

Работа 1.4.4.

Исследование свободных колебаний связанных маятников

Корнеев Е.С.

Исследование свободных колебаний связанных маятников

Цель работы: изучение колебательной системы с двумя степенями свободы.

В работе используются: установка с двумя одинаковыми математическими маятниками, бифилярно подвешенными на натянутую горизонтально струну, секундомер, измерительная линейка.

Свободные колебания связанных маятников. Теоретические основы. Рассмотрим простейшую модель с двумя степенями свободы — два одинаковых маятника, связанных пружиной и совершающих колебания в плоскости рисунка. Маятники представляют собой невесомые спицы с насаженными на них маленькими тяжелыми шариками.

Обозначения указаны на рисунке. Если углы отклонения маятника от положения равновесия достаточно малы ($\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$), то со стороны пружины на первый маятник действует момент силы, равный

$$M_{21} = ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Аналогично второй маятник будет испытывать вращающий момент противоположного знака:

$$M_{12} = -ka^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Эти моменты описывают связь между маятниками.

Уравнения движения маятником имеют вид

$$ml^2 \frac{d^2 \varphi_1}{dt^2} = -mgl\varphi_1 + ka^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1)$$

$$ml^2 \frac{d^2 \varphi_2}{dt^2} = -mgl\varphi_2 - ka^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (2)$$

Сложив эти два уравнения, находим

$$ml^2 \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 + \varphi_2) = -mgl(\varphi_1 + \varphi_2) \quad (3)$$

Вычитание (2) - (1) дает

$$ml^2 \frac{d^2}{dt^2}(\varphi_1 - \varphi_2) = -(mgl + 2ka^2)(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (4)$$

Решения уравнений (1) и (2) имеют вид:

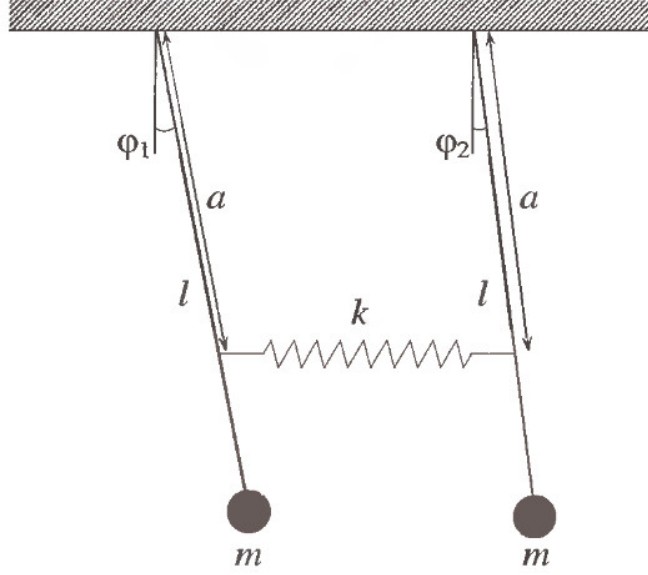


Рис. 1: Связанные маятники

$$\varphi_1 + \varphi_2 = A \cos(\omega^+ t + \alpha) \quad (5)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = B \cos(\omega^- t + \beta) \quad (6)$$

$$\omega^+ = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad \omega^- = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2ka^2}{ml^2}}$$

где A, B, α, β - произвольные константы. Складывая и вычитая (5) и (6), находим

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}A \cos(\omega^+ t + \alpha) + \frac{1}{2}B \cos(\omega^- t + \beta) \quad (7)$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}A \cos(\omega^+ t + \alpha) - \frac{1}{2}B \cos(\omega^- t + \beta) \quad (8)$$

Для угловых скоростей при этом имеем

$$\dot{\varphi}_1 = -\frac{1}{2}A \sin(\omega^+ t + \alpha) - \frac{1}{2}B \sin(\omega^- t + \beta) \quad (9)$$

$$\dot{\varphi}_2 = -\frac{1}{2}A \sin(\omega^+ t + \alpha) + \frac{1}{2}B \sin(\omega^- t + \beta) \quad (10)$$

Проанализируем полученные решения. Пусть маятники имеют вначале (при $t = 0$) одинаковые отклонения и нулевые начальные скорости:

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

Тогда из (7)–(10) находим

$$\sin \alpha = 0, \quad A = 2\varphi_0, \quad B = 0$$

то есть

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \omega^+ t, \quad \varphi_2 = \varphi_0 \cos \omega^+ t \quad (11)$$

Это означает, что маятники будут колебаться с одинаковой амплитудой и в одинаковой фазе.

