Работа 3.6.1.

Спектральный анализ электрических сигналов.

Корнеев Е.С.

Спектральный анализ электрических сигналов.

Цель работы: изучение спектрального состава периодических электрических сигналов.

Оборудование: анализатор спектра СК4-56, генератор прямоугольных импульсов Г5-54, генератор сигналов специальной формы Г6-34, осциллограф С1-76.

Многие физические процессы можно моделировать с помощью линейных дифференциальных уравнений. К решениям таких уравнений применим принцип суперпозиции: разнообразные сложные явления удобно представлять в виде суммы простых решений линейных уравнений. Для линейных уравнений такими простыми решениями являются гармонические функции. Математическая теория представления сложных функций в виде сумм гармонических составляющих получила название теории рядов и интегралов Фуръе.

В радиотехнике широко используется разложение сложных сигналов на гармонические колебания различных частот ω. Функция $F(\omega)$, описывающая зависимость амплитуды гармоник от их частоты, называется *амплитудной спектральной характеристикой* - спектром исходного сигнала. Представление сложного периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов в математике называется разложением в ряд Фуръе. Непериодические сигналы представляются в виде интеграла Фурье.

Пусть заданная функция $f(t)$ периодически повторяется с частотой $\Omega_1 = 2\pi/T$, где T - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty}[a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_2 t)] \tag{1}$$

или

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega_1 t - \psi_n). \tag{2}$$

где $a_0/2 = A_0/2$ - среднее значение $f(t)$, a_n и b_n - амплитуды членов разложения, определяющиеся по формулам

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\cos(n\Omega_1 t)dt,$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} f(t)\sin(n\Omega_1 t)dt,$$

точку t_1 можно выбрать произвольно. При этом между коэффициентами существует следующая связь:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad \psi_n = \arctan\frac{b_n}{a_n}$$

Таким образом, видно, что сигнал раскладывается в сумму сигналов с частотами Ω_1, $2\Omega_1$, $3\Omega_1$, и т.д. Представляя $\cos\alpha$ в виде

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

и подставляя в (2):

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-i\psi_n} e^{in\Omega_1 t} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\psi_n} e^{-in\Omega_1 t}\right)$$

Вводя комплексные амплитуды

$$\widetilde{A_n} = A_n e^{-i\psi_n}; \quad \widetilde{A_{-n}} = A_n e^{i\psi_n}; \quad \widetilde{A_0} = A_0 \tag{3}$$

получим

$$f(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widetilde{A_n} e^{in\Omega_1 t} \tag{4}$$

Видно, что введение отрицательных частот $(-n\Omega_1)$ позволяет записать разложение Фурье простым способом. (3) обеспечивают действительность суммы (4): каждой частоте $k\Omega_1$ соответствует в (2) один член $(n = k)$, а в (4) - два $(n = k$ и $n = -k)$. Формулы (3) позволяют переходить от комплексного представления и обратно.

Для рассчета комплексных амплитуд умножим левую и правую части (4) на $e^{-ik\Omega_1 t}$ и проинтегрируем за период, например, от 0 до $2\pi/\Omega_1$. В правой части обнулятся все члены, кроме $n = k$, дающего $A_k T/2$. Поэтому

$$A_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t) e^{-ik\Omega_1 t} dt.$$

Теперь рассмотрим функции, исследуемые в работе.

Периодическая последовательность прямоугольных сигналов с амплитудой V_0, длительностью τ, частотой повторения $f_{\text{повт}} = 1/T$, где T - период повторения импульсов.

Найдем среднее значение:

$$\langle V\rangle = \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0 dt = V_0\frac{\tau}{T}$$

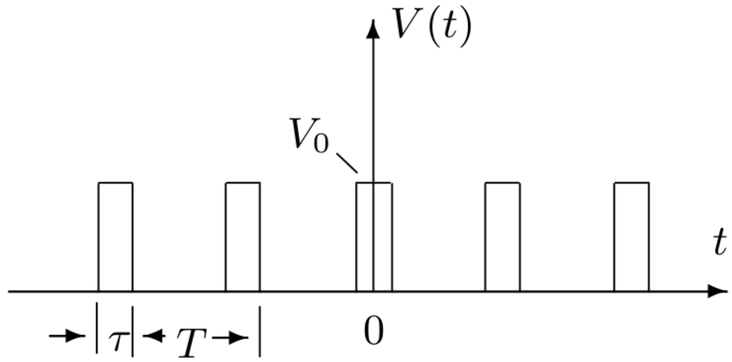


Рис. 1: Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

Амплитуды косинусных составляющих будут равны

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0\cos(n\Omega_1 t)dt = 2V_0\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\Omega_1\tau/2)}{n\Omega_1\tau/2} \sim \frac{\sin(x)}{x}$$

