Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

SOME GENERALIZATIONS OF THE GELFAND-NAIMARK THEOREM

Lopez Diego Victor Heriberto

Martínez Ramírez Eder Said

Ejercicio abierto planteado para formar parte de la evaluación del tercer parcial del curso de Análisis Matemático III impartido por
Dr. Miguel Angel Valencia Bucio

20 de julio de 2024

Introducción

El teorema de Gelfand-Naimark es un resultado fundamental en la teoría de álgebras C*, proporcionando una caracterización profunda de estas álgebras en términos de álgebras de operadores. La construcción GNS (Gelfand-Naimark-Segal) es esencial para esta prueba, y permite representar álgebras C* como álgebras de operadores en un espacio de Hilbert. En este trabajo, exploramos diversas generalizaciones del teorema de Gelfand-Naimark, enfatizando las propiedades y representaciones de álgebras C* a través de sus estados y representaciones cíclicas. Además, se aborda la relación entre los funcionales positivos y los estados en el contexto de estas álgebras.

Abstract

Este estudio presenta una exploración profunda del teorema de Gelfand-Naimark y sus generalizaciones. Comenzando con la construcción GNS y su importancia en la representación de álgebras C*, se analiza cómo los estados puros y las representaciones cíclicas contribuyen a una comprensión más amplia de las álgebras C*. El documento también discute el espectro de Gelfand, su relación con los ideales maximales y el radical de Gelfand. Finalmente, se generaliza el teorema para contextos no conmutativos utilizando la teoría de convexidad CP, demostrando que cualquier C*-álgebra puede ser isomorfa al conjunto de funciones covariantes uniformemente continuas en las representaciones irreducibles.

1. GNS Construcción

La construcción GNS está en el centro de la prueba del teorema de Gelfand-Naimark que caracteriza a las álgebras C* como álgebras de operadores [3]. El álgebra C* A tiene suficientes estados puros para que la suma directa de las representaciones GNS irreducibles correspondientes sea fiel.
La suma directa de las representaciones GNS correspondientes de todos los estados se denomina representación universal de A. La representación universal de A contiene todas las representaciones cíclicas. Como cada representación * es una suma directa de representaciones cíclicas, se deduce que cada representación * de A es una suma directa de alguna suma de copias de la representación universal.

Una representación de un C*-álgebra A es un *-homomorfismo $\pi : A \to B(H)$, donde B(H) denota los operadores lineales acotados en H. Dos representaciones $\pi_1 : A \to B(H_1)$ y $\pi_2 : A \to B(H_2)$ son unitariamente equivalentes si existe un operador unitario U: $H_1 \to H_2$ tal que

$$\pi_2(a) = U\pi_1(a)U^*$$

para todo $a \in A$. Se dice que una representación es cíclica si existe un $v \in H$ tal que el conjunto $\{\pi(a)v|a \in A\}$ es denso en H. Una representación es (topológicamente) irreducible si no tiene subespacios invariantes cerrados propios y no triviales, es decir, si $V \subseteq H$ es cerrado y $\pi(A)V \subseteq V$, entonces V es igual a $\{0, H\}$. Equivalentemente, el conmutante de $\pi(A)$ es $\mathbb{C}$, donde el conmutante de un conjunto S en $B(H)$ es el conjunto de operadores

$$\{T \in B(H)|ST = TS \quad \forall S \in S\}.$$

Un aplicación del lema de Zorn muestra que toda representación no degenerada $\{\pi(a) : a \in A, u \in H\}$ es unitariamente equivalente a una representación directa de sumas cíclicas de un C*-álgebra. Concluimos esta sección con la introducción al concepto formal de elementos espectrales.
Teorema Si A es un C*-álgebra conmutativa y E es el espacio de máximas ideales de A (equivalentemente la colección de homomorfismos $A \to C$ con la topología débil), entonces la transformada de Gelfand es un isometría *-isomorfismo.
Para un álgebra C^*-conmutativa A generada por un elemento normal a, podemos identificar naturalmente el espacio de ideales maximales Σ con el espectro de a, $\sigma(a) = \{\gamma \in \mathbb{C} : \gamma - a \notin A^x\}$.
Proposición Si A es un álgebra C*-conmutativa con generador a e ideal maximal espacial Σ, entonces

