

Работа 4.7.1.

Двойное лучепреломление

Корнеев Е.С.

Двойное лучепреломление

Цель работы: изучение зависимости показателя преломления необыкновенной волны от направления в двоякопреломляющем кристалле; определение главных показателей преломления по — обыкновенной и по — необыкновенной волны в кристалле¹; наблюдение эффекта полного внутреннего отражения.

В работе используются: гелий-неоновый лазер, вращающийся столик с неподвижным лимбом, призма из исландского шпата, поляроид.

При падении световой волны на границу изотропной среды в этой среде от границы распространяется одна волна. Если среда анизотропна, то в ней в общем случае возникают две волны, распространяющиеся от границы в разных направлениях и с разными скоростями. Это явление называется *двойным лучепреломлением*. Оно было открыто Бартолинусом в 1669 г. в кристаллах исландского шпата, призма из которого исследуется в нашей работе.

Плоские волны в кристаллах. Фундаментальные уравнения Максвелла справедливы без всяких изменений и в кристаллических средах. В отсутствие электрических зарядов и токов они имеют вид

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

Если среды прозрачны и однородны, то в них могут распространяться плоские монохроматические волны. Запишем такую волну в комплексном виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{B} = \vec{H} = \vec{H}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}; \quad \vec{D} = \vec{D}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \vec{r})}$$

Здесь ω — круговая частота, \vec{k} — волновой вектор, а амплитуды E_0, D_0, H_0 постоянны. Вектор \vec{B} совпадает с \vec{H} , так как $\mu = 1$. Дифференцируя по времени, получаем $\partial \vec{D} / \partial t = i\omega \vec{D}$, т.е. операция дифференцирования сводится в этом случае к умножению на $i\omega$. Аналогично дифференцирование по координатам x, y, z сводится к умножению на $-ikx, -iky, -ikz$. Заметив это, получаем

$$\operatorname{rot} \vec{H} = -i[\vec{k} \vec{H}]$$

и аналогично для $\operatorname{rot} \vec{E}$. В результате (1) перейдут в

$$[\vec{k} \vec{H}] = -\frac{\omega}{c} \vec{D}, \quad [\vec{k} \vec{E}] = -\frac{\omega}{c} \vec{B}$$

Введем единичный вектор нормали \vec{N} к фронту волны и скорость распространения фронта в направлении этой нормали v . Тогда $\vec{k} = \frac{\omega}{v} \vec{N}$ предыдущие соотношения перейдут в

$$\vec{D} = -\frac{c}{v} [\vec{N} \vec{H}]; \quad \vec{B} = \frac{c}{v} [\vec{N} \vec{E}] \quad (2)$$

Отсюда видно, что векторы $\vec{D}, \vec{H}, \vec{N}$ взаимно перпендикулярны. Значит, плоские волны в кристалле поперечны в отношении векторов \vec{D} и \vec{H} . Однако в общем случае они не поперечны в отношении вектора \vec{E} .

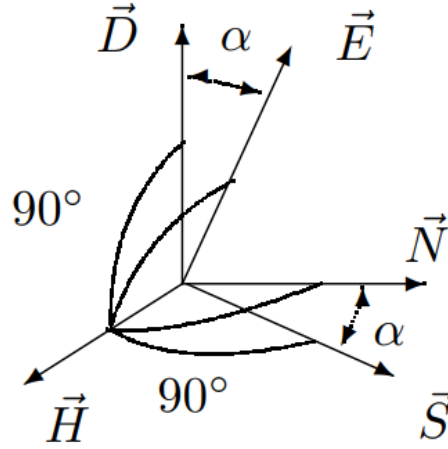


Рис. 1: Расположение векторов $\vec{D}, \vec{E}, \vec{N}, \vec{S}$ в анизотропной среде

В изотропной среде связь между вектором напряжённости электрического поля \vec{E} и вектором индукции \vec{D} дается материальным уравнением $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, где ϵ – постоянная, не зависящая от направления величина, называемая диэлектрической проницаемостью. Для характеристики оптических свойств анизотропной среды требуется девять величин ϵ_{ij} , образующих тензор диэлектрической проницаемости. Он вводится посредством соотношений

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (i, j = x, y, z) \quad (3)$$

Благодаря тензорной связи между \vec{D} и \vec{E} направления этих векторов в кристаллах, вообще говоря, не совпадают. Плоскость (\vec{E}, \vec{H}) обладает тем свойством, что перпендикуляр к ней определяет направление вектора Пойнтинга $\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E} \vec{H}]$, т.е. направление распространения световых лучей. Четыре вектора $\vec{D}, \vec{E}, \vec{N}, \vec{S}$ лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору \vec{H} . Взаимное расположение этих векторов показано на рис. 1.

