonoras y luminosas que se dispersan radialmente de una fuente)
3. Periodicidad
   Emisión de un solo pulso a lo largo de una cuerda
   Emisión de un tren de ondas que se propagan por la cuerda
   Emisión de un tren periódico de ondas. Cada partícula presenta movimiento periódico. Caso especial más simple es la onda armónica.
4. Formas del frente de onda
   Ondas planas
   Ondas esféricas

2. Dirección de la partícula en movimiento

Una onda transversal

En una onda transversal, el desplazamiento de las partículas individuales del medio es perpendicular a la dirección de propagación de la onda.



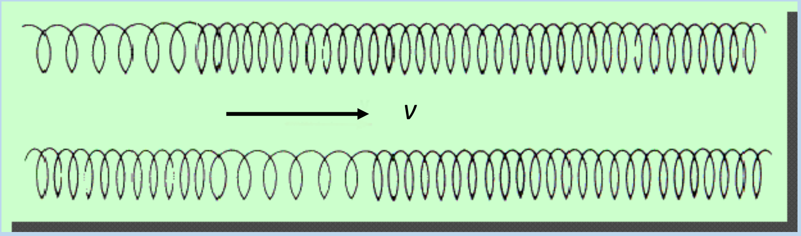
Movimiento de partículas

Movimiento de onda

2. Dirección de la partícula en movimiento

Ondas longitudinales

En una onda longitudinal, el desplazamiento de las partículas individuales es paralela a la dirección de propagación de la onda.

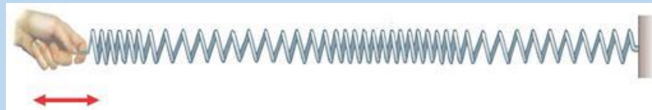


Movimiento de partículas

Movimiento de onda

3. Número de dimensiones

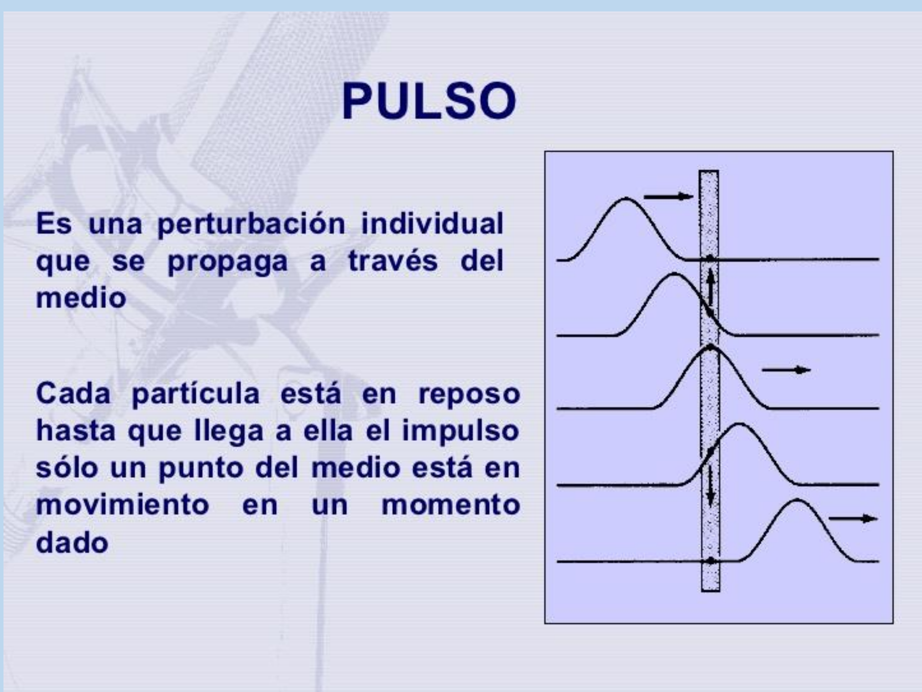
Unidimensionales (a lo largo de una cuerda o un resorte)



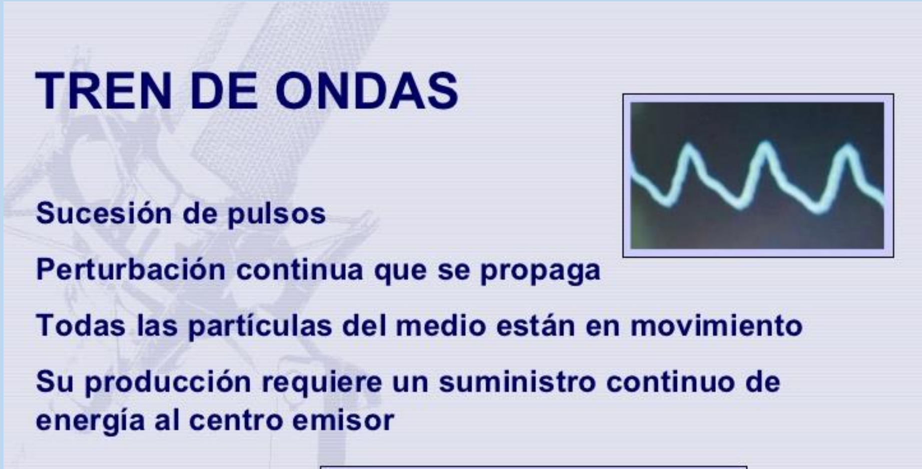
Bidimensionales (ondas superficiales de agua)

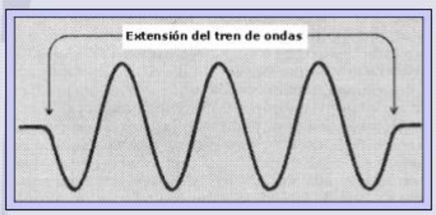
Tridimensionales (ondas sonoras y luminosas que se dispersan radialmente de una fuente)

4. Periodicidad



4. Periodicidad

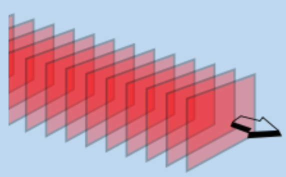




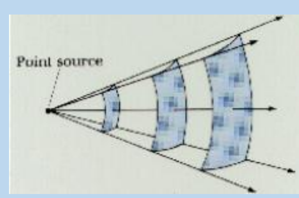
5. Formas del frente de onda

Frente de onda: puntos que están en el mismo estado de movimiento

Onda plana: las condiciones son iguales en todas partes en cualquier plano perpendicular a la dirección de propagación. Ej: palo muy largo que se deja caer en el agua



Ondas esféricas: las condiciones son las mismas en todas partes de una esfera con centro en la fuente de la perturbación (frente de onda son esferas) Ej: ondas sonoras



Descripción matemática de una onda

- Una forma de onda transversal se desplaza en una cuerda larga y extensa.
- Se supone que la perturbación conserva su forma.
- La perturbación se encuentra en el plano xy y se propaga en la dirección del eje x.
- En t=0, podemos considerar una instantánea del pulso (a) que se desplaza por la cuerda.
- Supongamos que el pulso sigue con rapidez *v* en el eje x positivo.
- En un t posterior, el pulso habrá recorrido una distancia *vt* (b) (igual forma)
- La coordenada *y* indica el desplazamiento transversal de un punto particular de la cuerda. Depende de x y de t. y(x,t)

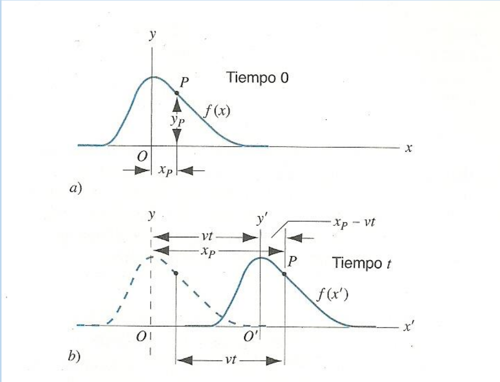
$Y(x,0) = f(x)$ para t=0

En un tiempo posterior se tiene la misma función. Respecto de O´, que se desplaza junto con el pulso, será f(x´)

$x_p = x' + vt$

En un tiempo posterior

$$y(x,t) = f(x') = f(x-vt)$$



Expresión funcional de una onda viajera ⟹ onda que se propaga libremente en el espacio

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

Indica la dirección de propagación (x)

Indica el sentido de propagación. Hacia las x positivas.

$$y(x,t) = f(x + vt)$$

Indica el sentido de propagación. Hacia las x negativas.

Velocidad de las ondas mecánicas

La velocidad de las ondas mecánicas dependen de las característica elásticas del medio en que se propagan .

Cuerda $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ → Tensión → Densidad lineal $\mu = \frac{m}{L}$

Fluido $v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ → Modulo de Compresibilidad → Densidad volumétrica

Sólido $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ → Módulo de Young → Densidad volumétrica

Ondas Armónicas

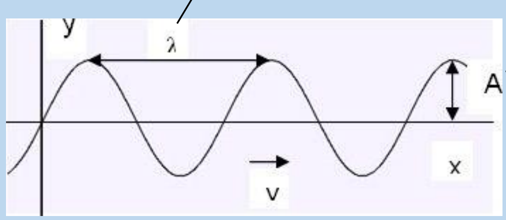
Consideremos ondas armónicas viajeras. De acuerdo a las relaciones encontradas entre las variables x, v y t se pueden expresar como

$$y(x,t) = A\sin[k(x - vt)]$$

Las características de la onda se indican en el siguiente gráfico

Longitud de onda

Número de onda $k = \frac{2\pi}{\lambda}$



Amplitud

$\lambda = vT$

$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ velocidad

Frecuencia $f = \frac{1}{T}$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ Frecuencia angular

Si la posición de cada punto de la soga está dada por la expresión:

$$y(x,t) = A\sin[k(x - vt)] \qquad y(x,t) = A\sin[kx - \omega t]$$

La velocidad transversal de la partícula (para una dada coordenada)

$$u(x,t) = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -\omega A\cos[kx - \omega t]$$

La aceleración transversal de la partícula (para una dada coordenada)

$$a(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\omega^2 A\sin[kx - \omega t]$$

Esta expresión indica que las partículas de la cuerda experimentan un movimiento armónico (transversal) simple al pasar las ondas senoidales

Sonido

- El sonido es una onda mecánica

- Las ondas de sonido pueden desplazarse a través de cualquier medio material (sólido, líquido o gas).

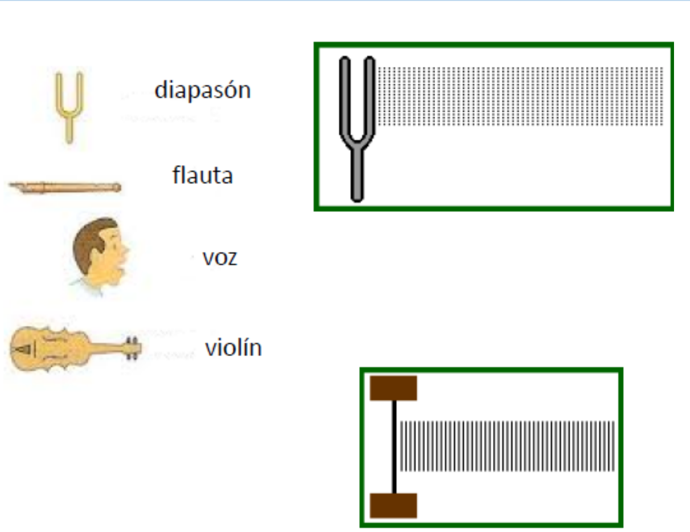
- En los sólidos las ondas pueden ser longitudinales o transversales.

- En los líquidos (no soportan fuerzas de cizallamiento) las ondas son solamente longitudinales.

- Ondas sonoras (generalmente) se refiere a ondas longitudinales cuya frecuencia fluctúa entre 20 y 20,000 Hz, intervalo normal de audición humana.

- Estudiaremos ondas sonoras en el aire

¿Cómo se generan ondas sonoras?



Pueden describirse:

Variación de la posición media de equilibrio de las moléculas

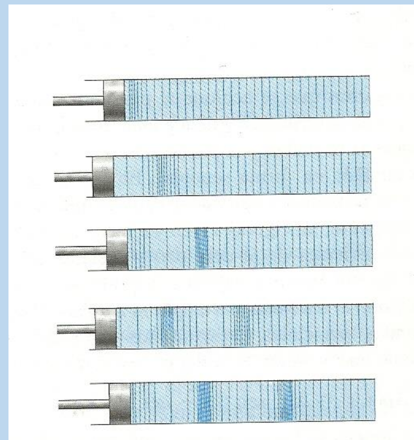
$$s(x,t) = s_0 sen\,(kx - wt)$$

Variación de la presión de equilibrio

$$p(x,t) = p_0 cos\,(kx - wt)$$

➢Aunque una fuente de sonido en una superficie abierta emite ondas tridimensionales, simplificaremos el problema considerando ondas unidimensionales.

