

Работа 4.3.6.

Саморепродукция

Корнеев Е.С.

Саморепродукция

Цель работы: Изучение явления саморепродукции и применение его к измерению параметров периодических структур.

Оборудование: лазер, кассета с сетками, мира, короткофокусная линза с микрометрическим винтом, экран, линейка.

При дифракции на предмете с периодической структурой наблюдается интересное явление: на некотором расстоянии от предмета вдоль направления распространения волны появляется изображение, которое потом периодически повторяется — репродуцируется.

Этот эффект имеет простое физическое объяснение. Если на пути распространения плоской волны в плоскости $z = 0$ расположить транспарант (например, изображение предмета на фотоплёнке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания, отличной от константы, то на выходе из него в плоскости $z = 0_+$ волна уже перестанет быть плоской. Если при этом функция пропускания транспаранта — периодическая функция координат, периодической функцией будет и комплексная амплитуда волны на выходе из транспаранта, т. е. в плоскости $z = 0_+$. Периодическому распределению комплексной амплитуды в плоскости $z = 0_+$ будет соответствовать дискретный набор плоских волн с кратными пространственными частотами. При этом оказывается, что существуют плоскости (при $z > 0$), где все плоские волны имеют те же самые фазовые соотношения, что и в плоскости $z = 0_+$. В результате интерференции этих волн получается изображение, тождественное исходному периодическому объекту.

Найдём выражение для расстояния между этими плоскостями. Напомним, что плоской монохроматической волной называется волна вида

$$E(\vec{r}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \psi_0)} \quad (1)$$

где амплитуда a_0 — действительная постоянная, ω — круговая частота, \vec{k} — волновой вектор ($|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$), ψ_0 — начальная фаза. Колебания происходят синфазно во всех точках плоскости:

$$\vec{k}\vec{r} = ux + vy + \sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z = \text{const} \quad (2)$$

Направление распространения плоской монохроматической волны характеризуется волновым вектором \vec{k} , а u и v есть проекции его на оси координат x и y соответственно. В дальнейшем мы будем опускать зависимость от времени $e^{-i\omega t}$ и использовать для описания монохроматической волны комплексную амплитуду.

Для плоской волны (1) комплексную амплитуду можно представить в виде

$$f(x, y, z) = a_0 e^{i\psi_0} e^{i(ux+vy)} e^{i\sqrt{k^2-u^2-v^2}z} = f(x, y, 0) \cdot e^{i\sqrt{k^2-u^2-v^2}z} \quad (3)$$

Таким образом, для того чтобы получить комплексную амплитуду плоской волны в произвольной плоскости $z = \text{const}$, надо ее значение в плоскости $z = 0$ домножить на фазовый множитель $e^{i\sqrt{k^2-u^2-v^2}z}$.

Пусть плоская волна падает перпендикулярно на транспарант, расположенный в плоскости $z = 0$, тогда для падающей волны $u = v = 0$, и комплексная амплитуда волны на входе в транспарант является константой $a_0 e^{i\psi_0}$. Комплексную амплитуду волны в плоскости $z = 0_+$ на выходе из транспаранта получаем, умножив комплексную амплитуду на входе в транспарант на функцию пропускания транспаранта $t(x, y)$. Это правило является определением понятия *функции пропускания транспаранта*. Если функция пропускания периодическая с периодом d (для простоты рассмотрим одномерный случай $t(x, y) = t(x)$), то комплексная амплитуда на выходе из транспаранта $a_0 e^{i\psi_0} t(x)$ также периодическая функция с тем же периодом d . Согласно теореме Фурье (доказываемой в курсе математического анализа) периодическая функция $a_0 e^{i\psi_0} t(x)$ может быть представлена в виде ряда Фурье – суммы гармонических составляющих с кратными пространственными частотами $u_n = 2\pi n/d$:

$$f(x, 0_+) = a_0 e^{i\psi_0} t(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nu_n x) + b_n \sin(nu_n x)]$$

или в комплексной форме –

$$f(x, 0_+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{d} n x} \quad (4)$$

