Instituto Politécnico Nacional

Escuela Superior de Física y Matemáticas

Von Neumann's Algebras Factor

Lopez Diego Victor Heriberto

Lozano Vite Iris Paola

Martínez Ramírez Eder Said

Ejercicio abierto planteado para formar parte de la evaluación del cuarto parcial del curso de Análisis Matemático III impartido por
Dr. Miguel Angel Valencia Bucio

1 de julio de 2024

Abstract

Este trabajo ofrece una exploración integral de los factores de tipo I, II y III en el marco de las álgebras de von Neumann. Comenzamos discutiendo la estructura de los factores de tipo I, caracterizados por la presencia de proyecciones minimales y su clasificación en términos de productos tensoriales de espacios de Hilbert. Luego, abordamos los factores de tipo II, divididos en II_1 y II_∞, destacando su construcción mediante el enfoque de Gelfand-Neumark-Segal y explorando sus propiedades fundamentales relacionadas con las trazas y las proyecciones.

Continuamos examinando los factores de tipo III, donde estudiamos sistemas covariantes que escalan la traza y la invariancia bajo transformaciones de grupo. Utilizamos el formalismo de pesos normales semifinitos fieles para caracterizar estas álgebras de operadores y su estructura modular. Este análisis revela la rica interacción entre las acciones de grupo y las propiedades algebraicas de los factores de tipo III.

Introducción

Los teoremas de descomposición polar y espectral dicen que cada operador acotado en un espacio de Hilbert se descompone en una combinación de isometrías parciales y proyecciones, es decir, tenemos que las isometrías parciales y las proyecciones de un álgebra de von Neumann forman una estructura fundamental del álgebra. Estableceremos un orden parcial y una relación de equivalencia en el conjunto de proyecciones en términos de isometrías parciales en el álgebra, de acuerdo con la estructura de las proyecciones con este orden, las álgebras de von Neumann se clasifican en el tipo I, el tipo II_1, el tipo II_∞ y el tipo III. Se tiene que la estructura de las álgebras de von Neumann puede ser completamente determinada por su descomposición en una suma directa de álgebras de estos tipos. Las álgebras del tipo I se comportan muy naturalmente en el sentido clásico pues no introducen nada nuevo, el eje central de la teoría de las álgebras de von Neumann se centra en establecer métodos para analizar las de tipo II y tipo III.
Decimos que un álgebra de von Neumann A es un factor si $A \cap A' = \mathbb{C}1$. En otras palabras, un factor es un tipo especial de álgebra de von Neumann en la que su centro (el conjunto de elementos que conmutan con todos los elementos de la álgebra) es precisamente el campo de los números complejos $\mathbb{C}1$ donde 1 es la identidad en $\mathcal{CL}(H)$. Ademas denotamos $Z(A)$ como el centro de A el cual es por definición la subálgebra de aquellos elementos que conmutan con todos los elementos del álgebra.

1. Factores de tipo I

En teoría de conjuntos, un retículo es un conjunto parcialmente ordenado en el cual, para cada par de elementos, existen un supremo y un ínfimo, con esta definición tenemos lo siguiente:
Las proyecciones en $\mathcal{CL}(H)$ forman un reticulado ortogonal en el siguiente sentido,

1. $p \leq q \Leftrightarrow \operatorname{Im} p \subset \operatorname{Im} q$,
2. $p \wedge q$ es la proyección ortogonal sobre $\operatorname{Im} p \cap \operatorname{Im} q$,
3. $p^\perp = 1 - p$,
4. $p \vee q = (p^\perp \wedge q^\perp)^\perp$ es la proyección ortogonal sobre la clausura fuerte de $\operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$.

Teorema Si A es un factor y P y Q son dos proyecciones no nulas en A, entonces existe un elemento $T \in A$ tal que $PTQ \neq 0$. Además, es posible elegir T de manera que sea unitario.

Demostración: Supongamos que para cualquier operador unitario $U \in M$, se tiene que $PUQ = 0$. Entonces, $U^*PUQ = 0$ y

$$\bigvee_{U \in A} U^*PUQ = 0.$$

Pero $\bigvee_{U \in A} U^*PU$ conmuta con todos los operadores unitarios de A pues para todo unitario $\tilde{U} \in A$,

$$\left(\bigvee_{U \in A} U^*PU\right)\tilde{U} = \bigvee_{U \in A} U^*PU\tilde{U} = \bigvee_{U \in A} \tilde{U}\tilde{U}^*U^*PU\tilde{U} =$$

$$\tilde{U}\left(\bigvee_{U \in A} (U\tilde{U})^*P(U\tilde{U})\right) = \tilde{U}\left(\bigvee_{U \in A} \tilde{U}^*PU\right).$$

Por lo tanto, $\bigvee_{U\in A} U^*PU$ es la identidad ya que es una proyección en $Z(A)$, conduciendo así a una contradicción. ■

Corolario Sean P y Q proyecciones en un factor A. Entonces, existe una isometría parcial no nula U en A tal que $UU^* \leq P$ y $U^*U \leq Q$.

Demostración: Sea U la isometría parcial de la descomposición por el teorema anterior PXQ para algún X tal que $PXQ \neq 0$. Dado que $\operatorname{Im} U = \operatorname{Im} PXQ \subset \operatorname{Im} P$, se tiene que $UU^* \leq P$. Aplicando el mismo razonamiento a U^*, obtenemos la otra desigualdad. ■

Definición Si A es un álgebra de von Neumann, una proyección $P \in A$ no nula se dice minimal o átomo si se cumple la siguiente condición, dado $Q \in A$

$$Q \leq P \Rightarrow (Q = 0) \text{ o } (Q = P)$$

Definición Un factor de **tipo I** es un factor que contiene una proyección minimal.

1.1. Clasificación de los factores de tipo I

En esta sección clasificaremos todos los factores de tipo I. Consideremos $\mathcal{CL}(H)\otimes 1$ sobre el espacio de Hilbert $H\otimes K$. Se puede identificar con el conjunto de matrices diagonales en $H\otimes K = \bigoplus_i H$. Su conmutador es $1\otimes B(K)$, es el álgebra de todas las matrices que definen operadores acotados con todas sus entradas matriciales un múltiplo escalar de la matriz identidad en H. Una matriz con un sólo 1 en la diagonal y ceros en el resto de los coeficientes de las entradas es una proyección minimal.

Teorema Si A es un factor de tipo I sobre un espacio de Hilbert L, existen espacios de Hilbert H y K y un operador unitario $U : L \to H\otimes K$ tal que $UAU^* = \mathcal{CL}(H)\otimes 1$. Más aún, si L es separable $H = l^2(X)$ donde $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ para algún n $(n \leq \infty)$ y $K = PL$ para alguna proyección minimal P.

