

Работа 3.6.1.

Спектральный анализ электрических сигналов.

Корнеев Е.С.

Спектральный анализ электрических сигналов.

Цель работы: изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

Оборудование: персональный компьютер, USB-осциллограф АКИП-4107, функциональный генератор WaveStation 2012, соединительные кабели.

Многие физические процессы можно моделировать с помощью линейных дифференциальных уравнений. К решениям таких уравнений применим принцип суперпозиции: разнообразные сложные явления удобно представлять в виде суммы простых решений линейных уравнений. Для линейных уравнений такими простыми решениями являются гармонические функции. Математическая теория представления сложных функций в виде сумм гармонических составляющих получила название теории рядов и интегралов Фурье.

В радиотехнике широко используется разложение сложных сигналов на гармонические колебания различных частот ω . Функция $F(\omega)$, описывающая зависимость амплитуды гармоник от их частоты, называется *амплитудной спектральной характеристикой* - спектром исходного сигнала. Представление сложного периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фурье. Непериодические сигналы представляются в виде интеграла Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_2 t)] \quad (1)$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \quad (2)$$

где $a_0/2 = A_0/2$ - среднее значение $f(t)$, a_n и b_n - амплитуды членов разложения, определяющиеся по формулам

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt,$$

точку t_1 можно выбрать произвольно. При этом между коэффициентами существует следующая связь:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctan \frac{b_n}{a_n}$$

Таким образом, видно, что сигнал раскладывается в сумму сигналов с частотами $\Omega_1, 2\Omega_1, 3\Omega_1$, и т.д. Представляя $\cos \alpha$ в виде

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

и подставляя в (2):

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t} \right)$$

Вводя комплексные амплитуды

$$\widetilde{A}_n = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \widetilde{A}_{-n} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \widetilde{A}_0 = A_0 \quad (3)$$

получим

$$f(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{A}_n e^{in\Omega_1 t} \quad (4)$$

Видно, что введение отрицательных частот ($-n\Omega_1$) позволяет записать разложение Фурье простым способом. (3) обеспечивают действительность суммы (4): каждой частоте $k\Omega_1$ соответствует в (2) один член ($n = k$), а в (4) - два ($n = k$ и $n = -k$). Формулы (3) позволяют переходить от комплексного представления и обратно.

Для расчета комплексных амплитуд умножим левую и правую части (4) на $e^{-ik\Omega_1 t}$ и проинтегрируем за период, например, от 0 до $2\pi/\Omega_1$. В правой части обнулятся все члены, кроме $n = k$, дающего $A_k T/2$. Поэтому

$$A_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt.$$

Теперь рассмотрим функции, исследуемые в работе.

Периодическая последовательность прямоугольных сигналов с амплитудой V_0 , длительностью τ , частотой повторения $f_{\text{повт}} = 1/T$, где T - период повторения импульсов.

Найдем среднее значение:

$$\langle V \rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0 \frac{\tau}{T}$$

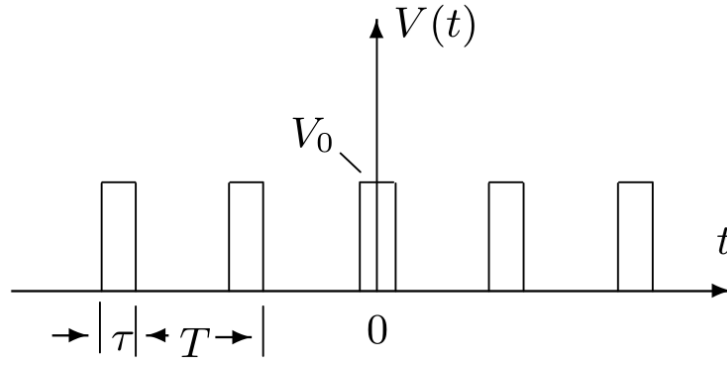


Рис. 1: Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Амплитуды косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \tau/2)}{n\Omega_1 \tau/2} \sim \frac{\sin(x)}{x}$$

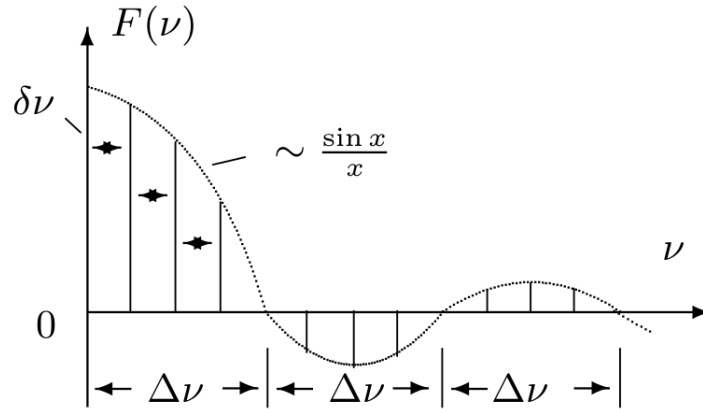


Рис. 2: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Поскольку функция четная, все амплитуды синусоидальных гармоник будут нулевыми. Амплитуды гармоник меняются по закону $\frac{\sin(x)}{x}$. На графике изображен случай, когда T кратно τ . Назовем шириной спектра $\Delta\nu$ расстояние от первого максимума, возникающего от главного максимума до первого нуля, возникающего при $\Omega_1 = 2\pi/T$. При этом $\Delta\omega\tau \approx 2\pi$, или $\Delta\nu\Delta t \approx 1$.

Периодическая последовательность цугов гармонического колебания $V_0 \cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T .