Оптически одноосные кристаллы. Всю совокупность возможных значений тензора диэлектрической проницаемости можно представить при помощи трехосного эллипсоида. Значение диэлектрической проницаемости для любого направления выражается длиной радиуса-вектора эллипсоида, проведенного по этому направлению. Три значения диэлектрической проницаемости $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ соответствующие осям эллипсоида, называются *главными значениями диэлектрической проницаемости* и соответственно $\sqrt{\epsilon_x}, \sqrt{\epsilon_y}, \sqrt{\epsilon_z}$ – *главными показателями преломления*.

В системе координат, оси которой совпадают с главными осями эллипсоида, тензор диэлектрической проницаемости приводится к диагональному виду, и проекции векторов \vec{D} и \vec{E} на оси координат связаны простыми соотношениями:

$$D_x = \varepsilon_x E_x, \quad D_y = \varepsilon_y E_y, \quad D_z = \varepsilon_z E_z$$

В оптически одноосном кристалле, каковым является исландский шпат, эллипсоид диэлектрической проницаемости представляет собой эллипсоид вращения. В нем оптическая ось совпадает с осью вращения эллипсоида диэлектрических проницаемостей. Для главных значений диэлектрических проницаемостей приняты обозначения: $\varepsilon_z = \varepsilon_{||}$ и $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}$. В дальнейшем нам потребуется связь между проекциями векторов \vec{D} и \vec{E} на оптическую ось кристалла ($\vec{D}_{||}$ и $\vec{E}_{||}$) и на плоскость, перпендикулярную оси (\vec{D}_{\perp} и \vec{E}_{\perp}):

$$\vec{D}_{||} = \varepsilon_{||} \vec{E}_{||}, \quad \vec{D}_{\perp} = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_{\perp} \quad (4)$$

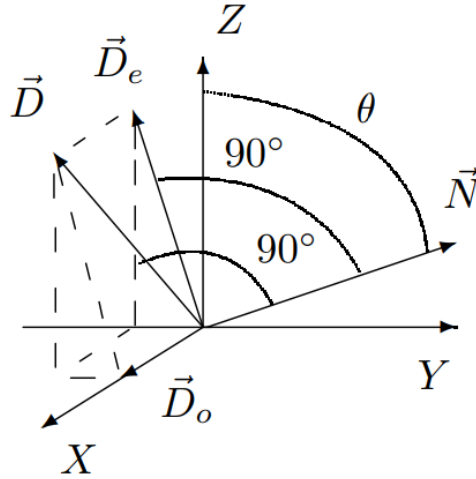


Рис. 2: Расположение векторов \vec{N} и \vec{D} в анизотропной среде: ($\vec{D} = \vec{D}_o + \vec{D}_e$; $\vec{D}_o \perp \vec{D}_e$; $\vec{D} \perp \vec{N}$); \vec{N} и \vec{D}_e лежат в плоскости (Z, Y) ; \vec{D}_o перпендикулярен плоскости (Z, Y)

Волну, распространяющуюся в одноосном кристалле, можно разделить на две линейно поляризованные волны: обыкновенную, вектор электрической индукции \vec{D}_o которой перпендикулярен главному сечению, и необыкновенную, с вектором электрической индукции \vec{D}_e , лежащим в главном сечении (рис. 2). *Главным сечением кристалла* называется плоскость, в которой лежит оптическая ось кристалла и нормаль к фронту волны.

Рассмотрим вначале обыкновенную волну, в которой вектор \vec{D}_o перпендикулярен главному сечению. Тогда $D_{oz} = 0$, и из условия $D_z = \varepsilon_z E_z$ следует, что $E_{oz} = 0$.