Demostración Asumiremos en la demostración que L es separable. Sea $\{P_1, P_2, \ldots\}$ una familia maximal de proyecciones minimales de A tales que $P_iP_j = 0$ para todo $i \neq j$. Veamos que $\bigvee_i P_i = 1$, es decir que $L = \bigoplus_i P_iL$. Si $1 - \bigvee_i P_i$ fuera no nulo, por el Corolario, existiría una isometría parcial $U \neq 0$ tal que

$$UU^* \leq P_1, \quad U^*U \leq 1 - \bigvee_i P_i$$

Por minimalidad $UU^* = P_1$, o sea que es minimal. Pero eso dice que U^*U también lo es. En efecto, si $Q \leq U^*U$ tenemos que $UQ \leq UU^*U \leq UU^*$, entonces $UQ = 0$ o $UQ = UU^*$. Si $UQ = 0$, como ImQ está contenido en el dominio inicial de U y $N_uU \cap \text{Im}U^* = 0$ de donde resulta $Q = 0$. Si $UQ = UU^*$, como $U = WP_{\text{Im}U^*}$ con W unitario, $P_{\text{Im}U^*}Q = U^*$, pero $P_{\text{Im}U^*}Q = Q$. Por lo tanto, se contradice la maximalidad del conjunto de los P_i pues $U\cdot U \leq 1 - \bigvee_i P_i$, donde U es una proyección minimal distinta a todos los P_i. Ahora, para cada i, elijamos una isometría parcial e_{1i} tal que $e_{1i}e_{1i}^* \leq P_1$ y $e_{1i}^*e_{1i} \leq P_i$. Por minimalidad, $e_{1i}e_{1i}^* = P_1$ y $e_{1i}^*e_{1i} = P_i$. Por lo tanto, A está generada por los e_{1i}. Si $A \in A$, podemos expresarlo como

$$A = \sum_{i,j} P_iAP_j,$$

donde la suma converge fuertemente. Observemos que

$$P_iAP_j = e_{1i}^*e_{1i}Ae_{1j}^*e_{1j} = e_{1i}^*e_{1i}e_{1i}^*e_{1i}Ae_{1j}^*e_{1j}e_{1j}^*e_{1j}.$$

Como $e_{1i}^*e_{1i}e_{1i}^*e_{1i} \in P_1MP_1 = \mathbb{C}p_1$, existen escalares λ_{ij} tales que

$$A = \sum_{i,j} \lambda_{ij}e_{1i}^*P_1e_{1j}$$

(la convergencia de la suma es irrelevante, solo necesitamos que A esté en la clausura fuerte de sumas finitas). Si n es la cardinalidad de $\{P_i\}$ y $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, definamos la aplicación U como

$$U : \ell^2(X, P_1\mathcal{L}) \to \mathcal{L}, \quad f \mapsto Uf = \sum_i e_{1i}^*f(i).$$

Observemos que U es unitario y $U^*e_{1i}U$ es una matriz en $\ell^2(X, P_1\mathcal{L})$ con el operador identidad en el lugar $(1, i)$ y ceros en el resto. El álgebra generada por estas matrices es $\mathcal{B}(\ell^2(X))\otimes 1$ en $\ell^2(X)\otimes P_1\mathcal{L}$. Así, obtenemos el resultado buscado. ■

Si M y N son dos álgebras de von Neumann sobre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{K}$ respectivamente, definimos el álgebra de von Neumann $M \otimes N$ como el álgebra de von Neumann sobre $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ generada por $\{x \otimes y : x \in M, y \in N\}$.

Definición Sea M un álgebra de von Neumann. Un sistema de unidades matriciales (s.u.m.) de tamaño n es una familia $\{e_{ij} : i, j = 1, 2, \ldots, n\}$ (con $n \leq \infty$) tal que:

1. $e_{ij}^* = e_{ji}$,
2. $e_{ij}e_{kl} = \delta_{jk}e_{il}$,
3. $\sum_i e_{ii} = 1$.

Observación: Tanto los e_{ii} como los operadores $e_{ij}e_{ij}^*$ y $e_{ij}^*e_{ij}$ son proyecciones.

El Teorema anterior muestra que los factores de tipo I sobre un espacio de Hilbert están completamente clasificados por dos parámetros (n_1, n_2) dados por:

$$n_1 = \text{rango de una proyección minimal de } M \quad (= \dim \mathcal{K}),$$
$$n_2 = \text{rango de una proyección minimal de } M_0 \quad (= \dim \mathcal{H}).$$

El problema del isomorfismo se descompone en dos aspectos:

1. El isomorfismo espacial: la equivalencia unitaria $\mathcal{L} \cong \mathcal{H} \otimes \mathcal{K} \cong \bigoplus_{i=1}^{n_1} \mathcal{H}$.
2. El isomorfismo abstracto: $A \cong \mathcal{B}(\mathcal{H})$, determinado solo por n_2.

Definición Un factor de tipo I_n es un factor de tipo I para el cual $n_2 = n$.
Definición La multiplicidad del factor de tipo I es el valor n_1.

Ahora determinaremos la estructura de todas las álgebras de von Neumann de dimensión finita. Denotemos por $M_n(\mathbb{C})$ al álgebra de von Neumann de todas las matrices $n \times n$ en un espacio de Hilbert de dimensión n.

Teorema (*) [2]
Sea M un álgebra de von Neumann de dimensión finita sobre el espacio de Hilbert H. Entonces, M es equivalente a $\bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(\mathbb{C})$ para ciertos enteros positivos $k, n_1, \ldots, n_k$. Más aún, existen espacios de Hilbert K_i y un operador unitario $u^* : \bigoplus_{i=1}^k l^2(X_i, K_i) \to H$ con $|X_i| = n_i$ tal que

$$uMu^* = \bigoplus_{i=1}^k \mathcal{B}(l^2(X_i)) \otimes 1$$

Observación: En el teorema anterior, no es necesario que la dimensión de H sea finita. El estudio de las álgebras de von Neumann se simplifica de esta manera. Sin embargo, se vuelve más interesante cuando consideramos subálgebras $N \subset M$. En particular, analicemos el caso de los factores, recordando que la identidad de M es la misma que la de N. Si N es un factor, diremos que N es un subfactor de M.

Teorema Si M es un factor de tipo I_n, todos sus subfactores de tipo I_m están determinados de manera única por una proyección minimal p del subfactor y por $0 < k \leq \infty$, tal que pMp es de tipo I_k y $mk = n$, salvo conjugación por operadores unitarios de M.