Функция также симметричная относительно $t = 0$. Амплитуда n -й гармоники определяется выражением

$$A_n = a_n = \frac{2}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 \cos(\omega_0 t) \cdot \cos(n\Omega_1 t) dt =$$

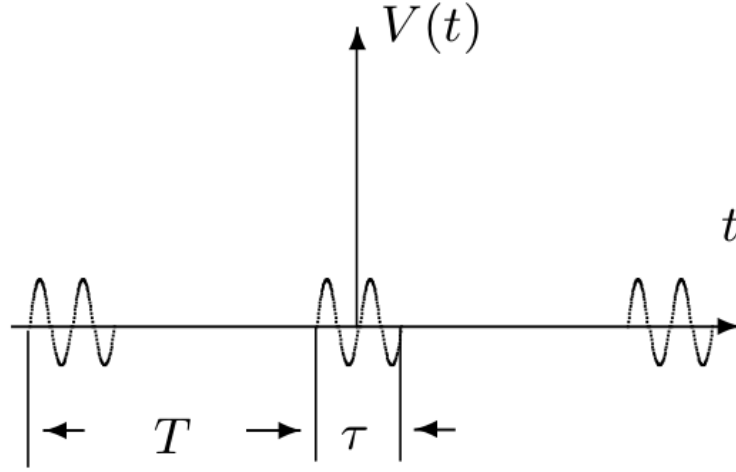


Рис. 3: Периодическая последовательность цугов

$$= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right)$$

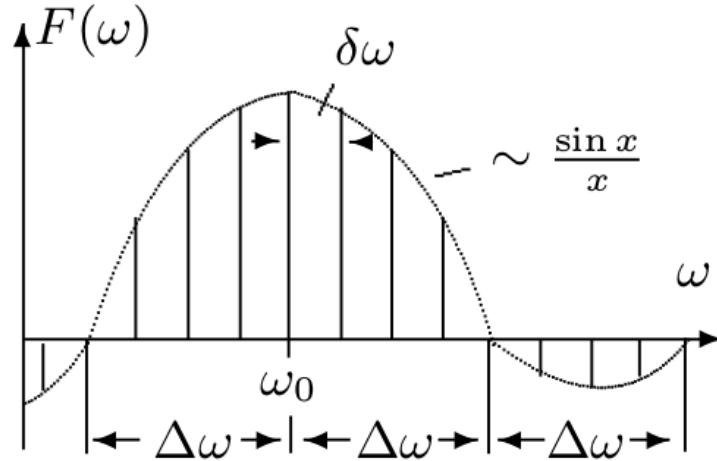


Рис. 4: Спектр периодической последовательности цугов

Такое спектральное распределение $F(\omega)$ для случая, когда T кратно τ , представлено на рис. 5. Сравнивая этот график с аналогичным для прямоугольных импульсов, видим, что они аналогичны, но максимумы сдвинуты на почастоте на ω_0 .

Амплитудно-модулированные сигналы. Рассмотрим гармонические колебания частоты ω_0 , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos(\Omega t)] \cos(\omega t) \quad (5)$$

Коэффициент m называется глубиной модуляции. При $m < 1$ амплитуда ко-

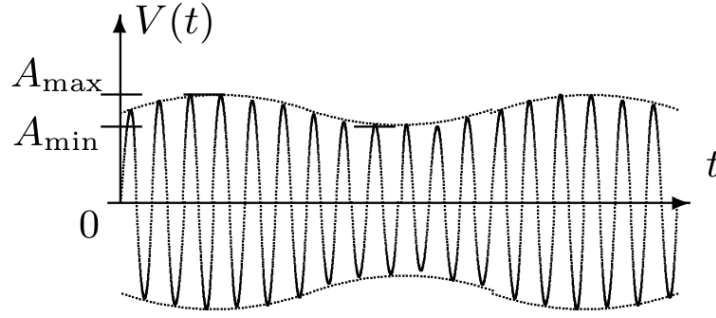


Рис. 5: Гармонические колебания, модулированные по амплитуде

лебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1 - m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1 + m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

Преобразовывая уравнение (5), получим спектр:

$$\begin{aligned} f(t) &= A_0 \cos(\omega_0 t) + A_0 m \cos(\Omega t) \cos(\omega_0 t) = \\ &= A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega - \Omega)t \end{aligned}$$

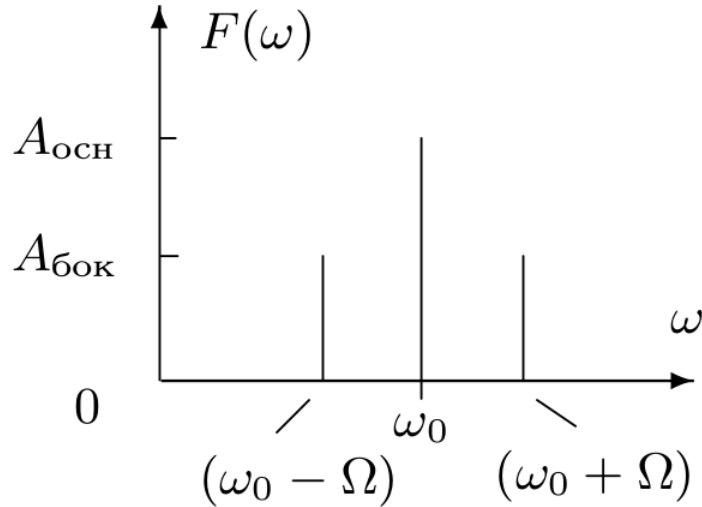


Рис. 6: Спектр гармонических колебания, модулированных по амплитуде

Спектр $F(\omega)$ таких колебаний содержит три составляющих. Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с несущей частотой ω_0 и амплитудой $A_{осн} = A_0$ - первое слагаемое в правой части последнего уравнения. Боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$ - второе и третье слагаемые. Амплитуды этих колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного сигнала: $A_{бок} = A_0 m/2$.

