Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

REMARKS ON THE SET OF FUNCTIONALS NON-ATTAINING MAXIMUM (IN ABSOLUTE VALUE) AND THE BISHOP-PHELPS THEOREM

Hernandez Garcia Kevin Alan

Lopez Diego Victor Heriberto

Martínez Ramírez Eder Said

Ejercicio abierto planteado para formar parte de la evaluación del segundo parcial del curso de Análisis Matemático III impartido por
Dr. Miguel Angel Valencia Bucio

20 de julio de 2024

Abstract

En análisis funcional, se ha establecido que un espacio de **Banach** es reflexivo si y solo si la topología débil tiene la propiedad de **Heine-Borel**. A partir de esto, se puede deducir que si A es un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio reflexivo V, entonces toda funcional lineal continua de V alcanza su máximo (en valor absoluto) en A. Este trabajo explora las implicaciones de lo que pasa si esto no se cumple y cómo se relaciona con el teorema de **Bishop-Phelps** en el contexto de espacios de **Banach complejos y reales**.

Introduction

Un resultado esencial en el Análisis Funcional es el teorema que establece las condiciones bajo las cuales un espacio de Banach es reflexivo. Este teorema relaciona la reflexividad de un espacio de Banach con la propiedad de Heine-Borel en la topología débil, proporcionando una caracterización elegante de la reflexividad en términos de propiedades topológicas. En este contexto, surge la pregunta de cómo se comportan los funcionales lineales continuos en espacios reflexivos. Es bien sabido que si un subconjunto convexo, cerrado y acotado de un espacio reflexivo V cumple ciertas condiciones, entonces todo funcional lineal continuo en V alcanza su máximo en dicho subconjunto. No obstante, surge una pregunta intrigante: ¿qué ocurre si estas condiciones no se cumplen? Es decir, ¿qué podemos decir sobre los funcionales lineales continuos que no alcanzan su máximo en ningún subconjunto convexo, cerrado y acotado de V , incluso cuando consideramos la bola cerrada unitaria de V ? y si ¿V no es reflexivo?. Este artículo busca explorar estas cuestiónes en detalle, analizando las implicaciones de los funcionales que no alcanzan su máximo en el contexto de los espacios de Banach, con un enfoque particular en la relación con el teorema de Bishop-Phelps. A través de este análisis, esperamos ofrecer una comprensión más profunda de la estructura y el comportamiento de los funcionales lineales en espacios de Banach, contribuyendo así al desarrollo continuo del Análisis Funcional.

Bishop-Phelps

El teorema de Bishop-Phelps es un resultado que nos da una característica importante sobre las funciones que siempre alcanzan su supremo en cualquier subconjunto cerrado, acotado y convexo en un espacio de Banach real. Este resultado se deduce de un lema más general.

Lema Supongamos que V es un espacio normado y $\varepsilon > 0$. Si $f, g \in V^*$, $\|f\| = 1 = \|g\|$, son tales que $|g(x)| \geq \varepsilon/2$ siempre que $f(x) = 0$ y $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\|f - g\| \geq \varepsilon \quad \text{o} \quad \|f + g\| \leq \varepsilon.$$

Demostración: Para probar el teorema suponemos que $f \in V^*$ y $\varepsilon > 0$. Podemos asumir que $\|f\| = 1$; por lo que pide el lema, queremos encontrar $g \in V^*$ tal que $|g(x)| \leq 1$ para todo x en $T = \{x : f(x) = 0$ y $\|x\| \leq 2\varepsilon^{-1}\}$, y para el cual existe x en S tal que $g(x) = 1 = \|g\|$. Sea C la cápsula convexa de la unión de los conjuntos T y $U = \{x : \|x\| \leq 1\}$, y supongamos que existe x_0 en U que también está en la frontera de C. Dado que C tiene interior no vacío, por el teorema de soporte (consulte [5]) existe $g \in V^*$, $\|g\| = 1$, tal que $\sup\{g(x) : x \in C\} = g(x_0)$. De ello se deduce que $g(x_0) = 1 = ||x_0||$, por lo que se aplica el lema y se demuestra el teorema. Por lo tanto, queda por demostrar que la interseccion de U y la frontera de C es no vacío. Para ello, elige z en U tal que $f(z) > 0$ y sea $K = (f(z))^{-1}\left(1 + 2\varepsilon^{-1}\right)$. Define un orden parcial en el conjunto $Z = \{x \in U : f(x) \geq f(z)\}$ de la siguiente manera, decimos que $x > y$ si