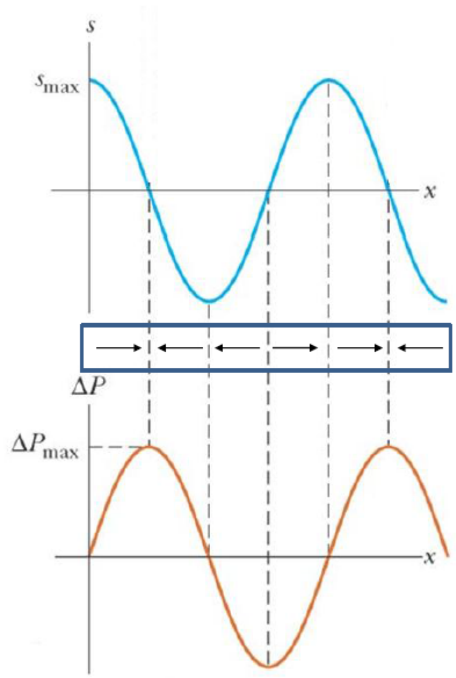
➢Ondas sonoras generadas en un tubo por un pistón en movimiento. A medida que el pistón fluctúa, comprime y expande (rarifica) alternativamente el aire cercano. Esta perturbación se propaga hacia adelante como una onda sonora (longitudinal).



¿Cómo se vincula la variación de presión dentro de un tubo con el desplazamiento de las moléculas de aire?

La presión y el desplazamiento están desfasados en $\frac{\pi}{2}$

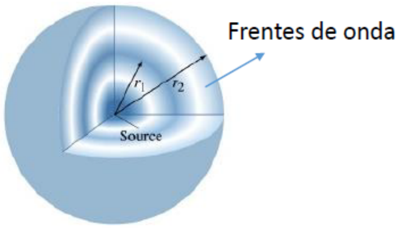
Cuando el desplazamiento es máximo (o mínimo), la presión es nula



Intensidad de las ondas

Es la rapidez media con la que la onda transporta energía a través de una superficie perpendicular a la dirección de propagación (potencia media por unidad de área).

$$I = \frac{\langle P \rangle}{\acute{a}rea} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]$$



Si la onda se propaga en todas direcciones (frente de onda esférico)

$$\boxed{I = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2}}$$

Rango de intensidades

El umbral auditivo es el mínimo estándar de intensidad para sonido audible. Su valor I_0 es:

Umbral auditivo: $I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W/m^2

El umbral de dolor es la intensidad máxima I_p que el oído promedio puede registrar sin sentir dolor.

Umbral de dolor: $I_p = 1$ W/m^2

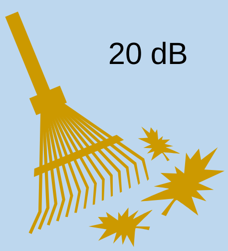
La respuesta del oído a un sonido de intensidad creciente es más o menos logarítmica

Debido al amplio rango de intensidades sonoras (de 1×10^{-12} W/m^2 a 1 W/m^2), se define una escala logarítmica como el nivel de intensidad (o nivel de sonido) en decibeles:

Nivel de intensidad	$\beta = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$	decibeles (dB)

donde β es el nivel de intensidad de un sonido cuya intensidad es I e $I_0 = 1 \times 10^{-12}$ W/m^2.

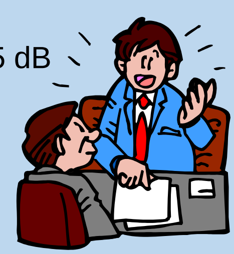
Niveles de intensidad de sonidos comunes



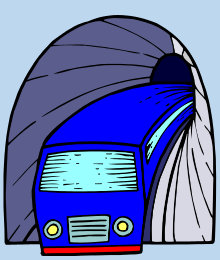
20 dB

Hojas o murmullo

65 dB



Conversación normal

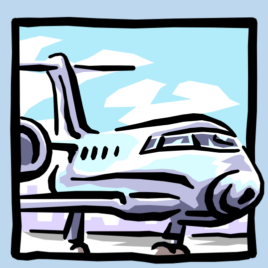


Subterráneo

100 dB

140-160 dB

Motores jet



Umbral de audición: 0 dB

Umbral de dolor: 120 dB

Efecto Doppler

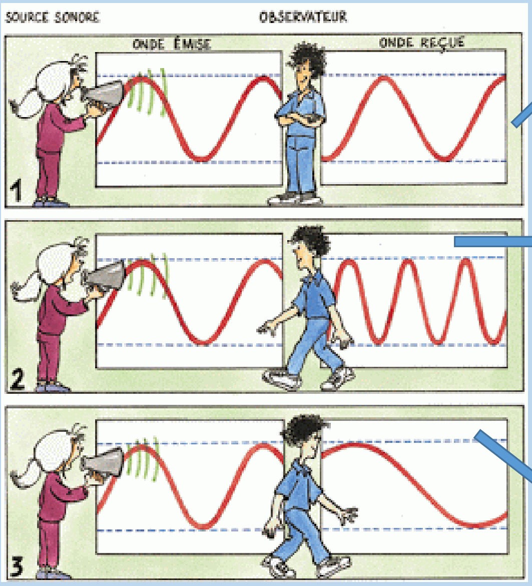
Cuando un foco sonoro o un observador, o ambos, están en movimiento respecto del aire, el tono (frecuencia) percibido por el observador no es, en general, el mismo que cuando el foco y el observador están en reposo. Este fenómeno se denomina *efecto Doppler.*

Ejemplo: El tono de una sirena de un carro de bomberos es más alto cuando la fuente se acerca al oyente que cuando ha pasado y se aleja.

Solamente analizaremos el caso especial en que la fuente y el observador se mueven en la línea que los une.

Se elige un marco de referencia en reposo en el medio por donde se propaga el sonido.

En las tres situaciones la fuente en reposo.



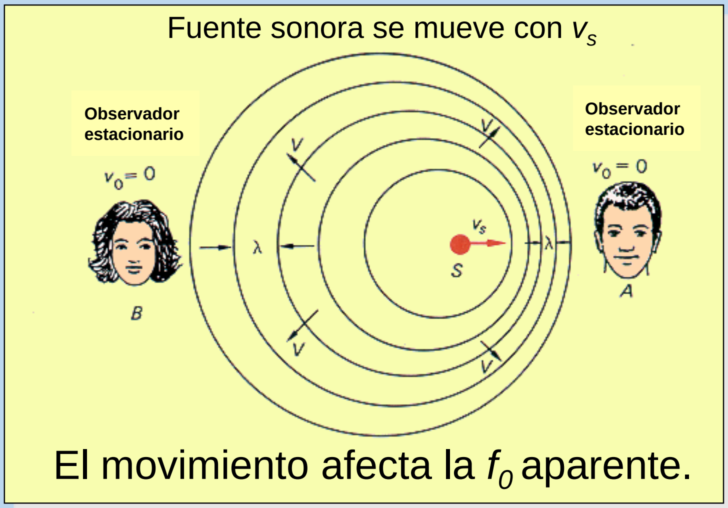
El observador está en reposo.
La frecuencia escuchada por el observador es la misma frecuencia de la fuente

El observador se mueve hacia la fuente con rapidez v_0.
El observador encuentra más ondas por segundo que otro que está en reposo. Por lo tanto, la frecuencia escuchada es más elevada

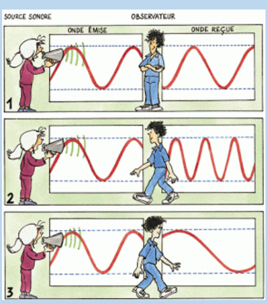
El observador se aleja de la fuente con rapidez v_0.
El observador encuentra menos ondas por segundo que otro que está en reposo. Por lo tanto, la frecuencia escuchada es menor

La fuente en movimiento, el observador en reposo

Las ondas situadas detrás del foco se separan. La persona izquierda escucha menor f debido a más larga λ.



Las ondas situadas delante del foco se comprimen. La persona derecha escucha mayor f debido a más corta λ.

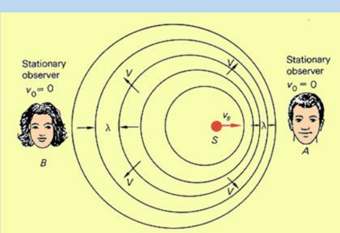


Fuente en reposo, observador en movimiento

$$f' = f\left(1 \pm \frac{v_0}{v}\right) = f\,\frac{(v \pm v_0)}{v}$$

El observador se acerca a la fuente

El observador se aleja de la fuente



Fuente en movimiento, observador en reposo

$$f' = f\,\frac{v}{v \mp v_s}$$

La fuente se acerca al observador

El fuente se aleja del observador

La fuente y el observador se mueven por el medio

$$f' = f\,\frac{(v \pm v_0)}{(v \mp v_s)}$$

Un conductor que viaja en auto rumbo al norte por una autopista conduce a una velocidad de 25m/s. Un auto de policía que viaja en dirección sur a una velocidad de 40m/s se aproxima sonando su sirena, la que emite un sonido de frecuencia de 2500Hz.

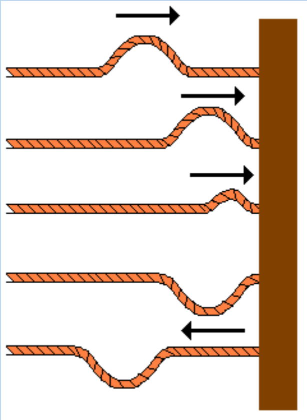
a) ¿Depende la velocidad de propagación de la onda de la velocidad a la que se mueve el automóvil y/o el auto de policía?
b) ¿Qué frecuencia percibe el automovilista conforme se acerca el auto de policía?
c) ¿Qué frecuencia es detectada por el conductor del automóvil después que el auto de policía lo pasa?
d) Repetir los pasos b) y c) suponiendo que el auto de policía también viaja hacia el norte.

Reflexión y superposición de ondas

Las ondas experimentan modificaciones al cambiar:

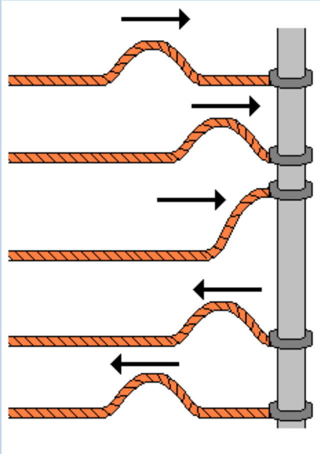
- el medio de propagación
- al encontrarse con obstáculos o con otras ondas.

Reflexión de una onda en un extremo fijo



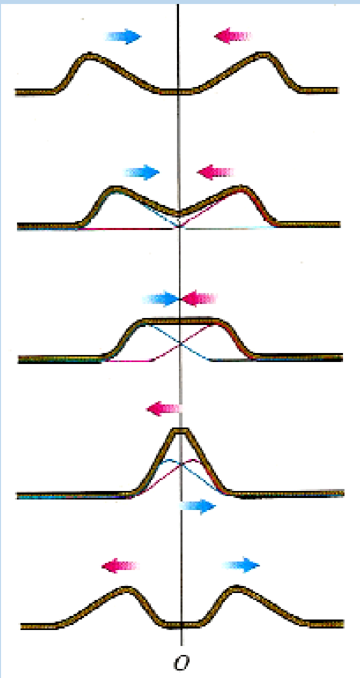
Se observa que cuando cada pulso llega al extremo parece engendrarse en él un nuevo pulso, pero cuya elongación tiene lugar en el sentido negativo de *y*, y se propaga a lo largo de la cuerda en sentido opuesto al incidente inicial.
Decimos que el pulso incidente se refleja en el extremo de la cuerda

Reflexión de una onda en un extremo libre



Un pulso en el sentido positivo de *y* se refleja como un pulso en el mismo sentido.
La naturaleza de la reflexión depende de las condiciones de contorno

Superposición de ondas



Cuando dos o más ondas viajeras se combinan en un punto, el desplazamiento de una partícula cualquiera en determinado momento, es simplemente la suma **instantánea** de los desplazamientos que podrían producir las ondas que actúan de manera individual.
Ej: si dos ondas se desplazan simultáneamente a través de la misma cuerda estirada e $y_1(x,t)$ y $y_2(x,t)$ son los desplazamientos que experimentaría si cada onda operara por su cuenta, el desplazamiento de la cuerda cuando ambas actúan es:

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

La superposición de ondas

Fenómenos de Interferencia

Ondas estacionarias

Batido de Ondas

Interferencia

Ondas estacionarias:

Dos ondas armónicas viajeras que se desplazan en sentidos opuestos, con igual frecuencia, amplitud y velocidad

$$y_1(x,t) = A\sin[(kx - \omega t)] \qquad y_2(x,t) = A\sin[(kx + \omega t)]$$

$$y_{total}(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

$$y_{total}(x,t) = A\sin[(kx - \omega t)] + A\sin[(kx + \omega t)]$$

Haciendo uso de $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\cos\beta$

$$\boxed{y_{total}(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)}$$

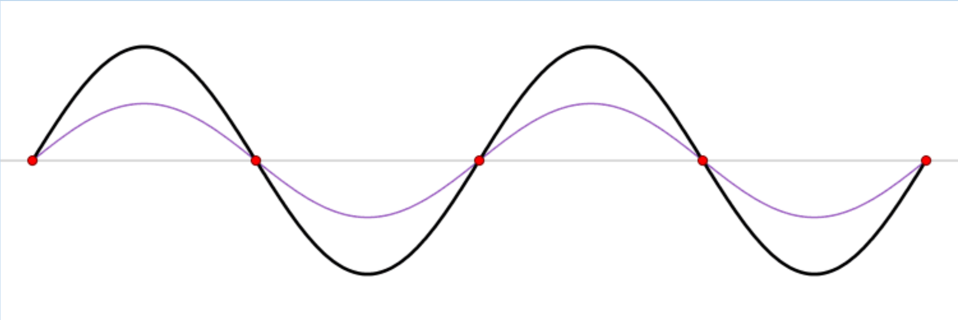
$$\boxed{y_{total}(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)}$$

Amplitud: depende de x

Dependencia temporal

Características de las ondas estacionarias

- No es una onda viajera ≠ $f(x \pm vt)$
- Su forma no se desplaza ni a la derecha ni hacia la izquierda
- Existen puntos para los cuales su elongación es siempre cero, llamados nodos.
- Existen puntos para los cuales su elongación es máxima, llamados antinodos o vientres



Nodos: puntos cuya elongación es siempre cero para todo instante de tiempo

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t) = 0$$

$$\sin(kx) = 0 \qquad\qquad x = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2} \quad n = 1, 2 \ldots$$

Antinodos o Vientres: puntos cuya elongación es máxima para todo instante de tiempo

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t) = 2A\cos(\omega t)$$

$$\sin(kx) = 1$$

$$x = \frac{(2n-1)\pi}{2k} = \frac{(2n-1)\lambda}{4} \quad n = 1, 2 \ldots$$

Ondas estacionarias en una cuerda fija en ambos extremos

Se pone a vibrar una cuerda de longitud L que está fija en sus extremos. Como consecuencia de las reflexiones en los extremos, tendremos dos ondas armónicas que sólo difieren en el sentido en que se propagan. La superposición de ellas genera ondas estacionarias.

En los extremos de la cuerda, la onda incidente y reflejada están desfasadas en π . Por lo tanto son nodos fijos de la cuerda.

$$\sin(kL) = 0$$

$$L = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda_n}{2} \qquad n = 1, 2 \ldots$$

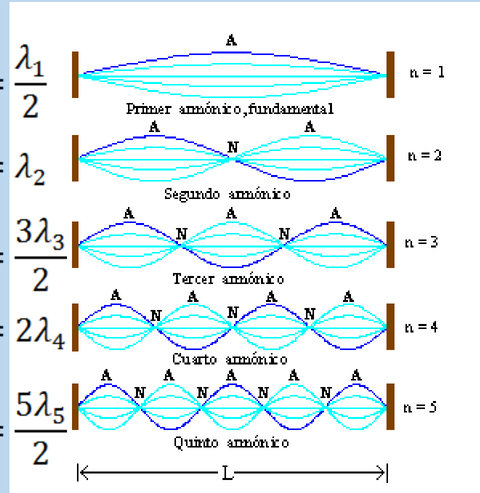
$$L = \frac{\lambda_1}{2}$$

$$L = \lambda_2$$

$$L = \frac{3\lambda_3}{2}$$

$$L = 2\lambda_4$$

$$L = \frac{5\lambda_5}{2}$$



Ondas estacionarias en tubos

Las ondas de presión que se propagan a lo largo de un tubo de longitud finita se reflejan en los extremos del mismo.
La superposición de trenes de ondas que viajan en sentidos opuestos, (reflejados en los extremos del tubo) originan ondas estacionarias.
La onda estacionaria puede considerarse como una onda de elongación o una onda de presión

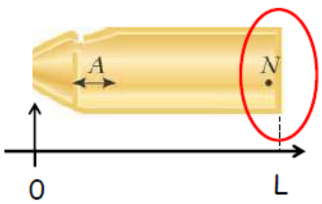
La onda estacionaria de elongación tiene la forma:

$$y(x,t) = 2A\sin(kx)\cos(\omega t)$$

Vimos que la presión y el desplazamiento están desfasados en $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

Reflexión de una onda de sonido en el extremo de un tubo cerrado y abierto

Extremo cerrado



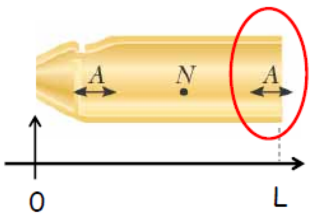
Condiciones de contorno

$s(L,t) = 0$ Nodo de desplazamiento

$\Big\downarrow \frac{\pi}{2}$

$p(L,t)$ Vientre de presión

Extremo abierto



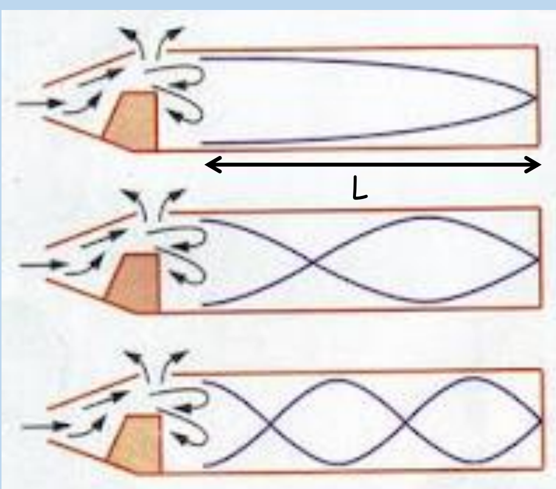
$s(L,t)$ Vientre de desplazamiento

$\Big\downarrow \frac{\pi}{2}$

$p(L,t) = 0$ Nodo de presión

Ondas estacionarias de elongación en un tubo cerrado

(cerrado en un extremo)



Fundamental o primer armónico $L = \frac{\lambda_1}{4}$

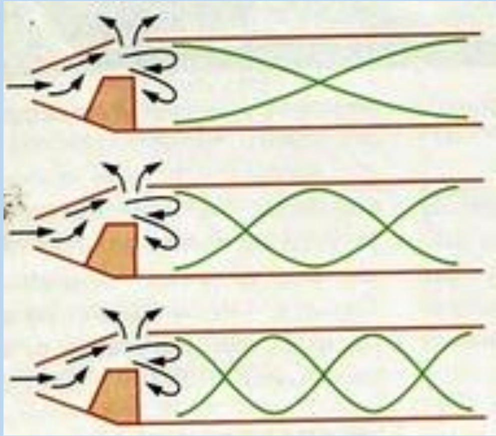
Segundo armónico $L = \frac{3\lambda_2}{4}$

Tercer armónico $L = \frac{5\lambda_3}{4}$

$$L = \frac{(2n-1)\lambda_n}{4} \qquad \lambda_n = \frac{4}{(2n-1)}L = \frac{\lambda_1}{(2n-1)} \quad n = 1,2\ldots$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{(2n-1)v}{4L} = (2n-1)f_1 \quad n = 1,2\ldots$$

Ondas estacionarias de elongación en un tubo abierto



Fundamental o primer armónico $L = \frac{\lambda_1}{2}$

Segundo armónico $L = \lambda_2$

Tercer armónico $L = \frac{3\lambda_3}{2}$

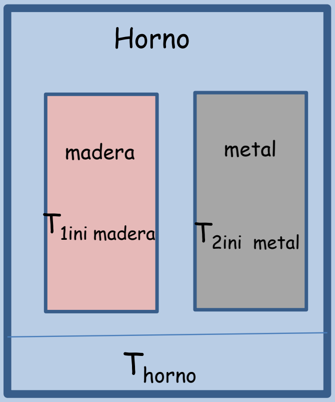
$$L = \frac{n\lambda_n}{2} \qquad \lambda_n = \frac{2L}{n} = \frac{\lambda_1}{n} \qquad n = 1,2\,...$$

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{nv}{2L} = nf_1 \qquad n = 1,2\,...$$

En un tubo de órgano cerrado en un extremo, de longitud 300 cm, calcular la frecuencia fundamental, el tercer armónico y el quinto armónico. ¿Si el tubo hubiese estado abierto en su extremo, cambiarían estas frecuencias? Considerar la velocidad de transmisión del sonido 340 m/s.

Termodinámica

Empezamos a transitar la última parte temática de la materia, termodinámica.
A partir de ahora consideraremos una variable, la temperatura, que hasta ahora no ha sido tenida en cuenta. Para introducirla, describiremos la siguiente experiencia:



$T_{1ini\ madera} < T_{horno}$

$T_{2ini\ metal} < T_{horno}$

Se considera que las paredes del horno son aislantes:

a) No hay intercambio de materia con el medio exterior
b) No hay intercambio de energía con el medio exterior

Se deja al sistema que evolucione durante un tiempo suficientemente largo.
Cuando llega al equilibrio las temperaturas son iguales.

$T_{final\ madera} = T_{final\ metal} = T_{horno}$ Ley Cero de la Termodinámica

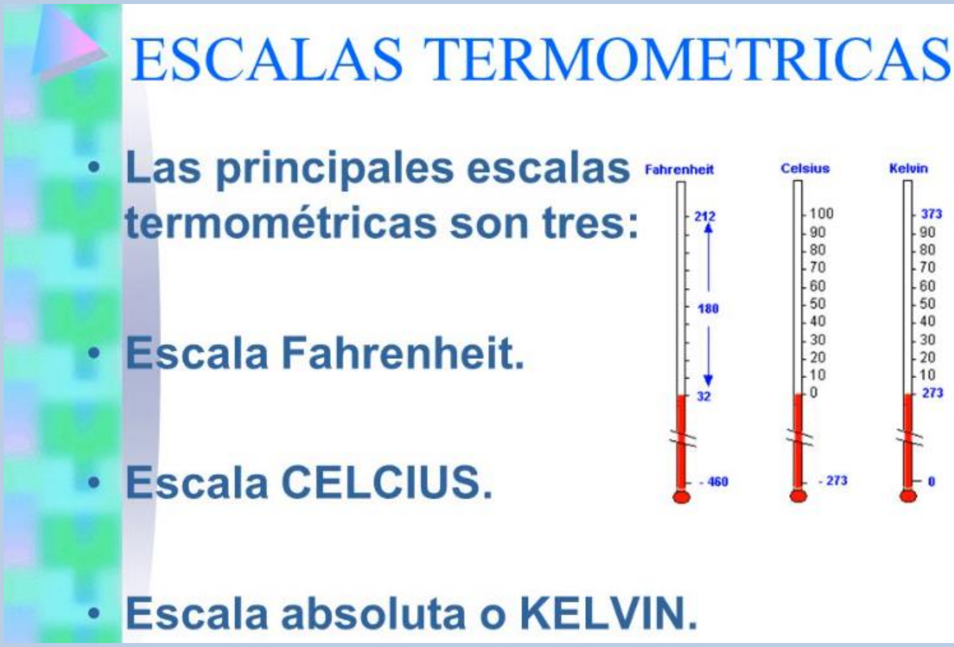
Ley cero de la termodinámica

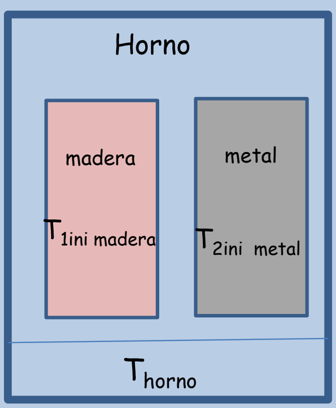
Carácter transitivo del equilibrio térmico

(a) (b) (c)

equilibrio térmico + equilibrio térmico = equilibrio térmico

$T_{final\ A} = T_{final\ B} = T_{termómetro}$





¿Porqué cambiaron las temperaturas de los cuerpos ?

¿Es correcta la frase de la vida cotidiana: Qué calor que tengo?

Los cuerpos: ¿Contienen calor?

