

1. Given the problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = xy, \quad 0 < x < \pi, \quad 0 < y < \pi/2$$

$$u(0, y) = \cos y, \quad u(\pi, y) = -\cos y, \quad 0 \leq y \leq \pi/2,$$

$$u(x, 0) = \cos x, \quad u(x, \pi/2) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

To calculate $u(x, y)$ by using $h = k = 0.1\pi$.

```
===== Problem 1: Poisson's Equation =====  
Calculated values for u(x,y) at the interior grid points:  
[[ 0.17280566  0.36808384  0.56462078  0.75322506]  
 [ 0.05308544  0.17634641  0.34763904  0.55590732]  
 [-0.05888306 -0.00497721  0.13264527  0.33323001]  
 [-0.16674955 -0.18234927 -0.08686531  0.08580494]  
 [-0.26991131 -0.3539141  -0.30563491 -0.17319831]  
 [-0.36416343 -0.51164728 -0.51115282 -0.42425872]  
 [-0.4413133  -0.64202241 -0.68617945 -0.64522131]  
 [-0.48632191 -0.7243905  -0.80994855 -0.81447547]  
 [-0.46787474 -0.72548732 -0.85889424 -0.91578773]]  
Note: Matrix rows correspond to the x-direction, and columns correspond to the y-direction.
```

2. Given the problem

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{4K} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t,$$

$$T(1, t) = 100 + 40t, \quad 0 \leq t \leq 10; \quad \frac{\partial T}{\partial r} + 3T = 0 \quad \text{at} \quad r = \frac{1}{2}$$

$$T(r, 0) = 200(r - 0.5), \quad 0.5 \leq r \leq 1,$$

and use $\Delta t = 0.5$, $\Delta r = 0.1$, and $K = 0.1$ to calculate $T(r, t)$

By (a) the forward-difference method

(b) the backward-difference method

© the Crank-Nicolson algorithm.

