Работа 1.4.4.

Исследование свободных колебаний связанных маятников

Корнеев Е.С.

Исследование свободных колебаний связанных маятников

Цель работы: изучение колебательной системы с двумя степенями свободы.

В работе используются: устновка с двумя одинаковыми математическими маятниками, бифилярно подвещенными на натянутую горизонтально струну, секундомер, измерительная линейка.

Свободные колебания связанных маятников. Рассмотрим простейшую модель с двумя степенями свободы — два одинаковых маятника, связанных пружиной и совершающих колебания в плоскости рисунка. Маятники представляют собой невесомые спицы с насаженными на них маленькими тяжелыми шариками.

Обозначения указаны на рисунке. Если углы отклонения маятника от положения равновесия достаточно малы ($\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1 - \varphi/2$), то со стороны пружины на первый маятник действует момент силы, равный

$$M_{21} = ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Аналогично второй маятник будет испытывать вращающий момент противоположного знака:

$$M_{12} = -ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Эти моменты описывают связь между маятниками.

Уравнения движения матяником имеют вид

$$ml^2\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -mgl\varphi_1 + ka^2(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1}$$

$$ml^2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -mgl\varphi_2 - ka^2(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{2}$$

Сложив эти два уравнения, находим

$$ml^2\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \varphi_2) = -mgl(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{3}$$

Вычитание (2) - (1) дает

$$ml^2\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 - \varphi_2) = -(mgl + 2ka^2)(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4}$$

Решения уравнений (1) и (2) имеют вид:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A\cos(\omega^+ t + \alpha) \tag{5}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = B\cos(\omega^- t + \beta) \tag{6}$$

$$\omega^+ = \sqrt{\frac{g}{l}},\ \omega^- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$$

где A, B, α, β - произвольные константы. Сладывая и вычитая (5) и (6), находим

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}A\cos(\omega^+ t + \alpha) + \frac{1}{2}B\cos(\omega^- t + \beta) \tag{7}$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}A\cos(\omega^+ t + \alpha) - \frac{1}{2}B\cos(\omega^- t + \beta) \tag{8}$$

Для угловых скоростей при этом имеем

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{1}{2}A\sin(\omega^+ t + \alpha) - \frac{1}{2}B\sin(\omega^- t + \beta) \tag{9}$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{2}A\sin(\omega^+ t + \alpha) + \frac{1}{2}B\sin(\omega^- t + \beta) \tag{10}$$

Проанализируем полученные решения.

Измерения проводятся на установке, изображенной на на рис. 1.

Один конец струны прикреплен к вертикальной стойке установки, а другой конец переброшен через неподвижный блок и натянут при помощи груза массы M. Точки струны A и B неподвижны. В точках C и D, которые делят расстояние между A и B на три равные части (каждая длиной a), подвешены одинаковые математические маятники массой m и длиной l. Каждый маятник подвешен на двух нитях в плоскости струны (бифилярно), чтобы колебания мятников проходили в плоскостях, перпендикулярных струне. Сила натяжения струны намного больше веса матяников ($M \gg m$). Вертикальная составляющая смещения струны никак не сказывается на движении маятников при малых отклонениях. Горизонтальная составляющая смещения струны, хоть она и мала по сравнению со смещениями маятников, осуществляет слабую связь между маятниками.

На рис. 2. показаны смещения точек C и D струны и отклонения маятников в вертикальной (рис. 2а) и горизонтальной (рис. 2б) плоскостях.

При небольших отклонениях маятников для силы натяжения подвеса маятника T имеем (рис. 2а)

$$mg \approx T \tag{1}$$

Для движения матяников в горизонтальном направлении (рис. 2)

$$m\ddot{x}_1 = -T\sin\varphi_1 \approx -T\frac{x_1 - x_3}{l} \approx -mg\frac{x_1 - x_3}{l} \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_2 = -T\sin\varphi_2 \approx -T\frac{x_2 - x_4}{l} \approx -mg\frac{x_2 - x_4}{l} \tag{3}$$

Связь между натяжением струны и натяжением подвеса получаем из рис. 2:

$$T\frac{x_1 - x_3}{l} = F\frac{x_3}{a} + F\frac{x_3 - x_4}{a} \tag{4}$$

$$T\frac{x_2 - x_4}{l} = F\frac{x_4}{a} + F\frac{x_4 - x_3}{a} \tag{5}$$

Введем безразмерный параметр

$$\sigma = \frac{T}{F}\frac{a}{l} = \frac{m}{M}\frac{a}{l} \tag{6}$$

который в нашем случае много меньше единицы (связь слабая). Тогда из (4) и (5) получаем

$$\sigma x_1 = (2+\sigma)x_3 - x_4, \quad \sigma x_2 = (2+\sigma)x_4 - x_3 \tag{7}$$

пренебрегая σ по сравнению с 2, получаем

$$x_3 = \sigma\frac{2x_1 + x_2}{3}, \quad x_4 = \sigma\frac{x_1 + 2x_2}{3} \tag{8}$$

Уравнения движения маятников примут вид

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{l}(1-\sigma)x_1 = \sigma\frac{g}{3l}(x_2 - x_1) \tag{9}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{g}{l}(1-\sigma)x_2 = \sigma\frac{g}{3l}(x_1 - x_2) \tag{10}$$