Demostración: Consideremos un subfactor N_1 de tipo I_m con un sistema de unidades matriciales generadoras $\{e_{ij}\}$. Tenemos que $M \cong N_1 \otimes e_{11}Me_{11}$, lo que implica que existe un valor k tal que $n = mk$ y $e_{11}Me_{11}$ es de tipo I_k. Además, podemos asegurar que $e_{11}Me_{11}$ es de tipo I, ya que $Z(e_{11}Me_{11}) = e_{11}Z(M)e_{11}$ y, como M tiene alguna proyección minimal p, $e_{11}pe_{11}$ también es una proyección minimal de $e_{11}Me_{11}$. El mismo argumento se aplica a N_2 con un sistema de unidades matriciales $\{f_{ij}\}$.
Además, por el Corolario, existen isometrías parciales u_i no nulas tales que $u_iu_i^* \leq e_{11}$ y $u_i^*u_i \leq f_{11}$. Tomemos una familia maximal de estas u_i de manera que las proyecciones $u_iu_i^*$ sean mutuamente ortogonales y $u_i^*u_i$ también lo sean. En particular, esto implica que

$$u = \sum_i u_i$$

es una isometría parcial. Veamos que esta isometría parcial satisface

$$uu^* = \sum_i u_iu_i^* = e_{11} \qquad u^*u = \sum_i u_i^*u = f_{11}$$

Es claro que satisfacen desigualdades. Como e_{11} y f_{11} son proyecciones minimales de N_1 y N_2 respectivamente, si fueran diferentes, podríamos definir $p = 1 - uu^*$ como una proyección tal que $p \leq e_{11}$ y pp^* sea ortogonal a $u_j u_j^*$ para cada j. Esto contradice la maximalidad del conjunto de proyecciones $\{u_j u_j^*\}$. Por lo tanto, $uu^* = e_{11}$. Lo mismo ocurre para f_{11}. Luego, es fácil verificar que

$$w = \sum_j e_{j1} u f_{1j}$$

es unitaria y satisface $w f_{lk} w^* = e_{kl}$. En efecto,

$$w f_{lk} w^* = \left(\sum_j e_{j1} u f_{1j} \right) f_{lk} \left(\sum_i f_{i1} u^* e_{1i} \right)$$

$$= \sum_{ji} e_{j1} u f_{1j} f_{lk} f_{i1} u^* e_{1i} = e_{k1} u f_{11} u^* e_{1l}$$

$$= \sum_{ijm} e_{k1} u_i f_{11} u^* j e_{1l} = e_{k1} e_{11} e_{1l} = ekl$$

Por lo tanto, $w N_2 w^* = N_1$. ■

Ahora podemos considerar el caso general en el que las álgebras de von Neumann no son factores. Sea N una subálgebra de von Neumann del álgebra de von Neumann de dimensión finita M. Según el Teorema (*), tenemos que

$$N = \bigoplus_{i=1}^{n} M_{k_i}(\mathbb{C}) \subset M = \bigoplus_{j=1}^{m} M_{r_j}(\mathbb{C})$$

Sean p_j las proyecciones minimales centrales en M y q_i las de N. Para cada par (i, j), $p_j q_i M q_i p_j$ es un factor y $p_j q_i N$ es un subfactor. Por lo tanto, podemos formar la matriz $\Lambda = (\lambda_{ij})$, donde λ_{ij} es el entero asociado a la inclusión $p_j q_i N \subset p_j q_i M q_i p_j$ según el Teorema anterior.

2. Factores de tipo II

Una álgebra de von Neumann M se dice que es de tipo II si M no tiene proyecciones abelianas no cero y si cada proyección central no cero en M mayorea una proyección finita no cero de M. Si M es finita y de tipo II, entonces se dice que es de tipo II_1. Si M es de tipo II y no tiene proyecciones finitas centrales no zero, entonces se dice que es de tipo II_∞.

Establecemos un orden parcial en el conjunto de proyecciones como sigue: Si p y q son proyecciones en un álgebra de von Neumann M diremos que $p \preceq q$ si hay una isometría parcial $u \in M$ tal que $uu^* = p$ y $u \leq q$. Diremos que p y q son equivalentes, a lo que escribimos $p \approx q$, si si existe una isometría parcial $u \in M$ tal que $uu^* = p$ y $u^* u = q$.

Definición. Una proyección p de un álgebra de von Neumann M se dice *infinita* si $p \approx q$ para alguna proyección $u \in M$ tal que $q < p$ y $p \neq q$. De lo contrario p se dice *finita.* Un álgebra de von Neumann se dice *finita* si su identidad es finita, y se dice *infinita pura* si no tiene proyecciones finitas distintas de la proyección nula. Un factor se dice *infinioa* si su identidad es infinita.

Teorema. El conjunto de clases de equivalencia de proyecciones en M es un conjunto totalmente ordenado.

Definición. Un factor de tipo II_1 es es un factor de dimensión infinita M en H que admite una traza, es decir, una funcional lineal $T : M \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que para todo $a, b \in M$ tenemos:

1. $Tr(ab) = Tr(ba)$
2. $Tr(aa^*) \geq 0$
3. Tr es ultradébilmente continua.

Además, esta traza se dice normalizada si $Tr(1) = 1$.

Teorema. Sea M un factor de tipo II_1 con Tr una traza positiva no nula ultradébilmente continua. Entonces, $\{Tr(p) : p \in M, p^2 = p \neq 0\} = [0, Tr(1)]$.

Demostración. Observemos primero que si dos proyecciones en M satisfacen $q < p$, entonces $Tr(q) < Tr(p)$. En efecto, como $p - q > 0$ y la traza es fiel tenemos que $Tr(p - q) > 0$, es decir que $Tr(q) < Tr(p)$.

Dado $r \in (0, Tr(1)]$, veamos que existe una proyección cuya traza sea exactamente r. Consideremos $S = \{p : p \in M, p^2 = p \neq 0, Tr(p) \leq r\}$. El conjunto S es parcialmente ordenado respecto del orden $\leq$. Si $\{p_\alpha\}$ es una cadena en S, $\bigvee p_\alpha \in M$ y está en la clausura fuerte de la cadena $\{p_\alpha\}$, por lo tanto pertenece a S. Aplicando el Lema de Zorn, tenemos que S tiene un elemento maximal q y $Tr(q) \leq r$.

Supongamos que $Tr(q) < r$. Veamos que existe $p \in M$ tal que $Tr(q) < Tr(p)$, lo cual daría una contradicción ya que $Tr(p - q) > 0$ implica que p no es equivalente a q y que existe una proyección p' equivalente a p tal que $q < p'$.

Como $Tr(q) < r$, existe una proyección q' tal que $0 < Tr(q') < r - Tr(q)$ por Teorema 7.1.16. Es decir que $Tr(q) < Tr(q + q') < r$. Pero $q < q \vee q' \leq q + q'$, salvo que $q = 1$, lo cual no sucede pues $Tr(q) < Tr(1)$. Pero $Tr(q) < Tr(q \vee q')$ que era lo que queríamos probar. $\square$

Corolario. Sea M un factor de tipo II_1. La aplicación Tr da un isomorfismo de conjuntos totalmente ordenados entre el conjunto de clases de equivalencia de proyecciones de M y $[0, Tr(1)]$.