Forward-Difference Method

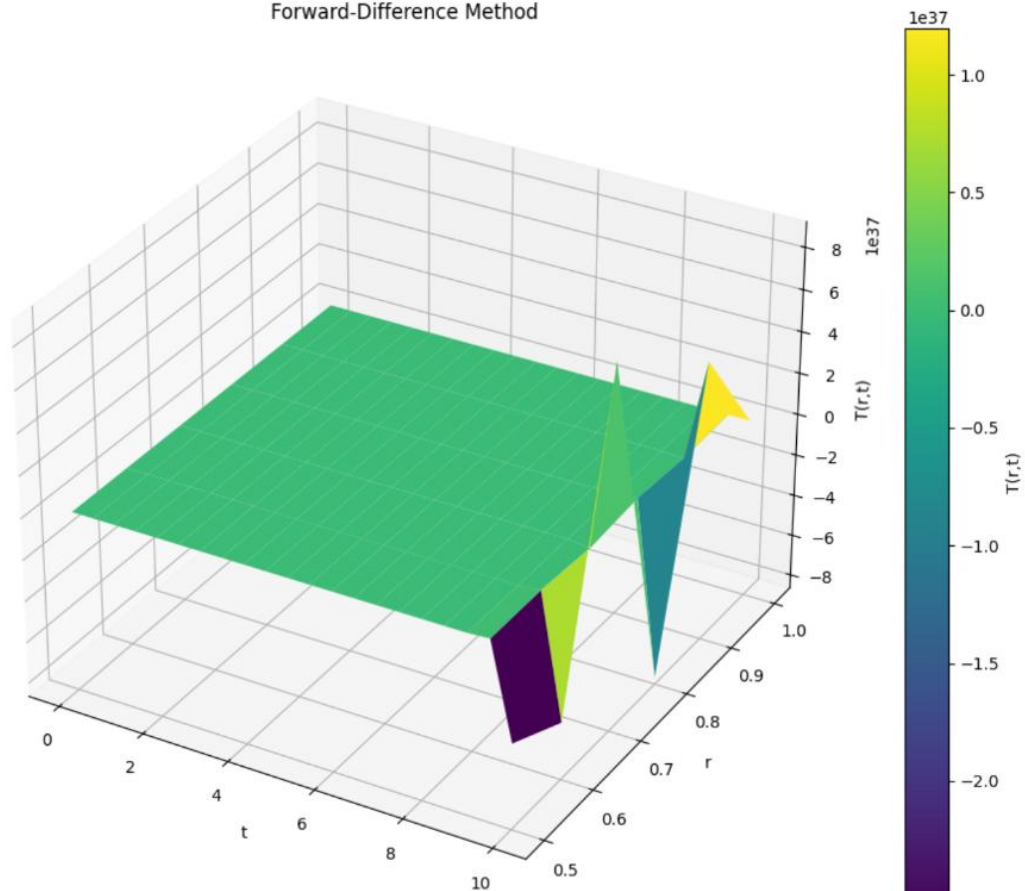
r	t	T(r,t)
0.500	0.000	0.000000
0.600	0.000	20.000000
0.700	0.000	40.000000
0.800	0.000	60.000000
0.900	0.000	80.000000
1.000	0.000	100.000000
0.500	0.500	66.666667
0.600	0.500	86.666667
0.700	0.500	97.142857
0.800	0.500	110.000000
0.900	0.500	-1986.666667
1.000	0.500	120.000000
0.500	1.000	-980.952381
0.600	1.000	-1275.238095
0.700	1.000	178.095238
0.800	1.000	-44685.238095
0.900	1.000	79557.777778
1.000	1.000	140.000000
0.500	1.500	41225.396825
0.600	1.500	53593.015873
0.700	1.500	-988169.523810
0.800	1.500	3436666.349206
0.900	1.500	-3946807.830688
1.000	1.500	160.000000
0.500	2.000	-18077282.539682
0.600	2.000	-23500467.301587
0.700	2.000	113176760.634920
0.800	2.000	-236427832.592592
0.900	2.000	218840314.215167
1.000	2.000	180.000000
0.500	2.500	2591293362.962957
0.600	2.500	3368681371.851844
0.700	2.500	-9916641613.061207
0.800	2.500	15993106410.088161

0.900	2.500	-13000631314.473824
1.000	2.500	200.000000
0.500	3.000	-266337801373.242035
0.600	3.000	-346239141785.214661
0.700	3.000	792019671459.953247
0.800	3.000	-1085931595670.904541
0.900	3.000	809116631232.810913
1.000	3.000	220.000000
0.500	3.500	23587502111222.320312
0.600	3.500	30663752744589.015625
0.700	3.500	-60588885441611.531250
0.800	3.500	74395429484736.625000
0.900	3.500	-52067589869641.148438
1.000	3.500	240.000000
0.500	4.000	-1929727339697862.250000
0.600	4.000	-2508645541607221.000000
0.700	4.000	4526624000723858.000000
0.800	4.000	-5143899636664818.000000
0.900	4.000	3435883006294363.000000
1.000	4.000	260.000000
0.500	4.500	150703099593614208.000000
0.600	4.500	195914029471698496.000000
0.700	4.500	-333353888300896320.000000
0.800	4.500	358498799727255424.000000
0.900	4.500	-231161985938037792.000000
1.000	4.500	280.000000
0.500	5.000	-11433319022499225600.000000
0.600	5.000	-14863314729248993280.000000
0.700	5.000	24321322185221967872.000000
0.800	5.000	-25144030796188065792.000000
0.900	5.000	15786961446431629312.000000
1.000	5.000	300.000000
0.500	5.500	851254811631169044480.000000
0.600	5.500	1106631255120519757824.000000
0.700	5.500	-1763365212970881908736.000000
0.800	5.500	1772114922760918269952.000000