Если при $t = 0$

$$\varphi_1(0) = -\varphi_2(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

то из (7)–(10) следует

$$\sin \beta = 0, \quad A = 0, \quad B = 2\varphi_0$$

то есть

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \omega^- t, \quad \varphi_2 = -\varphi_0 \cos \omega^- t = \varphi_0 \cos(\omega^- t + \pi) \quad (12)$$

Соотношения показывают, что маятники колеблются с одинаковой амплитудой, синхронно, но не синфазно: колебания маятников находятся в противофазе. Два вида движения (11) и (12) называются нормальными модами колебаний системы связанных осцилляторов. Нормальная мода колебаний – это коллективное колебание, при котором амплитуда колебаний каждой частицы остается постоянной. В современной физике понятие моды играет очень важную роль.

Рассмотрим теперь случай, когда в начальный момент времени отклонен лишь один маятник, т. е.

$$\varphi_1(0) = \varphi_0, \quad \varphi_2(0) = 0, \quad \dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$$

Можно показать, что в этом случае

$$\varphi_1 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos \omega^+ t + \cos \omega^- t) \quad (13)$$

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_0}{2}(\cos \omega^+ t - \cos \omega^- t) \quad (14)$$

Уравнения (13), (14) можно представить в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \frac{\omega^+ - \omega^-}{2} t \cdot \cos \frac{\omega^+ + \omega^-}{2} t \quad (15)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \sin \frac{\omega^+ - \omega^-}{2} t \cdot \sin \frac{\omega^+ + \omega^-}{2} t \quad (16)$$

Проанализируем формулы (15) и (16). Заметим, что частота колебаний четной моды $\omega^+ = \sqrt{g/l}$ равна ω_0 , где ω_0 – собственная частота одиночного маятника (так

называемая парциальная частота). С другой стороны, частота колебаний нечетной моды равна $\omega^- = \omega_0\sqrt{1+2\varepsilon}$, где параметр $\varepsilon = ka^2/mgl$ характеризует связь маятников. В случае слабой связи, когда $\varepsilon \ll 1$, можно считать, что $\omega^- \approx \omega_0(1+\varepsilon)$, т. е.

$$\omega^- - \omega^+ \approx \omega_0\varepsilon, \quad \omega^- + \omega^+ \approx 2\omega_0$$

Уравнения (15) и (16) при этом можно приближенно представить в виде

$$\varphi_1 = \varphi_0 \cos \frac{\omega_0\varepsilon}{2}t \cos \omega_0t \quad (17)$$

$$\varphi_2 = \varphi_0 \sin \frac{\omega_0\varepsilon}{2}t \sin \omega_0t = \varphi_0 \sin \frac{\omega_0\varepsilon}{2}t \cos(\omega_0t - \frac{\pi}{2}) \quad (18)$$

Таким образом, мы имеем дело с гармоническими колебаниями частоты ω_0 , амплитуда которых изменяется со временем периодически с сильно меньшей частотой $\omega_0\varepsilon/2$. Это так называемые амплитудно-модулированные колебания, или биения. Относительная фаза колебаний равна $\pi/2$. Модулированная амплитуда колебаний первого маятника есть величина

$$A_1(t) = \varphi_0 \cos \frac{\omega_0\varepsilon}{2}t$$

Аналогично амплитуда колебаний второго маятника равна

$$A_2(t) = \varphi_0 \sin \frac{\omega_0\varepsilon}{2}t = \varphi_0 \cos(\frac{\omega_0\varepsilon}{2}t - \frac{\pi}{2})$$

В начальный момент времени $t = 0$ имеем

$$A_1 = \varphi_0, \quad A_2 = 0$$

В момент времени $t = \pi/\omega_0\varepsilon$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \varphi_0$$

В момент времени $t = 2\pi/\omega_0\varepsilon$

$$A_1 = -\varphi_0, \quad A_2 = 0$$

Отметим, что амплитуда гармонического колебания, по определению, величина положительная. Отрицательный знак означает, что относительная амплитуда изменилась на π . В момент времени $t = 3\pi/\omega_0\varepsilon$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = -\varphi_0$$

