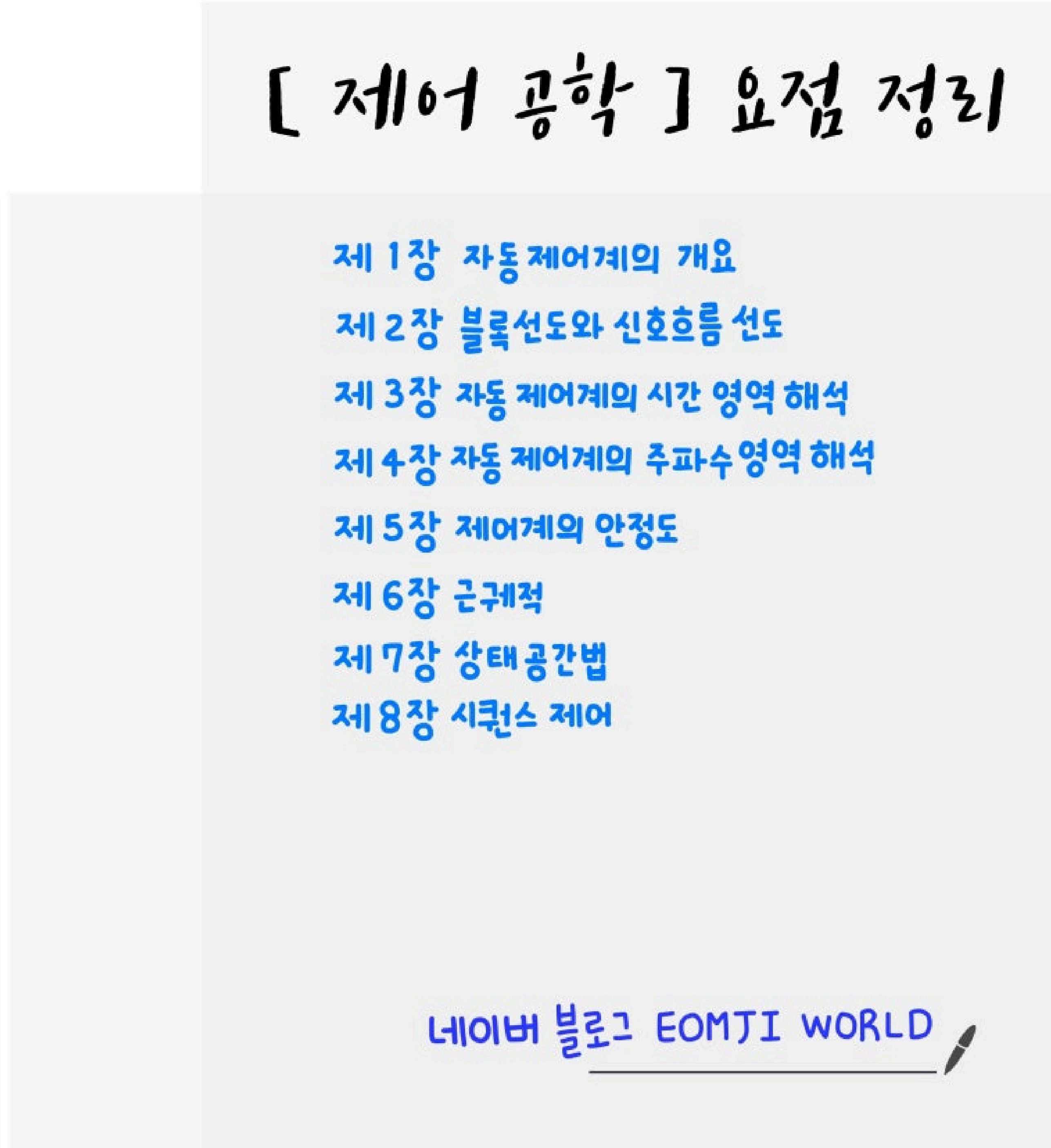
EOMJI WORLD


[제어 공학] 요점 정리
제 1장 자동제어계의 개요
제 2장 블록선도와 신호흐름 선도
제 3장 자동 제어계의 시간 영역 해석
제 4장 자동 제어계의 주파수 영역 해석
제 5장 제어계의 안정도
제 6장 근궤적
제 7장 상태공간법
제 8장 시퀀스 제어
네이버 블로그 EOMJI WORLD

EOMJI WORLD

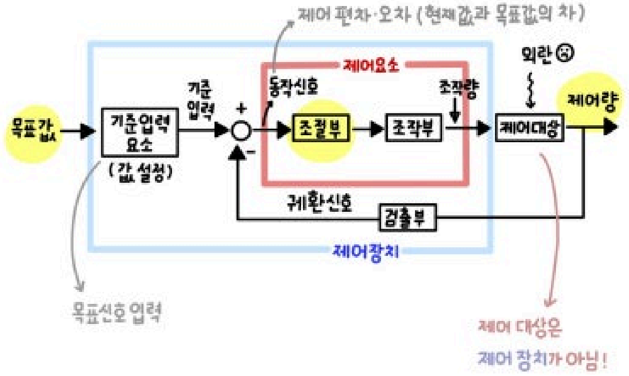
1 자동 제어계의 구성

(1) 개루프 제어 (open loop control system)

입력 → 전달함수 → 출력 : 오차 교정 불가

(2) 폐루프 제어 (closed loop control system)

입력 → 전달함수 → 출력 : 오차 수정 가능



2 자동 제어계의 분류

(1) 목표값에 따른 분류

① 정치제어 (목표값이 불변하는 제어)

- 자동조정 : 전기적, 기계적 신호
  ex) 회전수·전압·주파수 등
- 프로세스 제어 : 공업 공정의 상태량
  ex) 밀도, 온도, 농도, 압력, 유량 등

② 추치제어 (목표값이 변하는 제어)

어떻게 변화 하는지에 따라

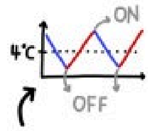
- 추종제어 : 목표값이 임의로 변화
  ex) 미사일
- 프로그램 제어 : 목표값이 미리 정해진 대로 변화
  ex) 자판기, 엘리베이터
- 비율 제어 : 목표값이 다른 요소와 비율 관계를 가지고 변화
  ex) 보일러, 배터리

① 서보기구 : 위치, 방위, 자세 등을 제어 ex) 로보트, 네비

② 프로세스 제어 : 밀도, 압력, 유량 등 ex) 공정 시 사용

③ 자동조정기구 : 속도, 전위, 힘 ex) 전기 기계 제어

(3) 제어 동작에 의한 분류



① 불연속 제어 : ON-OFF 제어계 ex) 냉장고, 레이더

② 연속 제어

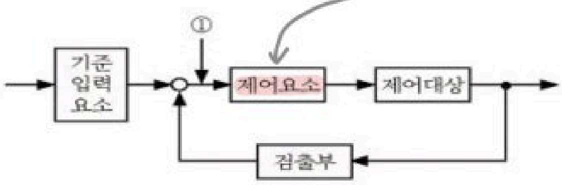
- 비례제어 (P)
  - 오차에 비례해서 동작
  - 잔류편차 (off set) 발생
- 미분제어 (D)
  - 오차의 변화량에 의해 동작
  - 잔류편차 (off set)의 증가를 미연에 방지
- 적분제어 (I)
  - 누적 오차에 의해 동작
  - 잔류편차 (off set)가 없다
  - 응답속도가 느리다
- 비례 미분 제어 (PD)
  - 응답 속응성 향상
- 비례 적분 제어 (PI)
  - 잔류편차 (off set)가 없다
  - 간헐현상이 있다
- 비례 적분 미분 제어 (PID)
  - 응답 속응성 향상
  - 잔류편차 (off set)가 없다
  - 가장 안정적이지만 비싸고, 응답에 진동적으로 나타날수있다.

[예제]

Q. 자동제어계의 기본적 구성에서 제어요소는 무엇으로 구성되는가?

① 비교부와 검출부 ② 검출부와 조작부
③ 검출부와 조절부 ④ 조절부와 조작부

Q. 그림에서 ①에 알맞은 신호 이름은?

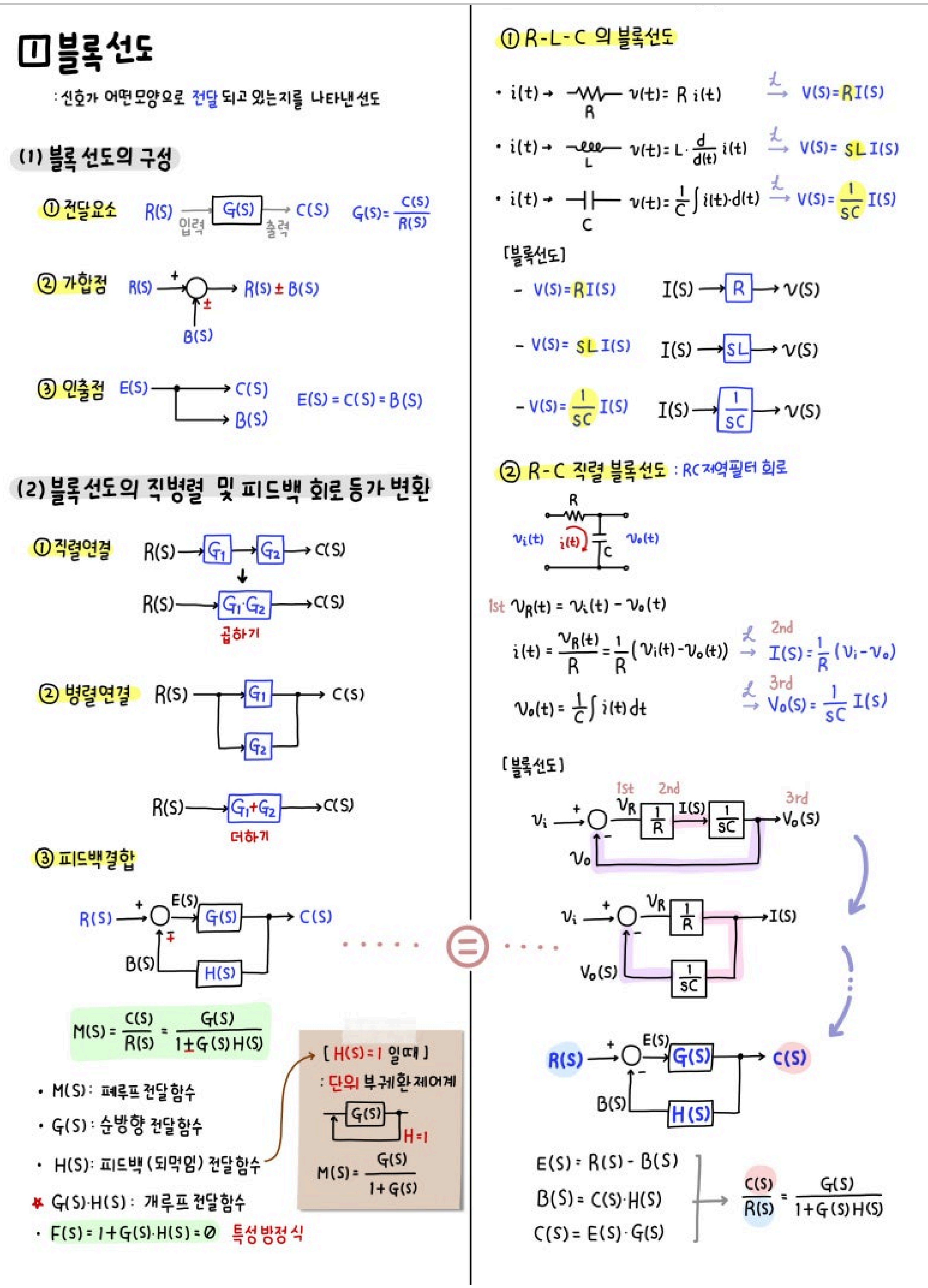


① 조작량 ② 제어량
③ 기준입력 ④ 동작신호

네이버 블로그 EOMJI WORLD

자동 제어계의 개요

EOMJI WORLD



1 블록선도

: 신호가 어떤모양으로 전달되고 있는지를 나타낸선도

(1) 블록 선도의 구성

① 전달요소 $R(S) \rightarrow \boxed{G(S)} \rightarrow C(S)$ 입력 출력 $G(S)=\frac{C(S)}{R(S)}$