0.900	5.500	-1090634300338830180352.000000
1.000	5.500	320.000000
0.500	6.000	-62588357869796933500928.000000
0.600	6.000	-81364865230736019423232.000000
0.700	6.000	127296857817265142235136.000000
0.800	6.000	-125351558613079957700608.000000
0.900	6.000	76008019587587272343552.000000
1.000	6.000	340.000000
0.500	6.500	4562560253876498635685888.000000
0.600	6.500	5931328330039448655888384.000000
0.700	6.500	-9161744065153006118633472.000000
0.800	6.500	8890697286220067324821504.000000
0.900	6.500	-5332064426607412934344704.000000
1.000	6.500	360.000000
0.500	7.000	-330635584320400133831262208.000000
0.600	7.000	-429826259616520180852588544.000000
0.700	7.000	657976200803558326089547776.000000
0.800	7.000	-631826264449608941427490816.000000
0.900	7.000	375885905821845856643448832.000000
1.000	7.000	380.000000
0.500	7.500	23861057801888240620323995648.000000
0.600	7.500	31019375142454712366616543232.000000
0.700	7.500	-47182693748137190808291901440.000000
0.800	7.500	44965853577315685787750105088.000000
0.900	7.500	-26594046433322371332058382336.000000
1.000	7.500	400.000000
0.500	8.000	-1716959483409260918736198565888.000000
0.600	8.000	-2232047328432039222504555806720.000000
0.700	8.000	3379753171193987911757240205312.000000
0.800	8.000	-3203467284000983729710200520704.000000
0.900	8.000	1886522822915535195292347400192.000000
1.000	8.000	420.000000
0.500	8.500	123290639372860952686425874104320.000000
0.600	8.500	160277831184719247499552891076608.000000
0.700	8.500	-241908408718895867634167496835072.000000
0.800	8.500	228394206022880703931369486548992.000000

0.900	8.500	-134084327680391093728838135316480.000000
1.000	8.500	440.000000
0.500	9.000	-8840141747523171567971280424534016.000000
0.600	9.000	-11492184271780123845407717776687104.000000
0.700	9.000	17305177791100592308288942120108032.000000
0.800	9.000	-16292448661579951560883004480946176.000000
0.900	9.000	9543401559967441872199242378903552.000000
1.000	9.000	460.000000
0.500	9.500	633185158005080143153249459711770624.000000
0.600	9.500	823140705406604200856619556592943104.000000
0.700	9.500	-1237452113076981358629148441574375424.000000
0.800	9.500	1162674864534062082620231395934470144.000000
0.900	9.500	-679938913335240286459720967192051712.000000
1.000	9.500	480.000000
0.500	10.000	-45318423046814463113385129245447028736.000000
0.600	10.000	-58913949960858807714240447462655393792.000000
0.700	10.000	88461992607569090562466328424872935424.000000
0.800	10.000	-82995248745395657086507777571678060544.000000
0.900	10.000	48479253950162197507406332575541624832.000000
1.000	10.000	500.000000