Кроме того, так как $D_{oy} = \varepsilon_{\perp} E_{oy}$ и $D_{ox} = \varepsilon_{\perp} E_{ox}$, то можно записать

$$\vec{D}_o = \varepsilon_{\perp} \vec{E}_o \quad (5)$$

Таким образом, для обыкновенной волны материальное уравнение имеет такой же вид, как и в изотропной среде. Найдем с помощью этого уравнения скорость распространения обыкновенной волны и соответствующий показатель преломления. Из (2) имеем

$$D_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o$$

или, учитывая (5),

$$\varepsilon \perp E_o = \frac{c}{v_o} H_o, \quad H_o = \frac{c}{v_o} E_o$$

откуда

$$v_o = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}, \quad n_o = \frac{c}{v_o} = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}$$

Таким образом, скорость распространения обыкновенной волны и ее показатель преломления не зависят от направления распространения.

У необыкновенной волны вектор \vec{D}_e не параллелен \vec{E}_e , и связь между ними сложнее, чем в (5).

Для того чтобы найти скорость распространения v и показатель преломления необыкновенной волны $n = c/v$, достаточно найти связь между вектором электрической индукции этой волны \vec{D}_e и проекцией на него вектора электрического поля волны E_{eD} . Тогда, подставляя $D_e = \varepsilon E_{eD}$ в (2), приходим к соотношениям

$$\varepsilon E_{eD} = \frac{c}{v} H_e; \quad \varepsilon H_e = \frac{c}{v} H_{eD}$$

формально тождественным с соотношениями для обыкновенной волны. Роль величины $\varepsilon_{\text{пер}}$ теперь играет величина ε , а показатель преломления необыкновенной волны равен $\sqrt{\varepsilon}$.

Найдем связь между D_e и E_{eD} . Для этого разложим векторы \vec{D}_e и \vec{E}_e на составляющие, параллельные и перпендикулярные оси кристалла:

$$\vec{D}_e = \vec{D}_{\parallel} + \vec{D}_{\perp}$$

$$\vec{E}_e = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp}$$

Учитывая (4), находим

$$E_{eD} = \frac{\vec{E}_e \vec{D}_e}{D_e} = \frac{\vec{E}_{e\parallel} \vec{D}_{e\parallel} + \vec{E}_{e\perp} \vec{D}_{e\perp}}{D_e} = \frac{D_{e\parallel}^2 / \varepsilon_{\parallel} + D_{e\perp}^2 / \varepsilon_{\perp}}{D_e}$$

или

$$E_{eD} = D_e \left(\frac{\sin^2 \theta}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\cos^2 \theta}{\varepsilon_{\perp}} \right) = \frac{D_e}{\varepsilon}$$

где θ – угол между оптической осью Z и волновой нормалью N (рис. 2):

$$\sin \theta = \frac{D_{e\parallel}}{d_e}, \quad \cos \theta = \frac{D_{e\perp}}{D_e} \quad (6)$$

Таким образом, ε и, соответственно, скорость распространения и показатель преломления необыкновенной волны зависят от угла между оптической осью кристалла и направлением распространения волны.

Выпишем выражение для показателя преломления необыкновенной волны $n = \sqrt{\varepsilon}$ через главные показатели преломления n_o , n_e и угол θ :

$$\frac{1}{[n(\theta)]^2} = \frac{\sin^2 \theta}{n_e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{n_o^2} \quad (7)$$

При $n_o - n_e \ll n_o$ и n_e (для исландского шпата $n_o = 1.655$, $n_e = 1.485$ для $\lambda = 0.63$ мкм) (7) можно упростить:

$$n_\theta \approx n_e + (n_o - n_e) \cos^2 \theta \quad (8)$$

Двойное лучепреломление в призме из исландского шпата. Рассмотрим, как по преломлению лучей в кристаллической призме можно определить показатели преломления для обыкновенной и необыкновенной волны. В работе исследуется одна из двух призм, составляющих поляризатор (рис. 3).