② 가합점 $R(S)$ + , ± $B(S)$ → $R(S) \pm B(S)$

③ 인출점 $E(S) \rightarrow C(S)$, $B(S)$ $E(S)=C(S)=B(S)$

(2) 블록선도의 직병렬 및 피드백 회로 등가 변환

① 직렬연결 $R(S) \rightarrow \boxed{G_1} \rightarrow \boxed{G_2} \rightarrow C(S)$

↓

$R(S) \rightarrow \boxed{G_1 \cdot G_2} \rightarrow C(S)$

곱하기

② 병렬연결 $R(S)$ → G_1, G_2 → $C(S)$

$R(S) \rightarrow \boxed{G_1 + G_2} \rightarrow C(S)$

더하기

③ 피드백결합 $R(S)$ + ∓ $E(S)$ $G(S)$ $C(S)$ $B(S)$ $H(S)$

$$M(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G(S)}{1 \pm G(S)H(S)}$$

- $M(S)$: 폐루프 전달함수
- $G(S)$: 순방향 전달함수
- $H(S)$: 피드백(되먹임) 전달함수

★ $G(S) \cdot H(S)$: 개루프 전달함수

- $F(S)=1+G(S) \cdot H(S)=0$ 특성방정식

[$H(S)=1$ 일때]

: 단위 부궤환제어계

$G(S)$ $H=1$

$$M(S)=\frac{G(S)}{1+G(S)}$$

① R-L-C 의 블록선도

- $i(t) \rightarrow$ R $v(t)=R\,i(t)$ $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $V(S)=RI(S)$
- $i(t) \rightarrow$ L $v(t)=L \cdot \frac{d}{d(t)} i(t)$ $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $V(S)=SL\,I(S)$
- $i(t) \rightarrow$ C $v(t)=\frac{1}{C}\int i(t) \cdot d(t)$ $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ $V(S)=\frac{1}{SC}I(S)$

[블록선도]

- $V(S)=RI(S)$ $I(S) \rightarrow \boxed{R} \rightarrow V(S)$
- $V(S)=SL\,I(S)$ $I(S) \rightarrow \boxed{SL} \rightarrow V(S)$
- $V(S)=\frac{1}{SC}I(S)$ $I(S) \rightarrow \boxed{\frac{1}{SC}} \rightarrow V(S)$

② R-C 직렬 블록선도 : RC저역필터 회로

R $v_i(t)$ $i(t)$ C $v_o(t)$

1st $v_R(t)=v_i(t)-v_o(t)$

$i(t)=\frac{v_R(t)}{R}=\frac{1}{R}(v_i(t)-v_o(t))$ $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ 2nd $I(S)=\frac{1}{R}(V_i-V_o)$

$v_o(t)=\frac{1}{C}\int i(t)dt$ $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ 3rd $V_o(S)=\frac{1}{SC}I(S)$

[블록선도]

1st 2nd 3rd V_i + − V_R $\frac{1}{R}$ $I(S)$ $\frac{1}{SC}$ $V_o(S)$ V_o

V_i + − V_R $\frac{1}{R}$ $I(S)$ $V_o(S)$ $\frac{1}{SC}$

$R(S)$ + − $E(S)$ $G(S)$ $C(S)$ $B(S)$ $H(S)$

$E(S)=R(S)-B(S)$

$B(S)=C(S) \cdot H(S)$

$C(S)=E(S) \cdot G(S)$

$\rightarrow \frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$

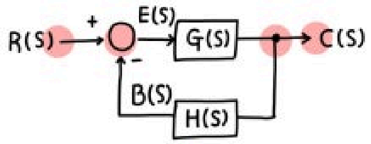
블록 선도와 신호 흐름 선도

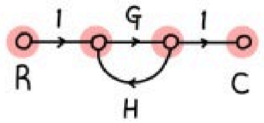
EOMJI WORLD

② 신호 흐름선도 및 간이 전달 함수법

: 블록선도를 간단하게!

(1) 신호흐름 선도와 블록선도의 관계



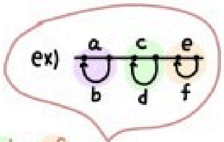


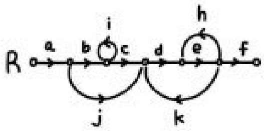
:이 신호흐름도로 간이 전달함수를 도출해 내!

(2) 간이 전달 함수법 : 폐루프 전달함수를 구하는 공식

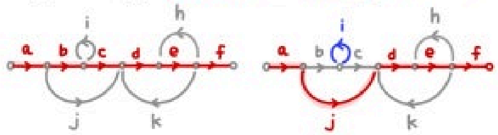
$$M(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{\Sigma G(1-loop)}{1-\Sigma L_1+\Sigma L_2-\Sigma L_3+\cdots}$$

- G: R → S 까지 가는 성분
- loop: G랑 만나지 않는 폐루프
- ΣL_1 : 서로 다른 루프의 합 : ab+cd+ef
- ΣL_2 : 서로 안 만나는 두 개의 루프의 곱 : abcd+abef+cdef
- ΣL_3 : 서로 안 만나는 세개의 루프의 곱 : abcdef

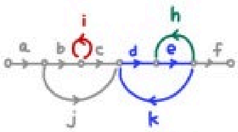


[예제]  의 $\frac{C}{R}$ 는?

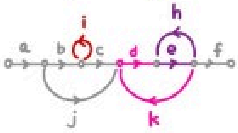
- $\Sigma G(1-loop) = abcdef(1-0) + ajdef(1-i)$



- $\Sigma L_1 = i+dek+eh$

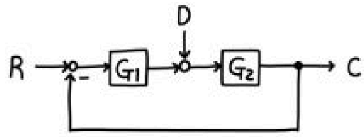


- $\Sigma L_2 = ieh+idek$
- $\Sigma L_3 = 0$

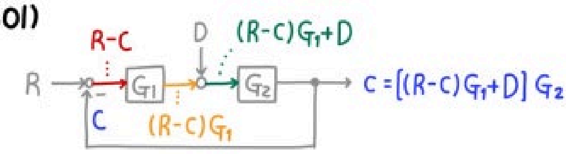


$$\therefore \frac{C}{R}=\frac{abcdef(1-0)+ajdef(1-i)}{1-(i+dek+eh)+(ieh+idek)}$$

[예제] 외란이 있을 때

 의 $\frac{C}{R}$ 는?

Sol)



$C=[(R-C)G_1+D]\,G_2$

전개

$C=(R-C)G_1G_2+DG_2$

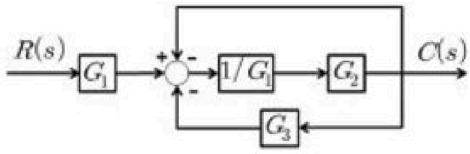
$C(1+G_1G_2)=RG_1G_2+DG_2$

$$\therefore C=\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2}R+\frac{G_2}{1+G_1G_2}D$$

입력R에 대한 출력의 전달함수 / 외란 D에 대한 출력의 전달함수

[예제]

그림과 같은 블록선도에서 C(s)/R(s) 의 값은?



① $\frac{G_2}{G_1-G_2-G_3}$ ② $\frac{G_2}{G_1-G_2-G_2G_3}$

③ $\frac{G_1}{G_1+G_2+G_2G_3}$ ④ $\frac{G_1G_2}{G_1+G_2+G_2G_3}$

Sol) $\frac{S}{R}=\frac{\Sigma G(1-loop)}{1-\Sigma L_1}=G_2\times\frac{1}{1-\left(-\frac{1}{G_1}G_2G_3-\frac{1}{G_1}G_2\right)}$

$\Sigma G(1-loop) = G_1\times\frac{1}{G_1}\times G_2 = G_2$

$\Sigma L_1 = -\frac{1}{G_1}\times G_2\times G_3-\frac{1}{G_1}G_2$

$$\frac{S}{R}=G_2\times\frac{G_1}{G_1+G_2G_3+G_2}$$

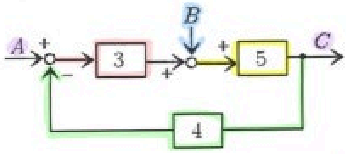
네이버 블로그 EOMJI WORLD

신호 흐름 선도 및 간이 전달 함수법

EOMJI WORLD

[예제]

그림의 전체 전달 함수는?



① 0.22 ② 0.33 ③ 1.22 ④ 3.1

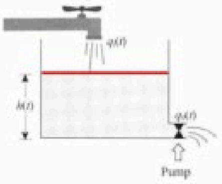
sol) $C = \{(A-4C)\times 3 + B\}\times 5$

정리↓

$C = \frac{15}{61}A + \frac{5}{61}B \quad \therefore \frac{15}{61}+\frac{5}{61} \fallingdotseq 0.33$

[예제] UP!

그림과 같은 액면계에서 $q_i(t)$를 입력, $q_o(t)$를 출력으로 본 전달함수는? (단, 액면 높이는 $h(t)$이며, 펌프는 정지 상태이다.)



① $q_i(t)$ ② $\frac{1}{Cs}$ ③ $\frac{q_i}{q_o}$

④ $1+Cs$ ⑤ $\frac{1}{1+Cs}$

Sol) 액면의 단면적을 C라고 하면

$\int q_i(t)\,dt = h(t)\times C$ 이고 (∵ 펌프가 정지 상태!)

흘려주는 물의 양을 시간에 대해 적분하면
전체 물의 체적이랑 같음

$\mathcal{L}$

$\mathcal{L}\{\int f(t)\cdot dt\} = \frac{1}{S}F(S) + \cancel{0}$: 실적분정리!

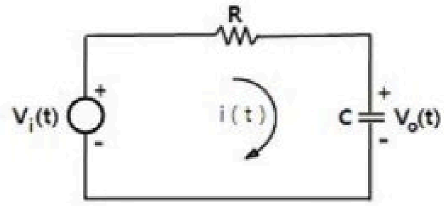
$\frac{1}{S}Q_i(S) = H(S)\times C$ 이고,

$H(S) = \frac{1}{CS}Q_i(S)$ 에서

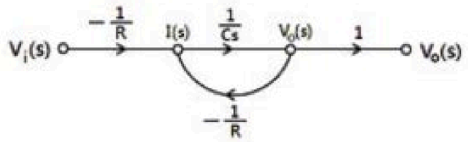
전달함수 $G(S) = \frac{H(S)}{Q_i(S)} = \frac{1}{CS}$

[예제]

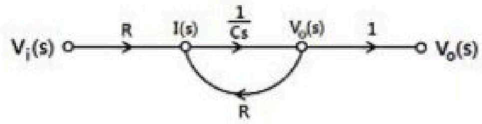
그림과 같은 RC 회로에서 전압 $v_i(t)$를 입력으로 하고 전압 $v_0(t)$를 출력으로 할 때, 이에 맞는 신호흐름 선도는? (단, 전달함수의 초기값은 0이다.)