$$\tau : \Sigma \to \sigma(a), \tau = a(z)$$

es un homeomorfismo. Además, si $p(a, z') = z'$ en z', entonces

$$p(a, z') = p \circ \tau$$

donde p es la transformación de Gelfand.
Recuerde que si B está en el álgebra C*, entonces el espectro de un elemento no depende del álgebra C*. Ahora podemos definir el cálculo funcional continuo para elementos normales de un álgebra C*.
Teorema Sea A una álgebra C*, a normal y, como arriba, defina:

$$p : C(\sigma(a)) \to C^*(a) \subseteq A,$$

donde $C^*(a)$ es la sub-álgebra generada por a, por el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd} C^*(a) \arrow[rr] \arrow[dr] & & C(\Sigma) \\ & C(\sigma(a)) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Donde $\Sigma_e(a)$ es el ideal radical izquierdo de $C^*(a)$, los elementos de $C^*(a)$ que son aniquilados por todos los funcionales positivos en $C^*(a)$. El mapeo $\rho : C^*(a) \to A$ es la restricción de la representación regular en la proposición anterior. El cálculo funcional $\rho : C^*(a) \to A$ es un isomorfismo isométrico.

2. Funcionales positivos y estados positivos

Definimos $e \in A_+$ si y solo si $e = a^*a$ para algún $a \in A$. Un funcional lineal $f : A \to \mathbb{C}$ se dice que es positivo si, para todo elemento positivo e, se tiene que $f(e) \geq 0$, i.e., $f(A_+) \subseteq [0, \infty)$.

Sea A al contrario del segundo ejemplo, una función positiva definida; es decir, tenemos una forma hermitiana semidefinida positiva en $A \times A$ definida por $f(y)^* f(x)$. Una funcional lineal positiva f es automáticamente continua, $||f|| = f(1)$, como sigue: Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos para cualquier estado normalizado x:

$$|f(x)|^2 \leq f(1) f(x^* x)$$

entonces debemos mostrar que $f(x^*x) \leq f(1) si \|x\| \leq 1$, es decir. $f(1 - x^*x) \geq 0$ para $\|x\| \leq 1$. Para cualquier elemento auto-adjunto a con $\|a\| \leq 1$, una aplicación del cálculo funcional muestra que $1 - a$ es positivo, $\sigma(1 - a) \subseteq [0, 2]$.

Las funcionales lineales positivas de norma uno son conocidas como los estados de A, denotados por S_A. Los estados de A forman un subconjunto convexo compacto de A' en la topología débil*, S_A es claramente convexo y cerrado

$$S_A = \bigcap_{a \in A_+} \{f \in A' : f(a) \in [0, \infty)\},$$

por lo tanto compacto por el teorema de Banach-Alaoglu. Por el teorema de Krein-Milman, hay puntos extremos de S_A, llamados estados puros, cuya importancia será discutida más tarde. Para finalizar esta sección, identificamos estados como las funcionales lineales que satisfacen $\|f\| = f(1) = 1$.

Lema Si $f \in A'$ satisface $1 = f(1) = \|f\|$, entonces f es un estado.