No, los cuerpos no contienen calor

Los cuerpos cambiaron sus temperaturas porque el horno les transfirió energía en forma de calor Q

¿La cantidad de calor recibida por cada cuerpo es igual o diferente?

Los cuerpos reciben diferente cantidad de calor porque están compuestos de distintos materiales

Comenzamos a definir ciertas magnitudes que dependen de los materiales: conductividad, calor específico, coeficiente de dilatación, etc

El calor Q transferido a los cuerpos se define como: Proceso de transferencia de energía debido a una diferencia de temperatura

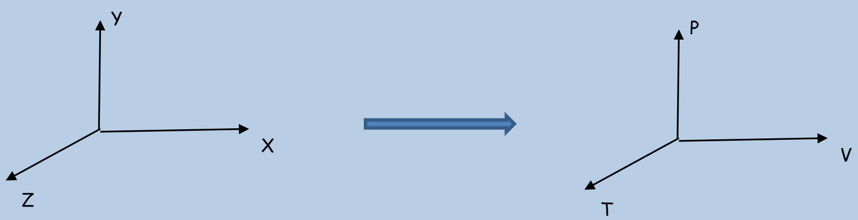
$$Q = mc\Delta t$$

Donde m es la masa del cuerpo
C es el calor específico, depende del material
Δt es el incremento de temperatura.
Las unidades de Q pueden ser: Joule o Calorías. La relación entre ambas está dado por: 1 cal =4, 18 Joules (equivalente mecánico del calor). Además, se puede expresar en l-atm

¿Qué sucede con el calor transferido al cuerpo?

Como consecuencia se produce un aumento de la energía cinética y potencial de sus moléculas, es decir un aumento de la energía interna.
Si hacemos una analogía mecánica: cuando se realiza trabajo mecánico sobre un cuerpo, éste adquiere energía cinética

Hasta ahora nos movimos en el espacio de las coordenadas, determinado por lo ejes x,y,z . En este espacio las interacciones son instantáneas.
Pasaremos a otro espacio, determinado por lo ejes P, V, T; donde los procesos se producen en un transitorio.

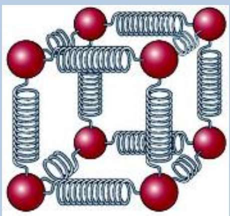


Ahora vamos a estudiar las consecuencias macroscópicas de los movimientos microscópicos de los átomos que constituyen los distintos materiales. Nos va a interesar aprender cómo manipular materiales para obtener formas *útiles* de energía. Para este último fin deberemos realizar un análisis energético de los sistemas de interés.
Además, como una primera aproximación a la descripción de la materia vamos a emplear el modelo de sistema de partículas con el que hemos trabajado anteriormente.

Nuestro siguiente objetivo es enunciar el Primer Principio de la Termodinámica. Para ello partimos del teorema de trabajo y energía cinética para un sistema físico modelado como un sistema de partículas

Teorema de trabajo y energía cinética para un sistema de partículas

$$W_{F\ externas} + W_{F\ Internas} = \Delta E_{cinética} = \Delta E_{cinética\ \ CM} + \Delta E_{cinética\ Rel}$$



Modelamos a la materia como partículas unidas por resortes. Por lo tanto, las fuerzas internas pueden ser representadas por resortes y son conservativas.
Si clasificamos las fuerzas, externas como internas en conservativas y No conservativas, tenemos:

$$W_{F\ externas} = W_{F\ externas\ Conservativas} + W_{F\ externas\ No\ Conservativas}$$

$$W_{F\ internas} = W_{F\ internas\ Conservativas} + \cancel{W_{F\ internas\ No\ Conservativas}}$$

$$W_{F\ externas} + W_{F\ Internas} = \Delta E_{cinética} = \Delta E_{cinética\ \ CM} + \Delta E_{cinética\ Rel}$$

$$W_{F\ internas\ Conservativas} = -\Delta E_{Pot\ internas}$$

$$W_{F\ externas\ Conservativas} = -\Delta E_{Pot\ externas}$$

$$W_{F\ externas\ NO\ Conservativas} = \underbrace{\Delta E_{cinética\ \ CM} + \Delta E_{Pot\ externas}} + \underbrace{\Delta E_{cinética\ Rel} + \Delta E_{Pot\ internas}}$$

$$W_{F\ externas\ NO\ Conservativas} = \Delta E_{\ Mecánica\ Macroscópica} + \Delta U_{interna}$$

Si ahora tenemos en cuenta los procesos de transferencia de energía por calor

$$Q + W_{F\ externas\ NO\ Conservativas} = \Delta E_{\ Mecánica\ Macroscópica} + \Delta U_{interna}$$

$$Q + W_{F\ externas\ NO\ Conservativas} = \Delta E_{Mecánica\ Macroscópica} + \Delta U_{interna}$$

En las situaciones que analizaremos el centro de masa está en reposo, por lo tanto, el término relacionado con la energía mecánica macroscópica no va a contribuir. Finalmente el **Primer Principio de la Termodinámica** en el formato que presentan los libros con la convención alemana está dado por:

$$Q + W_{F\ NO\ Conservativas} = \Delta U_{interna}$$

Si usamos la convención americana, la encontrada más frecuentemente en los libros:

$$\Delta U_{interna} = Q - W_{F\ NO\ Conservativas}$$

$W > 0$ *si el sistema hace trabajo sobre el* medio exterior

$W < 0$ *si el medio hace trabajo sobre el* sistema

$Q > 0$ *si el sistema recibe calor del medio exterior*

$Q < 0$ *si el sistema entrega calor al medio exterior*

En este término están contenidos los procesos relacionados con los cambios de temperatura

En este término están contenidos los cambios de fase y procesos de dilatación

$$W_F = \int_i^f \vec{F}.d\vec{s} = \int_i^f F.ds = \int_i^f PAds = \int_i^f Pdv$$

El trabajo es el área bajo la curva de P (presión) en función de v (volumen)

$$\Delta E_{cinética\ Rel} + \Delta E_{Pot\ internas}$$

El sistema Físico

$$\Delta U_{interna} = Q - W_{F\ NO\ Conservativas}$$

Agentes externos

Es una función de estado.
No depende del proceso que realice el sistema.
Sólo depende del estado inicial y final.

Q y W son procesos.
Esto significa que estas magnitudes dependen de los caminos en que se realizan los procesos.
Ejemplo: el trabajo realizado sobre un gas ideal así como el calor intercambiado no tiene el mismo resultado si el proceso es a volumen constante o a presión constante. Pero, la diferencia, la variación de la energía interna, no depende del camino.

Primer Principio de la Termodinámica

$$\Delta U_{interna} = Q - W$$

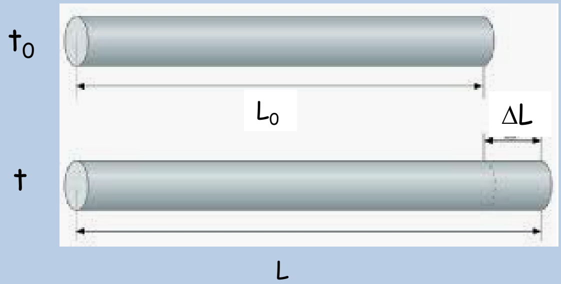
Dilatación

Con pocas excepciones, las dimensiones de todos los cuerpos aumentan cuando se eleva la temperatura. Este fenómeno se denomina dilatación o expansión térmica, es una consecuencia del cambio en la separación *promedio* entre los átomos en un objeto y juega un papel muy importante en numerosas aplicaciones en la ingeniería.

Ejemplos: se deben incluir juntas de expansión térmica en el diseño de: edificios, autopistas, vías de ferrocarriles, puentes, para compensar los cambios dimensionales que se producen como consecuencia de las variaciones de temperatura.

Dilatación lineal

Si un trozo de material dado tiene forma de barra o cable sólo interesa su variación de longitud con los cambios de temperatura (la variación en su sección transversal es despreciable)



Se obtiene experimentalmente que el aumento de longitud $\Delta L = L - L_0$ es proporcional a la longitud inicial L_0 a la temperatura inicial t_0 y prácticamente proporcional también al aumento de temperatura $t - t_0$

$$\Delta L = \alpha L_0 \, \Delta t$$

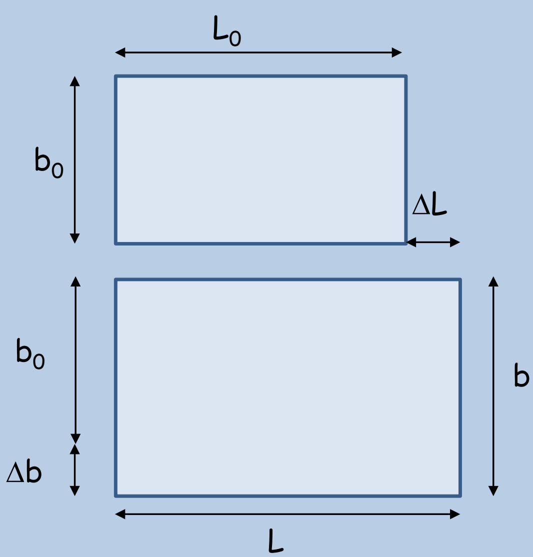
Siendo α el coeficiente de dilatación lineal, propia de cada material.
La longitud a la temperatura t está dada por:

$$L(t) = L_0\big(1 + \alpha(t - t_0)\big)$$

Dilatación superficial

Cuando se calienta una lámina de material, aumentan tanto su longitud como su ancho.

Consideramos una lámina rectangular de longitud L_0 y ancho b_0 a la temperatura t_0.
Cuando se eleva la temperatura estas dimensiones se convierten en:



$$L(t) = L_0\big(1 + \alpha(t - t_0)\big)$$

$$b(t) = b_0\big(1 + \alpha(t - t_0)\big)$$

$$A(t) = b(t)L(t) = L_0\big(1 + \alpha(t - t_0)\big)b_0\big(1 + \alpha(t - t_0)\big)$$

$$A(t) = b(t)L(t) = L_0 b_0\big(1 + \alpha(t - t_0)\big)\big(1 + \alpha(t - t_0)\big)$$

$$A(t) = b(t)L(t) = L_0 b_0(1 + 2\alpha(t - t_0) + \alpha^2(t - t_0)^2)$$

Como α tiene un valor numérico pequeño, el término cuadrático es despreciable frente al término lineal, resultando el área dilatada a la temperatura t

$$A(t) = A_0\big(1 + \gamma(t - t_0)\big) \qquad \gamma = 2\alpha \qquad A_0 = L_0 b_0 \text{ el área inicial a } t_0$$

γ Se denomina coeficiente de dilatación superficial

Dilatación volumétrica

Haciendo un razonamiento análogo a lo anterior se define un coeficiente de dilatación volumétrica β

$$\beta = 3\alpha$$

La expresión del volumen dilatado a la temperatura t está dado por:

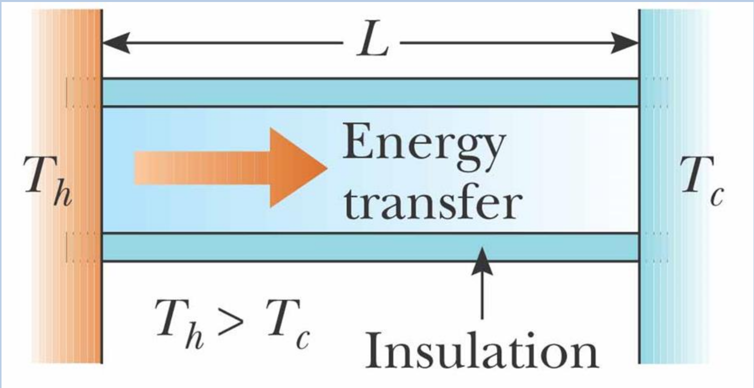
$$V(t) = V_0\big(1 + \beta(t - t_0)\big)$$

Con V_0 el volumen inicial a la temperatura t_0

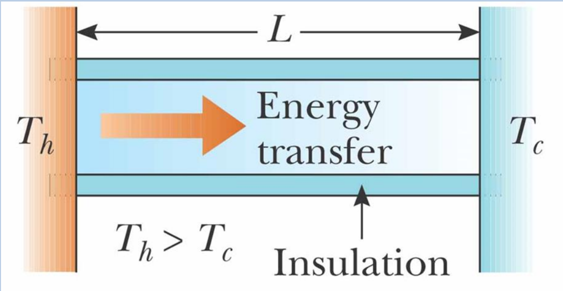
Mecanismos de transferencia de energía por Calor

Conducción: requiere contacto directo entre sistemas (o partes de un mismo sistema que estén a distinta temperatura). El movimiento molecular es mayor en la zona a mayor temperatura. Las moléculas con mayor energía cinética, Ec, como consecuencia de los impactos moleculares, cederá parte de esa Energía a las moléculas vecinas. Por consiguiente, la energía se transmite a lo largo de la barra, en el caso del esquema, manteniéndose las partículas en su posición original

Situación tipica: barra con sus extremos a distintas temperaturas



La conducción se produce cuando las distintas partes del cuerpo se encuentran a distinta temperatura y la dirección del flujo de calorífico es siempre de puntos de mayor a los de menor temperatura.