Опираясь на теорему единственности решения волнового уравнения при заданных граничных условиях, мы можем утверждать, что периодическому распределению комплексной амплитуды в плоскости $z = 0_+$ будет соответствовать при $z > 0$ дискретный набор плоских волн с кратными пространственными частотами u_n . Как видно из (3), для плоской волны с пространственной частотой u_n волновой вектор \vec{k} имеет проекции $u_n, 0, \sqrt{k^2 - u_n^2}$. Разложение волны, продифрагировавшей на транспаранте, в ряд по плоским волнам позволяет легко найти комплексную амплитуду волны в произвольной плоскости $z = \text{const}$. Для этого достаточно домножить комплексные амплитуды плоских волн в суперпозиции (4) на соответствующий фазовый множитель $\exp(i\sqrt{k^2 - u_n^2}z)$:

$$f(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} e^{i\sqrt{k^2 - u_n^2}z} \quad (5)$$

Каждая плоская волна в суперпозиции (4) приобрела при распространении от транспаранта до плоскости наблюдения $z = \text{const}$ набег фазы:

$$\varphi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z$$

Для параксиальных волн ($u_n \ll 1$):

$$\varphi_n \approx kz - \frac{u_n^2}{2k}z \quad (6)$$

и, таким образом, разность набегов фазы для любых двух плоских волн (с индексом n и m) равна

$$\Delta\varphi_{n,m} = (u_m^2 - u_n^2) \frac{z}{2k} = (m^2 - n^2) \frac{\pi\lambda}{d^2} z \quad (7)$$

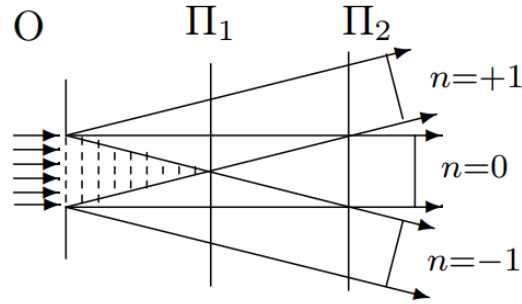


Рис. 1: Принципиальная схема дифракции на сетке. Между сеткой 0 и плоскостью Π_1 наблюдаются репродуцированные изображения сетки

Легко видеть, что в плоскости наблюдения $z_0 = 2d^2/\lambda$ разность фазовых набегов оказывается кратной 2π для любых гармоник, входящих в состав суперпозиции (4), т.е. совпадают фазовые соотношения между колебаниями, которые создаются всеми плоскими волнами, входящими в состав суперпозиции (4) в предметной плоскости $z = 0_+$ в плоскости изображения $z_1 = 2d^2/\lambda$. Поэтому в результате интерференции этих волн мы получаем изображение, тождественное исходному периодическому объекту. Описанное явление называется *эффектом саморепродукции*. Световая волна сама (без каких-либо линз или зеркал) создает изображение исходного объекта. Ясно, что все сказанное справедливо и для любого расстояния z_N , кратного z_1 :

$$z_N = \frac{2d^2}{\lambda} N \quad (8)$$

На опыте, вследствие ограниченности поперечного сечения светового пучка лазера, наблюдаются только несколько репродуцированных изображений решетки. Поясним этот эффект с помощью рис. 1.

На нем изображены только три продифрагировавших луча соответственно нулевого ($n = 0$) и \pm первого порядка ($n = \pm 1$). Там, где эти лучи перекрыва-

ются, образуется интерференционная картина с периодом, как раз равным периоду решетки d . Спроектировав картину с помощью линзы на экран, мы увидим изображения синусоидальной решетки с плавным переходом от максимумов к минимумам. Для того чтобы наблюдать более тонкие детали, необходимо, чтобы в плоскости наблюдения перекрывались лучи более высоких дифракционных порядков. На краях, где перекрываются только два луча ($n = 0$ и $n = +1$ или $n = 0$ и $n = -1$), также образуется интерференционная картина с периодом d , но менее контрастная.

Таким образом, левее плоскости Π_1 мы будем наблюдать, хотя и слегка размытые, репродуцированные изображения решетки. Правее плоскости Π_2 репродуцированных изображений не будет.

Экспериментальная установка. Хорошим приближением к плоской волне в нашем эксперименте является излучение лазера. Луч лазера падает перпендикулярно на периодический объект O , установленный в плоскости P_0 (рис. 2).

