TD Ciw

Exercice

Une station d'usinage reçoit des pièces à la cadence moyenne d'une toutes les 30 secondes. Les pièces en attente s'empilent devant la machine, la dernière arrivée se plaçant au-dessus des autres. L'usinage d'une pièce a une durée moyenne de 25 secondes.

a) On suppose que les pièces arrivent selon un processus de Poisson et que les temps d'usinage sont indépendants et identiquement distribués selon une loi exponentielle.

- Donner la notation de Kendall de la file d'attente modélisant la station d'usinage.

M/M/1

- Préciser les taux d'arrivée et de service.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

où

$$\lambda = \frac{1}{E(T_A)} = \frac{1}{30}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

$$\mu = \frac{1}{E(T_S)} = \frac{1}{25}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

- Vérifier la stabilité de la file.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{25}{30} < 1$$

La file d’attente es stable.

- Calculer le temps moyen d'attente d'une pièce devant la station.

Pour une file d’attente du type M/M/1

$$T_Q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = 125\,sec$$

b) Une étude plus précise du processus d'usinage a montré qu'il se compose d'une première phase d'une durée constante de 5 secondes et d'une seconde phase dont la durée est distribuée uniformément entre 10 et 30 secondes. Quel est le temps moyen d'attente d'une pièce devant la station dans ce nouveau modèle ?

$$T_S \sim U(15{,}35)$$

Dont

$$E(T_S) = 25\,sec$$

$$Var(T_s) = \frac{100}{3}\,sec^2$$

En utilisant la formule de Pollaczek–Khinchine (M/G/1), on obtient

$$T_Q^{M/G/1} = \left(\frac{1 + \frac{Var(T_s)}{(E(T_S))^2}}{2}\right) T_Q^{M/M/1} = \frac{395}{6} \text{sec} \approx 65{,}8\, sec$$

c) Une seconde étude portant sur le processus d'arrivée des pièces a montré qu'il était préférable de modéliser le temps entre deux arrivées successives par une variable d'Erlang d'ordre 2 plutôt que par une variable exponentielle. Estimer le temps moyen d'attente d'une pièce devant la station dans ce nouveau modèle (intégrant également la modification du point b).

$$T_A \sim Erlang(\lambda = \frac{1}{15}; k = 2)$$

Dont

$$E(T_A) = 30\, sec$$

$$Var(T_A) = 225\, sec^2$$

En utilisant la formule de Pollaczek–Khinchine (G/G/1), on obtient

$$T_Q^{G/G/1} = \left(\frac{\frac{Var(T_A)}{(E(T_A))^2} + \frac{Var(T_s)}{(E(T_S))^2}}{2}\right) T_Q^{M/M/1} = \frac{415}{12}\, sec \approx 34.6\, sec$$

Questions :

- Modéliser et résoudre ce problème à l'aide du Ciw en Python.
- Comparer les résultats obtenus préalablement par la méthode analytique (M/M/1) dans a) et par la méthode d'approximation en utilisant la formule de Pollaczek–Khinchine (M/G/1) et (G/G/1) dans b) et c).