Demostración. Lo que realmente mostraremos es que para cualquier f de este tipo y para cualquier elemento normal $a \in A$, $f(a)$ está en el casco convexo cerrado K de $\sigma(a)$. Primero notamos que K es la intersección de todos los discos cerrados que contienen $\sigma(a)$ (esto es cierto para cualquier conjunto convexo compacto en el plano). Entonces, si $f(a) \notin K$, entonces existe un $R > 0$ y $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $\sigma(a) \subseteq \{z : |z - z_0| \leq R\}$ pero $|f(a) - z_0| > R$. En particular, el radio espectral de $a - z_0$, $r(a - z_0)$, es menor o igual R. Por el cálculo funcional, $r(a - z_0) = \|a - z_0\|$. Sin embargo, $|f(a - z_0)| > R$ da una contradicción (utilizando $\|f\| = f(1) = 1$). $\square$

La siguiente construcción de representaciones es conocida como la construcción GNS después de Gelfand, Naimark, y Segal ([GN], [S]). La idea básica es usar una funcional lineal positiva para convertir un cociente de la representación regular izquierda de un C^*-álgebra en una representación.

Teorema Dada una funcional lineal positiva $f : A \to \mathbb{C}$, existe una representación cíclica $\pi : A \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con un generador $\xi \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle \pi(a)\xi, \xi \rangle = f(a).$$

Si $\pi : A \to \mathcal{H}$ es otra representación cíclica con un generador ξ' tal que $f(a) = \langle \pi(a)\xi', \xi' \rangle$, entonces π y π' son unitariamente equivalentes.

Demostración Para un funcional lineal positivo f, sea $N = \{a \in A : f(a^*a) = 0\}$. Este es claramente un subespacio cerrado, y de hecho es un ideal a la izquierda: si $n \in N$, $a \in A$, entonces

$$f((an)^*(an)) = f(n^* a^* an) \leq f(n^* n) f((a^* a) n^* (a^* a)) = 0$$

por Cauchy-Schwarz. Considere el cociente A/N como un espacio vectorial, y defina el producto interno

$$\langle x + N, y + N \rangle_f = f(y^* x).$$

Esto está bien definido ya que si $x, y \in A$, $b \in N$, entonces

$$f((b+y)^*(b+a)) = f(b^*b) + f(b^*a) + f(b^*y) + f(b^*a) = 0$$

y cada uno de los tres términos en el lado derecho es cero, es decir,

$$f(b^* y) \leq f(a^* a) f(b^* b) = 0.$$

Sea $\mathcal{H}_f$ la completación de A/N con respecto a la norma $\|x + N\|_f = \sqrt{\langle x + N, x + N \rangle}$. La representación a la izquierda,

$$A \to \mathrm{End}(\mathcal{A}/N), a \mapsto L_a, L_a(x + N) = ax,$$

da una representación

$$\pi : A \to \mathrm{End}(\mathcal{A}/N), a \mapsto L_a, L_a(x + N) = ax,$$

porque N es un ideal a la izquierda (aquí queremos decir 'representación' en el sentido puramente algebraico). Queremos mostrar que π es continua (con respecto a $\| \cdot \|$) y se extiende a una representación $\bar{\pi} : A \to B(\mathcal{H}_f)$ de C^*-álgebras.

Para esto, notamos que

$$\|\bar{\pi}(a)\| \leq \|a\|.$$

Sea $x \in \mathcal{H}_f$ con $\|x\| = 1$. Necesitamos que $\|L_a\| \leq \|a\|$, es decir, $\|ax\|_f \leq \|a\| \|x\|_f$. Tenemos

$$\|L_a(x+N)\|_f = f(x^* a^* ax) = \langle \pi(a^* a)x, x \rangle \leq \|a^* a\| \|x\|^2 = \|a\|^2.$$

El funcional $g(b) = f(b^* a)$ está positivo con la norma $\|g\| = f(a^* a) \leq \|a\|^2$.

Por lo tanto, $g(a^* a) = \|a\|^2$.

La representación $f(a^* a) = \langle \pi(a) \pi(a^* a) \pi(a) \rangle = \|\pi(a)\|^2 \leq \|a\|^2$. Esto implica que π es continua con $\|\pi(a)\| \leq \|a\|$.

Sea U en el denso subespacio definido como $U(ax + N) = \pi(a) U(x + N)$.

