Работа 1.4.5.

Изучение колебаний струны

Корнеев Е.С.

Изучение колебаний струны

Цель работы: исследование зависимости частоты колебаний струны от величины натяжения, а также условий установления стоячей волны, получающейся в результате сложения волн, идущих в противоположных направлениях.

В работе используются: рейка со струной, звуковой генератор, постоянный магнит, разновесы.

Струной в акустике называют однородную тонкую гибкую упругую нить. Примерами могут служить сильно натянутый шнур или трос, струны гитары, скрипки и других музыкальных инструментов. В данной работе изучаются поперечные колебания стальной гитарной струны, натянутой горизонтально и закрепленной между двумя неподвижными зажимами.

Основное свойство струны — гибкость — обусловлено тем, что её поперечные размеры малы по сравнению с длиной. Это означает, что напряжение в струне может быть направлено только вдоль неё, и позволяет не учитывать изгибные напряжения, которые могли бы возникать при поперечных деформациях (то есть, при изгибе струны).

В натянутой струне возникает *поперечная упругость*, т.е. способность сопротивляться всякому изменению формы, происходящему без изменения обьема. При вертикальном смещении произвольного элемента струны, возникают силы, действующие на соседние элементы, и в результатте вся струна приходит в движение в вертикальной плоскости, т.е. возбуждение «бежит» по струне. Передача возбуждения представляет собой поперечные бегущие волны, распространяющиеся с некоторой скоростью в обе стороны от места возбуждения. В ненатянутом состоянии струна не обладает свойством поперечной упругости и поперечные волны на ней невозможны.

Рассмотрим гибкую однородную струну, в которой создано натяжение T, и получим дифференциальное уравнение, описывающее её малые поперечные свободные колебания. Отметим, что если струна расположена горизонтально в поле тяжести, величина T должна быть достаточна для того, чтобы в состоянии равновесия струна не провисала, т. е. сила натяжения должна существенно превышать вес струны.

Направим ось x вдоль струны в положении равновесия. Форму струны будем описывать функцией $y(x,t)$, определяющей её вертикальное смещение в точке x в момент времени t (рис. 1). Угол наклона касательной к струне в точке x относительно горизонтального направления обозначим как α. В любой момент этот угол совпадает с углом наклона касательной к графику функции (), то есть $tg\ a = \frac{\partial y}{\partial y}$.

Рассмотрим элементарный участок струны, находящийся в точке x, имеющий длину δx и массу $\delta m = \rho\delta x$, где ρ — погонная плотность струны (масса на единицу длины). При отклонении от равновесия на выделенный элемент действуют силы натяжения T_1 и T_2, направленные по касательной к струне. Их вертикальная составляющая будет стремиться вернуть рассматриваемый участок струны к положению равновесия, придавая элементу некоторое вертикальное ускорение $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$. Заметим, что угол α зависит от координат x вдоль струны и различен в точках приложения сил T_1 и T_2. Таким образом, второй закон Ньютона для вертикального движения элемента струны запишется в следующем виде:

$$\delta m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -T_1 \sin\alpha_1 + T_2 \sin\alpha_2 \tag{1}$$

Основываясь на предположении, что отклонения струны от положения равновесия малы, можно сделать ряд упрощений:

1. Длина участка струны в изогнутом состоянии практически равна длине участка в положении равновесия, поэтому добавочным напряжением вследствие удлинения струны можно пренебречь. Следовательно, силы T_1 и T_2 по модулю равны силе натяжения струны: $T_1 \approx T_2 \approx T$.

2. Углы наклона α малы, поэтому $tg\ \alpha \approx \sin\alpha \approx \alpha$ и, следовательно, можно положить $\alpha \approx \frac{\delta y}{\delta x}$.

Разделим обе части уравнения (1) на δx и перейдем к дифференциалам:

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T_2 \sin\alpha_2 - T_1 \sin\alpha_1}{\delta x} = T \frac{\partial a}{\partial x} \tag{2}$$

Подставим $\alpha = \frac{\partial y}{\partial x}$ и введем обозначение $u = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, что, как мы увидим далее, является скоростью распространения волн на струне, находим уравнение свободных малых поперечных колебаний струны:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \tag{3}$$

Уравнение (3) называется *волновым уравнением*. Кроме волн на струне, оно может описывать волновые процессы в самых разных системах, в том числе волны в сплошных средах (звук), электромагнитные волныи т.д.

Бегущие волны

Как показывается в математических курсах, общее решение дифференциального уравнения в частных производных (3) представимо в виде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями u:

$$y(x,t) = y_1(x-ut) + y_2(x+ut) \tag{4}$$

где u — скорость распространения волны, y_1 и y_2 — произвольные функции, вид которых определяется из начальных и граничных условий. При этом особый случай представляет случай гармонических волн:

$$y(x,t) = a\cos[k(x-ut)] + b\cos[k(x+ut)] = a\cos(\omega t - kx) + b\cos(\omega t + kx) \tag{5}$$

Выражение (5) представляет собой суперпозицию двух гармонических волн, бегущих навстречу друг другу со скоростью

$$u = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda \tag{6}$$

При этом длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, частота $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$. Величина $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ называется *волновым числом* или *пространственной частотой волны*.

Заметим, что формула (2) означает, что скорость распространения волны зависит только от силы натяжения струны T и погонной плотности ρ.

