

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
БУРЯТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ДОРЖИ БАНЗАРОВА
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Материалы Шестой научной конференции
с международным участием*

(Улан-Удэ — оз. Байкал, 27–29 августа 2020 г.)

Улан-Удэ
Издательство Бурятского госуниверситета
2020

УДК 514.75-77, 51.72-74, 372.851

ББК 22, 74

Г 361

Редакционная коллегия

В. Б. Цыренова, канд. физ.-мат. наук, д-р пед. наук, отв. редактор; **А. М. Бубенчиков**, д-р физ.-мат. наук, проф.; **И. Ю. Шевченко**, канд. физ.-мат. наук, профессор Балтийского федерального университета им. И. Канта; **Е. П. Миронова**, канд. пед. наук, старший преподаватель; **А. С. Челнокова**, аспирант

Авторы опубликованных материалов несут ответственность за точность приведенных результатов и прочих сведений

Г 361 **Геометрия многообразий и её приложения:** материалы Шестой научной конференции с международным участием (Улан-Удэ — оз. Байкал, 27–29 августа 2020 г.) / отв. ред. В. Б. Цыренова. — Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2020. — 340 с. ISBN 978-5-9793-1507-2

В сборник включены тезисы и статьи участников шестой научной конференции с международным участием «Геометрия многообразий и её приложения». Работа представлена в следующих направлениях: геометрия дифференцируемых многообразий, математическое и компьютерное моделирование прикладных задач механики и информационных систем, состояние и перспективы математического образования и вопросы преподавания математики.

Geometry of manifolds and its applications: the sixth scientific conference with international participation (Ulan-Ude – Lake Baikal, August 27 — August 29, 2020) / resp. ed. V. B. Tsyrenova. — Ulan-Ude: Buryat State University Publishing Department, 2020. — 340 p.
ISBN 978-5-9793-1507-2

The book includes the participants' abstracts and articles of the sixth scientific conference with international participation «Geometry of manifolds and its applications». There are following fields such as: geometry of differentiable manifolds, mathematical and computer modeling of applied problems of mechanics and information systems, the condition and perspectives of the mathematical education and questions of teaching mathematics.

ISBN 978-5-9793-1507-2

© Бурятский госуниверситет
им. Д. Банзарова, 2020

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

УДК 514.75(08)

© K. Bashashina

ATTACHED LINEAR CONNECTION ON THE SURFACE OF THE PROJECTIVE SPACE

Abstract. The article deals with attached fiber bundle in a multidimensional projective space. To define the fiber bundle, we consider the surface as a variety of centered planes A bundle of linear coframes appears over this manifold, which is not the main fiber bundle. It is called attached bundle. We set connection by the Laptev-Lumiste method in the bundle. This will lead to a space of attached linear connection. The theorem is proved that the curvature object is a tensor. A condition is found under which the space of the attached linear connection turns into the space of Cartan projective connection.

The study uses the Cartan-Laptev method, which is based on calculating external differential forms. Moreover, all considerations in the paper have a local manner.

Key words: attached bundle, attached linear connection, Cartan connection, connection, curvature tensor, surface of projective space, projective connection.

© K. B. Башшина

ПРИКЛЕЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗНОСТЬ НА ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Аннотация. В проективном пространстве задается поверхность как многообразие центрированных плоскостей. Над этим многообразием появляется приклеенное расслоение линейных кореперов, не являющееся главным расслоением. Это расслоение с заданной связностью названо пространством приклеенной линейной связности. Доказана тензорность объекта кривизны этой связности. Приведены условия, при которых пространство приклеенной линейной связности становится пространством проективной связности Картана.

Исследование ведется методом Картана–Лаптева, основанном на исчислении внешних дифференциальных форм. Отметим, что все рассмотрения носят локальный характер.

Ключевые слова: приклеенная линейная связность, связность Картана, связность, тензор кривизны, поверхность в проективном пространстве, проективная связность.

Let us consider the n-dimensional projective space P_n into moving frame $\{A_I\}$ ($I, J, K = \overline{0, n}$), whose derivational formulas have the form

$$dA_I = \omega_I^J A_J. \quad (1)$$

We write the structural equations of an ineffective linear $GL(n+1)$ group in space P_n in the following form:

$$d\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I. \quad (2)$$

In space P_n , we consider an m-dimensional surface X_m as a family of tangent planes. We will specialize the moving frame $\{A_0, A_i, A_\alpha\}$ ($i, \dots = \overline{1, m}; \alpha, \dots = \overline{m+1, n}$), placing the vertex A_0 at a point of the surface X_m , the vertices A_i at the tangent plane T_m , and the points A_α outside the tangent plane.

We rewrite formulas (1) taking into account the partition of indices:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega_0^0 A_0 + \omega_0^i A_i + \omega_0^\alpha A_\alpha, \\ dA_i &= \omega_i^0 A_0 + \omega_i^j A_j + \omega_i^\alpha A_\alpha, \\ dA_\alpha &= \omega_\alpha^0 A_0 + \omega_\alpha^i A_i + \omega_\alpha^\beta A_\beta. \end{aligned}$$

The vertex A_0 is the point of tangency of the plane T_m to the surface X_m^0 described by this vertex, which means that its infinitely small displacement lies in T_m : $dA_0 \in T_m$, therefore,

$$\omega_0^\alpha = 0. \quad (3)$$

Closing this equation and solving it by Cartan's lemma, we obtain

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha, \quad \omega^i = \omega_0^i. \quad (4)$$

Equations (3, 4) determine the surface X_m in a given frame.

Continuing system (4), we find differential equations for functions b_{ij}^α :

$$\Delta b_{ij}^\alpha + b_{ij}^\alpha \omega_0^0 = b_{ijk}^\alpha \omega^k, \quad b_{ijk}^\alpha = b_{ikj}^\alpha = b_{jik}^\alpha, \quad (5)$$

where the differential operator Δ acts in the following way:

$$\Delta b_{ij}^\alpha = db_{ij}^\alpha - b_{ik}^\alpha \omega_j^k - b_{kj}^\alpha \omega_i^k + b_{ij}^\beta \omega_\beta^\alpha.$$

From equations (5₁) it can be seen that the object b_{ij}^α is a tensor and is called the basic tensor of the surface (see, for example, [1, p. 170]).

From the structural equations (2) taking into account equations (3, 4₁) we obtain

$$d\omega^i = \omega^j \wedge (\omega_j^i - \delta_j^i \omega_0^0), \quad (6)$$

$$d\omega_{j'}^{i'} = \omega_{j'}^{k'} \wedge \omega_{k'}^{i'} + \omega^k \wedge \omega_{j'k}^{i'} \quad (i', j', k' = \overline{0, m}), \quad (7)$$

here $\omega_{j'k}^{i'} = b_{j'k}^\alpha \omega_\alpha^{i'} \quad (b_{0k}^\alpha = 0)$.

These equations are similar to the structural equations of the linear coframes main fiber bundle $L_{(m+1)^2}(X_m)$ over surface X_m with the fiber — a linear group $L_{(m+1)^2} = GL(m+1)$. However, since m basis forms ω^i are included in the set of forms $\omega_{j'}^{i'}$, we will talk about an attached fiber bundle of linear coframes, which we denote by $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$.

We apply the Laptev – Lumiste method [2, p. 62, 82], [3] assignment of connectivity in the main fiber bundle to determine connectivity in the attached fiber bundle $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$:

$$\tilde{\omega}_{j'}^{i'} = \omega_{j'}^{i'} - \Pi_{j'k}^{i'} \omega^k. \quad (8)$$

We find the external differentials of these forms using equations (6, 7):

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}_{j'}^{i'} &= \tilde{\omega}_{j'}^{k'} \wedge \tilde{\omega}_{k'}^{i'} + \omega^k \wedge (d\Pi_{j'k}^{i'} - \Pi_{j'l}^{i'} \omega_k^l - \Pi_{l'k}^{i'} \omega_{j'}^l + \Pi_{j'k}^{l'} \omega_{l'}^{i'} \\ &\quad + \Pi_{j'k}^{l'} \omega_0^0 + \tilde{\omega}_{j'k}^{i'}) - \Pi_{j'k}^{m'} \Pi_{m'l}^{i'} \omega^k \wedge \omega^l. \end{aligned}$$

Let the components $\Pi_{j'k}^{i'}$ satisfy the following differential equations:

$$\Delta \Pi_{j'k}^{i'} + \Pi_{j'k}^{i'} \omega_0^0 + \omega_{j'k}^{i'} = \Pi_{j'kl}^{i'} \omega^l. \quad (9)$$

The structural equations of the attached connection forms are finally written in the form:

$$d\tilde{\omega}_{j'}^{i'} = \tilde{\omega}_{j'}^{k'} \wedge \tilde{\omega}_{k'}^{i'} + R_{j'kl}^{i'} \omega^k \wedge \omega^l, \quad (10)$$

where the components of the curvature object are expressed by the formulas:

$$R_{j'kl}^{i'} = \Pi_{j'[kl]}^{i'} - \Pi_{j'[k}^{m'} \Pi_{m'l]}^{i'}, \quad (11)$$

moreover, the extreme indices in parentheses are alternating.

To continue the equation (9), we find the external differentials of the forms $\omega_{j'k}^{i'}$:

$$\begin{aligned} d\omega_{j'k}^{i'} &= d(b_{j'k}^\alpha \omega_\alpha^{i'}) = db_{j'k}^\alpha \wedge \omega_\alpha^{i'} + b_{j'k}^\alpha (\omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^{i'} + \omega_\alpha^{m'} \wedge \omega_{m'}^{i'}) = \\ &= (b_{j'm}^\alpha \omega_k^m + b_{m'k}^\alpha \omega_{j'}^{m'} - b_{j'k}^\beta \omega_\beta^{i'} + b_{j'kl}^\alpha \omega^l) \wedge \omega_\alpha^{i'} + b_{j'k}^\alpha \omega_\alpha^\beta \wedge \omega_\beta^{i'} + b_{j'k}^\alpha \omega_\alpha^{m'} \wedge \omega_{m'}^{i'}. \end{aligned}$$

We present similar terms and use the notation for the three-index forms ω :

$$d\omega_{j'k}^{i'} = -\underbrace{b_{j'm}^\alpha \omega_\alpha^{i'}}_{\omega_{j'm}^{i'}} \wedge \omega_k^m - \underbrace{b_{m'k}^\alpha \omega_\alpha^{i'}}_{\omega_{m'k}^{i'}} \wedge \omega_{j'}^{m'} + \underbrace{b_{j'k}^\alpha \omega_\alpha^{m'}}_{\omega_{j'k}^{m'}} \wedge \omega_m^{i'} + \omega^l \wedge \underbrace{b_{j'kl}^\alpha \omega_\alpha^{i'}}_{\omega_{j'kl}^{i'}}.$$

Finally we have

$$\begin{aligned} d\omega_{j'k}^{i'} &= \omega_{j'k}^{m'} \wedge \omega_{m'}^{i'} - \omega_{m'k}^{i'} \wedge \omega_{j'}^{m'} - \omega_{j'm}^{i'} \wedge \omega_k^m + \omega^m \wedge \omega_{j'km}^{i'}, \quad \text{where} \\ \omega_{j'km}^{i'} &= b_{j'km}^\alpha \omega_\alpha^{i'}, \quad \omega_{j'[km]}^{i'} = 0. \end{aligned}$$

The equations for the extensions of the components of the connected object Π have the form:

$$\Delta \Pi_{j'kl}^{i'} + 2\Pi_{j'kl}^{i'} \omega_0^0 - \Pi_{m'k}^{i'} \omega_{j'l}^{m'} - \Pi_{j'm}^{i'} \omega_{kl}^m + \Pi_{j'k}^{m'} \omega_{m'l}^{i'} + \Pi_{j'k}^{i'} \omega_{l}^0 + \Pi_{j'l}^{i'} \omega_k^0 + \omega_{j'kl}^{i'} = \Pi_{j'km}^{i'} \omega^m. \quad (12)$$

Using formulas (9, 11, 12), we find differential comparisons modulo basis forms on the components of the curvature object R of the connection under consideration:

$$\Delta R_{j'kl}^{i'} + 2R_{j'kl}^{i'} \omega_0^0 \equiv 0 \pmod{\omega^i}. \quad (13)$$

Theorem 1. The connection in the attached bundle of linear coframes is specified using the field of the connection object $\Pi_{j'k}^{i'}$ whose components satisfy differential equations (9). The connection object $\Pi_{j'k}^{i'}$ determines the connection forms (8) that satisfy the structural equations (10), which include the curvature objects $R_{j'kl}^{i'}$ expressed by formula (11) through the connection object $\Pi_{j'k}^{i'}$ and its Pfaffian derivatives. The curvature object of the attached linear connection is a tensor whose components satisfy the differential comparisons (13).

Definition. The fiber bundle of attached linear coframes $L_{(m+1)^2-m}(X_m)$ with structural equations (6, 7), in which the connection is setting by field of object $\Pi_{j'k}^{i'}$, is called the space of attached linear connection $L_{(m+1)^2-m,m}$ with structural equations (6, 10).

We write down the equations for the connection components (9) in detail:

$$\begin{aligned}\Delta \Pi_{0k}^i &\equiv 0, \quad \Delta \Pi_{0k}^0 + \Pi_{0k}^0 \omega_0^0 + \Pi_{0k}^l \omega_l^0 \equiv 0, \\ \Delta \Pi_{jk}^i + \Pi_{jk}^i \omega_0^0 - \Pi_{0k}^i \omega_j^0 + \omega_{jk}^i &\equiv 0, \\ \Delta \Pi_{jk}^0 + 2 \Pi_{jk}^0 \omega_0^0 - \Pi_{0k}^0 \omega_j^0 + \Pi_{jk}^l \omega_l^0 + \omega_{jk}^0 &\equiv 0.\end{aligned}$$

Let the simplest tensor part of the connection object Π be equal to zero: $\Pi_{0k}^i = 0$. Then the comparisons of the remaining components will be simplified:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Pi_{0k}^0 + \Pi_{0k}^0 \omega_0^0 \equiv 0, \\ \Delta \Pi_{jk}^i + \Pi_{jk}^i \omega_0^0 + \omega_{jk}^i \equiv 0, \\ \Delta \Pi_{jk}^0 + 2 \Pi_{jk}^0 \omega_0^0 - \Pi_{0k}^0 \omega_j^0 + \Pi_{jk}^l \omega_l^0 + \omega_{jk}^0 \equiv 0. \end{array} \right.$$

Theorem 2. If the subtensor Π_{0k}^i of the connection object vanishes, then $\tilde{\omega}_0^i = \omega^i$, therefore, the space of attached linear connection $L_{(m+1)^2-m,m}$ becomes the space of the Cartan projective connection $P_{m,m}$ (see, for example, [2, p. 119], [4, p. 23], [5]) with structural equations (10) associated with the surface X_m of the projective space P_n .

References

1. Bazylev, V. T.: The geometry of differentiable manifolds. Moscow. 222 p. (1989) (in Russian)
2. Evtušik, L. E.; Lumiste, Ju. G.; Ostianu, N. M.; Širokov, A. P.: Differential-geometric structures on manifolds. Problems in geometry, Vol. 9 (Russian), 248 pp., Akad. Nauk SSSR, Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Informatsii, Moscow (1979) (in Russian)
3. Shevchenko, Yu. I.: Laptev and Lumiste methods connectivity in the main bundle // Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 37, 179–187 (2006) (in Russian)
4. Stolyarov A. V., Glukhova T. N. Conformal differential geometry of framed manifolds. Cheboksary. 180 p. (2007) (in Russian)
5. Shevchenko, Yu. I.: About Cartan equipment // Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 14, 107–110 (1983) (in Russian)

Башшина Ксения Викторовна, ассистент, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, 236006 г. Калининград, Московский проспект 89, 18. KBashashina@kantiana.ru

Bashashina Ksenia, assistant, Immanuel Kant Baltic Federal University, 236006, Kaliningrad, Moskovskii prospect, 89, 18. KBashashina@kantiana.ru

РЕДУКЦИЯ КРУЧЕНИЯ ГРАССМАНОПОДОБНОГО МНОГООБРАЗИЯ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

Аннотация. В данной работе автор продолжает исследование многообразий плоскостей.

В многомерном проективном пространстве методом Картана–Лаптева исследуется многообразие центрированных плоскостей одной размерности, проходящих через фиксированную точку, назначенное грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей из-за совпадения его размерности с размерностью многообразия Грассмана. Над многообразием возникает главное расслоение, типовым слоем которого является подгруппа стационарности образующей центрированной плоскости. Методом Лаптева–Лумисте задается связность в главном расслоении. Производится адаптация подвижного репера полям нормалей первого и второго рода. При переходе от исходного многообразия к нормализованному анализируется динамика изменений объекта кручения подсвязности в расслоении, ассоцииированном с исследуемым многообразием. Отмечено различие в поведении тензора кручения линейной подсвязности грассманоподобного многообразия с аналогичным объектом кручения для пространства центрированных плоскостей.

Ключевые слова: проективное пространство, метод Картана–Лаптева, грассманоподобное многообразие, объект кручения, редукция, связность, нормализация.

© O. Belova

TORSION REDUCTION OF GRASSMANN-LIKE MANIFOLD OF CENTERED PLANES

Abstract. The author continues her research of planes manifolds in this paper.

In the multidimensional projective space, the Cartan–Laptev method is used to study the manifold of centered planes of the same dimension passing through a fixed point. This manifold is called the Grassmann-like manifold of centered planes due to the coincidence of its dimension with the dimension of the Grassmann manifold. The principal bundle arises over the manifold, the typical fiber of which is the stationarity subgroup of the centered plane. Using the Laptev–Lumiste method a connection is defined in the principal bundle. The moving frame is adapted to the normal fields of the first and second kind. In the transition from the initial manifold to the normalized one, the dynamics of changes in the torsion object of the subconnection in the bundle associated with the Grassmann-like manifold is analyzed. A difference in the behavior of the

torsion tensor of the linear subconnection of the Grassmann-like manifold with a similar torsion object for the space of centered planes is noted.

Keywords: projective space, Cartan–Laptev method, Grassmann-like manifold of centered planes, torsion object, reduction, connection, normalization.

Введение

Многолетнее изучение автором пространств плоскостей в многомерном проективном пространстве большой размерности позволяет отметить некоторые особенности, а также определить общие моменты в поведении этих многообразий.

В представленной работе автор продолжает исследование гравссманоподобного многообразия центрированных плоскостей (см. [1–5]), при этом используется метод Картана–Лаптева.

Данная статья состоит из трех частей. В первой части вводится гравссманоподобное многообразие центрированных плоскостей и иллюстрируется его связь и отличие от многообразия Гравссмана, которое широко используется многими геометрами в научных исследованиях. Вторая часть посвящена объекту кручения гравссманоподобного многообразия. В третьей части проводится редукция введенного объекта кручения.

I. Гравссманоподобное многообразия в проективном пространстве

Для нашего исследования n -мерное проективное пространство P_n будет отнесено к подвижному реперу $\{A, A_i\}$ ($i, \dots = 1, n$) с инфинитезимальными перемещениями, определяемые формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \quad dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A.$$

В формулах инфинитезимальных перемещений формы Пфаффа ω^I , ω_I , ω_J^I удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$, т.е.

$$\begin{aligned} D\omega^I &= \omega^J \wedge \omega_J^I, \quad D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J, \\ D\omega_J^I &= \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \end{aligned} \tag{1}$$

В пространстве P_n рассмотрим гравссманоподобное многообразие $Gr^*(m, n)$ [2] центрированных m -мерных плоскостей

P_m^* . Для гравссманоподобного многообразия имеет место следующее соотношение:

$$\dim Gr^*(m, n) = \dim Gr(m, n) = (n - m)(m + 1),$$

где $Gr(m, n)$ — многообразия Гравссмана.

Замечание. Ввиду равенства размерностей многообразия Гравссмана и рассматриваемого многообразия $Gr^*(m, n)$, автор и использует термин «гравссманоподобное многообразие».

В работе [9] было отмечено, что многообразие Гравссмана образуют нецентрированные плоскости. Многообразие $Gr^*(m, n)$, напротив, состоит из центрированных плоскостей. В этом заключается основное отличие данных многообразий.

Специализация подвижного репера, при которой вершины A , A_a помещаются на центрированную плоскость P_m^* , и фиксируется ее центр A ($a, \dots = \overline{1, m}$; $\alpha, \dots = \overline{m + 1, n}$), позволяет записать уравнения гравссманоподобного многообразия $Gr^*(m, n)$ центрированных плоскостей в виде

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha,$$

где $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ — фундаментальный объект 1-го порядка, а ω^α и ω_a^α — базисные формы многообразия $Gr^*(m, n)$.

Замечание. Многообразие $Gr^*(m, n)$ в отличие от многообразия Гравссмана, задается уравнениями, в которые входят компоненты Λ_α^a , Λ_α^{ab} фундаментального объекта Λ . Эти компоненты удовлетворяют дифференциальным сравнениям

$$\Delta \Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0 \pmod{\omega^\alpha, \omega_a^\alpha},$$

$$\Delta \Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0 \pmod{\omega^\alpha, \omega_a^\alpha}.$$

Здесь и далее в тексте дифференциальный оператор Δ действует по закону

$$\Delta \Lambda_\alpha^{ab} = d\Lambda_\alpha^{ab} + \Lambda_\alpha^{cb} \omega_c^a + \Lambda_\alpha^{ac} \omega_c^b - \Lambda_\beta^{ab} \omega_\alpha^\beta.$$

При указанной специализации подвижного репера структурные уравнения (1) базисных форм принимают вид

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\beta^a \omega^\beta \wedge \omega_a^\alpha + \Lambda_\beta^{ab} \omega_\beta^b \wedge \omega_a^\alpha, \\ D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge (\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b) - \omega^\alpha \wedge \omega_a. \quad (2)$$

Над многообразием $\text{Gr}^*(m,n)$ возникает главное расслоение $G^*(\text{Gr}^*(m,n))$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G^* центрированной плоскости P_m^* [2].

II. Объект кручения гравитационоподобного многообразия

Фундаментально-групповую связность в расслоении $G^*(\text{Gr}^*(m,n))$ задаем способом Лаптева–Лумисте [6–7] с помощью форм [2]

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_b^a &= \omega_b^a - \Gamma_{ba}^a \omega^\alpha - L_{ba}^{ac} \omega_c^\alpha, \quad \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - L_{\beta\gamma}^a \omega_a^\gamma, \\ \tilde{\omega}_\alpha^a &= \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - L_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta, \quad \tilde{\omega}_a = \omega_a - L_{aa} \omega^\alpha - \Pi_{aa}^b \omega_b^\alpha, \\ \tilde{\omega}_\alpha &= \omega_\alpha - L_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta,\end{aligned}\quad (3)$$

где $\Gamma = \{\Gamma_{ba}^a, L_{ba}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, L_{\beta\gamma}^a, \Gamma_{\alpha\beta}^a, L_{\alpha\beta}^{ab}, L_{aa}, \Pi_{aa}^b, L_{\alpha\beta}, \Pi_{\alpha\beta}^a\}$ — объект групповой связности, компоненты которого удовлетворяют сравнениям, приведенным в работе [2].

Подставляя в структурные уравнения (2) базисных форм формы связности (3), перепишем уравнения (2)

$$\begin{aligned}D\omega^\alpha &= \omega^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^\alpha + S_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + S_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega^\beta \wedge \omega_a^\gamma + S_{\beta\gamma}^{ab} \omega_a^\beta \wedge \omega_b^\gamma, \\ D\omega_a^\alpha &= \tilde{\omega}_a^b \wedge \omega_b^\alpha + \omega_a^\beta \wedge \tilde{\omega}_\beta^\alpha + \tilde{\omega}_a \wedge \omega^\alpha + S_{a\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \\ &\quad + S_{a\beta\gamma}^{ab} \omega^\beta \wedge \omega_b^\gamma + S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} \omega_b^\beta \wedge \omega_c^\gamma.\end{aligned}$$

Выражения компонент объекта кручения $S = \{S_{\beta\gamma}^\alpha, S_{\beta\gamma}^{\alpha a}, S_{\beta\gamma}^{ab}, S_{a\beta\gamma}^\alpha, S_{a\beta\gamma}^{ab}, S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\}$ подробно приведены в статье [2] автора. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся лишь дифференциальные сравнения, которым удовлетворяют данные компоненты. Эти сравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta S_{\beta\gamma}^\alpha + S_{[\beta\gamma]}^{\alpha a} \omega_a &\equiv 0, \quad \Delta S_{\beta\gamma}^\alpha + 2S_{\beta\gamma}^{\alpha ba} \omega_b \equiv 0, \quad \Delta S_{\beta\gamma}^{\alpha ab} \equiv 0, \\ \Delta S_{a\beta\gamma}^\alpha + S_{a[\beta\gamma]}^{ab} \omega_b - S_{\beta\gamma}^\alpha \omega_a &\equiv 0, \quad \Delta S_{a\beta\gamma}^{ab} + 2S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} \omega_c - S_{\beta\gamma}^{ab} \omega_a \equiv 0, \\ \Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} - S_{\beta\gamma}^{\alpha bc} \omega_a &\equiv 0.\end{aligned}\quad (4)$$

Теорема 1. Объект кручения S линейной подсвязности $\Gamma_1 = \{\Gamma_{ba}^a, L_{ba}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, L_{\beta\gamma}^a, L_{aa}, \Pi_{aa}^b\}$ [2] гравитационоподобного многообразия является тензором (ср. [8] для пространства центрированных плоскостей [9]). Тензор содержит подтензоры

$$S_0 = \{S_{\beta\gamma}^{\alpha ab}\} \quad \text{и} \quad S_1 = \{S_{\beta\gamma}^{\alpha a}, S_{\beta\gamma}^{\alpha bc}\}, \quad S_2 = \{S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}, S_{\beta\gamma}^{\alpha bc}\}, \quad S_3 = \{S_{\beta\gamma}^{\alpha}, S_{\beta\gamma}^{\alpha a}, S_{\beta\gamma}^{\alpha ab}\}, \\ S_4 = \{S_{a\beta\gamma}^{\alpha ab}, S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}, S_{\beta\gamma}^{\alpha ab}, S_{\beta\gamma}^{\alpha bc}\}.$$

III. Редукция объекта кручения грависманоподобного многообразия

Поместим вершины A_a подвижного репера в нормаль 1-го рода N_{n-m} , при этом имеем

$$\omega_a^a = g_{\alpha\beta}^a \omega^\beta + g_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta \Leftrightarrow \omega_a^a \equiv 0 \pmod{\omega^\alpha, \omega_a^\alpha}. \quad (5)$$

При подстановке в (4) условий (5) заметим, что дифференциальные сравнения (4) компонент объекта кручения не изменятся.

Теорема 2. Когда подвижной репер адаптирован полю нормалей 1-го рода N_{n-m} , тензор кручения содержит все те же подтензоры, что и до указанной канонизации ($A_a \in N_{n-m}$).

Поместим вершины A_a подвижного репера в нормаль 2-го рода N_{m-1} , тогда

$$\omega_a = g_{a\alpha} \omega^\alpha + g_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha \Leftrightarrow \omega_a \equiv 0 \pmod{\omega^\alpha, \omega_a^\alpha}. \quad (6)$$

Учитывая условия (6) в сравнениях (4), приходим к следующим дифференциальным сравнениям

$$\begin{aligned} \Delta S_{\beta\gamma}^\alpha &\equiv 0, \quad \Delta S_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0, \quad \Delta S_{\beta\gamma}^{\alpha ab} \equiv 0, \\ \Delta S_{a\beta\gamma}^\alpha &\equiv 0, \quad \Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha ab} \equiv 0, \quad \Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Теорема 3. Когда подвижной репер адаптирован полю нормалей 2-го рода N_{m-1} , тензор кручения S сводится к тензору S^2 , удовлетворяющему сравнениям (7), и который содержит шесть подтензоров $\{S_{\beta\gamma}^\alpha\}$, $\{S_{\beta\gamma}^\alpha\}$, $\{S_{\beta\gamma}^{\alpha ab}\}$, $\{S_{a\beta\gamma}^\alpha\}$, $\{S_{a\beta\gamma}^{\alpha ab}\}$, $\{S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\}$. Все указанные подтензоры являются простейшими [10].

Замечание. Для грависманоподобного многообразия центрированных плоскостей результат, при котором все компоненты объекта кручения являются простейшими тензорами, достигнут при второй канонизации ($A_a \in N_{m-1}$). Для пространства центрированных плоскостей данная ситуация [8] была возможна лишь при одновременной канонизации, т.е. при $A_a \in N_{n-m}$ и $A_a \in N_{m-1}$.

Литература

1. Белова О. О. Тензор кручения подсвязности в расслоении над грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: 2011. Вып. 42. С. 7-11.
2. Belova O. O. The Grassmann-like manifold of centered planes // Math. Notes, 2018, 104, P. 789-798.
3. Belova O. Fibering reduction of the Grassmann-like manifold of centered planes // Матер. межд. конф., посвящ. 100-летию со дня рождения В.Т. Базылева. М., 2019. С. 16-17.
4. Белова О. О. Редукция расслоений грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей при нормализации // Итоги науки и техн. Современная математика и ее прилож. Тематические обзоры (принята к публикации).
5. Белова О. О. Редукция связностей грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей // Современная геометрия и ее приложения–2019: сборник трудов Международной научной конф. Казань: Изд-во Казанского унив., 2019. С. 30-33.
6. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Пробл. геом. М., 1979. Т. 9, С. 5-246.
7. Шевченко Ю. И. Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: 2006. Вып. 37. С. 179-187.
8. Belova O. Reduction of bundles, connection, curvature, and torsion of centered planes space at normalization. Mathematics, 2019, 7(10), 901.
9. Belova O. O. Connections in fiberings associated with the Grassman manifold and the space of centered planes // Journal of Mathematical Sciences. New York: Springer, 2009. Vol. 162, № 5. P. 605-632.
10. Шевченко Ю. И. Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

Белова Ольга Олеговна, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт физико-математических наук и ИТ, Балтийский федеральный университет им. И. Канта, 236016, г. Калининград, ул. А. Невского, 14, e-mail: olgaobelova@mail.ru.

Belova Olga, Ph. D. in Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Institute of Physics, Mathematics and IT, Immanuel Kant Baltic Federal university, 236016, Kaliningrad, A. Nevskogo str., 14, e-mail: olgaobelova@mail.ru.

ПРОДОЛЖЕНИЕ СТРУКТУРЫ НЕГОЛОНОМНОГО МНОГООБРАЗИЯ КЕНМОЦУ

Аннотация. Распределение почти контактного метрического многообразия является гладким многообразием нечетной размерности. С помощью внутренней связности на этом многообразии естественным образом определяется новая почти контактная метрическая структура, называемая продолженной структурой. В ряде случаев продолженная структура сохраняет свойства исходного многообразия. В статье в качестве базисного многообразия берется неголономное многообразие Кенмоцу. Предварительно изучаются простейшие свойства таких многообразий. Приводятся необходимые примеры и обсуждается строение некоторых инвариантов внутренней геометрии неголономного многообразия Кенмоцу. С помощью произвольного допустимого эндоморфизма строится N -продолженная связность. Задание N -продолженной связности эквивалентно заданию продолженной структуры. Доказывается, что в случае неголономного многообразия Кенмоцу продолженная структура, задаваемая с помощью нулевого эндоморфизма N , также является неголономной структурой Кенмоцу.

Ключевые слова: неголономное многообразие Кенмоцу, внутренняя связность почти контактного метрического многообразия, продолженная почти контактная метрическая структура, тензор кривизны Схоутена.

© A. Bukusheva

STRUCTURE PROLONGATION OF NON-HOLONOMIC KENMOTSU MANIFOLD

Abstract. The distribution of an almost contact metric manifold is a smooth manifold of odd dimension. A new almost contact metric structure is defined on this manifold in a natural way with an interior connection. It is called an extended structure. In some cases, the extended structure keeps attributes of the original manifold. In the article, the nonholonomic Kenmotsu manifold is taken as the base manifold. Preliminary, the simplest properties of such manifolds are studied. The necessary examples are given and the structure of some invariants of the intrinsic geometry of the nonholonomic Kenmotsu manifold is discussed. Using an arbitrary admissible endomorphism, an N -extended connection is constructed. Setting the N -extended connection is equivalent to setting the extended structure. It is proved that in the case of a nonholonomic Kenmotsu

manifold, the extended structure defined by the zero endomorphism N is also a nonholonomic Kenmotsu structure.

Keywords: non-holonomic Kenmotsu manifold; interior connection of an almost contact metric manifold; prolonged almost contact metric structure; Schouten curvature tensor.

1. Введение. В работе [1] введено понятие неголономного многообразия Кенмоцу. Структура неголономного многообразия Кенмоцу является более общей, чем структура «классического» многообразия Кенмоцу [2, 8, 9]. Идея такого рода обобщения многообразия Кенмоцу в своей основе имеет два стимула. Во-первых, было бы очень интересно узнать, как сильно интегрируемость распределения многообразия Кенмоцу влияет на геометрию самого многообразия. Во-вторых, требование интегрируемости распределения почти контактного метрического многообразия существенно ослабляет использование соответствующей структуры в задачах неголономной геометрии и механики с неинтегрируемыми связями. С другой стороны, идея рассмотрения структур (продолженных структур), возникающих на распределениях почти контактных метрических (субримановых) многообразий, привела к открытию новых, ранее не исследованных геометрических структур [3-7]. Свойства продолженной почти контактной метрической структуры зависят как от способа продолжения (от свойств участкового в процедуре продолжения эндоморфизма), так и от свойств «базы». В предлагаемой работе мы показываем, что продолженная на распределение неголономного многообразия Кенмоцу с помощью нулевого эндоморфизма структура также является неголономной структурой Кенмоцу.

2. Многообразия Кенмоцу. Рассмотрим почти контактное метрическое многообразие M , наделенное структурой $(M, \xi, \eta, \varphi, g)$ [3]. Многообразие M имеет нечетную размерность $n=2m+1$. Нормальное многообразие M называется многообразием Кенмоцу, если выполняются следующие условия: $d\eta = 0$, $d\Omega = 2\eta \wedge \Omega$ [2, 8, 9]. Почти контактное метрическое многообразие M является многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда $(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = -\eta(Y)\varphi X - g(X, \varphi Y)\xi$. Здесь для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g используются,

соответственно, следующие обозначения: $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$. Из определения многообразия Кенмоцу следует справедливость следующих равенств: $(\tilde{\nabla}_X \eta)Y = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$, $L_{\tilde{\xi}}g = 2(g - \eta \otimes \eta)$.

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M назовем адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \tilde{\xi}$ [3]. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, где $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением $TM = D \oplus D^\perp$, задают распределение $D: D = \text{span}(\vec{e}_a)$. Потребуем, дополнительно, чтобы $\tilde{\xi} \in \ker \omega$. В результате получим, что $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Если $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, то будут иметь место следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Введем в рассмотрение эндоморфизм $\psi: D \rightarrow D$ такой, что $\omega(X, Y) = g(\psi X, Y)$.

В этом случае оказывается справедливым следующее предложение [3].

Предложение 1 [2]. Пусть M – почти контактное метрическое многообразие и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ – коэффициенты связности Леви-Чивита, тогда оказываются справедливыми следующие равенства:

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - C_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0,$$

$$\text{где } C_{ab} = \frac{1}{2} \partial_n g_{ab}, \quad C_b^a = g^{da} C_{db}, \quad \psi_a^c = g^{bc} \omega_{ab}.$$

Учитывая, что для многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах выполняются равенства

$$C_{ab} = g_{ab}, \quad C_a^b = \delta_a^b, \quad \omega_{ba} = 0, \quad \psi_a^c = 0.$$

убеждаемся в справедливости предложения 2.

Предложение 2 [2]. Коэффициенты связности Леви-Чивита многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = -g_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = \delta_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0.$$

Рассмотрим на многообразии с почти контактной метрической структурой внутреннюю линейную связность $\nabla : \Gamma(D) \times \Gamma(D) \rightarrow \Gamma(D)$, где: 1) $\nabla f_1 X + f_2 Y = f_1 \nabla X + f_2 \nabla Y$, 2) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f \nabla_X Y$, 3) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$, $\Gamma(D)$ – модуль допустимых векторных полей.

3. Основные понятия геометрии неголономных многообразий Кенмоцу.

Гладкое многообразие M с заданной на нем почти контактной нормальной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ назовем неголономным многообразием Кенмоцу, если выполняется равенство $L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$.

Предложение 3 [1]. Коэффициенты связности Леви-Чивита неголономного многообразия Кенмоцу в адаптированных координатах имеют вид:

$$\tilde{\Gamma}_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc}), \quad \tilde{\Gamma}_{ab}^n = \omega_{ba} - g_{ab},$$

$$\tilde{\Gamma}_{an}^b = \tilde{\Gamma}_{na}^b = \delta_a^b + \psi_a^b, \quad \tilde{\Gamma}_{na}^n = \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0.$$

Результаты предложения 3 использовались при доказательстве предложения 4.

Предложение 4 [1]. Почти контактное метрическое многообразие является неголономным многообразием Кенмоцу тогда и только тогда, когда

$$(\tilde{\nabla}_X \varphi)Y = \eta(Y)FX - (\omega(X, \varphi Y) - g(X, \varphi Y))\vec{\xi},$$

где $F = -\varphi - \psi \circ \varphi$.

Доказательство предложения опирается на равенство $L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$, а также на результаты работы [3], в которой было показано, что почти контактная метрическая структура нормальна тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$1) L_{\vec{\xi}} \varphi = 0,$$

$$2) \nabla \varphi = 0,$$

3) $\omega(\varphi X, \varphi Y) = \omega(X, Y)$.

Тензор Схоутена-Вагнера – допустимое тензорное поле $P(X, Y)$, в адаптированных координатах представленное в виде $P_{bc}^a = \partial_n \Gamma_{bc}^a$.

Тензор Схоутена-Вагнера относится к инвариантам внутренней геометрии почти контактного метрического многообразия M . В случае неголономного многообразия Кенмоцу доказывается, что $P(X, Y) = 0$.

Пример неголономного многообразия Кенмоцу.

Пусть $M=R^3$. (∂_α) ($\alpha=1, 2, 3$) – стандартный базис арифметического пространства. Определим на M 1-форму η , полагая, $\eta = dx^3 + x^2 dx^1$. Пусть, далее $\vec{e}_1 = \partial_1 - x_2 \partial_3$, $\vec{e}_2 = \partial_2$, $\vec{e}_3 = \partial_3$, $D = \text{Span}(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Пусть для метрического тензора выполняются соотношения $g(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = g(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = e^{2x^3}$, $g(\vec{e}_3, \vec{e}_3) = 1$. Отсюда следует, что $L_{\vec{\xi}} g = 2(g - \eta \otimes \eta)$. Положим, далее: $\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$, $\varphi(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1$, $\varphi(\vec{e}_3) = \vec{0}$. Отсюда получаем: $L_{\vec{\xi}} \varphi = 0$ и $\omega(\varphi(\vec{e}_1), \varphi(\vec{e}_2)) = -\omega(\vec{e}_2, \vec{e}_1) = \omega(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Тем самым – $\omega(\varphi X, \varphi Y) = \omega(X, Y)$.