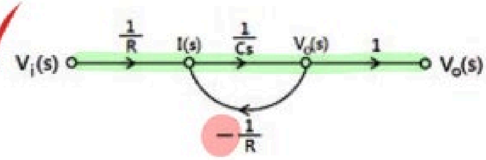
①



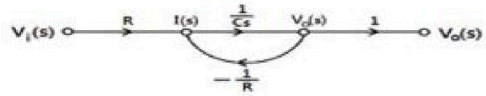
②



③



④



Sol) 1st 회로의 수식 정리 by KCL

$v_i(t) = R\,i(t) + v_o(t)$, $v_o(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$

2nd 라플라스 변환

$V_i(S) = R\,I(S) + V_o(S)$, $V_o(S) = \frac{1}{C}\times\frac{1}{S}I(S)$

$I(S) = SC\,V_o(S)$

$V_i(S) = SCR\,V_o(S) + V_o(S)$

$V_i(S) = (1+SCR)V_o(S)$

$V_i \longrightarrow V_o$ 쭉 곱한거

3rd 전달함수

$M(S) = \frac{V_o(S)}{V_i(S)} = \frac{1}{1+SCR} = \frac{\frac{1}{SCR}}{1+\frac{1}{SCR}}$ ■

여기가 ⊕이므로 폐루프 값은 ⊖ ~~②~~③번

$M(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\Sigma G(1-loop)}{1-\Sigma L_1}$

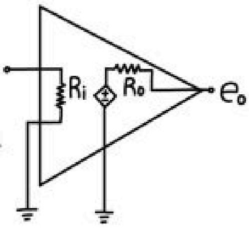
- G : R → S 까지 가는 성분
- loop : G랑 만나지 않는 폐루프
- ΣL_1 : 서로 다른 루프의 합

전달 함수 예제

EOMJI WORLD

3 op amp (연산증폭기)

(1) 이상적인 연산증폭기



① 입력저항 : $R_i = \infty$

: 접지 타고 손실되는 입력전력이 없다는 뜻

② 출력저항 : $R_o = \varnothing$

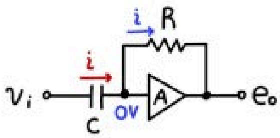
: OP Amp 내 전압강하가 없다는 뜻

③ 전압이득 : ∞

④ 대역폭 : ∞

(2) 연산 증폭기의 종류

① 미분기 $e_o = -RC\frac{d}{dt}e_i$



↳ 앞에 콘덴서

[유도]

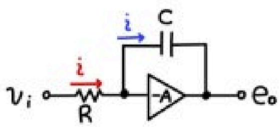
$i = i$ 에서,

$C \cdot \frac{d}{dt}v_i = \frac{0 - v_o}{R}$

$\therefore v_o = -RC \cdot \frac{d}{dt}v_i$

앞콘미

② 적분기 $e_o = -\frac{1}{RC}\int e_i dt$



↳ 뒤에 콘덴서

[유도]

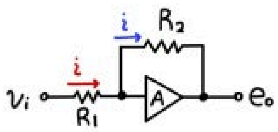
$i = i$ 에서,

$\frac{v_i}{R} = C \cdot \frac{d}{dt}(0 - v_o)$

$\therefore v_o = -\frac{1}{RC}\int v_i dt$

뒤콘적

③ 부호변환기 (증폭회로) $e_o = -\frac{R_2}{R_1}e_i$



[유도]

$i = i$ 에서,

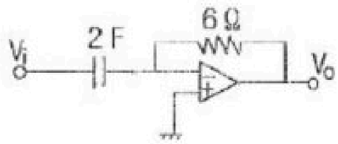
$\frac{v_i}{R_1} = \frac{-v_o}{R_2}$

$\therefore v_o = -\frac{R_2}{R_1}v_i$

마이너스 앞분의뒤

[예제]

다음의 연산증폭기 회로에서 출력전압 V_0를 나타내는 식은? (단, V_i는 입력 신호이다.)



✓① $V_0 = -12\frac{dV_i}{dt}$ ② $V_0 = -8\frac{dV_i}{dt}$

③ $V_0 = -0.5\frac{dV_i}{dt}$ ④ $V_0 = -\frac{1}{8}\frac{dV_i}{dt}$

$\boxed{\text{Sol 1}}$ 유도 $2\frac{d}{dt}v_i = \frac{0 - v_o}{6}$ $\therefore v_o = -12\frac{d}{dt}v_i$

$\boxed{\text{Sol 2}}$ 공식 $v_o = -RC\frac{dv_i}{dt} = -12\frac{dv_i}{dt}$

앞콘미

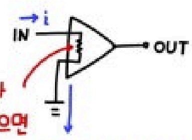
[예제]

연산증폭기의 성질에 관한 설명으로 틀린 것은?

① 전압 이득이 매우 크다. ✓② 입력 임피던스가 매우 작다.

③ 전력 이득이 매우 크다. ④ 출력 임피던스가 매우 작다.

Sol)

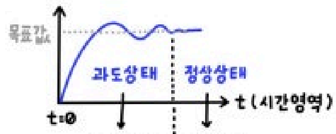


여기가 매우작으면

입력전류가 다 땅으로 쏟아져..!

네이버 블로그 EOMJI WORLD

EOMJI WORLD



과도응답 | 정상응답

안정/불안정을 판단 (목표값에 가려나~?) | 오차/감도를 판단 (목표값이랑 얼마나 차이가 나?)

1 과도응답

(1) 입력에 따른 응답 특성

$R(S) \rightarrow \boxed{G(S)} \rightarrow C(S)$ $\quad C(S) = G(S) \cdot R(S)$

$r(t) \rightarrow \boxed{g(t)} \rightarrow c(t)$ $\quad c(t) = \mathcal{L}^{-1}[C(S)] = \mathcal{L}^{-1}[R(S)G(S)]$

뭐뭐 응답

① 인디셜응답 = 단위 계단응답

$r(t) = u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{S}$

$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(S) \cdot \frac{1}{S}]$

② 임펄스 응답

$r(t) = \delta(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 1$

$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(S) \cdot 1]$

③ 램프 응답 = 등속응답, 램프응답

$r(t) = t\,u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{S^2}$

$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(S) \cdot \frac{1}{S^2}]$

④ 포물선 응답 = 등가속응답

$r(t) = \frac{1}{2}t^2 u(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{S^3}$

$c(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(S) \cdot \frac{1}{S^3}]$

전달함수 $G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{(s+a)^2}$ 인 제어계의 임펄스 응답 c(t)는?

① e^{-at} ② $1-e^{-at}$ ③ te^{-at} ④ $\frac{1}{2}t^2$

Sol) Step1 임펄스함수 라플라스 변환 하기 $c(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(S) \cdot \underbrace{1}_{\text{Step1}}]$

→ $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$

Step2 $\rightarrow \boxed{G(S)} \rightarrow C(S)$ 응답 구하기 $c(t) = \mathcal{L}^{-1}[\underbrace{G(S) \cdot 1}_{\text{Step2}}]$

→ $C(S) = 1 \times G(S) = \frac{1}{(S+a)^2}$

Step3 역라플라스 변환해서 시간영역 구하기 $c(t) = \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(S+a)^2}]}_{\text{Step3}}$

$\mathcal{L}^{-1}[C(S)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(S+a)^2}] = c(t) = te^{-at}$

(Tip, 선택지를 라플라스 변환해서 답찾아도 됨ㅋ)

[예제]

전달함수가 $G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2(s+1)}$ 로 주어진 시스템의 단위 임펄스 응답은?

① $y(t)=1-t+e^{-t}$ ② $y(t)=1+t+e^{-t}$
③ $y(t)=t-1+e^{-t}$ ④ $y(t)=t-1-e^{-t}$

Sol) 단위임펄스 응답은 $X(S)=1$ 이므로 $Y(S)=G(S)$ 임

$Y(S) = \frac{1}{S^2(S+1)}$ 을 역라플라스 변환하면

Step1) 풀기

$\frac{AS+B}{S^2} + \frac{C}{S+1} = \frac{(A+C)S^2 + (A+B)S + B}{S^2(S+1)} = \frac{1}{S^2(S+1)}$

$Y(S) = \frac{-S+1}{S^2} + \frac{1}{S+1} = -\frac{1}{S} + \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S+1}$

Step2) 역라플라스 변환

$Y(S) = -\frac{1}{S} + \frac{1}{S^2} + \frac{1}{S+1}$

∴ $y(t) = -u(t) + t + u(t)e^{-t}$

자동 제어계의 시간영역 해석 / 입력에 따른 응답 특성

EOMJI WORLD

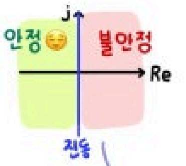
으로 안정/불안정을 판별하는 방법

① 특성방정식 : 전체 전달함수의 분모가 0 이되는 방정식

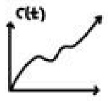
* $F(S)=1+G(S)H(S)=0$ → 이때의 S값 : 특성근

*이때 특성근 $S>0$: 불안정
(응답이 특정 값에 수렴하지 않음)

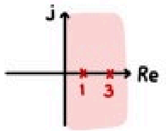
특성근 $S<0$: 안정
(응답이 특정 값에 수렴)

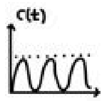


② 특성근의 위치

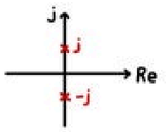


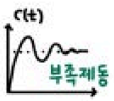
① 두개의 양의실근 : 불안정
$F(S)=(S-1)(S-3)=0$
$S=1,\ S=3$



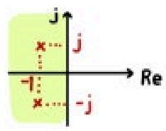


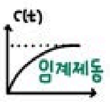
② 두개의 허근 : 얘는 그냥 진동
$F(S)=(S-j)(S+j)=0$
$S=j,\ S=-j$



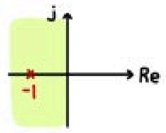


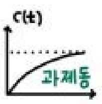
③ 두개의 음의복소근 : 안정
$F(S)=(S+1-j)(S+1+j)=0$
$S=-1+j,\ S=-1-j$



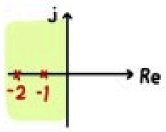


④ 음의 중근 : 안정
$F(S)=(S+1)^2=0$
$S=-1$



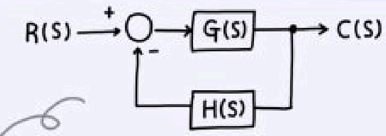


⑤ 두개의 음의실근 : 안정
$F(S)=(S+1)(S+2)=0$
$S=-1,\ S=-2$



네이버 블로그 EOMJI WORLD

* Detail *



폐루프 전달함수 $M(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$

* $M(S)=0$ 이되는 S값 : 영점 → 분자=0
* $M(S)=\infty$ 이되는 S값 : 극점 → 분모=0 ✓

이때 $F(S)=1+G(S)H(S)=0$ 을 특성방정식 이라 함

* Detail *

$F(S)=1+G(S)H(S)=0$ ← $F(S)=A(S-a)(S-b)$라 가정하면

$A(S-a)(S-b)=0$ ⟶ 이때의 특성근 $S=a$ 또는 $S=b$

이때 폐루프 전달함수 $M(S)=\frac{C(S)}{R(S)}=\frac{G(S)}{A(S-a)(S-b)}$

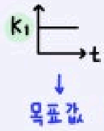
내가 알고 싶은 것은 응답 특성 이므로

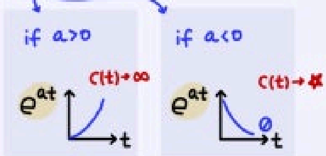
$C(S)=\frac{G(S)}{A(S-a)(S-b)}\cdot R(S)$ $R \to \boxed{M} \to C$

이 때 $R(S)=\frac{1}{S}$ 라 하여 인디셜응답을 구하고, 부분분수 했다 치면

$C(S)=\frac{G(S)}{AS(S-a)(S-b)}=\frac{K_1}{S}+\frac{K_a}{S-a}+\frac{K_m}{S-b}$

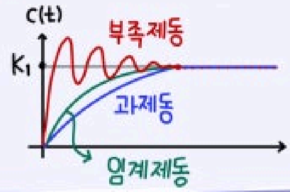
$\therefore C(t)=K_1+K_2e^{at}+K_3e^{bt}$ a랑 b는 특성근 이었어!





