Работа 1.4.4.

Исследование свободных колебаний связанных маятников

Корнеев Е.С.

Исследование свободных колебаний связанных маятников

Цель работы: изучение колебательной системы с двумя степенями свободы.

В работе используются: устновка с двумя одинаковыми математическими маятниками, бифилярно подвещенными на натянутую горизонтально струну, секундомер, измерительная линейка.

Свободные колебания связанных маятников. Теоретические основы. Рассмотрим простейшую модель с двумя степенями свободы — два одинаковых маятника, связанных пружиной и совершающих колебания в плоскости рисунка. Маятники представляют собой невесомые спицы с насаженными на них маленькими тяжелыми шариками.

Обозначения указаны на рисунке. Если углы отклонения маятника от положения равновесия достаточно малы ($\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1 - \varphi/2$), то со стороны пружины на первый маятник действует момент силы, равный

$$M_{21} = ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Аналогично второй маятник будет испытывать вращающий момент противоположного знака:

$$M_{12} = -ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Эти моменты описывают связь между маятниками.

Уравнения движения матяником имеют вид

$$ml^2\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -mgl\varphi_1 + ka^2(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{1}$$

$$ml^2\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -mgl\varphi_2 - ka^2(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{2}$$

Сложив эти два уравнения, находим

$$ml^2\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \varphi_2) = -mgl(\varphi_1 + \varphi_2) \tag{3}$$

Вычитание (2) - (1) дает

$$ml^2\frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 - \varphi_2) = -(mgl + 2ka^2)(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{4}$$

Решения уравнений (1) и (2) имеют вид:

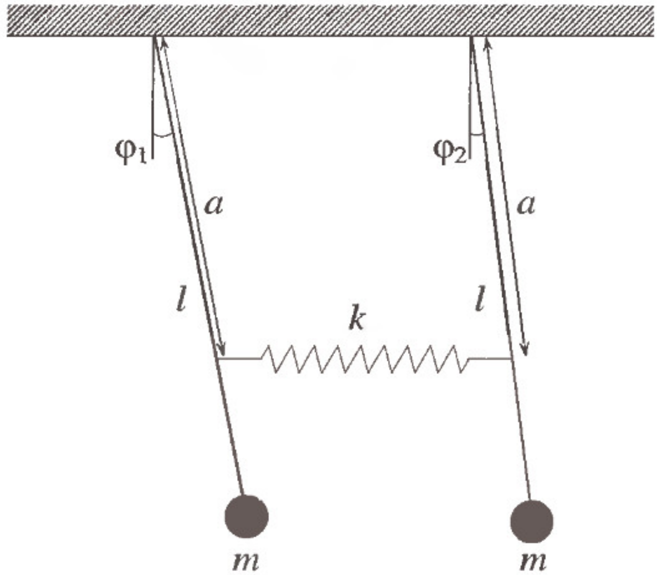

Рис. 1: Связанные маятники

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A\cos(\omega^+ t + \alpha) \quad (5)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = B\cos(\omega^- t + \beta) \quad (6)$$

$$\omega^+ = \sqrt{\frac{g}{l}},\ \omega^- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$$

где A, B, α, β - произвольные константы. Сладывая и вычитая (5) и (6), находим

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}A\cos(\omega^+ t + \alpha) + \frac{1}{2}B\cos(\omega^- t + \beta) \quad (7)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}A\cos(\omega^+ t + \alpha) - \frac{1}{2}B\cos(\omega^- t + \beta) \quad (8)$$

Для угловых скоростей при этом имеем

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{1}{2}A\sin(\omega^+ t + \alpha) - \frac{1}{2}B\sin(\omega^- t + \beta) \quad (9)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{2}A\sin(\omega^+ t + \alpha) + \frac{1}{2}B\sin(\omega^- t + \beta) \quad (10)$$

Проанализируем полученные решения. Пустья маятники имеют вначале (при $t = 0$) одинаковые отклонения и нулевые начальные скорости:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

Тогда из (7)—(10) находим

$$\sin\alpha = 0, \quad A = 2\varphi_0, \quad B = 0$$

то есть

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos\omega^+ t, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \cos\omega^+ t \tag{11}$$

Этоозначает, что маятники буду колебаться с одинкаковой амплитудой и в одинаковой фазе.