Corolario. Sea M un álgebra de von Neumann de dimensión infinita con una traza Tr positiva ultradébilmente continua normalizada y fiel. Entonces, M es un factor de tipo II_1 si y sólo si $Tr = tr$ para toda traza tr ultradébilmente continua.

Sabemos que las clases de equivalencias de proyecciones en un factor forman un conjunto totalmente ordenado. Es conocido que en un espacio de Hilbert separable, ese conjunto puede ser, salvo isomorfismos, de diferentes tipos, en particular, pueden ser $[0, 1]$ (tipo II_1) y $[0, \infty]$ (tipo II_∞). Un factor de tipo II_∞ es un factor de la forma $M \otimes B(H)$ con M un factor de tipo II_1 y $dimH = \infty$. En los dos siguientes resultados probaremos esto.

Teorema. Sea M un factor de tipo II_∞. Entonces tenemos los siguientes resultados

(i) $\mathrm{Tr}(\lambda x) = \lambda \, \mathrm{Tr}(x)$ para $\lambda \geq 0$.

(ii) $\mathrm{Tr}(x + y) = \mathrm{Tr}(x) + \mathrm{Tr}(y)$.

(iii) Si $\{a_\alpha\}$ es una red creciente de operadores positivos con $\bigvee_\alpha a_\alpha = a$, entonces $\mathrm{Tr}(a) = \lim_\alpha \mathrm{Tr}(a_\alpha)$.

(iv) $\mathrm{Tr}(x^*x) = \mathrm{Tr}(xx^*)$.

(v) $\mathrm{Tr}(uxu^*) = \mathrm{Tr}(x)$ para todo operador unitario $u \in M$ y para cualquier $x \in M$ positivo.

(vi) Si p es una proyección en M, entonces p es finita si y sólo si $\mathrm{Tr}(p) < \infty$.

(vii) Si p y q son proyecciones en M con p finita, entonces $p \preceq q$ si y sólo si $\mathrm{Tr}(p) \leq \mathrm{Tr}(q)$.

(viii) pMp es un factor de tipo II_1 para cualquier proyección $p \in M$.

Demostración. Las dos primeras afirmaciones son inmediatas por la definición.

Para (iii) notemos que las entradas diagonales de las matrices positivas de la red conservan el mismo orden que las matrices de la red y las trazas de ellos son todos números positivos. Entonces, $\mathrm{Tr}(a)$ será el supremo de esas sumas. (iv) Es obvio usando multiplicación de matrices pues

$$\mathrm{Tr}(x^*x) = \sum_i \mathrm{Tr}((x^*x)ii) = \sum i, j \, \mathrm{Tr}((x^{)}ijxji) = \sum_{i,j} \mathrm{Tr}(x_{ji}(x^{)}_{ij}) = \mathrm{Tr}(xx^*).$$

(v) Se sigue de (iv) observando que $uxu^* = (u\sqrt{x})(\sqrt{x}u^*)$.

(vi) Si $\mathrm{Tr}(p) < \infty$ y p es infinita, existe una subproyección propia de p que tiene la misma traza que p. La diferencia de ambas proyecciones tendrá traza cero, lo cual es imposible.

Si $\mathrm{Tr}(p) = \infty$ y q es una proyección finita tal que $q \preceq p$, podemos suponer que $q \leq p$ y que $\mathrm{Tr}(q) < \infty$. Entonces $\mathrm{Tr}(p - q) = \infty$, por lo cual podemos construir una sucesión infinita de proyecciones equivalentes a q mutuamente ortogonales cuyo supremo sea menor que p. A través de una biyección con una subsucesión propia, p domina una proyección infinita, por lo cual es ella misma infinita.

(vii) Sale fácilmente como en el caso en que M es un factor de tipo II_1. En efecto, si $p \preceq q$, existe p' equivalente a p tal que $q - p \geq 0$. Entonces $\mathrm{Tr}(q - p) \geq 0$, o equivalentemente, $\mathrm{Tr}(q) \geq \mathrm{Tr}(p) = \mathrm{Tr}(p')$.

(viii) Sólo hay que observar que $\mathrm{Tr}(p) < \infty$ significa que $p \preceq q$ para alguna q cuya matriz tiene todas sus entradas cero excepto una cantidad finita de entradas diagonales que son 1. Obviamente qMq es de tipo II_1

para esa q porque corresponde a la matriz en bloques que es nula salvo en el bloque correspondiente a q (mirada como una matriz diagonal con una cantidad finita de 1 y el resto 0).

□

Como resultado del teorema anterior tenemos el siguiente corolario esperado

Corolario Sea M un factor de tipo II_∞ en un espacio de Hilbert separable y Tr sea la dada por una descomposición $N \otimes \mathcal{B}(\mathcal{H})$ con N de tipo II_1. Entonces, Tr define un isomorfismo de conjuntos totalmente ordenados entre las clases de equivalencias de proyecciones en M y el intervalo $[0, \infty]$.

Ejemplo (Construcción usando GNS) Las construcción de factores de tipo II es no trivial, utilizando la unicidad de la traza, encontraremos una forma de construir factores de tipo II_1 como caso particular de la construcción de Gelfand-Neumark-Segal. En $M_n(\mathbb{C})$ fabriquemos una sucesión creciente A_n de *-álgebras de tal forma que $A_1 = A$ y $A_{n+1} = A_n \otimes A$. Consideremos la -álgebra $A_\infty = \bigcup_{n\geq 1} A_n$. Además, si normalizamos la traza matricial en todas las álgebras de matrices tenemos que $Tr(a\otimes 1) = Tr(a)$. Así, Tr define de forma natural una traza positiva fiel y normalizada en A_∞. Completaremos a A_∞ para obtener un álgeba de von Neumann, primero definamos un producto escalar $\langle x, y\rangle = Tr(y^*x)$, de tal manera que A_∞ es un espacio pre-Hilbert, denotamos como H al espacio de Hilbert asociado.
Como $M_n(\mathbb{C})$ es un álgebra de von Neumann y su traza satisface que

$$Tr(y^*x^*xy) \geq \| x \|^2 Tr(y^*y)$$

Tenemos que el operador $L_x(y) = xy$ en A_∞ satisface la siguiente desigualdad

$$\| L_x(\zeta) \| \geq \| x \| \| \zeta \|$$

(con $\| x \|$ la norma del operador y $\| \zeta \|$la norma de ζ como elemento de H).Con esto podemos extender a L_x en forma única a un operador sobre H (que por conveniencia denotaremos igual).Además,

$$(L_x)^* = L_{x^*}$$

y

$$A_\infty \longrightarrow B(H)$$

$$x \longrightarrow L_x$$

define una representación fiel de la -álgebra A_∞ en H. Definimos como M al álgebra de von Neumann generada por los L_x y veamos a A_∞ como una -subálgebra de M.
Si $\zeta \in H$ es la unidad de A_∞, la traza se define como

$$Tr(a) = Tr(\zeta^* a\zeta) = \| a\zeta, \zeta \|$$

Luego Tr se extiende a una traza en M que es positiva, ultradébilmente continua y normalizada. Como A_∞ es ultradébilmente densa en M y Tr es única en A_∞, concluimos que Tr es única en M y además Tr es fiel en M, por lo tanto M es un factor de tipo II_1.
Más aún, consideremos el siguiente teorema y un coloralio inmediato de este.

