

## Работа 4.3.6.

# Саморепродукция

*Корнеев Е.С.*

# Саморепродукция

**Цель работы:** Изучение явления саморепродукции и применение его к измерению параметров периодических структур.

**Оборудование:** лазер, кассета с сетками, мира, короткофокусная линза с микрометрическим винтом, экран, линейка.

При дифракции на предмете с периодической структурой наблюдается интересное явление: на некотором расстоянии от предмета вдоль направления распространения волны появляется изображение, которое потом периодически повторяется — *репродуцируется*.

Этот эффект имеет простое физическое объяснение. Если на пути распространения плоской волны в плоскости  $z = 0$  расположить транспарант (например, изображение предмета на фотоплёнке или стеклянной пластинке) с функцией пропускания, отличной от константы, то на выходе из него в плоскости  $z = 0_+$  волна уже перестанет быть плоской. Если при этом функция пропускания транспаранта — периодическая функция координат, периодической функцией будет и комплексная амплитуда волны на выходе из транспаранта, т. е. в плоскости  $z = 0_+$ . Периодическому распределению комплексной амплитуды в плоскости  $z = 0_+$  будет соответствовать дискретный набор плоских волн с кратными пространственными частотами. При этом оказывается, что существуют плоскости (при  $z > 0$ ), где все плоские волны имеют те же самые фазовые соотношения, что и в плоскости  $z = 0_+$ . В результате интерференции этих волн получается изображение, тождественное исходному периодическому объекту.

Найдём выражение для расстояния между этими плоскостями. Напомним, что плоской монохроматической волной называется волна вида

$$E(\vec{r}, t) = a_0 e^{-i(\omega t - \vec{k}\vec{r} - \psi_0)} \quad (1)$$

где амплитуда  $a_0$  — действительная постоянная,  $\omega$  — круговая частота,  $\vec{k}$  — волновой вектор ( $|\vec{k}| = 2\pi/\lambda$ ),  $\psi_0$  — начальная фаза. Колебания происходят синфазно во всех точках плоскости:

$$\vec{k}\vec{r} = ux + vy + \sqrt{k^2 - u^2 - v^2} \cdot z = \text{const} \quad (2)$$

Направление распространения плоской монохроматической волны характеризуется волновым вектором  $\vec{k}$ , а  $u$  и  $v$  есть проекции его на оси координат  $x$  и  $y$  соответственно. В дальнейшем мы будем опускать зависимость от времени  $e^{-i\omega t}$  и использовать для описания монохроматической волны комплексную амплитуду.

Для плоской волны (1) комплексную амплитуду можно представить в виде

$$f(x, y, z) = a_0 e^{i\psi_0} e^{i(ux+vy)} e^{i\sqrt{k^2-u^2-v^2}z} = f(x, y, 0) \cdot e^{i\sqrt{k^2-u^2-v^2}z} \quad (3)$$

Таким образом, для того чтобы получить комплексную амплитуду плоской волны в произвольной плоскости  $z = \text{const}$ , надо ее значение в плоскости  $z = 0$  домножить на фазовый множитель  $e^{i\sqrt{k^2-u^2-v^2}z}$ .

Пусть плоская волна падает перпендикулярно на транспарант, расположенный в плоскости  $z = 0$ , тогда для падающей волны  $u = v = 0$ , и комплексная амплитуда волны на входе в транспарант является константой  $a_0 e^{i\psi_0}$ . Комплексную амплитуду волны в плоскости  $z = 0_+$  на выходе из транспаранта получаем, умножив комплексную амплитуду на входе в транспарант на функцию пропускания транспаранта  $t(x, y)$ . Это правило является определением понятия *функции пропускания транспаранта*. Если функция пропускания периодическая с периодом  $d$  (для простоты рассмотрим одномерный случай  $t(x, y) = t(x)$ ), то комплексная амплитуда на выходе из транспаранта  $a_0 e^{i\psi_0} t(x)$  также периодическая функция с тем же периодом  $d$ . Согласно теореме Фурье (доказываемой в курсе математического анализа) периодическая функция  $a_0 e^{i\psi_0} t(x)$  может быть представлена в виде ряда Фурье – суммы гармонических составляющих с кратными пространственными частотами  $u_n = 2\pi n/d$ :

$$f(x, 0_+) = a_0 e^{i\psi_0} t(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nu_n x) + b_n \sin(nu_n x)]$$