(i) $f(x) > f(y)$ y

(ii) $||x - y|| \leq K[f(x) - f(y)]$

Supongamos que W es un subconjunto totalmente ordenado de Z; por (i), la red de números reales $\{f(x) : x \in W\}$ es (acotada y) monótona, y por lo tanto converge a su supremo. De (ii) se sigue que W es una red de Cauchy; dado que V y W son completos se sigue que converge a un punto y en U. Por la continuidad de f y el orden, se deduce que y es una cota superior para W. Así, por el lema de Zorn, existe un elemento maximal x_0 en Z; dado que $x_0 \in U \subset C$, solo necesitamos mostrar que x_0 esta contenido en la forntera de C. Si no es así, entonces x_0 está en el interior de C, y existe $\alpha > 0$ tal que $x_0 + \alpha z \in C$.

De la definición de C vemos que existen y en U, x en T, y λ en $[0, 1]$ tales que $x_0 + \alpha z = \lambda y + (1 - \lambda)x$. Entonces $f(z) \leq f(x_0) < f(x_0 + \alpha z) = \lambda f(y) \leq f(y)$, así que $y \in Z$. Además, $y - x_0 = (1 - \lambda)(y - x) + \alpha z$. Así,

$$\|y - x_0\| \leq (1 - \lambda)\|y - x\| + \alpha \leq$$
$$(1 - \lambda)(||y|| + ||x||) + \alpha \leq (1 - \lambda)(1 + 2\epsilon^{-1}) + \alpha$$
$$\leq (1 - \lambda + \alpha)(1 + 2\epsilon^{-1})$$

Por otro lado, $f(y - x_0) = (1 - \lambda)f(y) + \alpha f(z) \geq (1 - \lambda + \alpha)f(z)$, entonces $\|y - x_0\| \leq K[f(Y) - f(x_0)]$. Esto muestra que $y > x_0$, una contradicción que completa la prueba. ■

Demostración rescatada de [1].

Una posible generalización de este teorema permanece abierta: Supongamos que E y F son espacios de Banach, y sea $\mathcal{CL}(E, F)$ el espacio de todas las transformaciones lineales continuas de E en F, con la norma habitual. ¿Para qué E y F son aquellos T tales que $|f| = \|Tx\|$ (para algún x en E con $\|x\| = 1$)) densos en $\mathcal{CL}(E, F)$? Esto es cierto para E arbitrario si F es un ideal en $\mathcal{M}(A)$ (el espacio de funciones acotadas en el conjunto A, con la norma supremo).

Mas aun, si C es un conjunto convexo cerrado y acotado, sea $C' = \{f \in V^* : f(x) = \sup\{f(y) : y \in C\}$ para algún $x \in C\}$. Una ligera modificación del argumento anterior muestra que C es denso en V^*. Este resultado es conocido como el teorema de Bishop-Phelps.

Un contraejemplo al teorema de Bishop-Phelps en espacios vectoriales complejos.

En 1958 Victor Klee se preguntó si cada subconjunto cerrado, acotado y convexo de un espacio de Banach debe tener un punto de soporte.

Definición (V. Klee, 1958). [6] Sea C un subconjunto convexo de un espacio localmente convexo real V. Un punto x en la frontera de C es un punto de soporte si existe una funcional lineal continua $\phi \in V^*$ tal que $|\phi(x)| = \sup_{y\in C} |\phi(y)|$ (y entonces ϕ es un funcional de soporte).

En 1961, E.Bishop y R.R.Phelps en su artículo fundamental demostraron que el conjunto de funcionales de soporte para un subconjunto cerrado, convexo y acotado S de un espacio real de Banach V es denso en V^*, verificando así la conjetura de Klee. La pregunta natural de esta afirmación ¿Es cierto en un espacio de Banach complejo para cualquier cerrado?. El problema quedó abierto desde entonces. En 1977 Jean Bourgain demostró el notable resultado de que el teorema de Bishop Phelps es correcto si un espacio de Banach complejo X tiene la Propiedad del radón-Nikodym.[14] En esta parte se construye un espacio de Banach complejo X y un subconjunto convexo acotado cerrado S de X tal que el conjunto de los puntos de apoyo de S es vacio.
Para ello requerimos algunas definiciones.