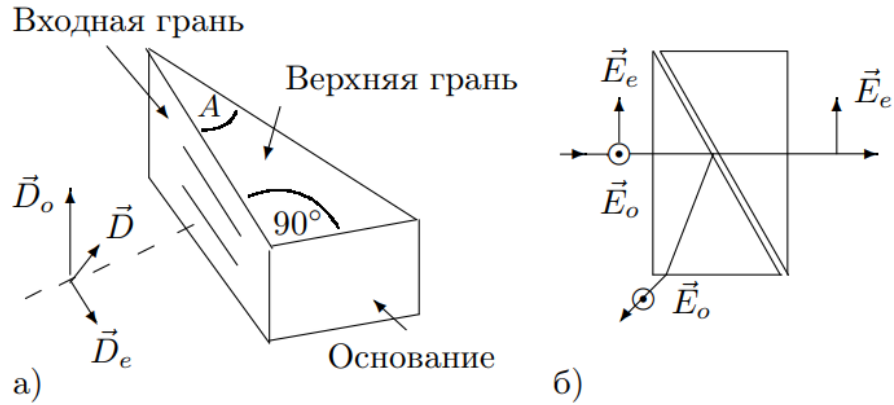


Рис. 3: а) исследуемая призма из исландского шпата. Штриховой линией указано направление оптической оси кристалла. б) Ход лучей в поляризационной линзе

В исследуемой призме ось кристалла лежит в плоскости, параллельной верхней грани призмы, причем она параллельна входной грани призмы (длинному катету). При этом в обыкновенной волне вектор \vec{D}_o перпендикулярен верхней грани призмы, а в необыкновенной волне вектор \vec{D}_e параллелен верхней грани.

Волну, падающую на входную грань призмы, можно представить в виде суммы двух ортогональных линейно поляризованных волн. Преломление этих двух волн на грани призмы можно рассматривать независимо. Волна, в которой вектор \vec{D} направлен вертикально (перпендикулярно верхней грани и оси кристалла), внутри кристалла будет распространяться как обыкновенная. Для этой волны выполняется закон Снеллиуса, а показатель преломления призмы для нее равен $n_o = \sqrt{\varepsilon_\perp}$. Волна, в которой вектор \vec{D} направлен горизонтально, в кристалле будет распространяться как необыкновенная. Для этой волны также будет выполняться закон

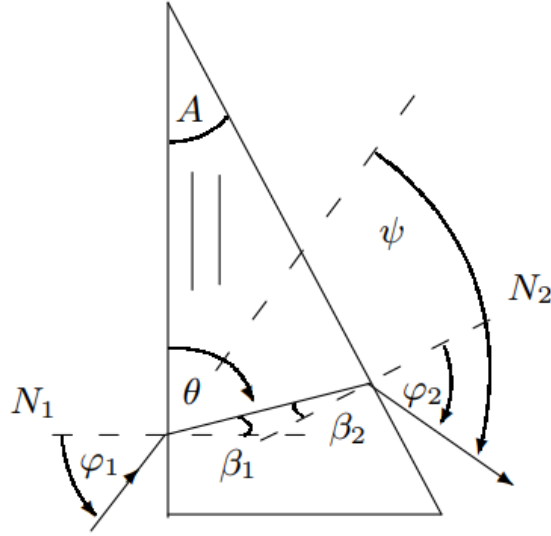


Рис. 4: Ход лучей в призме

Снеллиуса, но с тем отличием, что показатель преломления призмы для нее будет зависеть от угла между осью кристалла и волновой нормалью.

Значение показателя преломления и угол, под которым преломилась волна в призме, можно найти, измерив угол падения на входную грань призмы φ_1 и угол φ_2 на выходе призмы (рис. 4). Запишем закон Снеллиуса для одной из волн применительно к первой и второй граням призмы:

$$\sin \varphi_1 = n \sin \beta_1$$

$$\sin \varphi_2 = n \sin \beta_2 = n \sin(A - \beta_1).$$

При этом мы выразили угол падения на вторую грань призмы β_2 через угол преломления на первой грани призмы β_1 и угол при вершине призмы A . Как видно из рис. 4, эти углы связаны простым соотношением $A = \beta_1 + \beta_2$. Учитывая, что угол преломления β_1 связан с углом θ между осью кристалла и волновой нормалью \vec{N} соотношением $\theta + \beta_1 = \pi/2$, находим n и θ :

$$n = \frac{1}{\sin A} \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \cos A} \quad (9)$$

$$\cos \theta = \frac{\sin \varphi_1}{n}$$

Для обыкновенной волны n не будет зависеть от угла θ , а для необыкновенной волны зависимость n от θ должна описываться выражением (7).