Forward-Difference Method



Backward-Difference Method

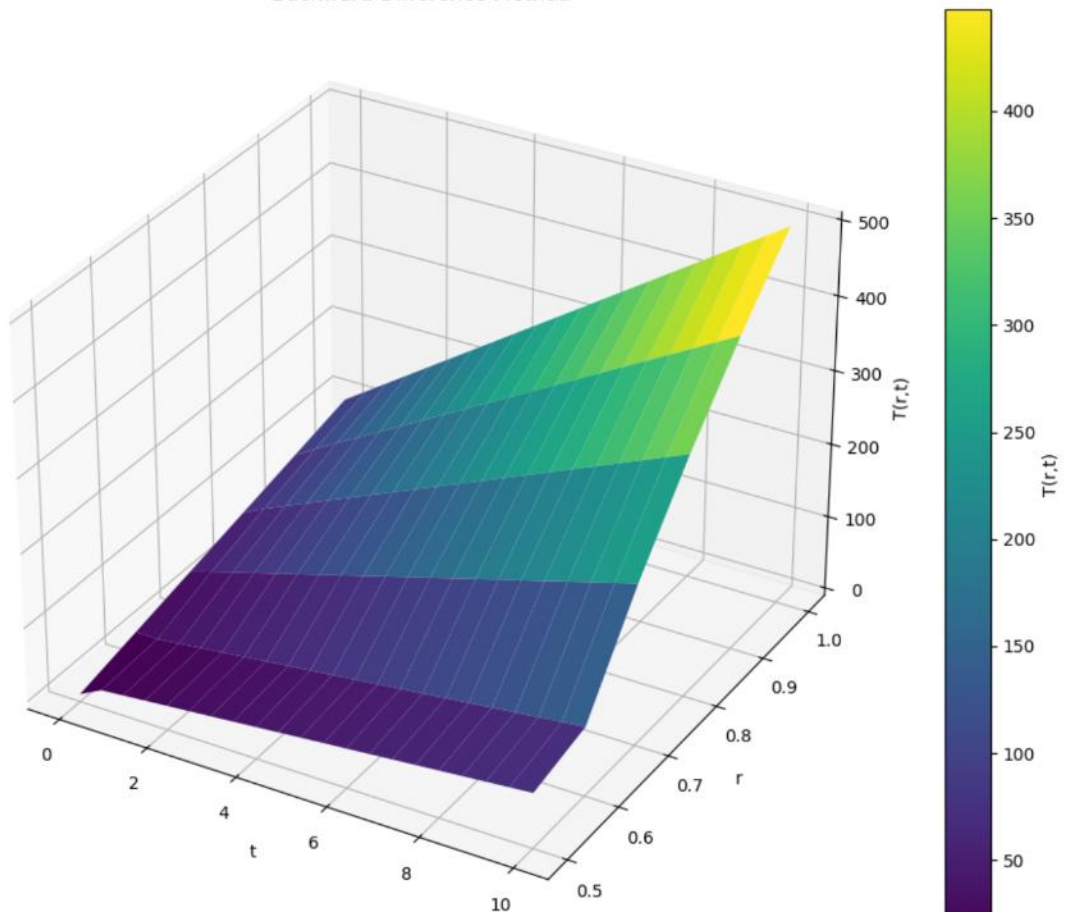
r	t	T(r,t)
0.500	0.000	0.000000
0.600	0.000	20.000000
0.700	0.000	40.000000
0.800	0.000	60.000000
0.900	0.000	80.000000
1.000	0.000	100.000000
0.500	0.500	15.064181
0.600	0.500	19.583435
0.700	0.500	48.881423
0.800	0.500	74.687478
0.900	0.500	98.148703
1.000	0.500	120.000000
0.500	1.000	17.607977
0.600	1.000	22.890371
0.700	1.000	57.310831
0.800	1.000	87.535270
0.900	1.000	114.808494
1.000	1.000	140.000000
0.500	1.500	20.189374
0.600	1.500	26.246186
0.700	1.500	65.692698
0.800	1.500	100.270828
0.900	1.500	131.380263
1.000	1.500	160.000000
0.500	2.000	22.769427
0.600	2.000	29.600256
0.700	2.000	74.067867
0.800	2.000	112.997305
0.900	2.000	147.945703
1.000	2.000	180.000000
0.500	2.500	25.349227
0.600	2.500	32.953995
0.700	2.500	82.442280
0.800	2.500	125.722932