La barra tiene una longitud L y sección transversal A. En determinado instante se pone el extremo izquierdo en contacto con una fuente a temperatura T_h y el extremo derecho con otra fuente de temperatura T_c . El resto de la barra se rodea por un material aislante.

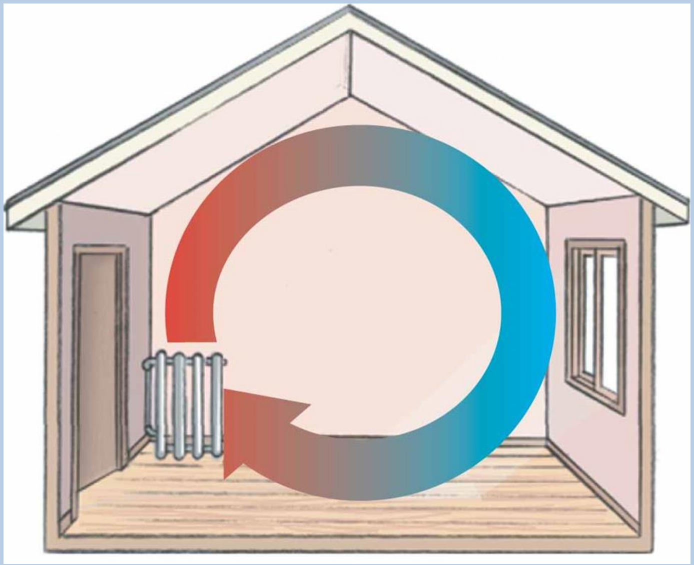
Para todo instante de tiempo la temperatura en cada punto de la barra permanece constante (estado estacionario). Hay un flujo de calor de izquierda a derecha a lo largo de la barra.

Se define la corriente calorífica H (flujo calorífico por unidad de tiempo)

$$H = \frac{dQ}{dt} = kA\frac{T_h - T_c}{L}$$

Donde k es la conductibilidad térmica, propia del material. A mayor k mayor corriente calorífica.

Convección : tiene lugar en los fluidos (líquidos y gases) requiere movimiento de materia. Como ejemplo de este proceso, se describe lo que sucede con el aire que se encuentra sobre una estufa. Este aparato eleva la temperatura del fluido que está en contacto, entonces se expande y se eleva. El aire más frío del entorno cae y ocupa el lugar del más caliente. Comienza la circulación por convección. Este movimiento puede estimularse por ej. por medios mecánicos y se obtiene la **convección forzada**.



Radiación: Esta forma de transferencia de energía por calor no requiere contacto, ni movimiento de materia. Esta radiación es emitida en todas direcciones a la velocidad de la luz sin que exista necesidad de medio alguno de transporte. La intensidad a la que se produce esta transferencia de energía depende fundamentalmente de la temperatura a la que se halle el cuerpo emisor y la naturaleza de las caras del mismo. Cuando esta radiación alcanza a otro sistema , la energía puede ser reflejada, transmitida o absorbida por éste.

Termodinámica II

Continuaremos con el estudio de los gases

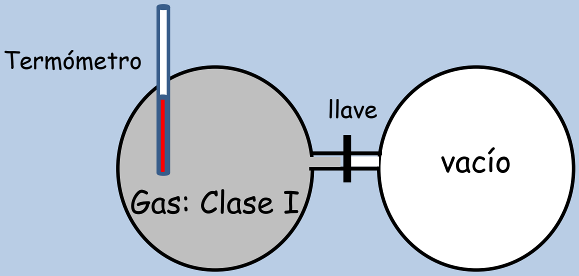
¿Cuáles van a ser los modelos que vamos a considerar?

Para modelar los gases de manera adecuada vamos a describir la experiencia denominada expansión libre de Joule o simplemente experiencia de Joule

Elegimos un gas al que llamamos Clase I y lo ponemos dentro de un recipiente con paredes adiabáticas.

Paredes adiabáticas, significa que no existe intercambio de calor con el medio externo

Experiencia de expansión libre de Joule



Paredes del recipiente: adiabáticas

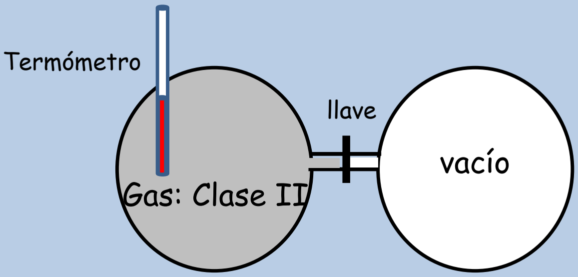
Para t=0, la presión, el volumen, la temperatura y en número de moles del gas está dado por

P_0, V_0, T_0, n_0

A continuación, se abre la llave, el gas se expande y ocupa todo el espacio donde inicialmente había vacío. Se lee el termómetro y el proceso se realiza a temperatura constante.
Finalmente las variables toman los valores:

P_f, V_f, T_f, n_f $\qquad T_f = T_0 \quad y \quad n_f = n_0$

Un gas que presenta este comportamiento se denomina GAS IDEAL



Se repite la experiencia con un gas llamado Clase II

Para t=0, la presión, el volumen, la temperatura y en número de moles del gas está dado por

P_0, V_0, T_0, n_0

A continuación, se abre la llave, el gas se expande y ocupa todo el espacio donde inicialmente había vacío. Se lee el termómetro y la temperatura varía hasta llegar al estado de equilibrio.
Finalmente las variables toman los valores:

P_f, V_f, T_f, n_f $\qquad T_f \neq T_0 \quad y \quad n_f = n_0$

Un gas que presenta este comportamiento se denomina GAS REAL

De acuerdo al los valores que toman las variables termodinámicas, los gases se modelarán como ideales o prefectos y gases reales

Consecuencias:

en ambos casos W=0 en el recipiente de la derecha se ha hecho vacío
Q=0 las paredes son adiabáticas

$$\Delta U_{interna} = Q - W$$

$$\Delta U_{interna} = 0$$

$$\overbrace{\Delta E_{cinética\ Rel} + \Delta E_{Pot\ internas}}$$

Gas ideal

Si T=cte, $\Delta E_{c\ rel} = 0, \quad \Delta E_{pot\ interior} = 0$

- Las fuerzas internas en un gas ideal se desprecian, consecuencia: no hay cambios de fase.
- La energía interna depende de la temperatura

Gas real

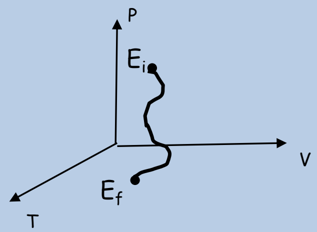
$\Delta T \neq 0, \qquad T_i \neq T_f$

$\Delta E_{c\ rel} \neq 0 \qquad \Delta E_{pot\ interior} \neq 0$

- Las fuerzas internas en un gas real No se desprecian, consecuencia: hay cambios de fase.

Gas ideal o perfecto

Vamos a estudiar los distintos procesos que realiza un gas ideal. Para representarlos empleamos el espacio termodinámico P,V,T.



Cuando representamos un proceso que realiza un gas ideal en el espacio P,V,T, como el dibujado en la figura, estamos asignado a cada punto del camino que describe, valores definidos de temperatura, presión y volumen. Esto está expresando que cada punto del proceso, tiene un valor determinado de Temperatura, por lo tanto, son todos estados de equilibrio.

Para que estos procesos sean posibles, decimos que se realizan cuasiestáticamente, es decir de manera muy lenta, de tal manera que el sistema esté pasando por distintos estados de equilibrio o que difieran de él en dP, dV, dT.

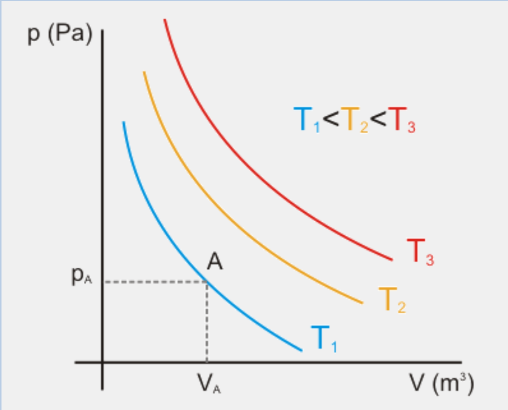
Los gases ideales satisfacen la ecuación de estado

$$PV = nRT$$

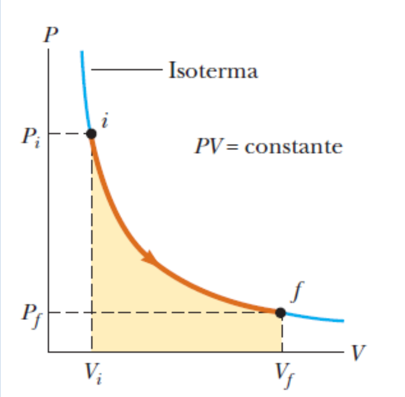
Donde P es la presión, V el volumen, n es el número de moles, T la temperatura expresada en Kelvin y R la constante universal de los gases.

R=0,082 l-atm/mol °K , R=8,31 J/mol°K, R=1,99 cal/mol°K

Los procesos que estudiaremos a continuación los representaremos en el plano P-V. En este plano, las isotermas (temperatura constante) se representan por medio de hipérbolas como las indicadas en la figura.



Proceso isotérmico (temperatura constante) $PV = nRT$ $\Delta U = Q - W$



En todos los procesos que analizaremos estamos interesados en conocer las expresiones del trabajo realizado, calor intercambiado y la variación de energía interna del sistema.

La expresión de la variación de la energía interna de un gas ideal está dada por

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

Donde C_V es el calor específico molar a volumen constante

Debido a que la energía interna es una función de estado, la expresión es válida para todos los procesos, independientemente del camino que realice.

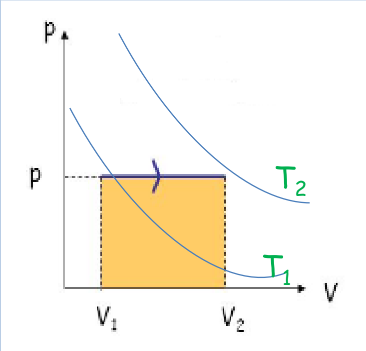
$$W = \int_{Vi}^{Vf} PdV = \int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} dV = nRTln\frac{V_f}{V_i} \qquad \Delta U = 0 \text{ isoterma} \qquad Q = W$$

En la situación representada en la figura el $V_f > V_i, W > 0$ *El sistema realiza trabajo sobre el medio*

Por el Primer principio $Q > 0$ *y el sistema absorbe calor del medio*

Proceso isobárico (Presión constante) $PV = nRT$ $\Delta U = Q - W$ $\Delta U = nC_V \Delta T$

$$W = \int_{Vi}^{Vf} PdV = P(V_2 - V_1)$$ En el ejemplo de la figura



$V_2 > V_1$, $W > 0$ *El sistema realiza trabajo sobre el medio*

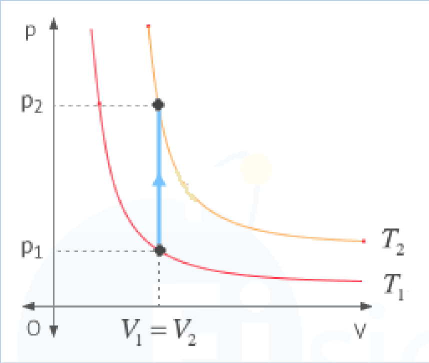
$$\Delta U + W = Q \qquad Q = nC_V \Delta T + P(V_2 - V_1)$$

$$Q = nC_V \Delta T + nR\,(T_2 - T_1) = n(C_V + R)(T_2 - T_1) \qquad C_P = C_V + R$$

$$Q = nC_P(T_2 - T_1)$$

$T_2 > T_1$, $Q > 0$ *El sistema absorbe calor del medio*

Proceso isocoro (Volumen constante)



$$W = \int_{Vi}^{Vf} PdV = 0$$

$$\Delta U = nC_V \Delta T$$

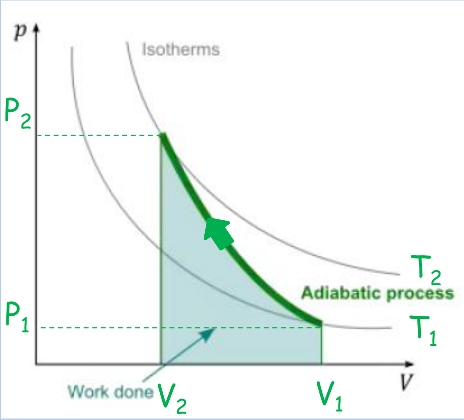
$$\Delta U = Q - W$$

$$\Delta U = Q$$

En el ejemplo de la figura

$T_2 > T_1$, $\quad \Delta U > 0$ *, Entonces* $Q > 0$ *el sistema absorbe calor del medio*

Proceso adiabático (No intercambia calor con el medio Q=0) $\quad PV = nRT$



$$\Delta U = Q - W \qquad \Delta U = nC_V \Delta T$$

En el gráfico se representa una adiabática. Es una hipérbola con mayor pendiente que la isoterma

Sobre una adiabática se verifica que:

$$P_1 {V_1}^{\gamma} = P_2 {V_2}^{\gamma} \qquad \gamma = \frac{C_P}{C_V} \qquad C_P = C_V + R$$

$$Q = 0 \qquad W = -\Delta U = -nC_V \Delta T = -nC_V \left(\frac{P_2 V_2}{nR} - \frac{P_1 V_1}{nR} \right) = -\frac{C_V}{R} (P_2 V_2 - P_1 V_1)$$

$$1 - \gamma = 1 - \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V - C_P}{C_V} = -\frac{R}{C_V} \qquad W = \frac{(P_2 V_2 - P_1 V_1)}{1 - \gamma}$$

En el ejemplo de la figura $\quad T_f > T_i, W < 0$ *El medio exterior realiza trabajo sobre el* sistema

Los procesos estudiados se pueden combinar y formar un ciclo. Es decir, se comienza en un estado inicial y luego de que el gas ideal realiza diferente procesos vuelve al estado inicial.