Esto extiende a todo $\mathcal{H}_f$ y satisface

$$U_{\tau f}(a) = \tau(\pi(a)) U.$$

Para un funcional lineal positivo f y una constante $a > 0$, π_f y $\tau\pi$ son unitariamente equivalentes vía

$$U : \mathcal{H}_f \to \mathcal{H}_{\tau f}, Ux = \sqrt{a} x.$$

Solo necesitamos considerar los funcionales positivos de norma uno, S_A. Entre los estados, los estados puros corresponden a representaciones irreducibles.

Proposición Los estados puros de A corresponden a las representaciones irreducibles de A, es decir, si π es una representación cíclica con generador e, $\|e\| = 1$, y $f(a) = \langle \pi(a)e, e\rangle$, entonces f es puro si y solo si π es irreducible.

Demostración Asumamos que f es un estado puro, y supongamos $E \neq 0, 1$ es una proyección en el conmutador de $\pi(A)$, con $t := \|Ee\|^2 < 1$. Definimos funcionales lineales $g_i \in A'$ de la siguiente manera

$$g_1(a) = \frac{1}{t}\langle \pi(a)Ee, Ee\rangle, g_2(a) = \frac{1}{1-t}\langle \pi(a)E^{\perp}e, E^{\perp}e\rangle,$$

donde $E^{\perp} = 1 - E$. Claramente $f = g_1 + g_2$ y los g_i son estados ya que

$$tg_1(a) = \langle \pi(a)Ee, Ee\rangle = \langle E\pi(a)Ee, e\rangle = \langle E\pi(a)Ee, Ee\rangle.$$

Esto muestra que g_1 es positivo y $g_1(1) = \|Ee\|^2/t = 1$, por lo que g_1 es un estado (por el lema anterior). Un argumento similar muestra que g_2 también es un estado. Como f es puro, tenemos $f = g_1$, es decir, $\pi(a)Ee = t\langle a, e\rangle e$ para todo $a \in A$. Luego $E = 1$ (por la densidad de $\pi(A)e$), una contradicción. Por lo tanto, π es irreducible y $f = tg_1 + (1-t)g_2$ para algunos $g_2 \in S_A$. Mostraremos que $g = f$. Defina una semi-definida positiva (semidefinida) en el espacio denso $\pi(A)e \subseteq \mathcal{H}_f$ por

$$\langle \pi(a)e, \pi(b)e\rangle_f = tg_1(b^*a).$$

Tenemos

$$0 \leq tg_1(a^*a) = f(a^*a) - (1-t)g_2(a^*a) \leq f(a^*a)$$

para que $[\cdot,\cdot]$ esté acotado. Por el lema de Riesz, existe algún T tal que $[x, y] = \langle x, Ty\rangle$. T conmuta con $\pi(A)$ desde que se mantiene la igualdad a continuación:

$$tg_1((b^*c)a) = \langle \pi(b^*c)e, T\pi(a)e\rangle = \langle \pi(b^*a)e,$$

$$HT\pi(c)e\rangle = \langle \pi(b^*a), H\pi(c)e\rangle = tg_1(b^*a).$$

Como π es irreducible, $H = r \cdot 1$ es un escalar y tenemos

$$tg_1(a) = tg_1(1^a) = \langle \pi(a)e, rf(a)\rangle.$$

Así que $g_1 = f$. Similarmente, $g_2 = f$ y f es un estado puro.

3. Teorema Generalizado de Gelfand–Naimark

El espectro de Gelfand Si A es un álgebra abeliana o un $*-$álgebra A (Si un álgebra de Banach no satisface la condicion $\|a^*a\| = \|a\|^2$ la llamamos simplemente $*-$álgebra) con topología débil, su espectro de Gelfand, denotado como Δ_A, es la colección de morfismos de A hacia los números complejos en la categoría apropiada. Específicamente, si A es un álgebra conmutativa con una topología, definimos el espectro de Gelfand de A como la colección de todos los homomorfismos en el algebra continuos en los números complejos. Denotado como:

$$\Delta_A = LCAbAlg(A, C)$$

Donde LCAbAlg significa el algebra abeliana localmente convexa, de manera similar, si A es un $*-$álgebra conmutativa con una topología, definimos su espectro de Gelfand Δ_A como la colección de todos los $*-$álgebra $*-$homomorfismos continuos hacia los números complejos:

$$\Delta_A = LCAbAlg^*(A, C)$$

En la literatura, el espectro de Gelfand se define normalmente como la colección de ideales maximales. La definición funcional dada aquí es mucho más restrictiva y coincide con las definiciones usuales solo para C^*-álgebras o álgebras normadas.