*특성근이 양수이면 불안정

*특성근이 음수일때 안정 (목표값 K_1으로 수렴)



특성근 위치에 따른 과도응답

EOMJI WORLD

$G(S) = \frac{1}{1+TS}$

$r(t) = u(t)$

$R(S) = \frac{1}{S}$

$R(S) = \frac{1}{S} \rightarrow \boxed{G(S)} \rightarrow C(S) = \frac{1}{S} \times \frac{1}{1+TS}$

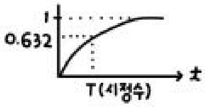
*** 1차 지연 제어계의 인디셜 응답 c(t)**

$C(S) = \frac{1}{S} - \frac{T}{1+TS} = \frac{1}{S} - \frac{1}{S+\frac{1}{T}}$

$\mathcal{L}^{-1}$

$c(t) = 1 - e^{-\frac{1}{T}t} = 1 - e^{-at}$

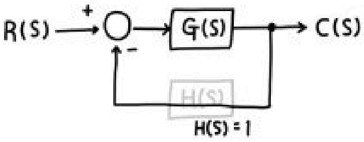
시정수



(4) 2차 지연 제어계의 인디셜 응답 c(t)

$G(S) = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S}$

유도과정 개 복잡…



$M(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1+G(S)H(S)} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}$

* 특성방정식 $F(S) = 0$

$F(S) = S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2 = 0$

근의 공식

$S = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} = -\sigma \pm j\omega$

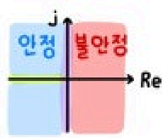
ζ : 감쇠비, 제동비, ω_n : 고유주파수

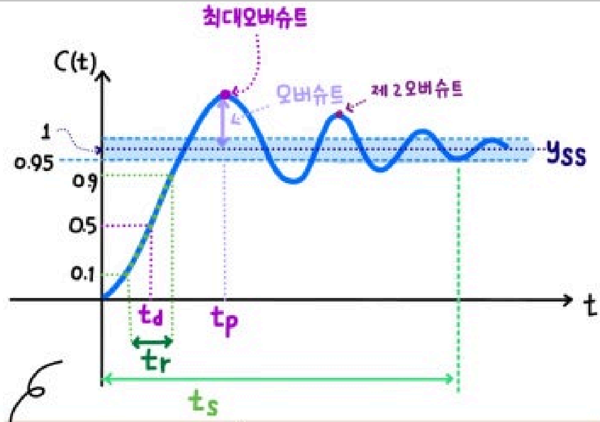
↳ 이 값만 봐도 안정/불안정이 판별됨

$\alpha = \zeta\omega_n$ 를 '제동인자' 라고도 해

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 를 '감쇠고유진동수' 라고도 해

i) $\zeta < 0$ 일 때, S : 양수 불안정
ii) $\zeta = 0$ 일 때, S : 2개의 허근 임계안정
iii) $0 < \zeta < 1$ 일 때, S : 두 개의 음의 복소근 부족제동
iv) $\zeta = 1$ 일 때, S : 음의 중근 임계제동
v) $\zeta > 1$ 일 때, S : 두 개의 음의 실근 과제동





$M(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{\omega_n^2}{S^2 + 2\zeta\omega_n S + \omega_n^2}$ 의 시간영역 인디셜 u(t) 응답

$c(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \theta)$ $\left\{ \begin{array}{l} \omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ \theta = \cos^{-1}\zeta \end{array} \right\}$

① t_d (지연시간, delay time)
: 응답이 최종값의 50[%]에 이르는데 소요되는 시간

② t_r (상승시간, rise time)
: 응답이 최종값의 10[%] 에서 90[%] 까지 이르는데 소요되는 시간

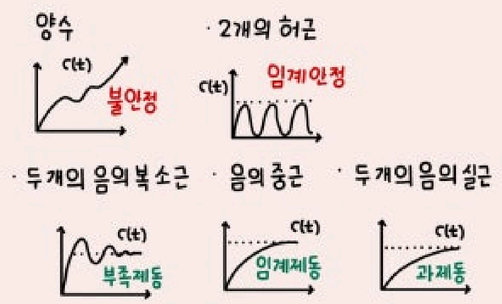
③ T_s (정정시간, setting time)
: 응답이 최종값의 규정된 범위 이내(±5[%]정도)로 들어와 머물게 되기까지 걸리는 시간
(최종값과 5[%] 정도 밖에 차이 안날때 까지 걸리는 시간)

④ 오버슈트 : 응답 중 발생하는 입력과 출력 사이의 최대 편차량
이거 보고 안정도를 결정!(안정도의 척도!)

⑤ 백분율 오버슈트 = $\frac{\text{오버슈트}}{\text{최종 목표값}} \times 100[\%]$

⑥ 감쇠비(ζ) = $\frac{\text{제 2 오버슈트}}{\text{최대 오버슈트}}$

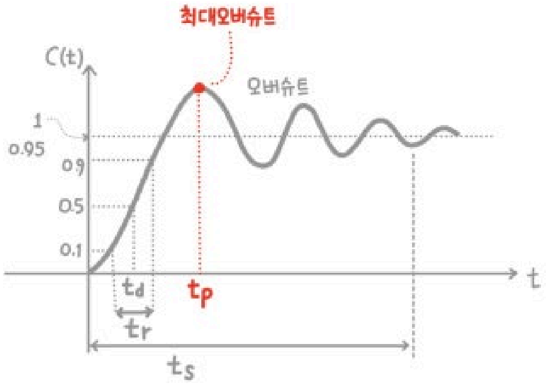
[S 값]



1차 지연 제어계의 인디셜 응답
2차 지연 제어계의 인디셜 응답

EOMJI WORLD

* 최대오버슈트 발생시간 t_p 와 고유주파수 ω_n, 감쇠계수 ζ 의 관계



* $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$: 최대오버슈트 발생시간

ζ : 감쇠비 / 제동비, ω_n : 고유주파수

몰라도 되는 유도 과정 !!

$c(t) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \cdot \sin(\omega_d t + \theta)$

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$, $\theta = \cos^{-1}\zeta$ 에서

$$\left.\frac{dc(t)}{dt}\right|_{t=t_p} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t_p} \cdot \sin(\omega_d t_p + \theta) = 0$$

이렇게 미분하여 0 이 되는 지점을 찾으면 $\sin\omega_d t_p = 0$

따라서 $\omega_d t_p = 0, \pi, 2\pi, \cdots$ 가 된다

이 때 최대값인 t_p는 맨 첫번째 오버슈트 시간이므로

$\omega_d t_p = \pi$ 이고, $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ 이므로

$\therefore t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ ∎

* 공진주파수 ω_m 와 고유주파수 ω_n, 감쇠계수 ζ 의 관계

* 공진주파수 ω_m : 공진 최대값이 나타나는 주파수

$\omega_m = \omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}$ $\left(0 \le \zeta \le \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707\right)$ 그냥암기.

: 시간영역에서 공진주파수 ω_m은 출력의 감쇠 고유 주파수 $\omega_d\ (= \omega_n\sqrt{1-\zeta^2})$ 보다 째끔 작다.

[예제]

$s^2 + 5s + 25 = 0$의 특성 방정식을 갖는 시스템에서 단위계단 함수 입력 시 최대 오버슈트(maximum overshoot)가 발생하는 시간은 약 몇 [sec]인가?

① 0.726 ② 1.451
③ 2.902 ④ 0.363

sol) $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 에서

$\omega_n = 5$, $\zeta = 0.5$ 이므로

$t_p = \dfrac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ 에 대입해서 계산하면,

$t_p = \dfrac{\pi}{5 \times \sqrt{1-0.5^2}} = 0.726$ ∎

[예제]

2차 제어계에서 공진 주파수 ω_m와 고유 주파수 ω_n, 감쇠비 α 사이의 관계가 바른 것은?

① $\omega_m = \omega_n\sqrt{1-\alpha^2}$ ② $\omega_m = \omega_n\sqrt{1+\alpha^2}$
③ $\omega_m = \omega_n\sqrt{1-2\alpha^2}$ ④ $\omega_m = \omega_n\sqrt{1+2\alpha^2}$

EOMJI WORLD

EOMJI WORLD

정상응답, 오차 / 편차, 기준 입력 시험에 대한 정상 편차

EOMJI WORLD

감도

EOMJI WORLD

자동 제어계의 주파수 영역 해석

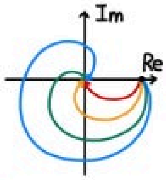
EOMJI WORLD

R → $\boxed{G(S)}$ → S

(7) 제어계의 형에 따른 벡터 궤적의 형태

① 0형 제어계

전달함수 모양 $G(S) = \dfrac{K}{(\ )(\ )(\ )(\ )}$

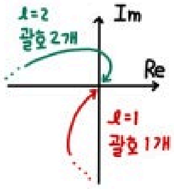


출발점 : $\omega = 0$ 에서 양의 실수축

도착점 : $\omega = \infty$ 에서 ( ) 개수 만큼 사분면 찍고 원점수렴

② 1, 2형 제어계 (ℓ=1 : 1형 , ℓ=2 : 2형)

전달함수 모양 $G(S) = \dfrac{K}{S^{\ell}(\ )(\ )(\ )\cdots}$



출발점 : $\omega = 0$ 에서 크기는 ∞,

위상각은 1형 : $-90°$ / 2형 : $-180°$

도착점 : $\omega = \infty$ 에서 ( ) 개수 만큼 사분면 찍고 원점수렴

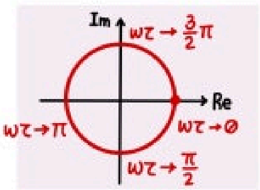
(8) 부동작요소

$G(s) = e^{-\tau s}$

$G(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$ 오일러공식

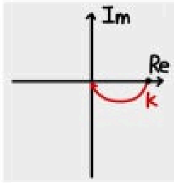
$= \cos\omega T - j\sin\omega T$

$|G(j\omega)| = \sqrt{C^2+S^2} = 1$ ← 원!

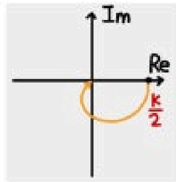


EXAMPLE

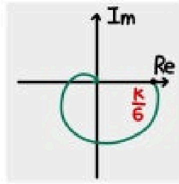
$G(S) = \dfrac{K}{S+1}$



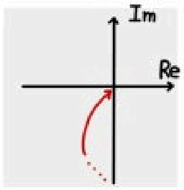
$G(S) = \dfrac{K}{(S+1)(S+2)}$



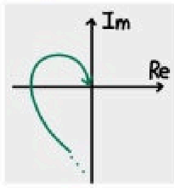
$G(S) = \dfrac{K}{(S+1)(S+2)(S+3)}$



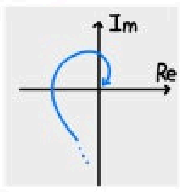
$G(S) = \dfrac{K}{S^1(S+1)}$



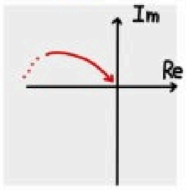
$G(S) = \dfrac{K}{S^1(S+1)(S+2)}$



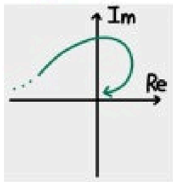
$G(S) = \dfrac{K}{S^1(S+1)(S+2)(S+3)}$



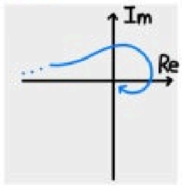
$G(S) = \dfrac{K}{S^2(S+1)}$



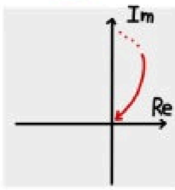
$G(S) = \dfrac{K}{S^2(S+1)(S+2)}$



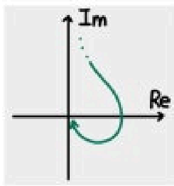
$G(S) = \dfrac{K}{S^1(S+1)(S+2)(S+3)}$



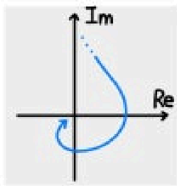
$G(S) = \dfrac{K}{S^3(S+1)}$



$G(S) = \dfrac{K}{S^3(S+1)(S+2)}$

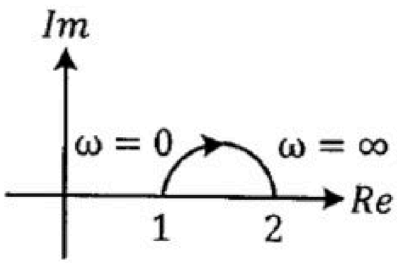


$G(S) = \dfrac{K}{S^1(S+1)(S+2)(S+3)}$



[예제]

그림의 벡터 궤적을 갖는 계의 주파수 전달함수는?