Ненулевыми компонентами связности Леви-Чивита принимают следующие значения: $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -x^2$. Таким образом, $\nabla \varphi = 0$.

Заметим, что тензор Схоутена в рассматриваемом случае отличен от нуля: $R_{121}^1 = -\partial_2 \Gamma_{11}^1 = 1$.

4. Продолженная структура неголономного многообразия Кенмоцу.

На распределении D неголономного многообразия Кенмоцу структура гладкого многообразия определяется обычным образом [3-7]. А именно, в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^\alpha)$ многообразия M ставится сверхкарта $\tilde{K}(x^\alpha, x^{n+a})$ на распределении D , так, что $\tilde{K}(\vec{x}) = (x^\alpha, x^{n+a})$, где (x^{n+a}) – координаты допустимого вектора X в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$: $X = x^{n+a} \vec{e}_a$. Благодаря заданию внутренней связности ∇ получаем разложение распределения $\tilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi: D \rightarrow M$ – естественная проекция, в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD

– вертикальное распределение на тотальном пространстве D , а HD – горизонтальное распределение, порождаемое векторными полями $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_{a\alpha}^n \partial_n - \Gamma_{ac}^b(x^\alpha) x^{n+c} \partial_{n+b}$.

Связность в векторном расслоении (D, π, M) , определяемую разложением $TD = HD \oplus VD$, где $\bar{HD} = HD \oplus \text{Span}(\vec{u})$,

$\vec{u}_X = \vec{e} - (NX)^v$, $\vec{e} = \partial_n$, $X \in D$, $(NX)^v$ – вертикальный лифт, назовем N -продолженной связностью [3]. Здесь $N: D \rightarrow D$ – поле допустимого тензора типа $(1,1)$.

Координатное представление поля \vec{u} в базисе $(\vec{e}_a, \partial_n, \partial_{n+a})$ имеет вид: $\vec{u} = \partial_n - N_b^a x^{n+b} \partial_{n+a}$. В дальнейшем будем считать, что $N=0$. В этом случае $\bar{HD} = HD \oplus \text{Span}(\partial_n)$.

Имеют место следующие структурные уравнения:

$$[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba} \partial_n + x^{n+d} R_{bad}^c \partial_{n+c}, \quad [\vec{e}_a, \partial_n] = x^{n+d} \partial_n \Gamma_{ad}^c \partial_{n+c}, \\ [\vec{e}_a, \partial_{n+b}] = \Gamma_{ab}^c \partial_{n+c},$$

По аналогии с тем как это делается в случае касательного расслоения, векторному полю $X \in \Gamma(TM)$, заданному на многообразии M , соотносится его горизонтальный лифт X^h , при этом, $X^h \in \Gamma(HD)$ тогда и только тогда, когда X – допустимое векторное поле: $X \in \Gamma(D)$.

Используя полученные выше структурные уравнения, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 1 [3]. Пусть ∇ – внутренняя симметричная связность с тензором кривизны Схоутена $R(X, Y)Z$. Тогда для всех $X, Y \in \Gamma(D)$ и $\vec{p} \in D$ имеют место следующие равенства

$$[X^h, Y^h]_{\vec{p}} = [X, Y]^h - \{R(X, Y)\vec{p}\}^v, \\ [X^h, \vec{\xi}^h]_{\vec{p}} = [X, \vec{\xi}]^h + \{P(X, \vec{p})\}^v, \\ [X^h, Y^v] = (\nabla_X Y)^v, \quad [X^v, \vec{\xi}^h] = [X, \vec{\xi}]^v.$$

Пусть $(D, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$ – продолженная почти контактная метрическая структура, определяемая на распределении D многообразия M следующим образом:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(X^h, Y^h) &= \tilde{g}(X^\nu, Y^\nu) = g(X, Y), \\ \tilde{g}(X^h, Y^\nu) &= \tilde{g}(X^\nu, Y^h) = \tilde{g}(X^h, \vec{u}) = \tilde{g}(X^\nu, \vec{u}) = 0, \\ J X^h &= (\varphi X)^h, \quad J X^\nu = (\varphi X)^\nu, \quad J(\vec{u}) = \vec{0}, \\ X, Y &\in \Gamma(D), \quad \vec{u} = \partial_n = \vec{\xi}^h.\end{aligned}$$

Теорема 2. Продолженная структура $(D, J, \vec{u} = \partial_n, \lambda = \eta \circ \pi_*, \tilde{g}, \tilde{D})$, определяемая на распределении неголономного многообразия Кенмоцу M , является неголономной структурой Кенмоцу.

Доказательство. Проверяем непосредственно, что

$$\begin{aligned}d\lambda(X^h, Y^h) &= d\eta(X, Y), \quad d\lambda(X^\nu, Y^h) = 0, \quad d\lambda(X^\nu, Y^\nu) = 0, \\ d\lambda(Z, \vec{\xi}^h) &= 0, \quad X, Y \in \Gamma(D), \quad Z \in \Gamma(TD).\end{aligned}$$

Выясним, при каких условиях выполняется равенство $\tilde{N}_J = N_J + 2d\lambda \otimes \vec{u} = 0$.

Опираясь на структурные уравнения, для $X, Y \in \Gamma(D)$ получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{N}_J(X^h, Y^h) &= \left\{ \tilde{N}_\varphi(X, Y) \right\}^h + \left\{ R(X, Y)\vec{p} - R(\varphi X, \varphi Y)\vec{p} + \varphi R(\varphi X, Y)\vec{p} + \varphi R(X, \varphi Y)\vec{p} \right\}^h, \\ \tilde{N}_J(X^h, \vec{\xi}^h) &= \left\{ -P(X, \vec{p}) - \varphi P(\varphi X, \vec{p}) \right\}^\nu, \\ \tilde{N}_J(X^h, Y^\nu) &= \tilde{N}_J(X^\nu, \vec{\xi}^h) = 0.\end{aligned}$$

$\left\{ \tilde{N}_\varphi(X, Y) \right\}^h$ обращается в нуль, так как M – нормальное почти контактное метрическое многообразие.

$\left\{ R(X, Y)\vec{p} - R(\varphi X, \varphi Y)\vec{p} + \varphi R(\varphi X, Y)\vec{p} + \varphi R(X, \varphi Y)\vec{p} \right\}^\nu$ обращается в нуль, так как тензор Схутена нормального почти контактного многообразия обладает теми же свойствами, что и тензор кривизны кэлерова многообразия. Теорема доказана.

Литература

- Букушева А. В. О тензоре Схутена-Вагнера неголономного многообразия Кенмоцу // Труды семинара по геометрии и математическому моделированию. 2019. №5. С. 15-19.

2. Букушева А. В. О геометрии многообразий Кенмоцу с N-связностью // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2019. №50. С. 48-60.
3. Букушева А. В., Галаев С. В. Связности над распределением и геодезические пульверизации // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. №4. С. 10-18.
4. Букушева А. В., Галаев С. В. О допустимой келеровой структуре на касательном расслоении к неголономному многообразию // Математика. Механика. 2005. №7. С. 12-14.
5. Букушева А. В., Галаев С. В., Иванченко И. П. О почти контактных метрических структурах, определяемых связностью над распределением с финслеровой метрикой // Механика. Математика. 2011. №13. С.10-14.
6. Галаев С. В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. Вып. 2. С. 138-147.
7. Bukusheva A. V., Galae S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53). №2. P. 13-22.
8. Kenmotsu K. A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J. 1972. V. 24. P. 93–103.
9. Pitis G. Geometry of Kenmotsu manifolds. Publishing House of Transilvania University of Brasov, Brasov, 2007. iv+160 pp.

Букушева Алия Владимировна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, улица Астраханская, 83, 8-8452-515539, e-mail: bukusheva@list.ru

Bukusheva Aliya Vladimirovna, candidate of pedagogical sciences, associate professor of the chair Geometry, National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky, 410012, Russia, Saratov, street Astrahanskaja, 83, 8-8452-515539, e-mail: bukusheva@list.ru

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АНТИПРИЗМЫ,
ДОПУСКАЮЩЕЙ ЗЕРКАЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНУЮ
СИММЕТРИЮ ПОРЯДКА $2n$** ¹

Аннотация. Цель настоящей статьи – представить обзор недавних результатов, полученных автором вместе с его коллегами, по изучению геометрических свойств антипризмы с $2n$ вершинами ($n > 1$), моделируемой в пространстве Лобачевского. Антипризма – это выпуклый многогранник, две параллельные грани которого являются равными между собой правильными n -угольниками, а остальные $2n$ боковых граней представляют собой равнобедренные треугольники. Антипризма имеет группу симметрии S_{2n} , которая порождается зеркально-вращательным элементом порядка $2n$, то есть композицией вращения на угол π/n и отражения. В работе представлен критерий реализации указанного многогранника в гиперболическом пространстве. Найдены тригонометрические соотношения между его двугранными углами и длинами ребер. Получена точная аналитическая формула, выражающая его гиперболический объем в терминах длин ребер.

Ключевые слова: компактная гиперболическая антипризма, гиперболический объем, зеркально-вращательная симметрия, группа симметрий S_{2n} .

**GEOMETRICAL PROPERTIES OF AN ANTI PRISM,
ADMITTING MIRROR-ROTATIONAL SYMMETRY OF
ORDER $2n$**

Abstract. The aim of the present paper is to give a survey of recent results obtained by the author and his collaborators in investigation of geometrical properties of an antiprism with $2n$ vertices ($n > 1$), modelled in the Lobachevsky space. An antiprism is a convex polyhedron composed of two parallel copies of some particular n -sided polygon, connected by an alternating band of $2n$ isosceles triangles. Antiprism has symmetry group S_{2n} generated by a mirror-rotational symmetry of order $2n$, i.e. rotation to the angle π/n followed by a reflection. We present a criterion for existence of this polyhedron in the hyperbolic space. We find trigonometrical identities relating lengths and

¹ Работа поддержана РФФИ (проект № 18-01-00420).

dihedral angles of a such polyhedron. We obtain exact analytical formula for its hyperbolic volume in terms of edge lengths.

Keywords: compact hyperbolic antiprism, hyperbolic volume, rotation followed by reflection, symmetry group S_{2n} .

1. Введение.

Еще в древности красоту симметрии уже заметили, она появилась во многих произведениях искусства, созданных человеком. Используемые в них геометрические объекты привносили баланс и гармонию. При этом структурным элементом часто служил многогранник, имеющий математическую симметрию. Изучение геометрических свойств многогранников, в частности, вычисление их объемов, является очень старой и трудной проблемой. Один из первых известных результатов в этом направлении был установлен итальянским математиком Тарталья в 1494 году: он предложил записанный в стихах алгоритм вычисления высоты тетраэдра в Евклидовом пространстве. Формула объема произвольного евклидова тетраэдра позже была найдена Эйлером: в ней квадрат объема выражается через определитель Кэли-Менгера. В 1997 году И.Х. Сабитов доказал, что объем любого евклидова многогранника с жесткими (треугольными) гранями является корнем некоторого целочисленного многочлена, коэффициенты которого зависят от длин ребер. Вид такого многочлена зависит от комбинаторного типа многогранника. С развитием гиперболической геометрии изучение многогранников стало особенно актуально, особенно в теории многообразий и теории кристаллографических групп.

Антипризмой A_n ($n > 1$) называют выпуклый многогранник, состоящий из двух равных параллельных оснований, являющихся правильными n -угольниками, и $2n$ равных боковых граней, представляющих собой равнобедренные треугольники. По форме антипризма напоминает барабан (см. Рис. 1, где показана боковая поверхность антипризмы при $n=5$).

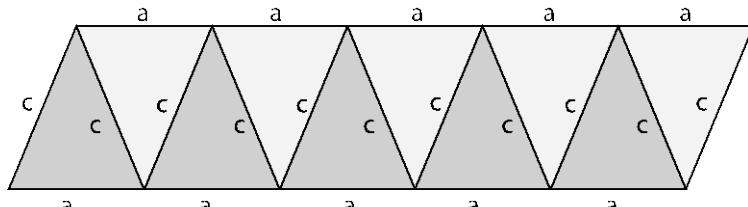


Рис. 1. Боковая поверхность антипризмы A_5

По определению, антипризма A_n с $2n$ вершинами имеет группу симметрии S_{2n} , которая порождается зеркально-вращательным элементом порядка $2n$, обозначаемым C_{2nh} в классификации Шёнфлиса. Элемент C_{2nh} является композицией вращения на угол π/n вокруг оси, проходящей через центры оснований, и отражения относительно плоскости, ортогональной этой оси и проходящей через середины боковых ребер (см. Рис. 2).

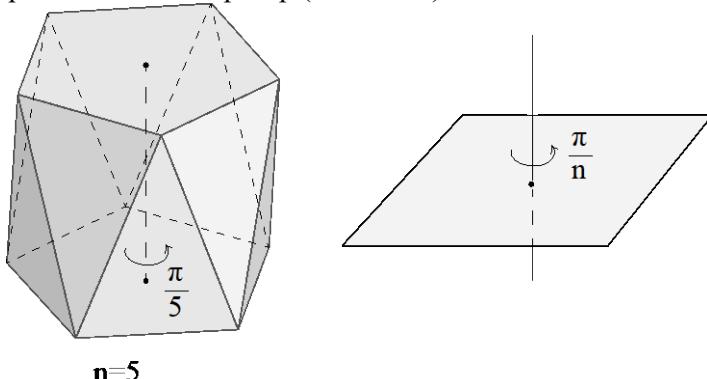


Рис. 2. Симметрия антипризмы

Приведенные выше определения антипризмы и ее группы симметрий имеют место, как в евклидовом пространстве, так и в пространстве Лобачевского. По определению, A_n имеет два типа ребер. Обозначим через a длину ребер при основаниях, через c – длину боковых ребер. Для краткости будем писать A_n вместо $A_n(a,c)$ для обозначения антипризмы с длинами ребер a и c .

Идеальная антипризма в пространстве H^3 со всеми вершинами на бесконечности была изучена А. Ю. Весниным и А. Д. Медных [1] (см. также [2]). Частный случай прямоугольной идеальной антипризмы рассмотрен в работе У. Тёрстона [3]. В случае идеальной антипризмы двугранные углы связаны условием $2A + 2C = 2\pi$, а в компактном случае выполняется неравенство $2A + 2C > 2\pi$.

При $n=2$ n -угольные основания антипризмы A_n вырождаются в два скрещивающихся ребра. Таким образом, мы получаем тетраэдр с группой симметрии S_4 (см. Рис. 3). Объем компактного

гиперболического тетраэдра этого типа был найден в совместной работе автора с Н. В. Абросимовым [4].

При $n=3$ антипризма A_n является октаэдром с группой симметрии S_6 (см. Рис. 3). Объем компактного гиперболического октаэдра с этим типом симметрии был найден Н. В. Абросимовым, Е. С. Кудиной и А. Д. Медных в [5].

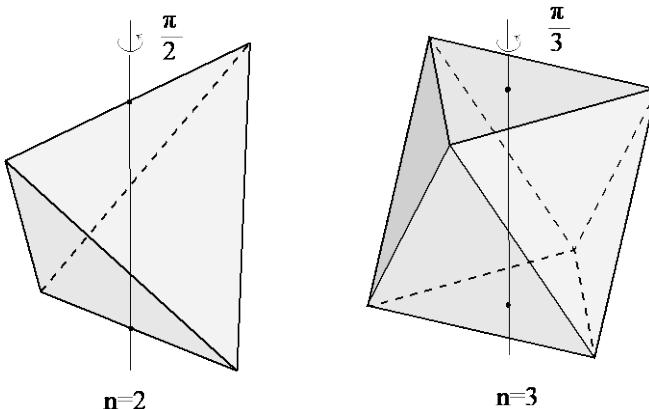


Рис. 3. Антипризмы A_2 и A_3

2. Реализация антипризмы, обладающей зеркально-вращательной симметрией, в проективной модели Кэли-Клейна.

Приведем необходимые сведения о проективной модели Кэли-Клейна. Рассмотрим пространство Минковского R_1^4 со скалярным произведением $\langle X, Y \rangle = -x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 + x_4y_4$.

Моделью Кэли-Клейна называется множество векторов, образующих единичный шар $K = \{(x_1, x_2, x_3, 1) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$, лежащий в гиперплоскости $x_4 = 1$. Прямыми и плоскостями в этой модели служат пересечения шара K с евклидовыми прямыми и плоскостями, лежащими в гиперплоскости $x_4 = 1$.

Пусть V, W – два вектора из K . Положим $V = (v, 1)$, $W = (w, 1)$ где $v, w \in R^3$. Тогда скалярное произведение указанных векторов в пространстве Минковского выражается через евклидово скалярное произведение по формуле $\langle V, W \rangle = 1 - \langle v, w \rangle_E$.

Расстояние $\rho(V, W)$ между векторами V, W в модели Кэли-Клейна определяется равенством

$$\operatorname{ch}\rho(V, W) = \frac{\langle V, W \rangle}{\sqrt{\langle V, V \rangle \langle W, W \rangle}}.$$

Плоскость в модели K можно определить как геометрическое место точек $P = \{V \in K : \langle V, N \rangle = 0\}$, где $N = (n, 1)$, $\langle n, n \rangle_E > 0$ – вектор нормали к плоскости P . Точка $(n, 1)$ называется полюсом P и лежит вне шара K .

В модели Кэли-Клейна рассмотрим плоскости P, Q с нормалями N, M соответственно. Двугранный угол между P и Q , для которого нормали N, M являются внешними, определяется соотношением

$$\cos(\angle P, Q) = -\frac{\langle N, M \rangle}{\sqrt{\langle N, N \rangle \langle M, M \rangle}}.$$

Пусть $V_1 = (v_1, 1), V_2 = (v_2, 1), V_3 = (v_3, 1)$ – три вектора в K . Тогда через них проходит единственная плоскость $P = \{V \in K : \langle V, N \rangle = 0\}$ с вектором нормали $N = (n, 1)$, где координаты вектора n однозначно определяются как решение системы линейных уравнений

$$\langle v_1, n \rangle_E - 1 = 0,$$

$$\langle v_2, n \rangle_E - 1 = 0,$$

$$\langle v_3, n \rangle_E - 1 = 0.$$

Для реализации антипризмы A_n проективной модели Кэли-Клейна сначала мы рассмотрим ее в обычном трехмерном Евклидовом пространстве R^3 .

Введем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ в 3-мерном евклидовом пространстве R^3 со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$. Рассмотрим зеркально поворотную осевую симметрию C_{2nh} , которая является композицией поворота вокруг оси Ox_3 на угол π/n и отражения в плоскости Ox_1x_2 :

$$C_{2n\ h} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} & 0 \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Группа симметрий антипризмы действует на множестве вершин транзитивно, поэтому для определения антипризмы на достаточно указать одну вершину. Без потери общности мы принимаем вершину v_1 с координатами $(r, 0, h/2)$ с некоторыми положительными числами r, h . Орбита вершины v_1 под действием $C_{2n\ h}$ содержит все вершины антипризмы A_n .

$$C_{2n\ h}: v_i \rightarrow v_{i+1},$$

где индексы i принимают значения по модулю $2n$.

Тогда координаты всех вершин антипризмы A_n в R^3 можно выписать следующим образом:

$$\begin{aligned} v_{2k+1} &= \left(r \cos \frac{2k\pi}{n}, r \sin \frac{2k\pi}{n}, \frac{h}{2} \right), \\ v_{2k+2} &= \left(r \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}, r \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}, -\frac{h}{2} \right), \end{aligned}$$

где $k = 0, \dots, n-1$.

Действие зеркально-вращательной симметрии $C_{2n\ h}$ естественным образом продолжается из R^3 в H^3 . Рассмотрим проективную модель Кейли-Клейна H^3 с прямоугольной системой координат $Ox_1x_2x_3x_4$. Как и в евклидовом пространстве, зеркально-вращательная симметрия порядка $2n$ представляет собой композицию вращения на угол π/n вокруг оси Ox_3 и отражения относительно координатной плоскости Ox_1x_2 . Имеем

$$\overline{C_{2nh}} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{n} & -\sin \frac{\pi}{n} & 0 & 0 \\ \sin \frac{\pi}{n} & \cos \frac{\pi}{n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим евклидову антипризму в шаре $K = \{(x_1, x_2, x_3, 1) : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < 1\}$. и вложим ее в H^3 . Для этого добавим каждой ее вершине v_i четвертую координату $x_4 = 1$, получим координаты вершин гиперболической антипризмы в модели Кэли-Клейна:

$$V_{2k+1} = \left(r \cos \frac{2k\pi}{n}, r \sin \frac{2k\pi}{n}, \frac{h}{2}, 1 \right),$$

$$V_{2k+2} = \left(r \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}, r \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}, -\frac{h}{2}, 1 \right),$$

где $k = 0, \dots, n-1$ и выполняется дополнительное условие

$$r^2 + \frac{h^2}{4} < 1,$$

которое гарантирует, что антипризма лежит целиком внутри шара K .

3. Основные результаты

Мы остановимся на обзоре результатов, полученных в работах [4],[5],[6]. Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. (Абросимов, Выонг, [6]) Для того чтобы компактная антипризма A_n , заданная длинами своих ребер a и c , существовала в пространстве Лобачевского, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее неравенство

$$1 + \cosh a - 2 \cosh c + 2(1 - \cosh c) \cos \frac{\pi}{n} < 0.$$

Теорема 2. (Абросимов, Выонг, [6]) Пусть A_n – антипризма в пространстве Лобачевского с длинами ребер a , c . Тогда косинусы соответствующих двугранных углов A, B выражаются формулами

$$\cos A = \frac{-\sqrt{\cosh a - 1} \left(1 + \cosh a - 2 \cosh c \cos \frac{\pi}{n} \right)}{\sqrt{2(1 + \cosh a - 2 \cosh^2 c)(\cos \frac{2\pi}{n} - \cosh a)}},$$

$$\cos C = \frac{\cosh c - \cosh a \cosh c + 2(\cosh^2 c - 1) \cos \frac{\pi}{n}}{1 + \cosh a - 2 \cosh^2 c}.$$

Теорема 3. (Абросимов, Вьюнг, [6]) Объем компактной гиперболической антипризмы A_n , заданной длинами своих ребер a и c , выражается по формуле

$$V(A_n) = n \int_{c_0}^c \frac{aG + tH}{(2 \operatorname{ch}^2 t - 1 - \operatorname{ch} a) \sqrt{R}} dt,$$

где

$$G = 2 \left(\operatorname{ch} t - \cos \frac{\pi}{n} \right) \operatorname{sh} a \operatorname{sh} t,$$

$$H = -(\operatorname{ch} a - 1) \left(1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch}^2 t - 4 \operatorname{ch} t \cos \frac{\pi}{n} \right),$$

$$R = 1 - \operatorname{ch} a(2 + \operatorname{ch} a) + 2 \operatorname{ch}^2 t + 4(\operatorname{ch} a - 1) \operatorname{ch} t \cos \frac{\pi}{n} - 2 \operatorname{sh}^2 t \cos \frac{2\pi}{n}$$

$$\text{и } c_0 \text{ — корень уравнения } 2 \operatorname{ch} c \left(1 + \cos \frac{\pi}{n} \right) = 1 + \operatorname{ch} a + 2 \cos \frac{\pi}{n}.$$

В частности, для $n=2$, получим следующее утверждение.

Теорема 4. (Абросимов, Вьюнг, [4]) Объем гиперболического тетраэдра A_2 с группой симметрий S_4 выражается любой из следующих формул

$$V(A_2) = \int_0^a \frac{t((1 + \operatorname{cht})^2 - 4 \operatorname{ch}^2 c \operatorname{cht}) + 4c \operatorname{shc} \operatorname{chc} \operatorname{sht}}{(\operatorname{ch}(2c) - \operatorname{cht}) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 c - (1 + \operatorname{cht})^2}} dt,$$

$$V(A_2) = \int_{\operatorname{arcc} \frac{\operatorname{cha}+1}{2}}^c (1 - \operatorname{cha}) \frac{a \operatorname{sht}(1 - 2 \operatorname{cht} + \operatorname{cha})^2 + 2t \operatorname{sha} \operatorname{cht}(4 \operatorname{cht} - \operatorname{cha} - 3)}{2 \operatorname{sha}(\operatorname{ch}(2t) - \operatorname{cha}) \sqrt{4 \operatorname{ch}^2 t - (1 + \operatorname{cha})^2}} dt.$$

При $n=3$ из теоремы 3 следует следующая теорема.

Теорема 5. (Абросимов, Кудина, Медных, [5]) Объем компактного гиперболического октаэдра A_3 с группой симметрий S_6 равен

$$V(A_3) = 3 \int_{c_0}^c \frac{a(2 \operatorname{ch} t - 1) \operatorname{sh} a \operatorname{sh} t - t(\operatorname{ch} a - 1)(1 + \operatorname{ch} a + 2 \operatorname{ch} t(\operatorname{ch} t - 1))}{(\operatorname{ch} 2t - \operatorname{ch} a) \sqrt{(3 \operatorname{ch} c - \operatorname{ch} a - 2)(\operatorname{ch} a + \operatorname{ch} c)}} dt,$$

где $c_0 = \operatorname{arcch} \frac{\operatorname{ch} a + 2}{3}$.

Литература

1. Веснин А. Ю., Медных А. Д. Гиперболические объемы многообразий Фибоначчи. Сиб. матем. журн., 1995, т. 36, № 2, с. 266-277.
2. Vesnin A. Yu. On volumes of some hyperbolic 3-manifolds. Lecture notes series. Seoul National University, 1996.
3. Thurston, W. P. The Geometry and Topology of 3-Manifolds edited by Silvio Levy - Princeton: Princeton Univ. Press. Cambridge, 1980.
4. Абросимов Н. В., Выонг Х. Б. Объем гиперболического тетраэдра с группой симметрий S_4 . Тр. ИММ УрО РАН, 2017, т.23, № 4, с.7-17.
5. Абросимов Н. В., Кудина Е. С., Медных А. Д. Об объеме гиперболического октаэдра, допускающего $\bar{3}$ -симметрию. Труды Мат. Инс. им. Стеклова, 2015, т. 288, с. 7-15.
6. Abrosimov N. V., Vuong Huu Bao. The volume of a compact hyperbolic antiprism, J. Knot Theory Ramif., 2018, vol 11, no. 26, 1842010 (12 pp.)

Выонг Хыу Бао, младший научный сотрудник, Лаборатория топологии и динамики НГУ, г. Новосибирск, 630090, ул. Пирогова, дом 1. Email: vuonghuubao@live.com

Vuong Huu Bao, Junior Researcher, NSU

(F,V)-СВЯЗНОСТИ НА ПОЧТИ КОНТАКТНЫХ МЕТРИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ

Аннотация. На почти контактном метрическом многообразии M вводится понятие (F,V)-связности, где V – векторное поле, а F - тензорное поле типа (1,1). Доказывается, что всякая (F,V)-связность является метрической связностью. Отдельно рассматривается случай $(F, \vec{\xi})$ -связности, где $\vec{\xi}$ - фундаментальное векторное поле. Доказывается, что $(F_1, \vec{\xi})$ -связность совпадает с $(F_2, \vec{\xi})$ -связностью, если эндоморфизмы F_1 и F_2 являются допустимыми эндоморфизмами, т. е., обладают следующими свойствами: $F_i \vec{\xi} = \vec{0}$, $F_i(D) \subset D$, $i=1, 2$.

Ключевые слова. Почти контактное метрическое многообразие, внутренняя связность, связность Шоутена–ван Кампена, связность с векторным кручением, связность с $(F, \vec{\xi})$ -кручением

© S. Galaev

(F,V)-CONNECTIONS ON ALMOST CONTACT METRIC MANIFOLDS

Abstract. On an almost contact metric manifold M , the notion of an (F,V)-connection, is introduced; here V is a vector field and F is a tensor field of type (1,1). It is shown that each (F,V)-connection is a metric connection. The case of an $(F, \vec{\xi})$ -connection, where $\vec{\xi}$ is the fundamental vector field, is considered separately. It is proved that the $(F_1, \vec{\xi})$ -connection coincides with the $(F_2, \vec{\xi})$ -connection under the condition that the endomorphisms F_1 and F_2 are admissible, i.e., they satisfy the properties $F_i \vec{\xi} = \vec{0}$, $F_i(D) \subset D$, $i=1, 2$.

Keywords: almost contact metric manifold, interior connection, Schouten–van Kampen connection, connection with torsion of vector type, connection with $(F, \vec{\xi})$ -torsion.

1. Введение.

Геометрия почти контактных метрических многообразий имеет многочисленные приложения в современной математической физике, например, в аналитической механике и теории геометрического квантования, в теории супергравитации Калуцы-Клейна [6,8]. Во многом благодаря приложениям почти контактных метрических структур к теоретической физике на почти контактных метрических многообразиях помимо связности Леви-Чивита рассматриваются (метрические или нет) связности с кручением [1, 3, 7, 9, 12]. К наиболее часто используемым связностям можно отнести полусимметрические и четверть-симметрические связности. В то же время, к указанным связностям, например, не относятся такие связности, как связность Танака-Вебстера и связность Схоутена-ван Кампена. Эти и некоторые другие связности представляют собой частный случай так называемой N-связности ∇^N , которая может быть ассоциирована с парой (∇, N) , где ∇ – внутренняя связность, осуществляющая параллельный перенос допустимых векторов вдоль допустимых кривых, а $N: TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения почти контактного метрического многообразия M такой, что $N\vec{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Будем называть эндоморфизм N допустимым и писать при этом так: $N: D \rightarrow D$. N -связность ∇^N определяется на почти контактном метрическом многообразии M , наделенном внутренней связностью ∇ и эндоморфизмом $N: D \rightarrow D$ гладкого распределения D , как единственная связность на многообразии M , удовлетворяющая следующим условиям [10, 11]:

- 1) $\nabla_X^N Y \in \Gamma(D)$, 2) $\nabla_X^N \vec{\xi} = 0$, 3) $\nabla_X^N Y = [\vec{\xi}, Y] + NY$,
- 4) $\nabla_Y^N Z = \nabla_Y Z$, $X \in \Gamma(TM)$, $Y, Z \in \Gamma(D)$.

Если ∇ – метрическая связность, то связность ∇^N характеризуется следующими условиями:

- 1) $S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\vec{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_X^N g(Y, Z) = 0$, $X, Y, Z \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_X^N \vec{\xi} = 0$, $X \in \Gamma(TM)$;

$$3) \nabla_X^N \eta = 0, \quad X \in \Gamma(TM).$$

В настоящей работе на почти контактном метрическом многообразии M вводится понятие (F,V) -связности, где V – векторное поле, а F – тензорное поле типа $(1,1)$. (F,V) -связность представляет собой обобщение связности с векторным кручением $D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + g(X,Y)V - g(V,Y)X$ [7]. Доказывается, что всякая (F,V) -связность является метрической связностью. Отдельно рассматривается случай связности с $(F,\vec{\xi})$ -связности, где $\vec{\xi}$ – фундаментальное векторное поле.

Доказывается, что если эндоморфизмы F_1 и F_2 являются допустимыми эндоморфизмами, т. е., обладают следующими свойствами: $F_i \vec{\xi} = \vec{0}$, $F_i(D) \subset D$, $i=1, 2$, то $(F_1, \vec{\xi})$ -связность совпадает с $(F_2, \vec{\xi})$ -связностью.

2. N-связность ∇^N на почти контактных метрических многообразиях.

Почти контактным метрическим многообразием называется гладкое многообразие M нечетной размерности $n=2m+1$, $m > 1$ с заданной на нем почти контактной метрической структурой $(M, \vec{\xi}, \eta, \varphi, g)$ [2,4]. Здесь, в частности, η – 1-форма и $\vec{\xi}$ – векторное поле, порождающие, соответственно, распределение D : $D = \ker(\eta)$ и оснащение D^\perp распределения D : $D^\perp = \text{span}(\vec{\xi})$.

Гладкое распределение D будем называть распределением почти контактного метрического многообразия. Имеет место разложение $TM = D \oplus D^\perp$. Почти контактное метрическое многообразие называется нормальным, если выполняется условие $N_\varphi + 2d\eta \otimes \vec{\xi} = 0$, где $N_\varphi(X, Y) = [\varphi X, \varphi Y] + \varphi^2[X, Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$ – тензор Нейенхайса эндоморфизма φ .

Будем использовать следующие обозначения для связности и коэффициентов связности Леви-Чивита тензора g : $\tilde{\nabla}$, $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$.

Карту $K(x^\alpha)$ ($\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, n$; $a, b, c = 1, \dots, n-1$) многообразия M называется адаптированной к распределению D , если $\partial_n = \vec{\xi}$ [5]. Пусть $P: TM \rightarrow D$ – проектор, определяемый разложением

$TM = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ – адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ порождают распределение D : $D = \text{span}(\vec{e}_a)$. Для неголономного поля базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ выполняется соотношение $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$. Из условия $\tilde{\xi} \in \ker \omega$ следует, что $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^\alpha)$ и $K(x^{\alpha'})$ – адаптированные карты, тогда получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Пусть $\tilde{\nabla}$ – связность Леви-Чивита и $\tilde{\Gamma}_{\beta\gamma}^\alpha$ – ее коэффициенты. В результате непосредственных вычислений убеждаемся в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. Коэффициенты связности Леви-Чивита почти контактного метрического многообразия в адаптированных координатах имеют вид:

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ab}^c &= \Gamma_{ab}^c, & \tilde{\Gamma}_{ab}^n &= \omega_{ba} - C_{ab}, & \tilde{\Gamma}_{an}^b &= \tilde{\Gamma}_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b, \\ \tilde{\Gamma}_{na}^n &= \tilde{\Gamma}_{nn}^a = 0, \\ \text{где } \Gamma_{bc}^a &= \frac{1}{2}g^{ad}(\vec{e}_b g_{cd} + \vec{e}_c g_{bd} - \vec{e}_d g_{bc}), & \psi_a^b &= g^{bc}\omega_{ac}, \\ C_{ab} &= \frac{1}{2}\partial_n g_{ab}, & C_a^b &= g^{bc}C_{ac}. \end{aligned}$$

Предложение 2. Пусть $N: TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения почти контактного метрического многообразия M такой, что $N\tilde{\xi} = \vec{0}$, $N(D) \subset D$. Тогда на многообразии M существует единственная линейная связность ∇^N с кручением $S(X, Y)$, однозначно определяемая следующими условиями:

- 1) $S(X, Y) = 2\omega(X, Y)\tilde{\xi} + \eta(X)NY - \eta(Y)NX$, $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$;
- 2) $\nabla_X^N Y = \nabla_X Y$, $X, Y \in \Gamma(D)$;
- 3) $\nabla_X^N \tilde{\xi} = 0$, $X \in \Gamma(TM)$.

Здесь ∇ – внутренняя связность [2]. Определим в адаптированных координатах отличные от нуля коэффициенты

связности ∇_X^N , положив $G_{bc}^a = \frac{1}{2}g^{ad}(\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc})$,
 $G_{na}^b = N_a^b$.

3. $(F, \vec{\xi})$ -связность на почти контактных метрических многообразиях.

Модифицируя выражение для связности с векторным кручением [7], определим $(F, \vec{\xi})$ -связность $D_X Y$ следующим образом:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + g(FX, Y)V - g(V, Y)FX,$$

где $F : TM \rightarrow TM$ – эндоморфизм касательного расслоения многообразия M , $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $\tilde{\nabla}$ – связность Леви – Чивита.

Теорема 1. (F, V) -связность, заданная на римановом многообразии, является метрической связностью.

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} D_X g(Y, Z) &= Xg(Y, Z) - g(D_X Y, Z) - g(Y, D_X Z) = \\ &= Xg(Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X Y + g(FX, Y)V - g(V, Y)FX, Z) - g(Y, \tilde{\nabla}_X Z + g(FX, Z)V - g(V, Z)FX) = \\ &= -g(FX, Y)g(Y, Z) + g(V, Y)g(FX, Z) - g(FX, Z)g(V, Y) + g(V, Z)g(FX, Y) = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Непосредственно проверяется, что кручение $S(X, Y)$ (F, V) -связности имеет вид:

$$S(X, Y) = (g(FX, Y) - g(FY, X))V + g(V, X)FY - g(V, Y)FX.$$

Возьмем в качестве векторного поля V структурное векторное поле $\vec{\xi}$. $(F, \vec{\xi})$ -связность примет при этом следующий вид:

$$D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + g(FX, Y)\vec{\xi} - g(\vec{\xi}, Y)FX.$$

Теорема 2. Если эндоморфизмы F_1 и F_2 являются допустимыми эндоморфизмами, т. е. обладают следующими свойствами:
 $F_i\vec{\xi} = \vec{0}$, $F_i(D) \subset D$, $i=1, 2$, то $(F_1, \vec{\xi})$ -связность совпадает с $(F_2, \vec{\xi})$ -связностью.

Доказательство. Вычислим компоненты $G_{\beta\gamma}^\alpha$ связности $D_X Y = \tilde{\nabla}_X Y + g(FX, Y)\vec{\xi} - g(\vec{\xi}, Y)FX$ для каждого из эндоморфизмов F_1, F_2 по отдельности. В результате вычислений в каждом из случаев получаем следующие ненулевые компоненты:

$$G_{bc}^a = \frac{1}{2} g^{ad} (\bar{e}_b g_{cd} + \bar{e}_c g_{bd} - \bar{e}_d g_{bc}), \quad G_{na}^b = C_a^b + \psi_a^b.$$

Что и доказывает теорему 2.

Следствие 1. $(F, \vec{\xi})$ -связность в случае допустимого эндоморфизма F совпадает с N -связностью ∇^N , где $N=C+\psi$.

Справедливость следствия 1 подтверждается особенным строением компонент $(F, \vec{\xi})$ -связности. Заметим, что N -связность ∇^N , где $N=C+\psi$, совпадает со связностью Схоутена–ван Кампена, что позволяет нам сформулировать следствие 2:

Следствие 2. $(F, \vec{\xi})$ -связность в случае допустимого эндоморфизма совпадает F со связностью Схоутена–ван Кампена.

4. Заключение. Дальнейшее изучение свойств $(F, \vec{\xi})$ -связности может развиваться в разных направлениях. Кажется перспективным, например, применить к изучению $(F, \vec{\xi})$ -связностей методы исследования, апробированные в работе [7].