За плоскостью P_0 (в плоскостях $P_1 - P_N$) периодически по z возникают изображения объекта, которые с помощью линзы L можно поочерёдно проецировать на экран, установленный в плоскости \mathcal{E} . Если убрать линзу, то на экране наблюдается картина дифракции луча лазера на периодическом объекте.

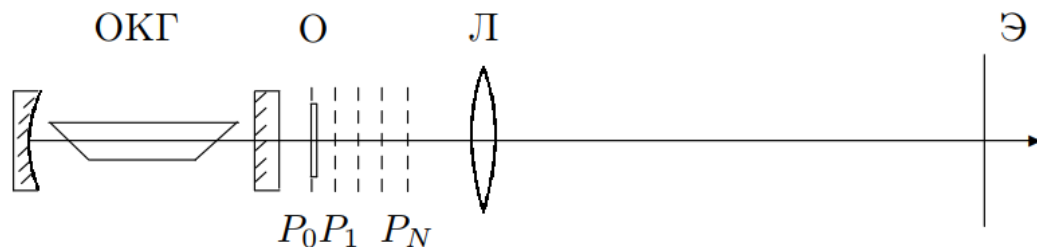


Рис. 2: Схема установки: ОКГ – гелий-неоновый лазер, O – двумерная решетка, P_N – плоскости, где наблюдаются репродуцированные изображения, L – короткофокусная линза, \mathcal{E} – экран для наблюдения изображения объекта

Экран устанавливается достаточно далеко от объекта, так что продифрагировавшие лучи, соответствующие различным порядкам дифракции ($\sin \varphi_n = n\lambda/d$), разделяются.

Измерив расстояние между дифракционными максимумами и расстояние от объекта до экрана, мы определим $\sin \varphi_n$ и d .

В нашей работе в качестве периодических объектов применяется мира – набор различным образом ориентированных одномерных решеток разного периода (рис. 4), а также двумерная решетка-сетка. Сетку можно рассматривать как две взаимно перпендикулярные решетки. Узкий пучок монохроматического света, пройдя через первую решетку с вертикальными штрихами, должен дать совокупность максимумов, расположенных вдоль горизонтальной линии.

Световой пучок, соответствующий каждому максимуму, проходя через вторую

решетку, распадается на новую совокупность пучков, дающих максимумы вдоль вертикальной линии. В результате главные максимумы возникают тогда, когда одновременно выполняются условия

$$d \sin \varphi_x = n_x \lambda, \quad d \sin \varphi_y = n_y \lambda \quad (9)$$

где n_x и n_y – два целых числа, характеризующих порядки дифракционных максимумов, φ_x и φ_y – направления на главные дифракционные максимумы в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно (рис. 3). Максимумы показаны кружками, размеры которых характеризуют интенсивность.

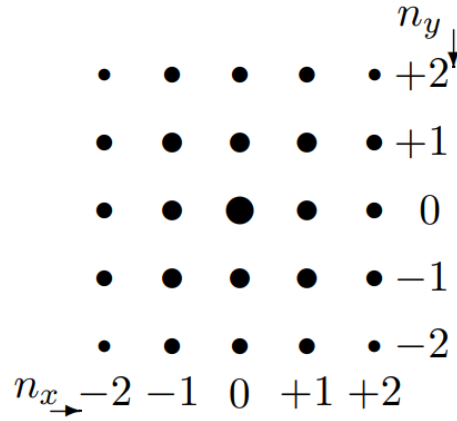


Рис. 3: Спектр решётки-сетки

Ход работы.

1. Определим расстояние от кассеты до экрана. Получим 135 ± 2 см.
2. Измерим расстояние между максимумами для различных решеток

N	m	X , мм	x , мм	d , мкм
5	20	114	5.7	130
4	20	149	7.4	100
3	10	154	15.4	50

Зная, что $d = \lambda/\varphi \approx \lambda/(x/L)$, получим значения d . λ примем равной 550 нм. Погрешность оценим, считая $d = f(X, L)$.

3. Установим линзу. Измерим расстояния a и b от линзы до сетки и до экрана соответственно. Получим: $a = 4$ см, $b = 131$ см. Погрешность примем равной 1 мм.