① $\dfrac{1}{j\omega+1}$ ② $\dfrac{1}{j2\omega+1}$

③ $\dfrac{j\omega+1}{j2\omega+1}$ ④ $\dfrac{j2\omega+1}{j\omega+1}$

sol) $\omega=0$, $\omega=\infty$ 하나 하나 대입 해보면됨!

	$\omega=0$ 일때	$\omega=\infty$ 일때
① $\dfrac{1}{j\omega+1}$	1	∞
② $\dfrac{1}{j2\omega+1}$	1	∞
③ $\dfrac{j\omega+1}{j2\omega+1}$	1	$\dfrac{1}{2}$
④ $\dfrac{j2\omega+1}{j\omega+1}$	1	2

네이버 블로그 EOMJI WORLD

EOMJI WORLD

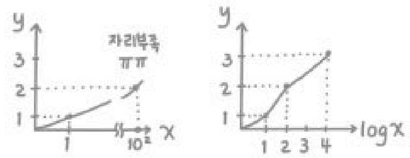
3 보드선도

애도 자동 제어계가 안정한 지 아닌지, 불안정하면 어떻게 불안정 한지, 그걸 어떻게 개선할지 등등을 판단할 때 쓰고

(1) 이득 특성곡선 (2) 위상 특성곡선 2가지 선도가 있음

주파수 변화에 따른 값은 log값으로 봐야 잘 보여서 log값을 씀

Why? 너무 팍팍 변해서! $(x,y) \Rightarrow (1,1)\ (10^2,2)\ (10^4,3) \cdots$



(1) 이득 특성곡선 : 주파수 변화에 따른 이득의 곡선 "데시벨"

- 이득 $g = 20\log|\text{진폭비}| = 20\log|G(j\omega)|\ [dB]$ 로그씌우고 20곱한값

벡터 궤적 에서는 $G(j\omega)$를 그대로 놓고 봤는데

보드선도는 로그도 씌우고, 20도 곱해서 봄 (왜? 더 직관적!)

(2) 위상 특성곡선 : 주파수 변화에 따른 위상의 곡선

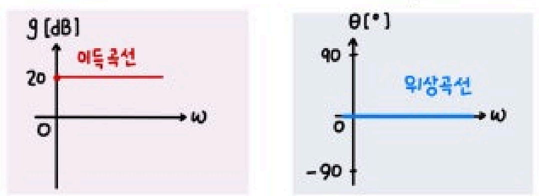
- 위상 $\theta = \angle G(j\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\text{허수부}}{\text{실수부}}\right)$ [deg]

(3) 각 요소별 보드선도

전달함수가 ○○요소 일때 주파수를 변화시키면서 관찰한 보드선도

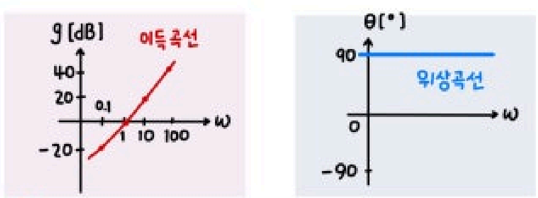
① 비례요소 $G(S) = K$ $G(j\omega) = K + j0$

이득 $g = 20\log K$ [dB] 위상 $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\text{허}}{\text{실}}\right) = 0$ [deg]



② 미분요소 $G(S) = S$ $G(j\omega) = j\omega$

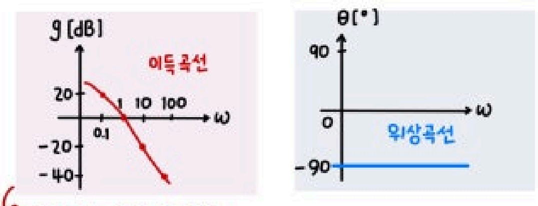
이득 $g = 20\log\omega$ [dB] 위상 $\theta = 90$ [deg]



미분요소는 위로 꺾임

③ 적분요소 $G(S) = \frac{1}{S}$ $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = -j\frac{1}{\omega}$

이득 $g = 20\log\frac{1}{\omega}$ [dB] 위상 $\theta = -90$ [deg]



적분요소는 아래로 꺾임

* ω가 $1 \to 10 \to 10^2$ 으로 갈때마다 -20[dB] 씩 감소
* 위상은 $-90°$ 불변

④ 1차 지연요소 $G(S) = \frac{1}{1+TS}$

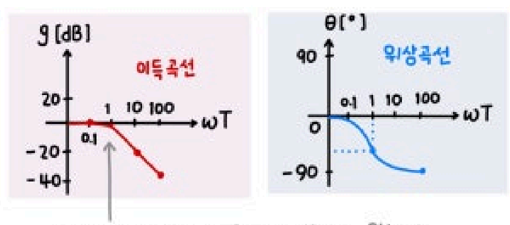
$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}} \angle -\tan^{-1}\omega T$$

이득 $g(\omega T) = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}$ [dB]

- $g(0.1) \approx 0$ [dB]
- $g(1) = 20\log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3$ [dB]
- $g(10) \approx 20\log\frac{1}{10} = -20$ [dB]
- $g(100) \approx 20\log\frac{1}{10^2} = -40$ [dB]

위상 $\theta(\omega T) = -\tan^{-1}\omega T$ [deg]

- $\theta(0.1) \approx -\tan^{-1}0 = 0$ [°]
- $\theta(1) \approx -\tan^{-1}1 = -45$ [°]
- $\theta(10) \approx -\tan^{-1}10 = -84.29$ [°]
- $\theta(100) \approx -\tan^{-1}100 \approx -90$ [°]



보드선도에서 꺾여서 굴곡지는 부분이 있는데 이 때의 주파수를 **절점 주파수** 라고함

* 절점주파수 : 전달함수의 실수부와 허수부가 같아질 때!

네이버 블로그 EOMJI WORLD

보드선도

EOMJI WORLD

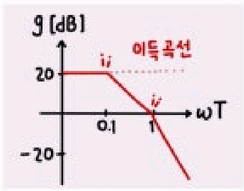
[예제] $G(S)=\frac{10}{(S+1)(10S+1)}$ 의 보드선도를 그리면? 대충

Sol) $G(S)=10\times\frac{1}{S+1}\times\frac{1}{10S+1}$

$g=20\log 10$

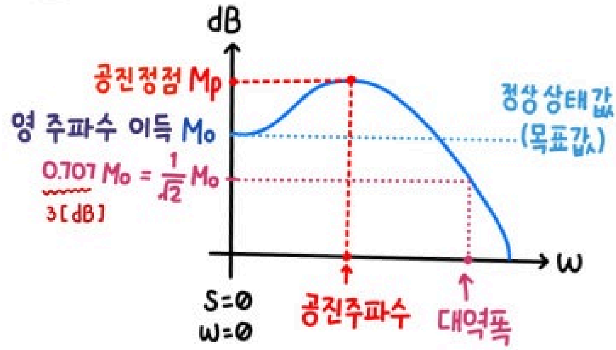
ω=0.1 일때 실수부=허수부

ω=1 일때 실수부=허수부



보드선도가 꺾이는 절점 주파수 (적분요소는 아래로 꺾였어!)

4 주파수 특성에 관한 상수



(1) 영 주파수에서의 이득 M_0

① M_0 : 정상값 (주파수가 0 일 때의 값)

② $1-M_0$: 정상오차

(2) 대역폭 BW

① $\frac{1}{\sqrt{2}}M_0 = 0.707M_0 = (20\log M_0 - 3)$ [dB] 에서의 주파수

② 대역폭이 넓을 수록 응답속도가 빠르다.

(3) 공진정점 M_p : 1.1 ~ 1.5 정도가 적당

① 최대 값으로서 계의 안정도의 척도

② M_p 가 크면 과도 응답시 오버슈트가 커진다.

(4) 공진주파수 ω_p

공진정점 일 때의 주파수, ω_p 가 높으면 주기는 작다.

(5) 분리도

① 신호와 잡음(외란)을 분리하는 제어계의 특성

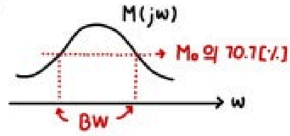
② 분리도가 예리하면 큰 M_p 를 동반하므로 불안정 하기 쉽다.

[예제]

전달함수의 크기가 주파수 0에서 최대값을 갖는 저역통과 필터가 있다. 최대값의 70.7% 또는 -3dB로 되는 크기까지의 주파수로 정의되는 것은?

① 공진 주파수 ② 첨두 공진점
③ 대역폭 ④ 분리도

Sol)



[예제] 외우는게 나은문제

2차계의 주파수 응답과 시간 응답간의 관계 중 잘못된 것은?

① 안정된 제어계에서 높은 대역폭은 큰 공진 첨두값과 대응된다.

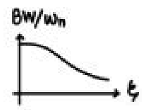
② 최대 오버슈트와 공진 첨두값은 ξ (감쇠율)만의 함수로 나타낼 수 있다.

③ ω_n (고유주파수) 일정시 ξ (감쇠율)가 증가하면 상승 시간과 대역폭은 증가한다.

④ 대역폭은 영 주파수 이득보다 3[dB]떨어지는 주파수로 정의된다.

Sol) 고유주파수 ω_n, 감쇠비 ξ, 대역폭 BW 관계식

$BW=\omega_n[(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}]^{\frac{1}{2}}$



몰라도됨, 그냥 구글링 한거

* 대역폭은 ω_n에 비례

→ 고정된 ω_n에서 BW와 ξ는 반비례

* BW와 상승시간은 서로 반비례 (∵ BW × 상승시간 이 일정하다)

∴ ω_n 고정시 ξ 증가하면 BW는 감소하고 상승시간은 증가 한다

시스템 출력이 10[%] → 90[%] 정도가 되는 데 걸리는 시간

[예제]

전달함수 $G(s)=\frac{1}{s(s+10)}$ 에 ω =0.1인 정현파 입력을 주었을 때 보드선도의 이득은?