или в комплексной форме –

$$f(x, 0_+) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi}{d} n x} \quad (4)$$

Опираясь на теорему единственности решения волнового уравнения при заданных граничных условиях, мы можем утверждать, что периодическому распределению комплексной амплитуды в плоскости  $z = 0_+$  будет соответствовать при  $z > 0$  дискретный набор плоских волн с кратными пространственными частотами  $u_n$ . Как видно из (3), для плоской волны с пространственной частотой  $u_n$  волновой вектор  $\vec{k}$  имеет проекции  $u_n, 0, \sqrt{k^2 - u_n^2}$ . Разложение волны, продифрагировавшей на транспаранте, в ряд по плоским волнам позволяет легко найти комплексную амплитуду волны в произвольной плоскости  $z = \text{const}$ . Для этого достаточно домножить комплексные амплитуды плоских волн в суперпозиции (4) на соответствующий фазовый множитель  $\exp(i\sqrt{k^2 - u_n^2}z)$ :

$$f(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{iu_n x} e^{i\sqrt{k^2 - u_n^2}z} \quad (5)$$

Каждая плоская волна в суперпозиции (4) приобрела при распространении от транспаранта до плоскости наблюдения  $z = \text{const}$  набег фазы:

$$\varphi_n = \sqrt{k^2 - u_n^2} \cdot z$$

Для параксиальных волн ( $u_n \ll 1$ ):

$$\varphi_n \approx kz - \frac{u_n^2}{2k}z \quad (6)$$

и, таким образом, разность набегов фазы для любых двух плоских волн (с индексом  $n$  и  $m$ ) равна

$$\Delta\varphi_{n,m} = (u_m^2 - u_n^2) \frac{z}{2k} = (m^2 - n^2) \frac{\pi\lambda}{d^2} z \quad (7)$$

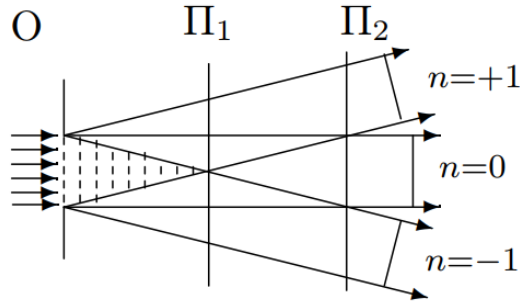


Рис. 1: Принципиальная схема дифракции на сетке. Между сеткой 0 и плоскостью  $\Pi_1$  наблюдаются репродуцированные изображения сетки

Легко видеть, что в плоскости наблюдения  $z_0 = 2d^2/\lambda$  разность фазовых набегов оказывается кратной  $2\pi$  для любых гармоник, входящих в состав суперпозиции (4), т.е. совпадают фазовые соотношения между колебаниями, которые создаются всеми плоскими волнами, входящими в состав суперпозиции (4) в предметной плоскости  $z = 0_+$  в плоскости изображения  $z_1 = 2d^2/\lambda$ . Поэтому в результате интерференции этих волн мы получаем изображение, тождественное исходному периодическому объекту. Описанное явление называется *эффектом саморепродукции*. Световая волна сама (без каких-либо линз или зеркал) создает изображение исходного объекта. Ясно, что все сказанное справедливо и для любого расстояния  $z_N$ , кратного  $z_1$ :

$$z_N = \frac{2d^2}{\lambda} N \quad (8)$$

На опыте, вследствие ограниченности поперечного сечения светового пучка лазера, наблюдаются только несколько репродуцированных изображений решетки. Поясним этот эффект с помощью рис. 1.

На нем изображены только три продифрагировавших луча соответственно нулевого ( $n = 0$ ) и  $\pm$  первого порядка ( $n = \pm 1$ ). Там, где эти лучи перекрыва-

ются, образуется интерференционная картина с периодом, как раз равным периоду решетки  $d$ . Спроектировав картину с помощью линзы на экран, мы увидим изображения синусоидальной решетки с плавным переходом от максимумов к минимумам. Для того чтобы наблюдать более тонкие детали, необходимо, чтобы в плоскости наблюдения перекрывались лучи более высоких дифракционных порядков. На краях, где перекрываются только два луча ( $n = 0$  и  $n = +1$  или  $n = 0$  и  $n = -1$ ), также образуется интерференционная картина с периодом  $d$ , но менее контрастная.

