Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

HAHN-BANACH THEOREM WITHOUT AXIOM OF CHOICE

Hernandez Garcia Kevin Alan

Lopez Diego Victor Heriberto

Martínez Ramírez Eder Said

Ejercicio abierto planteado para formar parte de la evaluación del primer parcial del curso de Análisis Matemático III impartido por
Dr. Miguel Angel Valencia Bucio

13 de marzo de 2024

ABSTRACT

The Hahn-Banach theorem (Theorem 3 from Lecture 1) was proven using the axiom of choice (specifically, Zorn's lemma). However, if we negate or weaken the axiom of choice, how much of the Hahn-Banach theorem can still be proven? More precisely, are there known families of normed spaces for which the proof of the Hahn-Banach theorem does not require the axiom of choice?

RESUMEN

El teorema de Hahn-Banach (el teorema 3 de la lectura 1) fue probado usando el axioma de elección (es decir, el lema de Zorn). Si se niega o se debilita el axioma de elección, ¿qué tanto del teorema de Hahn-Banach puede probarse? Más precisamente, ¿se sabe de algunas familias de espacios normados para las cuales la prueba del teorema de Hahn-Banach no requiera del axioma de elección?

INTRODUCTION

The present article embarks on a detailed exploration of the Hahn-Banach Theorem, a fundamental result in functional analysis that establishes conditions under which a bounded linear functional defined on a subspace can be extended to the entire vector space. The emphasis lies in investigating variations of the theorem without relying on the axiom of choice, examining specific cases, and exploring alternative proofs.

INTRODUCCIÓN

El presente artículo se embarca en una exploración detallada del Teorema de Hahn-Banach, un resultado fundamental en análisis funcional que establece condiciones bajo las cuales un funcional lineal acotado definido en un subespacio vectorial puede ser extendido a todo el espacio vectorial. El énfasis recae en investigar las variantes del teorema sin depender del axioma de elección, examinando casos específicos y demostraciones alternativas.

Teorema de Hahn-Banach

Sea V un espacio vectorial real, y sea $W \leq V$. Sea $p : V \to \mathbb{R}$ una funcional sublineal de V y sea $\phi : W \to \mathbb{R}$ una funcional lineal de W tal que

$$\forall v \in W(\varphi(v) \leq p(v))$$

Entonces existe una funcional lineal $\psi : V \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi|_w = \varphi, \forall v \in V(\psi(v) \leq p(v)).$$

La demostración de este teorema se muestra en la teorema 3 de la lectura 1 correspondiente al curso de Análisis Matemático III.

Teorema de Hahn-Banach (Usando *Ultrafiltro*)

Lo siguiente es rescatado del articulo [1], Donde se menciona que A. Robinson introdujo el análisis no estándar como una extensión del análisis clásico. En este contexto, se aplicó el método de Robinson para ofrecer una nueva demostración del teorema de extensión de Hahn-Banach. Esta demostración elimina la necesidad del lema de Zorn al basarse en la idea de que todo filtro apropiado está contenido en un ultrafiltro. El teorema de Hahn-Banach, en este enfoque, resulta ser una consecuencia de esta hipótesis, destacando una conexión interesante con el teorema del ideal primo para álgebras booleanas.

Teorema de Hahn-Banach: Sea E un espacio vectorial real y p un funcional sublineal definido en E, Si f es un funcional lineal real definido en un subespacio vectorial G de E tal que $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in G$, entonces existe un funcional lineal real F en E tal que $F(x) = f(x)$ para todo $x \in G$ y $F(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$.

Demostración: Sea $\{f_n : n \in \mathbb{D}\}$ la familia de todos los funcionales lineales que están definidos en algún subespacio vectorial de E que contiene a G y que tienen las siguientes propiedades: $f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in G$ y $f_n(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$ para el cual $f_n(x)$ está definido. Es evidente que $\bigcap_{n \in \mathbb{D}} \text{dom}(f_n) = \emptyset$. Para cada $x \in E$, denotamos por D_x el conjunto de todos los índices $n \in \mathbb{D}$ tales que el dominio de f_n contiene a x. Se sigue de la demostración de Banach (ver [2], p. 28) que $\bigcap_{x \in E} D_x \neq \emptyset$ para todo $x \in E$. Además, la familia $\{\bigcap_{x \in E} D_x : x \in E\}$ de subconjuntos de $\mathbb{D}$ tiene la propiedad de intersección finita, es decir, si $x_1, \ldots, x_n$ son elementos de E, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} D_{x_i} \neq \emptyset$. De hecho, aplicamos la construcción de Banach sucesivamente a los elementos $x_1, \ldots, x_n$. Por lo tanto, existe un ultrafiltro U en $\mathbb{D}$ que contiene la familia $\{D_x : x \in E\}$. Sea R^* el ultrapower D^U/V_i. Luego definimos la siguiente función f de E en R^*. Si $x \in E$, entonces $f(x)$ es aquel elemento de R^* que está determinado por un elemento A de D^U tal que $A(n) = f_n(x)$ para todo $n \in \mathbb{D}$. Es fácil ver que f es una transformación lineal de E en R^* (considerando R^* como un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$) y que f tiene las siguientes propiedades: (i) $f(x) = f(x)$ para todo $x \in G$ y (ii) $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$. De (ii) se sigue que $-p(-x) \leq f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in E$, es decir, $f(x)$ es finito para todo $x \in E$. Por lo tanto, $F(x) = \text{st}(f(x))$ es el funcional lineal requerido. Esto completa la demostración del teorema.