Литература

1. Букушева А. В. Слоения на распределениях с финслеровой метрикой // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2014. Т.14. №.3. С.247-251.
2. Букушева А. В. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. 2015. №46. С. 58-63.
3. Букушева А. В. О геометрии контактных метрических пространств с φ -связностью // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия: Математика. Физика. 2015. №17(214). Вып. 40. С. 20-24.
4. Галаев С. В. Продолженные структуры на кораспределениях контактных метрических многообразий // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия. Математика. Механика. Информатика. 2017. Т. 17. №2. С. 138-147.
5. Гордеева И. А., Паньженский В. И., Степанов С. Е. Многообразия Римана-Картана // Итоги науки и техники (совр. мат-ка и ее прил-я). 2009. Т. 123. С. 110-141.

6. Галаев С. В. Почти контактные метрические структуры, определяемые N-продолженной связностью // Математические заметки СВФУ. 2015. Т. 22. №1. С. 25-34.
7. Родионов Е. Д., Славский В. В., Хромова О. П. О секционной кривизне метрических связностей с векторным кручением // Известия АлтГУ. 2020. №1(111). С. 124-127.
8. Agricola I., Kraus M. Manifolds with vectorial torsion // Differential Geometry and its Applications. 2016. Vol. 46. P. 130-146.
9. Bukusheva A. V., Galaev S. V. Almost contact metric structures defined by connection over distribution // Bulletin of the Transilvania University of Brasov. Series III: Mathematics, Informatics, Physics. 2011. Vol. 4 (53). No. 2. P. 13-22.
10. Galaev S. V. Admissible Hyper-Complex Pseudo-Hermitian Structures // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2018. Vol. 39. No. 1. P. 71-76.
11. Galaev S. V. Intrinsic geometry of almost contact Kahlerian manifolds // Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyiregyhaziensis. 2015. Vol. 31. №1. P. 35-46.
12. Golab S. On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections // Tensor. N.S. 1975. Vol. 29. P. 293-301.

Галаев Сергей Васильевич, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры геометрии, Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского, 410012, Россия, Саратов, улица Астраханская, 83, 8-8452-515539, e-mail: sgalaev@mail.ru

Galaev Sergei Vasil'evich, candidate of physic-mathematical sciences, associate professor of the chair Geometry, National Research Saratov State University named after G.N. Chernyshevsky, 410012, Russia, Saratov, street Astrahanskaja, 83, 8-8452-515539, e-mail: sgalaev@mail.ru

СОЛИТОННЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ИНВЕРСИРОВАННЫХ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Аннотация. Любое решение уравнения Дирака [7] определяет поверхность в трехмерном пространстве с помощью представления Вейерштрасса. На минимальной поверхности задаются изотермические координаты, а потенциал U оператора Дирака является потенциалом представления этой поверхности.

Новые решения модифицированного уравнения Веселова-Новикова (мВН) [1] находятся с помощью преобразования Мутара [3]. Чтобы понять геометрический смысл [9] этого преобразования, сначала надо определить инверсию минимальной поверхности, затем нахождение точных решений уравнения мВН дает нам представления инверсированной поверхности. В свою очередь, эти представления нового потенциала определяют солитонную деформацию [4].

Солитонные деформации на примере инверсированных поверхностей Эннепера высокого порядка были найдены в работе [5].

В данной работе найдена солитонная деформация инверсированного катеноида и анализируются ее некоторые приложения по [2], [6].

Ключевые слова: отображения Гаусса, модифицированное уравнение Веселова-Новикова, оператор Дирака, преобразование Мутара, стереографическая проекция, солитонная деформация, катеноид.

© D. Kurmanbayev

SOLITON DEFORMATIONS OF INVERSIONAL MINIMAL SURFACES

Abstract. Any solution to the Dirac equation [7] defines a surface in three-dimensional space by the Weierstrass representation. The isothermal coordinates are set on the minimal surface, and the potential of the Dirac operator is the potential for representing this surface.

New solutions of modified Veselov-Novikov equation (mVN) [1] are found using the Moutard transformation [3]. To understand the geometric meaning [9] of this transformation, we first need to determine the inversion of the minimal surface, then finding the exact solutions of the mVN equation gives us representations of the inverted surface. Further, these representations of the new potential determine soliton deformation [4].

Soliton deformations using high-order Enneper inverse surfaces as an example were found in [5].

In this work, the soliton deformation of the inverted catenoid was found and some of its applications are analyzed according to [2], [6].

Keywords: Gauss map, modified Veselov-Novikov equation, Dirac operator, Moutard transformation, stereographic projection, soliton deformation, catenoid.

1. Введение.

Известны (см. работу [11]) следующие эквивалентности между уравнениями:

Уравнения мВН

$$\tilde{U}_t = \left(\tilde{U}_{zzz} + 3\tilde{U}_z \tilde{V} + \frac{3}{2}\tilde{U}\tilde{V}_z \right) + \left(\tilde{U}_{\bar{z}\bar{z}} + 3\tilde{U}_{\bar{z}} \tilde{V} + \frac{3}{2}\tilde{U}\tilde{V}_{\bar{z}} \right) \quad (1)$$

где

$$\tilde{V}_z = (\tilde{U}^2)_z$$

($z=x+iy$, $\tilde{U}(z, \bar{z}, t)$ – вещественнозначная функция) - тройка Манакова – система линейных уравнений.

Система линейных уравнений есть следующие уравнения типа Эйри (G.Airy):

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial t} = \frac{\partial^3 \tilde{\psi}_1}{\partial z^3} \cdot \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial t} = \frac{\partial^3 \tilde{\psi}_2}{\partial \bar{z}^3} \quad (2)$$

с начальными данными

$$\tilde{\psi}|_{t=0} = \left(\frac{e^{-\frac{z}{2}}}{\sqrt{2}}, \frac{e^{\frac{\bar{z}}{2}}}{\sqrt{2}} \right) \quad (3)$$

Данная задача (2), (3) решается методом последовательных приближений как указано в работе [5].

Стереографическая проекция это – отображение единичной сферы в комплексную плоскость. Например, для поверхности Эннепера прямая, которая пересекает полюс единичной сферы и любую другую точку этой сферы, будет паралельна комплексной плоскости, так как инверсированная поверхность Эннепера $\tilde{\psi}$ переводит точку $x = y = 0, t = C$ в ∞ .

В работе [8] найдены разрушающиеся решения уравнения мВНс помощью жесткой трансляции второй координатной оси $x^2 = x^2 - t$ изначальной поверхности Эннепера ψ .

2. Основной результат.

Теорема (солитонная деформация при инверсии катеноида).

- 1) Инверсированный катеноид порождает гладкую функцию $\frac{1}{C} \operatorname{sgn} t$ во всех t кроме нуля потенциала \tilde{U} в точке $x = y = 0$ и

$$\frac{d}{dt} \tilde{U}(0,0,t) = \frac{1}{C} \delta(t)$$

где $\delta(t)$ - дельта-функция Дирака, $C \neq 0$ – некоторая постоянная.

- 2) Солитонная деформация определяется гладкой трансляцией

катеноида $\psi = \begin{pmatrix} e^{-\frac{z}{2}} & \frac{z}{2} \\ \frac{e^{-2}}{\sqrt{2}} & \frac{e^2}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ вдоль второй координатной оси

$$x^2 = x^2 \pm t.$$

Найдены точные решения уравнения мВН в следующем виде:

$$\tilde{U} = \frac{\left(x + \frac{3t}{4} \right) \operatorname{sh} \left(x + \frac{t}{4} \right) - \operatorname{ch} \left(x + \frac{t}{4} \right)}{\left(x + \frac{3t}{4} \right)^2 + \operatorname{ch}^2 \left(x + \frac{t}{4} \right)}$$

\tilde{U} также удовлетворяет модифицированному уравнению Карцевега-де Фриза (мКдФ) [6].

Литература

1. Bogdanov L. V. "Veselov-Novikov equation as a natural two-dimensional generalization of the Korteweg-de Vries equation". Theor. Math. Phys. 70, 1987.
2. P.Castro-Villarreal, J.Guven "Inverted catenoid as a fluid membrane with two points pulled together" Physical Review E 76, 011922, 2007.
3. Delong Yu, Q. P. Liu, and Shikun Wang "Darboux transformation for the modified Veselov-Novikov equation". J. of Physics A35, 2001, 3779-3785.

4. Konopelchenko B. G. "Induced surfaces and their integrable dynamics", Stud. Appl. Math., 96:1, 1996, 9-51.
5. Kurmanbayev D. "Exact Solution of Modified Veselov–Novikov Equation and Some Applications in the Game Theory", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, ID 9740638, Volume 2020, 1-7.
6. T. L. Perel'man, A. Kh. Fridman, and M. M. El'yashevich "A modified Korteweg-de Vries equation in electrohydrodynamics", Zh. Eksp. Teor. Fiz. 1974, Vol. 39, No.4, 1316-1323.
7. I. A. Taimanov "Two-dimensional Dirac operator and the theory of surfaces". Russian Math. Surveys 61 2006, no. 1, 79-159.
8. И. А. Тайманов "Разрушающиеся решения модифицированного уравнения Веселов–Новикова и минимальные поверхности". Теоретическая и математическая физика. 2015, Т. 182, N. 2. С. 213-222.
9. И. А. Тайманов "Преобразование Мутара двумерных операторов Дирака и геометрия Мебиуса". Матем. заметки. 2015. Т. 97, вып. 1, С. 129-141.309-314.
10. M. Weber "Classical Minimal Surfaces in Euclidean Space by Examples", 2001, Claynotes.
11. S. V. Manakov, The method of the inverse scattering problem and two dimensional evolution equations, Uspekhi Mat. Nauk, 1976, Vol.31, 245–246.

Курманбаев Дамир Муратбекович, PhD докторант Казахского Национального Университет им. аль-Фараби (Алматы), старший преподаватель Университета им. Сулеймана Демиреля (Каскелен) Казахстан. Email: kurmanbaev.damir@gmail.com

Kurmanbayev Damir Muratbekovich, PhD student, al-Farabi Kazakh National University (Almaty), senior-lecturer, SuleymanDemirel University (Kaskelen) Kazakhstan

О КАНОНИЧЕСКОЙ ПЛОСКОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Аннотация. Проводится исследование аффинных связностей в расслоении линейных кореперов над гладким многообразием, опирающееся на структурные уравнения этого расслоения. Построены компоненты объекта аффинной связности, определяемые нулевыми ковариантными производными слоевых координат гладкого многообразия. Данная связность является канонической плоской аффинной связностью. Рассматривается объект деформации от произвольной аффинной связности к канонической связности. Показано, что касательные векторы к гладкому многообразию являются горизонтальными векторами 1-го порядка для канонической связности; они названы каноническими. Построены два горизонтальных оператора, переводящие канонические векторы в горизонтальные векторы для аффинной связности 1-го порядка. Один горизонтальный оператор переводит канонические векторы в горизонтальные векторы 1-го порядка, т.е. векторы из касательного пространства к расслоению линейных реперов. Другой горизонтальный оператор переводит канонические векторы в горизонтальные векторы 2-го порядка, т.е. векторы из касательного пространства 2-го порядка к гладкому многообразию.

Ключевые слова: расслоения линейных реперов и кореперов, базисные и слоевые координаты, структурные формы, аффинная связность, горизонтальные векторы 1-го и 2-го порядка.

© K. Polyakova

ON THE CANONIC PLANE AFFINE CONNECTION

Abstract. By using the structure equations of the linear coframe bundle over a smooth manifold, the study of an affine connection is carried out in the bundle. The components of an affine connection object are constructed by vanishing the covariant derivatives for the fiber coordinates of a smooth manifold. This connection is a canonical flat affine connection. The deformation object from an arbitrary affine connection to the canonical connection is considered. It is shown that the frame tangent vectors to a smooth manifold are the first-order horizontal vectors for the canonical connection, they are named canonical. Two horizontal operators are constructed, they transform the canonical vectors to horizontal vectors for a fist-order affine connection. One horizontal operator transforms the canonical vectors to the fist-order horizontal vectors, i.e. the vectors from a tangent space to the linear coframe bundle. Another horizontal operator

transforms the canonical vectors to the second-order horizontal vectors, i.e. the vectors from a second-order tangent space to the smooth manifold.

Keywords: linear frame and coframe bundles, basic and fiber coordinates, structure forms, affine connection, first- and second-order horizontal vectors.

1. Введение. Известно [1], что при расширении системы координат на m -мерном многообразии X_m добавлением к точечным координатам x^i координат x_j^i , x_{jk}^i , ... голономных r -реперов ($r = 1, 2, \dots$) возникает последовательность симметричных по нижним индексам структурных форм $\omega^i, \omega_j^i, \omega_{jk}^i, \dots$, где ω^i — главные формы, а все остальные формы — вторичные. Формы $\omega^i, \omega_j^i, \omega_{jk}^i, \dots$, остающиеся инвариантными при гладких преобразованиях локальных координат базы и при соответствующих преобразованиях локальных слоевых координат, называются инвариантными формами дифференциальных продолжений группы аналитических преобразований [1].

В [1] отмечается, что локальные слоевые координаты $x_{jk}^i, x_{jkl}^i, \dots$ по существу являются локальными симметричными компонентами объектов связностей высших порядков в специализированной системе. Чтобы избежать такой специализации, инвариантные слоевые формы дифференциального продолжения порядка r подвергают преобразованию, сохраняющему их слоевую структуру, т.е. вводят новые формы $\tilde{\omega}_{jl\dots jr}^i = \omega_{jl\dots jr}^i - \Gamma_{j_1\dots jr k}^i \omega^k$ (см. [1]). Также слоевые координаты $x_{jk}^i, x_{jkl}^i, \dots$ и их комбинации являются компонентами объектов канонических связностей высших порядков, что осуществляется приравниванием нулю ковариантных производных этих слоевых координат. Представляется интересным рассмотрение объектов деформации (генераторов в терминологии А.К. Рыбникова [2], [3]) от произвольных аффинных связностей различных порядков к каноническим связностям соответствующих порядков. В этой связи оказывается целесообразным использование координатного задания векторов и форм наряду со способом Г.Ф. Лаптева [1], [4] задания связности в главных расслоениях и разработанного им метода продолжений и охватов, который обобщает метод подвижного репера и внешних форм Э. Картана.

2. Канонические формы. Рассмотрим m -мерное гладкое многообразие X_m и некоторую окрестность, в которой текущая точка определяется локальными координатами x^i ($i, j, k, \dots = 1, \dots, m$). Формы инвариантного корепера $\{\omega^i, \omega_j^i, \omega_{jk}^i\}$ относительно натурального корепера $\{dx^i, dx_j^i, dx_{jk}^i\}$ выражаются по следующим формулам [1]:

$$\begin{aligned}\omega^i &= x_j^i dx^j, \quad \omega_j^i = -x_j^k dx_k^i - x_{jk}^i \omega^k, \\ \omega_{jk}^i &= dx_{jk}^i + x_{jk}^l \omega_l^i - x_{lk}^i \omega_j^l - x_{jl}^i \omega_k^l + (x_{jk}^s x_{sl}^i - x_{kl}^i) \omega^l.\end{aligned}\quad (1)$$

Для слоевых координат x_j^i справедливо $\det(x_j^i) \neq 0$, $x_j^i x_k^j = \delta_k^i$, слоевые координаты x_{jk}^i , x_{jk}^l симметричны по нижним индексам, в остальном слоевые координаты произвольны и далее рассматриваются как независимые переменные [1].

Каноническая форма на многообразии X_m имеет вид

$$\omega_{X_m} = \omega^i \varepsilon_i,$$

где базисные векторы $\varepsilon_i = x_i^j \partial_j$ касательного пространства TX_m удовлетворяют уравнениям $d\varepsilon_i = \varepsilon_j \omega_i^j + \varepsilon_{ij} \omega^j$. На *касательные векторы 2-го порядка* $\varepsilon_{ij} = x_i^k x_j^l \partial_{kl} + x_{ij}^k x_k^l \partial_l$ натянуто *касательное пространство 2-го порядка* $T^2 X_m = \text{span}(\varepsilon_i, \varepsilon_{ij})$.

Каноническая форма на многообразии $L(X_m)$ имеет вид

$$\omega_{LX_m} = \omega^i e_i + \omega_j^i e_i^j.$$

Векторы

$$e_j^i = -x_k^i \partial_j^k, \quad e_i = x_i^j \partial_j + x_{ji}^k e_k^i, \quad \left(\partial_j^k = \partial / \partial x_k^j, \partial_j = \partial / \partial x^j \right)$$

образуют репер $e = \{e_j^i, e_k\}$ касательного пространства $TL(X_m)$ к расслоению $L(X_m)$ в его текущей точке (см. [5]). Эти векторы инвариантны при гладких преобразованиях локальных координат базы и соответствующих преобразованиях локальных слоевых координат. Касательное пространство $TL(X_m)$ содержит вертикальное пространство $VL(X_m) = \text{span}(e_j^i)$.

Вполне интегрируемая система уравнений $\omega^i = 0$ фиксирует точку многообразия X_m и, значит, слой расслоения $L(X_m)$ касательных линейных реперов над X_m . Если зафиксировать точку многообразия, то формы ω_j^i превратятся в формы $\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i|_{\omega^l=0}$ которые зависят лишь от слоевых координат и являются инвариантными формами линейной группы $GL(m)$, действующей в касательном пространстве $TX_m = \text{span}(\varepsilon_i)$.

3. Ковариантное задание аффинной связности 1-го порядка.

В расслоении $L^*(X_m)$ касательных линейных кореперов над многообразием X_m зададим связность способом Лаптева—Лумисте [5, с. 62], [6], [7] посредством форм $\tilde{\omega}_j^i = \omega_j^i - \Gamma_{jk}^i \omega^k$ с компонентами объекта аффинной связности Γ_{jk}^i , удовлетворяющими уравнениям

$$\Delta \Gamma_{jk}^i + \omega_{jk}^i = \Gamma_{jk,l}^i \omega^l. \quad (2)$$

Функции $\Gamma_{jk,l}^i$ называются пфаффовыми [4], или обобщенными частными производными [8]. Действие тензорного дифференциального оператора Δ определяется по следующему закону [9]:

$$\Delta \Gamma_{jk}^i = d\Gamma_{jk}^i + \Gamma_{jk}^s \omega_s^i - \Gamma_{sk}^i \omega_j^s - \Gamma_{js}^i \omega_k^s.$$

В уравнениях (2) рассмотрим действие тензорного дифференциального оператора Δ , переходя к натуральному кореперу по формулам (1), а также учитывая, что $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x^l, x_s^l, x_{sp}^l)$ это функции базисных и слоевых координат, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} dx^l + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_s^l} dx_s^l + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_{sp}^l} dx_{sp}^l = -\delta_l^i \delta_j^s \delta_k^p dx_{sp}^l + \\ & + \left(\delta_l^i (\Gamma_{jk}^p + x_{jk}^p)^* x_p^s - (\Gamma_{lk}^i + x_{lk}^i)^* x_j^s - (\Gamma_{jl}^i + x_{jl}^i)^* x_k^s \right) dx_s^l + \quad (3) \\ & + \left((\Gamma_{jk}^p + x_{jk}^p) x_{ps}^i - (\Gamma_{pk}^i + x_{pk}^i) x_{js}^p - (\Gamma_{jp}^i + x_{jp}^i) x_{ks}^p + \right. \\ & \left. \Gamma_{jks}^i + x_{jks}^i - x_{jk}^p x_{ps}^i \right) x_l^s dx^l. \end{aligned}$$

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах dx_{sp}^l в (3) дает

равенства $\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x_{sp}^l} = -\delta_l^i \delta_j^s \delta_k^p$, т.е. всякий объект связности Γ_{jk}^i в

расслоении зависит от слоевых координат x_{jk}^i . Следовательно, для компонент объекта связности 1-го порядка справедливо разложение (ср., [3])

$$\Gamma_{jk}^i = -x_{jk}^i + \gamma_{jk}^i \quad (4)$$

с помощью слоевых координат 2-го порядка x_{jk}^i и тензора

$\gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i(x^l, x_q^p)$, зависящего только от базисных координат x^l и слоевых координат 1-го порядка x_q^p . Равенство нулю тензора

$\gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i + x_{jk}^i$ выделяет связность $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i$. Будем называть тензор $\gamma^i = \{\gamma_{jk}^i\}$ тензором деформации (генератором [3])

аффинной связности Γ_{jk}^i к связности $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$.

Приравнивание коэффициентов при дифференциалах dx_s^l, dx^l дает

$$\frac{\partial \gamma_{jk}^i}{\partial x_s^l} = \delta_l^i \gamma_{jk}^p x_p^s - \gamma_{lk}^i x_j^s - \gamma_{jl}^i x_k^s, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \gamma_{jk}^i}{\partial x^l} = \left(\gamma_{jk}^p x_{ps}^i - \gamma_{pk}^i x_{js}^p - \gamma_{jp}^i x_{ks}^p + \Gamma_{jk,s}^i + x_{jk}^i - x_{jk}^p x_{ps}^i \right) x_l^s.$$

Индукционные (пфаффовы производные) компоненты аффинной связности Γ_{jk}^i выражаются следующим образом

$$\Gamma_{jk,l}^i = \frac{\partial \gamma_{jk}^i}{\partial x^p} x_l^p - \gamma_{jk}^p x_{pl}^i + \gamma_{pk}^i x_{jl}^p + \gamma_{jp}^i x_{kl}^p - x_{jk}^i + x_{jk}^p x_{pl}^i.$$

Объекты кручения $T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$ и кривизны

$R_{jkl}^i = \Gamma_{j[lk,l]}^i - \Gamma_{j[lk}^s \Gamma_{sl]l}^i$ аффинной связности являются тензорами на базе X_m . С помощью разложения (4) находим их выражения с помощью тензора деформации

$$T_{jk}^i = \gamma_{[jk]}^i, \quad R_{jkl}^i = \frac{\partial \gamma_{j[k}^i}{\partial x^s} x_{l]}^s - \gamma_{j[k}^s \gamma_{sl]}^i. \quad (6)$$

Утверждение 1. *Объект Γ_{jk}^i не зависит от базисных переменных x^l , если его пфаффовы производные имеют вид*

$$\Gamma_{jk,l}^i = -x_{jkl}^i - \gamma_{jk}^p x_{pl}^i + \gamma_{pk}^i x_{jl}^p + \gamma_{jp}^i x_{kl}^p + x_{jk}^p x_{pl}^i.$$

В этом случае кривизна (6) выражается через тензор деформации по формуле $R_{jkl}^i = \gamma_{j[l}^s \gamma_{|s]k}^i$.

4. Каноническая плоская аффинная связность.

Предложение 1. *Равенство нулю ковариантных производных координат x_j^i выделяет связность $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i$.*

Действительно, ковариантные производные (см. [4]) координат x_j^i выражаются по формуле $\nabla_k x_j^i = -x_j^l (\Gamma_{lk}^i + x_{lk}^i)$. При этом вертикальные векторы e_i^j и горизонтальные формы ω^i абсолютно параллельны относительно связности $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$, поскольку x_j^i являются координатами векторов e_i^j и форм ω^i в базисах $\{\partial_i^j\}$ и $\{dx^i\}$.

Предложение 2. *Связность $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$ является симметричной и плоской.*

Действительно, в силу (6) и $\gamma_{jk}^i = 0$, получим $T_{jk}^i = 0$, $R_{jkl}^i = 0$.

Связность $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i = -x_{jk}^i$ является канонической плоской связностью расслоения линейных реперов $L(X_m)$.

Предложение 3. *Каноническая связность $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$ является единственной, не зависящей от слоевых переменных x_s^l .*

Действительно, пусть объект Γ_{jk}^i не зависит от переменных x_s^l , тогда из (5) следует соотношение $\delta_l^i \gamma_{jk}^q - \delta_j^q \gamma_{lk}^i - \delta_j^q \gamma_{jl}^i = 0$, чьим единственным решением является связность, определяемая равенством $\gamma_{jk}^i = 0$.

Аффинная связность позволяет построить:

- 1) горизонтальные векторы 1-го порядка $\tilde{e}_i = e_i + \Gamma_{ji}^k e_k^j \in TL(X_m)$ (см. [5]),
- 2) горизонтальные векторы 2-го порядка $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \Gamma_{ij}^k \varepsilon_k \in T^2 X_m$ (см. [10]).

$$\text{При этом } d\omega^i(\tilde{e}_j, \tilde{e}_k) = T_{jk}^i, \quad \tilde{\varepsilon}_{[ij]} = T_{ij}^k \varepsilon_k.$$

Таким образом, аффинная связность допускает следующие разложения касательных пространств $TL(X_m)$ и $T^2 X_m$ 1-го и 2-го порядков на вертикальные и горизонтальные подпространства:

$$TL(X_m) = VL(X_m) \oplus HL(X_m), \quad \text{где} \quad VL(X_m) = \text{span}(e_i^j),$$

$$HL(X_m) = \text{span}(\tilde{e}_k);$$

$$T^2 X_m = VX_m \oplus HX_m, \text{ где } VX_m = TX_m = \text{span}(\varepsilon_i), \quad HX_m = \text{span}(\tilde{\varepsilon}_{ij}).$$

Относительно канонической связности $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$ горизонтальное подпространство $HL(X_m) = \text{span}(\tilde{e}_k)$ касательного пространства $TL(X_m)$ в каждой точке является касательным пространством TX_m к базисному многообразию X_m . Действительно, горизонтальные векторы 1-го порядка $\tilde{e}_i = e_i + \Gamma_{ji}^k e_k^j$ в канонической связности $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$ имеют вид $\varepsilon_i \in TX_m$, т.е. $\overset{c}{\tilde{e}}_i = \varepsilon_i$. Можно называть касательные векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ также *каноническими*, имея в виду, что они являются горизонтальными векторами для канонической связности.

Горизонтальные векторы 1-го порядка для произвольной аффинной связности с тензором деформации $\gamma^1 = \{\gamma_{jk}^i\}$ следующим образом выражаются через канонические и вертикальные векторы $\tilde{e}_k = \overset{c}{\tilde{e}}_k + \gamma_{jk}^i e_i^j$.

Оператор, переводящий канонические векторы $\varepsilon_i \in TX_m$ в горизонтальные векторы аффинной связности Γ_{jk}^i , будем называть *горизонтальным оператором 1-го порядка*.

Теорема 1. *Горизонтальный оператор 1-го порядка $f_1^1 = \{id, \gamma^1\}$*

$$f_1^1 : \varepsilon_i \in TX_m \xrightarrow{id} \overset{c}{\tilde{e}}_k \xrightarrow{\gamma^1} \tilde{e}_k = \overset{c}{\tilde{e}}_k + \gamma_{jk}^i e_i^j \in TL(X_m)$$

переводит векторы ε_i в горизонтальные векторы \tilde{e}_k касательного пространства $TL(X_m)$ 1-го порядка для аффинной связности $\Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - x_{jk}^i$ 1-го порядка с тензором деформации $\gamma^1 = \{\gamma_{jk}^i\}$.

Горизонтальная горизонтальнозначная форма ${}^h\tilde{\omega} = \omega^i \tilde{e}_i$ в случае канонической связности фактически является канонической формой $\omega_{X_m} = \omega^i \varepsilon_i$ (или $\omega_{X_m} = dx^i \partial_i$) многообразия X_m , т.е. ${}^h\tilde{\omega} = \omega_{X_m}$.

Формы $\overset{c}{\tilde{\omega}}_j^i = \omega_j^i - \overset{c}{\Gamma}_{jk}^i \omega^k$ канонической связности $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$ имеют следующий вид: $\overset{c}{\tilde{\omega}}_j^i = \bar{\omega}_j^i$. Значит, структурные формы $\bar{\omega}_j^i = \omega_j^i|_{\omega=0}$ группы $L(X_m)$ можно трактовать как формы канонической аффинной связности.

Вертикальная вертикальнозначная форма ${}^v\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_j^i e_i^j$ в случае канонической связности — это форма ${}^v\tilde{\omega} = dx_j^i \partial_i^j$.

Каноническая форма $\omega_{LX_m} = \omega^i e_i + \omega_j^i e_i^j$ расслоения $L(X_m)$, записанная относительно координатного репера и корепера, принимает вид $\omega_{LX_m} = dx^i \partial_i + dx_j^i \partial_i^j$. Таким образом, каноническая форма расслоения $L(X_m)$ является суммой горизонтальной и вертикальной форм канонической аффинной связности $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$ в этом расслоении.

Горизонтальные векторы 2-го порядка $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} + \overset{c}{\Gamma}_{jk}^i \varepsilon_k$ в канонической связности $\overset{c}{\Gamma}_{jk}^i$ имеют вид $\varepsilon_j(\varepsilon_i) \in T^2 X_m$, т.е. $\overset{c}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \varepsilon_j(\varepsilon_i)$. Горизонтальные векторы 2-го порядка для произвольной аффинной связности следующим образом выражаются через канонические и вертикальные векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \overset{c}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \gamma_{ij}^k \varepsilon_k$.

Теорема 2. Горизонтальный оператор 1-го порядка $f_2^1 = \{\varepsilon_i, \gamma^1\}$

$$f_2^1 : \varepsilon_i \in TX_m \xrightarrow{\varepsilon_j} \overset{c}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} \xrightarrow{\gamma^1} \tilde{\varepsilon}_{ij} = \overset{c}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \gamma_{ij}^k \varepsilon_k \in T^2 X_m$$

переводит векторы ε_i в горизонтальные векторы $\tilde{\varepsilon}_{ij}$ касательного пространства $T^2 X_m$ 2-го порядка для аффинной связности $\Gamma_{jk}^i = \gamma_{jk}^i - x_{jk}^i$ 1-го порядка с тензором деформации $\gamma^1 = \{\gamma_{jk}^i\}$.

Литература

1. Лаптев Г.Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139–189.
2. Рыбников А. К. Об аффинных связностях второго порядка. Матем. заметки, 1981. 29:2. С. 279–290.
3. Рыбников А. К. Об обобщенных аффинных связностях второго порядка. Изв. вузов. Матем., 1983. № 1. С. 73–80.
4. Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. Итоги науки и техн. Сер. Проблемы геометрии, ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5–246.
5. Полякова К. В. Специальные аффинные связности 1-го и 2-го порядков. Диф. геом. многообр. фигур, 2015. Вып. 46. С. 114–128.
6. Шевченко Ю. И. Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении. Там же, 2006. Вып. 37. С. 179–187.
7. Белова О. О. Грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей. Матем. заметки, 104:6 (2018), 812–822.
8. Зуланке Р., Вингтен П. Дифференциальная геометрия и расслоения, М., 1975.
9. Акивис М. А. Многомерная дифференциальная геометрия. Калининский государственный университет, Калинин, 1977.
10. Полякова К. В. Тангенциальнозначные формы 2-го порядка. Мат. заметки, 2019. 105:1. С. 84–94.

Полякова Катерина Валентиновна, к.ф.-м.н., доцент, доцент Института физ.-мат. наук и ИТ Балтийского федерального университета им. И. Канта. Калининградская область, г. Зеленоградск, ул. Окружная, д. 2, кв. 53. Тел. +79520669545. E-mail: polyakova_@mail.ru

Polyakova Katerina Valentinovna, Ph.D., Associate Professor, Immanuel Kant Baltic Federal University

© В. Б. Цыренова, Е. П. Миронова

АНАЛОГ ЗАДАЧИ БИАНКИ В
КВАЗИГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ ${}^{11}S_3^1$

Аннотация. Данная работа является продолжением работы [5] одного из авторов, в которой рассмотрены поверхности в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$ методами внешних форм и подвижного репера. Квазигиперболическое пространство ${}^{11}S_3^1$ это проективное 3-пространство, в котором метрика определяется абсолютом, заданным совокупностью пары действительных плоскостей и пары действительных точек на прямой их пересечения.

Нами найдены поверхности, в каждой касательной плоскости которых можно выбрать прямую l таким образом, чтобы полученная конгруэнция образовывала расслояемую пару с конгруэнцией нормалей этих поверхностей. Эта задача является аналогом известной задачи Бианки. Авторами также решена задача Бианки в двух других квазигиперболических пространствах ${}^{01}S_3^1, {}^{10}S_3^1$. Доказана теорема о том, что поверхность, в каждой касательной плоскости которой можно выбрать прямую l так, чтобы полученная конгруэнция образовывала расслояемую пару с конгруэнцией нормалей поверхности, существует с произволом трех функций одного аргумента.

Ключевые слова: квазигиперболическое пространство, абсолют, поверхность, полуканонический репер, канонический репер, инварианты, линия на поверхности, конгруэнция, условия расслояемости.

© V. Tsyrenova, E. Mironova

AN ANALOGUE OF THE BIANCHI PROBLEM IN A
QUASI-HYPERBOLIC SPACE ${}^{11}S_3^1$

Abstract. This work is a continuation of the work [5] of one of the authors, in which surfaces in a three-dimensional quasi-hyperbolic space are examined by methods of external forms and a moving frame. A quasi-hyperbolic space ${}^{11}S_3^1$ is a projective 3-space in which the metric is determined by the absolute

given by the combination of a pair of real planes and a pair of real points on their straight line.

We found surfaces in each tangent plane of which we can choose a straight line so that the resulting congruence created a stratified pair with a congruence of normals of these surfaces. This problem is an analogue to the well-known Bianchi problem. The authors also solved the Bianchi problem in two other quasi-hyperbolic spaces ${}^{01}S_3^1$, ${}^{10}S_3^1$. The theorem is proved that a surface in which each tangent plane can be used to choose a straight line so that the resulting congruence forms a stratified pair with a congruence of surface normals exists with the arbitrariness of three functions of one argument.

Keywords: quasi-hyperbolic space, absolute, surface, semi-canonical frame, canonical frame, invariants, line on the surface, congruence, conditions of separability.

Введение

Квазиэллиптическое и квазигиперболические пространства изучались многими учениками Б.А. Розенфельда и Р.Н. Щербакова. В работе [4] нами была решена задача Бианки для поверхности в трехмерном квазиэллиптическом пространстве.

В данной работе продолжим рассмотрение поверхности в трехмерном квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$.

1. Поверхности в пространстве ${}^{11}S_3^1$

Метрика квазигиперболического пространства ${}^{11}S_3^1$ определяется абсолютом, заданным совокупностью пары действительных плоскостей и пары действительных точек на прямой их пересечения.

В работе [5] автором был построен полуканонический и два канонических репера поверхности в квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$. При этом поверхность задается параметрическим уравнением $A = A(u^1, u^2)$. Точка поверхности и касательная плоскость (а, следовательно, и нормаль) включены в репер в качестве точки A_0 и плоскости $(A_0 A_1 A_2)$. Деривационные формулы полуканонического репера поверхности получены в виде

$$\begin{aligned}
dA_0 &= \omega_0^0 A_0 - \omega_0^0 A_1 + \omega_0^2 A_2, \\
dA_1 &= -\omega_0^0 A_1 + (\mu\omega_0^0 + \nu\omega_0^2) A_2 + (\alpha\omega_0^0 + \beta\omega_0^2) A_3, \\
dA_2 &= (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2) A_3, \\
dA_3 &= (-\beta\omega_0^0 + \gamma\omega_0^2) A_3.
\end{aligned} \tag{1}$$

Для базисных форм ω_0^0 и ω_0^2 имеем
 $D\omega_0^0 = 0, D\omega_0^2 = (1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2$, а основная система дифференциальных уравнений [5] имеет вид

$$\begin{aligned}
d\alpha \wedge \omega_0^0 + d\beta \wedge \omega_0^2 &= (\gamma\mu + \beta(\nu-1))\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \\
d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 &= \gamma(1-\nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2; \\
d\mu \wedge \omega_0^0 + d\nu \wedge \omega_0^2 &= (\nu^2 - 2\nu + \alpha\gamma + \beta^2)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2.
\end{aligned} \tag{2}$$

Решение этой системы существует с произволом в две функции двух аргументов, что соответствует произволу существования поверхности, отнесенной к произвольному семейству линий [5].

Полную систему инвариантов поверхности образуют инварианты $\gamma, I = \beta^2 + 2\alpha\gamma$ и значения μ и ν при какой-либо канонизации репера.

При $\alpha = 0, \beta \neq 0$ и $\beta = 0, \alpha \neq 0$ получаются канонические реперы R_1 и R_2 .

2. Задача Бианки в пространстве ${}^{11}S_3^1$

Будем искать поверхность, в каждой касательной плоскости которой можно выбрать прямую l таким образом, чтобы полученная конгруэнция образовывала расслояемую пару [2] с конгруэнцией нормалей поверхности. Эта задача является аналогом известной задачи Бианки (см. [1], стр.330).

Выберем полуканоческий репер так, чтобы точка A_1 принадлежала прямой l . Тогда положение прямой l относительно репера будет определяться точкой $Q = A_0 + \frac{1}{q}A_2$ пересечения прямой l с ребром A_0A_2 репера. Будем сначала предполагать, что $Q \neq A_2$, т.е. $q \neq 0$.

Пусть $M = A_0 + zA_3, N = A_1 + yQ$ – точки пересечения лучей конгруэнций $\{A_0 A_3\}$ и $\{l\}$ с расслояющими поверхностями. Условия полной расслояемости состоят в том, чтобы уравнения

$$(dM, M, A_1, Q) = 0, (dN, N, A_0, A_3) = 0$$

образовывали вполне интегрируемую систему относительно z и y . Разворачивая их, получаем

$$dz = (\beta z^2 q + z)\omega_0^0 - q(z + z^2 \gamma)\omega_0^2, dy = \frac{y}{q} dq - (\mu q + y + y^2)\omega_0^0 - q(\nu + y)\omega_0^2 \quad (3)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (3), затем подставляя значения dz и dy из (3) в результаты этих дифференцирований и требуя, чтобы эти результаты обращались в тождество в силу их самих, получаем внешние дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} dq \wedge \omega_0^2 &= q(\nu - 1)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2, \\ \beta dq \wedge \omega_0^0 - \gamma dq \wedge \omega_0^2 &= -\beta q^2 \omega_0^0 \wedge \omega_0^2, \\ dq \wedge \omega_0^2 &= q(1 - \nu)\omega_0^0 \wedge \omega_0^2, \\ dq \wedge \omega_0^0 &= -q^2 \omega_0^0 \wedge \omega_0^2 \end{aligned} \quad (4)$$

и конечное соотношение

$$q\mu - \beta^2 - \alpha\gamma + 2\nu = 0, \quad (5)$$

из которого находим координату точки $Q = A_0 + \frac{1}{q}A_2$ пересечения

искомой прямой l с прямой $A_0 A_2$ репера. Таким образом, положение прямой l относительно репера определено.