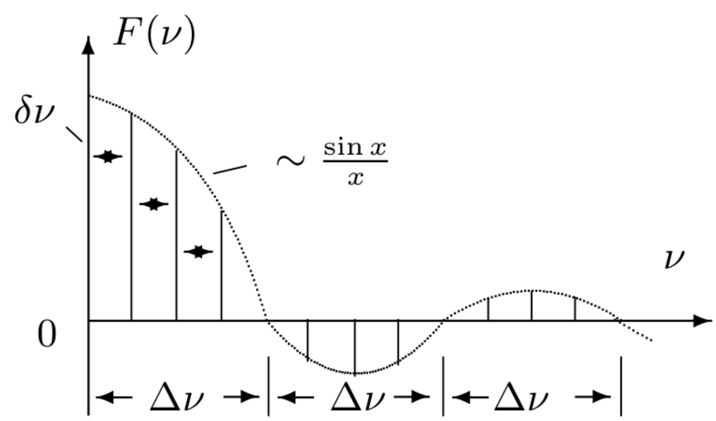


Рис. 2: Спектр периодической последовательности прямоугольных импульсов

Поскольку функция четная, все амплитуды синусоидальных гармоник будут нулевыми. Амплитуды гармоник меняются по закону $\frac{\sin(x)}{x}$. На графике изображен случай, когда T крастно τ. Назовем шириной спектра $\Delta\nu$ расстояние от первого максимума, возникающего от главного максимума до первого нуля, возникающего при $\Omega_1 = 2\pi/T$. При этом $\Delta\omega\tau \approx 2\pi$, или $\Delta\nu\Delta t \approx 1$.

Периодическая последовательность цугов гармонического колебания $V_0\cos(\omega_0 t)$ с длительностью цуга τ и периодом повторения T.

Функция также симметричная относительно $t = 0$. Амплитуда $n-$й гармоники определяется выражением

$$A_n = a_n = \frac{2}{T}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} V_0\cos(\omega_0 t)\cdot\cos(n\Omega_1 t)dt =$$

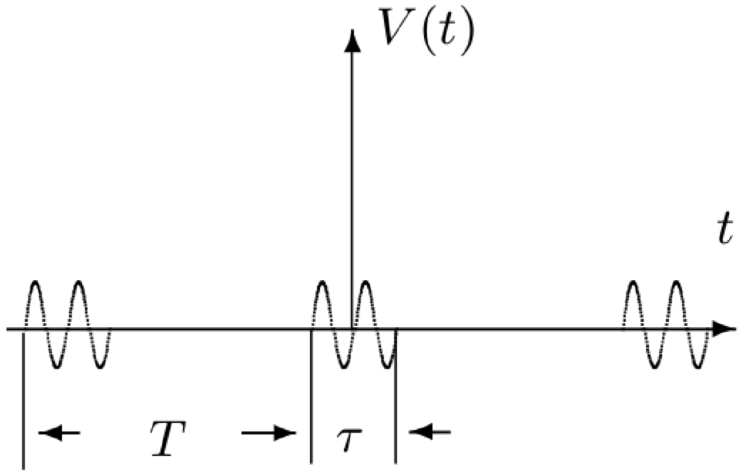


Рис. 3: Периодическая последовательность цугов

$$= V_0 \frac{\tau}{T} \left(\frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right)$$

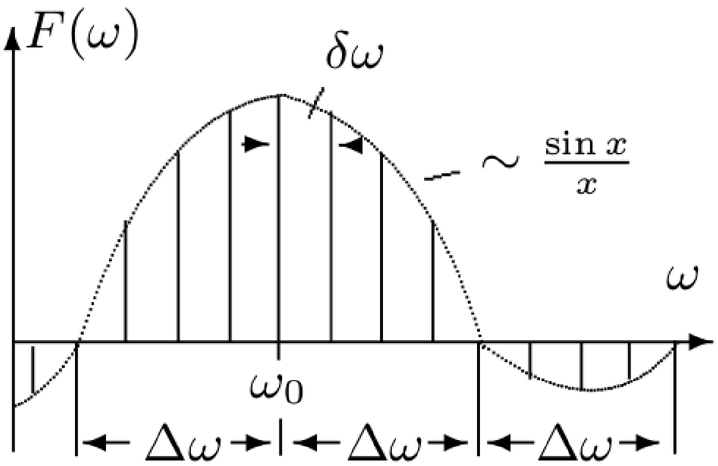


Рис. 4: Спектр периодической последовательности цугов

Такое спектральное распределение $F(\omega)$ для случая, когда T кратно τ, представлено на рис. 5. Сравнивая этот график с аналогичным для прямоугольных импульсов, видим, что они аналогичны, но максимумы сдвинуты на почастоте на ω_0.

Амплитудно-модулированные сигналы. Рассмотрим гармонические колебания частоты ω_0, амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой Ω ($\Omega \ll \omega_0$):

$$f(t) = A_0[1 + m\cos(\Omega t)]\cos(\omega t) \tag{5}$$

Коэффициент m называется глубиной модуляции. При $m < 1$ амплитуда ко-

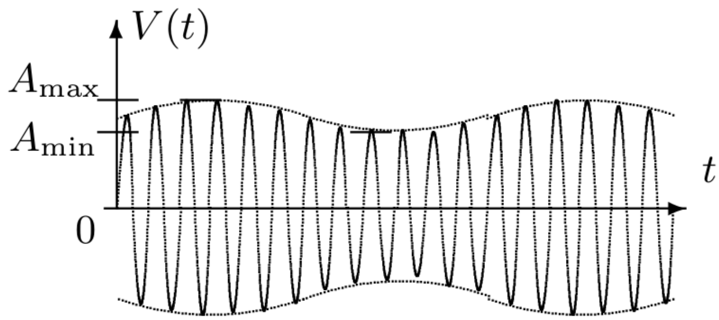


Рис. 5: Гармонические колебания, модулированные по амплитуде

лебаний меняется от минимальной $A_{min} = A_0(1-m)$ до максимальной $A_{max} = A_0(1+m)$. Глубина модуляции может быть представлена в виде