Экспериментальная установка.

Функциональный генератор WaveStation 2012 позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала – CH1 и CH2. Сигнал с канала CH1 подается на вход А, а сигнал с канала CH2 – на вход В USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа, на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов. При включении функционального генератора, на его экране отображается информация о параметрах электрического сигнала.

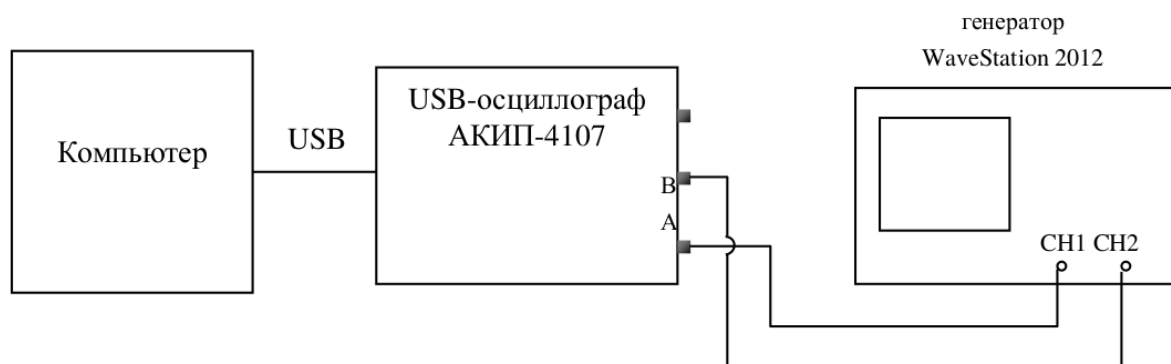


Рис. 7: Схема для исследования сигналов

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Ход работы:

1. Получим на экране спектр импульсов с параметрами $f_{\text{повт}} = 10^3$ Гц; $\tau = 25$ мкс. Первый ноль амплитуды наблюдается при $\nu = 10$ кГц. При увеличении τ вдвое мы наблюдаем уменьшение нуля амплитуды до 5 кГц, при увеличении $f_{\text{повт}}$ вдвое ноль не меняется, зато возрастает амплитуда сигнала.

2. Снимем зависимость ширины спектра $\Delta\nu$ от длительности импульса τ :

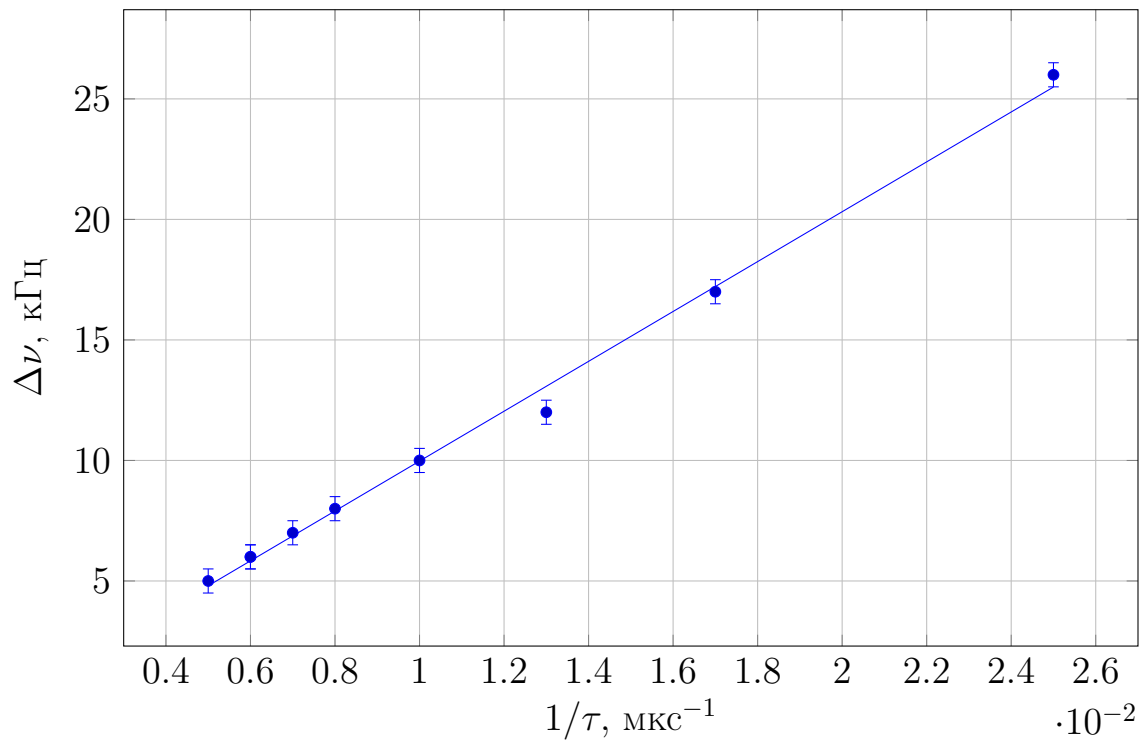
| τ , мкс | $\Delta\nu$, кГц | $1/\tau$, мкс ⁻¹ |
|--------------|-------------------|------------------------------|
| 40.0 | 26.0 | 0,025 |
| 60.0 | 17.0 | 0,017 |
| 80.0 | 12.0 | 0,013 |
| 100.0 | 10.0 | 0,010 |
| 120.0 | 8.0 | 0,008 |
| 140.0 | 7.0 | 0,007 |
| 160.0 | 6.0 | 0,006 |
| 180.0 | 6.0 | 0,006 |
| 200.0 | 5.0 | 0,005 |