Из первого и третьего уравнений системы (4) получаем конечное соотношение $\nu = 1$, так как $q \neq 0$. Система (4) сводится к одному уравнению

$$dq = q^2 \omega_0^2, \quad (6)$$

причем в этом случае $D\omega_0^0 = D\omega_0^2 = 0$.

Обозначим $\omega_0^0 = du, \omega_0^2 = dv$. Тогда (6) примет вид

$$\frac{dq}{q^2} = dv.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$-\frac{1}{q} = v + C,$$

где C – произвольная постоянная. С другой стороны, из (5) имеем

$$\frac{1}{q} = \frac{\mu}{\beta^2 + \alpha\gamma - 2v}.$$

Таким образом, получим, что решение задачи Бианки дают линии, для которых

$$v = 1, \mu = (2v - \alpha\gamma - \beta^2)(v + C). \quad (7)$$

Эти уравнения определяют одно 1-семейство линий на поверхности, вследствие чего репер становится каноническим. Присоединяя (7) к основной системе (2), получаем стандартную систему

$$\begin{aligned} d\alpha \wedge \omega_0^0 + d\beta \wedge \omega_0^2 &= \gamma\mu\omega_0^0 \wedge \omega_0^2, \\ d\beta \wedge \omega_0^0 - d\gamma \wedge \omega_0^2 &= 0, \\ (\gamma d\alpha + 2\beta d\beta + \alpha d\gamma) \wedge \omega_0^2 &= 0, \end{aligned}$$

состоящую из трех уравнений относительно трех неизвестных функций α, β, γ . Поэтому решением задачи является класс поверхностей, широта которого – три функции одного аргумента.

Авторами также решена задача Бианки в двух других квазигиперболических пространствах ${}^{01}S_3^1$, ${}^{10}S_3^1$. Доказана теорема о том, что поверхность, в каждой касательной плоскости которой можно выбрать прямую l так, чтобы полученная конгруэнция образовывала расслояемую пару с конгруэнцией нормалей поверхности, существует с произволом трех функций одного аргумента.

Литература

1. Фиников С. П. Метод внешних форм Картана. М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.
2. Щербаков Р. Н. Курс аффинной и проективной дифференциальной геометрии. Томск: Изд-во Томского ун-та, 1960.
3. Цыренова В. Б., Щербаков Р. Н. Основы теории поверхностей трехмерного квазиэллиптического пространства. // Геометр. сб., 15. Изд-во Томск. ун-та. – 1975. – С. 183-204.

4. Цыренова В. Б. К теории поверхностей в квазиэллиптическом пространстве. // Геометр. сб., 19. Изд-во Томск. ун-та. – 1978. – С. 96-108.

5. Цыренова В. Б. Поверхности в квазигиперболическом пространстве $^{11}S_3^1$. // Геометрия многообразий и ее приложения: материалы Пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова – Улан-Удэ; Изд-во Бурятского госуниверситета, 2018. - С. 56-60.

Цыренова Валентина Бабасановна, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: v.ts@mail.ru.

Миронова Екатерина Пурбуевна, кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: mirkaterina84@mail.ru

Tsyrenova Valentina, Canditate of Physics and Mathematics, Doctor of Pedagogics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

Mironova Ekaterina, Canditate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Banzarov Buryat State University

КВАЗИТЕНЗОР КРИВИЗНЫ-КРУЧЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА СО СВЯЗНОСТЬЮ КАРТАНА

Аннотация. Рассмотрены структурные уравнения пространства картановой связности, в которые входит часть постоянных группы Ли, содержащей подгруппу, и антисимметричные компоненты объекта кривизны-кручения. Эти уравнения позволили получить дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны-кручения по следующему алгоритму: 1) структурные уравнения дифференцируются внешним образом, что приводит к кубическим уравнениям; 2) полученные уравнения преобразуются с помощью антисимметрий постоянных группы Ли и компонент объекта кривизны-кручения, тождеств Якоби и условия существования подгруппы; 3) преобразованные кубические уравнения разрешаются по лемме Лаптева, в результате получаются условия полуголономности и квадратичные уравнения; 4) к последним уравнениям применяется лемма Картана, что приводит к дифференциальным уравнениям; 5) эти уравнения альтернируются с использованием условий полуголономности, причем результат записывается в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм.

Дифференциальные сравнения показывают, что объект кривизны-кручения является квазитензором, содержащим квазитензор кручения. Получены условия тензорности, когда квазитензор кривизны-кручения становится тензором. Условия тензорности выполняются в редуктивном случае, когда пространство со связностью Картана превращается в пространство главной связности, обладающее наряду с тензором кривизны тензором кручения.

Ключевые слова: структурные уравнения, связность Картана, квазитензор кривизны-кручения, тензор кривизны-кручения, лемма Лаптева, полуголономность, редуктивность, главная связность.

© Yu. Shevchenko, E. Skrydlova

CURVATURE-TORSION QUASITENSOR OF SPACE WITH CARTAN CONNECTION

Abstract. The structure equations of Cartan connection is considered. Some constants of a Lie group, containing a subgroup, and antisymmetric components of curvature-torsion tensor are included in them. These equations allowed to

obtain the differential comparisons on components of the curvature-torsion object according to the following algorithm: 1) we differentiate the structure equations externally, that permits us to receive the cubic equations; 2) the obtained equations we transform by means of antisymmetries of Lie group constants and the components of curvature-torsion object, Jacobi identities and the conditions of the existence of subgroup; 3) the transformed cubic equations we solve on Laptev's lemma and obtain the conditions for semi-holonomicity and quadratic equations; 4) to the latter equations we apply Cartans's lemma, that help us to receive the differential equations; 5) we make alternation in these equations by means of semi-holonomicity conditions, and write the result as a differential comparisons on the module of basic forms.

From the differential comparisons it follows that curvature-torsion object forms quasitensor containing the torsion quasitensor. The conditions of tensority, when curvature-torsion quasitensor forms tensor, are obtained. These conditions are fulfilled in reduction case, when the space with Cartan connection transforms into space of principal connection, which have curvature tensor as well as torsion tensor.

Keywords: structure equations, Cartan connection, curvature-torsion quasitensor, curvature-torsion tensor, Laptev's lemma, semi-holonomicity, reduction, principal connection.

1. Структурные уравнения пространства Картана

Пусть индексы принимают следующие значения:

$$i, \dots = \overline{1, n}; \alpha, \dots = \overline{n+1, n+r}; I, \dots = \overline{1, n+r}.$$

Возьмем группу Ли G_{r+n} с постоянными C_{JK}^I , которые удовлетворяют условию антисимметрии и тождествам Якоби

$$C_{(JK)}^I = 0, \quad C_{\{J}^I C_{LM\}}^J = 0, \quad (1)$$

где круглые скобки обозначают симметрирование, а фигурные скобки – циклирование. В группе G_{r+n} подгруппа H_r выделяется с помощью условия

$$C_{\alpha\beta}^i = 0. \quad (2)$$

Действительно, запишем часть тождеств (1_2) :

$$C_{j\{\beta}^{\alpha} C_{\gamma\delta\}}^j + C_{\varepsilon\{\beta}^{\alpha} C_{\gamma\delta\}}^{\varepsilon} = 0.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу условия (2), поэтому

$$C_{\varepsilon\{\beta}^{\alpha} C_{\gamma\delta\}}^{\varepsilon} = 0. \quad (3)$$

Это тождества Якоби для постоянных $C_{\beta\gamma}^{\alpha}$ группы Ли H_r .

Рассмотрим пространство со связностью Картана C_{r+n} , определяемое структурными уравнениями (см., напр., [1]):

$$d\omega^i = 2C_{j\alpha}^i \omega^j \wedge \omega^\alpha + K_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k, \quad (4)$$

$$d\omega^\alpha = C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + 2C_{\beta i}^\alpha \omega^\beta \wedge \omega^i + K_{jk}^\alpha \omega^j \wedge \omega^k, \quad (5)$$

где коэффициенты K_{jk}^I антисимметричны по нижним индексам

$$K_{(jk)}^I = 0. \quad (6)$$

Совокупность коэффициентов K_{jk}^I называется объектом кривизны-кручения, а совокупность K_{jk}^i – объектом кручения. Уравнения (4,5) показывают, что пространство C_{r+n} является главным расслоением $H_r(M_n)$ над гладким многообразием M_n со структурными уравнениями (4), типовым слоем которого служит группа Ли H_r . Если выполняется условие редуктивности (см., напр., [2]):

$$C_{\beta i}^\alpha = 0, \quad (7)$$

то расслоение $H_r(M_n)$ становится пространством с главной связностью $H_{r,n}$.

Докажем, что структурные уравнения (4,5) пространства картановой связности C_{r+n} дают возможность найти дифференциальные сравнения для компонент объекта кривизны-кручения K_{jk}^I .

2. Объект кручения

Возьмем внешний дифференциал от обеих частей уравнений (4) и представим результат в следующем виде:

$$\begin{aligned} & [dK_{jk}^i + 2C_{l\alpha}^i K_{jk}^l \omega^\alpha - 2C_{j\alpha}^l K_{lk}^i \omega^\alpha - 2C_{k\alpha}^l K_{jl}^i \omega^\alpha + \\ & + 4C_{\alpha[j}^i C_{k]\beta}^\alpha \omega^\beta + 2(K_{ml}^i K_{jk}^m - C_{l\alpha}^i K_{jk}^\alpha) \omega^l] \wedge \omega^j \wedge \omega^k + \\ & + 2(2C_{k[\alpha}^i C_{\beta]j}^k - C_{j\gamma}^i C_{\alpha\beta}^\gamma) \omega^\alpha \wedge \omega^\beta \wedge \omega^j = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Последнее слагаемое равно нулю. В самом деле, запишем соответствующую часть тождеств Якоби (1₂):

$$C_{k\alpha}^i C_{\beta j}^k + C_{k\beta}^i C_{j\alpha}^k + C_{kj}^i C_{\alpha\beta}^k + C_{\gamma\alpha}^i C_{\beta j}^\gamma + C_{\gamma\beta}^i C_{j\alpha}^\gamma + C_{\gamma j}^i C_{\alpha\beta}^\gamma = 0.$$

Используем условие существования подгруппы (2):

$$C_{k\alpha}^i C_{\beta j}^k + C_{k\beta}^i C_{j\alpha}^k + C_{\gamma j}^i C_{\alpha\beta}^\gamma = 0.$$

С учетом условия антисимметрии (1₁) левая часть этого тождества совпадает с выражением в последней скобке уравнений (8), поэтому уравнения (8) принимают вид

$$[\Delta K_{jk}^i + 4C_{\alpha[j}^i C_{k]\beta}^\alpha \omega^\beta + 2(K_{ml}^i K_{jk}^m - C_{l\alpha}^i K_{jk}^\alpha) \omega^l] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0, \quad (9)$$

где

$$\Delta K_{jk}^i = dK_{jk}^i + K_{jk}^l \omega_l^i - K_{lk}^i \omega_j^l - K_{jl}^i \omega_k^l, \quad \omega_j^i = 2C_{j\alpha}^i \omega^\alpha.$$

Разрешим кубичные уравнения (9) по лемме Лаптева [3]:

$$[\Delta K_{jk}^i + \dots] \wedge \omega^k = \omega^k \wedge \omega_{jk}^i, \quad (10)$$

причем выполняются условия полуголономности [4]:

$$\omega_{[jk]}^i = \lambda_{jkl}^i \omega^l, \quad \lambda_{(jk)l}^i = 0, \quad \lambda_{\{jk\}}^i = 0. \quad (11)$$

В уравнениях (10) перенесем все слагаемые в левую часть, вынесем базисные формы и к полученным квадратичным уравнениям применим лемму Картана

$$\Delta K_{jk}^i + 4C_{\alpha[j}^i C_{k]\beta}^\alpha \omega^\beta + 2(K_{ml}^i K_{jk}^m - C_{l\alpha}^i K_{jk}^\alpha) \omega^l + \omega_{jk}^i = K_{jkl}^i \omega^l.$$

Альтернируя эти дифференциальные уравнения по индексам j и k , используя условия антисимметрии (6) и полуголономности (11₁), запишем результат в виде дифференциальных сравнений по модулю базисных форм

$$\Delta K_{jk}^i + 4C_{\alpha[j}^i C_{k]\beta}^\alpha \omega^\beta \equiv 0 \pmod{\omega^l}. \quad (12)$$

Если выполняется условие

$$C_{\alpha[j}^i C_{k]\beta}^\alpha = 0, \quad (13)$$

то сравнения (12) принимают тензорный вид

$$\Delta K_{jk}^i \cong 0. \quad (14)$$

3. Объект кривизны-кручения

Аналогичным образом замкнем структурные уравнения (5):

$$\begin{aligned} & [dK_{jk}^\alpha + 2C_{\beta\gamma}^\alpha K_{jk}^\beta \omega^\gamma - 2C_{j\beta}^l K_{lk}^\alpha \omega^\beta - 2C_{k\beta}^l K_{jl}^\alpha \omega^\beta - 2C_{\beta i}^\alpha K_{jk}^i \omega^\beta - 4C_{\gamma[j}^\beta C_{k]\beta}^\alpha \omega^\gamma + \\ & + 2(C_{\beta i}^\alpha K_{jk}^\beta + K_{li}^\alpha K_{jk}^l) \omega^i] \wedge \omega^j \wedge \omega^k + 2C_{\beta\gamma}^\alpha C_{\delta\varepsilon}^\beta \omega^\gamma \wedge \omega^\delta \wedge \omega^\varepsilon + (15) \\ & + 2(2C_{k[\beta}^\alpha C_{\gamma]j}^k + 2C_{\delta[\beta}^\alpha C_{\gamma]j}^\delta + C_{\delta j}^\alpha C_{\beta\gamma}^\delta) \omega^j \wedge \omega^\beta \wedge \omega^\gamma = 0. \end{aligned}$$

Два последних слагаемых равны нулю. Действительно, предпоследнее слагаемое обращается в нуль согласно тождествам Якоби (3) для подгруппы

H_r . Теперь запишем ту часть тождеств Якоби (1₂) группы G_{r+n} , в которую входят коэффициенты последнего слагаемого:

$$C_{kj}^\alpha C_{\beta\gamma}^k + C_{k\beta}^\alpha C_{\gamma j}^k + C_{k\gamma}^\alpha C_{j\beta}^k + C_{\delta\beta}^\alpha C_{\gamma\gamma}^\delta + C_{\delta\beta}^\alpha C_{\gamma j}^\delta + C_{\delta\gamma}^\alpha C_{j\beta}^\delta = 0.$$

Первое слагаемое равно нулю в силу условия существования подгруппы (2). Оставшаяся сумма совпадает с коэффициентом в скобках у последнего слагаемого уравнений (15), поэтому оно аннулируется.

Уравнения (15) принимают вид

$$[\Delta K_{jk}^\alpha - 2C_{\beta i}^\alpha K_{jk}^i \omega^\beta - 4C_{\gamma[j}^\beta C_{k]\beta}^\alpha \omega^\gamma + 2(C_{\beta i}^\alpha K_{jk}^\beta + K_{li}^\alpha K_{jk}^l) \omega^i] \wedge \omega^j \wedge \omega^k = 0,$$

(16)

где

$$\Delta K_{jk}^\alpha = dK_{jk}^\alpha + K_{jk}^\beta \omega_\beta^\alpha - K_{lk}^\alpha \omega_j^l - K_{jl}^\alpha \omega_k^l, \quad \omega_\beta^\alpha = 2C_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma.$$

С помощью лемм Лаптева и Картана из кубических уравнений (16) получаются дифференциальные сравнения

$$\Delta K_{jk}^\alpha - 2C_{\beta i}^\alpha K_{jk}^i \omega^\beta - 4C_{\gamma[j}^\beta C_{k]\beta}^\alpha \omega^\gamma \cong 0. \quad (17)$$

При выполнении условия

$$C_{\gamma[j}^\beta C_{k]\beta}^\alpha = 0 \quad (18)$$

сравнения (17) становятся проще

$$\Delta K_{jk}^\alpha - 2C_{\beta i}^\alpha K_{jk}^i \omega^\beta \cong 0. \quad (19)$$

Если выполняется условие редуктивности (7), то сравнения (19) принимают тензорный вид

$$\Delta K_{jk}^\alpha \cong 0. \quad (20)$$

Теорема. Объект кривизны-кручения K_{jk}^I пространства со связностью Картана C_{r+n} , определяемого структурными уравнениями (4, 5), является квазитензором [5, 6], компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (12, 17). Квазитензор K_{jk}^I содержит квазитензор кручения K_{jk}^i .

Следствия

1. При выполнении условий тензорности (13, 18) квазитензор кривизны-кручения K_{jk}^I станет тензором (см. [7, 8]), компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (14, 19), причем тензор кручения K_{jk}^i входит в состав тензора K_{jk}^I .
2. Если справедливо более сильное условие редуктивности (7), то тензор кривизны-кручения K_{jk}^I распадается на тензоры кручения K_{jk}^i и кривизны K_{jk}^α , компоненты которых подчиняются дифференциальным сравнениям (14, 20). В этом случае пространство картановой связности C_{r+n} является пространством главной связности $H_{r,n}$.

Выводы: 1) пространство главной связности $H_{r,n}$ непосредственно обобщает пространство аффинной связности $A_{n,n}$ с кручением и кривизной; 2) пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ не является пространством с главной связностью, но обладает тензором кривизны-кручения (см., напр., [9]), поэтому в пространстве $P_{n,n}$ выполняются условия тензорности, но не справедливо условие редуктивности.

Литература

1. Евтушик Л. Е. Связности Картана и геометрия пространств Кавагути, полученные методом подвижного репера // Геометрия – 3. Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. Т. 30. М.: ВИНИТИ, 2002. С.170–204.
2. Лумисте Ю. Г. Связности в однородных расслоениях // Матем. сб. 1966. Т.69, №3. С.434–469.
3. Лаптев Г. Ф. Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. Т.1. М.: ВИНИТИ, 1966. С. 139–189.
4. Шевченко Ю. И. Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Дифф. геом. многообр. фигур. Вып. 46. Калининград, 2015. С. 168–177.
5. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. Т.2. М., 1953. С. 275–382.

6. Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е.В. О кривизне-кручении пространства со связностью Картана // Modern Problems of Geometry and Topology and its Applications: Abstracts of the international conference. Tashkent, 2019. С. 178–179.
7. Шевченко Ю. И. Тензор кривизны-кручения связности Картана // Дифф. геом. многообр. фигур. Вып. 50. Калининград, 2019. С. 155–168.
8. Шевченко Ю.И., Скрыдлова Е. В. Интерпретация связности Картана с помощью двухъярусной главной связности // Совр. геом. и ее прил. – 2019: Сб. трудов Междунар. науч. конф. Казань, 2019. С.166–169.
9. Шевченко Ю. И., Скрыдлова Е. В. О плоскостном пространстве проективной связности, обобщающем пространства Картана и Аквииса // Классич. и соврем. геометрия: матер. Междунар. конф. М.: МПГУ, 2019. С.150–151.

Шевченко Юрий Иванович, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор Балтийского федерального университета им. И.Канта; 236029, Калининград, ул. В. Талалихина, д.14, кв.6; e-mail: iushevchenko@kantiana.ru

Скрыдлова Елена Викторовна, кандидат физико-математических наук, доцент Балтийского федерального университета им. И.Канта; 236029, Калининград, ул. В.Талалихина, д.14, кв.6; e-mail: eskrydlova@kantiana.ru

Shevchenko Yuri, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, I.Kant Baltic Federal University

Skrydlova Elena, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, I.Kant Baltic Federal University

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

УДК 514.853, 548.736.1:546.26

© *A. M. Бубенчиков, M. A. Бубенчиков,
A. B. Лун-Фу, B. A. Овчинников*

ПРЕЦЕССИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ФУЛЛЕРЕНА C_{60} ПРИ МОЛЕКУЛЯРНО- АТОМНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ²

Аннотация. Работа посвящена исследованию гироскопических явлений при взаимодействии вращающейся молекулы фуллерена и набегающего на нее атома ксенона. В работе использованы методы классической молекулярной физики: межмолекулярных потенциалов, ньютона для описания движения частицы и численный метод Рунге–Кутты. Математическая модель построена и реализована для частот вращений фуллерена до 100 ТГц и скорости набегающего атома ксенона порядка 1000 м/с. Прецессионные характеристики молекулы фуллерена C_{60} определялись с использованием модели атом–атомных взаимодействий, а именно потенциала притяжение–отталкивание, который описывает парные взаимодействия атомов, находящихся в структуре.

Ключевые слова: молекула фуллерена C_{60} , кристалл фуллерита, вращение фуллерена, прецессионные характеристики, межатомное взаимодействие.

© *A. Bubenchikov, M. Bubenchikov,
A. Lun-Fu, V. Ovchinnikov*

PRECESSIONAL CHARACTERISTICS OF ROTATING C_{60} FULLERENE AT MOLECULAR ATOMIC INTERACTIONS

Abstract. The work is devoted to the study of gyroscopic phenomena in the interaction of a rotating fullerene molecule and an xenon atom incident on it. The methods used are classical molecular physics: intermolecular potentials, Newton to describe particle motion, and the numerical Runge–Kutta method. A

² Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10049).

mathematical model is constructed and implemented for the rotation frequencies of fullerene up to 100 THz and the speed of the incident xenon atom of the order of 1000 m/s. The precession characteristics of the C₆₀ fullerene molecule were determined using the model of atom – atom interactions, namely, the attraction – repulsion potential, which describes the pair interactions of atoms in the structure.

Keywords: C₆₀ fullerene molecule, fullerite crystal, fullerene rotation, precession characteristics, interatomic interaction.

Введение. Вращение молекул, в частности, фуллеренов вызывает в настоящее время большой интерес. Свойство молекулы C₆₀ участвовать в угловых колебаниях и поворачиваться со средними угловыми скоростями порядка 10¹¹ рад/с отмечается в работах [1,2]. Hartman R. и Lewis J. [3] провели расчеты спектров колебательно-вращательных движений C₆₀ в пластическом фуллерите. В [4] зафиксировали стабильное вращение фуллеренов в пространстве открытой нанотрубки при комнатной температуре. В работе [5] показали, что молекулы C₇₀ приводятся во вращение за счет воздействия лазерных импульсов. Также большой интерес представляет исследование гироскопического эффекта, возникающего из-за вращательного движения молекул фуллерена. Макроскопические гироскопы активно используются в технике в основном из-за их способности эффективно сопротивляться воздействию внешних сил. Первый пример молекул, напоминающих гироскопы, был получен Роузом и его коллегами в 1985 г. [6]. Gladish и другие синтезировали серию гироскопических молекул, в том числе с достаточно высокими частотами вращений [7]. Группа Гарсиа-Гаррибая разработала и исследовала молекулярные кристаллы, в которых фениленовые группы вращаются в полости как молекулярный гироскоп [8].

Цель данной работы состоит в последовательном применении аппарата классической механики для выявления эффекта прецессии вращающегося фуллерена внутри кристалла фуллерита. Исследуется влияние вращательного движения на гироскопический момент реакции, возникающий вследствие внешнего воздействия.

1. Физическая постановка задачи. В данной работе рассматривается воздействие отдельной частицы на раскрученный стандартный фуллерен C₆₀ находящийся в окружении других фуллеренов (рис. 1). Вращательное движение фуллерена

описывается с использованием подхода Эйлера [9]. Взаимодействие частицы с атомами центрального фуллерена описывается на основе потенциала Леннарда-Джонса [9]. Частица движется с начальной скоростью 600 м/с (см. рис. 1). В качестве частицы использован атом ксенона (131 а.е.м). В начальный момент времени молекуле C_{60} придается угловая скорость ω^0 порядка 10^3 рад/нс. Для рассматриваемых параметров задачи деброилевская длина волны набегающего атома и молекулы фуллерена получается меньше диаметра атомного ядра углерода. Это позволяет применить ньютоновский подход без привлечения квантовой механики.

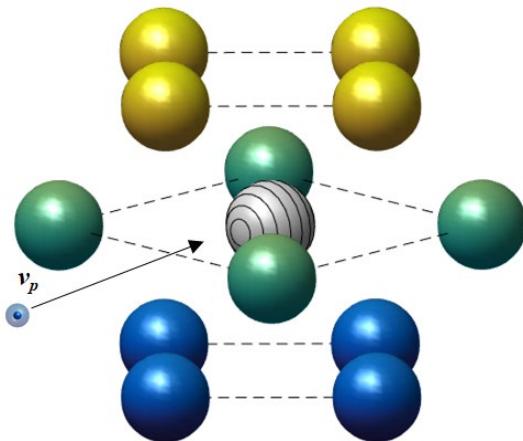


Рис.1. Схема взаимодействия частицы и вращающегося фуллерена, находящегося в окружении других фуллеренов

2. Математическая постановка задачи. Введем некоторую абсолютную (неподвижную) систему декартовых координат $Oxyz$, в начало которой поместим центр вращающегося фуллерена C_{60} . Систему декартовых координат $C\xi\eta\zeta$ свяжем с перемещающимся фуллереном и его центром масс C . Пусть частица в начальный момент времени находится на определенном расстоянии от молекулы C_{60} , на котором силы Ван-дер-Ваальсового взаимодействия малы, и движется со скоростью v_p в направлении фуллерена (см. рис.1). Вращающийся и перемещающийся фуллерен будем рассматривать как каркасную структуру, состоящую из

атомов углерода. Взаимодействие конкретного атома углерода с частицей будет определяться с помощью потенциала, определяющего два класса сил: отталкивания и притяжения:

$$U(r_k) = 4\epsilon \left[\left(\frac{\sigma}{r_k} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_k} \right)^6 \right], \quad (1)$$

где r_k – расстояние между набегающей частицей и k -ым атомом фуллерена; параметры σ и ϵ выбираются из совпадения средней энергии молекул C_{60} внутри фуллерена с известными расчетными или экспериментальными данными [9].

Вращающаяся молекула C_{60} находится в узле гранецентрированной кубической решетки (ГЦКР). Ее ближайшее окружение составляют 12 молекул C_{60} . При этом они являются неподвижными. Их центры размещены на расстоянии 1.002 нм от начала системы координат $Oxyz$. Фуллерены окружения имеют сглаженный сферический потенциал [10]:

$$\Phi(r_{ik}) = \frac{4\epsilon\pi a}{r_{ik} S_1} \left[\frac{\sigma^{12}}{5} \left(\frac{1}{(r_{ik} - a)^{10}} - \frac{1}{(r_{ik} + a)^{10}} \right) - \frac{\sigma^6}{2} \left(\frac{1}{(r_{ik} - a)^4} - \frac{1}{(r_{ik} + a)^4} \right) \right]. \quad (2)$$

Здесь S_1 – площадь, приходящаяся на один атом углерода; a – радиус фуллерена; r_{ik} – расстояние между центром i -го смежного фуллерена и k -ым атомом углерода центральной молекулы C_{60} , $i = \overline{1,12}$, $k = \overline{1,60}$. В основе этого потенциала лежит потенциал вида (1), только здесь он считается равномерно распределенным по площади сферы.

2.1. Вращение центрального фуллерена. Для описания вращательного движения центральной молекулы фуллерена вокруг ее собственного центра масс используются динамические уравнения Эйлера следующего вида [9]:

$$A \frac{dp}{dt} + (C - B)qr = M_{\xi}^{(e)}, \quad (3)$$

$$B \frac{dq}{dt} + (A - C)rp = M_{\eta}^{(e)}, \quad (4)$$

$$C \frac{dr}{dt} + (B - A)pq = M_{\zeta}^{(e)}. \quad (5)$$

Здесь p, q, r – проекции угловой скорости на оси $C\xi\eta\zeta$; A, B, C – главные моменты инерции молекулы для её центра масс.

Проекции моментов сил в формулах (3)–(5) на оси $C\xi\eta\zeta$ определяются следующим образом

$$M_{\xi}^{(e)} = a_{11}M_x^{(e)} + a_{12}M_y^{(e)} + a_{13}M_z^{(e)}, \quad (6)$$

$$M_{\eta}^{(e)} = a_{21}M_x^{(e)} + a_{22}M_y^{(e)} + a_{23}M_z^{(e)}, \quad (7)$$

$$M_{\zeta}^{(e)} = c_{31}M_x^{(e)} + c_{32}M_y^{(e)} + c_{33}M_z^{(e)}, \quad (8)$$

где $\{a_{ij}\}$, $i, j = \overline{1, 3}$ – матрица направляющих косинусов, связывающая декартовы координаты $0xyz$ и $C\xi\eta\zeta$. Компоненты этой матрицы являются тригонометрическими функциями углов Эйлера: собственного вращения – φ , прецессии – ψ и нутации – θ .

Проекции момента внешних по отношению к рассматриваемому фуллерену сил $M_x^{(e)}, M_y^{(e)}, M_z^{(e)}$ на оси абсолютного базиса определяются из следующих формул:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_{k=1}^S \sum_{i=1}^{N+1} \mathbf{M}_{ik}^{(e)}; \quad \mathbf{M}_{ik}^{(e)} = [\mathbf{r}_{kc}, \mathbf{F}_{ik}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_{kc} & y_{kc} & z_{kc} \\ X_{ik} & Y_{ik} & Z_{ik} \end{vmatrix}. \quad (9)$$

Здесь $\mathbf{M}_{ik}^{(e)}$ – момент силы \mathbf{F}_{ik} , взятый относительно центра масс молекулы; \mathbf{r}_{kc} – радиус-вектор атома относительно центра масс молекулы; i, j, k – орты системы координат $0xyz$; значение $i = N+1$ отвечает перемещающейся частице; X_{ik}, Y_{ik}, Z_{ik} – проекции сил на оси системы координат $0xyz$, действующих на k -й атом вращающейся молекулы C_{60} со стороны i -го фуллерена окружения или со стороны частицы Xe .

Уравнения (3)–(5) замыкаются кинематическими соотношениями Эйлера, которые обычно записываются в виде, не разрешенном относительно производных:

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \quad (10)$$

Здесь точка над знаком функции означает дифференцирование по времени. Величина мгновенной угловой скорости C_{60} центрального фуллерена определяется по формуле $\omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$.

2.2. Движение центров масс частиц Для определения движения центра масс вращающейся молекулы C_{60} используется уравнение

$$M \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = \sum_{k=1}^S \nabla U(r_k) + \sum_{k=1}^S \sum_{i=1}^N \nabla \Phi(r_{ik}), \quad \mathbf{v}_c = \frac{d\mathbf{r}_c}{dt}. \quad (11)$$

Движение центра масс частицы определяется следующим законом

$$m_p \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} = \sum_{i=1}^N \nabla \Phi(r_i) + \sum_{k=1}^S \nabla U(r_k), \quad \mathbf{v}_p = \frac{d\mathbf{r}_p}{dt}. \quad (12)$$

Здесь $M = 60m_0$ – масса фуллерена, m_0 – масса атома углерода, ∇ – оператор градиента; $S = 60$ – количество атомов углерода в молекуле C_{60} ; $N = 12$ – количество окружающих фуллеренов; r_k – расстояние от центра частицы до центра k -го атома углерода на перемещающемся фуллерене; r_i – расстояние от центра частицы до центра i -го фуллерена окружения; индекс « c » определяет центр фуллерена.

2.3. Начальные условия и схема интегрирования Начальные условия для решения системы дифференциальных уравнений (3)–(5), (11)–(12) задаются в следующем виде

$$\begin{aligned} t &= 0; \psi = \psi^0, \theta = \theta^0, \varphi = \varphi^0, p = p^0, q = q^0, r = r^0, \\ \mathbf{v}_c &= 0, \mathbf{r}_c = 0, \mathbf{v}_p = \mathbf{v}_p^0, \mathbf{r}_p = \mathbf{r}_p^0. \end{aligned} \quad (13)$$

Численное решение задачи (3)–(5), (11)–(12), (13) проводится с помощью схемы Рунге–Кутты четвертого порядка точности [11], которая позволяет определять траектории частиц и центра масс подвижной молекулы фуллерена, а также углы поворота рассматриваемого фуллерена.

3. Результаты численных расчетов. В подразделах 3.1 и 3.2 рассматривается вращающаяся молекула C_{60} в окружении 12 неподвижных молекул C_{60} (рис. 1) в отсутствии и при наличии набегающей частицы соответственно.

Для исследования прецессии фуллерена необходимо следить за поворотом мгновенной оси вращения этой молекулы. В подвижном базисе ось вращения определяется углами ψ и θ , а в неподвижной – углами ψ' и θ' , которые вычисляются по следующим формулам

$$\theta' = \arccotg\left(r'/\sqrt{p'^2+q'^2}\right), \psi' = \arccotg\left(q'/\sqrt{p'^2+q'^2}\right) \quad (14)$$

где p' , q' , r' – проекции мгновенной угловой скорости на оси $0xyz$.

3.1. Взаимодействие фуллерена с окружением. Пусть ось вращения ориентирована в направлении оси $0x$, т.е. составляющие угловой скорости (p, q, r) при $t = 0$ будут следующими $(\omega^0, 0, 0)$.

На рис. 2 представлены зависимости угла θ от времени при $\omega^0 = 0, 1000, 1100$ рад/нс (кривые 1, 2, 3 соответственно). В рассматриваемом случае изменение углов φ и ψ пренебрежимо мало по сравнению с углом θ . Это говорит о том, что угловые движения совершаются вокруг оси $0x$. Рис. 2 показывает, что при $\omega^0 = 0$ и 1000 рад/нс фуллерен совершает нутационные колебания около угла $\theta = \pi/2$. Поведение кривой 3 указывает на то, что при $\omega^0 = 1100$ рад/нс фуллерен совершает вращательное движение вокруг оси $0x$ со слабо выраженным нутационными колебаниями.

Рис. 3 иллюстрирует изменение угловой скорости со временем при $\omega^0 = 0, 1000, 1100$ рад/нс (кривые 1, 2, 3 соответственно). При $\omega^0 = 0, 1000$ рад/нс молекула фуллерена совершается периодические угловые колебания с изменением мгновенной угловой скорости ω от 0 до 670 рад/нс (кривая 1) и 0 до 1204 рад/нс (кривая 2). Достигание нулевых значений ω означает, что изменяется направление вектора угловой скорости фуллерена. При начальной угловой скорости $\omega^0 = 1100$ рад/нс наблюдается устойчивое вращательное движение с изменением угловой скорости от 405 до 1288 рад/нс. Изменение величины угловой скорости (см. рис. 3, кривые 1–3) обусловлено силовым воздействием 12 окружающих фуллеренов, которые в одни моменты времени противодействуют вращательному движению молекулы C_{60} , а в другие – его усиливают. Центр масс вращающегося фуллерена в отсутствии набегающей частицы на протяжении рассматриваемого

периода времени отклонялся от центра $Oxyz$ не более чем на 10^{-16} нм. Это говорит о том, что окружающие фуллерены с одной стороны удерживают центральный фуллерен в этой точке, а с другой стороны придают ему дополнительный вращательный момент.

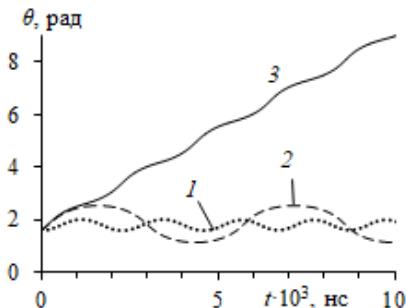


Рис. 2. Зависимость угла θ от времени

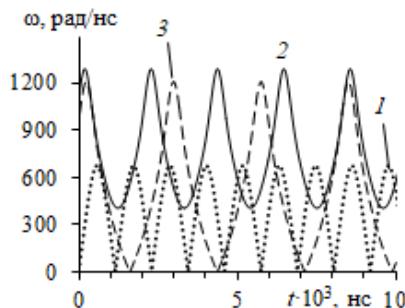


Рис. 3. Зависимость угловой скорости от времени

3.2. Влияние набегающей частицы на вращающийся фуллерен с окружением. Рассмотрим взаимодействие набегающей частицы и центрального фуллерена. Скорость набегающей частицы – $v_{px} = 600$ м/с, ее начальное положение – $(-4, 0, 0)$. В начальный момент времени придадим фуллерену вращательное движение вдоль одной из осей $0x$, $0y$, $0z$. Траектории движения одного из атомов вращающегося фуллерена представлены на рис. 4 для этих трех вариантов.

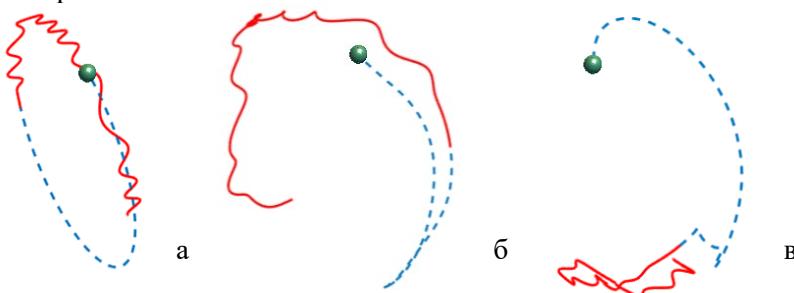


Рис. 4. Траектория движения атома вращающегося фуллерена.

В случае, когда угловая скорость в начальный момент времени равняется $(\omega^0, 0, 0)$ атом сначала движется по круговой траектории (штриховая кривая) относительно оси $0x$ (рис. 4а). После взаимодействия с набегающей частицей (сплошная кривая) атом кроме вращательного движения начинает дополнительно совершать нутационные движения, обусловленные поступательным движением центра масс фуллерена вдоль оси $0x$. Они сохраняются даже после того, как набегающая частица удаляется на значительное расстояние. При начальных угловых скоростях $(0, \omega^0, 0)$ и $(0, 0, \omega^0)$, отвечающих рис. 4б и рис. 4в, мгновенная ось вращения меняет свое направление (штриховая кривая). Это говорит о том, что в данных случаях прецессионное движение наблюдается до взаимодействия с набегающей частицей. В результате взаимодействия с набегающей частицей на прецессионное движение накладывается нутационное движение.

На рис. 5, 6 представлены временные зависимости углов θ' и ψ' , вычисленные по формулам (25) и (26). Кривые 1, 2 отвечают $\omega = (0, \omega^0, 0)$ и $\omega = (0, 0, \omega^0)$ соответственно при $\omega^0 = 1100$ рад/нс. Изменения величин θ' и ψ' говорят об изменении направления мгновенной оси вращения относительно абсолютного базиса и наличии прецессионного движения молекулы фуллерена. В случае $\omega = (\omega^0, 0, 0)$ величины θ' и ψ' имеют постоянные значения. Следовательно, прецессионное движение отсутствует.