Teorema Si M es un álgebra de von Neumann sobre H y ϕ es una funcional lineal positiva ultradébilmente continua en M, entonces existen vectores $v_i \in M$ tales que$\sum_i \| v_i \|^2 < \infty$ y para todo $x \in M$

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle xv_i, v_i\rangle$$

Corolario. Si ϕ es una funcional lineal positiva ultradébilmente continua en el álgebra de von Neumann M, entonces la representación GNS π_ϕ es ultradébilmente continua sobre un álgebra de von Neumann en H_ϕ.

Sea A un álgebra de von Neumann abeliana y sea G un grupo discreto infinito contable. Un homomorfismo $\alpha : g \in G \longmapsto \alpha_g \in Aut(A)$ es llamado una acción de G sobre A y el triplete (A, G, α) es llamado un sistema covariante. Cuando $A = \mathbb{C}$, lo denotamos simplemente como R(G) y lo llamamos el grupo (izquierdo) de álgebra de von Neumann. Una acción α de G sobre A es llamada libre si para todo $g \in G$, $g \neq e$, α_g es libre; es llamada ergódica si no hay proyección invariante en A bajo $\alpha(G)$ diferente de 1 y 0.
Más aún, consideremos el siguiente teorema y un coloralio inmediato de este.

Definición. Un álgebra de von Neumann M es llamada atómica si cada proyección no zero en M mayoriza una proyección minimal no zero.

Proposición. El grupo de álgebra de von Neumann $R(G)$ de un grupo G infinito discreto contable es finito. Es un factor si y sólo si cada clase conjugada

$$C(g) = \left\{hgh^{-1} : g \in G\right\}, g \neq e,$$

es infinita excepto por $g = e$. En este caso, $R(G)$ es un factor de tipo II_1.

Definición. El álgebra de von Neumann generada por $\pi(A)$ y $\{u(g) : g \in G\}$ donde (π, u) es una representación de A, es llamado el producto cruzado de A por G con respecto a α y lo denotamos por $R(A, G, \alpha)$.

Teorema. Sea A un álgebra de von Neumann abeliana equipada con una acción ergódica libre en G grupo discreto infinito contable, y sea $R = R(A, G, \alpha)$. Se tienen los siguientes resultados:

1. R es de tipo II_1 si y solo si A admite una traza normal finita fiel invariante bajo la acción α.
2. R es de tipo II_∞ si y solo si A es no atómica y admite una traza fiel semi-finita, pero infinita, normal invariante sobre α.

Notemos que una traza normal semifinita invariante bajo α es necesariamente fiel y única salvo multiplicación por un escalar. Si ϕ es dicha traza de A entonces el $supp(\phi)$ es invariante bajo α, luego $supp(\phi) = 1$ si ϕ es no zero. Además, se tiene que la suma de dos trazas normales semifinitas invariantes sobre A es también una traza normal semifinita invariante sobre A.

Teorema. Existe un factor de cada tipo actuando en un espacio de Hilbert separable.

3. Factores de tipo III

Grupo de Automorfismos de Un Parámetro Escalado por la Traza

Supongamos que $\{\mathbb{N}, \mathbb{R}, \theta, \tau\}$ es un sistema covariante sobre la línea real $\mathbb{R}$ que escala una traza semifinita fiel normal τ hacia abajo, es decir,

$$\tau \circ \theta_s = e^{-sT}\tau, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Sea $\mathcal{M} = \mathcal{N}^0$. Fijamos $T > 0$. Entonces, para cualquier proyección no nula $e \in \mathcal{M}$, existe una proyección $e_0 \leq e$ tal que

$$e_0 \perp \theta_T(e_0).$$

A tal proyección se le llama una *proyección errante* de θ_T. Definimos

$$s_T(e_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_T^n(e_0) \in \mathcal{N}^0.$$

Elegimos una familia máxima de proyecciones errantes $\{e_i : i \in I\}$ para θ_T tal que

$$\theta_T(e_i) \perp e_i, \quad i \in I;$$

$s_T(e_i) \perp s_T(e_j)$, para $i \neq j, i, j \in I$.
La maximalidad de la familia $\{e_i : i \in I\}$ implica que

$$\theta_T(e) \leq e, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \theta_T^n(e) = 1, \quad \text{con } e = \sum_{i \in I} e_i.$$

Definimos

$$f_n = \sum_{|k| \leq n} \theta_T^k(e), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entonces tenemos que

$$f_n \nearrow 1$$

$$I_\theta(f_n) = \int_{\mathbb{R}} \theta_s \left(\sum_{|k| \leq n} \theta_T^k(e) \right) ds$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{|k|\le n} \theta_T^k \left(\int_{\mathbb{R}} \theta_s(e) ds \right) \\
&= \sum_{|k|\le n} \theta_T^k \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \int_{mT}^{(m+1)T} \theta_s(e) ds \right) \\
&= \sum_{|k|\le n} \theta_T^k \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \theta_T^m \left(\int_0^T \theta_s(e) ds \right) \right) \\
&= \int_0^T \left(\sum_{|k|\le n} \theta_T^k \left(\sum_{m\in\mathbb{Z}} \theta_T^m (e) \right) \right) ds \\
&= (2n+1)T < +\infty.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, concluimos lo siguiente:

$$m_{I_\theta} \supset f_n \mathcal{N} f_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Lema. En el contexto anterior, la acción θ es integrable en el sentido de que

$$m_{I_\theta}^\sigma\text{-cierre débil} = \mathcal{N}.$$

Ahora, elijamos un peso normal semifinito fiel $\varphi \in \mathcal{M}_0(\mathcal{M})$ y definimos

$$\hat{\varphi} = \varphi \circ I_\theta \in \mathcal{M}_0(\mathcal{N}).$$

Entonces, el peso normal semifinito fiel $\hat{\varphi}$ es θ-invariante y por lo tanto obtenemos

$$
\begin{aligned}
\theta_s((D\hat{\varphi} : D\gamma)_t) &= (D\hat{\varphi} : D\gamma)_{t-s} : D\gamma_{-s} : D\gamma_t) \\
&= (D\hat{\varphi} : D\gamma)_t e^{-ist(D\hat{\varphi}:D\gamma_t)},
\end{aligned}
$$

para todo $s, t \in \mathbb{R}$. De aquí obtenemos un grupo unitario de un parámetro $\{h_t^{\hat{\varphi}} : t \in \mathbb{R}\}$ tal que

$$\theta_s(h_t^{\hat{\varphi}}) = e^{-ist} h_t^{\hat{\varphi}},$$

tal que

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^{\hat{\varphi}} &= \mathrm{Ad}(h_t^{\hat{\varphi}})|_{\mathcal{M}}, \quad t \in \mathbb{R}; \\
\mathcal{N} &= \mathcal{M} \rtimes_{\sigma^\varphi} \mathbb{R}, \quad \theta = \hat{\sigma}.
\end{aligned}
$$