Определим размеры сеток на экране:

N	m	mD , мм	D , мм	$d_{\text{л}}$, мм
5	14	56	4.0	0.12
4	16	50	3.1	0.09
3	20	31	1.6	0.05

Также оценим погрешность mD как приборную погрешность линейки. Тогда погрешность σ_D будет равна $1/m$ мм, а σ_D оценим, считая $d_{\text{л}} = f(a, b, D)$:

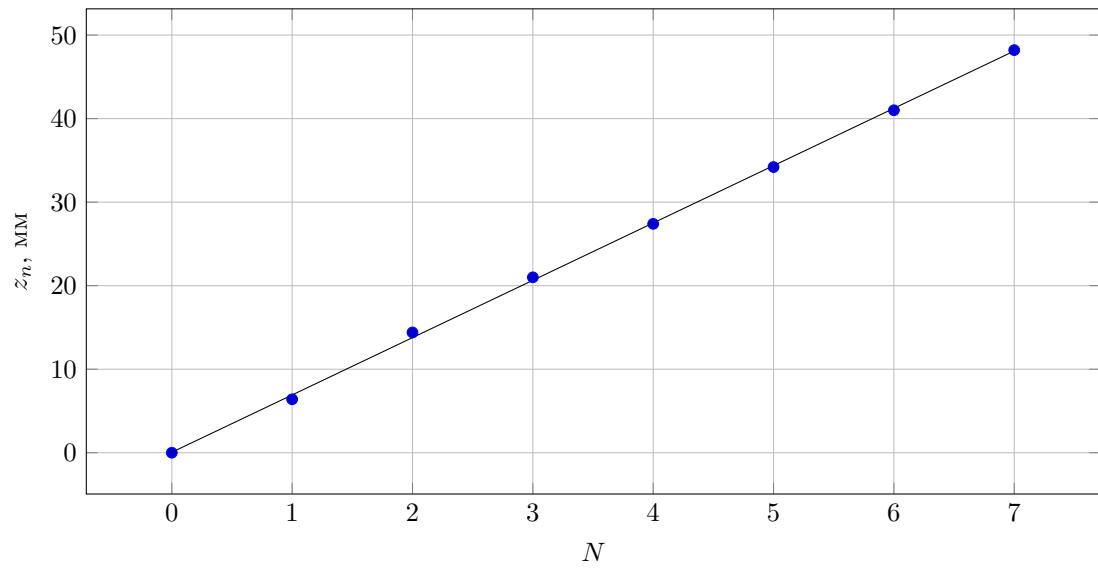
$$\sigma_d = \sqrt{\left(\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \sigma_{x_i}\right)}$$

4. Перемещая линзу с помощью микрометрического винта, получим координаты плоскостей саморепродукции:

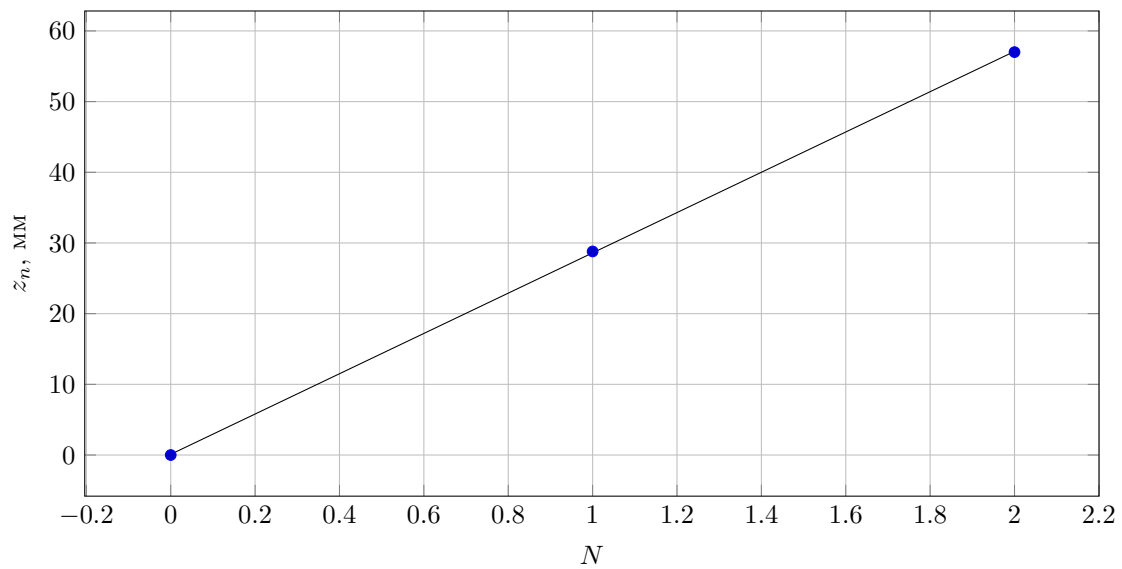
$N = 3$			$N = 4$			$N = 5$		
z , мм	n	z_n , мм	z , мм	n	z_n , мм	z , мм	n	z_n , мм
100	0	0	100	0	0	100	0	0
93.6	1	6.4	71.2	1	28.8	50.2	1	48.8
85.6	2	14.4	43.0	2	57.0			
79.0	3	21.0						
72.6	4	27.4						
65.8	5	34.2						
59.0	6	41.0						
51.8	7	48.2						