Proposición:(Completitud) El espectro Δ_A es un subconjunto cerrado débil* de A^*.

Proposición:(Compacidad) Con respecto a la topología débil* en Δ_A, un subconjunto cerrado $F \subseteq \Delta_A$ es compacto si y solo si cada para todo $a \in A$, $\hat{a}$ está acotado.

Proposición:(Funcionalidad) Si $f : A \to B$ es un homomorfismo continuo (o $*-$homomorfismo) entre álgebras abelianas (o $*-$álgebras), entonces el mapeo de conjuntos

$$\Delta_f : \Delta_B \to \Delta_A$$

$$p \mapsto f(p)$$

es continuo con respecto a las topologías débiles* en Δ_A y Δ_B.

Un espacio topológico se llama **completamente regular** si los puntos pueden separarse de conjuntos cerrados a través de funciones continuas de valor real.

Proposición:(Separación y regularidad) Con respecto a la topología débil*, el conjunto Δ_A es un espacio de Tychonoff (completamente regular, Hausdorff).

Teorema(Espectro de Gelfand) Si A es un álgebra localmente convexa o un $*-$álgebra , y su espectro de Gelfand Δ_A es el conjunto de homomorfismos hom(A, C) en la categoría apropiada, entonces Δ_A es un subconjunto cerrado débil* del dual topológico A^* y hereda una topología del espacio de Tychonoff. Topologías en $C(\Delta)$

El ideal de Gelfand es un ideal I en A de codimensión 1, cerrado si A tiene una topología y cerrado bajo la involución si A es un $*-$álgebra. El cociente A/I es $\mathbb{C}$, y el mapa de cociente es un $*-$homomorfismo si A es un $*-$álgebra.

El radical de Gelfand: El radical de Gelfand R es el núcleo de la transformación de Gelfand, y es la intersección de todos los ideales de Gelfand. Si A tiene una topología, el radical de Gelfand es cerrado; si tiene una involución, el radical de Gelfand también es cerrado bajo ella.

Topologias en $C(\Delta_A)$: El espacio $C(\Delta_A)$ tiene una topología débil que hace que todos los mapeos de evaluación sean continuos, lo cual se asocia fácilmente con la convergencia puntual en el espectro. La imagen de la transformación de Gelfand denotada por $\hat{A}$ hereda esta topología. Por otro lado, dado que el radical de Gelfand Ges un ideal cerrado del álgebra localmente convexa, la imagen de la transformación de Gelfand $\hat{A} \simeq A/G$ tiene una topología de cociente localmente convexa. Estas dos topologías en $\hat{A}$ coinciden. Sin embargo, es importante señalar que el espacio de funciones continuas rara vez está cerrado bajo la topología de convergencia puntual. Se necesita una topología más fuerte para que el álgebra $C(\Delta_A)$ sea cerrada, pero entonces ya no es obvio que la transformación de Gelfand sea continua. La topología natural más fuerte en $C(\Delta_A)$ es la topología compacto-abierta (es decir, convergencia uniforme en conjuntos compactos), que está definida por las seminormas:

$$|f|_K = \sup_{p\in K} |f(p)|,$$

Donde K es cualquier subconjunto compacto de Δ_A, y las operaciones algebraicas son continuas con respecto a esta topología. Dado que $\hat{A}$ es una subálgebra de $C(\Delta_A)$, hereda la topología compacto-abierta. La topología original (débil) en A es estrictamente más débil que la topología compacto-abierta en $\hat{A}$, a menos que los únicos subconjuntos compactos del espectro Δ_A sean los subconjuntos finitos.