Таким образом, левее плоскости  $\Pi_1$  мы будем наблюдать, хотя и слегка размытые, репродуцированные изображения решетки. Правее плоскости  $\Pi_2$  репродуцированных изображений не будет.

**Экспериментальная установка.** Хорошим приближением к плоской волне в нашем эксперименте является излучение лазера. Луч лазера падает перпендикулярно на периодический объект  $O$ , установленный в плоскости  $P_0$  (рис. 2).

За плоскостью  $P_0$  (в плоскостях  $P_1 - P_N$ ) периодически по  $z$  возникают изображения объекта, которые с помощью линзы  $L$  можно поочерёдно проецировать на экран, установленный в плоскости  $\mathcal{E}$ . Если убрать линзу, то на экране наблюдается картина дифракции луча лазера на периодическом объекте.

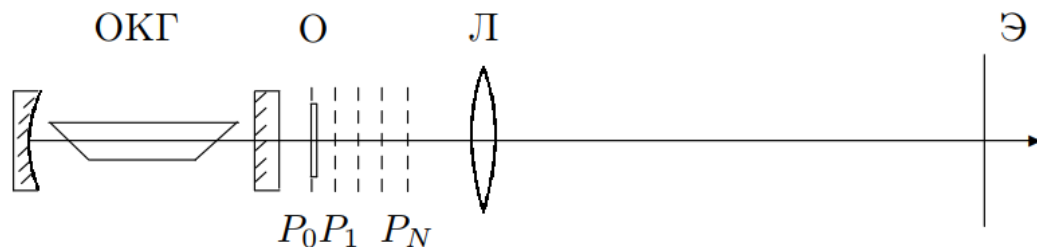


Рис. 2: Схема установки: ОКГ – гелий-неоновый лазер,  $O$  – двумерная решетка,  $P_N$  – плоскости, где наблюдаются репродуцированные изображения,  $L$  – короткофокусная линза,  $\mathcal{E}$  – экран для наблюдения изображения объекта

Экран устанавливается достаточно далеко от объекта, так что продифрагировавшие лучи, соответствующие различным порядкам дифракции ( $\sin \varphi_n = n\lambda/d$ ), разделяются.

Измерив расстояние между дифракционными максимумами и расстояние от объекта до экрана, мы определим  $\sin \varphi_n$  и  $d$ .

В нашей работе в качестве периодических объектов применяется мира – набор различным образом ориентированных одномерных решеток разного периода (рис. 4), а также двумерная решетка-сетка. Сетку можно рассматривать как две взаимно перпендикулярные решетки. Узкий пучок монохроматического света, пройдя через первую решетку с вертикальными штрихами, должен дать совокупность максимумов, расположенных вдоль горизонтальной линии.

Световой пучок, соответствующий каждому максимуму, проходя через вторую

решетку, распадается на новую совокупность пучков, дающих максимумы вдоль вертикальной линии. В результате главные максимумы возникают тогда, когда одновременно выполняются условия

$$d \sin \varphi_x = n_x \lambda, \quad d \sin \varphi_y = n_y \lambda \quad (9)$$

где  $n_x$  и  $n_y$  – два целых числа, характеризующих порядки дифракционных максимумов,  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$  – направления на главные дифракционные максимумы в горизонтальной и вертикальной плоскостях соответственно (рис. 3). Максимумы показаны кружками, размеры которых характеризуют интенсивность.

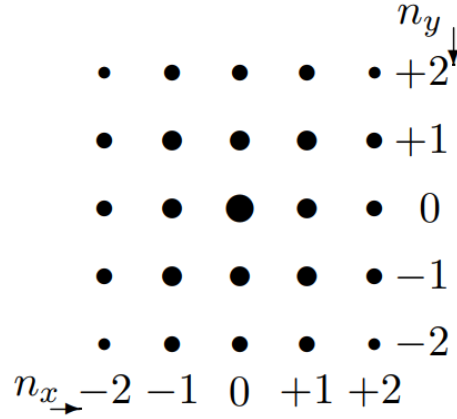


Рис. 3: Спектр решётки-сетки

### Ход работы.

1. Определим расстояние от кассеты до экрана. Получим  $135 \pm 2$  см.
2. Измерим расстояние между максимумами для различных решеток:

### ПЕРЕДЕЛАТЬ

$N$	$m$	$X$ , мм	$x$ , мм	$d$ , мкм
1	6	223	37.2	20
5	14	56	4.0	190
4	16	50	3.1	240
3	20	31	1.6	460

Зная, что  $d = \lambda/\varphi \approx \lambda/(x/L)$ , получим значения  $d$ .  $\lambda$  примем равной 550 нм.