В момент времени $t = 4\pi/\omega_0\varepsilon$ имеем

$$A_1 = \varphi_0, \quad A_2 = 0$$

Таким образом, происходит передача колебаний от одного маятника к другому. Маятники обладают энергией. При $t = 0$ вся энергия сосредоточена в одном маятнике. В результате связи через пружину энергия постепенно передается от первого маятника ко второму до тех пор, пока в нем не накопится вся энергия. Время τ , необходимое для перехода энергии от одного маятника к другому и обратно, можно оценить из уравнения

$$\frac{\omega_0 \varepsilon}{2} \tau = \pi$$

т. е.

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0 \varepsilon} \quad (19)$$

Частота, с которой маятники обмениваются энергией, равна

$$\frac{2\pi}{\tau} = \omega_0 \varepsilon = \omega^- - \omega^+$$

Отметим, что колебания в системе с большим числом связанных осцилляторов можно трактовать как распространение в системе определенного типа волн.

Лабораторная работа.

Измерения проводятся на установке, изображенной на рис. 1.

Один конец струны прикреплен к вертикальной стойке установки, а другой конец переброшен через неподвижный блок и натянут при помощи груза массы M . Точки струны A и B неподвижны. В точках C и D , которые делят расстояние между A и B на три равные части (каждая длиной a), подвешены одинаковые математические маятники массой m и длиной l . Каждый маятник подвешен на двух нитях в плоскости струны (бифилярно), чтобы колебания маятников проходили в плоскостях, перпендикулярных струне. Сила натяжения струны намного больше веса маятников ($M \gg m$). Вертикальная составляющая смещения струны никак не сказывается на движении маятников при малых отклонениях. Горизонтальная составляющая смещения струны, хоть она и мала по сравнению со смещениями маятников, осуществляет слабую связь между маятниками.

На рис. 2. показаны смещения точек C и D струны и отклонения маятников в вертикальной (рис. 2а) и горизонтальной (рис. 2б) плоскостях.

При небольших отклонениях маятников для силы натяжения подвеса маятника T имеем (рис. 2а)

$$mg \approx T \quad (1)$$

Для движения маятников в горизонтальном направлении (рис. 2)

$$m\ddot{x}_1 = -T \sin \varphi_1 \approx -T \frac{x_1 - x_3}{l} \approx -mg \frac{x_1 - x_3}{l} \quad (2)$$

$$m\ddot{x}_2 = -T \sin \varphi_2 \approx -T \frac{x_2 - x_4}{l} \approx -mg \frac{x_2 - x_4}{l} \quad (3)$$

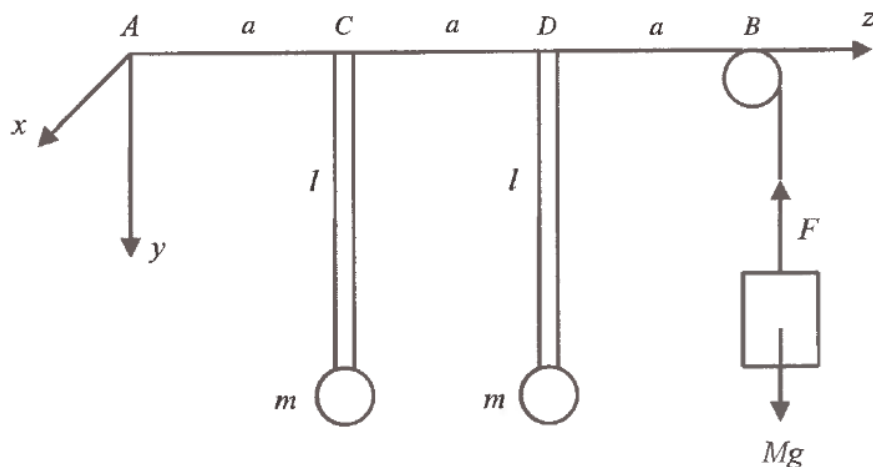


Рис. 2: Общий вид установки

Связь между натяжением струны и натяжением подвеса получаем из рис. 2:

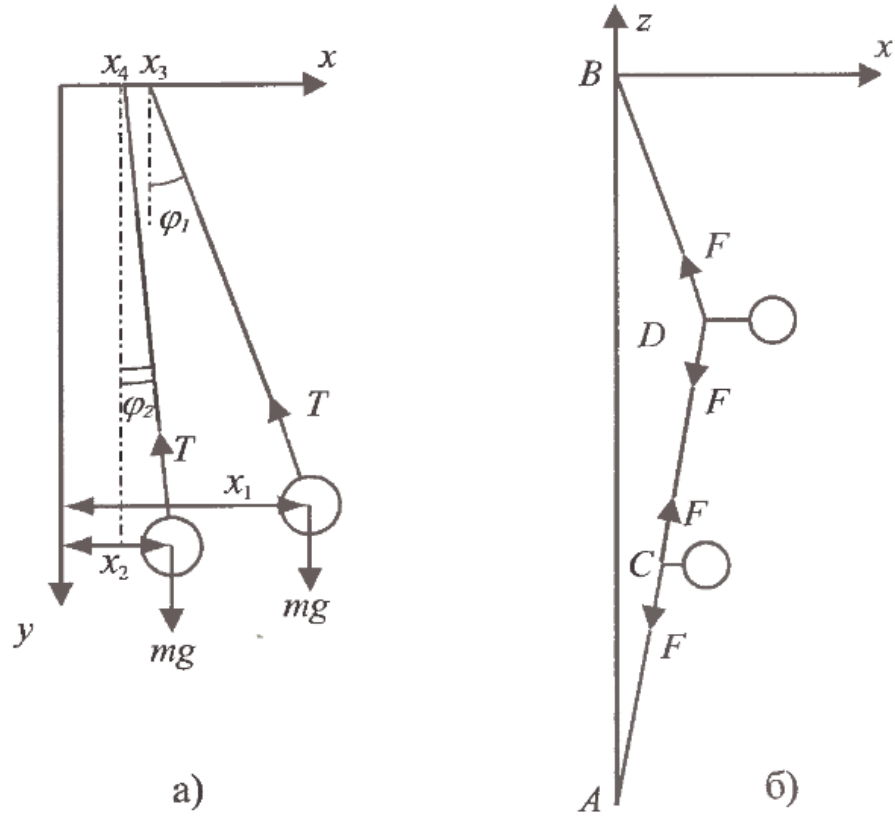


Рис. 3: Отклонения маятников и струны: а) вид вдоль струны б) вид вид сверху

$$T \frac{x_1 - x_3}{l} = F \frac{x_3}{a} + F \frac{x_3 - x_4}{a} \quad (4)$$

$$T \frac{x_2 - x_4}{l} = F \frac{x_4}{a} + F \frac{x_4 - x_3}{a} \quad (5)$$

Введем безразмерный параметр

$$\sigma = \frac{T a}{F l} = \frac{m a}{M l}$$

который в нашем случае много меньше единицы (связь слабая). Тогда из (4) и (5) получаем

$$\sigma x_1 = (2 + \sigma)x_3 - x_4, \quad \sigma x_2 = (2 + \sigma)x_4 - x_3 \quad (6)$$

пренебрегая σ по сравнению с 2, получаем

$$x_3 = \sigma \frac{2x_1 + x_2}{3}, \quad x_4 = \sigma \frac{x_1 + 2x_2}{3} \quad (7)$$

Уравнения движения маятников примут вид

$$\ddot{x}_1 + \frac{g}{l}(1 - \sigma)x_1 = \sigma \frac{g}{3l}(x_2 - x_1) \quad (8)$$

$$\ddot{x}_2 + \frac{g}{l}(1 - \sigma)x_2 = \sigma \frac{g}{3l}(x_1 - x_2) \quad (9)$$

Заметим, что система уравнений (1), (2) из предыдущего раздела может быть записана в виде

$$\ddot{\varphi}_1 + \frac{h}{l}\varphi_1 = \frac{g}{l}\varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \frac{h}{l}\varphi_2 = \frac{g}{l}\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2)$$

или

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 = \omega_0^2\varepsilon(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (10)$$

$$\ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2\varphi_2 = \omega_0^2\varepsilon(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (11)$$