① -40[dB] ② -20[dB]
③ 0[dB] ④ 20[dB]

Sol) $G(S)=\frac{1}{S(S+10)} \rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$ 에서

$\omega=0.1$ 을 대입하면 $G(j\omega)=\frac{1}{j0.1(j0.1+1)}$

c.f 이득여유 $-20\log|G(S)\cdot H(S)|$

이때, 이득 $=20\log|G(j\omega)|=20\log\left|\frac{1}{j0.1(j0.1+1)}\right|\doteq 0$

$\frac{1}{j0.1(j0.1+1)}=\frac{1}{(-0.01+j0.1)}\frac{(-0.01-j0.1)}{(-0.01-j0.1)}\doteq -0.01-j0.1$

→ 크기 : $\left|\frac{1}{j0.1(j0.1+1)}\right|=|-0.01-j0.1|\doteq 1$ → $\log 1 = 0$

주파수 특성에 관한 상수

EOMJI WORLD

제 5장 제어계의 안정도

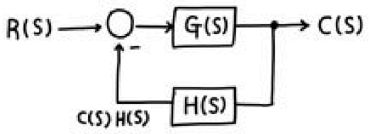
1 안정도의 개념

↳ 우리가 원하는 목표값으로 갈 수 있는지를 판별

(1) 안정도

① 절대안정도 : 안정 여부만 판단 (루스표로 판별)

② 상대안정도 : 안정된 정도를 판단 (나이퀴스트, 보드 선도로 판단)



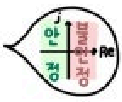
* 폐루프 전달함수 $M(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$

* 특성방정식 : 폐루프 전달함수의 분모=0

$F(S) = 1+G(S)H(S) = 0$

* 특성근 : 특성방정식을 만족하는 S값

- 이 특성근의 위치로 안정/불안정 판단



(2) 제어계의 안정조건

특성방정식 근이 모두 S평면의 좌반부에 존재할 것

2 루스 안정도 판별법 (안정여부만 판단)

(1) 루스의 안정도 판별법

① $F(S) = 1+\underbrace{G(S)H(S)}_{\text{폐루프 전달함수의 분모}} = a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + \cdots + a_{n-1} S + a_n = 0$

② 안정조건

1. 모든 차수의 계수가 존재할 것
2. 모든 차수의 계수의 부호가 같을 것

* 3. 루스표의 제 1열 모든 요소의 부호가 변하지 않을것

* 부호 변환 횟수 = 복소평면 우반부 특성근 개수

③ 루스표 작성법

S^n	a_0	a_2	a_4	…
S^{n-1}	a_1	a_3	a_5	…
S^{n-2}	A_1	A_2	A_3	…
S^{n-3}	B_1	B_2	B_3	…
⋮	⋮	⋮	⋮	

$A_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$ $B_1 = \frac{A_1 a_3 - a_1 A_2}{A_1}$

$A_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$ $B_2 = \frac{A_1 a_5 - a_1 A_3}{A_1}$

$A_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$ $B_3 = \frac{A_1 a_7 - a_1 A_4}{A_1}$

[예] $F(S) = S^4 + 2S^3 + 5S^2 + 4S + 2 = 0$

1st. 틀 채우기

S^4	1	5	2	0
S^3	2	4	0	0
S^2				
S^1				
S^0				

2nd. 나머지 채우기

①

S^4	1	5	2	0
S^3	2	4	0	0
S^2	A_1			
S^1				
S^0				

$A_1 = \frac{5\times2 - 1\times4}{2} = 3$

②

S^4	1	5	2	0
S^3	2	4	0	0
S^2	3	A_2		
S^1				
S^0				

$A_2 = \frac{2\times2 - 1\times0}{2} = 2$

③

S^4	1	5	2	0
S^3	2	4	0	0
S^2	3	2	0	
S^1	B_1	0		
S^0				

$B_1 = \frac{4\times3 - 2\times2}{3} = \frac{8}{3}$

④

S^4	1	5	2	0
S^3	2	4	0	0
S^2	3	2	0	
S^1	$\frac{8}{3}$	0		
S^0	C_1			

$C_1 = \frac{2\times\frac{8}{3} - 3\times0}{\frac{8}{3}} = 2$

최종)

S^4	1	5	2	0
S^3	2	4	0	0
S^2	3	2		
S^1	$\frac{8}{3}$	0		
S^0	2			

TIP. $\boxed{\begin{matrix}숫자\\0\end{matrix}}$ 꼴이면

↙ 대각선으로 숫자 그대로 내려옴

부호변화X ⇒ 안정!

제어계의 안정도

EOMJI WORLD

나이퀴스트 안정도 판별법

EOMJI WORLD

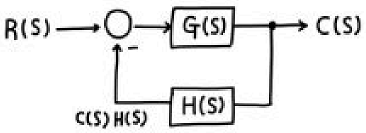
EOMJI WORLD

보드 선도에 의한 안정도 판별법

EOMJI WORLD

1 근궤적의 개념

: S평면상에서 개루프 전달함수의 이득 상수 K를 0 → ∞ 로 변화 시킬때 특성 방정식의 근이 그리는 궤적



* 폐루프 전달함수 $M(S) = \frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1+G(S)H(S)}$

특성방정식

개루프 전달함수

이 때 개루프 전달함수 G(S)H(S)를 다음과 같이 정의 하는 걸로 Start!

$G(S)H(S) = \frac{KN(S)}{D(S)}$ 이 때의 특성 방정식 → $1+\frac{KN(S)}{D(S)} = 0$

(1) 근궤적

K를 0 → ∞ 로 변화 시킬때 특성 방정식의 근의 궤적

(2) 예제

개루프 전달함수 $G(S)H(S) = \frac{K}{S(S+2)}$ 인 경우 이득상수 K의 변화에 따른 계의 특성근이 어떻게 변하는가?

SOl) 특성방정식 : $1+G(S)H(S) = 1+\frac{K}{S(S+2)} = 0$ 에서

$S^2+2S+K = 0$ ∴ 특성근 $S = -1 \pm \sqrt{1-K}$

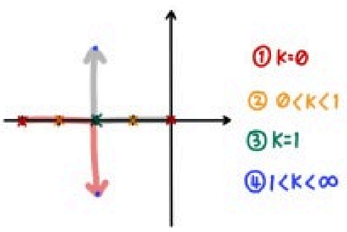
이 때, K 값에 따라 (K : 0 → ∞)

① K=0 : $S_1 = 0$, $S_2 = -2$

② 0<K<1 : 두 개의 서로 다른 음의 실근

③ K=1 : $S_1, S_2 = -1$

④ 1<K<∞ : 두개의 음의 실수부를 갖는 공액 복소근



K가 0→∞ 일때 근궤적이 항상 좌반구에 있으므로 안정한 제어계이다

(1) 영점과 극점

① 영점(zero) : GH(S) = 0 → 전달함수 분자 = 0

② 극점(pole) : GH(S) = ∞ → 전달함수 분모 = 0

$G(S)H(S) = \frac{KN(S)}{D(S)}$ → 영점 N(S) = 0 이 되는 값, → 극점 D(S) = 0 이 되는 값

EX) $G(S)H(S) = \frac{S^2(S+3)}{(S+1)(S+2+j)(S+2-j)}$

영점 Z : 3개 (0, 0, -3) ← 중근도 각각 세기

극점 P : 3개 (-1, -2-j, -2+j)

(2) 근궤적의 출발점 (K=0) (분모=0)

: 극점

(3) 근궤적의 종착점 (K=∞) (분자=0)

: 영점 혹은 무한한 원점

(4) 근궤적의 개수

① 영점과 극점의 개수 중 큰 것과 일치

② 혹은 특성방정식 차수와 같다

[예제] 전달함수 $G(s)H(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+1)(s+2)}$ 일 때 근궤적의 수는?

① 1 ② 2

③ 3 ④ 4

SOl) 영점 : 1개 / 극점 : 3개

∴ 근궤적수 3개

[예제]

다음과 같은 특성 방정식의 근궤적 가지수는?

$s(s+1)(s+2)+K(s+3) = 0$

① 6 ② 5

③ 4 ④ 3

SOl) 3차 방정식 이므로 근궤적수 3개

근궤적, 근궤적의 개념, 근궤적 작성법

EOMJI WORLD

(5) 근궤적의 대칭성 : 실수축 (x축)

근궤적을 그려보면 실수축(x축)에 항상 대칭!

(6) 근 궤적의 범위

① 존재조건 : 극점 개수 + 영점 개수 = 홀수

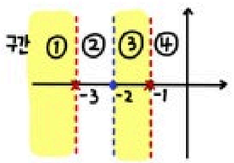
② 범위 : 홀수구간에만 근궤적이 존재

③ 예를 들어

$G(S)H(S) = \dfrac{S+2}{(S+1)(S+3)}$ 라고 할 때

극점 $S=-1,-3$ / 영점 $S=-2$ 이므로

극점 개수 + 영점 개수 = 3개(홀수) 이고



근궤적은 구간①, 구간③ 에 존재

홀수구간!

(7) 근궤적의 점근선 각도

$$\theta = \frac{(2K+1)\pi}{|P-Z|} \quad (K = \underbrace{0, 1, 2, \sim, P-Z-1}_{})$$

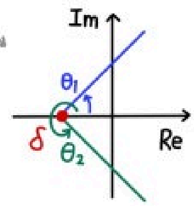
P: 극점개수

Z: 영점개수

*점근선의 개수 P-Z [개]

(8) 근궤적 점근선 교차점

$$\delta = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{P-Z} = \frac{\Sigma\, G(S)H(S) \text{ 의 극점} - \Sigma\, G(S)H(S) \text{ 의 영점}}{P-Z}$$



네이버 블로그
EOMJI WORLD

[예제] $G(S)H(S) = \dfrac{K(S+3)}{S(S+1)(S+2)(S+4)}$ 의 점근선을 구하라

Sol) 1st 영점과 극점 ① 영점 $Z=-3$: 1개

② 극점 $P = 0, -1, -2, -4$: 4개

: $P+Z = 5$(홀수) → 근궤적 홀수칸존재

2nd 점근선 각도

1. $k = 0, 1, 2$: 3개 ($P-Z$ 개)

2. $k=0$ 일때 $\theta_1 = \dfrac{(0+1)\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ$

$k=1$ 일때 $\theta_2 = \dfrac{(2+1)\pi}{3} = \pi = 180^\circ$

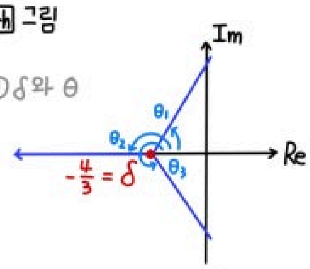
$k=2$ 일때 $\theta_3 = \dfrac{(4+1)\pi}{3} = \dfrac{5}{3}\pi = 300^\circ (= -60^\circ)$

3rd 점근선의 교차점

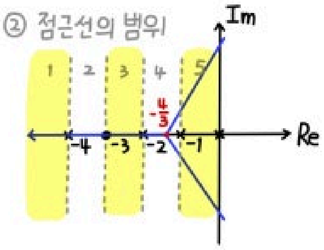
$$\delta = \frac{\Sigma P - \Sigma Z}{P-Z} = \frac{(-1-2-4)-(-3)}{4-1} = -\frac{4}{3}$$

4th 그림

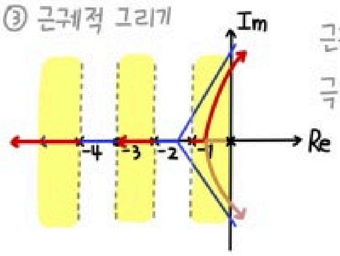
① δ와 θ



② 점근선의 범위



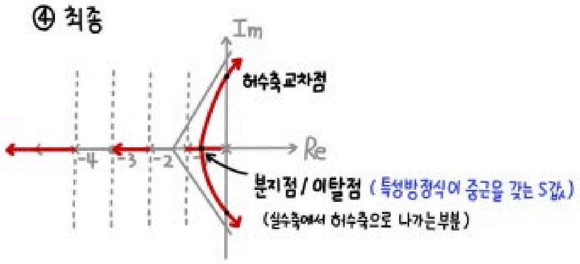
③ 근궤적 그리기



근궤적은

극점 → 영점 방향!!