Teorema (Connes-Takesaki). Si $\{\mathbb{N}, \mathbb{R}, \tau, \theta\}$ es un sistema covariante que escala la traza, entonces necesariamente el sistema dual $\mathcal{M} \rtimes \mathbb{R}$ con $\mathcal{N} = \mathcal{N}^0$ el sistema covariante está descrito de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
\sigma_t^{\varphi} &= \mathrm{Ad}(h_t^{\varphi})|_{\mathcal{M}}, \quad t \in \mathbb{R}; \\
\mathcal{N} &= \mathcal{M} \rtimes_{\varphi} \mathbb{R}, \quad \theta = \hat{\sigma}.
\end{aligned}
$$

para cualquier peso normal semifinito fiel $\varphi \in \mathcal{M}_0(\mathcal{N})$.

Teorema (Connes - Takesaki). Si $\{\mathbb{N}, \mathbb{R}, \tau, \theta\}$ es un sistema covariante que escala la traza, entonces el conmutante relativo $\mathcal{M}' \cap \mathcal{N}$ del punto fijo $\mathcal{M} = \mathcal{N}^0$ es el centro $\mathcal{Z}$ de $\mathcal{N}$.

Definición El normalizador

$$\hat{\mathcal{U}}(\mathcal{M}) = \{u \in \mathcal{U}(\mathcal{N}) : u\mathcal{M}u^* = \mathcal{M}\}$$

de $\mathcal{M}$ en $\mathcal{N}$ se llama el *grupo unitario extendido* de $\mathcal{M}$.

Proposición. Para que $u \in \mathcal{U}(\mathcal{N})$ sea miembro del grupo unitario extendido $\hat{\mathcal{U}}(\mathcal{M})$ es necesario y suficiente que

$$(\theta_t u)t = u^* t u \in \mathcal{U}(\mathcal{N}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

La función $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} + c(t) = (\partial_{\theta_t} u)$ es necesariamente un cociclo y, por lo tanto, un miembro de $Z_\theta^1(\mathbb{R}, \mathcal{U}(\mathcal{N}))$. Recordemos que el grupo de automorfismos de un parámetro θ es estable en el sentido de que cada θ-cociclo es una cohomología. Por lo tanto, el mapeo coacotado $\partial_\theta : u \in (\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{M})) \mapsto \partial_\theta \in Z_\theta^1(R, \mathcal{U}(\mathcal{C}))$ es una sobreyaección, entonces tenemos exactamente la sigiente suceción:

$$1 \to \mathcal{U}(\mathcal{M}) \to (\tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{M})) \xrightarrow{\partial_\theta} Z_\theta^1(R, \mathcal{U}(\mathcal{C})) \to 1$$

Restringiendo la secuencia exacta anterior a $\mathcal{U}(\mathcal{C})$, obtenemos las siguientes secuencias exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{T} & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\partial_\theta} & \mathrm{B}^1_\theta(R,\mathcal{U}(\mathcal{C})) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{M}) & \longrightarrow & \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\partial_\theta} & Z^1_\theta(R,\mathcal{U}(\mathcal{C})) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

Añadiendo la última fila, obtenemos el siguiente cuadrado característico de suceciones exactas $Aut(\mathcal{M}) \times \mathbb{R}$-equivalentes.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & & 1 & & 1 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathbb{T} & \xrightarrow{i} & \mathcal{U}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\partial_\theta} & \mathrm{B}^1_\theta(R,\mathcal{U}(\mathcal{C})) & \longrightarrow & 1 \\ & & i\downarrow & & i\downarrow & & i\downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & \mathcal{U}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{i} & \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\partial_\theta} & Z^1_\theta(R,\mathcal{U}(\mathcal{C})) & \longrightarrow & 1 \\ & & Ad\downarrow & & \tilde{A}d\downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & Int(\mathcal{M}) & \xrightarrow{i} & Cnt_r(\mathcal{M}) & \xrightarrow{\dot{\partial}_\theta} & \mathrm{H}^1_\theta(R,\mathcal{U}(\mathcal{C})) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

Teorema (Katayama-Sutherland-Takesaki) Asociado con un factor M está el cuadrado característico equivariante $\mathrm{Aut}(M) \times \mathbb{R}$ anterior (*).

3.1. Invariante Característico

Mirando la columna vertical del medio del cuadrado, reconocemos la siguiente suceción exacta equivariante.

$$N = Cnt_r(\mathcal{M}),\ H = \tilde{\mathcal{U}}(\mathcal{M}),\ A = (U(C)),\ G = Aut(\mathcal{M}) \times \mathbb{R};$$

$$E : 1 \longrightarrow A \xrightarrow{i} H \rightleftarrows^{j}_{\mathbf{s}} N \longrightarrow 1$$

$$s(m)s(n)s(mn)^{-1} = \mu(m,n)\cdot e_A, \quad m,n \in N;$$
$$\alpha_g(s(g)^{-1}mg)s(m) = \lambda(m,g)\cdot e_A.$$

Si cambiamos la sección transversal s por otra s', tal que $m \in N$ se mapea a $s'(m) \in H$, entonces la diferencia está en A, es decir,

$$\forall m \in N, \quad s'(m)s(m)^{-1} = f(m) \in A.$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} s'(mns') &= f(mns')f(m)f(n)f(s') = f(m)f(n)f(s'mn)s' \\ &= f(m)f(n)f(\mu_m,n)s' \\ &= f(m)f(n)u_{mn}^{-1}u_{mn}s' \\ &= u'(mn,n)s'mn; \\ u'(mn,n) &= f(u_{mn})f(n) = \mu(u_{mn},n); \\ a_g(s'^{-1}ag) &= \lambda(g,s'^{-1}g)\mu(a_g(s'^{-1}g)^{-1})a_g(s'^{-1}g)\mu(g,mn); \\ &= \lambda(g,s'^{-1}g)a_g(\lambda(g^{-1}s'g)m)\mu(g,mn); \\ &= \lambda(g,s'^{-1}g)a_g(\lambda(g^{-1}s'g)m)(s'); \\ \chi'(m,g) &= \chi(m,g)\chi(g,g^{-1}\chi(m,g)^{-1}); \\ &= \chi(m,g)\delta_f(m,g); \end{aligned}$$

El grupo $Z(G,N,A)$ de pares (λ,μ) en $A^G \times Z^2(N,A)$ que satisface la identidad del cociclo natural se llama el grupo cociclo característico y cada elemento del grupo

$$B(G,N,A) = \{f = (\theta, f_2, f_3) : f \in A^N\}$$

es llamado coacotado. Entonces el grupo cociente:

$$N(G, N, A) = Z(G, N, A)/B(G, N, A)$$

entonces se llama el grupo de cohomología característico. Si $\chi = [\lambda, \mu]$ proviene de la secuencia exacta corta equivariante anterior E, entonces se llama el invariante característico de E y se escribe $\chi(E) = [\lambda, \mu] \in \Lambda(G, N, A)$.