В данном случае примем погрешность σ_τ равной 0.1 мкс, так как мы имеем возможность выставлять τ на генераторе с точностью до десятых. Соответственно, погрешность $1/\tau$ будет пренебрежимо мала, т.к., вычисленная по формуле

$$\sigma_{1/\tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \varepsilon_\tau,$$

она составляет доли процентов от величины, и в данном случае может не учитываться, так как она на два порядка меньше, чем порядок значащих цифр. Погрешность σ_ν примем равной 0.5 кГц, так как деления на шкале спектрометра на экране не позволяют измерять с большей точностью.

Таким образом, можем построить график $\Delta\nu(1/\tau)$:

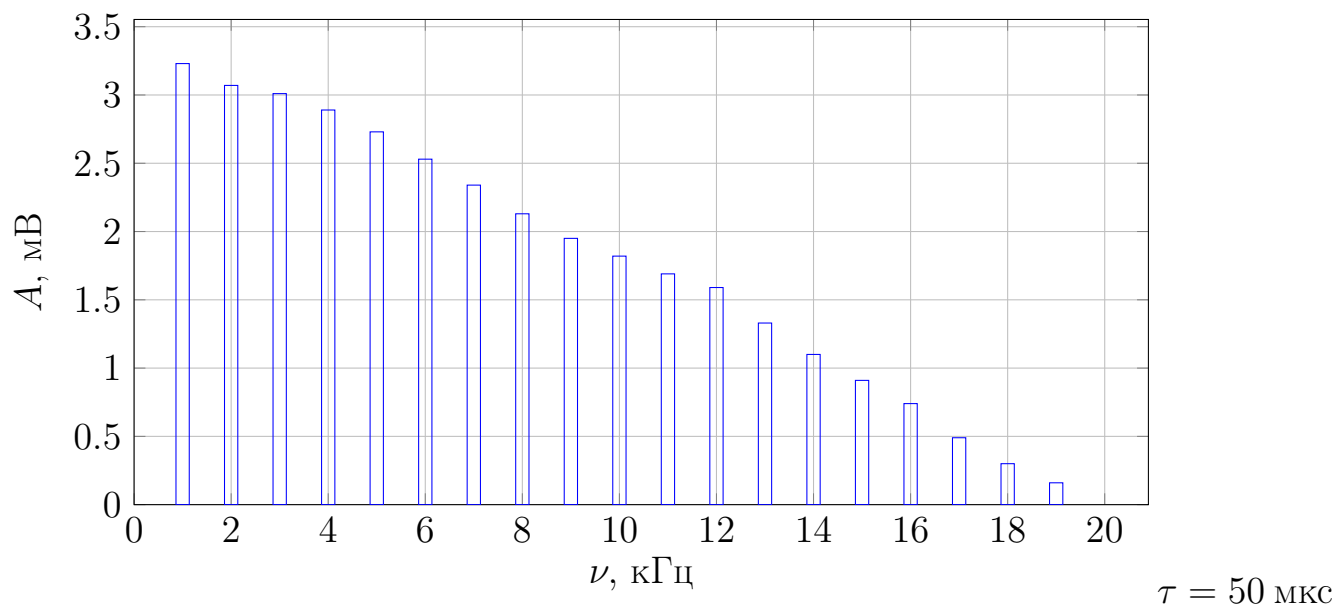


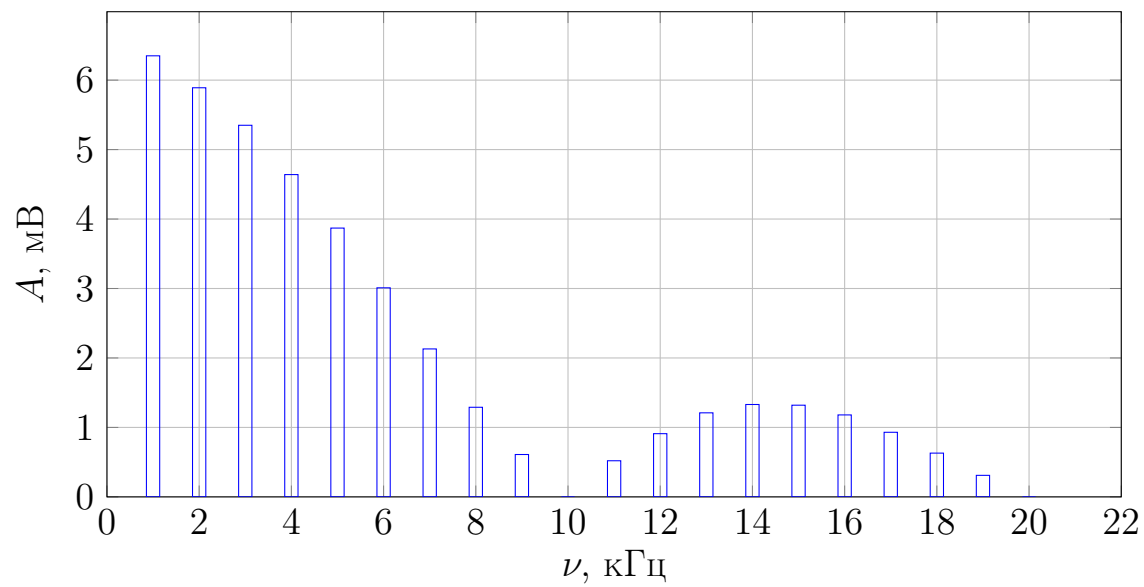
Из графика определим угол наклона: $\frac{\Delta(\Delta\nu)}{\Delta(1/\tau)} = 1,0$. Полученное значение совпадает с теоретическим, ожидаемым значением.