Уравнения (10), (11) с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (8), (9). Введем обозначения

$$\frac{g}{l}(1 - \sigma) = \omega_0^2, \quad \sigma \frac{g}{3l} = \omega_0^2\varepsilon$$

Откуда

$$\frac{\sigma}{1 - \sigma} = 3\varepsilon$$

или

$$\sigma(1 + \sigma) \approx 3\varepsilon$$

т. е.

$$\sigma \approx 3\varepsilon \quad (\text{для слабой связи})$$

Система уравнений (8), (9) принимает вид

$$\ddot{x}_1 + \omega_0^2x_1 = \omega_0^2\varepsilon(x_2 - x_1) \quad (12)$$

$$\ddot{x}_2 + \omega_0^2x_2 = -\omega_0^2\varepsilon(x_2 - x_1) \quad (13)$$

Из теоретического введения (19):

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_0\varepsilon}$$

Можно видеть, что параметр связи

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{\omega_0^2 l}{g} \right)$$

В силу последнего:

$$\tau = \frac{6\pi}{\omega_0(1 - \omega_0^2 l/g)} \approx 6\pi \frac{Ml}{ma} \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (14)$$

Формулу (14) можно проверить экспериментально.

Наши действия.

- 1 Измерим длину маятников, расстояние между неподвижными точками струны и точками повеса маятников. Запишем массу маятников и массу груза, натягивающего струну.
- 2 Измерим периоды мод. Для измерения периода T_1 синфазных колебаний маятников отклоним их на одинаковые углы (примерно 30°) в одну сторону и одновременно отпустим. Повторим измерения несколько раз и усредним результаты, аналогично измерим период колебаний T_2 в противофазе, отклоняя маятники в разные стороны.
- 3 Измерим период парциальных колебаний, отцепив один из маятников.
- 4 Измерим период биений, проверим справедливость соотношения

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}$$

- 5 Повторим предыдущие измерения при других натяжениях струны.
- 6 Построим график зависимости периода биений от натяжения струны.
- 7 Проведем сравнение полученных результатов с теоретическими расчетами по формуле (14).

Измерения

Определим параметры установки:

Расстояние между точками подвеса маятников a	25 см
Длина маятников l	45 см
Масса маятников m	225 см

Измерим периоды нескольких колебаний T_1 и T_2 , τ , а также вычислим, чему должно равняться значение τ_0 согласно формуле проверяемой зависимости для различных масс M , добавляемых к грузу, натягивающему трос.

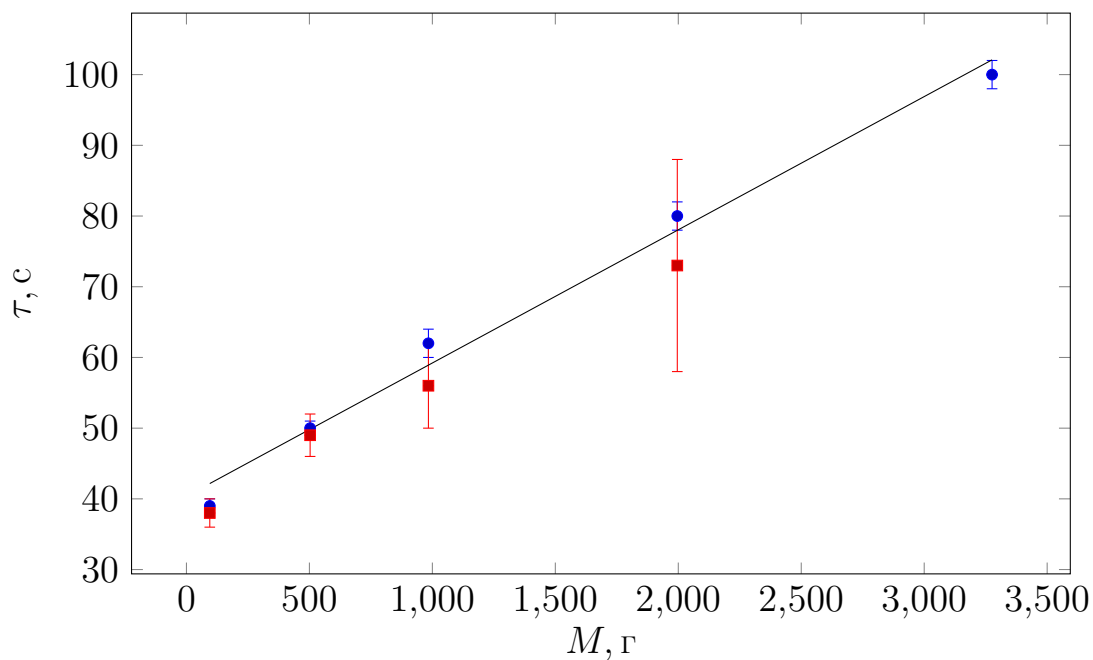
$M = 95 \text{ г}$		
$10 \cdot T_1, \text{ с}$	$10 \cdot T_2, \text{ с}$	$\tau, \text{ с}$
14.02	13.56	39
14.01	13.52	38
14.01	13.48	40
14.00	13.52	39
14.02	13.51	
14.00	13.53	
$T_1 = (1.401 \pm 0.001)\text{с}$	$T_2 = (1.352 \pm 0.002)\text{с}$	$\tau = (39 \pm 1)\text{с}$
$\tau_0 = (38 \pm 2)\text{с}$		