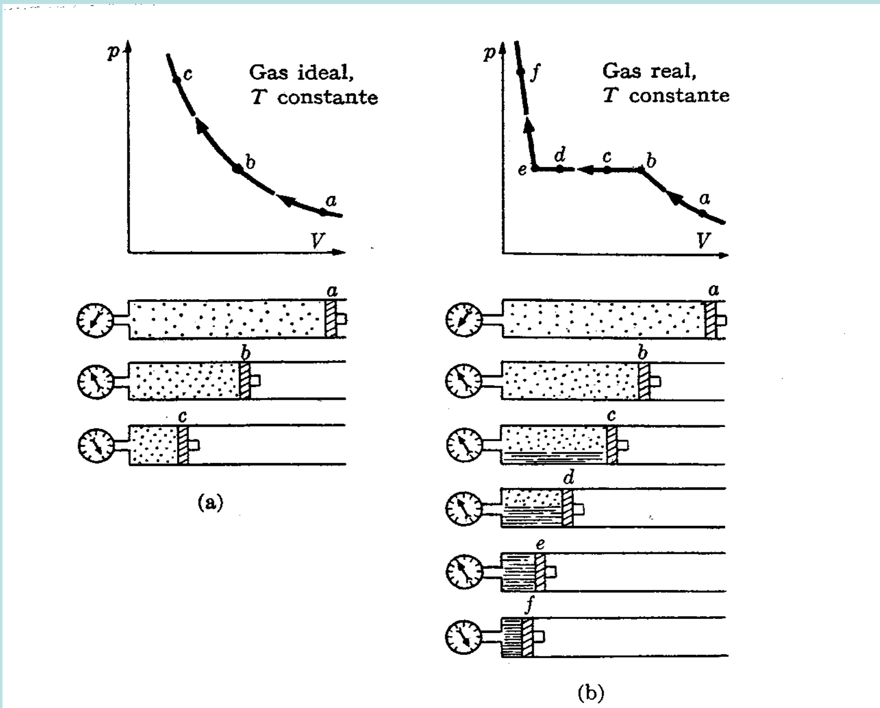
Para resolver algunos de los ejercicios de esta guía se debe introducir una definición que en la próxima clase le podremos asignar contenido físico, el rendimiento de un ciclo

Se define el rendimiento de un ciclo como:

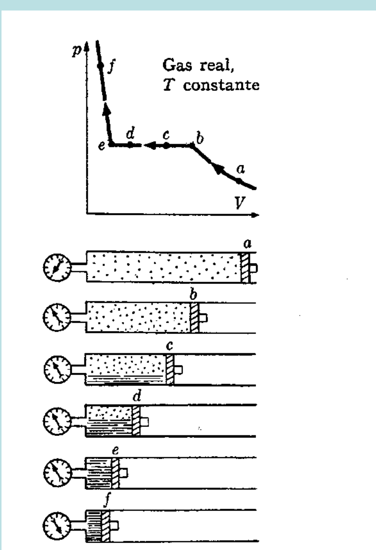
$$Rendimiento = \frac{W\ total\ realizado\ a\ lo\ largo\ del\ ciclo}{\sum Q_i\ \ (absorbidos)}$$

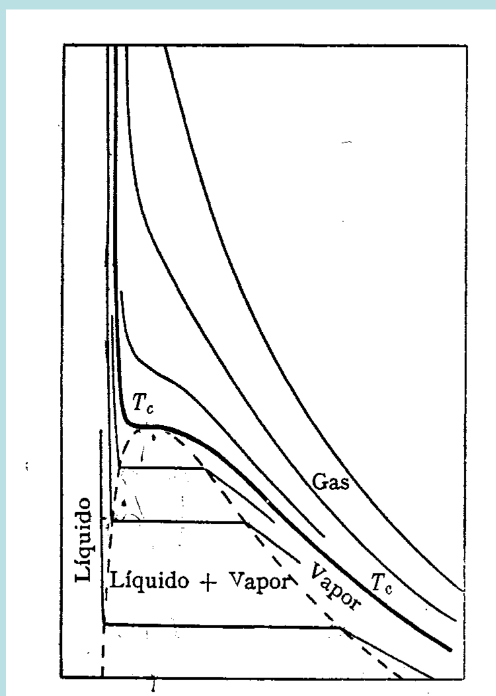
Donde los Q_i son los calores absorbidos por el sistema. Por lo tanto deben ser los positivos

Gas ideal y gas real



Isotermas de un gas real





Ecuación de Van Der Waals

Gases Reales: Ecuación de van der Waals.

$$\boxed{[P + n^2 a/V^2] \; (V - nb) \; = nRT}$$

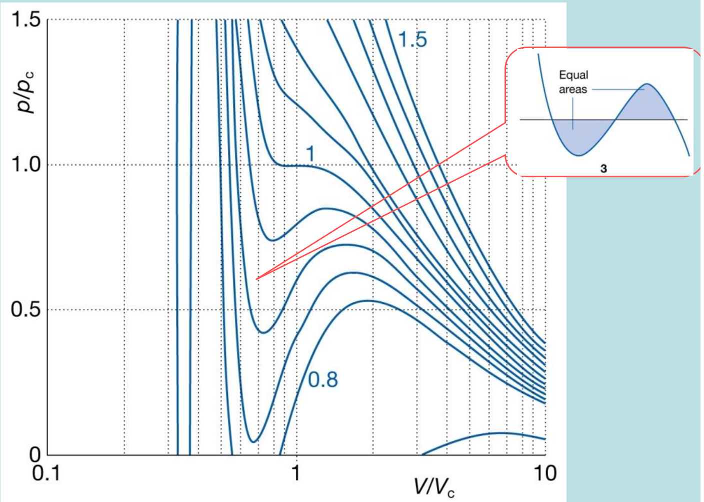
a – ***relacionado a las fuerzas de interacción molecular.***

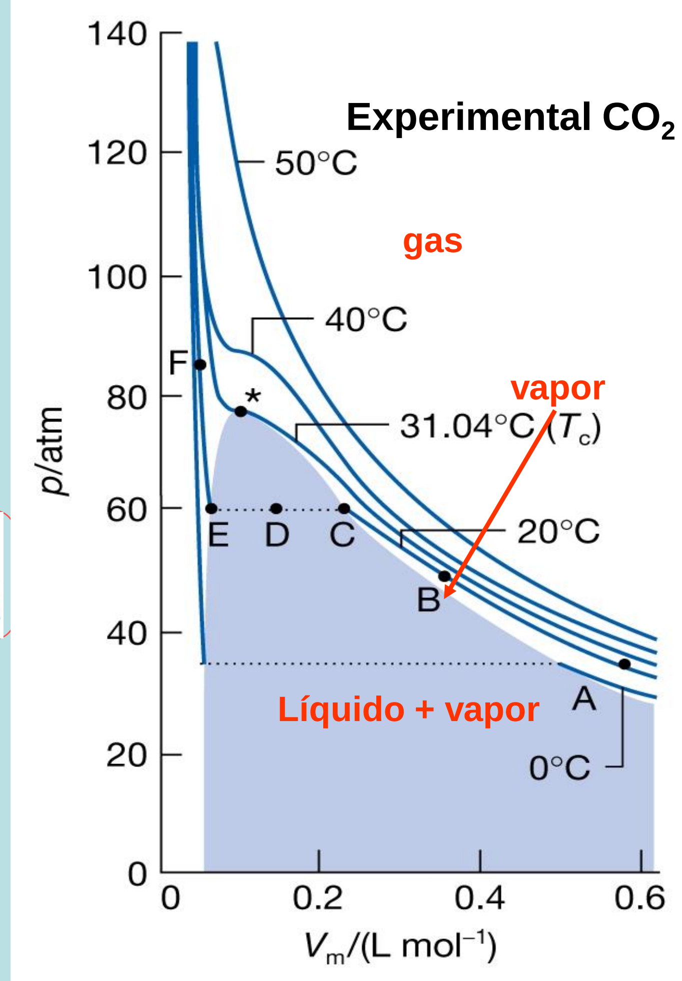
b – ***relacionado con el volumen propio (o excluído) por las moléculas de gas (l / mol).***

a y b son constantes determinadas experimentalmente para cada gas.

Isotermas de un gas real (diagramas de Andrews)

Curvas obtenidas mediante la ecuación de van der Waals: no describen bien los resultados experimentales de coexistencia líquido vapor

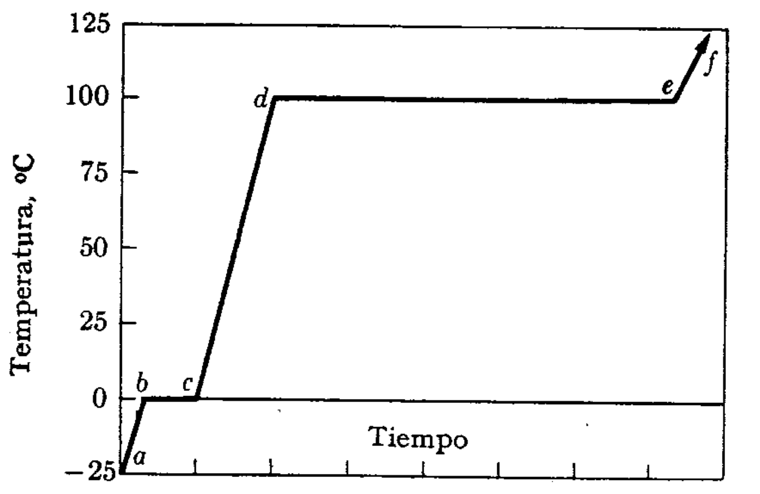




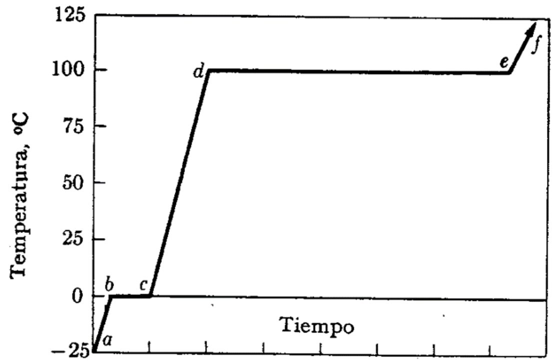
Calorimetría

Cambios de estado

Se tiene inicialmente hielo a -25 °C



—La temperatura permanece constante durante todo cambio de estado.



—La temperatura permanece constante durante todo cambio de estado.