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

Преобразовывая уравнение (5), получим спектр:

$$f(t) = A_0\cos(\omega_0 t) + A_0 m\cos(\Omega t)\cos(\omega_0 t) =$$
$$= A_0\cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega+\Omega)t + \frac{A_0 m}{2}\cos(\omega-\Omega)t$$

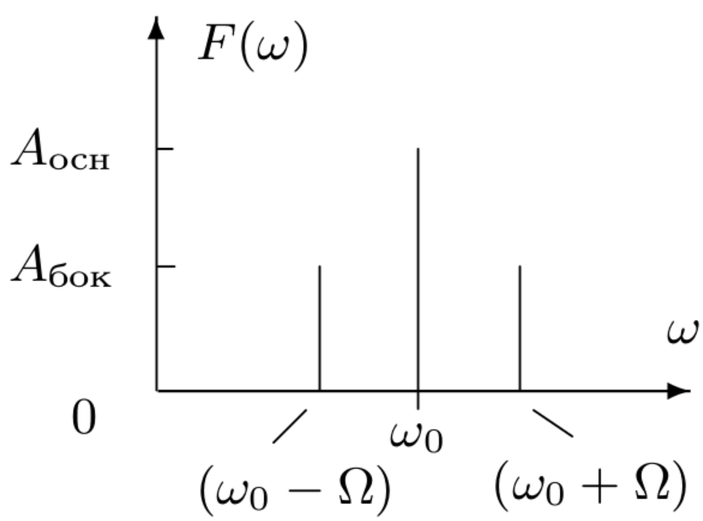


Рис. 6: Спектр гармонических колебания, модулированных по амплитуде

Спектр $F(\omega)$ таких колебаний содержит три составляющих. Основная компонента представляет собой исходное немодулированное колебание с несущей частотой ω_0 и амплитудой $A_{\text{осн}} = A_0$ - первое слагаемое в правой части последнего уравнения. Боковые компоненты спектра соответствуют гармоническим колебаниям с частотами $(\omega_0 + \Omega)$ и $(\omega_0 - \Omega)$ - второе и третье слагаемые. Амлитуды этих колебаний одинаковы и составляют $m/2$ от амплитуды немодулированного сигнала: $A_{\text{бок}} = A_0 m/2$.

А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов

Экспериментальная установка.

Схема для исследования спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов представлена на рис. 7. Сигнал с выхода генератора прямоугольных импульсов Г5-54 подаётся на вход анализатора спектра и одновременно - на вход У осциллографа. С генератора импульсов на осциллограф подаётся также сигнал синхронизации, запускающий ждущую развёртку осциллографа. При этом на экране осциллографа можно наблюдать саму последовательность прямоугольных импульсов, а на экране ЭЛТ анализатора спектра - распределение амплитуд спектральных составляющих этой последовательности.

В наблюдаемом спектре отсутствует информация об амплитуде нулевой гармоники, т. е. о величине постоянной составляющей; её местоположение (начало отсчёта шкалы частот) отмечено небольшим вертикальным выбросом.

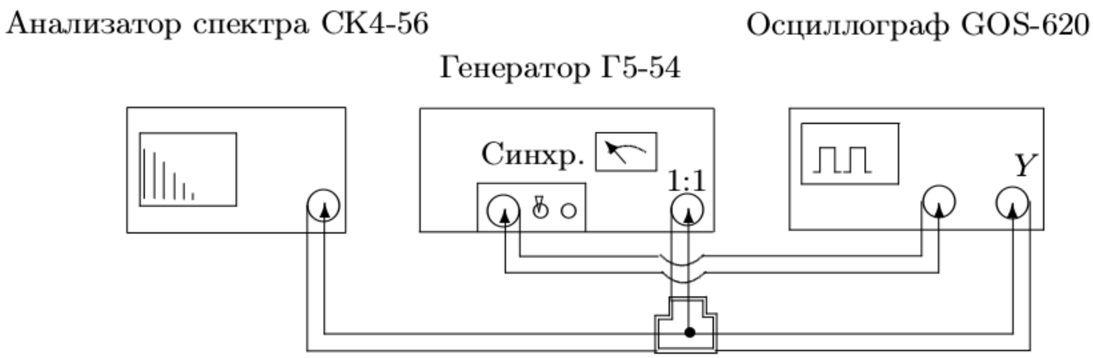


Рис. 7: Схема для исследования периодической последовательности приямоугольных импульсов

Ход работы:

1. Получим на экране спектр импульсов с параметрами $f_{\text{повт}} = 10^3$ Гц; $\tau = 25$ мкс. Первый ноль амплитуды наблюдается ни $\nu = 10$ кГц. При увеличении τ вдвое мы наблюдаем уменьшение нуля амплитуды до 5 кГц, при увеличении $f_{\text{повт}}$ вдвое ноль не меняется, зато возрастает аплитуда сигнала.