3. Снимем зависимость частот и амплитуд от номера гармоник для двух значений τ : $\tau = 50$ мкс и $\tau = 100$ мкс:

| $\tau = 50 \text{ мкс}$ | | | $\tau = 100 \text{ мкс}$ | | |
|-------------------------|-------------|----------|--------------------------|-------------|----------|
| N | ν , кГц | A , мВ | N | ν , кГц | A , мВ |
| 1 | 1 | 3,23 | 1 | 1 | 6,35 |
| 2 | 2 | 3,07 | 2 | 2 | 5,89 |
| 3 | 3 | 3,01 | 3 | 3 | 5,35 |
| 4 | 4 | 2,89 | 4 | 4 | 4,64 |
| 5 | 5 | 2,73 | 5 | 5 | 3,87 |
| 6 | 6 | 2,53 | 6 | 6 | 3,01 |
| 7 | 7 | 2,34 | 7 | 7 | 2,13 |
| 8 | 8 | 2,13 | 8 | 8 | 1,29 |
| 9 | 9 | 1,95 | 9 | 9 | 0,61 |
| 10 | 10 | 1,82 | 10 | 10 | 0,00 |
| 11 | 11 | 1,69 | 11 | 11 | 0,52 |
| 12 | 12 | 1,59 | 12 | 12 | 0,91 |
| 13 | 13 | 1,33 | 13 | 13 | 1,21 |
| 14 | 14 | 1,10 | 14 | 14 | 1,33 |
| 15 | 15 | 0,91 | 15 | 15 | 1,32 |
| 16 | 16 | 0,74 | 16 | 16 | 1,18 |
| 17 | 17 | 0,49 | 17 | 17 | 0,93 |
| 18 | 18 | 0,30 | 18 | 18 | 0,63 |
| 19 | 19 | 0,16 | 19 | 19 | 0,31 |
| | | | 20 | 20 | 0,00 |

По значениям восстановим графики, полученные на спектрографе:





$\tau = 100$ мкс

Здесь погрешности примем равными $\sigma_A = 0.02$ мВ, так как в этих пределах колебались значения, снимаемые с экрана. Погрешность $\sigma_\nu = 0.5$ кГц, так как сетка идет с шагом 1кГц.

Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Ход работы:

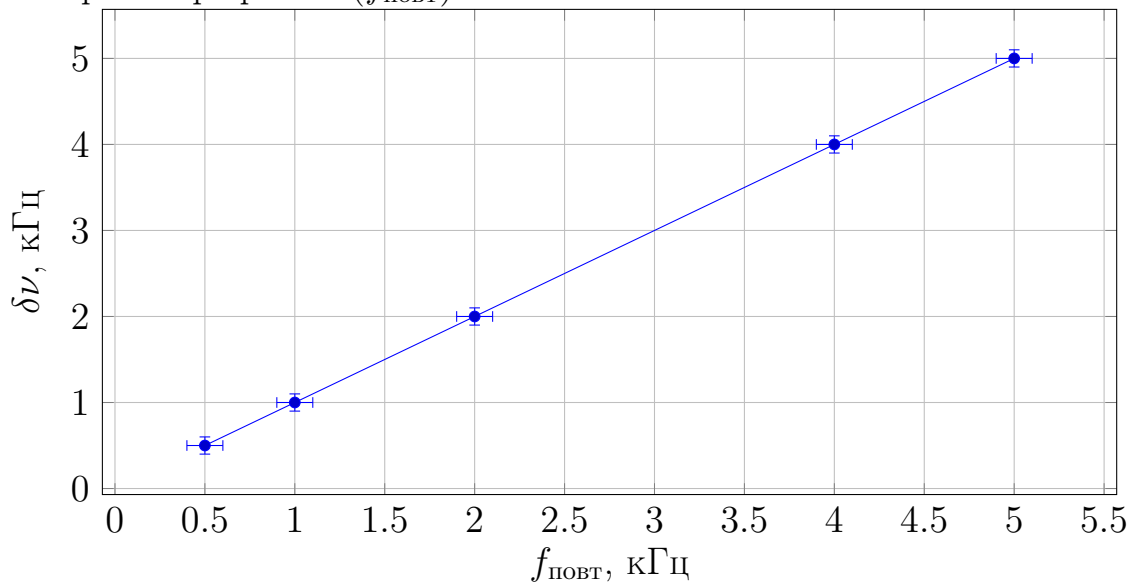
1. Установим длительность импульсов равной $\tau = 100$ мкс, затем $\tau = 200$ мкс. При этом резко возрастает амплитуда сигнала, а $\Delta\nu$ уменьшается с 10 до 5 кГц.

2. Установим длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Меняя несущую частоту ν_0 , увидим, что значениям 10, 25 и 40 кГц соответствуют максимумы амплитуд, достигающиеся на частотах 9, 24 и 39 кГц. При этом $\Delta\nu$ остается примерно одной и той же.