Observación: La demostración muestra que el ultrafiltro U es fijo, es decir, existe un elemento $n \in \mathbb{D}$ tal que $\{n\} \in U$. Además, existe una correspondencia uno a uno entre la familia de todos los ultrafiltros en $\mathbb{D}$ que contienen la familia $\{D_x : x \in E\}$ y la familia de todas las extensiones de f que satisfacen las condiciones del teorema. Por lo cual esta desmostración hace uso del axioma de elección debilitado, el Lema del *Ultrafiltro.*

Teorema de Hahn-Banach en espacios normados separables

Es ampliamente reconocido que en el caso de espacios normados separables, es posible establecer el teorema de Hahn-Banach prescindiendo de la inducción transfinita, también conocida como el lema de Zorn. Este hecho es significativo, ya que proporciona una alternativa y resalta la versatilidad del enfoque al abordar la extensión funcional en espacios normados separables sin depender de herramientas más avanzadas como la inducción transfinita. Esta perspectiva simplificada puede ser de interés para aquellos que buscan demostraciones más directas y accesibles del teorema de Hahn-Banach en contextos específicos.

Los siguientes resultados fueron rescatados de [**?**], donde se menciona una observación adicional que destaca la aplicación del teorema en el caso de espacios vectoriales separables, donde se evita el uso de la inducción transfinita. La demostración en este caso se realiza utilizando un conjunto numerable denso y aplicando el Teorema de Hahn-Banach de forma iterativa, demostrando la existencia de un funcional extendido de manera uniformemente continua.

Teorema de Hahn-Banach: Sean V un espacio vectorial real normado, W un subespacio vectorial de V, y $f \in \mathcal{B}(W, \mathbb{R})$. Entonces, existe $F \in \mathcal{B}(V, \mathbb{R})$ tal que $\|F\| \leq \|f\|$ y $F|_W = f$.

Demostración: Sea $D = \{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ un conjunto numerable y denso en V. Definimos $\eta := \|f\|$ y $S_j = \ell_R(W \cup \{x_1, \ldots, x_j\}) = W + \sum_{k=1}^{j} Rx_k$. Además, establecemos $S_0 := W$ y $g_0 := f$. Observamos que $S_j = S_{j-1} + Rx_j$. Utilizamos la inducción matemática sobre j para definir $g_j : S_j \to \mathbb{R}$.

Si $x_j \notin S_{j-1}$, aplicamos el Teorema de Hahn-Banach en su forma algebraica real, la Proposición 1. Si $x_j \in S_{j-1}$, entonces $S_j = S_{j-1}$ y definimos $g_j := g_{j-1}$. En ambos casos, $g_j \in B(S_j, \mathbb{R})$, $g_j|_{S_{j-1}} = g_j$, y $\|g_j\| \leq \eta$.

Definimos $(A, \preceq)$ como en el Lema 2. Notamos que $\{(S_j, g_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una cadena en A. Definimos $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$ y definimos $g \in B(U, \mathbb{R})$ como en el Lema 2. Finalmente, observamos que U es denso en V y g es una función uniformemente continua. Extendemos g por continuidad a un funcional $F \in B(V, \mathbb{R})$.

Hahn-Banach en espacios de Hilbert

En el caso de espacios de Hilbert es mucho mas facil. Consideremos un espacio de Hilbert V y un subespacio cerrado W con un funcional lineal acotado f definido en W. El objetivo es demostrar que para cualquier vector x en V, podemos descomponerlo como $a+b$, donde $a \in W$ y $b \in W^\perp$, y definir $g(x) = f(a)$. Esto se logra mediante la descomposición ortogonal $V = W \oplus W^\perp$, que establece que cualquier vector en V puede expresarse como la suma de un vector en W y otro en $W^\perp$.

Si W es cerrado, entonces V es la suma directa de W y su ortogonal, lo que significa que cada vector en V puede ser único y eficientemente representado como la suma de un vector en W y otro en $W^\perp$. Para definir la extensión, podemos utilizar el proyector ortogonal P definido como $P(u+v) = p(u)$ para u en W y v en el ortogonal de W.

La linealidad de P es inmediata, ya que P opera por separado en W y su ortogonal, manteniendo así la propiedad de linealidad. Para demostrar la continuidad de P y la desigualdad $\|P\| \leq \|p\|$, podemos utilizar la propiedad de la norma en espacios de Hilbert. Dados u y v en W y su ortogonal, ya que son ortogonales, la norma del vector suma $\|u+v\|$ es mayor o igual a la norma de u (por la desigualdad del triangulo).

Usamos esta propiedad para definir la norma de P y demostrar que $\|P\|$ es menor o igual a $\|p\|$, lo que confirma la continuidad de P. En resumen, la extensión del argumento se basa en la descomposición ortogonal, la suma directa de W y $W^\perp$, y la propiedad de la norma en espacios de Hilbert para establecer la linealidad, continuidad y la desigualdad de la norma en P.

Debilitando Hahn Banach

Otra perspectiva desde la cual podemos analizar el problema, es el considerar modificar algunas condiciones del teorema de Hahn-Bannach para que en su demostración no sea usado el axioma de elección o, en su defecto sean necesaruas versiones más débiles.

Referencias

[1] Luxemburg, W. A. J., *Two Applications of the Method of Construction by Ultrapowers to Analysis*, Communicated by A. Erdélyi, February 7, 1962.

[2] Autor, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa, 1932, California Institute of Technology.

[3] Maximenko, Egor, *Teorema de Hahn-Banach*, *https://esfm.egormaximenko.com/analysis/Hahn_Banach_theorem_algebraic_real_es.pdf*, [Consultado el 12 de marzo de 2024].