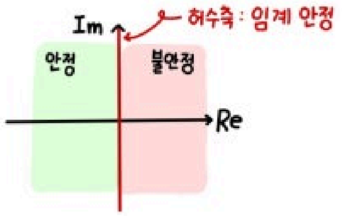
④ 최종



근궤적의 대칭성, 근궤적의 범위,

EOMJI WORLD

: 루스법에 의한 임계안정 조건



[S평면]

루스판별법의 1행에서 0값을 가지는 때가 임계안정일 때 임!

이 때, 보조방정식에 의해 S값을 구할 수 있음.

[예제]

$G(S)H(S) = \dfrac{K}{S(S+4)(S+5)}$ 에서 근궤적이 $j\omega$와 교차하는 점은?

Sol) 근궤적이 $j\omega$와 교차하는 점

→ 제어계를 임계 안정 상태가 되게하는 S값을 찾으란 소리!

→ 일단 1st. 특성방정식을 구하고 2nd. 루스표 작성!

1st. 특성방정식

$1+G(S)H(S)=0$ $\qquad 1+\dfrac{K}{S(S+4)(S+5)}=0$

$S^3+9S^2+20S+K=0$

2nd. 루스표

S^3	1	20
S^2	9	K
S^1	$\frac{180-K}{9}$	
S^0	K	

$S^3+9S^2+20S+K=0$

보조방정식 $9S^2+K=0$

첫 행의 원소 중 0이되는 원소에서 바로 위에 있는 열의 원소를 갖는 항만 꺼내서 방정식을 만든 것이 보조방정식

루스판별법의 1행이 0값을 가지는 때가 임계안정일 때 이므로

$\dfrac{180-K}{9}=0$. 즉, $K=180$ 일 때가 근궤적이 허수축과 교차

$K=180$ 을 특성방정식에 대입하여 S값을 구하면

$S^3+9S^2+20S+180=0$

3차 eq 복잡 → 보조방정식의 근을 구해도 됨

$9S^2+180=0$ $\qquad \therefore S=\pm j\sqrt{20}=\pm j\,4.48$

[공식] 이탈점 = $\dfrac{dK}{dS}=0$

1. 특성방정식을 $K=\sim$ 꼴로 바꾸고
2. 미분한 후 K'
3. 그게 0이되는 S값

[예제]

$G(S)H(S)=\dfrac{K}{S(S+1)(S+4)}$ 에서 이탈점은?

Sol) 특성방정식 $1+G(S)H(S)=0$

$S(S+1)(S+4)+K=0$ 에서

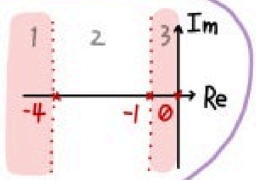
1. $K=\sim$ 꼴로 바꾸고 $\qquad K=-S^3-5S^2-4S$
2. 미분한 후 $\qquad K'=-3S^2-10S-4$
3. 그게 0이되는 S값 $\qquad 3S^2+10S+4=0$

$S=\dfrac{-b'\pm\sqrt{b'^2-ac}}{a}$ $\qquad S=-0.46,\ -2.86$

이 중 S평면 홀수칸에 있는 $S=-0.46$이 이탈점!

$G(S)H(S)=\dfrac{K}{S(S+1)(S+4)}$

극점 : 0, -1, -4



네이버 블로그
EOMJI WORLD

근궤적의 허수축 교차점 이탈점, 분지점

EOMJI WORLD

* 전달함수를 이용한 주파수 영역 해석 / 설계

단점

① 선형, 시불변 제어시스템 에서만 사용가능

↳ linear, 입력에 따른 출력이 열관적

② 초기값을 0으로 놓고, 중간 값을 알수 없음

* 상태공간법을 이용한 시간영역 해석 / 설계

장점

① 이전, 현재, 미래 상태를 다 알 수 있음

뭘로? 상태 천이 행렬로!

② 입력값을 여러개 가질 수 있음

1 상태방정식

: 계통의 방정식이 복잡한 n차 미분 방정식 일때,

이것을 **n개의 1차미분방정식**으로 해석하는 것, 행렬로 표현함!

*** 일반식**

$$\dot{x}(t) = A x(t) + B u(t)$$

{ A : 시스템 행렬
B : 입력 행렬

$x(t)$: 상태벡터

$\dot{x}(t)$: 상태벡터의 미분값 (이전상태의 값)

$u(t)$: 입력벡터 (제어 벡터)

*** 출력식**

$$y(t) = C x(t) + D u(t)$$

{ C : 출력행렬
D : 순방향 항

$y(t)$: 출력벡터

$$\frac{d}{dt} x(t) = A \cdot x(t) + B u(t)$$

특성방정식 공식 유도 과정

$$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$$

$$sX(s) - AX(s) = X(0) + BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = X(0) + BU(s)$$

↳ A가 행렬이므로 s에 단위행렬을 곱해서 연산 가능하게 만듦!

$$X(s) = \cancel{(sI-A)^{-1}X(0)} + (sI-A)^{-1}BU(s)$$

초기값 무시

$$\therefore X(s) = (sI-A)^{-1}BU(s) \quad \cdots ☆$$

한편 출력식에서

이값은 보통 무시

$$y(t) = Cx(t) + \cancel{Du(t)}$$

$Y(s) = CX(s)$ 이고 ☆를 대입하면

$Y(s) = C \cdot (sI-A)^{-1}BU(s)$ 가 되고

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI-A)^{-1}B = C \cdot \frac{adj|sI-A|}{|sI-A|} \cdot B$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

adj A : 수반행렬

↳ $|A| = \det A$

$$\therefore G(s) = C \cdot \frac{adj|sI-A|}{|sI-A|} \cdot B$$

이때, 특성방정식 이란 전달함수 G(s)의 분모를 0으로 만드는 방정식

(2) 특성 방정식

$$F(s) = |sI - A| = 0$$

I : 단위행렬 ex) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

이 때의 근 s값을 고유값 이라고 해

[예제]

다음과 같은 상태방정식의 고유값 λ1, λ2는?

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

① 4, -1 ② -4, 1
③ 6, -1 ④ -6, 1

sol) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ $sI - A = \begin{bmatrix} s-1 & 2 \\ 3 & s-2 \end{bmatrix}$

$F(s) = |sI - A| = s^2 - 3s - 4 = 0$ $\therefore s = -1, 4$ ∎

상태 공간법, 전달함수를 이용한 주파수 영역 해석 및 설계

상태 방정식, 특성 방정식

EOMJI WORLD

[예제]

$\frac{d^3c(t)}{dt^3}+3\frac{d^2c(t)}{dt^2}+2\frac{dc(t)}{dt}+c(t)=r(t)$의 상태 방정식은?

sol) [상태변수]

- $c(t)=x_1(t)$
- $\frac{dc(t)}{dt}=x_2(t)$
- $\frac{d^2c(t)}{dt^2}=x_3(t)$

[상태방정식]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=0\cdot x_1(t)+x_2(t)+0\cdot x_3(t)+0\cdot r(t) \\ \dot{x}_2(t)=0\cdot x_1(t)+0\cdot x_2(t)+x_3(t)+0\cdot r(t) \\ \dot{x}_3(t)=-x_1(t)-2x_2(t)-3x_3(t)+r(t) \end{cases}$$

상태방정식 $\frac{d}{dt}x(t)=A\cdot x(t)+Bu(t)$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}r(t)$$

그럼 특성방정식은?

$|sI-A|=0$ 에서

$$sI-A=\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 1 & 2 & s+3 \end{bmatrix}$$

여기, $\det(sI-A)=s^3+3s^2+1+2s$ 이므로

$F(s)=s^3+3s^2+2s+1=0$ ▨

* 앞에서 배웠던 $F(s)=0$ 구하는 법으로 풀면 *

$(s^3+3s^2+2s+1)C(s)=R(s)$ 에서

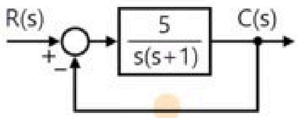
$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{1}{s^3+3s^2+2s+1}$

이때 특성방정식은 전달함수의 분모를 0으로하는 값이므로

$F(s)=s^3+3s^2+2s+1=0$

[예제]

블록선도와 같은 단위 피드백 제어시스템의 상태방정식은?
(단, 상태변수는 $x_1(t)=c(t)$, $x_2=\frac{d}{dt}c(t)$로 한다.)



① $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$ $\dot{x}_2(t)=-5x_1(t)-x_2(t)+5r(t)$
② $\dot{x}_1(t)=x_2(t)$ $\dot{x}_2(t)=-5x_1(t)-x_2(t)-5r(t)$
③ $\dot{x}_1(t)=-x_2(t)$ $\dot{x}_2(t)=5x_1(t)+x_2(t)-5r(t)$
④ $\dot{x}_1(t)=-x_2(t)$ $\dot{x}_2(t)=-5x_1(t)-x_2(t)+5r(t)$

sol) $G(s)=\frac{\Sigma\ 전향경로이득}{1-\Sigma\ 루프이득}$

1st. 폐루프 전달함수 구해서 R(s)와 C(s) 에관한 식세우기

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{\frac{5}{s(s+1)}}{1+\frac{5}{s(s+1)}}=\frac{5}{s^2+s+5}$$

따라서 $\frac{C(s)}{R(s)}=\frac{5}{s^2+s+5}$ 가 되고

2nd. 역라플라스 변환해서 미분방정식 도출하기

$s^2C(s)+sC(s)+5C(s)=5R(s)$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$c''(t)+c'(t)+5c(t)=5r(t)$

3rd. 이제 '상태변수'를 이용해서 상태방정식 구하기

상태변수 $x_1(t)=c(t)$

$x_2(t)=c'(t)=x_1'(t)$

$c''(t)+c'(t)+5c(t)=5r(t)$ 여기에 대입

$\dot{x}_2(t)+x_2(t)+5x_1(t)=5r(t)$

$\dot{x}_2(t)=-5x_1(t)-x_2(t)+5r(t)$ ▨

EOMJI WORLD

: 입력 $r(t)=0$ 이고, 초기조건만이 주어졌을 때 초기시간 이후 나타나는 계통의 시간에 따른 변화 상태(천이과정)을 나타내는 행렬식

그니까,
입력값 없이 초기값 자체가 시간이 갈수록 어떻게 변하는지에 대한 식 !

(1) 정의

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1} = e^{At}$$

[유도과정]

입력행렬

상태방정식 $\frac{d}{dt}x(t) = A\cdot x(t) + Bu(t)$

라플라스 변환

$sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$

상태천이 행렬은 입력이 없음!

$sX(s) - AX(s) = X(0) + BU(s)$

$(sI - A)X(s) = X(0) + BU(s)$

$X(s) = (sI-A)^{-1}X(0) + \cancel{(sI-A)^{-1}BU(s)}$

역 라플라스 변환

$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(sI-A)^{-1}\}x(0) = \phi(t)\cdot x(0)$

(2) 상태 천이 방정식

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$$

[유도과정]

상태방정식 $\frac{d}{dt}x(t) = A\cdot x(t) + Bu(t)$ 에서 식 변형하면

$e^{-At}\times\left\{\frac{d}{dt}x(t) - A\cdot x(t)\right\} = e^{-At}\times Bu(t)$

$\underbrace{e^{-At}\frac{d}{dt}x(t) - Ae^{-At}\cdot x(t)}_{} = e^{-At}Bu(t)$

$f(t)=e^{-At}$, $g(t)=x(t)$ $f'g-fg'$ 형태 !!