Se tiene inicialmente una masa m_{hielo} de hielo a -25 °C

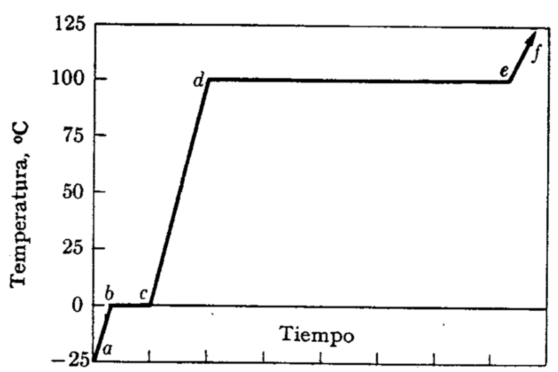
¿Qué cantidad de calor necesita recibir el hielo que inicialmente está en a (-25° C), para llegar a b (0°C) en estado sólido?

$$Q_{ab} = m_{hielo} c_{hielo} (0°C - (-25°C)) = m_{hielo} c_{hielo} 25°\mathrm{C}$$

¿Qué cantidad de calor necesita recibir el hielo que inicialmente está en b (0° C en estado sólido), para llegar a c (0°C en estado líquido)?

$$Q_{bc} = m_{hielo} L_{fusión}$$

$$L_{fusión} = 80 \frac{cal}{gr} = calor\ de\ transformación$$



—La temperatura permanece constante durante todo cambio de estado.

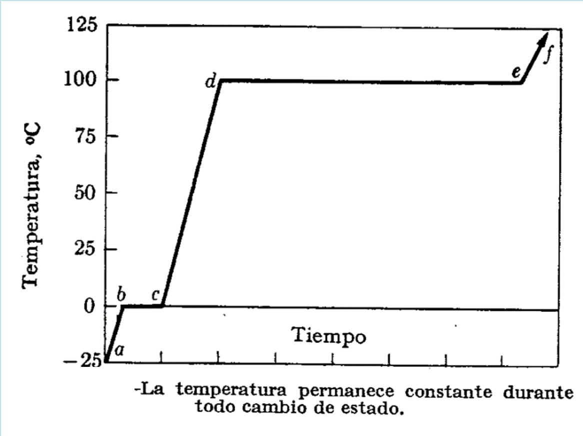
¿Qué cantidad de calor necesita recibir el hielo, convertido en agua, que inicialmente está en c (0° C en estado líquido), para llegar a d (100°C) en estado líquido ?

$$Q_{cd} = m_{h \to agua} c_{agua} (100°C - 0°C) = m_{h \to agua} c_{agua} 100°\mathrm{C}$$

¿Qué cantidad de calor necesita recibir el agua que inicialmente está en d (100° C) en estado líquido, para llegar a e (100°C) en estado vapor?

$$Q_{de} = m_{agua} L_{vaporización}$$

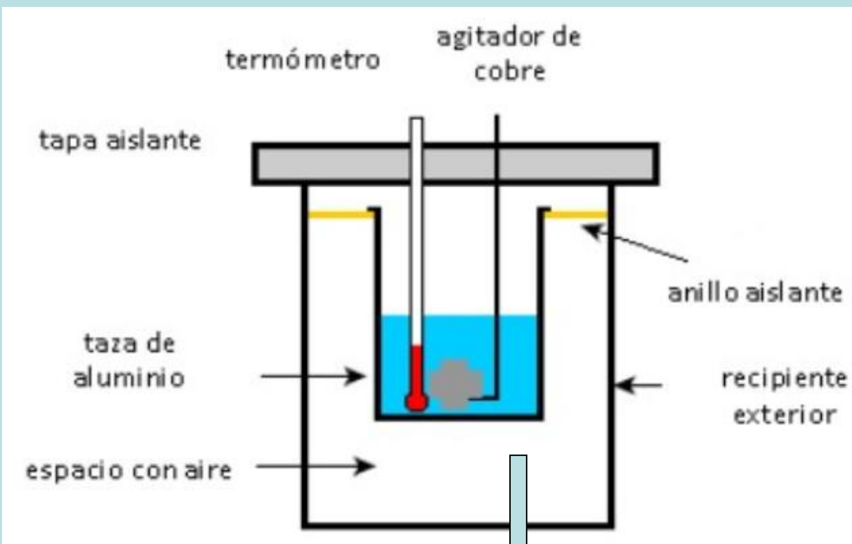
$$L_{vaporización} = 539 \frac{cal}{gr} = calor\ de\ transformación, vaporización$$



¿Qué cantidad de calor necesita recibir el vapor, que inicialmente está en e (100° C en estado de vapor), para llegar a d (125°C) en estado vapor ? Este estado se denomina vapor sobrecalentado

$$Q_{ef} = m_{agua \to vapor} c_{vapor} (125°C - 100°C) = m_{agua \to vapor} c_{agua} 25°C$$

Calorímetro



Paredes adiabáticas: No hay intercambio de calor con el medio exterior

$$\sum_i Q_i = 0$$

Dentro de un recipiente de paredes adiabáticas (calorímetro) que contiene 10 g de agua y 10 g de hielo se introduce una masa de plomo a 200 °C.

a) Si la masa del plomo fuera de 100 gr, calcule la temperatura final que adquiriría el sistema y la cantidad de hielo que se fundiría. Graficar en forma cualitativa la variación de la temperatura en función del tiempo para los sistemas agua, hielo, plomo y calorímetro.

b) Idem si la masa de plomo introducida fuera de 200 gr.

c) ¿Qué cantidad de masa de plomo debería introducirse en el calorímetro para convertir en vapor a la mitad del líquido que está dentro del calorímetro?

L_f,hielo = 80 cal/gr; L_v,agua = 540 cal/gr (a presión atmosférica); c_{pb} = 0,031 cal/gr °C

Segundo Principio de la Termodinámica

Comenzaré destacando que hay una direccionalidad en los procesos naturales. A modo de ejemplo, esta característica se nota en las siguiente situaciones:

1) Un plato de comida caliente, con el transcurso del tiempo, adquiere la temperatura ambiente. Pero, ningún cuerpo espontáneamente va a elevar su temperatura más que el entorno.
2) Un cubito de hielo en un recipiente con agua a temperatura ambiente, se funde. Espontáneamente, el agua no se solidifica.
3) Si recordamos la experiencia de Joule, el gas que inicialmente estaba en una parte del recipiente, cuando se abre la llave, se expande. Espontáneamente el gas no vuelve a ocupar su espacio inicial.

Vemos que en los procesos naturales existe una direccionalidad

1) La comida se enfría
2) El hielo se funde
3) El gas se expande

Estos procesos naturales son irreversibles, desde el punto de vista termodinámico.

Proceso Irreversible: es aquel que luego de producido impide que el sistema+ su entorno vuelvan a su estado inicial (sin modificar el entorno)

¿Qué es lo que determina la direccionalidad de los procesos descriptos anteriormente?

La respuesta no está contenida en el Primer Principio de la Termodinámica.

La respuesta está contenida en el Segundo Principio de la Termodinámica.

El Segundo Principio de la Termodinámica se puede enunciar de tres maneras distintas

1) Enunciado de Kelvin-Planck (rendimiento de los motores)

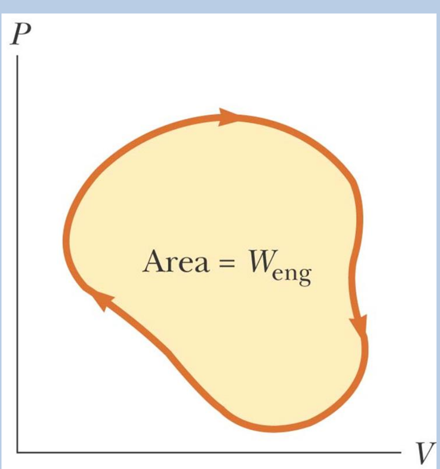
2) Enunciado de Clausius (eficiencia de los refrigeradores)

3) Entropía

Los tres enunciados son totalmente equivalentes. Si es válido uno, entonces son válidos los otros. Libro de Resnick-Halliday-Krane está la demostración.

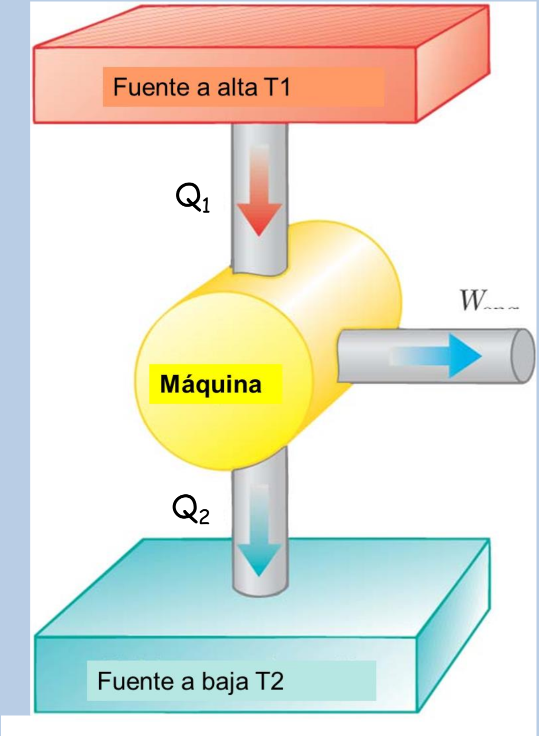
Esquema de un motor térmico: es una máquina (caja negra) cuya finalidad es convertir el calor que le ingresa en trabajo útil

- Estas máquinas utilizan una sustancia de trabajo que realiza distintos procesos termodinámicos para llevarla a su estado inicial, de modo de repetir el proceso una y otra vez
- Un motor puede pensarse como una sustancia que realiza procesos cíclicos



Para que se produzca una transferencia de calor entre el sistema y el medio debe haber un cuerpo a distinta temperatura.
A estos cuerpos que transfieren calor los llamamos fuentes. Éstas, serán extensas, en el sentido que transfieren calor sin cambiar su temperatura.

Un motor térmico lo representamos de la siguiente manera:



El sistema físico es el motor.
Absorbe Q_1 de la fuente de mayor temperatura T_1, realiza trabajo y entrega calor Q_2 a la fuente de menor temperatura T_2

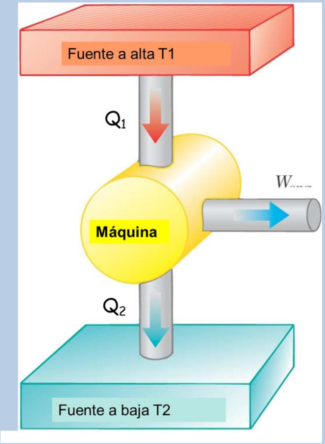
Como la sustancia de trabajo describe procesos cíclicos

$$\Delta U = 0$$

Por Primer Principio

$$\Delta U = Q - W$$

$$Q = W$$



En la clase anterior se definió el rendimiento de un ciclo como:

$$Rendimiento = \frac{W\ total\ realizado\ a\ lo\ largo\ del\ ciclo}{\sum Q_i\ positivos}$$

En esta situación

$$Q = W$$

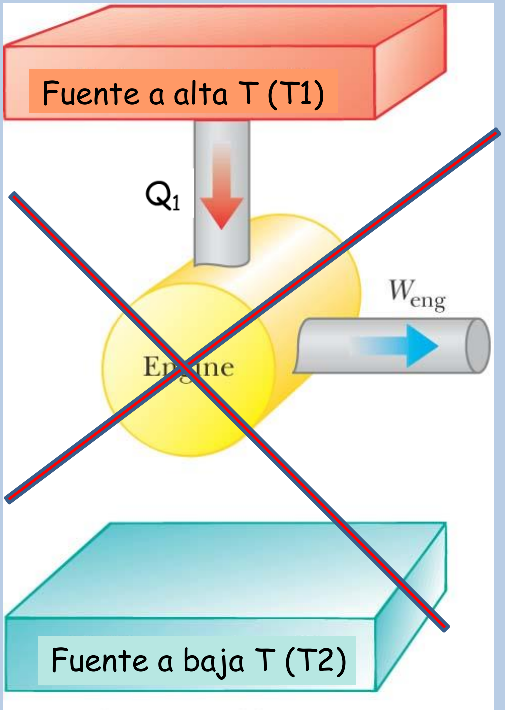
Donde

$$Q = Q_1 + Q_2 = |Q_1| - |Q_2|$$

$$Rendimiento = \frac{W}{\sum Q_i} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

Segundo Principio de la Termodinámica según Kelvin-Planck

Es imposible construir una máquina térmica que trabaje cíclicamente cuyo único resultado sea la extracción de calor de una fuente a una temperatura dada y lo convierta todo en trabajo útil. Siempre parte de la energía entrante tiene que transferirse a una fuente de menor temperatura.