La topología compacto-abierta tiene otro sentido interesante y natural, y es la existencia de un teorema de Stone–Weierstrass para espacios de Tychonoff. Dado que el espectro Δ_A de cualquier álgebra A es un espacio de Tychonoff, se sigue que $\hat{A}$ es denso en $C(\Delta_A)$ con la topología compacto-abierta.

Proposición (Stone–Weierstrass para espacios de Tychonoff): Si Δ es un espacio de Tychonoff y A es una $*-$subálgebra de $C(\Delta)$ que separa los puntos de Δ y contiene las funciones constantes, entonces A es denso en $C(\Delta)$ con la topología compacto-abierta.

Teorema Generalizado de Gelfand–Naimark: Si Δ_A es el espectro de Gelfand de un álgebra semisimple, localmente convexa $*-$álgebra A, entonces la transformada de Gelfand es un $*-$ homomorfismo de A a un $*$-subálgebra densa de $C(\Delta_A)$, el $*-$álgebra de funciones complejas continuas con la topología compacto-abierta. [2]

4. Teorema CP-Gelfand-Naimark

En este parte, generalizamos el teorema de Gelfand-Naimark para C*-álgebras no conmutativas [1] en el contexto de la teoría de convexidad CP [8][9][10]. Demostramos que cualquier C*-álgebra A es isomorfa al conjunto de todas las funciones covariantes uniformemente continuas con valores en $B(H)$ sobre las representaciones irreducibles $\mathrm{Irr}(A : H)$ de A en H, que se anulan en el límite 0. Aquí, H es un espacio de Hilbert con una dimensión suficientemente grande. Denotamos por Rep(A) [resp. Repc(A), Irr(A)] al conjunto de todas las representaciones [resp. cíclicas, irreducibles] de A, y por Rep(A : H) [resp. Repc(A : H), Irr(A : H)] para especificar el espacio de Hilbert H en el que están confinadas las representaciones.

Definición: Sea A una C^*-álgebra y H un espacio de Hilbert, y $X \subset \mathrm{Rep}(A : H)$ un subconjunto invariante bajo la operación de equivalencia unitaria. Entonces, una función $\gamma : X \to B(H)$ se llama equivariante si $\gamma(u^*\pi u) = u^*\gamma(\pi)u$ para $\pi \in X$ y para todo isometría parcial u tal que $uu^* \geq p_\pi$. Denotamos por $A^E(X, B(H))$ al conjunto de todas las funciones acotadas equivariantes de X a $B(H)$, y escribimos $A^E_c(X, B(H))$ para el conjunto de todos los elementos c-continuos, donde c denota la topología débil ($c = w$), fuerte ($c = s$) o topología fuerte* ($c = s^*$) en $B(H)$. También denotamos por $A^E_u(X, B(H))$ el conjunto de todos los elementos uniformemente c-continuos, y en particular escribimos $A^E_{u,0}(X, B(H))$ para aquellos elementos que desaparecen en el límite 0.

Definimos el soporte (o subespacio esencial) $H\psi$ de ψ como el soporte de $\psi(A)$ en H, es decir:

$$H\psi := [|V|H]$$

donde

$$|V|H$$

representa el soporte esencial de V. Además, denotamos por $p\psi$ la proyección de H sobre $H\psi$. También definimos la dimensión cíclica $\alpha(A)$ [respectivamente, la dimensión irreducible $\alpha(A)$] como:

$$\alpha_c(A)[\text{resp. } \alpha_i(A)] := \sup\{\dim H\pi;\ \pi \in \mathrm{Repc}(A)[\text{resp. } \mathrm{Irr}(A)]\}$$