Погрешность z_n примем равной приборной погрешности микровинта.

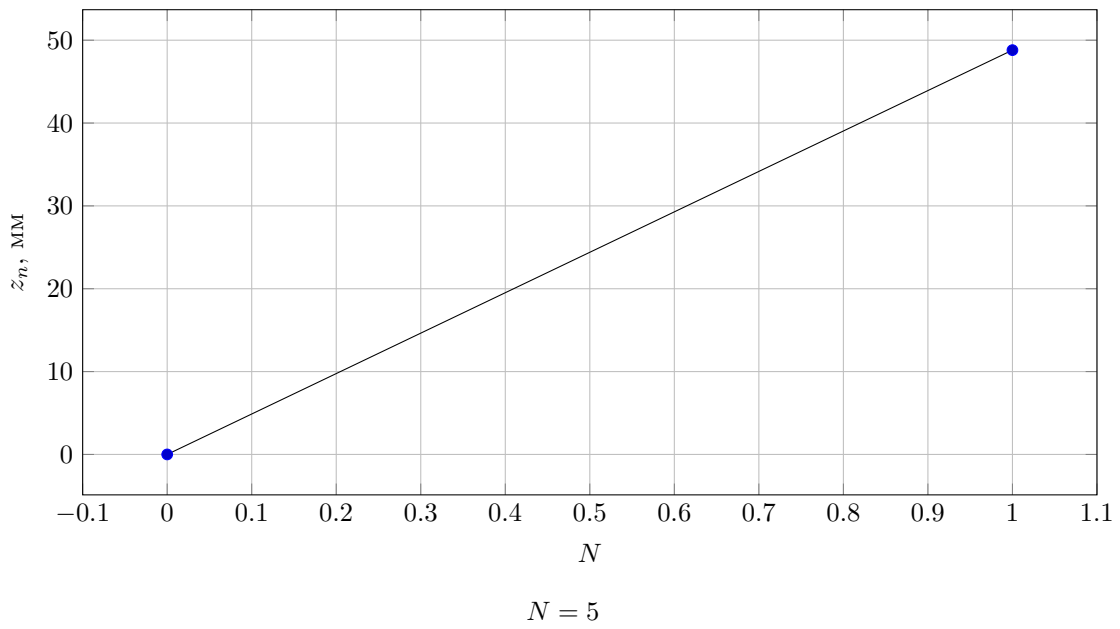
Построим графики $z_n = f(N)$:



$N = 3$



$N = 4$



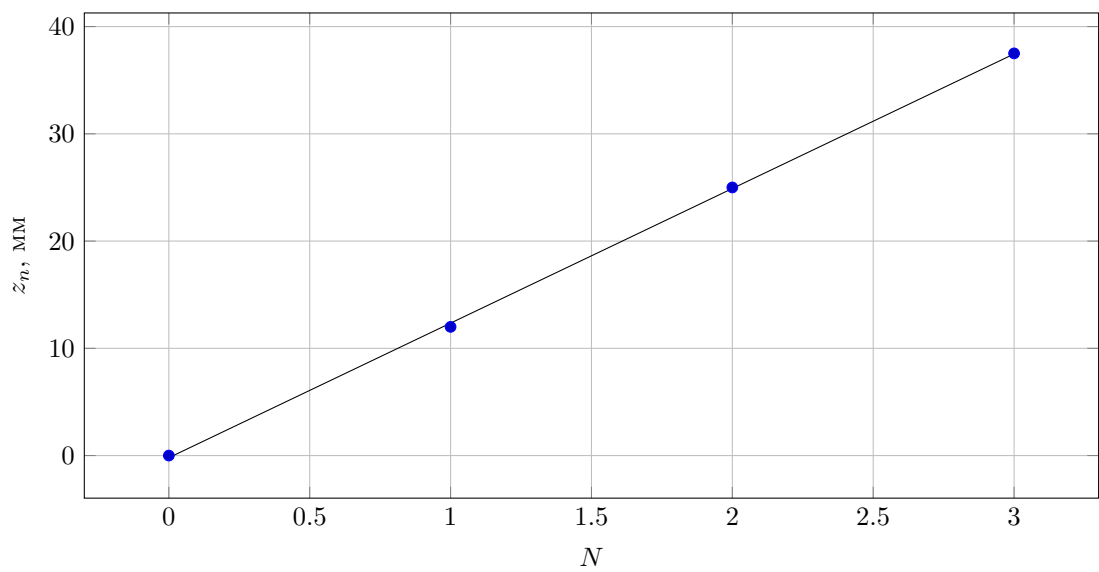
Отсюда получим:

$$z_n = \frac{2d^2}{\lambda} N \Rightarrow d = \sqrt{\frac{\lambda \cdot z_n}{2 \cdot N}} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot (dz_n/dN)}{2}}$$

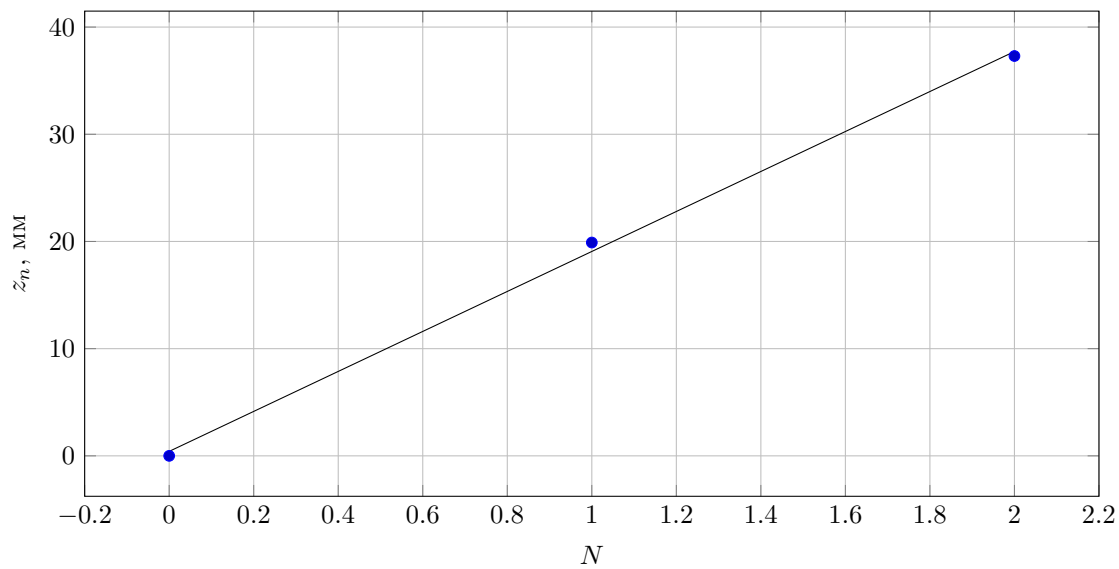
N	$d_{\text{реп, мм}}$
3	0.04
4	0.09
5	0.12

Измерим плоскости саморепродукции для решеток мира:

25			20		
N	z , мм	z_n , мм	N	z , мм	z_n , мм
0	100	0	0	100	0
1	88.0	12.0	1	80.1	19.9
2	75.0	25.0	2	62.3	37.3
3	62.5	37.5			



25



20

Отсюда:

d_{25} , мм	d_{20} , мм
0.04	0.06

Также определим d по измерению спектра:

25				20			
m	mX , мм	X , мм	d , мм	m	mX , мм	X , мм	d , мм
15	280	18.7	0.04	20	274	13.7	0.05

Таким образом, в данной лабораторной работе мы изучили явление саморепродукции и применение его к измерению параметров периодических структур.