0.900	2.500	164.510595
1.000	2.500	200.000000
0.500	3.000	27.928999
0.600	3.000	36.307698
0.700	3.000	90.816613
0.800	3.000	138.448474
0.900	3.000	181.075436
1.000	3.000	220.000000
0.500	3.500	30.508767
0.600	3.500	39.661397
0.700	3.500	99.190938
0.800	3.500	151.174008
0.900	3.500	197.640272
1.000	3.500	240.000000
0.500	4.000	33.088535
0.600	4.000	43.015096
0.700	4.000	107.565262
0.800	4.000	163.899541
0.900	4.000	214.205107
1.000	4.000	260.000000
0.500	4.500	35.668303
0.600	4.500	46.368794
0.700	4.500	115.939586
0.800	4.500	176.625075
0.900	4.500	230.769942
1.000	4.500	280.000000
0.500	5.000	38.248072
0.600	5.000	49.722493
0.700	5.000	124.313911
0.800	5.000	189.350608
0.900	5.000	247.334777
1.000	5.000	300.000000
0.500	5.500	40.827840
0.600	5.500	53.076192
0.700	5.500	132.688235
0.800	5.500	202.076141

0.900	5.500	263.899612
1.000	5.500	320.000000
0.500	6.000	43.407608
0.600	6.000	56.429890
0.700	6.000	141.062559
0.800	6.000	214.801674
0.900	6.000	280.464447
1.000	6.000	340.000000
0.500	6.500	45.987376
0.600	6.500	59.783589
0.700	6.500	149.436883
0.800	6.500	227.527207
0.900	6.500	297.029282
1.000	6.500	360.000000
0.500	7.000	48.567144
0.600	7.000	63.137287
0.700	7.000	157.811207
0.800	7.000	240.252740
0.900	7.000	313.594117
1.000	7.000	380.000000
0.500	7.500	51.146912
0.600	7.500	66.490986
0.700	7.500	166.185532
0.800	7.500	252.978273
0.900	7.500	330.158953
1.000	7.500	400.000000
0.500	8.000	53.726680
0.600	8.000	69.844684
0.700	8.000	174.559856
0.800	8.000	265.703806
0.900	8.000	346.723788
1.000	8.000	420.000000
0.500	8.500	56.306448
0.600	8.500	73.198383
0.700	8.500	182.934180
0.800	8.500	278.429339

0.900	8.500	363.288623
1.000	8.500	440.000000
0.500	9.000	58.886217
0.600	9.000	76.552081
0.700	9.000	191.308504
0.800	9.000	291.154873
0.900	9.000	379.853458
1.000	9.000	460.000000
0.500	9.500	61.465985
0.600	9.500	79.905780
0.700	9.500	199.682828
0.800	9.500	303.880406
0.900	9.500	396.418293
1.000	9.500	480.000000
0.500	10.000	64.045753
0.600	10.000	83.259479
0.700	10.000	208.057153
0.800	10.000	316.605939
0.900	10.000	412.983128
1.000	10.000	500.000000