Volviendo a la secuencia exacta equivariante de $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \times \mathbb{R}$:

$$E : 1 \longrightarrow u(E) \longrightarrow \tilde{u}(M) \longrightarrow Cntr(\mathcal{M}) \longrightarrow 1,$$

obtenemos el invariante característico:

$$\chi\mathcal{M} = \chi(E) \in \Lambda_{\mathrm{mod}\times\delta}(\mathrm{Aut}(\mathcal{M}) \times \mathbb{R}, Cntr(\mathcal{M}), u(E)),$$

que se llama el invariante intrínseco de $\mathcal{M}$.

Ahora enunciamos el resultado principal sobre la clasificación de conjugación cociclo de las acciones amenables de grupo en un factor AFD debido a A. Connes, V.F.R. Jones, A. Ocneanu, C. Sutherland, Y. Kawahigashi, K. Katayama y M. Takesaki.

Teorema. i) Si α es una acción de un grupo compacto local G en un factor $\mathcal{M}$, entonces el pullback del invariante intrínseco:

$$\chi_\alpha = \alpha^*(\chi\mathcal{M}) \in \Lambda_{\alpha\times\delta}(G \times \mathbb{R}, N, \tilde{u}(E))$$

es un invariante de conjugación cociclo cuando $N = \alpha^{-1}(\mathrm{Cntr}(\mathcal{M})) \nsubseteq G$, no necesitando ser un subgrupo cerrado sino un subgrupo de Borel.

ii) Si $\mathcal{M}$ es AFD y G es un grupo discreto contable amenable, entonces la combinación:

$$\{\mathrm{mod}, N = \alpha^{-1}(\mathrm{Cntr}(\mathcal{M})), \chi_\alpha\} \in \mathrm{Hom}(G, \mathrm{Aut}(u(E))) \times \mathfrak{N} \times \Lambda_{\alpha\times\delta}(G \times \mathbb{R}, N, \tilde{u}(E))$$

es un invariante completo de la clase de conjugación cociclo de la acción α, donde $\mathfrak{N}$ es el conjunto de todos los subgrupos normales de G. También cada combinación de invariantes con restricción natural ocurre como el invariante de una acción de G.

. Espacio de Fibras Modulares y Álgebra de Sección Transversal

Sea $\mathcal{M}$ un factor de tipo III. Hemos visto que el producto cruzado $\mathcal{N} = \mathcal{M} \rtimes_{\sigma_\varphi} \mathbb{R}$ es semifinito para cada peso semifinito normal fiel φ en $\mathcal{M}$ y que

$$\mathcal{M} \rtimes_{\sigma_\varphi} \mathbb{R} \cong \mathcal{M} \rtimes_{\sigma_\psi} \mathbb{R}$$

para cualquier otro peso semifinito normal fiel ψ en $\mathcal{M}$. Además, si θ es la acción en $\mathcal{N}$ dual a σ^φ, entonces tenemos

$$\mathcal{N} \rtimes_\theta \mathbb{R} \cong \mathcal{M}.$$

Queremos encontrar una construcción de la álgebra semifinita von Neumann $\mathcal{N}$ sin fijar un peso semifinito normal fiel φ en $\mathcal{M}$. Entonces, sea $\mathcal{W}_0 = \dots$

$\mathcal{W}_0(\mathcal{M})$ sea el conjunto de todos los pesos normales semifinitos fieles en $\mathcal{M}$. Fijar $t \in \mathbb{R}$ y considerar una relación $\sim_t$ en el conjunto $\mathcal{M} \times \mathcal{W}_0$ por lo siguiente:

$$(x, \varphi) \sim_t (y, \psi) \iff x(D\varphi : D\psi)_t = y$$

La regla de la cadena de las derivadas de Connes produce que la relación $\sim_t$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{M} \times \mathcal{W}_0$. Denotamos la clase de equivalencia $[x, \varphi]$ por $x\varphi^t$ y definimos:

$$\mathcal{M}(t) = (\mathcal{M} \times \mathcal{W}_0)/\sim_t = \{x\varphi^t : x \in \mathcal{M}, \varphi \in \mathcal{W}_0\}$$

Es fácil ver que el mapa $x \in \mathcal{M} \mapsto x\varphi^t \in \mathcal{M}(t)$ es una biyección, de modo que podemos definir la estructura de espacio vectorial en $\mathcal{M}(t)$, trasplantando eso de $\mathcal{M}$ y también fijamos

$$\|x\varphi^t\| = \|x\|, \quad x \in \mathcal{M}, \varphi \in \mathcal{W}_0.$$

Luego, la biyección $x \in \mathcal{M} \mapsto x\varphi^t \in \mathcal{M}(t)$ da la estructura de espacio de Banach dual en $\mathcal{M}(t)$. Luego definimos una operación binaria de $\mathcal{M}(s) \times \mathcal{M}(t)$ a $\mathcal{M}(s + t)$ como sigue:

$$x\varphi^s y\psi^t = x\sigma^{\varphi}_{-t}(y)\varphi^{s+t}, \quad s,t\in\mathbb{R}, \quad x,y\in\mathcal{M}.$$

Luego definimos

$$\mathcal{F} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} \mathcal{M}(t) : \text{ unión disjunta.}$$

Llamamos a este espacio de fibras $\mathcal{F}$ el espacio de fibras modulares de $\mathcal{M}$ y escribimos $\mathcal{F}(\mathcal{M})$ cuando necesitamos indicar que $\mathcal{F}$ proviene de $\mathcal{M}$. Luego definimos la involución en $\mathcal{F}$:

$$(x\varphi^t)^* = \sigma^{\varphi}_{-t}(x^*)\varphi^{-it}, \quad x\varphi^t\in\mathcal{M}(t).$$

Luego obtenemos

$$(\lambda x+\mu y)^* = \bar{\lambda}x^* + \bar{\mu}y^*, \quad x,y\in\mathcal{F}, \quad \lambda,\mu\in\mathbb{C},$$

$$(xy)^* = y^*x^*; \quad x^{*} = x, \quad \varphi,\psi\in\mathcal{W}_0, \quad t\in\mathbb{R},$$

$$\varphi^t\psi^{-it} = (D\varphi : D\psi)_t,$$

siempre que la suma y el producto sean posibles.