Показатель преломления призмы из изотропного материала удобно находить по углу наименьшего отклонения луча от первоначального направления. Угол отклонения луча призмой (ψ на рис. 4) минимален для симметричного хода лучей, т.е.

когда $\varphi_1 = \varphi_2$. Тогда показатель преломления можно рассчитать по формуле

$$n = \frac{\sin\left(\frac{\psi_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad (10)$$

где ψ_m – угол наименьшего отклонения.

Если призма неизотропна, то этой формулой, строго говоря, можно воспользоваться только для обыкновенной волны, которая, как это было показано ранее, распространяется так же, как и в изотропной среде. Но если учесть, что угол при вершине призмы мал, и при угле наименьшего отклонения преломлённый луч в призме распространяется под углом к оси кристалла, близким к $\pi/2$, то в качестве оценки формулу (10) можно использовать для определения n_e .

Экспериментальная установка. Схема экспериментальной установки изображена на рис. 5. Источником излучения служит – N лазер ($\lambda = 0.63$ мкм). Излучение лазера поляризовано линейно за счет наличия брюстеровских окошек в кювете лазера. Направление вектора \vec{E} в луче можно изменять с помощью поляроида, установленного на выходе лазера. Исследуемая призма из исландского шпата закреплена в центре поворотного столика с неподвижным лимбом для отсчета углов.

Преломляющий угол A призмы (рис. 4) можно рассчитать, если известны угловые координаты нормалей N_1 и N_2 к *преломляющим (рабочим)* граням призмы, прилежащим преломляющему углу. Грань, противолежащая преломляющему углу, называется *основанием* призмы. Штриховкой указано направление оптической оси.

Обычно ход лучей в призме таков, что и падающий, и преломлённый лучи отклоняются от нормалей в сторону основания призмы, при этом углы φ_1 и φ_2 считаются положительными.

Угол падения φ_1 определяется по положению луча, отражённого от передней (входной) грани призмы (рис. 5). Из рис. 4 можно получить связь углов φ_1 и φ_2 :

$$\varphi_2 = A + \psi - \varphi_1 \quad (11)$$

а угол ψ – отклонение преломлённого луча от первоначального направления – определяется по разности отсчётов на лимбе между точками, куда попадает луч в отсутствие призмы, и точкой, куда попадает преломлённый луч.

При монотонном увеличении угла падения угол ψ сначала уменьшается, а затем снова начинает увеличиваться. Минимальное отклонение соответствует симметричному ходу луча: внутри призмы луч идёт перпендикулярно биссектрисе угла A , а $\varphi_1 = \varphi_2$. Углы наименьшего отклонения ψ_m различны для обыкновенного и необыкновенного лучей.

Угол A подобран так, что призма может выполнять роль поляризатора: при нормальном падении луча на первую преломляющую грань из призмы выходит только один луч, а другой испытывает полное внутреннее отражение на второй

Ход работы.

1. Отъюстируем и закрепим установку.
2. Определим угол A при вершине призмы. Для этого определим положение засечки при нормальном падении луча на прилегающие к углу стороны:

$$\varphi_1 = 289^\circ, \quad \varphi_2 = 152^\circ$$

Откуда

$$A = 180^\circ - (\varphi_1 - \varphi_2) = 39^\circ$$

Оценивая погрешность измерений как 1° , получим

$$A = (39 \pm 2)^\circ$$

3. Снимем зависимость $180 + \psi$ от $2\varphi_1$ для обыкновенной (вертикальная поляризация) и необыкновенной (горизонтальная поляризация) волн:

обыкновенная		необыкновенная	
$2\varphi_1, ^\circ$	$(180 + \psi), ^\circ$	$2\varphi_1, ^\circ$	$(180 + \psi), ^\circ$
20	214	20	202
25	211	25	202
30	210	30	201
35	210	35	201
40	208	40	201
45	208	45	200
50	207	50	200
55	207	55	200
60	207	60	200
65	207	65	200
70	207	70	201
75	207	75	201
80	207	80	201
85	208	85	202
90	208	90	203
95	209	95	203
100	210	100	204
105	210	105	205
110	211	110	205
115	212	115	206
120	213	120	207
125	214	125	209
130	215	130	210
135	217	135	212
140	218	140	213