2. Снимем зависимость ширины спектра $\Delta\nu$ от длительности импульса τ:

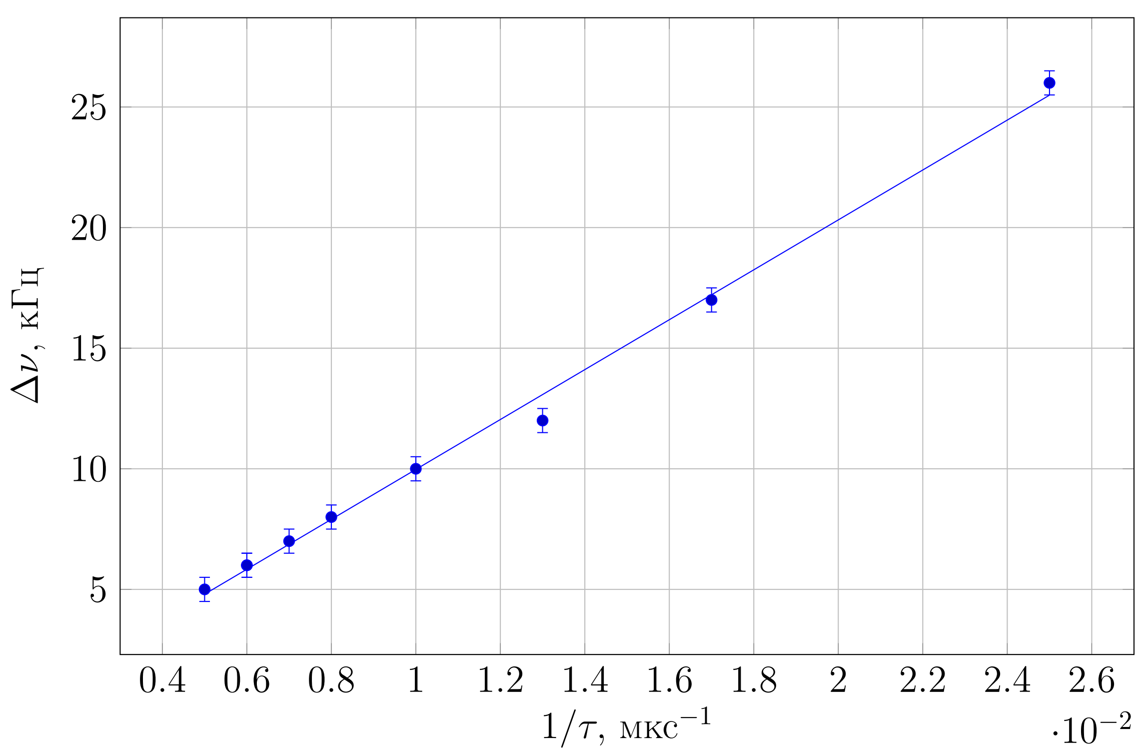
τ, мкс	$\Delta\nu$, кГц	$1/\tau$, мкс$^{-1}$
40.0	26.0	0,025
60.0	17.0	0,017
80.0	12.0	0,013
100.0	10.0	0,010
120.0	8.0	0,008
140.0	7.0	0,007
160.0	6.0	0,006
180.0	6.0	0,006
200.0	5.0	0,005

В данном случае примем погрешность σ_τ равной 0.1 мкс, так как мы имеем возможность выставлять τ на генераторе с точностью до десятых. Соответственно, погрешность $1/\tau$ будет пренебрежимо мала, т.к., вычисленная по формуле

$$\sigma_{1/\tau} = \frac{1}{\tau} \cdot \varepsilon_\tau,$$

она составляет доли процентов от величины, и в данном случае может не учитываться, так как она на два порядка меньше, чем порядок значащих цифр. Погрешность σ_ν примем равной 0.5 кГц, так как деления на шкале спектрометра на экране не позволяют измерять с большей точностью.

Таким образом, можем построить график $\Delta\nu(1/\tau)$:

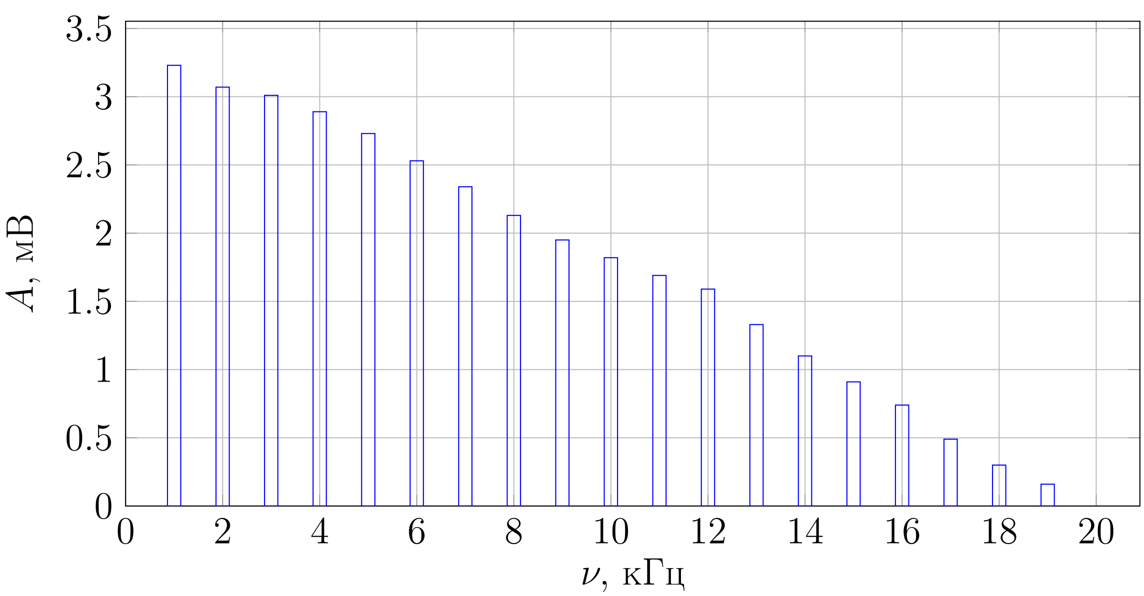


Из графика определим угол наклона: $\frac{\Delta(\Delta\nu)}{\Delta(1/\tau)} = 1,0$. Полученное значение совпадает с теоретическим, ожидаемым значением.

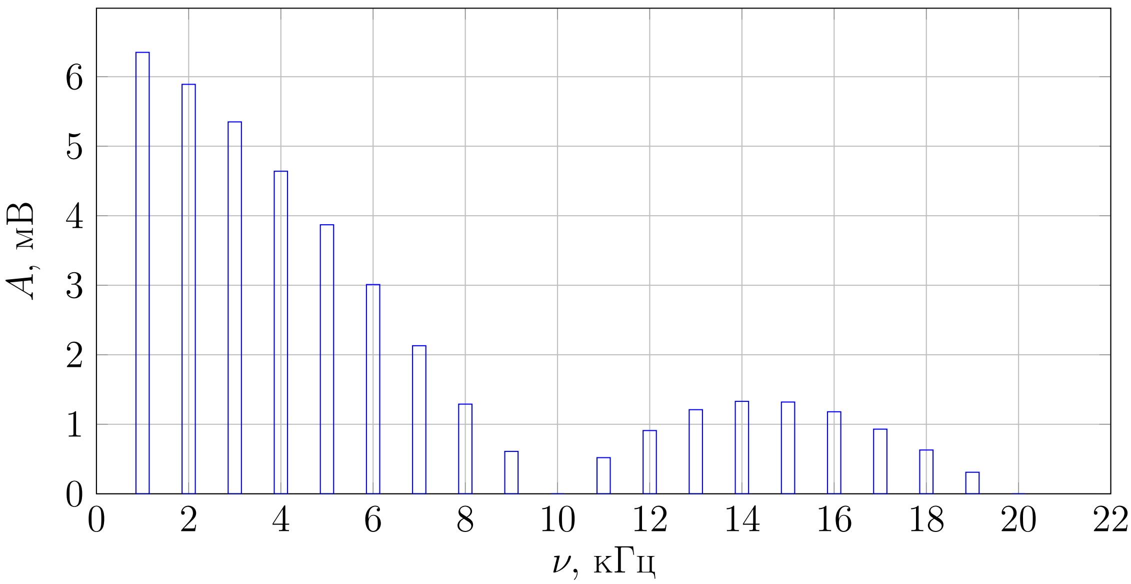
3. Снимем зависимость частот и амплитуд от номера гармоник для двух значений τ: $\tau = 50$ мкс и $\tau = 100$ мкс:

$\tau = 50$ мкс			$\tau = 100$ мкс		
N	ν, кГц	A, мВ	N	ν, кГц	A, мВ
1	1	3,23	1	1	6,35
2	2	3,07	2	2	5,89
3	3	3,01	3	3	5,35
4	4	2,89	4	4	4,64
5	5	2,73	5	5	3,87
6	6	2,53	6	6	3,01
7	7	2,34	7	7	2,13
8	8	2,13	8	8	1,29
9	9	1,95	9	9	0,61
10	10	1,82	10	10	0,00
11	11	1,69	11	11	0,52
12	12	1,59	12	12	0,91
13	13	1,33	13	13	1,21
14	14	1,10	14	14	1,33
15	15	0,91	15	15	1,32
16	16	0,74	16	16	1,18
17	17	0,49	17	17	0,93
18	18	0,30	18	18	0,63
19	19	0,16	19	19	0,31
			20	20	0,00

По значениям восстановим графики, полученные на спектрографе:



$\tau = 50$ мкс



$\tau = 100$ мкс

Здесь погрешности примем равными $\sigma_A = 0.02$ мВ, так как в этих пределах колебались значения, снимаемые с экрана. Погрешность $\sigma_\nu = 0.5$ кГц, так как сетка идет с шагом 1кГц.

Б. Исследование спектра периодической последовательности цугов гармонических колебаний

Экспериментальная установка.

Исследование спектра периодически чередующихся цугов гармонических колебаний проводится по схеме, изображённой на рис. 8. Генератор Гб-З4 вырабатывает синусоидальные колебания высокой частоты. На вход АМ (амплитудная модуляция) генератора Гб-З4 подаются прямоугольные импульсы с генератора Г5-54 и синусоида модулируется - «нарезается» на отдельные куски - цуги. Эти цуги с выхода генератора Гб-З4 поступают на вход спектроанализатора и одновременно на вход У осциллографа. Сигнал синхронизации подаётся на вход X осциллографа с генератора импульсов.