Собственные колебания струны. Стоячие волны

Найдем вид свободных колебаний струны с закрепленными концами. Пусть струна закреплена в точках $x = 0$ и $x = L$. Концы струны не колеблются, поэтому $y(0,t) = 0$ и $y(L,t) = 0$ для любых t. Используя (5), находим

$$y(0,t) = a\cos\omega t + b\cos\omega t = 0$$

откуда следует, что $a = -b$. Тогда после тригонометрических преобразований выражение (5) примет вид

$$y(x,t) = 2a\sin kx \cdot \sin\omega t \tag{7}$$

Колебания струны, описываемые функцией (7), называются *стоячими волнами*. Видно, что стоячая волна может быть получена как сумма (интерференция) двух гармонических бегущих волн, имеющих равную амплитуду и движущихся навстречу друг другу. Как видно из (7), точки струны, в которых $\sin kx = 0$, в любой момент времени неподвижны. Такие точки называются узлам. Остальные точки совершают в вертикальной плоскости гармонические колебания с частотой

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{u}{\lambda}$$

Амплитуда колебаний распределена вдоль струны по гармоническому закону: $y_0(x) = 2a \sin kx$. В точках, где $\sin kx = 1$, амплитуда колебаний максимальна — они называются *пучностями*. Между двумя соседними узлами все участки струны колеблются в фазе (их скорости имеют одинаковое направление), а при переходе через узел фаза колебаний меняется на π вследствие изменения знака $\sin kx$.

Используя второе граничное условие $y(L,t) = 0$ (точки крепления струны должны быть узлами стоячей волны), найдём условие образования стоячих волн на струне: $y(x,t) = 2a \sin kL \sin \omega t = 0$, откуда

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{\pi}{2}n, n \in N$$

Таким образом, стоячие волны на струне с закреплёнными концами могут образовываться только если на длине струны укладывается целое число полуволн:

$$L = \frac{\lambda}{2}n \tag{8}$$

Поскольку длина волны однозначно связана с её частотой, струна может колебаться только с определёнными частотами:

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, n \in N \tag{9}$$

Набор (спектр) разрешённых частот ν_n называют *собственными частотами* колебаний струны. Режим колебаний, соответствующий каждой из частот ν_n, называется собственной (или нормальной) *модой* колебаний (от англ. mode — режим). Произвольное колебание струны может быть представлено в виде суперпозиции её собственных колебаний. Наименьшая частота ν_n называется также *основным тоном* (или первой гармоникой), а остальные ($\nu_2 = 2\nu_1$, $\nu_3 = 3\nu_1$, ...) — *обертонами* (высшими гармониками). Термин «гармоника» иногда употребляется в обобщенном смысле — как элементарная составляющая сложного гармонического колебания.

На рис. 2 показана картина стоячих волн для $n = 1, 2, 3$. Заметим, что число n определяет число пучностей (но не узлов!) колеблющейся струны. Таким образом, спектр собственных частот струны определён её погонной плотностью ρ, силой натяжения T и длиной струны L (отдельно отметим, что собственные частоты не зависят от модуля Юнга материала струны).

Возбуждение колебаний струны

При колебаниях реальной струны всегда имеет место потеря энергии (часть теряется вследствие трения о воздух; другая часть уходит через неидеально закрепленные концы струны и т.д.). Поддержание незатухающих колебаний в струне может осуществляться точечным источником, в качестве которого в данной работе используется электромагнитный вибратор. При этом возникает необходимость переноса энергии от источника по всей струне.

Рассмотрим вопрос о передаче энергии по струне. В стоячей волне поток энергии вдоль струны отсутствует — колебательная энергия, заключенная в отрезке струны между двумя соседними узлами, не транспортируется в другие части струны. В каждом таком отрезке происходит периодическое (два- жды за период) превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно. Передача энергии между различными участками струны возможна только благодаря бегущим волнам, которые, однако, в рассмотренной выше идеальной модели струны не возникают. Парадокс снимается, если учесть, что из-за потерь энергии при отражении волны от концов не происходит полной компенсации падающей и отраженной волны, поэтому к стоячей волне на струне добавляется малая бегущая компонента — именно она служит «разносчиком» энергии по всей системе.

Для эффективной раскачки колебаний используется явление резонанса — вынуждающая частота ν должна совпадать с одной из собственных частот струны ν_n (9). Когда потери энергии в точности компенсируются энергией, поступающей от вибратора, колебания струны становятся стационарными и на ней можно наблюдать стоячие волны. Если потери энергии за период малы по сравнению с запасом колебательной энергии в струне, то искажение стоячих волн бегущей волной не существенно — наложение бегущей волны малой амплитуды на стоячую визуально приводит к незначительному «размытию» узлов.

Для достижения максимального эффекта от вибратора, его следует располагать вблизи узловой точки. Это можно показать из следующих элементарных соображений. Пусть вибратор, размещённый в точке x_0, способен раскачать соответствующий элемент струны до амплитуды A. Если частота вибратора близка к резонансной (т.е. собственной), то как следует из (7), амплитуда колебаний струны в пучности будет равна $2a = \frac{A}{\sin kx_0}$. Таким образом, максимальная раскачка струны достигается, если значение $\sin kx_0$ устремить к нулю, что и соответствует положениям узлов (из идеализированной модели струны следует, что при размещении вибратора в узле амплитуда колебаний устремится к бесконечности, однако в реальности она ограничивается силами трения и нелинейными эффектами). Заметим также, что при наблюдении стоячих волн важно, чтобы колебания происходили в одной (вертикальной) плоскости, т.е. были поляризованы. Кроме того, важно, чтобы колебания струны происходили с малой амплитудой, поскольку при сильном возбуждении нарушаются условия применимости волнового уравнения (3), и в опыте наблюдаются искажения, связанные с нелинейными эффектами.