3. Установим линзу. Измерим расстояния  $a$  и  $b$  от линзы до сетки и до экрана соответственно. Получим:  $a = 4$  см,  $b = 131$  см.

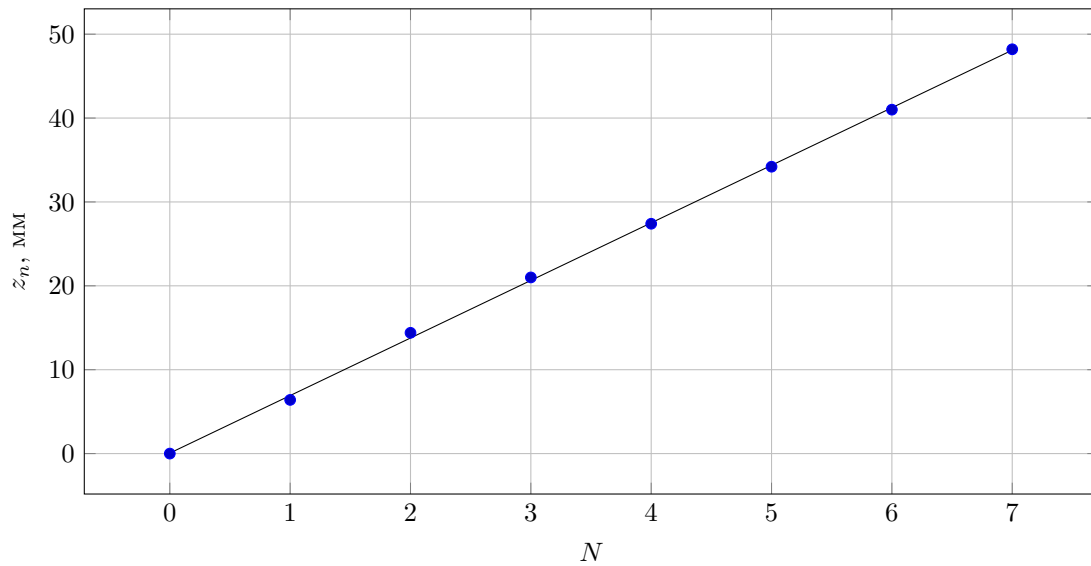
Определим размеры сеток на экране:

$N$	$m$	$mD$ , мм	$D$ , мм	$d_{\text{л}}$ , мм
5	14	56	4.0	0.12
4	16	50	3.1	0.09
3	20	31	1.6	0.05

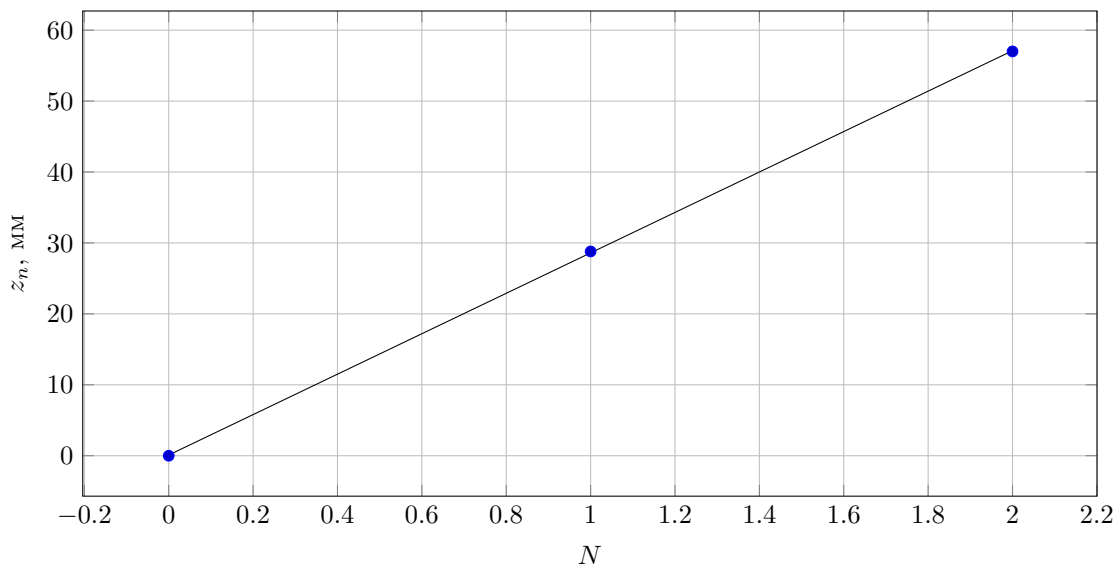
4. Перемещая линзу с помощью микрометрического винта, получим координаты плоскостей саморепродукции:

$N = 3$			$N = 4$			$N = 5$		
$z$ , мм	$n$	$z_n$ , мм	$z$ , мм	$n$	$z_n$ , мм	$z$ , мм	$n$	$z_n$ , мм
100	0	0	100	0	0	100	0	0
93.6	1	6.4	71.2	1	28.8	50.2	1	48.8
85.6	2	14.4	43.0	2	57.0			
79.0	3	21.0						
72.6	4	27.4						
65.8	5	34.2						
59.0	6	41.0						
51.8	7	48.2						

Построим графики  $z_n = f(N)$ :



$N = 3$



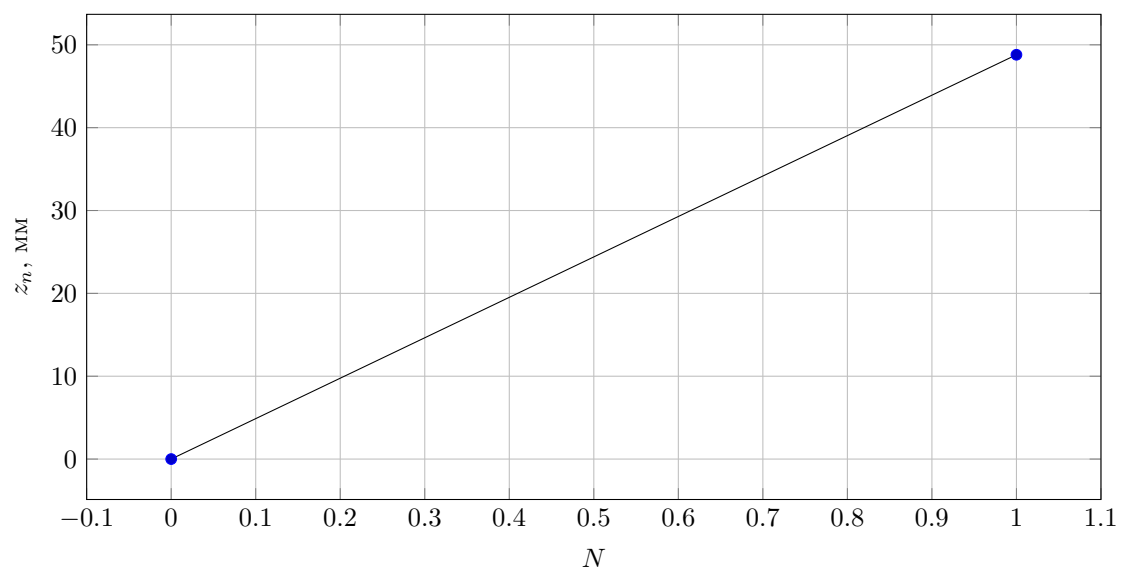
$N = 4$

Отсюда получим:

$$z_n = \frac{2d^2}{\lambda}N \Rightarrow d = \sqrt{\frac{\lambda \cdot z_n}{2 \cdot N}} = \sqrt{\frac{\lambda \cdot (dz_n/dN)}{2}}$$

$N$	$d_{\text{реп}}, \text{ мм}$
3	0.04
4	0.09
5	0.12





$N = 5$