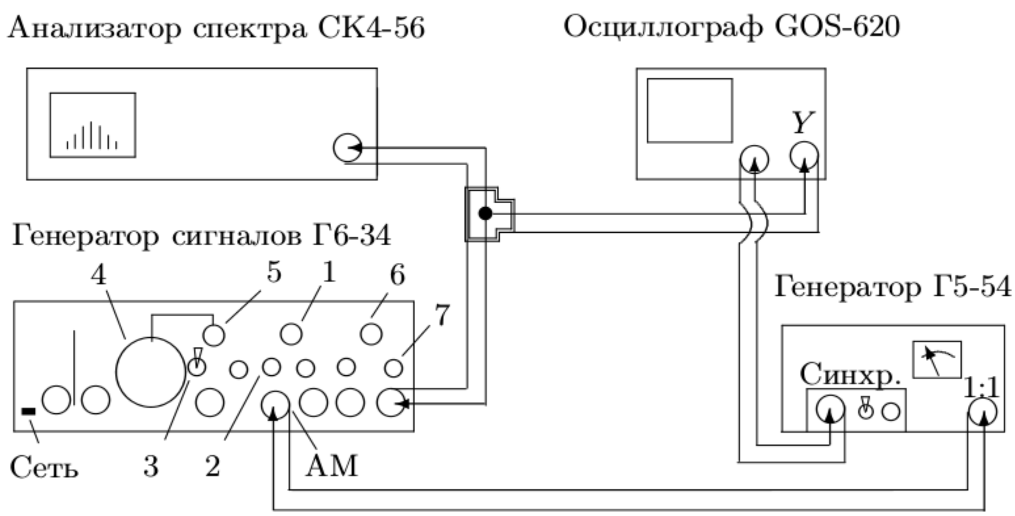


Рис. 8: Схема для исследования периодической последовательности цугов высокочастотных колебаний

Ход работы:

1. Установим длительность импульсов равной $\tau = 100$ мкс, затем $\tau = 200$ мкс. При этом резко возрастает амплитуда сигнала, а $\Delta\nu$ уменьшается с 10 до 5 кГц.

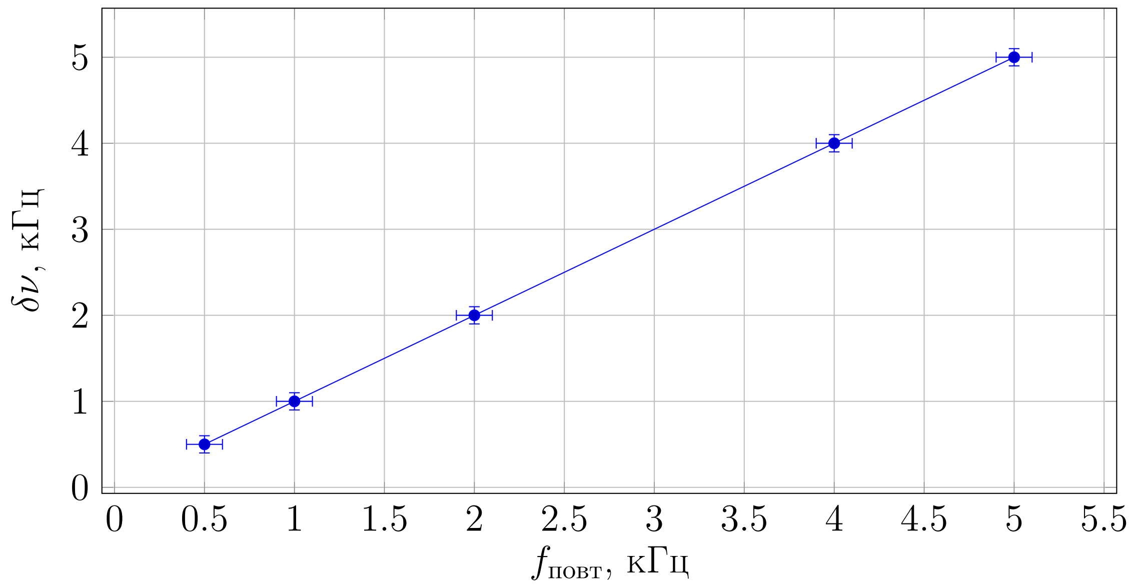
2. Установим длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Меняя несущую частоту ν_0, увидим, что значениям 10, 25 и 40 кГц соответствуют максимумы амплитуд, достигающиеся на частотах 9, 24 и 39 кГц. При этом $\Delta\nu$ остается примерно одной и той же.

3. Установим значение несущей частоты $\nu_0 = 30$ кГц, длительность импульса $\tau = 100$ мкс. Найдем $\delta\nu$ для нескольких частот повторений $f_{\text{повт}}$:

$f_{\text{повт}}$, кГц	0.5	1.0	2.0	4.0	5.0
$\delta\nu$, кГц	0.5	1.0	2.0	4.0	5.0

Погрешности $\sigma_{\delta\nu}$ и $\sigma_{f_{\text{повт}}}$ примем равными 0.1 кГц и 0.1 кГц соотвественно.