$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}x(t)\right] = e^{-At}Bu(t)$, 얘를 적분하면

$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]d\tau = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$

$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$

$e^{-At}x(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + x(0)$

양변에 다시 e^{At} 를 곱하고 $\phi(t) = e^{At}$ 라 하면

$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + x(0)\cdot e^{At}$

$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau$ ■

① $\phi(0) = e^0 = I$

② $\phi(t)^{-1} = \phi(-t)$ $\quad \phi(t)^{-1} = \frac{1}{\phi(t)} = \frac{1}{e^{-At}} = e^{At} = \phi(-t)$

③ $\phi(t_2-t_1)\,\phi(t_1-t_0) = \phi(t_2-t_0)$

$\phi(t_2-t_1)\,\phi(t_1-t_0)$

$= e^{At_2}\cdot\cancel{e^{-At_1}}\cdot\cancel{e^{At_1}}\cdot e^{-At_0}$

$= e^{A(t_2-t_0)} = \phi(t_2-t_0)$

④ $[\phi(t)]^k = \phi(kt)$ $\quad [\phi(t)]^k = e^{Akt} = \phi(kt)$

[예제]

시스템행렬 A가 다음과 같을 때 상태천이행렬을 구하면?

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad \frac{d}{dt}x(t) = A\cdot x(t) + Bu(t)$

① $\begin{bmatrix} 2e^{t}-e^{2t} & -e^{t}+e^{2t} \\ 2e^{t}-2e^{2t} & -e^{t}+2e^{2t} \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ 2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{2t} \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}+e^{-2t} \\ 2e^{-t}-2e^{-2t} & -e^{-t}-2e^{2t} \end{bmatrix}$

④ ✔ $\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$

Sol) 상태천이행렬 $\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1}$

1st. $(sI-A)^{-1}$ 구하기

$$\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{-2}{(s+1)(s+2)} & \frac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

2nd. $\mathcal{L}^{-1}(sI-A)^{-1}$ 구하기

$(1,1) = \frac{2}{S+1} + \frac{-1}{S+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} 2e^{-t} - e^{-2t}$

$(1,2) = \frac{1}{S+1} + \frac{-1}{S+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} e^{-t} - e^{-2t}$

$(2,1) = \frac{-2}{S+1} + \frac{2}{S+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -2e^{-t} + 2e^{-2t}$

$(2,2) = \frac{-1}{S+1} + \frac{2}{S+2} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} -e^{-t} + 2e^{-2t}$

상태 천이행렬, 상태 천이 방정식

EOMJI WORLD

controllable observable

특성방정식 : $\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B u(t)$

출력식 : $y(t) = C x(t) + D u(t)$

(1) 가제어성

① '가제어가 가능하다' 의 의미

: 초기상태에서 입력 u(t)를 변화 시켰을 때,
상태변수 x(t) 가 내가 원하는 값이 될 수 있다!

② 가제어의 필요충분 조건

$\det|C_M| \neq 0$: 가제어 가능 controllable

* C_M : 가제어 매트릭스 (행렬)

$C_M = [B \;\; AB \;\; A^2B \;\; \cdots \;\; A^{n-1}B]$

(2) 가관측성

① '가관측이 가능하다' 의 의미

: 입력 u(t) 값과 출력 y(t) 값을 알고 있을 때
상태변수 x(t)를 알수있다!

② 가관측의 필요충분 조건

$\det|O_M| \neq 0$: 가관측 가능 observable

* O_M : 가관측 매트릭스 (행렬)

$$O_M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

[상태 방정식] $\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) + Bu(t)$

[출력 방정식] $y(t) = Cx(t)$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \; 0 \; 0]$$

가. 이 시스템은 가제어(controllable)하고, 가관측(observable)하다.

나. 이 시스템은 가제어(controllable)하나, 가관측하지 않다(unobservable).

다. 이 시스템은 가제어하지 않으나(uncontrollable), 가관측하다(observable).

라. 이 시스템은 가제어하지 않고(uncontrollable), 가관측하지 않다(unobservable).

sol) $\boxed{C_M : \text{가제어 매트릭스}}$ $C_M = [B \;\; AB \;\; A^2B]$ ① ② ③

① $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

② $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}$

③ $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ? & ? & -18 \\ ? & ? & 0 \\ ? & ? & 25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18 \\ 0 \\ 25 \end{bmatrix}$

가제어의 필요충분 조건
$\det|C_M| \neq 0$

$\therefore C_M = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 25 \end{bmatrix}$ $\det|C_M| = 0$: 가제어 불가

여기가 다 0이니까 det 가 0될수밖에 없음

$\boxed{O_M : \text{가관측 매트릭스}}$ $O_M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix}$ ① ② ③

① $[1 \; 0 \; 0]$

② $[1 \; 0 \; 0]\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix} = [-1 \;\; 2 \;\; 3]$

③ $[1 \; 0 \; 0]\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

$= [1 \; 0 \; 0]\begin{bmatrix} 1 & -7 & -18 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} = [1 \;\; -7 \;\; -18]$

$\therefore O_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -7 & -18 \end{bmatrix}$ $\det|O_M| \neq 0$: 가관측 가능

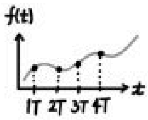
가제어성과 가관측성

EOMJI WORLD

z 변환은 불연속시스템, 디지털 제어 등에서 사용
(라플라스변환은 연속제어계에서 사용하는 거)

• 라플라스변환 정의 — 연속이니까 ∫

$$f(t) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-St}ds$$



시간 sampling
$t \to kT$
T : 샘플 주기

• z변환 정의 — 불연속 이니까 Σ

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)e^{-SkT} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

이 때 $z = e^{sT}$ 라고 놓으면 ← c.f) $s = \frac{1}{T}\ln z$

(1) z변환 정의

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT)z^{-k} \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

(2) z 변환과 $\mathcal{L}$ 변환 사이의 관계

f(t)	F(s)	F(z)
① $\delta(t)$	1	1
② $u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$ $\left(\frac{z}{z-e^{-0t}}\right)$
③ t	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
④ e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-at}}$

무한등비수열 공식 $\sum_{1}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r}$

② 유도

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = z^{-0} + z^{-1} + \cdots = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

③ 유도

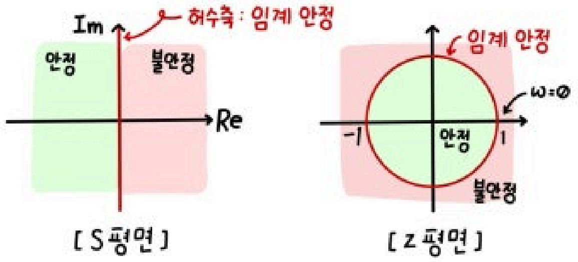
$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} kT \cdot z^{-k} = T\times(1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} + \cdots)$$ 에서

$$F(z) = T\times(1\cdot z^{-1} + 2\cdot z^{-2} + 3\cdot z^{-3} + \cdots)$$

$$-\quad z^{-1}F(z) = T(0 + 1\cdot z^{-2} + 2z^{-3} + \cdots)$$

$$(1-z^{-1})F(z) = T(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots) = \frac{Tz^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$\therefore F(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$



$z = e^{j\omega T}$ 이므로 S평면의 허수축은 z평면에서 원에 대응됨
$\omega : 0 \to \infty$

(4) z변환의 초기값, 최종값 정리

① 초기값 정리 : $f(0) \xrightarrow[z]{} \lim_{z\to\infty} F(z)$

② 최종값 정리 : $f(\infty) \xrightarrow[z]{} \lim_{z\to 1}\left(1-\frac{1}{z}\right)F(z)$

비교	$\mathcal{L}$	z
초기값 정리	$\lim_{s\to\infty} S\cdot F(s)$	$\lim_{z\to\infty} F(z)$
최종값 정리	$\lim_{s\to 0} S\cdot F(s)$	$\lim_{z\to 1}\left(1-\frac{1}{z}\right)F(z)$

[예제]
시간함수 f(t) = sinωt의 z변환은? (단, T는 샘플링 주기이다.)

① $\frac{z\sin\omega T}{z^2+2z\cos\omega T+1}$

② ✓ $\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

③ $\frac{z\cos\omega T}{z^2-2z\sin\omega T+1}$

④ $\frac{z\cos\omega T}{z^2+2z\sin\omega T+1}$

$\frac{S}{-2C}$ 그냥 외우자…

복잡귀찮…

Sol) 오일러 공식 $e^{jx} = \cos x + j\sin x$ 을 이용하면

$\sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{j2}$ 가 되고

$e^{jx} \xrightarrow[z]{} \frac{z}{z-e^{jx}}$, $e^{-jx} \xrightarrow[z]{} \frac{z}{z-e^{-jx}}$ 이므로

$\sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{j2}$

$\boxed{\sin x = \frac{e^{jx}-e^{-jx}}{j2}}$

z변환 $\frac{1}{j2}\left(\frac{z}{z-e^{jx}} - \frac{z}{z-e^{-jx}}\right) = \frac{z}{j2}\times\frac{e^{jx}-e^{-jx}}{z^2-(e^{jx}+e^{-jx})z+1}$

$\boxed{\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}}$

$\therefore F(z) = \frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$

z변환 라플라스 변환 s평면 z평면
초기값 정리 최종값 정리

EOMJI WORLD

1 접점과 접점기구

(1) 사용 기구 : 입력기구, 출력기구, 보조기구
- A. 입력기구 : 수동 스위치(BS), 검출 스위치(센서 등)
- B. 출력기구 : MC(전자접촉기), Lamp, Bz 등
- C. 보조기구 : 제어회로를 구성하는 릴레이 등

(2) 접점 (Contact)
- A. a접점 : 원래는 Open 되어 있고, 동작시 Close
- B. b접점 : 원래는 Close 되어 있고, 동작시 Open
- C. c접점 : a ↔ b의 변환 접점

(3) 수동 스위치
- A. 복귀형 : 누르고 있을 때만 동작하고, 손 떼면 원래상태로 복귀
- B. 유지형 : 방에 불켜는 스위치처럼 누르면 다시 끄기 전까지 상태 유지

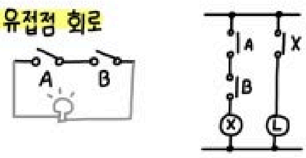
(4) 검출 스위치
- A. 회로 외부에서 상태변화를 검출하는 검출 스위치
- B. 회로 내부에서 검출 및 변환을 하는 센서 등

2 회로소자

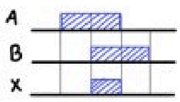
(1) AND 회로

① 논리기호와 논리식 $X = AB$

② 유접점 회로

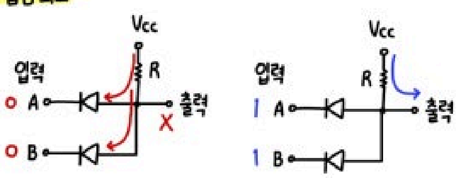


③ 타임차트와 진리표



A	B	X
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

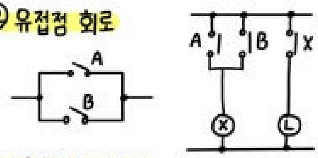
④ 무접점회로



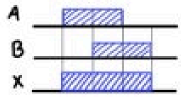
(2) OR 회로

① 논리기호와 논리식 $X = A + B$

② 유접점 회로

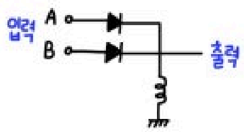


③ 타임차트와 진리표



A	B	X
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

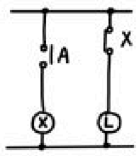
④ 무접점회로



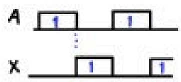
(3) NOT 회로

① 논리기호와 논리식 $X = \overline{A}$

② 유접점 회로

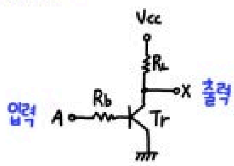


③ 타임차트와 진리표

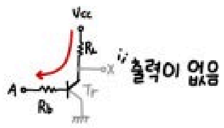


A	X
0	1
0	1
1	0
1	0

④ 무접점회로



A가 ON 되면 Tr 도통해서



시퀀스 제어, 회로 소자