3. Установим значение несущей частоты $\nu_0 = 30$ кГц, длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Найдем $\delta\nu$ для нескольких частот повторений $f_{\text{повт}}$:

| | | | | | |
|--------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| $f_{\text{повт}}, \text{ кГц}$ | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 4.0 | 5.0 |
| $\delta\nu, \text{ кГц}$ | 0.5 | 1.0 | 2.0 | 4.0 | 5.0 |

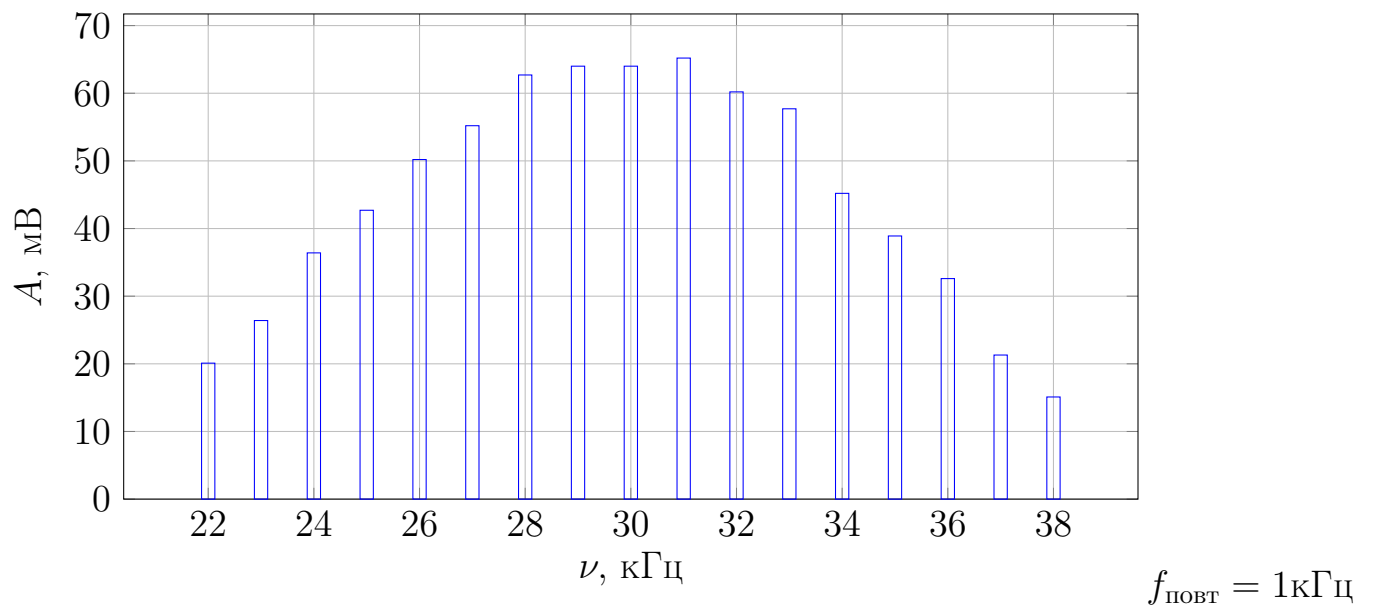
Погрешности $\sigma_{\delta\nu}$ и $\sigma_{f_{\text{повт}}}$ примем равными 0.1 кГц и 0.1 кГц соответственно. Построим график $\delta\nu(f_{\text{повт}})$:

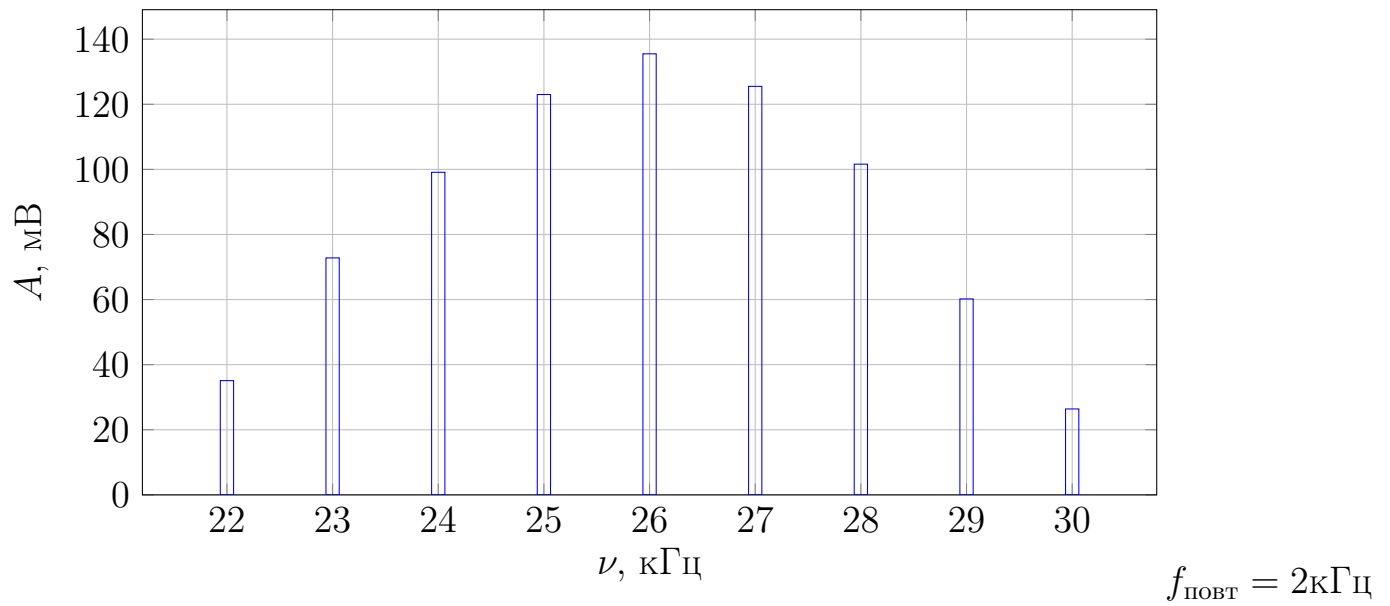


Установим $\tau = 100$ мкс и снимем зависимость амплитуд и частот для различных гармоник для частот $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и $f_{\text{повт}} = 2$ кГц:

| $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ | | | $f_{\text{повт}} = 2 \text{ кГц}$ | | |
|-----------------------------------|--------------------|-----------------|-----------------------------------|--------------------|-----------------|
| N | $\nu, \text{ кГц}$ | $A, \text{ мВ}$ | N | $\nu, \text{ кГц}$ | $A, \text{ мВ}$ |
| 22 | 22 | 20,1 | 22 | 22 | 35,1 |
| 23 | 23 | 26,4 | 23 | 24 | 72,8 |
| 24 | 24 | 36,4 | 24 | 26 | 99,1 |
| 25 | 25 | 42,7 | 25 | 28 | 123,0 |
| 26 | 26 | 50,2 | 26 | 30 | 135,5 |
| 27 | 27 | 55,2 | 27 | 32 | 125,5 |
| 28 | 28 | 62,7 | 28 | 34 | 101,6 |
| 29 | 29 | 64,0 | 29 | 36 | 60,2 |
| 30 | 30 | 64,0 | 30 | 38 | 26,4 |
| 31 | 31 | 65,2 | | | |
| 32 | 32 | 60,2 | | | |
| 33 | 33 | 57,7 | | | |
| 34 | 34 | 45,2 | | | |
| 35 | 35 | 38,9 | | | |
| 36 | 36 | 32,6 | | | |
| 37 | 37 | 21,3 | | | |
| 38 | 38 | 15,1 | | | |

Восстановим графики, полученные на спектрометре:





Теперь сравним картины спектров:

1. Прямоугольные импульсы. При увеличении τ вдвое мы наблюдаем уменьшение вдвое $\Delta\nu$.
2. Цуги. Увеличивая вдвое $f_{\text{повт}}$, мы наблюдаем уменьшение $\Delta\nu$ также вдвое.
3. Сравнивая картины спектров цугов и импульсов при равных значениях $\tau = 100 \text{ мкс}$ и $f_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$, видим, что максимум амплитуды цугов находится заметно правее максимума импульсов.

В. Исследование спектра гармонических колебаний, модулированных по амплитуде

Ход работы:

Снимем зависимость A_{max} , A_{min} , $A_{осч}$, $A_{бок}$ от размаха сигнала A_0 . Также определим глубину модуляции m по формуле

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

и найдем зависимость отношения $A_{бок}/A_{осч}$.

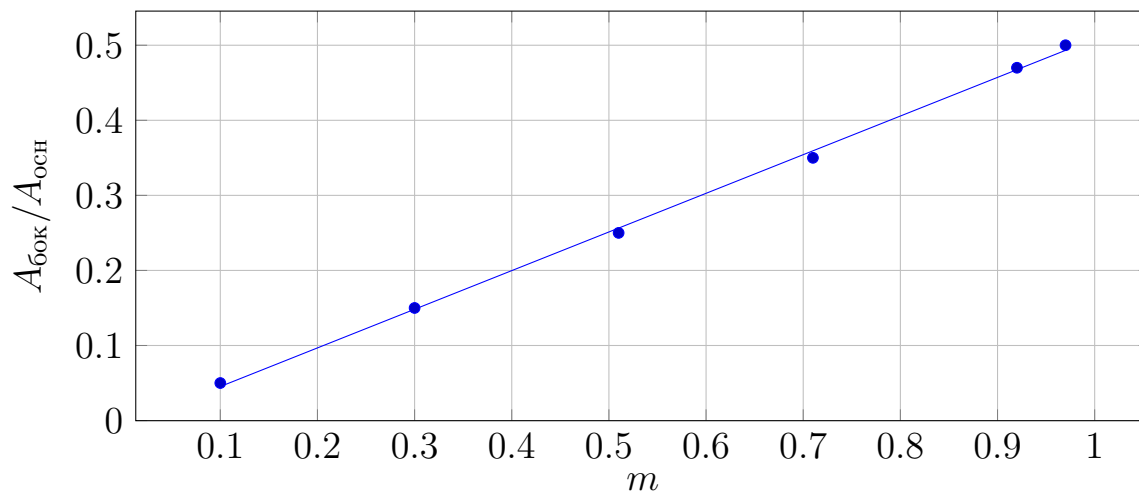
Погрешности амплитуд примем равными 0.2 мВ, так как в этих пределах колебались графики на экране. Погрешностью A_0 на этом фоне можно пренебречь. Тогда из формул видно, что

$$\sigma_m = \langle m \rangle \cdot (\varepsilon_- + \varepsilon_+)$$

Данную погрешность можно не учитывать, так как она на несколько порядков меньше порядка значащих цифр m . Погрешностью отношения частот можно пренебречь по тем же причинам.

| A_0 , В | A_{max} , мВ | A_{min} , мВ | $A_{осч}$, мВ | $A_{бок}$, мВ | m | $A_{бок}/A_{осч}$ |
|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|------|-------------------|
| 0,2 | 545,8 | 443,0 | 323,1 | 15,7 | 0,10 | 0,05 |
| 0,6 | 643,7 | 350,1 | 323,1 | 48,9 | 0,30 | 0,15 |
| 1,0 | 741,6 | 242,2 | 323,1 | 80,9 | 0,51 | 0,25 |
| 1,4 | 849,5 | 144,3 | 323,7 | 114,2 | 0,71 | 0,35 |
| 1,8 | 944,8 | 41,5 | 320,6 | 149,3 | 0,92 | 0,47 |
| 2,0 | 981,9 | 15,8 | 313,7 | 165,2 | 0,97 | 0,50 |

Построим график $A_{бок}/A_{осч}(m)$:



Определим угловой коэффициент: $\frac{\Delta(A_{\text{бок}}/A_{\text{осн}})}{\Delta m} = 0.5$. Полученное значение совпадает с ожидаемым теоретическим, т.к. мы ожидали получить отношение, равное $1/2$: амплитуды частот теоретически должны соотноситься, как $m/2$.