Backward-Difference Method



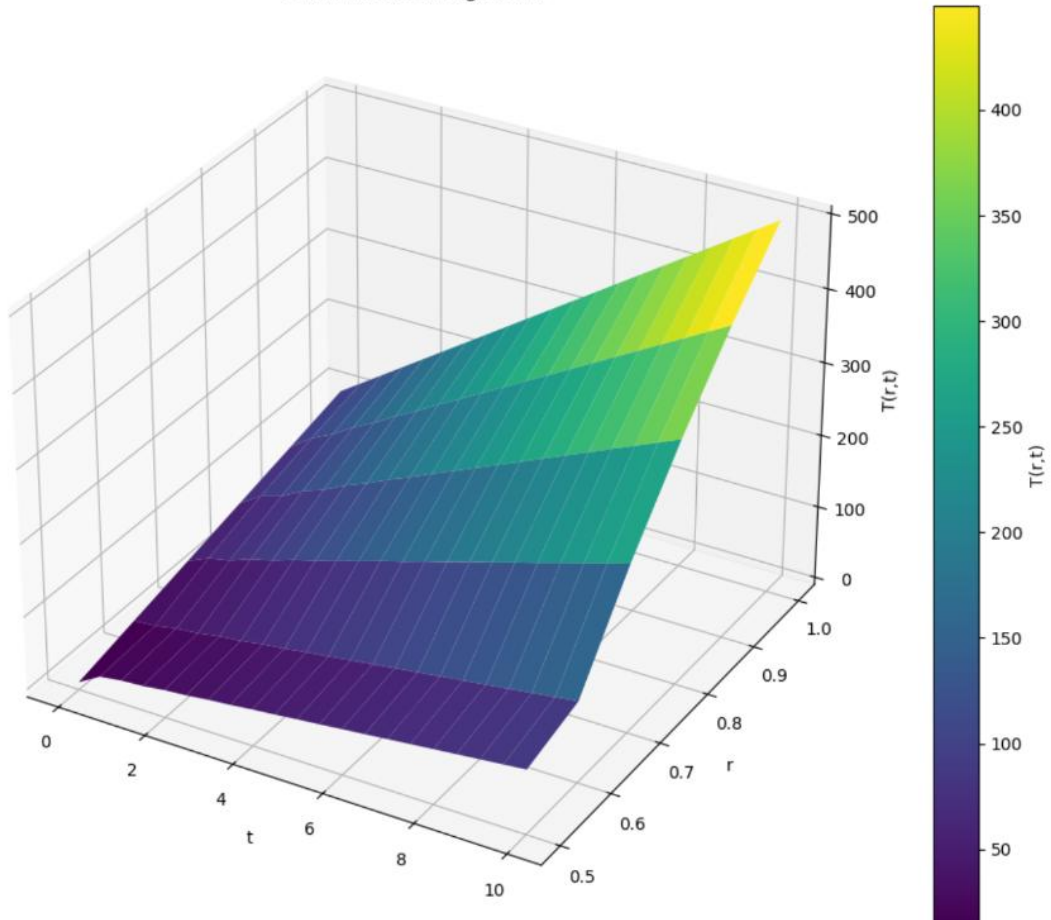
```
Crank-Nicolson Algorithm
r      t      T(r,t)
0.500  0.000  0.000000
0.600  0.000  20.000000
0.700  0.000  40.000000
0.800  0.000  60.000000
0.900  0.000  80.000000
1.000  0.000  100.000000
0.500  0.500  17.341767
0.600  0.500  22.544297
0.700  0.500  53.451979
0.800  0.500  78.827488
0.900  0.500  100.636701
1.000  0.500  120.000000
0.500  1.000  21.689045
0.600  1.000  28.195759
0.700  1.000  59.095913
0.800  1.000  87.813962
0.900  1.000  114.580145
1.000  1.000  140.000000
0.500  1.500  23.787890
0.600  1.500  30.924257
0.700  1.500  70.428807
0.800  1.500  103.785906
0.900  1.500  133.295153
1.000  1.500  160.000000
0.500  2.000  27.807745
0.600  2.000  36.150068
0.700  2.000  77.412729
0.800  2.000  114.705714
0.900  2.000  148.562521
1.000  2.000  180.000000
0.500  2.500  30.256584
0.600  2.500  39.333559
0.700  2.500  87.837247
0.800  2.500  129.314719
```

0.900	2.500	166.336221
1.000	2.500	200.000000
0.500	3.000	33.963053
0.600	3.000	44.151969
0.700	3.000	95.472628
0.800	3.000	141.222224
0.900	3.000	182.286489
1.000	3.000	220.000000
0.500	3.500	36.672960
0.600	3.500	47.674848
0.700	3.500	105.409958
0.800	3.500	155.102846
0.900	3.500	199.558949
1.000	3.500	240.000000
0.500	4.000	40.169384
0.600	4.000	52.220199
0.700	4.000	113.420717
0.800	4.000	167.553044
0.900	4.000	215.879209
1.000	4.000	260.000000
0.500	4.500	43.045301
0.600	4.500	55.958892
0.700	4.500	123.062586
0.800	4.500	181.027149
0.900	4.500	232.878158
1.000	4.500	280.000000
0.500	5.000	46.411700
0.600	5.000	60.335211
0.700	5.000	131.309625
0.800	5.000	193.782480
0.900	5.000	249.400283
1.000	5.000	300.000000
0.500	5.500	49.389033
0.600	5.500	64.205743
0.700	5.500	140.760135
0.800	5.500	207.027628