При этом по-прежнему оценим погрешность прямых измерений как 1° . Тогда:

Для обыкновенной волны

$\phi_1, ^\circ$	$\psi, ^\circ$	ϕ_1, rad	ψ, rad	ϕ_2, rad	$n_{\text{обыкн}}$	$\cos\theta$	$\cos^2\theta$
10,0	34	0,17	0,59	1,10	1,64	0,11	0,01
12,5	31	0,22	0,54	1,00	1,62	0,13	0,02
15,0	30	0,26	0,52	0,94	1,63	0,16	0,03
17,5	30	0,31	0,52	0,90	1,64	0,18	0,03
20,0	28	0,35	0,49	0,82	1,62	0,21	0,04
22,5	28	0,39	0,49	0,78	1,63	0,23	0,05
25,0	27	0,44	0,47	0,72	1,62	0,26	0,07
27,5	27	0,48	0,47	0,67	1,63	0,28	0,08
30,0	27	0,52	0,47	0,63	1,63	0,31	0,09
32,5	27	0,57	0,47	0,58	1,63	0,33	0,11
35,0	27	0,61	0,47	0,54	1,63	0,35	0,12
37,5	27	0,65	0,47	0,50	1,63	0,37	0,14
40,0	27	0,70	0,47	0,45	1,62	0,40	0,16
42,5	28	0,74	0,49	0,43	1,64	0,41	0,17
45,0	28	0,79	0,49	0,38	1,63	0,43	0,19
47,5	29	0,83	0,51	0,36	1,64	0,45	0,20
50,0	30	0,87	0,52	0,33	1,65	0,46	0,22
52,5	30	0,92	0,52	0,29	1,64	0,48	0,24
55,0	31	0,96	0,54	0,26	1,64	0,50	0,25
57,5	32	1,00	0,56	0,24	1,65	0,51	0,26
60,0	33	1,05	0,58	0,21	1,65	0,53	0,28
62,5	34	1,09	0,59	0,18	1,64	0,54	0,29
65,0	35	1,13	0,61	0,16	1,64	0,55	0,31
67,5	37	1,18	0,65	0,15	1,66	0,56	0,31
70,0	38	1,22	0,66	0,12	1,65	0,57	0,33

И для необыкновенной:

$\phi_1, ^\circ$	$\psi, ^\circ$	ϕ_1, rad	ψ, rad	ϕ_2, rad	$n_{\text{необыкн}}$	$\cos\theta$	$\cos^2\theta$
10,0	22	0,17	0,38	0,89	1,46	0,12	0,01
12,5	22	0,22	0,38	0,85	1,47	0,15	0,02
15,0	21	0,26	0,37	0,79	1,47	0,18	0,03
17,5	21	0,31	0,37	0,74	1,48	0,20	0,04
20,0	21	0,35	0,37	0,70	1,48	0,23	0,05
22,5	20	0,39	0,35	0,64	1,47	0,26	0,07
25,0	20	0,44	0,35	0,59	1,47	0,29	0,08
27,5	20	0,48	0,35	0,55	1,47	0,31	0,10
30,0	20	0,52	0,35	0,51	1,48	0,34	0,11
32,5	20	0,57	0,35	0,46	1,47	0,36	0,13
35,0	21	0,61	0,37	0,44	1,49	0,38	0,15
37,5	21	0,65	0,37	0,39	1,49	0,41	0,17
40,0	21	0,70	0,37	0,35	1,48	0,43	0,19
42,5	22	0,74	0,38	0,32	1,50	0,45	0,20
45,0	23	0,79	0,40	0,30	1,51	0,47	0,22
47,5	23	0,83	0,40	0,25	1,50	0,49	0,24
50,0	24	0,87	0,42	0,23	1,51	0,51	0,26
52,5	25	0,92	0,44	0,20	1,52	0,52	0,27
55,0	25	0,96	0,44	0,16	1,50	0,55	0,30
57,5	26	1,00	0,45	0,13	1,51	0,56	0,31
60,0	27	1,05	0,47	0,10	1,51	0,57	0,33
62,5	29	1,09	0,51	0,10	1,53	0,58	0,34
65,0	30	1,13	0,52	0,07	1,53	0,59	0,35
67,5	32	1,18	0,56	0,06	1,54	0,60	0,36
70,0	33	1,22	0,58	0,03	1,54	0,61	0,37