Если при $t = 0$

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_2(0) = 0$$

то из (7)—(10) следует

$$\sin\beta = 0, \quad A = 0, \quad B = 2\varphi_0$$

то есть

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos\omega^- t, \quad \varphi_2 = -\varphi_0 \cos\omega^- t = \varphi_0 \cos(\omega^- t + \pi) \tag{12}$$

Соотношения показывают, что маятники колеблются с одинаковой амплитудой, синхронно, но не синфазно: колебания матяников находятся в противофазе. Два вида движения (11) и (12) называются нормальными модами колебаний системы связанных осцилляторов. Нормальная мода колебаний - это коллективное колебание, при котором амплитуда колебаний каждой частицы остается постоянной. В современной физике понятие моды играет очень важную роль.

Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент времени отклонен лишь один маятник, т. е.

$$\varphi_1(0) = \varphi_0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot\varphi_1(0) = \dot\varphi_2(0) = 0$$

Можно показать, что в этом случае

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega^+ t + \cos\omega^- t) \tag{13}$$

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos\omega^+ t - \cos\omega^- t) \tag{14}$$

Уравнения (13), (14) можно представить в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos\frac{\omega^+ - \omega^-}{2} t \cdot \cos\frac{\omega^+ + \omega^-}{2} t \tag{15}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \sin\frac{\omega^+ - \omega^-}{2} t \cdot \sin\frac{\omega^+ + \omega^-}{2} t \tag{16}$$

Проанализируем формулы (15) и (16). Заметим, что частота колебаний четной моды $\omega^+ = \sqrt{g/l}$ равна ω_0, где ω_0 - собственная частота одиночного маятника (так называемая парциальная частота). С другой стороны, частота колебаний нечетной моды равна $\omega^- = \omega_0\sqrt{1+2\varepsilon}$, где параметр $\varepsilon = ka^2/mgl$ характеризует связь маятников. В случае слабой связи, когда $\varepsilon \ll 1$, можно считать, что $\omega^- \approx \omega_0(1+\varepsilon)$, т. е.

$$\omega^- - \omega^+ \approx \omega_0\varepsilon, \quad \omega^- + \omega^+ \approx 2\omega_0$$

Уравнения (15) и (16) при этом можно приближенно представить в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos\frac{\omega_0\varepsilon}{2}t\cos\omega_0 t \tag{17}$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \sin\frac{\omega_0\varepsilon}{2}t\sin\omega_0 t = \varphi_0 \sin\frac{\omega_0\varepsilon}{2}t\cos(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) \tag{18}$$

Таким образом, мы имеем дело с гармоническими колебаниями частоты ω_0, амплитуда которых изменяется со временем периодически с сильно меньшей частотой $\omega_0\varepsilon/2$. Это так называемые амплитудно-модулированные колебания, или биения. Относительная фаза колебаний равна $\pi/2$. Модулированная амплитуда колебаний первого маятника есть величина

$$A_1(t) = \varphi_0\cos\frac{\omega_0\varepsilon}{2}t$$

Аналогично амплитуда колебаний второго маятника равна

$$A_2(t) = \varphi_0\sin\frac{\omega_0\varepsilon}{2}t = \varphi_0\cos(\frac{\omega_0\varepsilon}{2}t - \frac{\pi}{2})$$

В начальный момент времени $t = 0$ имеем

$$A_1 = \varphi_0, \quad A_2 = 0$$

В момент времени $t = \pi/\omega_0\varepsilon$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \varphi_0$$

В момент времени $t = 2\pi/\omega_0\varepsilon$

$$A_1 = -\varphi_0, \quad A_2 = 0$$

Отметим, что амплитуда гармонического колебания, по определнию, величина положительная. Отрицательный знак означает, что относительная амплитуда изменилась на π. В момент времени $t = 3\pi/\omega_0\varepsilon$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\varphi_0$$

В момент времени $t = 4\pi/\omega_0\varepsilon$ имеем

$$A_1 = \varphi_0, \quad A_2 = 0$$

Таким образом, происходит передача колебаний от одного маятника к другому. Маятники обладают энергией. При $t = 0$ вся энергия сосредоточена в одном маятнике. В результате связи через пружину энергия постепенно передается от первого маятника ко второму до тех пор, пока в нем не накопится вся энергия. Время τ, необходимое для перехода энергии от одного маятника к другому и обратно, можно оценить из уравнения

$$\frac{\omega_0 \varepsilon}{2} \tau = \pi$$

т. е.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 \varepsilon} \tag{19}$$

Частота, с которой маятники обмениваются энергией, равна

$$\frac{2\pi}{\tau} = \omega_0 \varepsilon = \omega^- - \omega^+$$

Отметим, что колебания в системе с большим числом связанных осцилляторов можно трактовать как распространение в системе определенного типа волн.