Una **función analítica** real o compleja es una función infinitamente diferenciable tal que la serie de Taylor en cualquier punto x_0 en su dominio

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

converge a $f(x)$ para x en una vecindad de x_0. Sea H^∞ el álgebra de funciones analíticas acotadas en el disco unitario abierto D con la norma $\|f\| = \sup_{z\in D} |f(z)|$ y con la función identidad E. Cada punto $z \in D$ define un funcional de evaluación en el punto $\phi_z(f) = f(z)$. Es bien conocido que H^∞ puede identificarse con el espacio dual de algún espacio de Banach X tal que cada funcional ϕ_z es un elemento en X^* [3]. Utilizamos la notación $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para describir un producto escalar entre un espacio de Banach y su dual. Sea S la envoltura convexa cerrada generada por los elementos $\{\phi_z\}$. Entonces, obviamente, para cada punto $s \in S$ y cada función $f \in H^\infty$ tenemos

$$\|s\| \leq 1, \quad \langle s, E\rangle = 1 \quad (1)$$

y

$$\sup_{s\in S} |\langle s, f\rangle| = \|f\| \quad (2)$$

Principio del módulo máximo Dado un conjunto conexo y abierto $A \subset C$ (si no es conexo, lo que sigue es válido para cada componente conexa) y una función holomorfa no constante $f : A \to C$, entonces $|f|$ no alcanza su máximo sobre A, es decir:

$$\forall z \in A, \exists w \in A \text{ tal que } |f(w)| > |f(z)|$$

Si se tuviera la igualdad, la función sería constante.

Lema 1 Supongamos que $f \in H^\infty$ y $\|f\| \leq 1$. Entonces, o bien $f = \lambda E$, $|\lambda| = 1$ o para cada punto $s \in S$

$$\lim_{k\to\infty} \langle s, f^k\rangle = 0. \quad (3)$$

Demostración. Supongamos que $f \neq \lambda E$. Dado que las combinaciones lineales convexas finitas de evaluaciones en puntos son densas en el conjunto S y la secuencia $\{f^k\}$ está acotada por la norma, solo necesitamos considerar el caso

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_{z_i}$$

donde $\alpha_i \geq 0$ para todo i y $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$. Sea $\theta = \sup_{1\leq i\leq n} |f(z_i)|$. Entonces,

$$|\langle s, f^k\rangle| \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |f^k(z_i)| \leq \theta^k \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = \theta^k$$

Dado que $\|f\| \leq 1$, el principio del módulo máximo implica que $\theta < 1$, lo que implica (3). ■

Definición (Ideal Maximal) Supongamos que R es un anillo conmutativo con la identidad multiplicativa. Un ideal M en un anillo R se llama ideal máximo si $M \neq R$ y los únicos ideales que contienen M son M y R.

Definition Un álgebra de Banach es un álgebra $\mathbb{A}$ sobre $\mathbb{C}$ que tiene una norma $||.||$ respecto del cual $\mathbb{A}$ es un espacio de Banach y tal que para todo $a, b \in \mathbb{A}$,

$$||ab|| \leq ||a||||b||$$

Definición. Si $\mathbb{B}$ es un álgebra de Banach, entonces para un subconjunto $M \subset B$ denotamos por $alg(M)$ la subálgebra de $\mathbb{B}$, generada por M, que consta de todas las combinaciones lineales de productos (finitos) de elementos en M. (Esta es la subálgebra más pequeña de $\mathbb{B}$ que contiene M.) Su cierre $alg(M)$, en $\mathbb{B}$ (que puede ser tratado como la finalización), se denominará subálgebra de Banach de $\mathbb{B}$, generada por M.

Lema 2 Supongamos que existe un elemento $s \in S$ y una función $f \in H^\infty$ tal que $\langle s, f\rangle = \|f\| = 1$. Entonces, para cualquier entero positivo n,

$$\langle s, f^n\rangle = 1. \quad (4)$$

Demostración. Sea M el espacio de ideales maximales del álgebra H^∞ y sea $C(M)$ el álgebra de todas las funciones continuas en M con la norma sup. El álgebra H^∞ es una subálgebra de Banach del álgebra $C(M)$. Sea $\hat{s}$ una extensión que conserva la norma del funcional s sobre el espacio $C(M)$. Por el teorema de Riesz, existe una medida de Borel regular $d\nu$ en M tal que la igualdad

$$\langle s, g\rangle = \int_M g\, d\nu$$

se cumple para cualquier función $g \in H^\infty$. Las condiciones (1) implican que

$$\int_M d|\nu| \leq 1 \quad \text{y} \quad \int_M d\nu = 1.$$

Significa que la medida $d\nu$ es una medida de probabilidad no negativa en M. Esto implica que la función f es igual a la función identidad en el soporte de la medida $d\nu$, lo que implica (4). ■