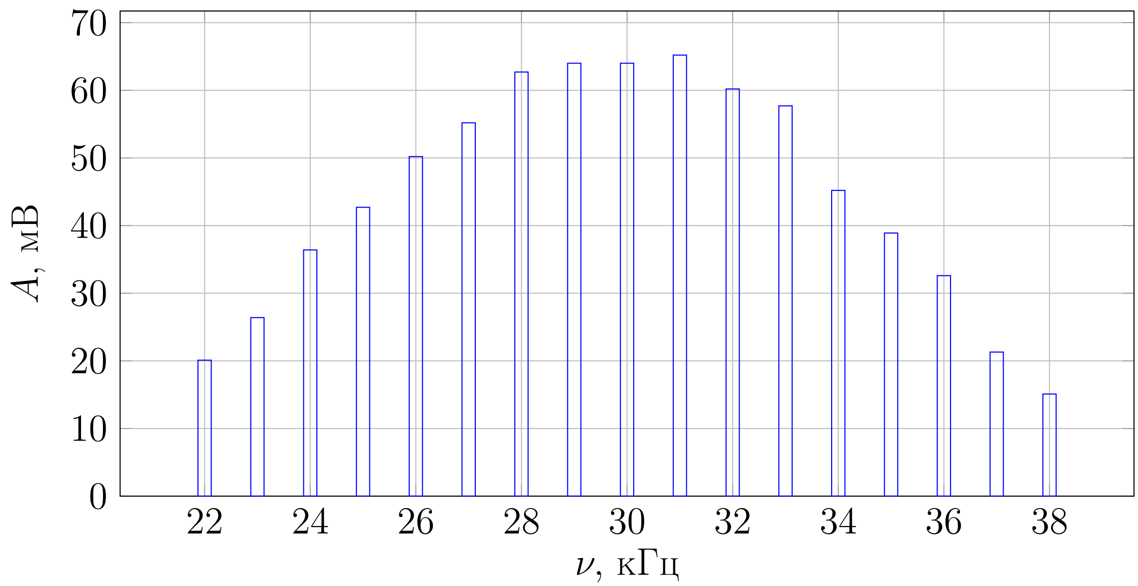
Построим график $\delta\nu(f_{\text{повт}})$:



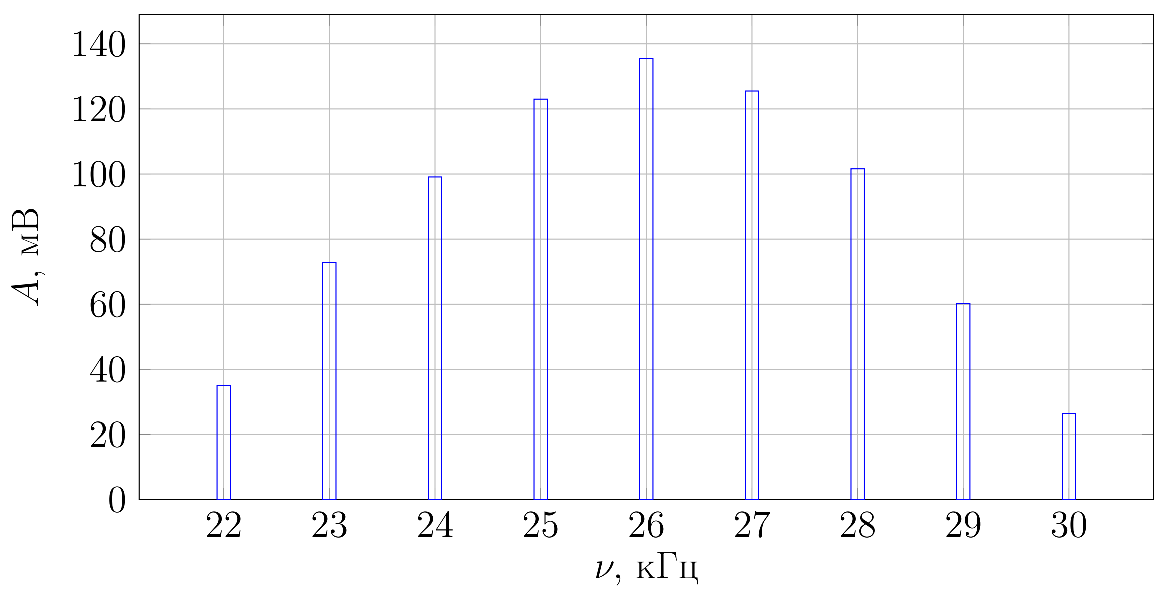
Установим $\tau = 100$ мкс и снимем зависимость амплитуд и частот для различных гармоник для частот $f_{\text{повт}} = 1$ кГц и $f_{\text{повт}} = 2$ кГц:

$f_{\text{повт}} = 1$ кГц			$f_{\text{повт}} = 2$ кГц		
N	ν, кГц	A, мВ	N	ν, кГц	A, мВ
22	22	20,1	22	22	35,1
23	23	26,4	23	24	72,8
24	24	36,4	24	26	99,1
25	25	42,7	25	28	123,0
26	26	50,2	26	30	135,5
27	27	55,2	27	32	125,5
28	28	62,7	28	34	101,6
29	29	64,0	29	36	60,2
30	30	64,0	30	38	26,4
31	31	65,2			
32	32	60,2			
33	33	57,7			
34	34	45,2			
35	35	38,9			
36	36	32,6			
37	37	21,3			
38	38	15,1			

Восстановим графики, полученные на спектрометре:



$f_{повт} = 1кГц$



$f_{повт} = 2кГц$

СРАВНИТЬ ЧТО-ТО ТАМ

В. Исследование спектра гармонических колебаний, модулированных по амплитуде

Экспериментальная установка.