Погрешность значений φ_1 равна 0.5° , погрешность же ψ равна 1° , откуда, зная, что $\varphi_2 = A + \psi - \varphi_1$, получим, что погрешность φ_2 равна 3° . Отсюда погрешность n определим, считая $n = f(A, \varphi_1, \varphi_2)$:

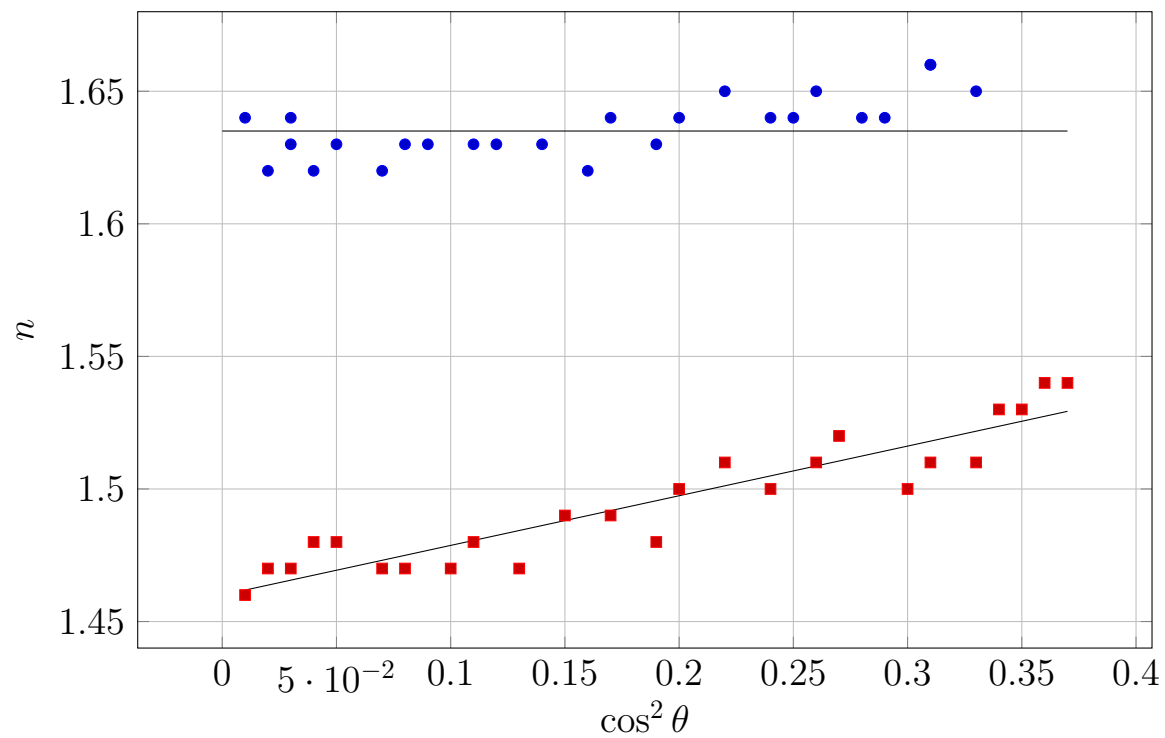
$$\sigma_n = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i} \right)^2$$

Получим:

$$\sigma_n = 0.15$$

Аналогично, найдем погрешность $\cos^2 \theta$: $\sigma_\theta = 0.03$.

Построим графики:



Отсюда:

$$n_o = 1.63 \pm 0.15$$

$$n_e = 1.48 \pm 0.13$$

Найдем также ψ_m для обыкновенной и необыкновенной волн:

$$\psi_{m \text{ обькн}} = 1.63$$

$$\psi_{m \text{ необькн}} = 1.48$$

Откуда:

$$n_o = 1.63 \pm 0.13$$

$$n_e = 1.48 \pm 0.14$$