Un predual de un álgebra de von Neumann, es un espacio de Banach cuyo espacio dual es isométricamente isomorfo al álgebra de von Neumann, donde un álgebra de von Neumann es una C^*-álgebra de operadores acotados definidos en un espacio de Hilbert que es cerrado en la topología de operadores débil y contiene al operador identidad

T alcanza su norma denotado por $NA(X,Y)$ la coleccion de todos los operadores en $CL(X,Y)$ que alcanzan la norma si existe $x \in S_X$ tal que $||Tx|| = ||T||$.

Teorema 1 Supongamos que el módulo de la funcional $g \in H^\infty$ alcanza su máximo en el conjunto S. Entonces existe un número complejo α tal que $g = \alpha E$.

Demostración. Existe un elemento $s_0 \in S$ tal que

$$|\langle s_0, g\rangle| = \sup_{s\in S} |\langle s, g\rangle|$$

De la ecuación (2) tenemos que $|\langle s_0, g\rangle| = ||g||$. Si g es la función cero, entonces podemos poner $\alpha = 0$. Si g es una función distinta de cero, entonces existe un número complejo λ tal que $\langle s_0, \lambda g\rangle = |\lambda|||g|| = 1$. Ponemos $f = \lambda g$. Entonces (4) y el lema 1 implican que $f = \gamma E$ y $g = \lambda f = \lambda\gamma E$.

Por lo tanto, la linea αE en H^∞ es el conjunto de todas las funcionales de soporte para el subconjunto convexo cerrado acotado S en el espacio predual V de H^∞.

Sea ϕ_0 la evaluación en el punto 0 y sea L la línea en V generada por ϕ_0. Sea V_1 el espacio cociente V/L y $\pi_1 : V \to V_1$ sea el mapa cociente correspondiente. El espacio dual V_1^* es el anulador $\phi_0^\perp$ del vector ϕ_0 en el espacio V^*, que es el hiperplano H_0^∞ de todas las funciones en H^∞ que se anulan en 0. Ponemos $S_1 = \pi_1(S)$. Entonces, obviamente, el conjunto S_1 es cerrado, acotado y convexo. ■

Teorema 2 El conjunto de puntos de soporte de S_1 es vacío.

Demostración. Dado que la igualdad $\langle \pi_1(s), f\rangle = \langle s, f\rangle$ se cumple para cualquier punto $s \in S$ y cualquier funcional $f \in \phi_0^\perp$, el Teorema 1 implica que el único funcional de soporte posible para el conjunto S_1 es un funcional λE. Dado que $\langle \phi_0, E\rangle = 1$, la línea λE no tiene intersección con el subespacio $\phi_0^\perp$. ■

Por esta razón, el único funcional que alcanza un módulo máximo en el conjunto S_1 es el funcional cero y el conjunto de puntos de soporte del conjunto S_1 en el predual del espacio H_0^∞ es vacío. *Resultados rescatados de* [2]

Contraejemplos de Lindenstrauss y Béla Bollobás

Se establece que la pareja (X, Y) cumple con la propiedad de Bishop-Phelps (BPP) si $NA(X, Y)$ es densa en $L(X, Y)$.

En 1963, J. Lindenstrauss proporcionó en [8] un ejemplo de espacios de Banach X e Y en los que la pareja (X, Y) no cumple con la BPP, evidenciando además que dicha propiedad se cumple para una amplia gama de parejas (X, Y). En el trabajo [9] se puede encontrar un resumen de algunos de los hallazgos más relevantes en este campo hasta el año 2006.
Posteriormente, en 1970, Béla Bollobás en [10] evidenció una mejora en el resultado de Bishop-Phelps, al declarar que si un funcional $f \in X^*$ está cerca de alcanzar su norma en un punto $x \in S_X$, entonces es posible encontrar un funcional $g \in X^*$ que alcanza la norma en un punto tan cercano como se desee de x', de tal manera que g también está cerca de f. De manera más precisa, obtuvo el siguiente resultado que retomaremos mas adelante:

Sean $x \in S_X$ y $f \in S_X^*$ tales que $|f(x) - 1| < \varepsilon/2$ $(0 < \varepsilon < 1/2)$, entonces existen $g \in S_X^*$ y $y \in S_X$ tal que

$$g(y) = 1, ||g - f|| < \varepsilon \text{ y } ||y - x|| < \varepsilon + \varepsilon^2.$$

Este resultado fue bautizado como el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás, motivando una línea de investigación en donde el problema sería el de estudiar qué pares de espacios de Banach (X,Y) satisfacen un resultado análogo al obtenido en el Teorema de Bishop-Phelps-Bollobás. En 2008, Acosta, Aron, García y Maestre en [11] introducen la siguiente noción sobre el par (X,Y). Se dice que el par (X, Y) tiene la propiedad de Bishop-Phelps-Bollobás para operadores (BPBp), si para cada $0 < \varepsilon < 1$ existe $0 < \eta(\varepsilon) < \varepsilon$ cumpliendo la siguiente propiedad:

Si $T \in S_{(L(X,Y))}$ y $x_0 \in S_x$ son tales que $\|Tx_0\| > 1 - \eta(\varepsilon)$, entonces existen $S \in S_{(L(X,Y))}$ e $y_0 \in S_x$ satisfaciendo las siguientes condiciones:

$$\|Sy_0\| = 1, \quad \|y_0 - x_0\| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|S - T\| < \varepsilon.$$

Contraejemplo de Lindenstrauss
Tomamos $X = c_0$ y Y espacio de Banach.
Sea $T \in NA(c_0, Y)$, $1 = \|T\| = \|Tx\|$ con $x \in S_{c_0}$.

Fijado $0 < \delta < 1$, para $n > m$ será $x \pm \delta e_n \in B_{c_0}$, luego $\|Tx \pm \delta Te_n\| = 1$.

Supongamos que Y es estrictamente convexo. Entonces $Te_n = 0$ para $n > m$, luego $\dim T(c_0) < \infty$.

Supongamos que existe un operador no compacto de c_0 en Y.

Entonces $NA(c_0, Y) \neq L(c_0, Y)$.

Por ejemplo, Y puede ser estrictamente convexo e isomorfo a c_0.

En este caso particular, los operadores compactos que logran la norma son densos. Sin embargo, en otros contraejemplos conocidos (como los de Bourgain, Gowers, Acosta, etc.) se identifican operadores no compactos que no pueden ser aproximados por operadores que alcanzan la norma.

De aqui motiva la siguiente pregunta, ¿Es verdad que cualquier operador compacto entre espacios de Banach puede ser aproximado por operadores que llegan a la norma?

Lema (extensión del resultado de Lindenstrauss) Sea Y un epacio de Banach estrictamente convexo, si $X \neq c_0$, y $T \in NA(X, Y)$, entonces $\dim T(X) < \infty$.

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $1 = \|T\| = \|Tx\|$. Como $x \in c_0$, existe m tal que $|x(n)| < \frac{1}{2}$ para $n > m$. Sea $Z = \{z \in X : x(i) = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq m\}$ (codimensión finita en X). Para $z \in Z$ con $\|z\| \leq \frac{1}{2}$, se tiene $\|x \pm z\| \leq 1$. Por tanto, $\|Tx \pm Tz\| \leq 1$. Como Y es estrictamente convexo, $Tz = 0$. ∎

Definición (Grothendieck, 1950's) X tiene la propiedad de aproximación (AP) si para cada $K \subset X$ compacto y cada $\varepsilon > 0$, existe $F \in L(X, X)$ de rango finito tal que $\|Fx - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Notación X e Y Banach, $F(X, Y)$ operadores de rango finito, $K(X, Y)$ operadores compactos.

Resultados básicos
(Grothendieck) Y tiene AP sii $F(X, Y) = K(X, Y)$ para todo X.
(Grothendieck) X^* tiene AP sii $F(X, Y) = K(X, Y)$ para todo Y.
(Grothendieck) Si X^* tiene AP, entonces X tiene AP.
(Enflo, 1973) Existe $X \neq c_0$ sin AP.