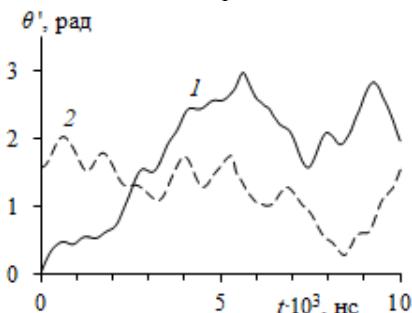


Рис. 5. Временная зависимость угла θ'

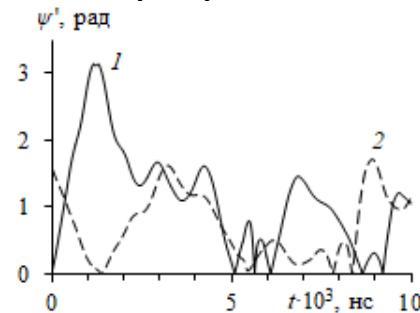


Рис. 6. Временная зависимость угла ψ'

На рис. 7 представлены временные зависимости проекции угловой скорости на ось абсолютного базиса $0x$. Кривые 1, 2, 3 на

рис. 7 отвечают угловым скоростям $\omega^0 = 0, 1000, 1100$ рад/нс соответственно. Рис. 7 иллюстрирует изменение проекции угловой скорости на ось $0x$. Учет влияния набегающей частицы приводит к небольшому увеличению амплитуды и периода изменений угловой скорости для $\omega^0 > 0$. При этом поведение кривых, представленных на рис. 7, качественно аналогично случаю без набегающей частицы.

На рис. 8 показаны временные изменения координат центра вращающегося фуллерена x_c при $\omega^0 = 0, 1000, 1100$ рад/нс (кривые 1, 2, 3 соответственно). Кружочками показаны локальные экстремумы смещения центра фуллерена при $\omega^0 = 0$ рад/нс. Координаты y_c, z_c в рассматриваемом промежутке времени имеют значения не выше 10^{-10} нм. Как видно из рис. 8, центр фуллерена смещается относительно начального положения после воздействия набегающей частицы. За рассматриваемый период времени от 0 до 0.1 нс разница в значениях средних отклонений для $\omega^0 = 1000$ и 1100 рад/нс составила около 0.1%. Среднее отклонение определялось как сумма локальных экстремумов функции $x_c(t)$ (кружочки на рис. 10), отнесенной к их количеству. При $\omega^0 = 0$ рад/нс среднее отклонение составило 0.0201 нм, при $\omega^0 = 1000$ рад/нс – 0.0163 нм. Следовательно, большая начальная угловая скорость приводит к уменьшению смещения молекулы фуллерена на 19%.

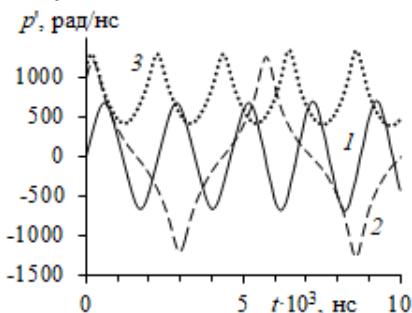


Рис.7. Проекция угловой скорости на ось $0x$

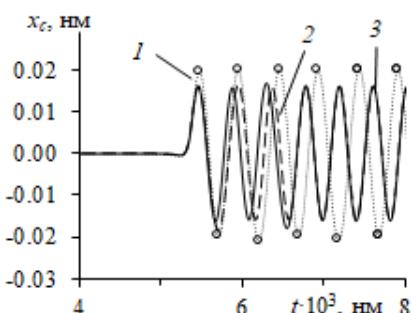


Рис.8. Временное изменение координаты x_c центра C_{60}

Заключение. Результаты расчетов показали, что при взаимодействии частицы с вращающимся фуллереном наблюдается прецессионное движение. Окружающие фуллерены оказывают

сильное влияние на изменение угловой скорости молекулы фуллерена. Получено, что смещение фуллерена из своего начального положения зависит от выбора начальной угловой скорости. С помощью такого выбора можно уменьшить смещение фуллерена C_{60} на 19% по сравнению со случаем $\omega^0 = 0$ рад/нс. Это говорит о том, что вращающийся фуллерен благодаря силе гироскопической реакции способен уравновешивать внешнее воздействие. Данную особенность вращающейся молекулы C_{60} можно использовать для усиления способности фуллеренсодержащих материалов противодействовать динамической деформации вдавливания.

Литература

1. Shen J., He S., Zhuang F. Aharonov-Carmi effect and energy shift of valence electrons in rotating C_{60} molecules, Eur. Phys. J. D, 2005, No. 33, pp. 35–38.
2. Johnson R. D., Yannoni C. S., Dorn H. C., Salem J. R., Bethune D. S. C_{60} rotation in the solid state: Dynamics of a faceted spherical top, Science, 1992, No. 255, pp. 1235–1238.
3. Herman R. M., Lewis J. C. Vibration–rotation–translation spectrum of molecular hydrogen in fullerite lattices around 80 K., Physica B: Condensed Matter, 2009, No. 404(8–11), pp. 1581–1584.
4. Yang L., Chen J., and Dong J. Stability of single - wall carbon nanotube tori, Physica status solidi (b), 2004, Vol. 241, (6), pp. 1269–1273.
5. Yangs S., Wey T., Scheurell K., Kemnitz E., Troyanov S.I.: Chlorination - Promoted Skeletal - Cage Transformations of C_{88} Fullerene by C_2 Losses and a C-C Bond Rotation, Chemistry, 2015, No. 21(43), pp. 15138–15141.
6. Boitrel B., Lecas A., Renko Z., and Rose E. Synthesis of ‘gyroscope-like’ porphyrins, J. Chem. Soc., Chem. Commun., 1985, No. 24, pp. 1820–1821.
7. Estrada A. L., Jia T., Bhuvanesh N., Blümel J., Gladysz, J. A. Substitution and Catalytic Chemistry of Gyroscope - Like Complexes Derived from Cl–Rh–CO Rotators and Triply trans Spanning Di(trialkylphosphine) Ligands, European Journal of Inorganic Chem., 2015, Vol. 2015, (32), pp. 5318–5321.
8. Garcia-Garibay M. A., Godinez C. E., Zepeda G. Molecular Compasses and Gyroscopes. II. Synthesis and Characterization of Molecular Rotors with Axially Substituted Bis[2-(9-tritycyl)ethynyl]arenes, J. Am. Chem. Soc., 2002, No. 124, pp. 4701–4707.
9. Bubenchikov A. M., Bubenchikov M. A., Mamontov D. V., Lun-Fu A. V. Md-Simulation of Fullerene Rotations in Molecular Crystal Fullerite, Crystals, 2019, No. 9(10), pp. 496.

10. Рудяк В. Я. Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Новосибирск: НГАСУ. 2005. Т. 1. 320 с.
11. Орtega Дж., Пул У. Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1986. 288 с.

Бубенчиков Алексей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Бубенчиков Михаил Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: michael121@mail.ru

Лун-Фу Александр Викторович, главный инженер – первый заместитель генерального директора ООО «Газпром трансгаз томск», 634029, г. Томск, пр. Фрунзе, 9. E-mail: a.lunfu@gtt.gazprom.ru

Овчинников Вячеслав Александрович, к.ф.-м.н., доцент кафедры физической и вычислительной механики Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: empiric@mail.ru

Bubenchikov Alexey Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, TSU

Bubenchikov Mikhail Alekseevich, Ph.D., Associate Professor, TSU

Aleksander Viktorovich Lun-Fu, Chief Engineer, OOO "Gazprom transgaz tomsk"

Ovchinnikov Vyacheslav Aleksandrovich, Ph.D., Associate Professor, TSU

© A. M. Бубенчиков, M. A. Бубенчиков, D. V. Мамонтов

СИМУЛЯЦИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ СТРУКТУР, СОСТОЯЩИХ ИЗ B_{42}^3

Аннотация. Целью этой работы является теоретическое исследование структур, состоящих из молекул B_{42} . Исследование заключается в расчете скоростей колебаний и вращений дисковых молекул, в определении их поступательных перемещений, а также в анализе стабильности исследуемых структур. Разработанная математическая модель опирается на уравнения классической механики, а построенная модель является универсальной и позволяет решать множество задач молекулярной динамики и проводить исследования в области наноматериалов.

Ключевые слова: молекулярная динамика, углы Эйлера, классическая механика, математическое моделирование, наноматериалы.

© A. Bubenchikov, M. Bubenchikov, D. Mamontov

SIMULATION OF THE MOLECULAR DYNAMICS OF STRUCTURES CONSISTING OF B_{42}

Abstract. The aim of this work is a theoretical study of structures consisting of B_{42} molecules. The study consists in calculating the vibrational velocities and rotating disk molecules, as well as in the results of the analysis of the structures under study. The developed mathematical model is based on the equations of classical mechanics, and the constructed model is universal and allows you to solve many problems of molecular dynamics and conduct research in the field of nanomaterials.

Keywords: molecular dynamics, Euler angles, classical mechanics, mathematical modeling, nanomaterials.

Введение. В настоящей статье рассмотрена молекулярная динамика молекулярных дисков B_{42} (изомер C_{7v}) расположенных друг под другом таким образом, что они образуют столбики.

³ Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10049).

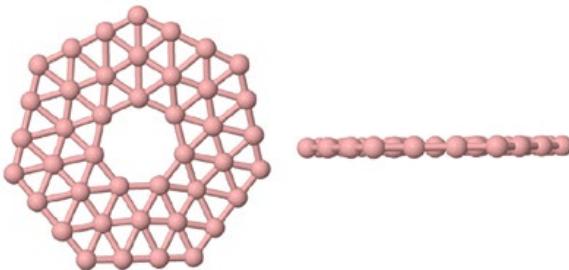


Рис. 1. Проекции схематического изображения молекулы B_{42} .

В основе молекул B_{42} лежит маленький семиугольник, состоящий из семи атомов бора, окруженный двумя семиугольниками, состоящими из 14 и 21 атома бора и по сути, являются плоскими дисками. Подобные структуры изучались [1] с помощью квантово-химических расчетов.

1. Математическая модель. Полная потенциальная энергия определяется суммой потенциала REBO [2] и потенциала LJ [3]. Тогда проекции сил, действующих на отдельный атом молекулы B_{42} , будут определяться как:

$$\begin{aligned} X_k &= - \sum_{i=1, i \neq k}^{S_1} \frac{\partial U_{REBO}}{\partial x}(\rho_{ki}) - \sum_{j=1}^{S_2} \frac{\partial U_{LJ}}{\partial x}(r_{kj}), \\ Y_k &= - \sum_{i=1, i \neq k}^{S_1} \frac{\partial U_{REBO}}{\partial y}(\rho_{ki}) - \sum_{j=1}^{S_2} \frac{\partial U_{LJ}}{\partial y}(r_{kj}), \\ Z_k &= - \sum_{i=1, i \neq k}^{S_1} \frac{\partial U_{REBO}}{\partial z}(\rho_{ki}) - \sum_{j=1}^{S_2} \frac{\partial U_{LJ}}{\partial z}(r_{kj}), \quad k = 1 \dots S_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь U_{REBO} - величина потенциальной энергии, соответствующая REBO, U_{LJ} - потенциал Леннарда-Джонса, ρ_{ki} - расстояние между атомами бора в рамках одной молекулы, r_{kj} - расстояние между атомами бора разных молекул B_{42} , S_1 - количество атомов в одной молекуле, S_2 - количество атомов в окружении рассматриваемой молекулы B_{42} , xyz - координаты атомов бора в абсолютной системе отсчета.

Уравнения движения любого атома, записанные в абсолютной системе отсчета, будут иметь классический вид:

$$m \frac{d^2 x_k}{dt^2} = X_k, m \frac{d^2 y_k}{dt^2} = Y_k, m \frac{d^2 z_k}{dt^2} = Z_k. (k=1, \dots, S_1). \quad (2)$$

Здесь m - масса атома бора.

Повороты молекул B_{42} определяются динамическими уравнениями Эйлера:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= M_\xi, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr &= M_\eta, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= M_\zeta. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь p, q, r - проекции угловых скоростей в подвижной системе отсчета, связанной с молекулой B_{42} , A, B, C - главные моменты инерции молекул для их центров масс, M_ξ, M_η, M_ζ - проекции моментов сил в подвижной системе отсчета. Кроме того, численный метод требует установки начальных условий:

$$t = 0, p = q = r = 0, \quad (4)$$

$$x_k = x_k^0, y_k = y_k^0, z_k = z_k^0, \quad (5)$$

$$\frac{dx_k}{dt} = u_k^0, \frac{dy_k}{dt} = v_k^0, \frac{dz_k}{dt} = w_k^0 (k=1, \dots, S_1), \quad (6)$$

$$v = 0, r = r^0. \quad (7)$$

Здесь x_k^0, y_k^0, z_k^0 - начальные положения атомов бора в молекуле B_{42} , u_k^0, v_k^0, w_k^0 - начальные скорости атомов бора (отличные от нуля из-за учета температуры). Задача Коши решалась численно с использованием схемы Рунге-Кутты четвертого порядка с постоянным шагом по времени $\Delta t = 10^{-6} ns$.

2. Обоснование методов расчета и их тестирование.

2.1. Обоснование применимости классической механики для выбранной задачи. Чтобы определить возможность применения классической механики для расчета динамики молекул B_{42} необходимо сравнить размеры молекул с волной де-Бройля:

$$\lambda = \frac{h}{Mv}. \quad (8)$$

Здесь $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, $M = 1.795 \cdot 10^{-26}$ кг - масса молекулы B_{42} и v - скорость молекулы. Диаметр диска B_{42} приблизительно равен 1 нм. Тогда, для того чтобы длина волны де Бройля превысила размеры молекулы B_{42} , скорость должна быть менее 37 м/с, что очень мало для молекул такого размера. Согласно нашим расчетам, частота вращения дисков находится в ГГц диапазоне, а средняя скорость поступательных движений также превышает 100 м/с. Это значит, собственные размеры B_{42} много меньше ее волны де Бройля, что говорит об оправданности применения данного подхода к подобным структурам.

2.2. Тестирование алгоритма вычислений. Для проверки правильной работы алгоритма был проведен ряд тестов – такие как поступательное движение отдельных молекул по инерции, вращение по инерции, их отражение друг от друга, тестирование внешних воздействий на молекулы. Каждый из тестов прошел успешно, а ошибка вычислений была менее 0.01%.

3. Результаты расчета. Была проведена серия расчетов для двух, трех, пяти и семи молекул B_{42} :

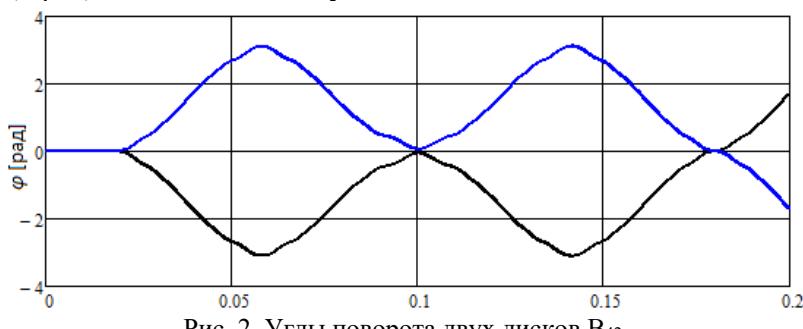


Рис. 2. Углы поворота двух дисков B_{42} .

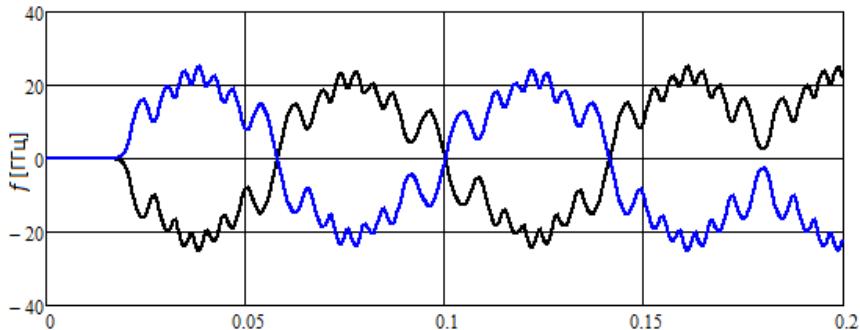


Рис. 3. Скорости вращения двух дисков B_{42} .

На рисунке 2 и 3 показаны углы поворота молекул B_{42} и скорости вращений. Как видно из рисунков, вращение дисков происходит в разные стороны и симметричны.

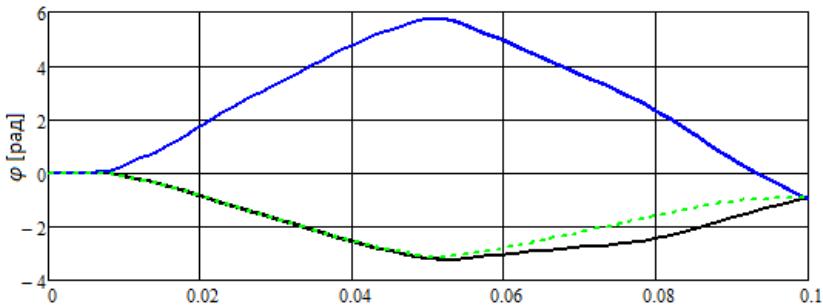


Рис. 4. Углы поворота в случае трех молекул B_{42} .

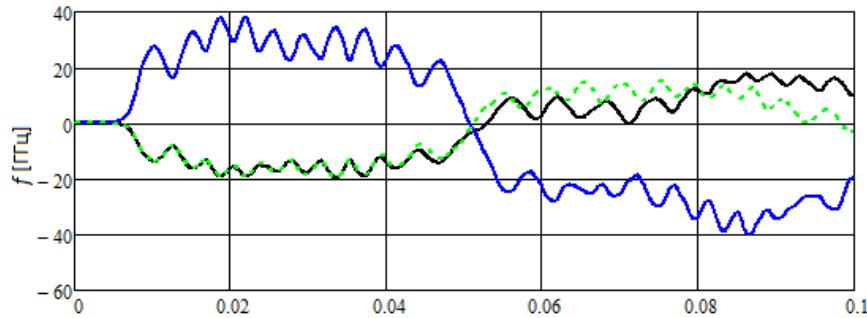


Рис. 5. Скорости вращений в случае трех молекул B_{42} .

Как видно из рисунков 4-5 крайние диски врачаются в одну сторону, а центральный в другую. При этом, динамика крайних дисков не совсем симметрична. Это, по-видимому, обуславливается тем, что в процессе движения центральный диск может наклоняться. Кроме того, вклад в это вносят и тепловые колебания.

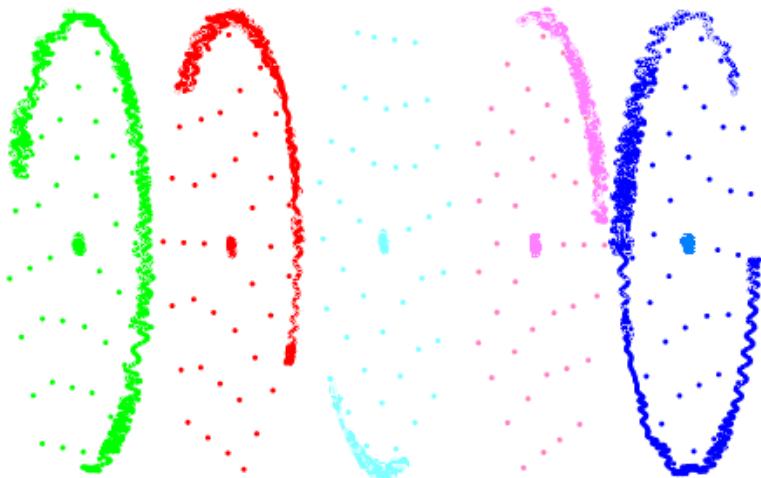


Рис. 6. Траектории одного из атомов в пяти отдельных молекулах B_{42} .

Центральные диски вращаются строго по одной оси вращения, в то время как крайние диски имеют колебания и по другим осям. Тем не менее структура остается стабильной и устойчивой. Для случая семи молекул в столбике результаты оказываются такими же, как и для пяти молекул. Средняя частота вращений дисков составляет приблизительно 10 ГГц, что типично для подобных структур. На рисунке 6 показаны траектории одного случайно выбранного атома на каждом диске B_{42} , начальные положения всех атомов бора в структуре и траектории колебания центров масс.

4. Обсуждения и выводы. В результате работы получена полная динамика системы (скорости и положения всех атомов на протяжении всего расчета). Установлено, что средняя частота вращения дисков B_{42} составляет 10 ГГц, независимо от количества дисков в структуре, а подобные структуры имеют высокую устойчивость и стабильность, даже без учета диатропических кольцевых токов, протекающих в B_{42} [1]. Эти токи могут быть без труда учтены в предложенной нами модели в уравнениях (1), (3). Учет кольцевых токов еще сильнее повысит устойчивость рассматриваемой структуры. А сами столбики, составленные из B_{42} , также могут собираться в большую структуру подобно лесу нанотрубок.

Литература

1. Pham H. T., Duong L. V., Tam N. M., Pham-Ho M. P., Nguyen M. T. The boron conundrum: Bonding in the bowl B_{30} and B_{36} , fullerene B_{40} and triple ring B_{42} clusters // Chem. Phys. Let. 2014. Vol. 608. P. 295.
2. Brenner D. W., Shenderova O. A., Harrison J. A., Stuart S. J., Ni B., Sinnott S. B. A second-generation reactive empirical bond order (rebo) potential energy expression for hydrocarbons // j. phys.: condens. matter. 2002. vol. 14. p. 783–802.
3. Lennard-Jones J. E. Proc. Roy. Soc., 1924, a 106, 463 p.

Бубенчиков Алексей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Бубенчиков Михаил Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: michael121@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович, младший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: orevaore@mail.ru

Bubenchikov Alexey Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Leading Researcher, TSU.

Bubenchikov Mikhail Alexeevich, Ph.D., Associate Professor, TSU.

Mamontov Dmitriy Vladimirovich, Graduate Student, Junior Researcher, TSU.

© A. M. Бубенчиков, M. A. Бубенчиков, D. В. Мамонтов

УГЛЕРОДНЫЕ МАТЕРИАЛЫ С ВНУТРЕННИМИ СТЕПЕНИЯМИ СВОБОДЫ⁴

Аннотация. Для описания вращательной динамики крупных углеродных молекул в молекулярных кристаллах применен подход Эйлера, используемый в классической механике для описания вращений любых тел около их центров масс. Рассмотрены фуллериты, имеющие ПК и ГЦК решетки, и фуллерены, составляющие эти материалы, из ряда C₂₄–C₈₀. Рассчитана средняя энергия взаимодействия пар различных изомеров фуллеренов в зависимости от расстояния между их центрами. На основе этих данных конструируются фуллериты и определяется характер и интенсивность угловых перемещений фуллеренов в этих кристаллах.

Ключевые слова: молекулярная динамика, углы Эйлера, классическая механика, математическое моделирование, наноматериалы, фуллерены, фуллериты.

© A. Bubenchikov, M. Bubenchikov, D. Mamontov

CARBON MATERIALS WITH INTERNAL DEGREES OF FREEDOM

Abstract. To describe the rotational dynamics of large carbon molecules in molecular crystals, the Euler approach is used, which is used in classical mechanics to describe the rotations of any bodies around their centers of mass. We consider fullerites having SC and FCC lattices, and fullerenes constituting these materials from the C₂₄–C₈₀ series. The average interaction energy of pairs of different fullerene isomers was calculated depending on the distance between their centers. Based on these data, fullerites are constructed and the nature and intensity of the angular displacements of fullerenes in these crystals is determined.

Keywords: molecular dynamics, Euler angles, classical mechanics, mathematical modeling, nanomaterials, fullerenes, fullerites.

Введение. В настоящее время большой интерес вызывают фуллерены, их изомеры, а также материалы, созданные на их

⁴ Работа выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 19-71-10049).

основе. В работе [1] представлены результаты сравнения электронных геометрических и колебательных свойств изомеров и фуллеренового ряда C₂₀-C₃₆. В расчетной работе [2] показано, что вновь синтезированный фуллерен обладает ромбоэдрической или гексагональной структурой. Структура и электронные свойства пяти димеров C₃₆, выпадающих на элементарную ячейку суперграфитовой структуры рассмотрены в [3]. Здесь также рассчитаны зонные структуры соединений ионов углеродных молекул с самими фуллеренами. В [4] обсуждается механизм осаждения мультимеров C₃₆ на поверхность алмаза. Анализ строится на основе расчетов и использованием LJ потенциала и потенциала Бреннера. Расчеты показывают, что минимальный порог осаждения составляет 20 эВ, максимальный – 60 эВ. В [5] на основе молекулярно-динамических расчетов анализируется спектр изомеров C₃₆ с потенциалом Бреннера. Рассматриваемая микросистема достигает кинетического равновесия примерно через 100 нс. При этом в результирующем кластере доминирует изомер с самой низкой свободной энергией.

1. Математическая модель. При оценке возможных вращений фуллеренов в молекулярных кристаллах будем исходить из следующих положений. Во-первых, в рассматриваемых материалах отсутствует полимеризация. Во-вторых, определяющими силами, которыедерживают фуллерены в структуре, являются силы Вандер-Ваальса. Кроме того, будем полагать, что фуллерены являются недеформируемыми объемными конструкциями. Тогда для описания вращения этих конструкций удобно использовать подход Эйлера, составляющий фундаментальную основу для описания вращений любых тел вокруг их собственных центров масс. Динамические уравнения Эйлера должны быть применены к каждому отдельному фуллерену, составляющему выбранный фрагмент материала. Классическая форма этих уравнений, следующая:

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= M_{\xi}, \\ B \frac{dq}{dt} + (A - C) pr &= M_{\eta}, \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= M_{\zeta}. \end{aligned} \quad (1)$$

Все параметры и переменные теперь следует отнести к вращающемуся фуллерену. Поэтому здесь p,q,r – проекции вектора угловой скорости фуллерена на оси подвижного базиса; A,B,C – главные моменты инерции для его центра масс; M_x, M_y, M_z - проекции на те же оси моментов сил перекрестных атом-атомных воздействий, определяемых силами Ван-дер-Ваальса. В правые части (1) могут быть включены воздействия иной природы, например электромагнитные. Все рассматриваемые моменты сил зависят от расстояний до конкретных атомов, составляющих фуллерен. Поэтому в процессе расчета нужно знать все углы поворота фуллерена. Эти углы можно найти из дифференциальных уравнений, которые принято называть кинематическими соотношениями Эйлера:

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \\ q &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \\ r &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \quad (2)$$

При решении этих уравнений стандартными технологиями их предварительно необходимо разрешить относительно производных по времени от углов Эйлера, т.е. явно выразить $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$. Для начального момента времени также как и для любого текущего слоя по времени моменты сил, действующих на рассматриваемые фуллерены, вычисляются через величины, заданные в абсолютном базисе:

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_{k=1}^S (y_{kC} Z_k - z_{kC} Y_k), \\ M_y &= \sum_{k=1}^S (z_{kC} X_k - x_{kC} Z_k), \\ M_z &= \sum_{k=1}^S (x_{kC} Y_k - y_{kC} X_k). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь x_{kC}, y_{kC}, z_{kC} - координаты k -го атома углерода, взятые по направлениям абсолютного базиса, но относительно центра масс рассматриваемого фуллерена; X_k, Y_k, Z_k - проекции равнодействующей всех сил, приложенных в точке k . В абсолютном базисе эти силы могут быть вычислены по формулам:

$$X_k = -\sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial U}{\partial x}(r_{kj}), Y_k = -\sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial U}{\partial y}(r_{kj}), Z_k = -\sum_{j=1}^{N_p} \frac{\partial U}{\partial z}(r_{kj}). \quad (4)$$

При этом U – эффективный потенциал атом-атомного взаимодействия, r_{kj} – расстояние между атомами, N_p – количество атомов окружающих рассматриваемый фуллерен. Однако в уравнения (1) входят проекции моментов сил на оси подвижного базиса. Произвести перерасчет проекций можно с помощью матрицы поворота, компонентами которой являются направляющие косинусы углов наклона подвижного базиса по отношению к неподвижному. По необходимости можно совершить обратный переход. Для этого следует использовать обратную матрицу поворота. Определители этих матриц поворота равны единице, а компонентами являются тригонометрические функции углов Эйлера.

Для полного описания динамики фуллеренов в материале фуллерита необходимо выписать уравнения поступательного движения узлов молекулярного кристалла. Этими уравнениями являются уравнения движения центров масс фуллеренов. По соображениям простоты записи приведем их в векторной форме:

$$mS \frac{d\mathbf{v}_c}{dt} = -\sum_{k=1}^S \sum_{j=1}^{N_p} \text{grad}U(r_{kj}), \frac{d\mathbf{r}_c}{dt} = \mathbf{v}_c. \quad (5)$$

Здесь S – количество атомов углерода в фуллерене, N_p – Количество атомов окружения, m – масса атома углерода, \mathbf{r}_{kj} – дистанция между атомами, U – потенциал атом-атомного взаимодействия, \mathbf{r}_c – радиус вектор центра масс фуллерена, \mathbf{v}_c – его скорость.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (1)-(2),(6) интегрируется при следующих начальных условиях:

При

$$t = 0; p = q = r = 0; \varphi = 0, \psi = 0, \theta = \theta^0; \mathbf{v}_c = \mathbf{v}_c^0, \mathbf{r}_c = \mathbf{r}_c^0. \quad (6)$$

Здесь верхним индексом ноль обозначены постоянные величины.

2. Результаты расчетов. При описании вращательной динамики, так и при определении колебаний центров масс фуллеренов использованы обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. По-видимому, лучшей процедурой для решения систем ОДУ первого порядка является схема Рунге-Кутты.

Мы использовали постоянный шаг по времени и стандартный вариант этой схемы имеющий четвертый порядок точности. Программные модули предварительно были протестиированы на задачах: об инерционных движениях одного фуллерена, о плоском взаимодействии трех фуллеренов. Все тесты показали высокую точность расчетов.

На рис. 1. Показаны распределения энергии взаимодействия различных параметров одинаковых фуллеренов. Потенциальные ямы в этих распределениях приближенно определяют дистанцию нахождения смежного фуллерена в материале фуллерита. Как видно из рисунка с увеличением размера фуллерена увеличивается и глубина потенциальной ямы молекулы. На рис. 2 и рис. 3 представлены распределения мгновенных значений величин угловой скорости (частоты вращения) фуллерена. C_{28} в случае соответственно ГЦК и ПК решетки. Эти распределения имеют характер «белого шума», который определяет примерно одинаковую интенсивность в двух рассмотренных случаях. На рис. 4,5 приведены гистограммы средних значений, рассмотренных выше частот. Как видно из рис. 4 в ГЦК-фуллеритах начиная с C_{60} средняя частота примерно равна 400 нс^{-1} . В ПК-фуллеритах соответствующая величина немножко больше 200 нс^{-1} исключая выброс значения для C_{70} в сторону увеличения до 500 нс^{-1} .

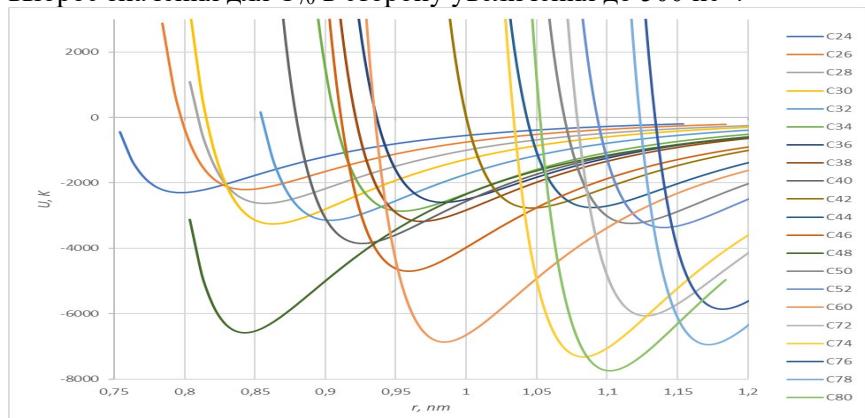


Рис. 1. Потенциальная энергия взаимодействия между однотипными фуллеренами.

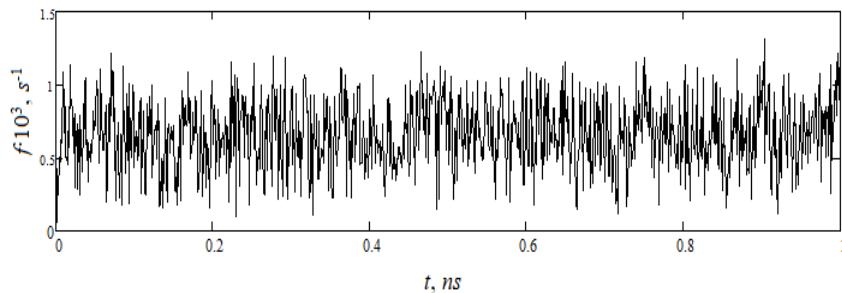


Рис. 2. Частота вращения C_{28} в ГЦК-решетке

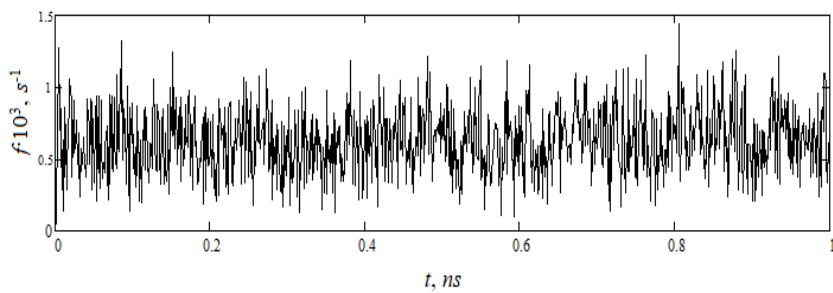


Рис. 3. Частота вращения C_{28} в ПК-решетке

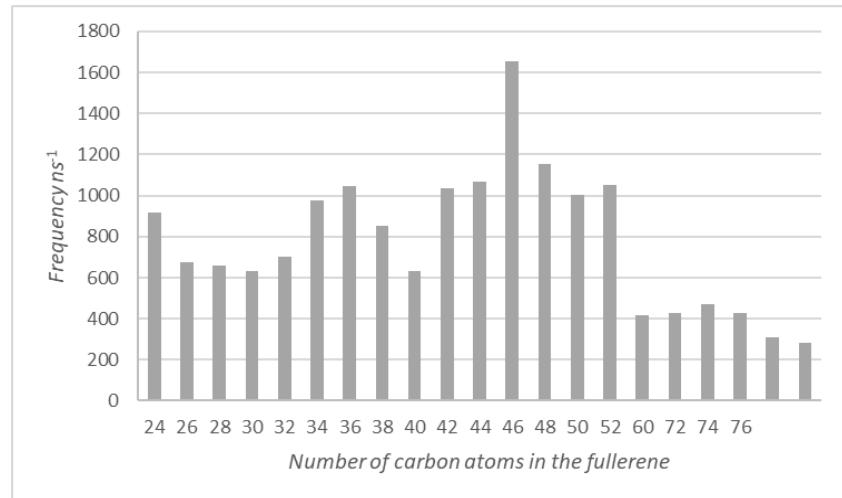


Рис. 4. Частота фуллеренов $C_{24}-C_{80}$ в ГЦК-решетке

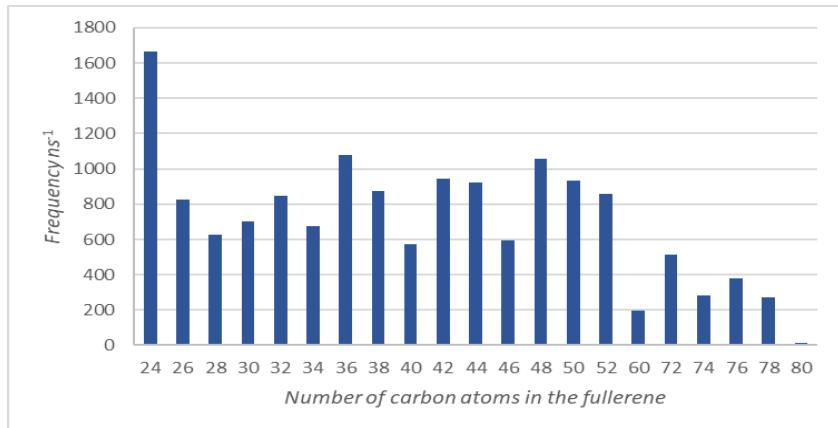


Рис. 5. Частота фуллеренов $C_{24}-C_{80}$ в ПК-решетке

Заключение. Если в углеродной системе составленный фуллеренами материал не возникает sp^3 – гибридизация, но формируется молекулярный кристалл, то в нем все не граничные фуллерены имеют дополнительно три вращательные степени свободы. Вопрос с перераспределением энергии в таких системах имеет принципиальное значение. На первом этапе была найдена энергия взаимодействия для множества фуллеренов как функция расстояний между центрами. Эти данные были использованы для первоначально статичного положения фуллеренов в фуллеритах. Из-за случайной ориентации фуллеренов в начальный момент времени энергия их взаимодействия со смежными узлами в кристалле не будет минимизирована. Поэтому моменты вращения, возникающие вследствие перекрестных взаимодействий между силовыми центрами (атомами углерода), не будут равны нулю. Это вызывает последующие вращения фуллеренов. Отработана технология решения задач вращательной динамики. Для рассматриваемого класса фуллеритов определен характер угловых движений узлов молекулярного кристалла и найдены типичные распределения мгновенных угловых скоростей.

Литература

1. Edyta Małolepsza, Henryk A. Witek, Stephan Irle Comparison of geometric, electronic and vibrational properties for isomers of small fullerenes $C_{20}-C_{36}$ // The Journal of Physical Chemistry A. 2007. Vol. 111. P. 6649-6657.

2. Burgos E., Halac E., Bonadeo H. On the crystal structure of C₃₆ // Chemical Physics Letters. 2000. Vol. 320. P. 14–18.
3. Ming-jun Chen, Ying-chun Liang, Yi-jie Yuan, Dan Li Influential factors of low-energy C₃₆ cluster deposition on diamond (100) crystal plane // Chinese Journal of Chemical Physics. 2007. Vol. 20. No. 6. P. 637-642.
4. Shixuan Du, Yuanhe Huang, Yuxue Li, Ruozhuang Liu Stabilities and electronic properties of two-dimensional C₃₆ crystals // The Journal of Physical Chemistry B. 2002. Vol. 106. P. 4098-4104.

Бубенчиков Алексей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Бубенчиков Михаил Алексеевич, к.ф.-м.н., доцент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: michael121@mail.ru

Мамонтов Дмитрий Владимирович, младший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: orevaore@mail.ru

Bubenchikov Alexey Mikhaylovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Leading Researcher, TSU.