Ahora, para cada $\varphi\in\mathcal{W}_0$, definimos un mapa $\Phi_\varphi : \mathcal{M}\times\mathbb{R}\to\mathcal{F}$ como sigue:

$$\Phi_\varphi(a,t) = a\varphi^t \in\mathcal{F}, \quad (a,t)\in\mathcal{M}\times\mathbb{R}.$$

Teorema. Los mapas $\{\Phi_\varphi : \varphi\in\mathcal{W}_0\}$ tienen las siguientes propiedades:

i) En un subconjunto acotado $B\subset\mathcal{M}$, el mapa $\Phi_\varphi^{-1}\Phi_\psi$ es un homeomorfismo en $B\times\mathbb{R}$ relativo a cualquier topología de operadores en B excepto la topología de norma y la topología usual en $\mathbb{R}$;

ii) En el espacio completo $\mathcal{M}\times\mathbb{R}$, el mapa $\Phi_\varphi^{-1}\Phi_\psi$ es un homeomorfismo relativo a la topología de Arens-Mackey $\tau(\mathcal{M},\mathcal{M}_*)$ en $\mathcal{M}$ y la topología usual en $\mathbb{R}$;

iii) La derivada de Connes toma la siguiente forma:

$$(D\varphi : D\psi)_t = \Phi_\varphi^{-1}\Phi_\psi(1,t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

De hecho, tenemos, para cada $x\in\mathcal{M}$ y $t\in\mathbb{R}$,

$$\Phi_\varphi^{-1}\Phi_\psi(x,t) = (x(D\varphi : D\psi)_t, t)\in\mathcal{M}\times\mathbb{R}.$$

Este teorema nos permite introducir una topología en el espacio de fibras $\mathcal{F}$ trasplantando la topología del producto de $\tau(\mathcal{M},\mathcal{M}_*)$-topología en $\mathcal{M}$ y la línea real $\mathbb{R}$ a través del mapa Φ_φ, lo cual no depende de la elección de un peso normal semifinito fiel φ.

Observación. La topología de norma en $\mathcal{M}$ no puede ser trasplantada a $\mathcal{F}$ independiente de la elección de $\varphi\in\mathcal{W}_0$, porque la derivada de Connes

$$\{(D\varphi : D\psi)_t : t\in\mathbb{R}\}$$

no es continua en norma.

Definición. La τ-topología en $\mathcal{F}$ significa la topología introducida por el último teorema basada en la topología de Arens-Mackey $\tau(\mathcal{M},\mathcal{M}_*)$ en $\mathcal{M}$.

El teorema anterior también nos permite introducir una estructura de Borel en el espacio de fibras $\mathcal{F}$ a partir de la topología introducida arriba que es independiente de la elección de $\varphi\in\mathcal{W}_0$. En consecuencia, podemos considerar una sección transversal medible así como secciones transversales integrables de $\mathcal{F}$, es decir, un mapa de Borel $s\in\mathbb{R}\mapsto x(s)\in\mathcal{F}$ tal que

$$x(s)\in\mathcal{M}(s), \quad s\in\mathbb{R};$$

$$\|x\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \|x(s)\|\, ds,$$

recordando que cada $\mathcal{M}(s)$ es un espacio de Banach. Sea $\Gamma^1(\mathcal{F})$ el conjunto de todas las secciones transversales integrables. Entonces se sigue que $\Gamma^1(\mathcal{F})$ es un álgebra de Banach involutiva bajo la siguiente estructura:

$$(\lambda x+\mu y)(t) = \lambda x(t) + \mu y(t);$$

$$(xy)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(s)y(t-s)\,ds;$$

$$x^*(t) = x(-t)^*;$$

$$\|x\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \|x(s)\|\,ds.$$

Llamamos $\mathcal{F}(M)$ al álgebra de sección transversal modular para M y escribimos $\mathcal{F}(M)^\sigma$ cuando es necesario indicar de qué álgebra medida está provista. Para tener una estructura de álgebra de von Neumann basada en el álgebra de haces, necesitamos construir un espacio de Hilbert sobre el cual el álgebra de sección transversal representada actúe naturalmente. Así que consideramos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en el cual la acción del álgebra medida opuesta M' del conmutante en M, hace del espacio de Hilbert un bimódulo ${}_M\mathcal{H}_N$. Vamos a construir un haz donde los espacios sobre los cuales actúa la fibra son extraídos desde arriba y desde la derecha, donde $F(M)_\sigma$ es la fibra que actúa desde arriba basada en $F(M)^\sigma$, y $F(N)^\sigma$ es la que está basada en N^σ).

Conclusión

Este estudio proporciona una caracterización exhaustiva de los factores de tipo I, II y III en las álgebras de von Neumann. Hemos demostrado que los factores de tipo I contienen proyecciones minimales y pueden ser clasificados mediante productos tensoriales de espacios de Hilbert. Los factores de tipo II han sido delineados en términos de II_1 y II_∞, destacando su construcción mediante el método GNS y sus propiedades relacionadas con las trazas y las proyecciones.

Además, hemos explorado los factores de tipo III, enfocándonos en sistemas covariantes que escalan la traza y la invariancia bajo transformaciones de grupo. Utilizando pesos normales semifinitos fieles, hemos caracterizado la estructura modular de estas álgebras de operadores. Este enfoque no solo profundiza nuestra comprensión teórica de los factores de tipo III, sino que también subraya su relevancia en la teoría de álgebras de von Neumann y su aplicación en diversas áreas de las matemáticas y la física.

Referencias

[1] Barnett, L., *Free product Von Neumann Algebras of type III*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 123, Number 2, February 1995.

[2] Galina, E., *Álgebras de von Neumann y Representaciones de Grupos*, Facultad de Matemática, Astronomía y Física, Universidad Nacional de Córdoba, 2007.

[3] Strătillă, Ş., & Zsidó, L., *Lectures on von Neumann algebras*, BucuresŒti, Romania: Editura Academiei, 1979.

[4] Takesaki, M., *Structure of a von Neumann Algebra of Type III*, Department of Mathematics, UCLA, PO Box 951555, Los Angeles, California 90095-1555. Postal Mail Address: 3-10-39 Nankohdai, Izumi-ku, Sendai, 981-8003 Japan, 1979.

[5] Takesaki, M., *Theory of Operator Algebras I*, Department of Mathematics, University of California at Los Angeles, Los Angeles, California 90024, USA, 1979.