Teorema Existen espacios de Banach X e Y y un operador compacto de X a Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Demostración: Tomamos $X \neq c_0$ sin la propiedad de aproximación (Enflo). X^* tampoco tiene la propiedad de aproximación entonces, existe Y y $T \in K(X, Y)$ con $T \notin F(X, Y)$. Podemos suponer $Y = T(X)$, que es separable y, por tanto, admite una norma equivalente estrictamente convexa (Klee). Aplicamos la extensión del resultado de Lindenstrauss: $NA(X, Y) \subseteq F(X, Y)$. Por tanto, $T \notin NA(X, Y)$. ∎

Otros ejemplos

Espacio de partida

Proposición X subespacio de c_0 tal que X^* no tiene la propiedad de aproximación. Entonces existe Y y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Definición: Una *base de Schauder* en un espacio normado V es una sucesión $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $v \in V$ existe una única secuencia de escalares $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con la propiedad de que:

$$v = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \lambda_k a_k$$

Ejemplo de Johnson y Schechtman, 2001 Existe X subespacio de c_0 con base de Schauder tal que X^* carece de la propiedad de aproximación.

Corolario Existe un espacio de Banach X con base de Schauder, un espacio Y y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Espacio de llegada

Espacios estrictamente convexos Y espacio estrictamente convexo sin la propiedad de aproximación. Entonces existe X y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Lema (Grothendieck) Y tiene la propiedad de aproximación si para cualquier subespacio cerrado X de c_0, $F(X, Y)$ es denso en $K(X, Y)$.

Subespacios de $L^1(\mu)$ Y subespacio del espacio complejo $L^1(\mu)$ sin la propiedad de aproximación. Entonces existe X y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Para ahonda mas sobre el desarrollo en los espacios de partida y espacios de llegada puede consultar [12] & [13]

Conclusión

El análisis realizado proporciona una serie de resultados significativos en relación con la reflexividad de los espacios de Banach. El teorema de Bishop-Phelps establece condiciones para la existencia de puntos de soporte en subconjuntos cerrados, convexos y acotados de un espacio de Banach real. Esto tiene implicaciones importantes para entender el comportamiento de los funcionales lineales continuos en estos espacios.
Los Contraejemplos de Lindenstrauss y Bollobás proporcionan casos donde la propiedad de Bishop-Phelps

no se cumple para espacios complejos, mostrando la importancia de las condiciones específicas del dominio y contradominio en la aproximación por operadores que alcanzan la norma.
Se discuten propiedades como la propiedad de aproximación y la compacidad de los operadores, mostrando cómo estas propiedades afectan la capacidad de aproximar operadores por aquellos que alcanzan la norma.
En conclusión, estos resultados proporcionan una comprensión más profunda de la estructura y el comportamiento de los espacios de Banach, reflexivos.

Referencias

[1] Bishop, E., & Phelps, R. R. *(1960) A proof that every Banach space is subreflexive. Communicated by Mahlon M. Day, August 19.*

[2] Lomonosov, V., *A Counterexample to the Bishop-Phelps Theorem in Complex Spaces. Dept of Mathematics, Kent State University, lomonoso@mcs.kent.edu, August 30, 1998*

[3] Hoffman, K., *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall Inc., 1962.

[4] Debs, G., Godefroy, G., & Saint Raymond, J., *Topological properties of the set of norm-attaining linear functionals. Can. J. Math., 47(2), 1995 pp. 318-329*

[5] Valencia Bucio M. A. (2024) *Análisis Matemático III. Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional, Lectura 5 "Forma Geometrica del teorema de Hahn-Banach"*

[6] Klee, V. L., Jr., *Extremal structure of convex sets. II*, Math. Z. 69 (1958), 90–104.

[7] Megginson, R. E., *An Introduction to Banach Space Theory.*

[8] Lindenstrauss, J., *On operators which attain their norm*, Israel J. Math. 1 (1963), 139-148.

[9] Acosta, M. D., *Denseness of norm attaining mappings*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat. 100 (2006), 10-30.

[10] Bollobás, B., *An extension to the theorem of Bishop and Phelps*, Bull. Lond. Math. Soc. 67 (1967), 97-98.

[11] Acosta, M. D., Aron, R. M., Garcia, D., & Maestre, M., *The Bishop-Phelps-Bollobás theorem for operators*, J. Funct. Anal. 254 (11) (2008), 2780-2799.

[12] Martín, M., *Norm-attaining compact operators*, *J. Funct. Anal.*, (2014).

[13] Martín, M., The version for compact operators of Lindenstrauss properties A and B.

[14] Lucas Mancheno Gomez, Dentabilidad en espacios de Banach. LA PROPIEDAD DE RADON-NIKODYM, (2020), pag 29.