Bubenchikov Mikhail Alexeevich, Ph.D., Associate Professor, TSU.

Mamontov Dmitriy Vladimirovich, Graduate Student, Junior Researcher, TSU.

© A. M. Бубенчиков, A. С. Челнокова

ДИНАМИКА ФУЛЛЕРНОВ МОЛЕКУЛЯРНОГО КРИСТАЛЛА НА ОСНОВЕ (D2d)-C₃₆⁵

Аннотация. В работе представлена математическая модель динамики фуллеренов молекулярного кристалла, сконструированного на основе (D2d)-C₃₆. В рамках этой модели с использованием подхода Эйлера построены уравнения вращательной динамики молекул C₃₆. Проведенный анализ показал регулярный характер вращения и колебания фуллеренов в кристаллической структуре фуллерита. Расчетами установлено, что средняя частота вращения составляет около 13 ГГц. За счет выбора начального угла нутации была гарантирована надежность выполняемых расчетов, т.к. кинематические соотношения Эйлера в данном случае не достигают своих точек особенностей.

Ключевые слова: изомер (D2d)-C₃₆, кристалл с простой кубической решеткой, фуллерит, вращательная динамика.

© A. Bubenchikov, A. Chelnokova

DYNAMICS OF FULLERENES OF A MOLECULAR CRYSTAL BASED ON (D2d) -C₃₆

Abstract. The article presents the mathematical model of dynamics of fullerite molecular crystal constructed on the basis of (D2d) -C₃₆. Within the framework of this model, using the Euler approach, the equations of rotational dynamics of C₃₆ molecules are constructed. Analysis showed a regular rotation and vibrations of fullerenes in a crystalline structure of fullerite. Calculations found that the average rotation frequency is about 13 GHz. By choosing the initial angle of nutation, the reliability of the calculations was guaranteed, because Euler's kinematic relations in this case do not reach their singularities.

Keywords: the (D2d)-C₃₆ isomer, crystals with a simple cubic lattice, fullerite, rotational dynamics.

Введение. Существует несколько изомеров молекул C₃₆, в том числе высокосимметричный кластер D6h. Этот изомер обладает повышенной способностью к образованию полимерных структур

⁵ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-90087

[1]. Существует также несколько типов димеров этого изомера [2-5], каждый из которых представляет большой интерес с точки зрения формирования новых форм углерода. Приведенные в [6] расчеты показывают, что вновь синтезированная молекула ($D6h$)- C_{36} образует кристалл Ван-дер-Ваальса ромбоэдрической или гексагональной структуры. Показано также, что если молекулы расположены близко друг к другу, то они имеют тенденцию образовывать дополнительные связи. Группа китайских ученых под руководством J. Gao [7,8] рассмотрела изомеры C_{36} и критерии свободной энергии для роста кластеров. Они показали, что изомеры с низкой энергией играют важную роль в динамике кластеров C_{36} . При этом самой низкой свободной энергией обладает изомер с симметрией $D2d$.

Такой фуллерен является более устойчивым, поэтому может образовывать классическую форму молекулярного кристалла с простой кубической решеткой.

1. Математическая модель. Взаимодействие фуллеренов в кристалле фуллерита будем рассматривать на основе перекрестных атом-атомных взаимодействий. Несмотря на то, что силовые центры в рассматриваемом фуллерене взаимодействуют с силовыми центрами другого фуллерена не так как свободные атомы углерода, в потенциале парных взаимодействий атомов его параметры могут быть найдены подходящим образом. На рисунке 1 показана статическая модель изомера ($D2d$)- C_{36} , где силовые центры представлены сферами. В моделях классической механики необходимо знать координаты этих центров вне зависимости от того учитывается тепловое движение атомов или нет.

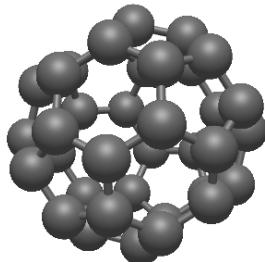


Рис. 1. Изомер ($D2d$) C_{36}

Фуллерены в молекулярном кристалле удерживаются силами Ван-дер-Ваальса и имеют возможность вращаться вокруг собственных центров масс. Естественно, что фуллерены участвуют и в поступательных перемещениях около их средних положений в молекулярном кристалле. Атомы углерода, составляющие фуллерен, участвуют также в тепловых перемещениях.

Для всех указанных перемещений молекул и атомов могут быть выписаны классические уравнения динамики. Уравнения вращательной динамики фуллеренов могут быть построены в рамках подхода Эйлера, обобщенного на случай деформации фуллеренов в результате тепловых перемещений атомов их составляющих. Записанные в скалярном виде, такие уравнения выражают проекции векторной теоремы о моменте количества движения на подвижные оси, связанные с вращающимся фуллереном.

$$\frac{dK_\xi}{dt} + qK_\zeta - rK_\eta = L_\xi, \quad (1)$$

$$\frac{dK_\eta}{dt} + rK_\xi - pK_\zeta = L_\eta, \quad (2)$$

$$\frac{dK_\zeta}{dt} + pK_\eta - qK_\xi = L_\zeta. \quad (3)$$

Здесь L_ξ, L_η, L_ζ - компоненты вектора момента сил всех атом-атомных взаимодействий; K_ξ, K_η, K_ζ - компоненты кинетического момента; p, q, r - компоненты вектора угловой скорости фуллерена. Все вектора, используемые в записи (1)–(3), представлены в подвижном базисе, связанном с вращающимся фуллереном.

Компоненты кинетического момента связаны с компонентами вектора мгновенной угловой скорости следующими соотношениями:

$$K_\xi = A'p - Fq - Er, \quad (4)$$

$$K_\eta = -Fp + B'q - Dr, \quad (5)$$

$$K_\zeta = -Ep - Dq + C'r. \quad (6)$$

Здесь A', B', C', D, E, F - компоненты тензора инерции, которые находятся по формулам:

$$A' = m \sum_{i=1}^{S_1} (\eta_i^2 + \zeta_i^2), \quad D = m \sum_{i=1}^{S_1} \eta_i \zeta_i, \quad (7)$$

$$B' = m \sum_{i=1}^{S_1} (\xi_i^2 + \zeta_i^2), \quad E = m \sum_{i=1}^{S_1} \xi_i \zeta_i, \quad (8)$$

$$C' = m \sum_{i=1}^{S_1} (\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad F = m \sum_{i=1}^{S_1} \xi_i \eta_i. \quad (9)$$

где m – масса атома углерода, S – количество таких атомов в фуллерене (в данном случае 36).

С учетом (4)–(6) уравнения (1)–(3) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно p, q, r . Для ее замыкания необходимо использовать кинематические соотношения Эйлера:

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi, \quad (10)$$

$$q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi, \quad (11)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \quad (12)$$

Здесь φ, ψ, θ – углы Эйлера, точка над знаком функции означает дифференцирование по времени.

Уравнения вращательного движения (1)–(3) представлены в подвижном базисе. Однако при подсчете моментов силовых воздействий на фуллерен необходимо знать расстояния между силовыми центрами. Эти расстояния могут быть определены лишь в абсолютном базисе. Переход от одного базиса к другому осуществляется с помощью прямой и обратной матрицы поворота.

Все выписанные дифференциальные уравнения математической модели оказались дифференциальными уравнениями первого порядка. Для их численного решения удобной и эффективной является схема Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Все представленные результаты получены интегрированием с постоянным шагом по времени $\Delta t = 10^{-6}$ нс.

2. Результаты расчетов. С позиций поля потенциальных взаимодействий фуллерены C_{36} в кристалле фуллерита, без учета коллективных эффектов, находятся в потенциальных ямах друг друга. Положение потенциальной ямы можно найти, сближая два фуллерена предварительно разнесенных на достаточное расстояние. При этом из-за отсутствия сферической симметрии во взаимодействии необходимо будет усреднять результат по углам поворота фуллеренов относительно их центров масс. В настоящей работе мы сближали два врачающихся фуллерена, при этом частота вращения была примерно равна частоте угловых колебаний узлов в молекулярном кристалле фуллерита. На рисунке 2 показан

результат такого расчета. Минимум потенциальной энергии, равный $-1,46 \cdot 10^{-4}$ эВ, достигается при $r = 0.8113$ нм, что имеет хорошее согласование с результатами, полученными с использованием других потенциалов [9].

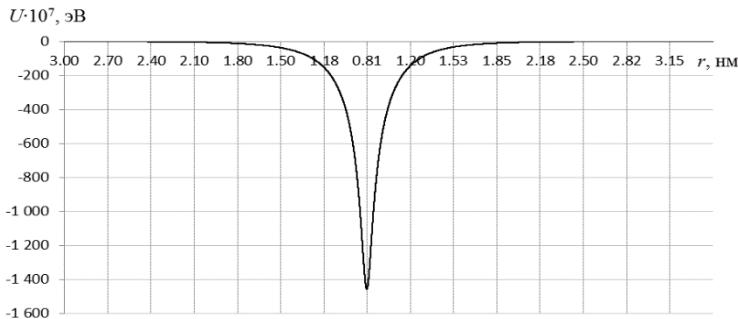


Рис. 2. LJ-потенциал взаимодействия 2 фуллеренов C_{36} в зависимости от расстояния между их центрами масс.

Когда найдена дистанция, минимизирующая энергию взаимодействия двух фуллеренов, узлы молекулярного кристалла можно скомпоновать в представительный фрагмент, который должен обеспечивать характерное вращение центральному фуллерену (рисунок 3).

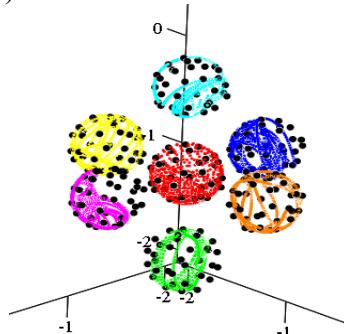


Рис. 3. Симметричный фрагмент.

Сплошными линиями показаны траектории выбранных атомов углерода на каждом из фуллеренов, черные точки – начальное положение всех атомов углерода в рассматриваемой ячейке из 7 фуллеренов $C_{36}(D2d)$.

Используя этот фрагмент, была рассчитана угловая скорость изначально покоящегося фуллерена. На рисунке 4 приведено распределение величины угловой скорости внутреннего узла ПК-решетки фуллерита. Участок $t \in [0, 0.02]$ нс можно назвать участком, на котором завершается стабилизация вращений фуллеренов.

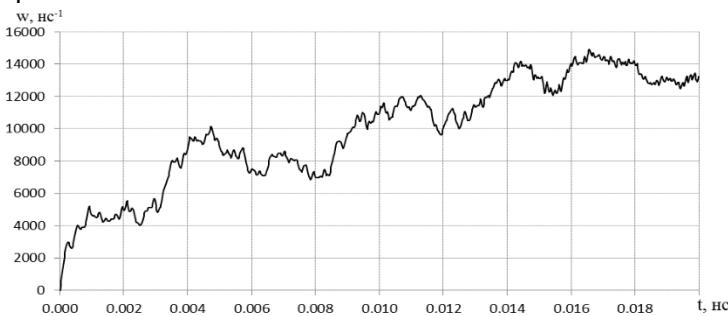
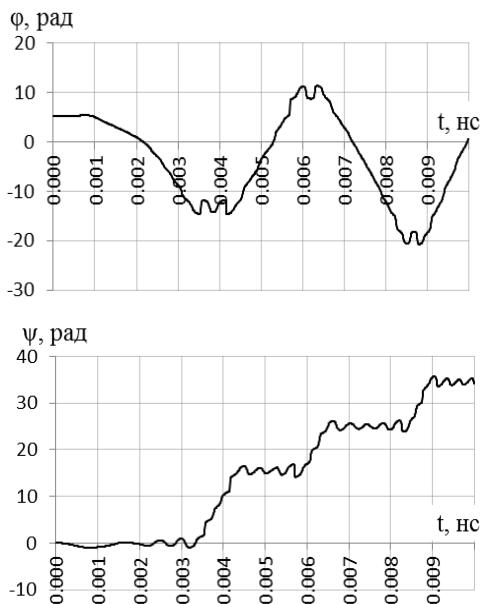


Рис. 4. Модуль вектора угловой скорости центрального фуллерена в рассматриваемой ячейке из 7 фуллеренов C₃₆(D2d)

Вращения фуллеренов удобно характеризовать зависимостями углов Эйлера от времени. Эти зависимости показаны на рисунке 5.



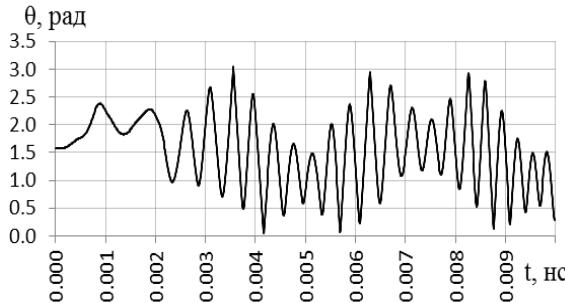


Рис. 5. Значения углов Эйлера центрального фуллерена в рассматриваемой ячейке

Первый график на рисунке 5 показывает, что в одном из угловых направлений фуллерен C_{36} делает два полных оборота, а далее два колебания небольшой угловой амплитуды. После чего изменяет направление вращения. Угол прецессии ψ имеет ступенчатый рост. Причем на ступеньках наблюдаются малые угловые колебания. В целом прецессия характеризуется односторонним изменением угловой координаты. Угол нутации θ характеризуется колебаниями, изменяющимися от 0.5 до 1 рад. Эти колебания происходят около своего начального значения $\pi/2$. Таким образом, в проведенных расчетах угол нутации всегда находится в границах от 0 до π . Все это гарантирует надежность полученных расчетных данных.

Заключение. Предложена эффективная математическая модель вращательной динамики фуллеренов в материале фуллерита. Описана схема получения численного решения. Расчеты показали, что в кристалле фуллерита молекулы C_{36} вращаются регулярным образом. Найденный характер вращения фуллеренов позволил за счет начального разворота молекулы C_{36} относительно подвижного базиса добиться того, что во все последующее время угол нутации будет находиться в диапазоне от 0 до π и не пересекать границ этого интервала. Это делает расчет надежным, поскольку известно, что кинематические соотношения Эйлера, разрешенные относительно производных по времени от углов Эйлера, имеют особенность в точках $\theta = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots$.

Литература

1. Gal'pern E. G., Stankevich I. V., Chernozatonski L. A., Chistyakov A. L. Structure and electronic structure of b-Cm barrelenes, $m = 36 + 12n$ // Pis'ma Zh. Éksp. Teor. Fiz. 1992. Vol. 55. P. 469–472.
2. Grossman J. C., Cote M., Louie S., Cohen M. L. Electronic and structural properties of molecular C_{36} // Chem. Phys. Lett. 1998. Vol. 284. P. 344–349.
3. Collins P. G., Grossman J. C., Cote M. et al. Scanning tunneling spectroscopy of C_{36} // Phys. Rev. Lett. 1999. Vol. 82. P. 165–168.
4. Menon M., Richter E. Structure and stability of solid C_{36} // Phys. Rev. B. 1999. Vol. 60. P. 13322–13324.
5. Fowler P. W., Heine T., Rogers K. M. et al. C_{36} , a hexavalent building block for fullerene compounds and solids // Chem. Phys. Lett. 1999. Vol. 300. P. 369–378.
6. Burgos E., Halac E., Bonadeo H. On the crystal structure of C_{36} // Chem. Phys. Lett. 2000. Vol. 320. P. 14–18.
7. Gao J., Lin Z.-Z., Ning X.-J., Isomers of C_{36} and free energy criteria for cluster growth // J. Chem. Phys. 2007. Vol. 126. 174309.
8. Gao J., Meng Y., Ni J. Isomer spectrum and evolution spectrum of C_{36} isomers in buffer gas // Adv. Mater. Res. 2013. Vol. 711. P. 56–61.
9. Zubov V. I., Zubov I. V., Rabelo J. N. T. Theoretical study of thermodynamic properties of a family of fullerenes from C_{36} to C_{96} in the equilibrium with their vapors // J. Phys. Chem. B. 2003. Vol. 107. P. 10458–10463.

Бубенчиков Алексей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: bubenchikov_am@mail.ru

Челнокова Анна Сергеевна, аспирант, ассистент кафедры теоретической механики, младший научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: smolina-nuta@mail.ru

Bubenchikov Alexey Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Leading Researcher, TSU

Chelnokova Anna Sergeevna, Graduate Student, Assistant, Junior Researcher, TSU

© A. M. Бубенчиков, А. С. Челнокова, Д. Каастоянов

МНОГОШАГОВЫЕ СХЕМЫ С ПЕРЕМЕННЫМ ШАГОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ⁶

Аннотация. В работе представлена классическая теория многошаговых схем для численного решения задачи Коши на основе обыкновенных дифференциальных уравнений. Известные многошаговые схемы: Адамса–Башфорта и Адамса–Моултона сопоставляются с классической схемой Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Для исследования качества схем используется ограниченное решение задачи Коши, имеющее особенность в нуле в виде бесконечных производных. Заключения о качестве схем делаются на основании их способности приблизиться к особенности. В результате анализа этой теории сделан вывод о том, что лучшие по точности результаты в задаче конструирования схемы с переменным шагом дает метод преобразования независимой переменной. Для общего вида зависимости, определяющей связь координат, записана трехшаговая схема предиктор–корректор четвертого порядка точности.

Ключевые слова: полином Лагранжа, многошаговые схемы, метод преобразования координат, переменный шаг, качество вычислений.

© A. Bubenchikov, A. Chelnokova, D. Karastoyanov

MULTI-STEP SCHEMES WITH VARIABLE INTEGRATION STEP

Abstract. The article presents the classical theory of multi-step schemes for numerically solving a Cauchy problem based on ordinary differential equations. Well-known multistep schemes: Adams – Bashforth and Adams – Moulton are compared with classical the fourth order Runge – Kutta scheme. To study the quality of schemes, a limited solution to the Cauchy problem is used, which has a singularity at zero in the form of infinite derivatives. Conclusions about the quality of schemes are made based on their ability to approach feature. As a result of analysis of this theory, it was concluded that the method of transforming an independent variable gives the best accuracy results in the problem of constructing a circuit with a variable step. For the general form of

⁶ Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Министерством культуры, образования, науки и спорта Монголии в рамках научного проекта № 19-51-44002

dependence determining the relationship of coordinates, a three-step predictor – corrector scheme of the fourth order of accuracy is written.

Keywords: Lagrange polynomial, multistep schemes, coordinate transformation method, variable step, quality of calculations.

Введение. Математическое моделирование позволяет не только объяснить имеющиеся экспериментальные данные, проанализировать поведение неизмеримых величин, но и прогнозировать свойства новых материалов. Так стабильность и свойства некоторых графеноподобных моноэлементных материалов [1,2] были предсказаны теоретически задолго до их синтеза. Большинство задач молекулярной динамики, а также механики небесных тел описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения таких уравнений часто используются пакетные технологии [3-5]. Однако, работа по созданию экономичных и высокоточных алгоритмов продолжается оставаться актуальной.

В настоящей работе для класса задач прохождения молекул через нанопористые мембранные и набора статистики по прохождению пористого слоя сделана попытка уменьшить время расчетов и, увеличить точность вычислений за счет использования метода преобразования координат.

1. Схемы с постоянным шагом. Основная задача динамики частиц – это задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) второго порядка относительно времени. Известным примером систему дифференциальных уравнений второго порядка можно свести к системе ОДУ первого порядка, но с большим количеством уравнений. Численное решение систем уравнений принципиально ничем не отличается от способа интегрирования одного характерного уравнения. Из соображений простоты рассмотрим уравнение вида:

$$\frac{du}{dt} = f(t, u). \quad (1)$$

На примере этого уравнения разберем построение многошаговых схем численного интегрирования. Теория многошаговых схем существенным образом упрощается, если она ориентирована на постоянный шаг интегрирования. При численном решении уравнения (1) необходимо вычислить последовательность значений $u_i = u(t_i)$ на множестве точек $t_i = t_{i-1} + h$, $i=1, \dots, N$, $h = \text{const}$.

Общая схема многошаговых методов может быть записана

следующим образом:

$$u_{n+k} = F(t_n, \dots, t_{n+k}; u_n, \dots, u_{n+k-1}). \quad (2)$$

Здесь F – получившаяся правая часть разностного аналога исходного дифференциального уравнения. Записанное уравнение говорит о том, что приближенное решение u_{n+k} в точке t_{n+k} находится через значения искомой величины в предшествующих k – точках. Получили так называемый k – шаговый метод. Соотношение (2) представляет класс явных методов, поскольку в правую часть этого равенства не входит значение u_{n+k} . В противном случае будем иметь неявную многошаговую схему.

Соотношение (2) получается из исходного дифференциального уравнения следующим образом. Правую часть дифференциального уравнения (1) аппроксимируем полиномом Лагранжа степени k :

$$L_k(t) = \sum_{i=n}^{n+k} f_i l_{ik}(t), \quad (3)$$

где

$$l_{ik}(t) = \prod_{j=n, j \neq i}^{n+k} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \quad i = n, \dots, n+k. \quad (4)$$

Соотношение (4) представляет базисные полиномы степени k . Тогда запись (3) будет линейной комбинацией базисных полиномов. Рассмотрим случай $k = 3$. Для этого случая полином (3) в четырех точках $i = n, n+1, n+2, n+3$ будет иметь значения f_i .

Теперь возьмем уравнение (1) с аппроксимированной полиномом (3) правой частью и проинтегрируем его в пределах от t_{n+3} до t_{n+4} , найдем

$$u_{n+4} = u_{n+3} + \frac{h}{24} (55f_{n+3} - 59f_{n+2} + 37f_{n+1} - 9f_n). \quad (5)$$

Получили так называемую явную трехшаговую схему Адамса–Башфорта четвертого порядка точности.

Можно повысить число узлов, через которые проходит аппроксимирующий полином. Это приведет к формальному увеличению порядка точности. Расчетная формула для случая $k = 4$ выглядит следующим образом:

$$u_{n+5} = u_{n+4} + \frac{h}{720} (1901f_{n+4} - 2774f_{n+3} + 2616f_{n+2} - 1274f_{n+1} + 250f_n). \quad (6)$$

Однако на практике пользуются формулой (5). По крайней мере расчеты с предыдущей формулой выглядят более экономичными. Имеется одна особенность в применении интерполяционного

полинома Лагранжа для конструирования явных многошаговых схем. Эта особенность состоит в том, что при интегрировании определяющего уравнения, используется внешняя часть полинома. Другими словами, полином не проходит через расчетный узел, находящийся на последнем слое по времени. Схемы, для которых расчетный узел будет крайним правым узлом или даже внутренним узлом аппроксимирующего полинома, являются неявными схемами. Обобщенная запись расчетной формулы для неявной схемы выглядит следующим образом:

$$u_{n+k} = F(t_n, \dots, t_{n+k}; u_n, \dots, u_{n+k}). \quad (7)$$

Видим, что искомое значение u_{n+k} входит и в правую часть соотношения (7). В задачах ньютоновской динамики не приходится надеяться на явное решение этого соотношения относительно u_{n+k} . На практике поступают следующим образом. Указанную величину находят с использованием явной многошаговой схемы. После чего используют это значение в правой части неявной схемы (7). Поэтапное применение явной и неявной схем получило название процедуры предиктор–корректор. Применение такой процедуры является вполне естественным в отношении численной реализации неявной схемы.

Продолжим конструировать неявную схему. Использование кубических полиномов Лагранжа, а также узлов, проходящих через расчетную точку и три предшествующих точки слева, дает следующую формулу:

$$u_{n+3} = u_{n+2} + \frac{h}{24} (9f_{n+3} + 19f_{n+2} - 5f_{n+1} + f_n). \quad (8)$$

Здесь интегрирование правой части исходного дифференциального уравнения проведено по интервалу от t_{n+2} до t_{n+3} .

Соотношение (8) носит название неявной формулы метода Адамса–Моултона четвертого порядка точности. Поскольку в (8) f_{n+3} зависит от u_{n+3} , то эта формула представляет собой неявное соотношение для определения u_{n+3} . Вспоминая, что у нас имеется соотношение (5), которое позволяет найти указанную величину явным образом, можем скомбинировать две формулы и в результате найти скорректированное значение по неявной формуле (8).

Сдвигая индекс в формуле (5) на три единицы влево по оси натуральных чисел, а в (8) на две единицы в ту же сторону, запишем процедуру предиктор-корректор:

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + \frac{h}{24} (55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3}), \quad (9)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{h}{24} (9f_{n+1}(\tilde{u}_{n+1}) + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2}). \quad (10)$$

Здесь волной отмечено значение расчетной величины, найденное на этапе корректора.

2. Схемы с переменным шагом. При решении задач молекулярной динамики очень важным является контроль точности вычислений, так и решение проблем экономии расчетного времени. При наборе статистики прохождения молекул через нанопористые мембранны начальный этап движения молекул, где отсутствует вандер-ваальсовское притяжение со стороны атомов структуры, может быть рассчитан с относительно крупным шагом по времени. Еще более остро стоит проблема повышения точности расчетов за счет уменьшения шага интегрирования в задаче раскрутки фуллеренов электромагнитными полями. В этой задаче известен момент начала электромагнитного воздействия.

Как мы видели аппроксимирующий полином Лагранжа (3),(4) может быть непосредственно применен для случая переменного шага по времени. Однако в этом случае изменяются коэффициенты в расчетных формулах. Более того, эти коэффициенты будут меняться от задачи к задаче. Для достижения некоторой универсальности в построении многошаговых схем с переменным шагом по времени сведем задачу построения схемы к уже решенной с помощью преобразования переменных. В сущности, этот прием эквивалентен изменению правой части исходного дифференциального уравнения. Пусть имеется зависимость:

$$t = t(\tau), \quad (11)$$

а также существует невырожденная обратная зависимость:

$$\tau = \tau(t). \quad (12)$$

Если кроме того функции (11) и (12) гладкие, то мы можем сделать следующее преобразование исходного уравнения:

$$\frac{du}{d\tau} \left(\frac{d\tau}{dt} \right) = f(t, u). \quad (13)$$

Последнее уравнение можно переписать в следующей форме:

$$\frac{du}{d\tau} = \chi(\tau) f(t(\tau), u(t(\tau))) = g(\tau, u(\tau)), \quad (14)$$

где

$$\chi(\tau) = \frac{dt(\tau)}{d\tau}, \quad g(\tau, u) = \chi(\tau) f(t(\tau), u). \quad (15)$$

Для решения уравнения (14) мы можем использовать описанные выше схемы постоянного шага, которые будут отличаться лишь способом вычисления правой части. Схема предиктор–корректор в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$\tilde{u}_{n+1} = u_n + \frac{\Delta\tau}{24} (55g_n - 59g_{n-1} + 37g_{n-2} - 9g_{n-3}), \quad (16)$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{\Delta\tau}{24} (9g_{n+1}(\tilde{u}_{n+1}) + 19g_n - 5g_{n-1} + g_{n-2}). \quad (17)$$

В этой схеме $\Delta\tau = \text{const}$, однако h – шаг по времени будет переменным.

3. Результаты расчетов. В качестве тестового примера была рассмотрена следующая задача Коши:

$$\begin{cases} u'(t) = -\frac{t \sin \frac{1}{|t|} e^{-\cos \frac{1}{|t|}}}{|t|^3}, \\ u(-1) = \sin 1 \cdot e^{-\cos 1}; \end{cases} \quad (18)$$

Аналитическое решение для нее имеет вид:

$$u(t) = e^{-\cos \frac{1}{|t|}}. \quad (19)$$

На рисунке 1 показано аналитическое распределение (19). Видно, что около нуля имеется особенность, связанная с бесконечными производными по времени.

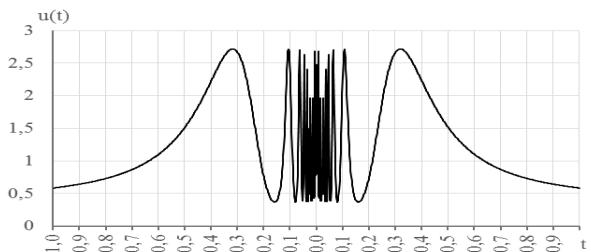


Рис. 1. Аналитическое решение тестовой задачи Коши

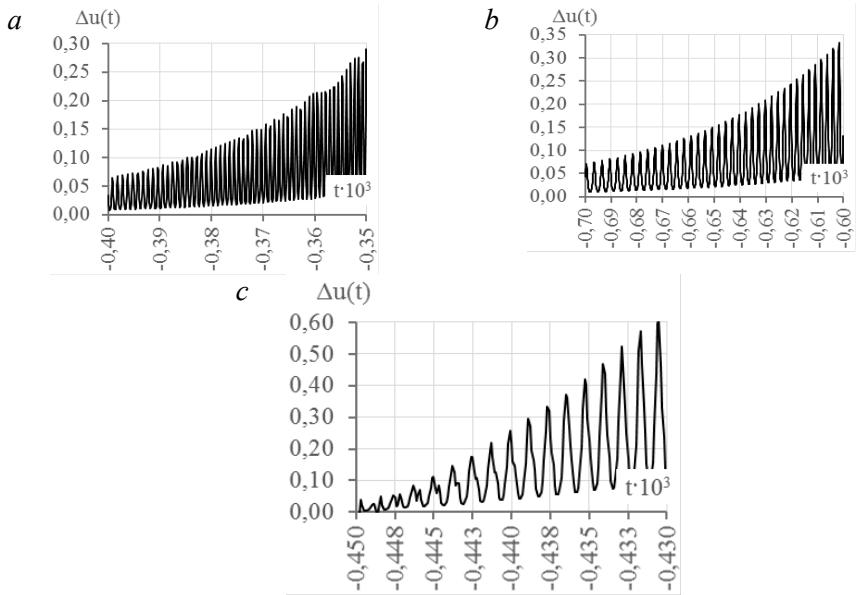


Рис. 2. Разность аналитического и численного решений:
a – относится к численной схеме Рунге–Кутты, *b* –
Адамса–Башфорта,
c – предиктор–корректор

Представленные расчеты выполнены с постоянным шагом по времени $\Delta t = 2 \cdot 10^{-7}$. Расчеты с уменьшающимся шагом позволяют продвинуться к особенности заметно ближе, имея при этом приемлемую точность вычислений.

Заключение. Аналитическое решение (19) хоть и ограничено в окрестности нуля, но его производные стремятся к бесконечности при стремлении аргумента к нулю. Пройти пошаговым методом всю кривую, представленную на рисунке 1 по-видимому невозможно. Поэтому представленная функция является жестким “ситом” для всех тестируемых схем численного решения задачи Коши. Все рассмотренные схемы имеют теоретический четвертый порядок точности. Практические расчеты показали, что все они расходятся с аналитическим решением, начиная с разных моментов времени (рисунок 2). Решение, полученное схемой Адамса–Башфорта, начинает отклоняться от аналитического на более раннем шаге по времени, однако при этом время расчета самое короткое. Сделанные аналитические преобразования независимой переменной могут только увеличить качество расчетов

посредством увеличения точности на участках больших градиентов. Однако число вычислительных операций при этом увеличивается.

Литература

1. Takeda K., Shiraishi K. Theoretical possibility of stage corrugation in Si and Ge analogs of graphite // Physical Review B. 1994. Vol. 50. P. 14916–14922.
2. Xu Y., Yan B. H., Zhang H. J., Wang J., Xu G., Tang P. Z., et al. Large-gap quantum spin Hall insulators in thin films // Physical Review Letters. 2013. Vol. 111. Article number 136804.
3. Ruiz A., Hernandez-Rojas J., Breton J., Gomez Llorente J. M. Low-temperature dynamics and spectroscopy in exohedral rare-gas C 60 fullerene complexes // The Journal of Chemical Physics. 2011. Vol. 114. № 12. P. 5156–5163. DOI: 10.1063/1.1350918.
4. MacKenzie R. C. I., Frost J. M., Nelson J. A numerical study of mobility in thin films of fullerene derivatives // 2010. The Journal of Chemical Physics. Vol. 132. Article number 064904. DOI: 10.1063/1.3315872.
5. Shunaev V. V., Glukhova O. E. Super square carbon nanotube networks: mechanical properties and electric conductivity // Materials Letters. 2019. Vol. 9. №1. P. 136–141. DOI: 10.22226/2410-3535-2019-1-136-141.

Бубенчиков Алексей Михайлович, д.ф.-м.н., профессор, ведущий научный сотрудник регионального научно-образовательного математического центра Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: bubenikhov_am@mail.ru

Челнокова Анна Сергеевна, аспирант, ассистент кафедры теоретической механики Томского государственного университета, 634050, Томск, пр. Ленина, 36. E-mail: smolina-nyuta@mail.ru

Карастоянов Димитар, заведующий отделом встраиваемых интеллектуальных технологий Института информационных и коммуникационных технологий БАН, Болгария, 1113, София, ул. акад. Г. Бончева, 25а. E-mail: dimikara@abv.bg

Bubenchikov Alexey Mikhailovich, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Leading Researcher, TSU

Chelnokova Anna Sergeevna, Graduate Student, Assistant, TSU

Dimitar Karastoyanov, Head of Department, IICT BAN

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ В ПРОГРАММЕ MATHCAD

Аннотация. Работа посвящена моделированию кинематических поверхностей вращения в системе компьютерной математики MATHCAD 11. Многие инженерные задачи связаны с конструированием, кинематикой и анимацией поверхностей, в том числе поверхностей, где присутствуют элементы вращения. В связи с этим разработчики вынуждены вникать в пространственные задачи преобразования поверхностей, что не является их непосредственной функцией. Даётся подробное описание и проиллюстрированы движения в пространстве поверхностей вращения, а также построены анимации изображений поверхностей вращения. Особое внимание уделено созданию локального базиса, его динамике, ориентации в пространстве. При постановке сложной задачи ее можно наглядно продемонстрировать в программе MATHCAD 11. Каждая решенная задача в статье имеет свой листинг программы (исходный код).

Ключевые слова: поверхность вращения, моделирование в системе MATHCAD 11.

© A. Dubanov, B. Zayatuyev, A. Seveen

MODELING OF KINEMATIC SURFACES OF ROTATION IN MATHCAD SYSTEM

Abstract. The scientific article is devoted to the modeling of kinematic surfaces of rotation in the computer mathematics system MATHCAD 11. Many engineering tasks involve the design, kinematics, and animation of surfaces, including surfaces where rotation elements are present. In this regard, developers are forced to delve into the spatial problems of surface transformation, which is not their direct function. A detailed description and illustration of the motion in the space of rotation surfaces are given, as well as animations of images of rotation surfaces are constructed. Special attention is paid to the creation of a local basis, its dynamics, and orientation in space. The scientific article shows that when setting a complex problem, it can be clearly demonstrated in the MATHCAD 11 program. Each solved problem in the article has its own program listing (source code)

Keywords: the surface of rotation, modeling in MATHCAD 11.

Вращение параметрической кривой вокруг прямой

Дана следующая задача: найти уравнение поверхности вращения произвольной параметрической кривой вокруг другой прямой, которая произвольно расположена в пространстве.

Дано: вращаемая параметрическая кривая: $\vec{R}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$. \vec{A} и \vec{B} -

точки оси вращения (Рис. 1). Из точки $\vec{R}(t)$ опущен перпендикуляр на прямую $(\vec{A}\vec{B})$, точка будет выражаться следующим образом:

$$\vec{P}(t) = \vec{A} + \frac{(\vec{R}(t) - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{A})}{(\vec{B} - \vec{A}) \cdot (\vec{B} - \vec{A})} (\vec{B} - \vec{A}).$$

Для каждой отдельной точки $\vec{R}(t)$ определим базис. С центром координат в точке $\vec{P}(t)$, векторы

$$(\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t)), \quad \text{где} \quad \vec{h}_1(t) = \frac{\vec{R}(t) - \vec{P}(t)}{|\vec{R}(t) - \vec{P}(t)|}, \quad \vec{h}_3(t) = \frac{\vec{B} - \vec{A}}{|\vec{B} - \vec{A}|} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v^2},$$

$\vec{h}_2(t) = \vec{h}_3(t) \cdot \vec{h}_1(t)$. Если вращать точку $\vec{R}(t)$ вокруг точки $\vec{P}(t)$ в системе координат $(\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t))$, то получится плоская

$$\text{окружность } \vec{s}(w, t) = |\vec{R}(t) - \vec{P}(t)| \begin{bmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

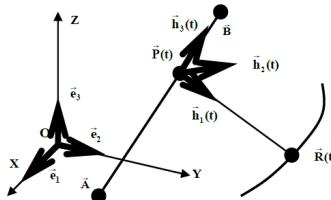


Рис. 1

Если переносить окружность в систему координат (OXYZ) и вращать вокруг точки $\vec{P}(t)$, то формулы преобразования координат

$$\text{будут иметь вид: } S(w, t) = \begin{bmatrix} \vec{e}_{1s}(t) \cdot \vec{s}(w, t) \\ \vec{e}_{2s}(t) \cdot \vec{s}(w, t) \\ \vec{e}_{3s}(t) \cdot \vec{s}(w, t) \end{bmatrix} + \vec{P}(t).$$

Базис $(\vec{e}_{1s}(t), \vec{e}_{2s}(t), \vec{e}_{3s}(t))$ вычисляется по формулам:

$$\vec{e}_{1s}(t) = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 \cdot \vec{h}_1(t) \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{h}_2(t) \\ \vec{e}_1 \cdot \vec{h}_3(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_{2s}(t) = \begin{bmatrix} \vec{e}_2 \cdot \vec{h}_1(t) \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{h}_2(t) \\ \vec{e}_2 \cdot \vec{h}_3(t) \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_{3s}(t) = \begin{bmatrix} \vec{e}_3 \cdot \vec{h}_1(t) \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{h}_2(t) \\ \vec{e}_3 \cdot \vec{h}_3(t) \end{bmatrix}, \quad \text{таким}$$

образом, $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ векторы из системы координат $(\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t))$. $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ - это базисные векторы системы

координат (OXYZ) (Рис. 1) будут выражаться так: $\vec{e}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$\vec{e}_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{e}_3(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad \text{В программе MathCAD ниже написан код}$$

программы.

Входные данные программы MathCAD:

Дано: ось вращения и вращаемая кривая.

Чтобы получить правильные результаты в программном коде нельзя изменять следующие параметры: ось вращения и вращаемая кривая.

Вычислим основание перпендикуляра из точки $\vec{R}(t)$ на прямую $(\vec{A}\vec{B})$ - $\vec{P}(t)$.

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \quad R(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) + 3 \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} \quad P(t) := A + \frac{(R(t) - A) \cdot (B - A)}{(B - A) \cdot (B - A)} (B - A)$$

$(\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t))$ - локальный базис для каждой точки $\vec{R}(t)$.