$M = 503 \text{ г}$		
$10 \cdot T_1, \text{ с}$	$10 \cdot T_2, \text{ с}$	$\tau, \text{ с}$
13.88	13.49	50
13.89	13.48	50
13.85	13.48	51
13.88	13.52	49
13.89	13.51	
$T_1 = (1.388 \pm 0.001)\text{с}$	$T_2 = (1.350 \pm 0.001)\text{с}$	$\tau = (50 \pm 1)\text{с}$
$\tau_0 = (49 \pm 3)\text{с}$		

$M = 984 \text{ г}$		
$10 \cdot T_1, \text{ с}$	$10 \cdot T_2, \text{ с}$	$\tau, \text{ с}$
13.77	13.42	62
13.79	13.40	60
13.78	13.44	63
13.73	13.43	62
13.70	13.40	
13.72	13.42	
$T_1 = (1.375 \pm 0.003)\text{с}$	$T_2 = (1.342 \pm 0.001)\text{с}$	$\tau = (62 \pm 1)\text{с}$
$\tau_0 = (56 \pm 6)\text{с}$		

$M = 1996 \text{ г}$		
$20 \cdot T_1, \text{ c}$	$10 \cdot T_2, \text{ c}$	$\tau, \text{ c}$
27.30	13.30	80
27.32	13.40	81
27.20	13.45	80
27.25	13.38	79
27.27	13.40	
$T_1 = (1.364 \pm 0.001)\text{c}$	$T_2 = (1.339 \pm 0.004)\text{c}$	$\tau = (80 \pm 2)\text{c}$
$\tau_0 = (73 \pm 15)\text{c}$		

$M = 3267 \text{ г}$		
$10 \cdot T_1, \text{ c}$	$10 \cdot T_2, \text{ c}$	$\tau, \text{ c}$
13.40	13.33	102
13.55	13.36	99
13.55	13.37	100
13.42	13.38	100
13.52	13.30	
13.45	13.33	
$T_1 = (1.348 \pm 0.006)\text{c}$	$T_2 = (1.335 \pm 0.003)\text{c}$	$\tau = (100 \pm 2)\text{c}$
$\tau_0 = (138 \pm 95)\text{c}$		



По формуле (14)

$$\frac{\tau}{M} = 6\pi \frac{l}{ma} \sqrt{\frac{l}{g}} \approx 30 \text{ c/кг}$$

Определим угловой коэффициент графика k :

$$k = 20 \pm 5 \text{ с/кг}$$

Видно, что угловой коэффициент прямой, полученной экспериментально, близок к вычисленному теоретически. Учитывая погрешности, величина которых в данной лабораторной работе довольно велика, можно считать, что полученное значение вполне подтверждает полученную теоретическую зависимость.

Список использованной литературы:

1. "Лабораторный практикум по общей физике: Учебное пособие. В трех томах. Т1. Механика"/А.Д.Гладун, Д.А.Александров, Ф.Ф.Игошин и др.; Под редакцией А.Д.Гладуна. — МФТИ, 2004.
2. "Набор и верстка в системе L^AT_EX"/С.М.Львовский. — 2003.