Меняя частоту модуляции при $m = 1$, видим, что при увеличении частоты модуляции увеличивается $\delta\nu$.

Исследование спектра сигналов, модулированных по частоте.

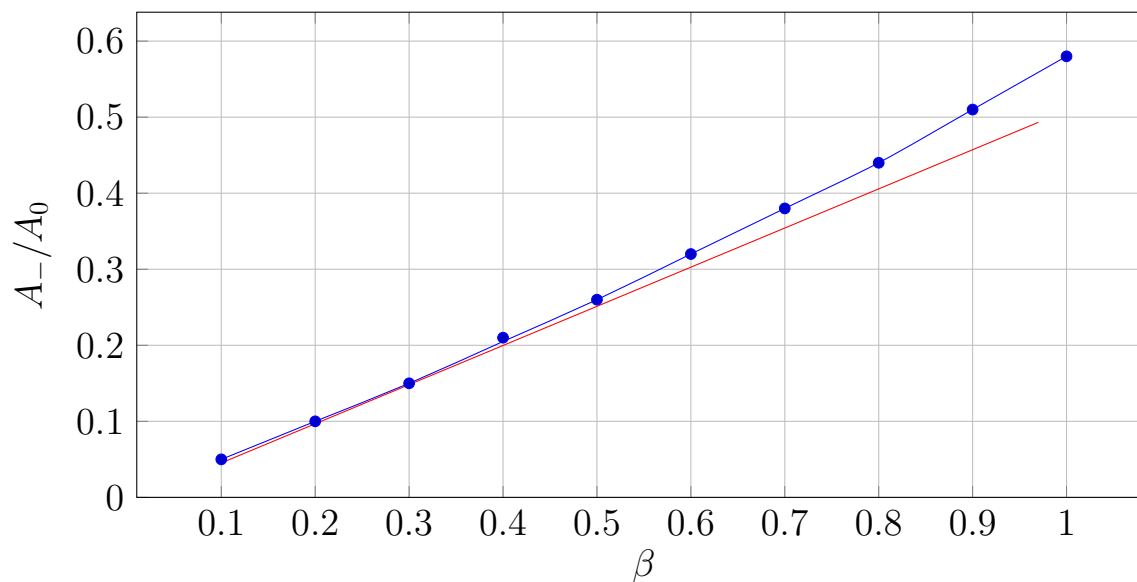
Установим значение модулирующей частоты $F = 1$ кГц. Меняя девиацию Δf_m , снимем зависимость амплитуд основной и боковых частот. Определим индекс модуляции β по формуле

$$\beta = \frac{\Delta f_m}{F}$$

и построим график зависимости $A_{\pm 1}/A_0$.

| Δf_m , Гц | A_0 , мВ | A_- , мВ | A_+ , мВ | A_{-2} , мВ | A_{+2} , мВ | A_-/A_0 | β |
|-------------------|------------|------------|------------|---------------|---------------|-----------|---------|
| 100 | 321,0 | 15,0 | 15,0 | | | 0,05 | 0,1 |
| 200 | 320,6 | 32,6 | 32,6 | | | 0,10 | 0,2 |
| 300 | 316,2 | 48,3 | 48,3 | | | 0,15 | 0,3 |
| 400 | 310,0 | 64,6 | 64,6 | | | 0,21 | 0,4 |
| 500 | 303,0 | 78,4 | 78,4 | 10,7 | 10,7 | 0,26 | 0,5 |
| 600 | 294,2 | 93,5 | 93,5 | 13,2 | 13,2 | 0,32 | 0,6 |
| 700 | 284,2 | 108,5 | 108,5 | 18,2 | 18,2 | 0,38 | 0,7 |
| 800 | 272,3 | 121,1 | 121,1 | 25,1 | 25,1 | 0,44 | 0,8 |
| 900 | 259,1 | 133,0 | 133,0 | 30,1 | 30,1 | 0,51 | 0,9 |
| 1000 | 247,2 | 144,3 | 144,3 | 37,6 | 37,6 | 0,58 | 1,0 |

Откуда:



Проведем касательную к графику при малых значениях β . Угловой коэффици-

ент будет равен 0.5, что совпадает со значением, полученным теоретически. Видно, что экспериментальная зависимость отличается от теоретической не более, чем на 10%, в диапазоне β от 0 до 0.7.

Также можно пронаблюдать изменение картины спектра при дальнейшем увеличении Δf_m . При значениях, больших 1 кГц, появляется большое число боковых частот, а также изменяется положение максимума (зачастую он становится не единственным).

Таким образом, в данной лабораторной работе мы провели спектральный анализ нескольких типов сигналов: прямоугольных импульсов, цугов, гармонического сигнала, модулированного по амплитуде и гармонического сигнала, модулированного по частоте. Сравнивая результаты, полученные экспериментально, мы убедились в применимости формул, полученных теоретическим путем.