Базисные векторы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ системы координат (OXYZ).

$$h_1(t) := \frac{R(t) - P(t)}{|R(t) - P(t)|} \quad h_3(t) := \frac{B - A}{|B - A|} \quad h_2(t) := h_3(t) \cdot h_1(t)$$

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

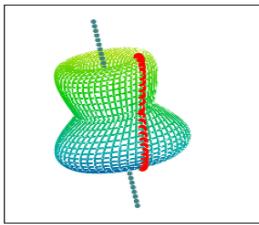
$$\mathbf{e}_{1s}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{h}_1(t) \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{h}_2(t) \\ \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{h}_3(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_{2s}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{h}_1(t) \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{h}_2(t) \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{h}_3(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_{3s}(t) := \begin{pmatrix} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{h}_1(t) \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{h}_2(t) \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{h}_3(t) \end{pmatrix}$$

Вращаемая точка $\vec{R}(t)$ описывает окружность вокруг прямой $(\bar{A}\bar{B})$.

$$s(w, t) := |\vec{R}(t) - P(t)| \cdot \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \\ 0 \end{pmatrix} \quad S(w, t) := \begin{pmatrix} e_{1s}(t) \cdot s(w, t) \\ e_{2s}(t) \cdot s(w, t) \\ e_{3s}(t) \cdot s(w, t) \end{pmatrix} + P(t)$$

Результат построения поверхности вращения кривой $\vec{R}(t)$ вокруг прямой $(\bar{A}\bar{B})$, представлена в системе координат (OXYZ). Более подробное описание работы можно посмотреть здесь [6].

$$\text{Line}(q) := q \cdot A + (1-q) \cdot B$$



S, Line, R

Вращение параметрической кривой вокруг другой

Пусть $\vec{R}(t)$ является вращаемой кривой (Рис.2). Рассмотрим кривую $\vec{Q}(\tau)$. Из точек кривой $\vec{R}(t)$ опускаем перпендикуляр на кривую $\vec{Q}(\tau)$.

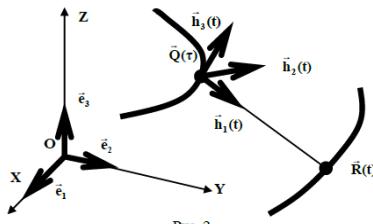


Рис. 2

Соотношение между параметрами t и τ определяется уравнением $(\vec{R}(t) - \vec{Q}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{Q}(\tau)}{d\tau} = 0$. Нужно отметить, что аналитическую зависимость $\tau(t)$ не всегда можно получить.

Решение данного уравнения в численном виде будем искать следующим образом. $F(t, \tau) = (\vec{R}(t) - \vec{Q}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{Q}(\tau)}{dt}$ - данное скалярное уравнение продифференцируем по t , будем предполагать, что зависимость $\tau(t)$ существует, $\frac{\partial}{\partial t} F(t, \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} F(t, \tau) \frac{d\tau}{dt} = 0$. Вот отсюда

получаем исходные данные для задачи Коши $\frac{d\tau}{dt} = -\frac{\frac{\partial}{\partial t} F(t, \tau)}{\frac{\partial}{\partial \tau} F(t, \tau)}$,

начальные условия t_0 и $\tau(t_0) = \tau_0$ получаем из решения уравнения $(\vec{R}(t) - \vec{Q}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{Q}(\tau)}{dt} = 0$ любым способом.

Таким образом, мы нашли функциональную зависимость параметра τ от параметра t . В точке кривой $\vec{Q}(\tau)$, которая соответствует точке кривой $\vec{R}(t)$, сформируем следующий базис

$$(\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t)), \quad \text{где} \quad \vec{h}_1(t) = \frac{\vec{R}(t) - \vec{Q}(t(\tau))}{|\vec{R}(t) - \vec{Q}(t(\tau))|}, \quad \vec{h}_3(t) = \frac{\frac{d}{dt} \vec{Q}(t(\tau))}{\left| \frac{d}{dt} \vec{Q}(t(\tau)) \right|},$$

$\vec{h}_2(t) = \vec{h}_3(t) \cdot \vec{h}_1(t)$. Аналогично, в системе координат (OXYZ) сформируем базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и этот базис переводим в систему координат $(\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t))$, базис примет вид: $(\vec{e}_{1s}(t), \vec{e}_{2s}(t), \vec{e}_{3s}(t))$. Вращение точки $\vec{R}(t)$ вокруг точки описывается аналогичным

$$\text{способом как и в первом: } s(w, t) = |\vec{R}(t) - \vec{Q}(t(\tau))| \begin{bmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$S(w, t) = \begin{bmatrix} \vec{e}_{1s}(t) \cdot \vec{s}(w, t) \\ \vec{e}_{2s}(t) \cdot \vec{s}(w, t) \\ \vec{e}_{3s}(t) \cdot \vec{s}(w, t) \end{bmatrix} + \vec{Q}(t(\tau)) \text{ - моделируемая поверхность. Ниже}$$

приведен код программы, которая иллюстрирует способ вращения.

Входные данные программы MathCAD:

Чтобы получить правильный результат в коде программы, нужно изменять значения только параметров $\vec{Q}(\tau)$ и $\vec{R}(t)$ и не более.

$$Q(\tau) := \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\tau}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\tau}{3}\right) \\ \tau \end{pmatrix} \quad R(t) := \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(2t) + 3 \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} \quad dQ(\tau) := \begin{pmatrix} \frac{d}{d\tau} Q(\tau)_0 \\ \frac{d}{d\tau} Q(\tau)_1 \\ \frac{d}{d\tau} Q(\tau)_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \tau\right) \\ -\frac{1}{3} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot \tau\right) \\ 1 \end{pmatrix}$$

Уравнение: $F(t, \tau) = (\vec{R}(t) - \vec{Q}(\tau)) \cdot \frac{d\vec{Q}(\tau)}{d\tau}$. Расчет вектора $\frac{d\vec{Q}(\tau)}{d\tau}$.

$$F(t, \tau) := (Q(\tau) - R(t)) \cdot dQ(\tau)$$

Даны начальные условия для задачи Коши.

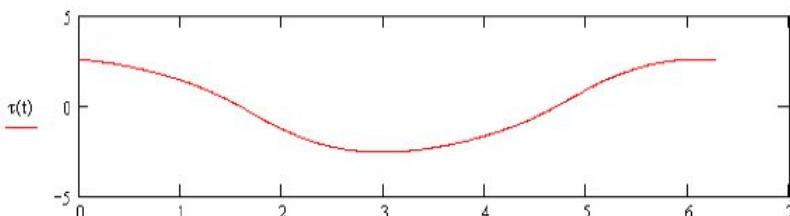
$$\tau t := 0 \quad tt := 0 \quad \text{Given} \quad F(tt, \tau\tau) := 0 \quad \tau := \text{Find}(\tau\tau)$$

Задан ДУ 1 порядка для задачи Коши.

$$f(x, y) := -\frac{\frac{d}{dx} F(x, y)}{\frac{d}{dy} F(x, y)} \quad t_1 := 2 \cdot \pi \quad \tau_0 := \tau \quad t_0 := 0 \quad \tau(t_0) = \tau_0$$

Приведено решение задачи Коши и график зависимости параметра τ от параметра t .

$$\text{Given} \quad \tau(t) = f(t, \tau(t)) \quad \tau := \text{Odesolve}(t, t_1)$$



$(\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t))$ - локальный базис для каждой отдельной точки $\vec{R}(t)$.

$$T := 0 \quad (Q(\tau(T)) - R(T)) \cdot dQ(\tau(T)) = 0$$

$$h_1(t) = \frac{R(t) - Q(t(\tau))}{|R(t) - Q(t(\tau))|} \quad h_3(t) = \frac{dQ(t(\tau))}{|dQ(t(\tau))|} \quad h_2(t) = h_3(t) \cdot h_1(t)$$

В системе координат (OXYZ) базисные векторы ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$). Базис ($\vec{e}_{1s}(t), \vec{e}_{2s}(t), \vec{e}_{3s}(t)$) в системе координат ($\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t)$) будет выглядеть следующим образом.

$$\begin{aligned} e_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & e_2 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & e_3 &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ e_{1s}(t) &:= \begin{pmatrix} e_1 \cdot h_1(t) \\ e_1 \cdot h_2(t) \\ e_1 \cdot h_3(t) \end{pmatrix} & e_{2s}(t) &:= \begin{pmatrix} e_2 \cdot h_1(t) \\ e_2 \cdot h_2(t) \\ e_2 \cdot h_3(t) \end{pmatrix} & e_{3s}(t) &:= \begin{pmatrix} e_3 \cdot h_1(t) \\ e_3 \cdot h_2(t) \\ e_3 \cdot h_3(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

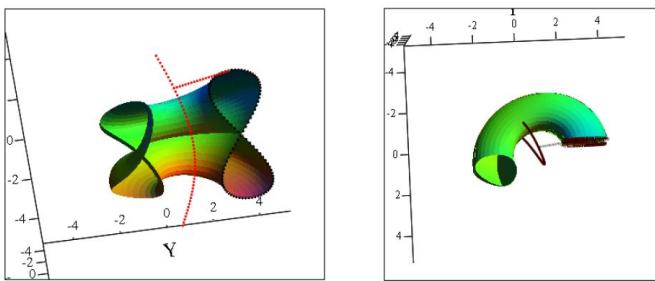
$\vec{R}(t)$ - это вращаемая точка, которая описывает окружность вокруг $\vec{Q}(\tau(t))$ в плоскости векторов $\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t)$. В системе координат выглядит следующим образом ($\vec{h}_1(t), \vec{h}_2(t), \vec{h}_3(t)$).

$$s(w, t) := |R(t) - Q(\tau(t))| \cdot \begin{pmatrix} \cos(w) \\ \sin(w) \\ 0 \end{pmatrix} \quad S(w, t) := \begin{pmatrix} e_{1s}(t) \cdot s(w, t) \\ e_{2s}(t) \cdot s(w, t) \\ e_{3s}(t) \cdot s(w, t) \end{pmatrix} + Q(\tau(t))$$

Здесь окружность представлена в системе координат (OXYZ). Из точки $\vec{R}(0)$ опущен перпендикуляр на кривую $\vec{Q}(\tau)$.

$$L(h) := h \cdot Q(\tau(t)) + (1 - h) \cdot R(T)$$

Иллюстрация поверхности дана снизу:



Более подробное описание дано в работе [6].

Заключение

Мы показали решение задач с перемещением поверхности по траектории, которая изменяет ориентацию локального базиса. После каждой решенной задачи прилагается листинг программы,

написанной в программе MathCAD 11. А также более подробное описание программного кода можно посмотреть в научной статье [6].

Литература

1. Никиulin Е. А. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. – СПб.: БХВ – Петербург, 2003. – 560 с.: ил. ISBN 5-94157-264-6.
2. Кирьянов Д. В. Самоучитель MathCAD 11. – СПб.: БХВ – Петербург, 2003. – 560 с.: ил. ISBN 5-94157-348.
3. Форум пользователей системы MathCAD. (Forum users of the system MathCAD) <http://forum.exponenta.ru>
4. Сайт: Applied geometry and MATHLAB. <http://dubanov.exponenta.ru>
5. Сайт: Geometrical modeling in MathCAD. <http://blagovest2002.narod.ru>

Дубанов Александр Анатольевич – кандидат технических наук, доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, Улан-Удэ, ул. Смолина 24а. E-mail: alandubanov@mail.ru

Заятуев Батор Владимирович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: zayatuyev@yandex.ru

Севээн Ай-Кыс Эрес-ооловна – магистрант, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, Улан-Удэ, ул. Смолина 24а. E-mail: aikys.seveen@mail.ru

Alexander A. Dubanov - candidate of technical Sciences, associate Professor, Institute of mathematics and computer science Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, 24A Smolin St., E-mail: alandubanov@mail.ru

Zayatuyev Bator Vladimirovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

Ai-Kys E. Seveen – undergraduate, Institute of mathematics and computer science Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, 24A Smolin St., E-mail: aikys.seveen@mail.ru

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МОЛЕКУЛ МЕТАНА И АТОМОВ ГЕЛИЯ С МЕМБРАНОЙ, СОСТАВЛЕННОЙ ИЗ ПОЛИКУМУЛИНОВЫХ КАРБИНОВЫХ НИТЕЙ

Аннотация. В работе рассматривается способность мембраны, составленной из поликумулиновых карбиноных нитей, разделять бинарную смесь газов метан-гелий. Рассмотрена ячейка мембраны, составленная из 10 карбиноных нитей по 100 атомов углерода каждая. Расчеты показывают, что ячейка с шагом между нитями, равным 0,55 нм способна эффективно разделять такую смесь газов, при нормальных условиях.

Ключевые слова: проницаемость ячейки наномембранные, поликумулиновая карбновая нить, молекулярная баллистика, наномеханика.

© M. Zinkevich, E. Tarasov

INTERACTION OF METHANE MOLECULES AND HELIUM ATOMS WITH A MEMBRANE COMPOSED OF POLYCUMULIN CARBINE CHAINS

Abstract. The paper considers the ability of a membrane composed of polycumulin carbinchains to separate a binary mixture of methane-helium gases. A membrane cell composed of 10 carbin chains of 100 carbon atoms each is considered. Calculations show that a cell with a pitch between filaments of 0.55 nm is capable of effectively separating such a mixture of gases under normal conditions.

Keywords: cell permeability of a nanomembrane, polycumulin carbine chain, molecular ballistics, nanomechanics.

Введение

Развивая направление, связанное с подходами молекулярной динамики, которое описано, в том числе в работах В.Я. Рудяка [1], и продолжая исследования проницаемости различныхnanoструктур, идущие в нашей научной группе под руководством профессора А.М. Бубенчикова [2-6], интересной представляется задача создания

потенциально возможных ячеек мембран, составленных углероднымиnanoструктурами и сравнение их эффективности [7].

Поликумулиновые карбиновые нити и создание ячейки наномембранны на их основе

В данной статье будем рассматривать мембрану, составленную из карбиновых нитей. Карбин – аллотропная форма углерода на основе sp - гибридизации углеродных атомов. В молекуле карбина атомы углерода соединены в цепочки либо поочерёдно тройными и одинарными связями (полиииновое строение), либо постоянно двойными связями (поликумулиновое строение). Карбин может быть, как линейным, так и образовывать циклические структуры (см. рисунок 1).

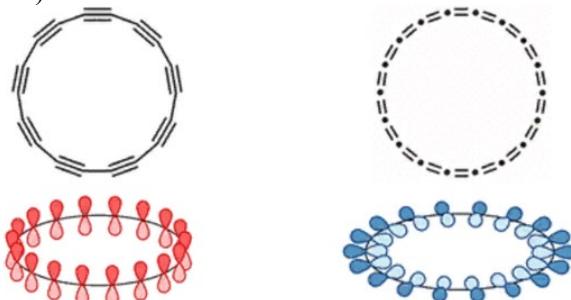


Рис.1. Полиииновое и поликимулиновое строение карбоновой нити.

Потенциал от дискретной совокупности атомов углерода, составляющих карбоновую нить, определяется простым суммированием потенциалов парных взаимодействий [8]:

$$U(x, y, z) = 4\epsilon \sum_{j=1}^N \left[\left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 \right], \quad (1)$$

где $\rho_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j)^2}$ – расстояние между пробной молекулой газа с координатами x, y, z и j -тым атомом структуры с координатами; N – число атомов структуры; σ и ϵ – параметры потенциала Леннард-Джонса (LJ -потенциала)[8].

Для потенциала взаимодействия вида (1) уравнения движения пробной молекулы можно записать следующим образом:

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j \frac{x - x_j}{\rho_j}, \quad \frac{dv}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j \frac{y - y_j}{\rho_j}, \quad \frac{dw}{dt} = \sum_{j=1}^N a_j \frac{z - z_j}{\rho_j} \quad (2)$$

Здесь $a_j = 24 \frac{\varepsilon}{\rho_j m} \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 \left[2 \left(\frac{\sigma}{\rho_j} \right)^6 - 1 \right]$ — модуль ускорения,

определенного j -тыматом углеродной структуры.

Для численного интегрирования уравнений (2) их необходимо дополнить кинематическими соотношениями, определяющими компоненты скорости точки [8]:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w \quad (3)$$

Систему уравнений (2), (3) с начальными условиями, определяющими положение и скорость пробной молекулы, можно интегрировать с использованием пошаговых схем высокого порядка точности [8].

Моделирование и результаты

Рассмотрим численную реализацию взаимодействия молекул метана и атомов гелия со структурой, составленной из 10 поликумулиновых карбоновых нитей, каждая из которых состоит из ста, связанных двойной ковалентной связью (длина связи равна 0.1282 нанометра), атомов углерода. Начало декартовой системы координат поместим на начало первой нити, а остальные расположим следующим образом.

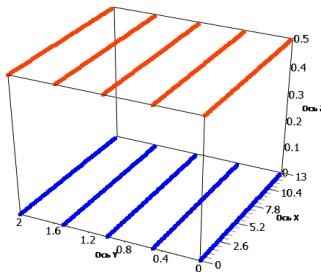


Рис. 2. Конфигурация ячейки мембранны из 10 карбоновых поликумулиновых нитей с шагом 0.5 нанометров.

С переменным шагом (*step*), изменение которого позволит нам изменять основной параметр данной ячейки, равным минимум значению 0,5 нанометра расположим вдоль оси y еще четыре нити. Остальные пять нитей расположим над первыми пятью на том же расстоянии, но удаленном по оси z . Выбор данного минимального шага обусловлен тем, что в теоретических работах встречается значение максимального сближения подобныхnanoструктур на основе углерода примерно равное 0,35-0,38 нанометра. Экспериментальные значения находят минимумы на расстояниях 0,4 нанометра.

Для тестирования и верификации результатов, в связи со сложностью нахождения реальных экспериментов с подобными мембранными было сделано два верификационных теста. На рисунках 3-5 видно, что характер движения атома гелия не зависит от выбора шага по времени и можно говорить о том, что все выше представленные результаты, сделанные с шагом по времени 10^{-6} обладают необходимой точностью и сходимостью. На рисунке 6 представлено тестирование выполнения закона сохранения энергии в замкнутой системе.

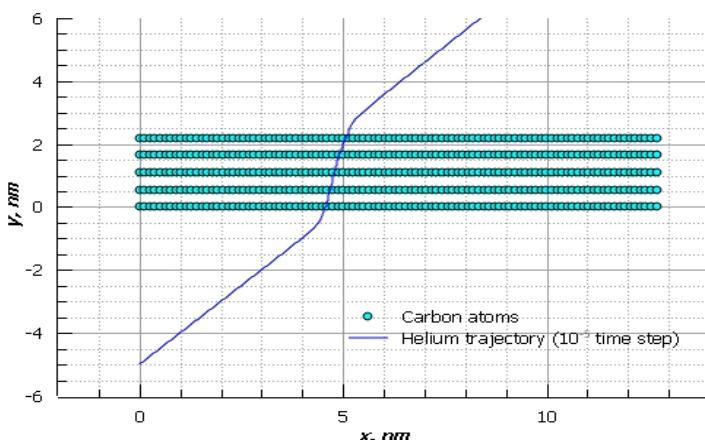


Рис. 3. Траектория движения атома гелия со скоростью 1300 метров в секунду при взаимодействии с ячейкой мембранны из 10 карбоновых поликумулиновых нитей с шагом 0,55 нанометров при шаге по времени, равном 10^{-5}

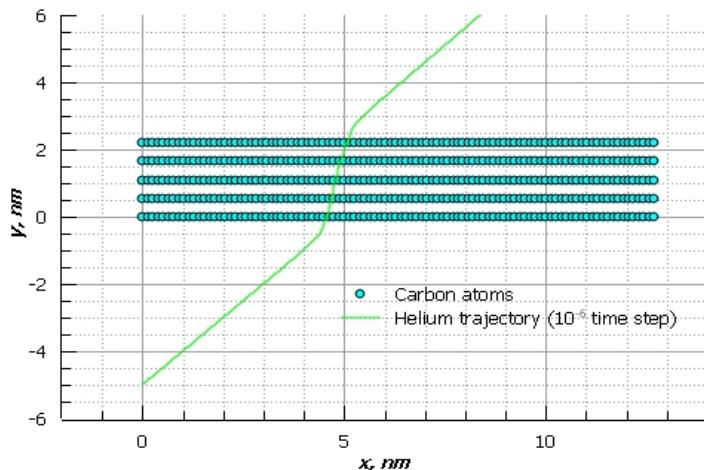


Рис. 4. Траектория движения атома гелия со скоростью 1300 метров в секунду при взаимодействии с ячейкой мембраны из 10 карбоновых поликумулиновых нитей с шагом 0.55 нанометров при шаге по времени, равном 10^{-6}

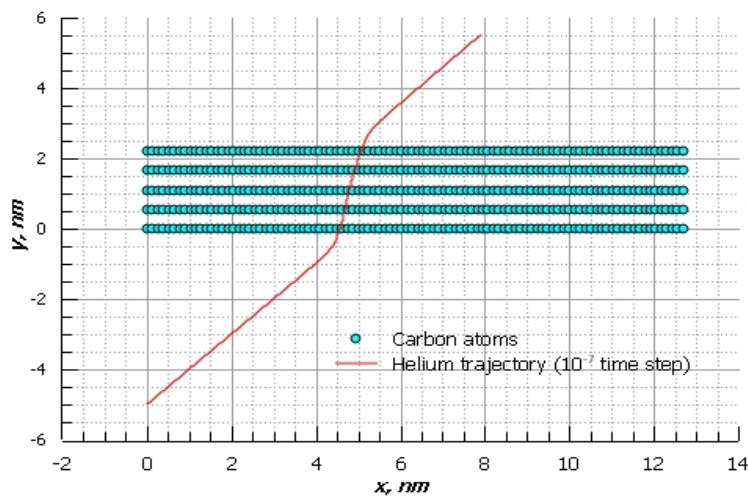


Рис. 5. Траектория движения атома гелия со скоростью 1300 метров в секунду при взаимодействии с ячейкой мембраны из 10 карбоновых поликумулиновых нитей с шагом 0.55 нанометров при шаге по времени, равном 10^{-7}

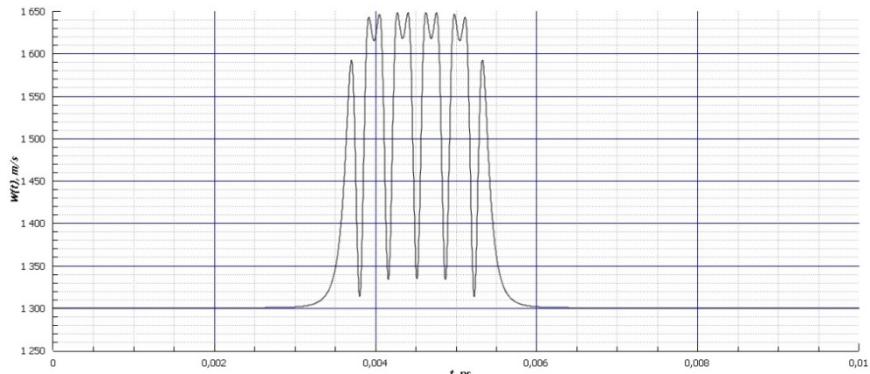


Рис. 6. График зависимости изменения скорости атома гелия от времени при взаимодействии с ячейкой мембрани из 10 карбоновых поликумулиновых нитей с шагом 0.55 нанометров.

После тестирования полученной численной реализации можно было переходить непосредственно к работе с моделью. Запустим тестовую молекулу метана или атом гелия в плоскости $z_0 = step/2$ нм, то есть по центру данной ячейки, с позиции $x_0 = 6.3509$ нм, $y_0 = -5.0$ нм При этом начальное значение вектора скорости определялось компонентами: $u_0 = 0 \text{ m/c}$, $v_0 = Vt$, $w_0 = 0 \text{ m/c}$. В ходе итерационного процесса решения системы уравнений методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности получим следующее результаты, представленные на рисунках 7-9.

На рисунках 7 и 8, когда расстояние между нитями равнялось 0,5 и 0,75 нанометров соответственно, можно видеть, что данная структура при изменении параметра ячейки либо полностью пропускает оба компонента природного газа, со скоростями, отвечающими наиболее вероятным по максвелловскому распределению, либо отражает оба типа тестовых объектов при тех же скоростях.

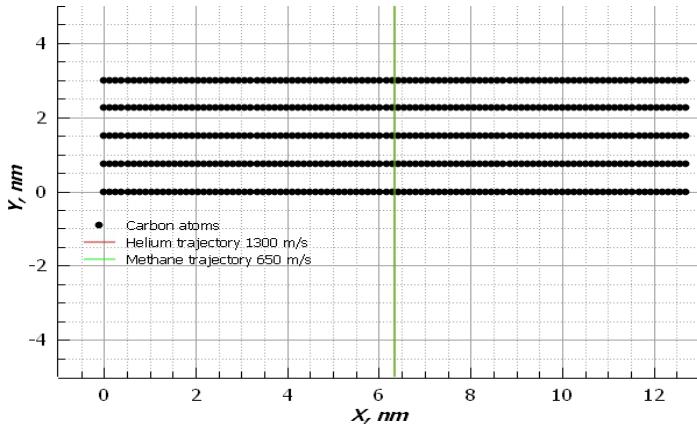


Рис. 7. Траектория движения атома гелия со скоростью 1300 метров в секунду и молекулы метана со скоростью 650 метров в секунду при взаимодействии с ячейкой мембранны из 10 карбоновых поликумулиновых нитей с шагом 0.75 нанометров.

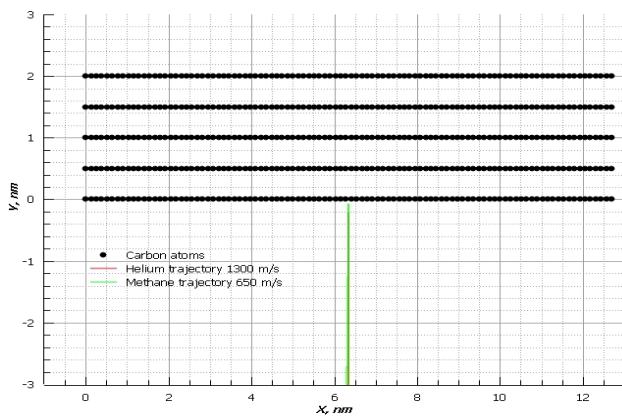


Рис. 8. Траектория движения атома гелия со скоростью 1300 метров в секунду и молекулы метана со скоростью 650 метров в секунду при взаимодействии с ячейкой мембранны из 10 карбоновых поликумулиновых нитей с шагом 0.5 нанометров.

На рисунке 9 показан случай, при котором изменяемый параметр ячейки составляет 0,55 нанометров. Этот случай примечателен тем, что при данном расстоянии между поликумулиновыми карбоновыми нитями, исследуемая элементарная ячейка мембранны

способна пропускать атомы гелия, летящие с наиболее вероятной для нормальных условий скоростью (1300 метров в секунду при 10⁵Па и 20 градусах Цельсия) и задерживать летящие со скоростью 650 метров в секунду молекулы метана.

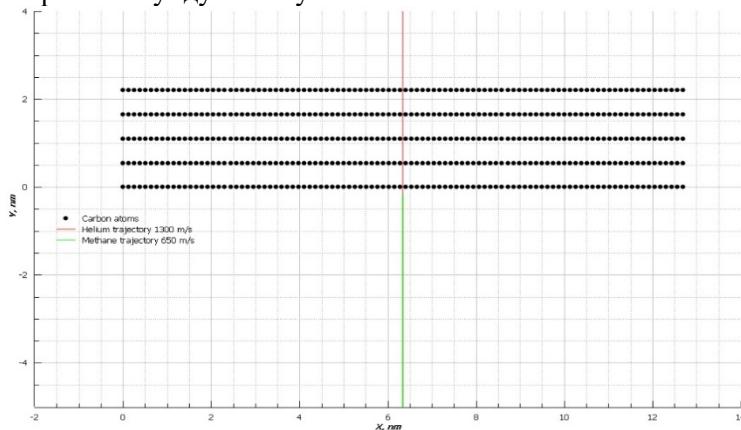


Рис. 9. Траектория движения атома гелия со скоростью 1300 метров в секунду и молекулы метана со скоростью 650 метров в секунду при взаимодействии с ячейкой мембранны из 10 карбоновых поликумулиновых нитей с шагом 0.55 нанометров.

Из всех представленных данных можно сделать однозначный вывод – ячейка мембранны на основе поликумулиновых карбоновых нитей, и мембрана из них построенная могут быть использованы в качестве основы для устройства для разделения бинарных смесей метан-гелий в условиях, близких к нормальным.

Заключение

В результате данного исследования была создана модельная мембрана на основе поликумулиновых карбоновых нитей, каждая из которых состояла из 100 атомов углерода. Данная мембрана представляла собой ячейку из двух слоев по 5 нитей каждый. Полученные результаты взаимодействия смеси газов гелий-метан с данной ячейкой показывают:

Для данного типа мембранны подобрано оптимальное для разделения смеси метан-гелий расстояние между карбоновыми нитями, составляющее 0,55 нм.

Литература

1. Рудяк В. Я. Моделирование диффузии наночастиц в газах и жидкостях методом молекулярной динамики В. Я. Рудяк, С. Л. Краснолуцкий, Д. А. Иванов Оптика атмосферы и океана. 2011. Т. 24. № 6. С. 529-533
2. Жаровцев В. В., Маслов А. С., Овчаренко В. В., Тарасов Е. А., Ямкин А. В. ПРОНИЦАЕМОСТЬ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ НАНОЧАСТИЦ // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57. № 8-2. С. 138-141.
3. M. Bubenchikov, M. A. Bubenchikov, O. V. Matvienko, E. A. Tarasov, O.V. Usenko, Simple energy Barrier for Component Mixture of Natural Gases // AIP Conference Proceedings, 1698, 060007 (2016).
4. Bubenchikov M. A., Potekaev A. I., Bubenchikov A. M., Usenko O. V., Malozemov A. V., Tarasov E. A. The interaction potential of an open nanotube and its permeability: Molecular dynamics simulation // EPJWeb of Conferences, Volume 110, 23 February 2016, Article number 01061.
5. Tarasov E. A. Interaction Potential of Open Carbon Nanotube with Natural Gas Molecular Components // Key Engineering Materials, Volume 685, 2016, Pages 534-538.
6. Bubenchikov M. A. Calculating permeability of the low-temperature phase of a fullerite M. A. Bubenchikov, A. M. Bubenchikov, E. A. Tarasov, O. V. Usenko, A. S. Chelnokova Diamond and Related Materials. 2018. Т. 86. pp. 146-158.
7. Tarasov E. A., Comparison of Two Elementary Nanomembranes Cells for Gas Mixture Separation Problem, Key Engineering Materials, Vol. 769, pp. 128-133, 2018
8. Борсук А. С. Движение молекулы в поле потенциала открытой нанотрубки / А. С. Борсук, Е. А. Тарасов, В. Б. Цыренова // Геометрия многообразий и её приложения: материалы четвёртой научной конференции с международным участием. Улан-Удэ – оз. Щучье – оз. Байкал, 27-30 июня 2016 г. – Улан-Удэ, 2016. – С. 90–94.

Зинкевич Михаил Станиславович, б\с, б\з, студент ММФ ТГУ, Томск пр. Ленина 36, 634050, mike_zin@mail.ru

Тарасов Егор Александрович, к.ф.-м.н., б\з, доцент кафедры теоретической механики ММФ ТГУ, Томск пр. Ленина 36, 634050, 8913 842 90 88, Diomedis@mail.ru

Zinkevich Mikhail Stanislavovich, Student, TSU.

Tarasov Egor Aleksandrovich, PhD, Associate Professor, TSU.

© M. B. Ламуева, В. П. Воробьевева, В. И. Луцк

УЧАСТИЕ КРИМИНАНТЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ПАРАБОЛОИДА В КОНСТРУИРОВАНИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ ФАЗОВЫХ ДИАГРАММ

Аннотация. Гиперболический параболоид обладает такими геометрическими свойствами, которыми можно воспользоваться для моделирования поверхностей фазовых диаграмм. Поверхности Т-х-у диаграмм делятся на нелинейчатые границы одно- и двухфазных областей и линейчатые поверхности, ограничивающие трехфазные области. Нелинейчатую поверхность, контур которой состоит не более, чем из четырех линий, можно представить в виде гиперболического параболоида, задаваемого инженерным способом. В статье рассмотрена одна из важных геометрических характеристик гиперболического параболоида при моделировании фазовых диаграмм - его криминантные линии, связанные с построением внутри трехфазной области вспомогательной линейчатой поверхности коноидного типа, которая определяет состояния со сменой знака приращения массы одной из материальных точек. Показано, что криминанты гиперболического параболоида позволяют конструировать поверхность фазовой диаграммы, разделяющую трехфазную область на фрагменты с различным типом трехфазного превращения.

Ключевые слова: гиперболический параболоид, криминаната, Т-х-у диаграмма, трехфазное превращение.

© M. Lamuyeva, V. Vorob'eva, V. Lucik

USING THE CRIMINANT OF A HYPERBOLIC PARABOLOID IN THE CONSTRUCTION OF PHASE DIAGRAM SURFACES

Abstract. A hyperbolic paraboloid has such geometric properties that can be used to model the surfaces of phase diagrams. The surfaces of the T-x-y diagrams are divided into non-linear boundaries of one- and two-phase regions and linear surfaces bounding three-phase regions. A non-linear surface whose contour consists of no more than four lines can be represented as a hyperbolic paraboloid defined by an engineering method. The article considers one of the important geometric characteristics of a hyperbolic paraboloid when modeling phase diagrams - its criminal lines associated with the construction of an auxiliary conoid type linear surface inside a three-phase region, which defines states with a change in sign of the mass increment of one of the material points.

It is shown that criminants of a hyperbolic paraboloid make it possible to construct the surface of a phase diagram dividing a three-phase region into fragments with a different type of three-phase transformation.

Keywords: hyperbolic paraboloid, criminanata, T-x-y diagram, three phase conversion.

Введение

Фазовая диаграмма концентрирует в себе в неявном виде много сведений о результатах взаимодействия образующих ее компонентов. Для расшифровки скрытой в диаграмме информации необходимо построить и исследовать ее геометрическую модель. Поверхности Т-х-у диаграмм делятся на нелинейчатые границы одно- и двухфазных областей и линейчатые поверхности, ограничивающие трехфазные области. Если контур нелинейчатой поверхности состоит не более, чем из четырех линий, то такую поверхность можно описать координатами четырех базовых точек, соединенных прямыми линиями, то есть представить в виде гиперболического параболоида, задаваемого инженерным способом. Геометрическими свойствами гиперболического параболоида можно воспользоваться для моделирования поверхностей фазовых диаграмм. Рассмотрим одно из этих свойств, а именно, наличие у гиперболического параболоида криминанты при моделировании поверхностей фазовых диаграмм.

Участие криминанты в формировании поверхности двухфазной реакции в трехфазной области

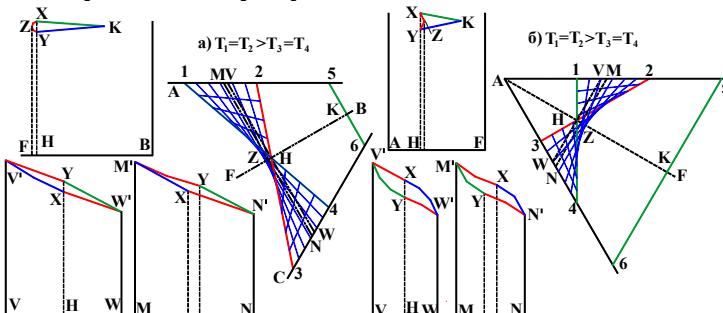


Рис. 1. Варианты сечений вертикальными плоскостями MN, VW, BF (или AF) ограничивающих трехфазные области поверхностей, задаваемых инженерным способом при $T_1=T_2>T_3=T_4$ (а) и $T_1=T_2<T_3=T_4$ (б): ($XZY \in 1234$, $XK \in 1456$, $YK \in 2356$; $V'Y, XW' \in 1234$, $V'X \in 1456$, $XW' \in 2356$; $M'Y, XN' \in 1234$, $M'Y \in 1456$, $XN' \in 2356$)

Одной из ограничивающих трехфазную область поверхностей является линейчатая поверхность, проекции направляющих которой пересекаются в ΔABC . Такая поверхность с контуром 1-2-3-4, горизонтальными образующими и направляющими 1-4, 2-3 и ее вертикальные разрезы представлены на рис. 1. Свойства этой поверхности на границе трехфазной области определяют способ конструирования вспомогательной поверхности, разделяющей два фрагмента трехфазной области с различными знаками приращения массы одной из трех материальных точек, которые возникают при прохождении их центра масс по температурной оси координат (рис. 2).

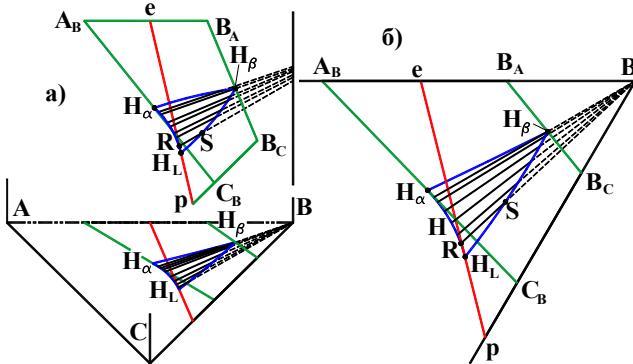


Рис. 2. Поверхность $H_\alpha H_\beta H_\gamma$ двухфазной реакции в трехфазной области (а) и ее проекция на концентрационный симплекс (б)

Взаимодействие трех фаз L , α и β может происходить по одной из двух реакций:



(Обычно буквой L обозначается расплав, а α и β - твердые фазы, однако в данном случае выбранные буквы обозначают просто три взаимодействующие фазы, независимо от их физических свойств). Фазовые реакции (1) и (2) отличаются тем, что знаки приращений массовых долей фаз L и α неизменны: $\Delta m_L < 0, \Delta m_\alpha > 0$, а у фазы β в реакции (1) это приращение положительно, а в реакции (2) – отрицательно. Приращение массовой доли реагента β может поменять знак прямо во время реакции. При смене знака, когда $\Delta m_\beta = 0$, трехфазное превращение

временно становится двухфазным $L \rightarrow \alpha$ в присутствии третьей фазы β .