Схема для исследования амплитудно-модулированного сигнала представлена на рис. 9. Модуляционный генератор встроен в левую часть генератора сигналов Г6-34. Синусоидальный сигнал с частотой модуляции $f_{\text{мод}} = 1$ кГц подаётся с модуляционного генератора на вход АМ (амплитудная модуляция) генератора, вырабатывающего синусоидальный сигнал высокой частоты (частота несущей $\nu_0 = 25$ кГц). Амплитудно-модулированный сигнал с основного выхода генератора поступает на осциллограф и на анализатор спектра.

Рис. 9: Схема для исследования спектра высокочастотного гармонического сигнала, промодулированного по амплитуде низкочастотным гармоническим сигналом

Ход работы:

Снимем зависимость A_{max}, A_{min}, $A_{\text{осн}}$, $A_{\text{бок}}$ от размаха сигнала A_0. Также определим глубину модуляции m по формуле

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}}$$

и найдем зависимость отношения $A_{\text{бок}}/A_{\text{осн}}$.

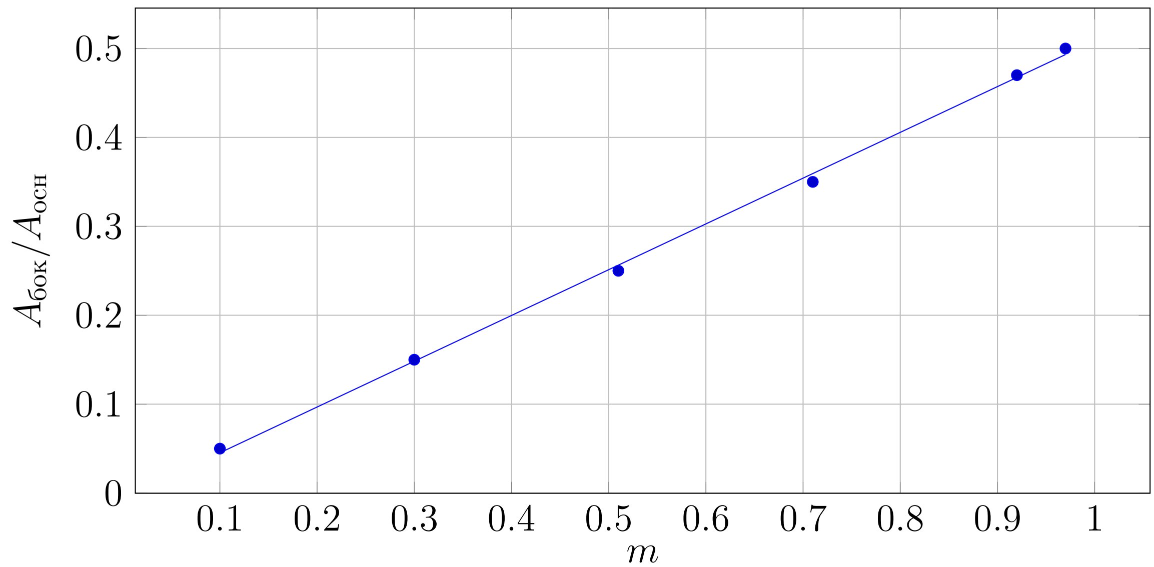
Погрешности амплитуд примем равными 0.2 мВ, так как в этих пределах колебались графики на экране. Погрешностью A_0 на этом фоне можно пренебречь. Тогда из формул видно, что

$$\sigma_m = \langle m \rangle \cdot (\varepsilon_- + \varepsilon_+)$$

Данную погрешность можно не учитывать, так как она на несколько порядков меньше порядка значащих цифр m. Погрешностью отношения частот можно пренебречь по тем же причинам.

A_0, В	A_{max}, мВ	A_{min}, мВ	$A_{осн}$, мВ	$A_{бок}$, мВ	m	$A_{бок}/A_{осн}$
0,2	545,8	443,0	323,1	15,7	0,10	0,05
0,6	643,7	350,1	323,1	48,9	0,30	0,15
1,0	741,6	242,2	323,1	80,9	0,51	0,25
1,4	849,5	144,3	323,7	114,2	0,71	0,35
1,8	944,8	41,5	320,6	149,3	0,92	0,47
2,0	981,9	15,8	313,7	165,2	0,97	0,50

Построим график $A_{бок}/A_{осн}(m)$:



Определим угловой коэффициент: $\frac{\Delta(A_{бок}/A_{осн})}{\Delta m} = 0.5$. Полученное значение совпадает с ожидаемым теоретическим, т.к. мы ожидали получить отношение, равное 1/2.

Меняя частоту модуляции при $m = 1$, видим, что при увеличении частоты модуляции увеличивается $\delta\nu$.