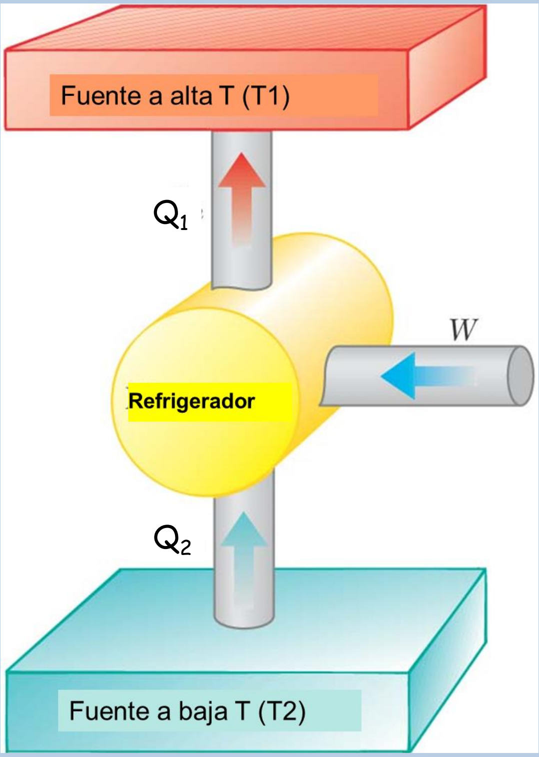
The impossible engine

$$Rendimiento = \frac{W}{\sum Q_i} = \frac{|Q_1| - |Q_2|}{|Q_1|} = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|}$$

Por lo tanto, el rendimiento de una máquina térmica en condiciones de idealidad y reversibilidad tiene un rendimiento menor que 1

$$Rendimiento = 1 - \frac{|Q_2|}{|Q_1|} < 1$$

Un refrigerador lo representamos de la siguiente manera:

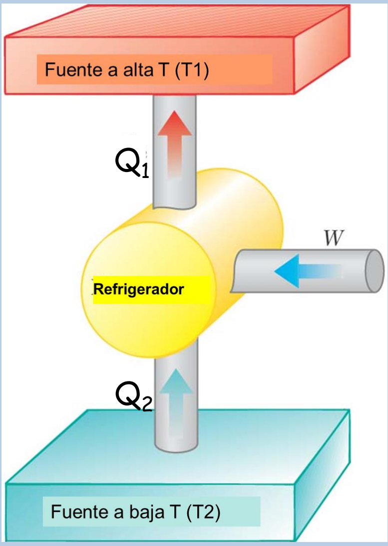


El sistema físico es el refrigerador.
Absorbe Q_2 de la fuente de menor temperatura T_2, se realiza trabajo sobre el sistema y entrega calor Q_1 a la fuente de mayor temperatura T_1

$$Q = \mathrm{W}$$

En los refrigeradores la magnitud relevante no es el rendimiento. En este caso se define la eficiencia ε

$$\epsilon = -\frac{Q_2}{W}$$



$$\epsilon = -\frac{Q_2}{W}$$

$W < 0, se\ hace\ trabajo\ sobre\ el\ sistema.\ Q_2 > 0\ y\ \ Q_1 < 0$

$$\Delta \mathrm{U} = Q - \mathrm{W}$$

$$\mathrm{W} = Q$$

$$-|\mathrm{W}| = |Q_2| - |Q_1|$$

$$\epsilon = -\frac{Q_2}{W} = \frac{|Q_2|}{|\mathrm{W}|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|}$$

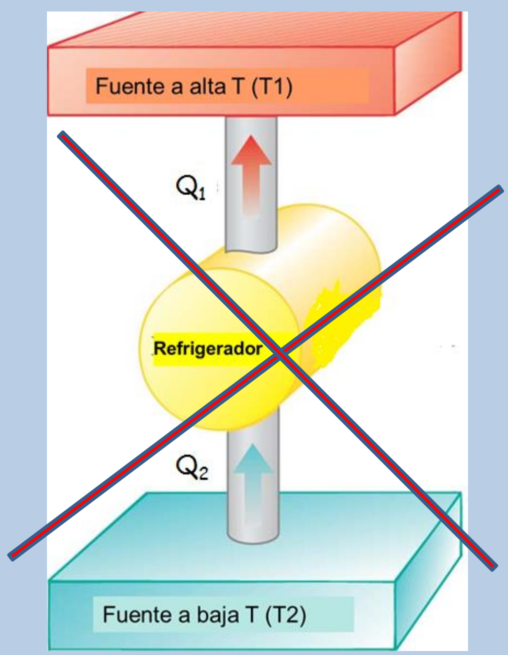
Segundo Principio de la Termodinámica según Clausius

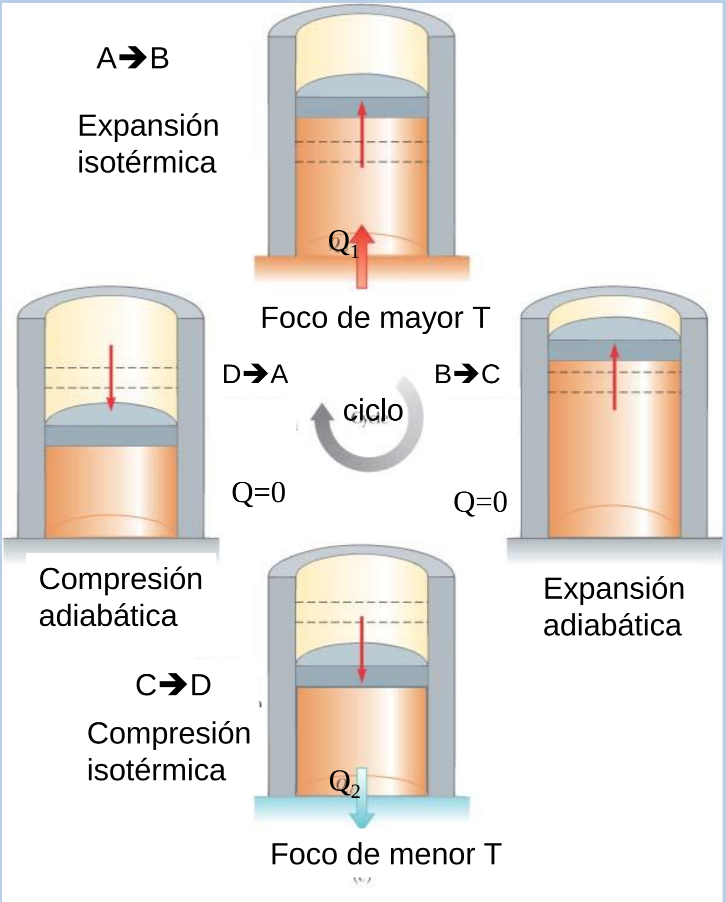
Es imposible que un refrigerador trabajando cíclicamente transfiera calor de una fuente a otra de mayor temperatura. Siempre es necesario entregarle trabajo

$$\epsilon = -\frac{Q_2}{W} = \frac{|Q_2|}{|\mathrm{W}|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|}$$

El Segundo Principio de la Termodinámica, expresado en términos de la eficiencia, se puede enunciar: Un refrigerador no puede tener una eficiencia infinita

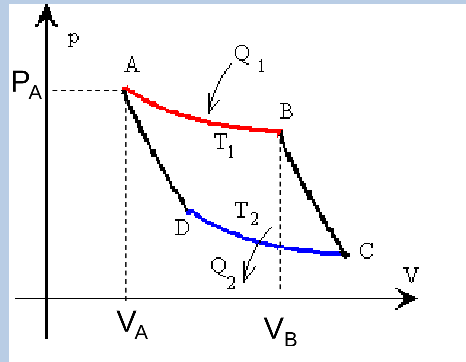
Para que la heladera funcione debe estar enchufada





CICLO DE CARNOT

Ciclo: reversible
Sustancia de trabajo: gas ideal



Está formado por dos isotermas y dos adiabáticas, como se indica en el gráfico P-V

Análisis de cada transformación

1.Transformación A->B (isoterma)
La presión $P_B = nRT_1/ V_B$
Variación de energía interna : $\Delta U = 0$
Trabajo W = $nRT_1 \text{ Ln } (V_B/V_A)$
Calor $Q = W$

2.Transformación B->C (adiabática)
El Volumen $V_C = [(P_B V_B^{\gamma}) /P_C]^{1/\gamma}$
Calor $Q = 0$
Variación de energía interna $\Delta U = nCv(T_2-T_1)$
Trabajo $W = - \Delta U$

3.Transformación C->D (isoterma)
Variación de energía interna $\Delta U = 0$
Trabajo W = $nRT_2 \text{ Ln } (V_D/V_C)$
Calor $Q = W$

4.Transformación D-> A (adiabática)
Se despeja V_D de la ecuación de la adiabática
Variación de energía interna $\Delta U = nCv(T_1-T_2)$
Trabajo $W = - \Delta U$

Análisis del ciclo

$$\Delta U = \Delta U_{B\to C} + \Delta U_{D\to A} = 0$$

$$W = nR(T_1-T_2) \ln (V_B/V_A)$$

$$Q_{abs} = nRT_1 \ln (V_B/V_A)$$

$$\ln V_D/V_C = -\ln V_C/V_D$$

$$V_B/V_A = V_C/V_D$$

Rendimiento del ciclo

$$R = 1- (T_2/T_1)$$

La temperatura T debe expresarse en Kelvin

Al ser el Ciclo de Carnot un ciclo reversible, podemos invertir cada uno de los procesos y convertir la máquina de Carnot en un refrigerador de Carnot

Si se sigue un análisis similar para un refrigerador de Carnot, se obtiene la eficiencia, a partir de le expresión general dada por:

$$\epsilon = -\frac{Q_2}{W} = \frac{|Q_2|}{|\mathrm{W}|} = \frac{|Q_2|}{|Q_1| - |Q_2|}$$

La eficiencia de Carnot

$$\epsilon = \frac{T_2}{T_1 - T_2}$$

La temperatura expresada en Kelvin

Teorema de Carnot

Ninguna máquina térmica que trabaje entre dos focos térmicos dados puede tener un rendimiento mayor que una máquina de Carnot (reversible) que trabaje entre los dos mismos focos

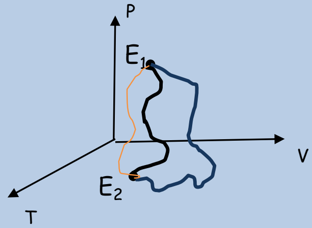
El teorema expresa una cota superior al máximo valor que puede tomar el rendimiento de una máquina térmica

Ejemplo:

Se tiene una máquina térmica que tiene un rendimiento del 30%, a muy buen precio: ¿La compra?

Entropía

Consideremos dos estados de un sistema y un cierto número de trayectorias reversibles que los une.



Si bien el calor suministrado al sistema depende del camino, se encuentra experimentalmente que si se divide el calor suministrado en cada punto de la trayectoria por la temperatura absoluta, expresada en Kelvin, en cada punto y se suman los cocientes resultantes a lo largo de toda la trayectoria, esta suma tiene el mismo valor para todas las trayectorias reversibles comprendidas entre dichos puntos extremos.

En lenguaje matemático: $\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \left[\begin{array}{c} constante, para\ todas\ las\ trayectorias \\ reversibles\ entre\ los\ estados\ 1\ y\ 2 \end{array} \right.$

Es posible entonces, introducir una función cuya diferencia entre 1 y 2 quede definida por la integral anterior

La función se denomina entropía del sistema y se denota con la letra S

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dQ}{T}\ (a\ lo\ largo\ de\ cualquier\ trayectoria\ reversible)$$

Se puede asignar a esta función un valor arbitrario en algún lugar de referencia.

dQ Es el calor que se transfiere al sistema o desde él, a una temperatura T (Kelvin)

Si el proceso es isotérmico, la expresión anterior se reduce a:

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

$$\Delta S = \frac{Q}{T}$$

Como la temperatura siempre es positiva, el cambio de entropía tiene el mismo signo que el calor Q.
Es decir, si se le agrega calor de manera reversible a un sistema $Q>0$, la entropía crecerá, $\Delta S > 0$ y a la inversa.

La unidad de la entropía es Joule/ Kelvin

Segunda Ley de la Termodinámica, según la Entropía.

Cuando ocurren cambios dentro de un sistema cerrado (aislado), su entropía aumenta (en los procesos irreversibles) o permanece constante (en los procesos reversibles). Nunca disminuye.

La afirmación anterior se expresa: $\Delta S \geq 0$

$$\Delta S \geq 0$$

El signo "mayor que" se aplica a los procesos irreversibles y el signo igual a los reversibles. No se han encontrados excepciones a la Segunda Ley.

Notar que:

- Aunque la entropía puede disminuir en una parte de un sistema cerrado, siempre habrá un incremento igual o mayor de ella en otra parte del sistema.
- Para determinar el cambio de entropía para un proceso irreversible, se aplica el siguiente procedimiento
  - Se encuentra un proceso reversible que conecte los estados inicial y final
  - Se calcula el cambio de entropía para este proceso reversible equivalente. El resultado será válido también para el proceso irreversible original