0.900	5.500	266.250850
1.000	5.500	320.000000
0.500	6.000	52.676434
0.600	6.000	68.479364
0.700	6.000	149.163840
0.800	6.000	219.954380
0.900	6.000	282.881350
1.000	6.000	340.000000
0.500	6.500	55.715336
0.600	6.500	72.429936
0.700	6.500	158.484820
0.800	6.500	233.071684
0.900	6.500	299.653463
1.000	6.500	360.000000
0.500	7.000	58.954665
0.600	7.000	76.641065
0.700	7.000	166.996619
0.800	7.000	246.093235
0.900	7.000	316.340084
1.000	7.000	380.000000
0.500	7.500	62.031202
0.600	7.500	80.640562
0.700	7.500	176.226586
0.800	7.500	259.140801
0.900	7.500	333.072691
1.000	7.500	400.000000
0.500	8.000	65.240964
0.600	8.000	84.813254
0.700	8.000	184.815677
0.800	8.000	272.213098
0.900	8.000	349.786514
1.000	8.000	420.000000
0.500	8.500	68.340827
0.600	8.500	88.843075
0.700	8.500	193.979459
0.800	8.500	285.224291

0.900	8.500	366.500974
1.000	8.500	440.000000
0.500	9.000	71.532098
0.600	9.000	92.991727
0.700	9.000	202.625673
0.800	9.000	298.322107
0.900	9.000	383.226335
1.000	9.000	460.000000
0.500	9.500	74.646700
0.600	9.500	97.040709
0.700	9.500	211.739785
0.800	9.500	311.315954
0.900	9.500	399.934031
1.000	9.500	480.000000
0.500	10.000	77.826151
0.600	10.000	101.173997
0.700	10.000	220.429488
0.800	10.000	324.424983
0.900	10.000	416.662753
1.000	10.000	500.000000

Crank-Nicolson Algorithm



3. Given the problem

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0, \quad \frac{1}{2} \leq r \leq 1, \quad 0 \leq t \leq \pi/3,$$

$$T(r, 0) = 0, \quad T(r, \pi/3) = 0, \quad T(1/2, \theta) = 50, \quad T(1, \theta) = 100.$$

```
===== Problem 3: Laplace's Equation (Polar) =====
Calculated T(r, theta) at interior grid points:
[[44.16901941 44.16901941]
 [48.52987797 48.52987797]
 [59.8956788 59.8956788 ]
 [77.15322051 77.15322051]]
Note: Matrix rows correspond to the r-direction, columns to the theta-direction.
```

4. Given the problem

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t$$

$$p(0,t) = 1, \quad p(1,t) = 2, \quad p(x,0) = \cos(2\pi x), \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = 2\pi \sin(2\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

To calculate p by using $\Delta x = \Delta t = 0.1$.

```
===== Problem 4: Wave Equation =====  
t = 0.0: [ 1.      0.809  0.309 -0.309 -0.809 -1.      -0.809 -0.309  0.309  0.809  
          1.      ]  
t = 0.1: [ 1.      1.0238  0.8476  0.3476 -0.2852 -0.809  -1.0238 -0.8476 -0.3476  
          0.2852  2.      ]  
t = 0.2: [ 1.      1.0385  1.0624  0.8714  0.3476 -0.309  -0.8476 -1.0624 -0.8714  
          0.8434  2.      ]  
t = 0.3: [ 1.      1.0385  1.0624  1.0624  0.8476  0.309  -0.3476 -0.8714  0.1286  
          0.8434  2.      ]  
t = 0.4: [1.      1.0238  1.0385  1.0385  1.0238  0.809  0.2852  0.8434  0.8434  1.2852  
          2.      ]  
t = 0.5: [1.  1.  1.  1.  1.  1.  2.  2.  2.  2.]
```