Лабораторная работа.

Измерения проводятся на установке, изображенной на на рис. 1.

Один конец струны прикреплен к вертикальной стойке установки, а другой конец переброшен через неподвижный блок и натянут при помощи груза массы M. Точки струны A и B неподвижны. В точках C и D, которые делят расстояние между A и B на три равные части (каждая длиной a), подвешены одинаковые математические маятники массой m и длиной l. Каждый маятник подвешен на двух нитях в плоскости струны (бифилярно), чтобы колебания мятников проходили в плоскостях, перпендикулярных струне. Сила натяжения струны намного больше веса матяников ($M \gg m$). Вертикальная составляющая смещения струны никак не сказывается на движении маятников при малых отклонениях. Горизонтальная составляющая смещения струны, хоть она и мала по сравнению со смещениями маятников, осуществляет слабую связь между маятниками.

На рис. 2. показаны смещения точек C и D струны и отклонения маятников в вертикальной (рис. 2а) и горизонтальной (рис. 2б) плоскостях.

При небольших отклонениях маятников для силы натяжения подвеса маятника T имеем (рис. 2а)

$$mg \approx T \tag{1}$$

Для движения матяников в горизонтальном направлении (рис. 2)

$$m\ddot{x}_1 = -T\sin\varphi_1 \approx -T\frac{x_1 - x_3}{l} \approx -mg\frac{x_1 - x_3}{l} \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_2 = -T\sin\varphi_2 \approx -T\frac{x_2 - x_4}{l} \approx -mg\frac{x_2 - x_4}{l} \tag{3}$$

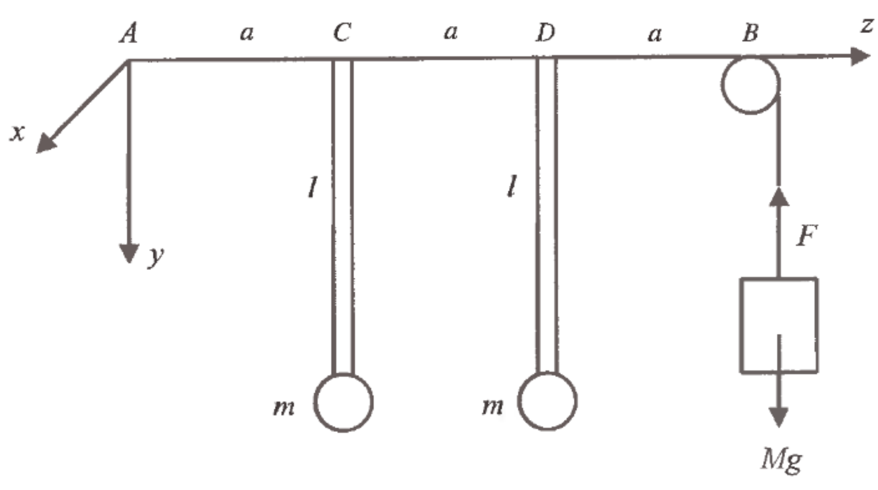

Рис. 2: Общий вид установки

Связь между натяжением струны и натяжением подвеса получаем из рис. 2:

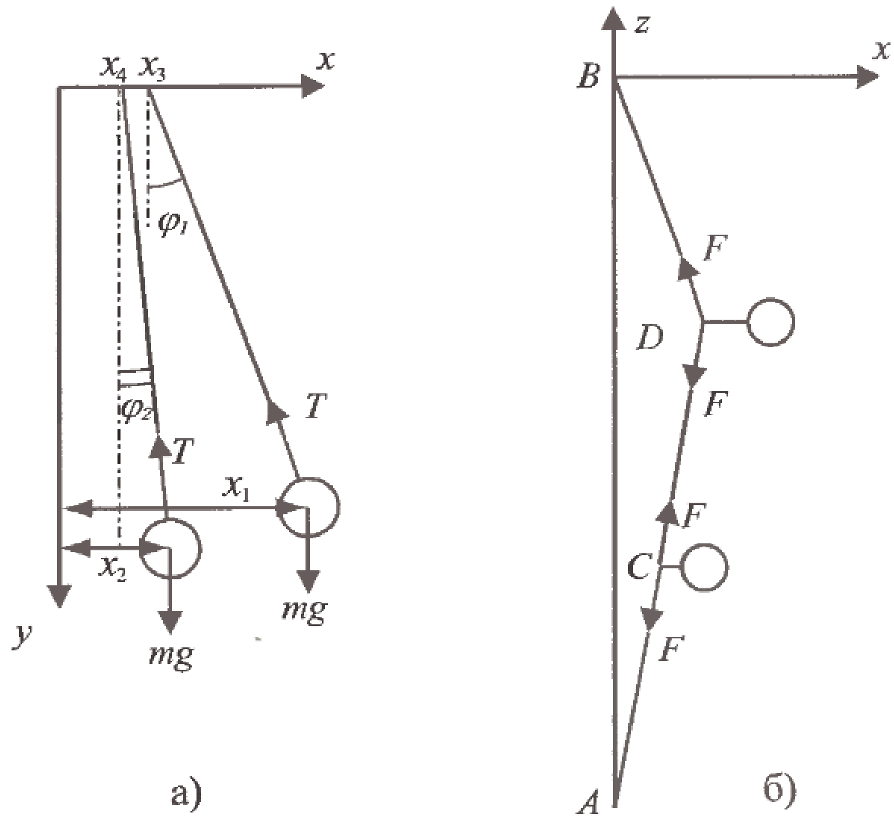

Рис. 3: Отклонения маятников и струны: а) вид вдоль струны б) вид вид сверху

$$T\frac{x_1 - x_3}{l} = F\frac{x_3}{a} + F\frac{x_3 - x_4}{a} \tag{4}$$

$$T\frac{x_2 - x_4}{l} = F\frac{x_4}{a} + F\frac{x_4 - x_3}{a} \tag{5}$$

Введем безразмерный параметр

$$\sigma = \frac{T}{F}\frac{a}{l} = \frac{m}{M}\frac{a}{l}$$

который в нашем случае много меньше единицы (связь слабая). Тогда из (4) и (5) получаем

$$\sigma x_1 = (2+\sigma)x_3 - x_4, \quad \sigma x_2 = (2+\sigma)x_4 - x_3 \tag{6}$$

пренебрегая σ по сравнению с 2, получаем

$$x_3 = \sigma\frac{2x_1 + x_2}{3}, \quad x_4 = \sigma\frac{x_1 + 2x_2}{3} \tag{7}$$

Уравнения движения маятников примут вид

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{l}(1-\sigma)x_1 = \sigma\frac{g}{3l}(x_2 - x_1) \tag{8}$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{g}{l}(1-\sigma)x_2 = \sigma\frac{g}{3l}(x_1 - x_2) \tag{9}$$

Заметим, что система уравнений (1), (2) из предыдущего раздела может быть записана в виде

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{h}{l}\varphi_1 = \frac{g}{l}\varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{h}{l}\varphi_2 = \frac{g}{l}\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 = \omega_0^2\varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{10}$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2\varphi_2 = \omega_0^2\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{11}$$

Уравнения (10), (11) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (8), (9). Введем обозначения

$$\frac{g}{l}(1-\sigma) = \omega_0^2, \quad \sigma\frac{g}{3l} = \omega_0^2\varepsilon$$

Откуда

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} = 3\varepsilon$$

или

$$\sigma(1+\sigma) \approx 3\varepsilon$$

т. е.

$$\sigma \approx 3\varepsilon \ \text{ (для слабой связи)}$$

Система уранений (8), (9) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = \omega_0^2\varepsilon(x_2 - x_1) \tag{12}$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = -\omega_0^2\varepsilon(x_2 - x_1) \tag{13}$$

Из теоретического введения (19):

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0\varepsilon}$$

Можно видеть, что параметр связи

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\omega_0^2 l}{g}\right)$$

В силу последнего:

$$\tau = \frac{6\pi}{\omega_0(1-\omega_0^2 l/g)} \approx 6\pi \frac{Ml}{ma}\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{14}$$

Формулу (14) можно проверить экспериментально.

Наши действия.

1 Измерим длину маятников, расстояние между неподвижными точками струны и точками повеса маятников. Запишем массу маятников и массу груза, натягивающего струну.

2 Измерим приоды мод. Для измерения периода T_1 синфазных колебаний маятников отклоним их на одинаковые углы (примерно 30°) в одну сторону и одновременно отпустим. Повторим измерения несколько раз и усредним результаты, аналогично измерим период колебаний T_2 в противофазе, отклоняя маятники в разные стороны.

3 Измерим период парциальных колебаний, отцепив один из маятников.

4 Измерим период биений, проверим справедливость соотношения

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}$$

5 Повторим предыдущие измерения при других натяжениях струны.

6 Построим график зависимости периода биений от натяжения струны.

7 Проведем сравнение полученных результатов с теоретическими рассчетами по формуле (14).