Teorema Sea A una C^*-álgebra y H un espacio de Hilbert de dimensión infinita con $dimH \geq \alpha_c(A)$. Entonces,

$$A \cong AE_c(\mathrm{Irr}(A : H)_c, B(H)) \text{ (*-isomorfismo).}$$

El teorema de dualidad CP establece que, si la dimensión de H es mayor o igual a $\alpha_c(A)$, entonces:

$$A \cong AC(Q_H(A), B(H)) \text{ (*-isomorfismo)}$$

donde definimos el espacio de estados CP de A para H como:

$$Q_H(A) := \{\psi \in CP(A, B(H)); \|\psi\| \leq 1\}$$

y por lo tanto el producto en $AC(Q_H(A), B(H))$ está definido en las representaciones de A en H que son continuas respecto a la topología c.Por lo tanto podemos ver el teorema de dualidad anterior como la restricción del teorema de dualidad CP en $Irr(A : H)_c$. Ahora procederemos a establecer una dualidad de A en $Irr(A : H)$, específicamente el teorema generalizado de Gelfand-Naimark para C^*-álgebras en el límite extremo CP $Irr(A : H)$ (en el caso unital) o $Irr(A : H) \cup 0$ (en el caso no unital).

Teorema Sea A una C*-álgebra y H un espacio de Hilbert de dimensión infinita con $\dim H \geq \alpha_c(A)$. (i) Si A es unital, entonces:

$$A \cong AE_u(\mathrm{Irr}(A : H), B(H)) \text{ (*-isomorfismo).}$$

(ii) Si A es cualquier C*-álgebra (unital o no unital), entonces:

$$A \cong AE_{u,0}(\mathrm{Irr}(A:H), B(H)) \text{ (*-isomorfismo)}$$

$$\cong AE_u(\mathrm{Irr}(A:H) \cup \{0\}, B(H)) \text{ (*-isomorfismo)}$$

Conclusión

En conclusión, las generalizaciones del teorema de Gelfand-Naimark presentadas en este trabajo destacan la versatilidad y profundidad de la teoría de álgebras C*. La construcción GNS no solo proporciona una herramienta poderosa para representar estas álgebras, sino que también subraya la importancia de los estados y los funcionales positivos en su estructura. A través de la exploración de estas representaciones y la conexión con el espectro de Gelfand, hemos enunciado demostraciones de cómo las álgebras C* pueden entenderse de manera más completa y cómo sus propiedades fundamentales se reflejan en sus representaciones operatorias. Estos resultados amplían nuestra comprensión y abren nuevas vías para futuras investigaciones en el campo de la teoría de álgebras.

Referencias

[1] Fujimoto, I., *A Gelfand-Naimark Theorem for C*-Algebras*, Pacific Journal of Mathematics, Vol. 184, No. 1, 1998.

[2] Carrion-Alvarez, M., *Variations on a Theme of Gelfand and Naimark*, Department of Mathematics, University of California, Riverside, CA 92521, USA, November 13, 2018.

[3] Arveson, W., *An Invitation to C*-Algebras*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 39, Springer.

[4] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis, Second Edition*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 96, Springer.

[5] Dixmier, J., *Les C*-Algèbres et Leurs Représentations*, Gauthier-Villars, 1969.

[6] Gelfand, I. M., & Naimark, M. A., *On the Imbedding of Normed Rings into the Ring of Operators on a Hilbert Space*, Matematicheskii Sbornik, 12(2), 1943, pp. 197–217.

[7] Segal, I. E., *Irreducible Representations of Operator Algebras*, Bulletin of the American Mathematical Society, 53(1), 1947, pp. 73–88.

[8] I. Fujimoto, ÇP-convexidad y sus aplicaciones", tesis doctoral, Universidad de Florida, 1990.

[9] "Dualidad CP para álgebras C* y en W.B. Arveson y R.G. Douglas (eds.), 'Teoría de Operadores/Álgebras de Operadores y Aplicaciones', Actas de Simposios en Matemáticas Puras, 51 (1990), Parte 2, 117-120.

[10] "Dualidad CP para álgebras C*", J. Teoría de Operadores, 30 (1993), 201-215.