Universidad de San Carlos de Guatemala
Escuela de Ciencias Físicas y Matemáticas
Análisis Funcional 2
Emilene Analí Romero
Carné: 201213113

Función Generatriz de los Polinomios de Legendre

(Función Generatriz) Mostrar que:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2wt+w^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(t)w^n$$

La función de la izquierda es conocida como *la función generatriz* de los polinomios de Legendre.

Solución:

Se tiene que la función $f(w,t) = (1-2wt+w^2)^{-1/2}$, puede escribirse como:

$$(1-2wt+w^2)^{-1/2} = [1-w(2t-w)]^{-1/2}$$

Entonces haciendo uso de la siguiente fórmula:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} z^n = (1-z)^{-\alpha}$$

entonces al reemplazar $z = 2wt + w^2$ y $\alpha = \dfrac{1}{2}$ se obtiene:

$$(1-2wt+w^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!}(2wt+w^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!} w^n(2t+w)^n$$

de donde se tiene que:

$$(1/2)_n = \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^2} \quad para \quad n=1,2,...$$

por lo que:

$$\begin{aligned}
(1-2wt+w^2)^{-1/2} &= 1+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1)}{2^n n!}w^n(2t-w)^n \\
&= 1+\frac{1}{2\cdot 1!}w(2t-w)+\frac{1\cdot 3}{2^2 2!}w^2(2t-w)^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 3!}w^3(2t-w)^3+ \\
&\quad +...+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}w^{n-1}(2t-w)^{n-1}+ \\
&\quad +\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}w^n(2t-w)^n+...
\end{aligned}$$

Sean $a_n(t)$ los coeficientes de t^n entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^2 n!}(2t)^n - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{(n-1)}{1!}(2t)^{n-2}+ \\ &\quad + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-5)}{2^{n-2}(n-2)!}\frac{(n-2)(n-3)}{2!}(2t)^{n-4} - + \cdots \end{aligned}$$

Entonces haciendo uso de la siguiente identidad:

$$1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

de donde $a_n(t)$ se reduce a:

$$\begin{aligned} a_n(t) &= \frac{(2n)!}{2^n n! n!}t^n - \frac{(2n-2)!}{2^n 1!(n-1)!(n-2)!}t^{n-2} \\ &\quad + \frac{(2n-4)!}{2^n 2!(n-2)!(n-4)!}t^{n-4} - + \cdots \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \frac{(2n-2j)!}{2^n j!(n-j)!(n-2j)!}t^{n-2j} \\ &= P_n(t) \end{aligned}$$