Экспериментально такие ситуации были обнаружены в системах с различным характером взаимодействия трех фаз: Ti-Ru-Ir [19], Zr-Ru-Ir [20] (эвтектика меняется на перитектику), Na^+ , $\text{Co}^{2+}||\text{Cl}^-$, $\text{SO}_4^{2-}-\text{H}_2\text{O}$, Na^+ , $\text{Ni}^{2+}||\text{Cl}^-$, $\text{SO}_4^{2-}-\text{H}_2\text{O}$ [21] (замена эвтоники перитоникой), Fe-W-C, Fe-W-Co [22], Cu-Ni-Zn [23, цит. по 33] (вместо эвтектоидного превращения начинается перитекто-идное).

Долгое время считалось, что смена типа трехфазного превращения происходит при постоянной температуре. Для определения такой температуры использовался метод касательных [24-30]. Позднее на основе метода касательных предлагались и другие способы расчета условий смены типа фазовой реакции [6, 31], несмотря на доказательство того, что тип реакции изменяется не при постоянной температуре, а в некотором интервале температур [32].

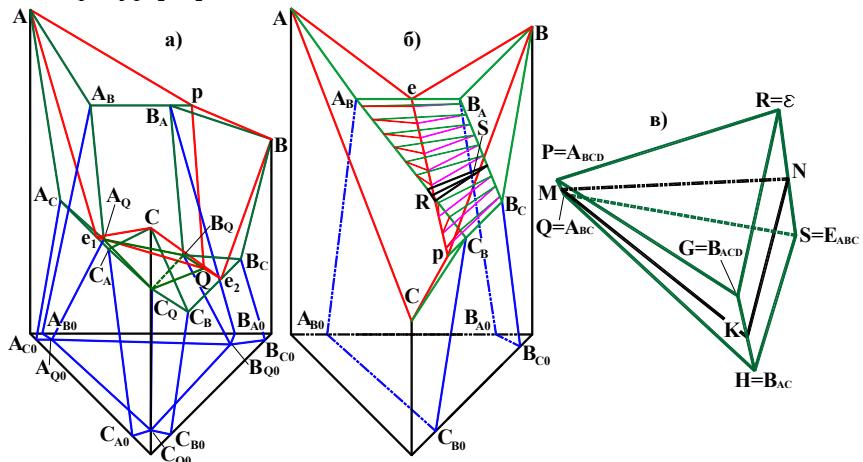


Рис. 3. Использование гиперболического параболоида для представления поверхностей фазовых диаграмм с нонвариантным (а) и моновариантным (б) превращениями, а также линейчатых гиперповерхностей с двумерной образующей (в)

Пусть трехфазную область ограничивают три линейчатые поверхности: $\text{A}_{\text{вер}}\text{C}_B$, $\text{A}_B\text{B}_A\text{B}_C\text{C}_B$ и $e\text{B}_A\text{B}_C\text{p}$ с направляющими e_p , A_BC_B , B_AB_C и горизонтальными образующими (рис. 3, б). Тогда трехфазное превращение начинается с реакции (1), а затем меняется на (2). В этом случае смена типа реакции начинается при такой

температуре, когда проекция горизонтального образующего отрезка поверхности АверС_В совпадает с проекцией направляющей А_ВС_В (или с касательной к проекции А_ВС_В, если эта линия – кривая) [32]. Аналогично, нижняя температура соответствует состоянию, при котором сливаются проекции образующего отрезка и направляющей ер (или ее касательной). Обозначим эти температуры как T_α и T_L , соответственно.

Позднее был предложен способ построения прямой RS, объединяющей все составы, у которых при температуре $T_L < T_c < T_\alpha \cdot \Delta m_\beta = 0$ (рис. 3,б) [33-35], где точка R этой прямой принадлежит образующему отрезку поверхности АверС_В.

Так как плоскостью параллелизма поверхности АверС_В является концентрационное основание призмы, то поверхность АверС_В описывает уравнение следующего вида:

$$H_3T^2 + T(H_5z_2 + H_6z_3 + H_9) + H_7z_2 + H_8z_3 + H_{10} = 0 \quad (3)$$

Поверхность задают базовые точки e($e_1, e_2, 0, T_e$), p(0, p_2, p_3, T_p), A_В($a_1, a_2, 0, T_e$), C_В(0, c_2, c_3, T_p), а условие $p_3=r_3=0$ упрощает ее коэффициенты до:

$$\begin{aligned} H_3 &= -c_3(p_2 - e_2) - (a_2 - c_2)p_3, H_5 = (p_3 - c_3)(T_e - T_p), \\ H_6 &= (a_2 - e_2 + c_3 - p_3)(T_e - T_p), H_7 = T_e(c_3 - p_3)(T_p - T_Q) \\ H_8 &= (T_e - T_p)[T_e(c_3 - p_3) - T_p(e_2 - a_2)], \\ H_9 &= T_e(p_3a_2 - e_2c_3 + 2p_3c_2 - 2p_3c_2) + T_p(p_3a_2 - e_2c_3) \\ H_{10} &= T_e^2(c_2p_3 - p_2c_3) + T_eT_p(p_3a_2 - e_2c_3). \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} M &= p_3c_2 - p_2c_3 = p_3(1 - c_3) - c_3(1 - p_3) = p_3 - c_3, N = p_3a_2 - e_2c_3, \\ K &= e_2 - a_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Тогда

$$\begin{aligned} H_1 &= M - N, H_2 = M(T_e - T_p), H_3 = (M + K)(T_e - T_p), \\ H_4 &= T_e(N - 2M) + T_pN, H_5 = -T_eM(T_e - T_p) \\ H_6 &= -(T_e - T_p)(MT_e + KT_p), H_7 = T_e(T_eM - T_pN) \end{aligned}$$

и уравнение поверхности принимает вид:

$$(M - N)T^2 + T[M(T_e - T_p)z_2 + (M + K)(T_e - T_p)z_3 + T_e(N - 2M) + T_pN] - \\ - T_eM(T_e - T_p)z_2 - (T_e - T_p)(MT_e + KT_p)z_3 + T_e(T_eM - T_pN) = 0 \quad (5)$$

Линии, на которой корни T_1 и T_2 решения (5) относительно температуры равны, соответствует равенство нулю дискриминанта уравнения поверхности (3):

$$(H_2z_2 + H_3z_3 + H_4)^2 - 4H_1(H_5z_2 + H_6z_3 + H_7) = 0$$

Это уравнение с учетом обозначений (4) и преобразований принимает вид:

$$M^2z_2^2 + (M + K)^2z_3^2 + 2M(M + K)z_2z_3 - 2MNz_2 - 2(MN + \\ + 2KM - KN)z_3 + N^2 = 0 \quad (6)$$

и описывает дискриминантную кривую, трехмерным прообразом которой является криминанта.

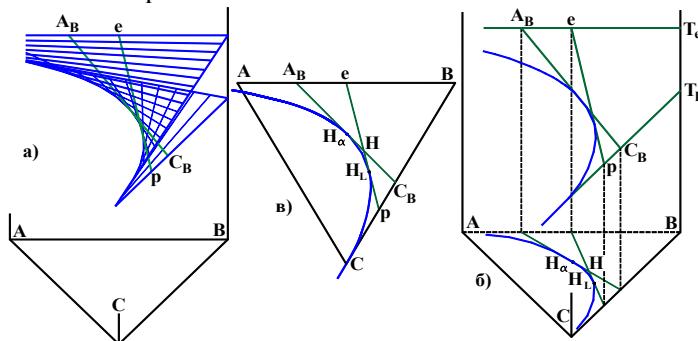


Рис. 4. Граница трехфазной области, формируемая направляющими ep , A_BC_B и горизонтальными образующими (а), ее криминанта (б) и дискриминантная кривая (в)

Таким образом, если представить границы трехфазной области в виде гиперболических параболоидов, то оказывается, что у поверхности $A_Be_C_B$ (рис. 4,а):

2) Если зафиксировать на прямой A_BC_B при T_α точку H_α , то проекция образующего отрезка именно при T_α сливаются с проекцией A_BC_B . Аналогично, именно при T_L проекция образующей, проходящей через точку $H_L \in ep$, совпадает с проекцией ep (рис. 4,в).

3) Касательная плоскость к поверхности $A_Be_C_B$, проходящая через проекцию A_BC_B вертикальна и касается поверхности в точке H . Аналогичная плоскость, построенная перпендикулярно

основанию призмы на проекции ер, касается поверхности в точке H_L .

4) Криминанта поверхности проходит через точки H_α и H_L , а проекция любой прямолинейной образующей поверхности АверС_В является касательной к дискриминантной кривой (рис. 4,а). Причем точкой касания является та самая точка R , из которой выходит прямая $\Delta m_\beta=0$ (рис. 3,б; рис. 2,а).

5) Из анализа уравнения линии $\Delta m_\beta=0$, построенной при температуре $T_L < T_c < T_\alpha$ [36-38], видно, что эта линия является горизонтальной прямой и продолжение ее проекции пересекает точку В концентрационного треугольника АВС (рис. 2,б).

Следовательно, чтобы подобрать состав трехкомпонентной смеси, в котором при заданной температуре $T_L < T_c < T_\alpha$ происходит замена типа фазовой реакции с (1) на (2), нужно при этой температуре зафиксировать одну точку на криминанте, вторую - на вертикали, построенной в точке В, и найти пересечение полученной прямой с одной из двух других поверхностей, ограничивающих трехфазную область. В любой точке на полученном отрезке смена типа трехфазного превращения происходит при данной температуре T_c .

Таким образом, внутри трехфазной области существует поверхность, которая разделяет область на фрагменты с различным типом фазового превращения (рис. 2). Эта поверхность является прямым коноидом. Она формируется горизонтальной образующей. Одной из направляющих является криминанта гиперболического параболоида, а вторая совпадает с ребром тригональной призмы.

Заключение

Одно из свойств гиперболического параболоида, а именно - наличие криминанты, позволило решить задачу определения условий смены типа трехфазного превращения. Оказалось, что криминанта является важной характеристикой смены типа фазового превращения.

Литература

1. Курс начертательной геометрии (на базе ЭВМ): Учебник для инж.-техн. вузов/ Тевлин А. М., Иванов Г. С., Нартова Л. Г.и др.; под ред. Тевлина А. М. М.: Высшая школа, 1983. 175 с.

2. Фролов С. А. Начертательная геометрия. М.: Машиностроение, 1983. 240 с.
3. Трунин Д. О., Луцый В. И. Уравнение косой плоскости с произвольным расположением образующих для моделирования Т-z1-z2 диаграмм //Математика и методы ее преподавания: Сб. ста-тей. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2001. Вып. 2. С. 60-63.
4. Воробьева В. П., Луцый В. И., Сумкина О. Г. Преобразование тройных диаграмм состояния при использовании различных координатных систем //Журн. неорган. химии. 1989. Т. 34. № 8. С. 2101-2106.
5. Луцый В. И. Анализ поверхности ликвидуса тройных систем. М.: Наука, 1987. 150 с.
6. Петров Д. А. Двойные и тройные системы. М.: Металлургия, 1986. 256 с.
7. Четверухин Н. Ф., Левицкий В. С., Прянишникова З. И., Тевлин А. М., Федотов Г. И. Курс начертательной геометрии. М.: Гос. изд-во технико-теоретич. лит-ры, 1956. 435 с.
8. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Аналитическая геометрия. Учебное пособие для вузов. М.: Наука. 1968.
9. Луцый В. И., Воробьева В. П., Сумкина О. Г. Моделирование фазовых диаграмм четверных систем. Новосибирск: Наука, Сиб.отд-ние, 1992. 198 с.
10. Gorman J. W., Hinman J. E. Simplex lattice designs for multicomponent systems //Technometrics. 1962. V. 4. № 4. P. 463-487.
11. Луцый В. И., Воробьева В. П., Мохосоев М. В., Сумкина О. Г. Аналитическое описание моновариантных линий приведенными полиномами //Докл. АН СССР. 1987. Т. 297. № 5. С. 1163-1167.
12. Расчет фазовых равновесий в многокомпонентных системах. Казаков А. И., Мокрицкий В. А., Романенко В. Н., Хитова Л. Под ред. Романенко В.Н. - М.: Металлургия, 1987. 136 с.
13. Глазов В. М., Павлова Л. М. Химическая термодинамика и фазовые равновесия М.: Металлургия, 1988. 559 с.
14. Палатник Л. С., Ландау А.И. Фазовые равновесия в многокомпонентных системах. Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1961. 405 с.
15. Петров Д. А. Четверные системы. Новый подход к построению и анализу. М.: Металлургия, 1991. 283 с.
16. Луцый В. И., Воробьева В. П. Моделирование, исследование и отображение фазовых диаграмм с эвтектическим типом взаимодействия //Геология и геофизика. 1998. Т. 39. № 9. С. 1218-1233.
17. Луцый В. И., Воробьева В. П., Сумкина О. Г. Компьютерное конструирование гетерогенных композиций четверной эвтектической системы по моделям границ ликвидуса. Гетерофазные области и их отображение на полимерических разрезах //Журн. неорган. химии. 1998. Т. 43. № 8. С. 1346-1357.
18. Федоров П. П., Бучинская И. И., Стасюк В. А., Бондарева О. С. Седловинные точки на поверхностях ликвидуса твердых растворов в

- системах PbF₂-CdF₂-RF₃ (R – редкоземельные элементы) //Журн. неорган. химии. 1996. Т. 41. № 3. С. 464-468.
19. В. Н. Еременко, В. Г. Хоружая, Т. Д. Штепа. Фазовые равновесия в области кристаллизации сплавов системы Ti-Ru-Ir //Порошковая металлургия, 1987. № 11. С. 72-77.
20. В. Н. Еременко, В. Г. Хоружая, Т. Д. Штепа. Строение сплавов и диаграмма фазовых равновесий системы Zr-Ru-Ir. II. Схема кристаллизации сплавов частичной системы Ru-ZrRu-ZrIr-Ir //Порошковая металлургия, 1985. № 5. С. 51-56.
21. Чарыков Н. А., Румянцев А. В., Чарыкова М. В. Топологический изоморфизм диаграмм растворимости и плавкости. Точки смены типа фазового процесса и линии постоянства химического потенциала компонента //Журн. физ. химии. 1998. Т. 72. № 11. С. 1936.
22. Kuo K. Metallography of Delta-Ferrite //J. of the Iron and Steel Institute. 1955. V. 181. P. 223-225.
23. Schramm J. Kupfer-Nickel-Zink-Legierungen. Wittenburg. Konrad Tritsch. 1935.
24. Мазинг. Г. Тройные системы. Элементарное введение в теорию тройных сплавов. М., Л.: Гл. ред. лит-ры по черной металлургии, 1935.
25. Тамман Г. Руководство по гетерогенным равновесиям. Л.: ОНТИ, ХИМТЕОРЕП, 1935.
26. Аносов В. Я., Погодин С. А. Основные начала физико-химического анализа. М., Л.: Изд-во АН СССР, 1947. 876 с.
27. Аносов В. Я., Озерова М. И., Фиалков Ю. Я. Основы физико-химического анализа. М.: Наука, 1976. 504 с.
28. Ricci. J.E. The Phase Rule and Heterogeneous equilibrium. New York: D. Van Norstand Comp. Inc., 1951. P. 226.
29. Vogel R. Die heterogenen Gleichgewichte. Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft, 1959. 728 s.
30. Райнз Ф. Диаграммы фазового равновесия в металлургии. М.: Металлургиздат, 1960. 369 с.
31. Халдояниди К. А. Моделирование взаимных переходов перитектического и эвтектического равновесий в двойных и тройных системах //Журн. физ. химии. 2000. Т. 47. № 10. С. 1761-1764.
32. Иванов О. С. К вопросу об определении состава двойной эвтектики, выделяющейся при данной температуре в тройных системах //Докл. АН СССР. 1945. Т. 49. № 5. С. 358-361.
33. Hillert M. Criterion for Peritectic and Eutectic Reactions //J. of the Iron and Steel Institute. 1958. V. 189. P. 224-226.
34. Hillert M. Criterion for Peritectic and Eutectic Reactions //J. of the Iron and Steel Institute. 1960. V. 195. P. 201-204.
35. Prince A. Alloy Phase Equilibrium. Amsterdam-London-N.Y.: Elsevier Publishing Company. 1966. 290 p.
36. Воробьева В. П., Луцый В. И. Методы анализа трехфазных эвтектико-перитектических превращений //Труды межд. науч. конф. "Перспективы развития естественных наук в высшей школе". Пермь, 2001. Т. 2. С. 183-187.

37. В. П. Воробьева, О. Г. Сумкина, В. И. Луцыйк. Построение поверхности смены типа трехфазного превращения при задании границ фазовой области прямолинейными направляющими //Труды Всероссийской конференции «Менделеевские чтения», Тюмень. 2005 //Тюмень: 2005. С. 88-91.

38. V. P. Vorob'eva, V. I. Lutsyk. Microstructure Design in Systems with Replacing the Eutectical Type Reaction by Peritectical //XV International Conference "Chemical Thermodynamics in Russia". Abstracts. Moscow: MSU, 2005. V. 2. P. 183.

Ламуева Марина Владимировна, аспирант, Институт физического материаловедения СО РАН, Россия, 670047, г.Улан-Удэ, ул.Сахьяновой, д. 6, тел.+79834298834, marina_bgu@mail.ru

Воробьева Вера Павловна, д.ф.-м.н, Институт физического материаловедения СО РАН, Россия, 670047, г.Улан-Удэ, ул.Сахьяновой, д. 6, vluts@ipms.bscnet.ru, тел. +7-(3012)-433224

Луцыйк Василий Иванович, дхн, профессор, Институт физического материаловедения СО РАН, Россия, 670047, г.Улан-Удэ, ул.Сахьяновой, д. 6, vluts@ipms.bscnet.ru, тел. +7-(3012)-433224

Lamueva Marina Vladimirovna, post-graduate student, Institute of Physical Materials Science SB RAS, 6 Sakhyanova st., Ulan-Ude, 670047 Russia, Tel +79834298834, marina_bgu@mail.ru

Vorob'eva Vera Pavlovna, PhD, Institute of Physical Materials Science SB RAS, 6 Sakhyanova st., Ulan-Ude, 670047 Russia, vluts@ipms.bscnet.ru, Tel +7-(3012)-433224

Lutsyk Vasiliy Ivanovich, PhD, Full Professor, Institute of Physical Materials Science SB RAS, 6 Sakhyanova st., Ulan-Ude, 670047 Russia, vluts@ipms.bscnet.ru, Tel +7-(3012)-433224

МАТРИЧНАЯ НАНОСТРУКТУРА И ЕЕ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Аннотация. В работе рассматривается наноструктура, простейшим элементом которой является бесконечная углеродная нить. Указанная структура исследуется на проницаемость молекулами метана и атомами гелия. В расчетах бесконечная нить аппроксимируется континуальной моделью. На основе классического потенциала Леннарда-Джонса получена формула потенциала взаимодействия цилиндрической нити с пробной молекулой. Предложена простейшая схема определения проницаемости структуры рассматриваемыми молекулярными частицами.

Проведенные молекулярно динамические расчеты позволили найти эффективные радиусы алмазных нанонитей по отношению к гелию и метану. Найдены также относительные доли молекул гелия и метана, прошедших через выделенную площадку в структуре. Рассчитана селективность окна проницаемости по отношению к метан-гелиевой смеси. Предельное расстояние сближения нанонитей составляет 0,3 нм.

Ключевые слова: природный газ, гелий, метан, нанонити, углеродные нанотрубки, дисперсная частица, континуальная модель, потенциал Леннарда-Джонса, проницаемость структуры.

© Т. Nekipelova

MATRIX NANOSTRUCTURE AND ITS PERMEABILITY

Abstract. In this paper, we consider the nanostructure with an endless nanowire as a basic element. Mentioned structure is examined for permeability by methane and helium molecules. In calculations a nanowire is approximated by a continuum model. The formula of the interaction potential between a test molecule and a cylindrical nanowire is obtained basing on the classical Lennard-Jones potential. The simplest way to determine permeability of structure by methane and helium molecules is recommended.

The molecular dynamic calculations made it possible to find the effective radii of diamond nanowires in relation to helium and methane. The relative proportions of helium and methane molecules that passed through the selected area in the structure were also found. The selectivity of the permeability window with respect to the methane-helium mixture was calculated. The maximum approach distance of nanowires is 0.3 nm.

Keywords: natural gas, helium, methane, nanowires, carbon nanotubes, disperse particle, continuum model, The Lennard-Jones potential, structure permeability.

1. ВВЕДЕНИЕ

Проницаемость и селективные свойства различных углеродных наноструктур изучены в работах [1-5, 7, 8]. В работе [3] предложена инженерная методика расчета проницаемости, не требующая статистики по отдельным пускам молекул.

В настоящей работе исследуются проницаемость и селективные свойства матричной углеродной структуры. Такая структура представляет систему параллельных слоев вертикальных и горизонтальных нитей (Рис.2).

Под относительной проницаемостью понимают долю прошедших молекул от числа падающих молекул на площадку «окна» (Рис.6). Отношение относительных проницаемостей $D(k_1)/D(k_2)$ соответствующих компонент k_1, k_2 газовой смеси называют селективностью «окна» в отношении первой компоненты газа k_1 .

2. УГЛЕРОДНАЯ СТРУКТУРА И ЕЕ ПРОНИЦАЕМОСТЬ

Взаимодействие элемента структуры с пробной молекулой определим потенциалом Леннарда-Джонса «12-6»

$$\Phi(r) = \frac{C_{12}}{r^{12}} - \frac{C_6}{r^6}, \quad (1)$$

где $C_6 = 4\epsilon\sigma^6$, $C_{12} = 4\epsilon\sigma^{12}$, ϵ – относительная глубина потенциальной ямы, σ – радиус влияния потенциала взаимодействия. Бесконечную нить аппроксимируется континуальной моделью [6]. На Рис.1 точка M представляет пробную молекулу, A , B – точки цилиндра, O – осевая точка цилиндра, $\rho = MA$, $z = AB$, $r = OM$, $a = OA$, $\varphi = \angle AOM$, $MB = \sqrt{\rho^2 + z^2}$. В этом случае потенциал воздействия на пробную молекулу от бесконечного сплошного цилиндра сводится к вычислению следующего интеграла:

$$\Phi(r) = \sum_{m=12,6}^{\frac{m}{2}} (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{C_m}{V_1} \int_0^a R \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\rho^2 + z^2)^{-\frac{m}{2}} dz \right) d\varphi dR \quad (2)$$

где $\rho^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \varphi$, $RdRd\varphi dz$ — элемент объема, V_1 — объем, приходящийся на одну молекулу цилиндрической нити. Потенциал взаимодействия углеродной структуры с молекулой газа определяется суммой элементарных потенциалов взаимодействия всех элементов структуры. Вычислим интеграл (2) с помощью пакета символьных вычислений Mathematica и обозначим его через $f(r)$:

$$f(r) = \frac{4\varepsilon\sigma^{12}\pi}{5760V_1(r^2-a^2)^8} \left(\frac{A_1}{r+a} E\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{4ar}{(r-a)^2}\right) + \frac{A_1}{r-a} E\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4ar}{(r+a)^2}\right) - A_2 \left((r+a)F\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{4ar}{(r-a)^2}\right) + (r-a)F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4ar}{(r+a)^2}\right) \right) \right) - \frac{4\varepsilon\sigma^4\pi}{12(a^2-r^2)^3} \left((a-r)(7a^2+r^2)E\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{4ar}{(r-a)^2}\right) - (r+a)^2 F\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{4ar}{(r-a)^2}\right) + (r+a)(-(7a^2+r^2)E\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4ar}{(r+a)^2}\right) + (r-a)^2 F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4ar}{(r+a)^2}\right)) \right), \quad (3)$$

где $F(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}$, $E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt$ — нормальные

эллиптические интегралы Лежандра 1-го и 2-го рода соответственно,

$$A_1 = 35r^8 + 4052a^2r^6 + 16434a^4r^4 + 11156a^6r^2 + 1091a^8,$$

$$A_2 = 35r^6 + 1287a^2r^4 + 2313a^4r^2 + 461a^6.$$

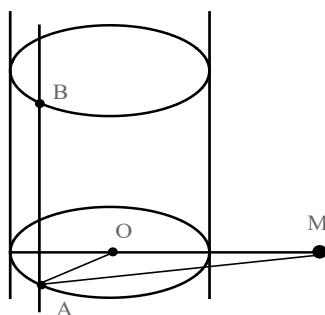


Рис.1. Цилиндрическая нанонить

Движение молекулы газа относительно углеродного пористого элемента описывается классическим уравнением движения

$$m \frac{dv}{dt} = F, \quad (4)$$

где m — масса молекулы газа, $\vec{F} = -gradf(r)$.

Изучение движения пробной молекулы газа сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{m} gradf(r), \\ \frac{dr}{dt} = v. \end{cases} \quad (5)$$

Формула производной потенциала (4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} df(r) = & \frac{4\pi\varepsilon\sigma^{12}}{640V_1r(r^2-a^2)^{10}} \left(B(r-a)(r^2+a^2)E\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{4ar}{(r-a)^2}\right) + \right. \\ & + (a+r) \left(B(a^2+r^2)E\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4ar}{(r+a)^2}\right) + \right. \\ & + C(a-r) \left((a+r)F\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{4ar}{(r-a)^2}\right) + (r-a)F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4ar}{(a+r)^2}\right) \right) \left. \right) \left. \right) + \\ & + \frac{4\pi\varepsilon\sigma^6}{4(a^2-r^2)^4} (D(a-r)E\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{4ar}{(a-r)^2}\right) - \\ & - (a+r) \left(D \times E\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4ar}{(a+r)^2}\right) - (r-a)(a^2+r^2) \times \right. \\ & \left. \times \left((a+r)F\left(\frac{\pi}{4}, -\frac{4ar}{(a-r)^2}\right) + (r-a)F\left(\frac{\pi}{4}, \frac{4ar}{(r+a)^2}\right) \right) \right)), \end{aligned} \quad (6)$$

где $B = 35a^8 + 5108a^6r^2 + 22482a^4r^4 + 5108a^2r^6 + 35r^8$,

$C = 35r^8 + 1748a^2r^6 + 4626a^4r^4 + 1748a^6r^2 + 35a^8$, $D = r^4 + 14a^2r^2 + a^4$.

Значения констант ε и σ , входящих в потенциал Леннарда-Джонса, для некоторых пар веществ приведены в таблице 1, где $k = 1.381 \times 10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Таблица 1
Константы потенциала Леннарда-Джонса

Взаимодействующие атомы и молекулы	Глубина потенциальной ямы	Радиус влияния потенциала
C–C	$\epsilon/k = 51.2 \text{ К}$	$\sigma = 0.335 \text{ нм}$
He–He	$\epsilon/k = 10.22 \text{ К}$	$\sigma = 0.2556 \text{ нм}$
CH ₄ –CH ₄	$\epsilon/k = 148 \text{ К}$	$\sigma = 0.3817 \text{ нм}$

Если система состоит из разнородных молекул, для параметров ϵ , σ справедливы следующие правила Лоренца-Бергло:

$$\epsilon_{12} = \sqrt{\epsilon_{11} \times \epsilon_{22}}, \quad \sigma_{12} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2}. \quad (7)$$

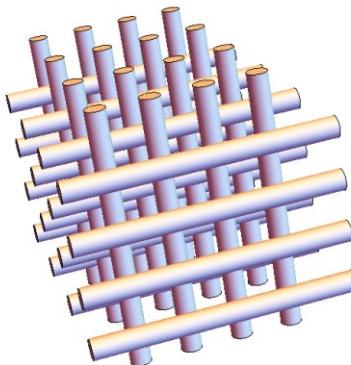


Рис. 2. Матричная наноструктура

Проницаемость углеродной структуры

Рассмотрим движение молекул вдоль оси туннеля (Рис. 3 - 5). Найдем относительные проницаемости молекул метана и гелия в углеродном слое. Для этого выделим «окно» проницаемости (Рис.6), представляющее собой квадрат со стороной h , где h - это расстояние между осями O_1 , O_2 и O_3 , O_4 цилиндрических нитей. Границы «окна» определяются величинами эффективных радиусов трубок по отношению к рассматриваемым компонентам. Эффективные радиусы определяются как половины предельных расстояний между осями цилиндров, обеспечивающих не

проходимость молекул и атомов в зазор между поверхностями цилиндров. Радиусы эффективного отталкивания r_{ϕ} для гелия и метана найдены экспериментально и приведены в таблице 2.

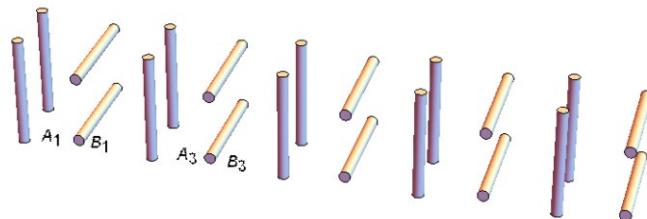


Рис. 3. Отдельный туннель наноструктуры

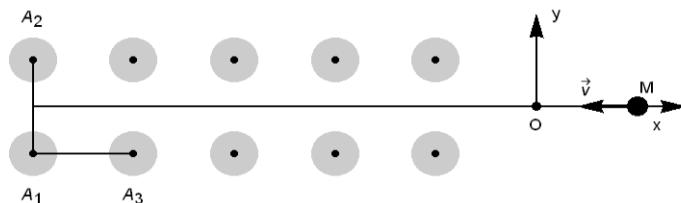


Рис. 4. Горизонтальные нити структуры: $A_1A_2 = 2a + 2b$, $A_1A_3 = 4a + 4b$,
 a — радиус цилиндра, $2b$ — размер поры

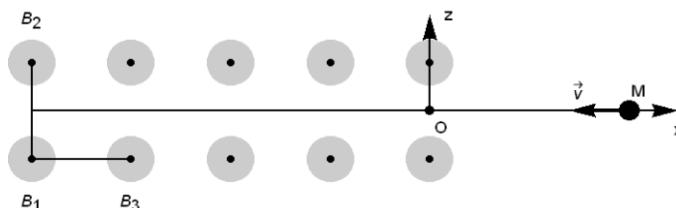


Рис. 5. Вертикальные нити: $B_1B_2 = 2a + 2b$, $B_1B_3 = 4a + 4b$,
 a — радиус цилиндра, $2b$ — размер порового пространства

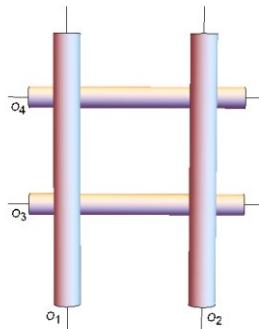


Рис.6. Окно проницаемости: $h = O_1O_2 = O_3O_4$.

Таблица 2

Эффективные радиусы для гелия и метана.
Радиус цилиндрической нити $a = 1\text{нм}$.

v m/c	$r_{\phi}(He)$ нм	$r_{\phi}(CH_4)$ нм
100	1.2123	1.2580
200	1.2119	1.2577
600	1.2082	1.2548
650	1.2076	1.2543
1100	1.2012	1.2487
1300	1.1983	1.2459
1600	1.1940	1.2417
2100	1.1874	1.2349
2600	1.1816	1.2286
2800	1.1795	1.2262
3000	1.1775	1.2240
3100	1.1766	1.2229

По данным таблицы 2 найдем интерполяционные многочлены для эффективных радиусов гелия и метана:

$$\begin{aligned}
 r_{\phi}^{He}(v) = & 1.21234 + 1.48422 \times 10^{-6} v - 2.11445 \times 10^{-8} v^2 + \\
 & + 1.82001 \times 10^{-11} v^3 - 1.60636 \times 10^{-14} v^4 + 1.31587 \times 10^{-17} v^5 - \\
 & - 7.29232 \times 10^{-21} v^6 + 2.41489 \times 10^{-24} v^7 - \\
 & - 43221 \times 10^{-28} v^8 + 3.21932 \times 10^{-32} v^9.
 \end{aligned} \tag{8}$$

- радиус эффективного отталкивания атома гелия,

$$\begin{aligned}
r_{\text{eff}}^{CH_4}(v) = & 1.25799 + 1.81547 \times 10^{-6} v - 1.95818 \times 10^{-8} v^2 + \\
& + 2.39513 \times 10^{-11} v^3 - 2.90935 \times 10^{-14} v^4 + 2.38571 \times 10^{-17} v^5 - \\
& - 1.17487 \times 10^{-20} v^6 + 3.3727 \times 10^{-24} v^7 - \\
& - 5.22352 \times 10^{-28} v^8 + 3.37991 \times 10^{-32} v^9.
\end{aligned} \quad (9)$$

- радиус эффективного отталкивания молекулы метана.

Графики интерполяционных многочленов изображены на Рис. 7. Точками на графиках отмечены экспериментальные данные из таблицы 2.

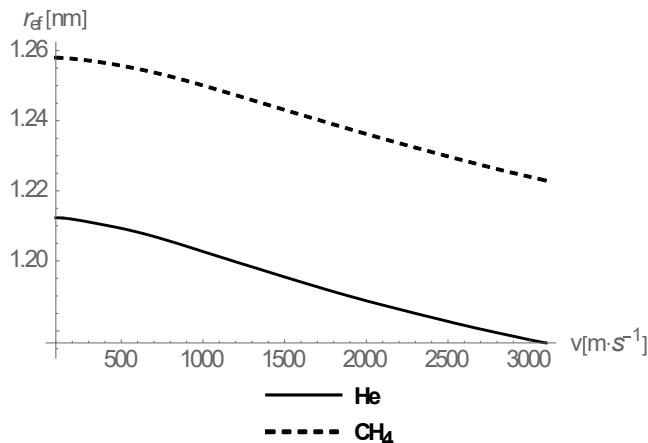


Рис.7. Графики интерполяционных многочленов радиусов эффективного отталкивания для гелия и метана

Найдем относительные значения величин проницаемостей молекулами гелия и метана по следующей формуле:

$$D = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\alpha^3} \int_0^\infty e^{-\alpha v^2} v^2 \frac{(h - 2r_{\text{eff}}(v))^2}{h^2} dv, \quad \alpha = \frac{m}{2kT}, \quad (10)$$

где m – молекулярная масса молекулы, k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура, h – расстояние между осями нитей.

Функции относительных проницаемостей молекулами гелия и метана углеродной структуры представлены формулами (11) и (12) соответственно:

$$\alpha_{(He)} = \frac{6.64 \times 10^{-27}}{2 \times 1.138 \times 10^{-23} \times 273}, \quad D_{(He)} = 1.86491 \times 10^{-9} \times \quad (11)$$

$$\times \left(5.35827 \times 10^8 + \frac{3.08515 \times 10^9}{h^2} - \frac{2.57142 \times 10^9}{h} \right),$$

$$\alpha_{(CH_4)} = \frac{2.7 \times 10^{-26}}{2 \times 1.138 \times 10^{-23} \times 273}, \quad D_{(CH_4)} = 1.52915 \times 10^{-8} \times \quad (12)$$

$$\times \left(6.53956 \times 10^7 + \frac{4.11683 \times 10^8}{h^2} - \frac{3.28159 \times 10^8}{h} \right).$$

Графики функций (11) – (12) изображены на Рис. 8.

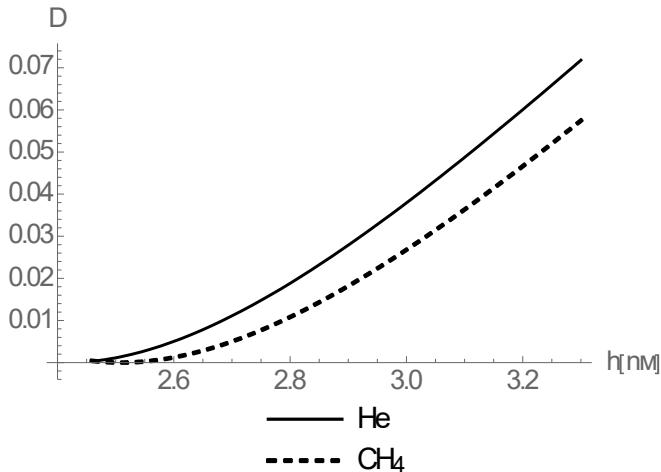


Рис. 8. Графики относительных проницаемостей молекулами гелия и метана.

Зная относительные проницаемости для молекул гелия и метана, найдем селективность окна по отношению к метан-гелиевой смеси по следующей формуле:

$$\chi(h) = \frac{D_{(He)}}{D_{(CH_4)}}. \quad (13)$$

Используя формулы (11)–(12), получим функцию селективности окна:

$$\chi(h) = \frac{D_{(He)}}{D_{(CH_4)}} = \frac{108.071 - 20.7839h + 0.999268h^2}{110.371 - 21.01h + h^2}. \quad (14)$$

На Рис.9 изображен график функции селективности (14).

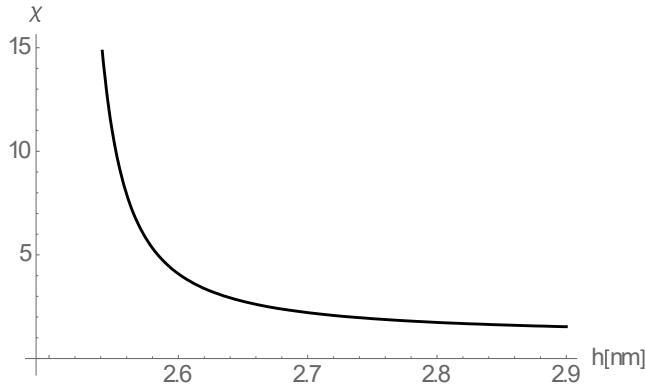


Рис. 9. График селективности.

Заключение

Проведенные молекулярно динамические расчеты позволили найти эффективные радиусы алмазных нанонитей по отношению к гелию и метану. Найдены также относительные доли молекул гелия и метана, прошедших через выделенную площадку в структуре. Рассчитана селективность окна проницаемости по отношению к метан-гелиевой смеси. Предельное расстояние сближения нанонитей составляет 0,3 нм.

Литература

1. Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Потекаев А. И., Либин Э. Е., Худобина Ю. П. Потенциальное поле углеродных тел как основа сорбционных свойств барьерных газовых систем. // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 58. № 7. С. 10—15.
2. Бубенчиков А. М. Разделение метано-гелиевой смеси с помощью пористого графена / А. М. Бубенчиков, М. А. Бубенчиков, Е. А. Тарасов, О. В. Усенко, А. С. Челнокова // Вестник Томского гос. ун-та. Математика и механика. 2017. № 45. С. 80—87.
3. Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Мамонтов Д. В., Челнокова А. С. Селективные свойства одной идеальной сэндвич

структурой в отношении метан-гелиевой смеси// Геометрия многообразий и ее приложения. Материалы пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова. Улан-Удэ, 2018. С. 89-97.

4. Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Мамонтов Д. В., Челнокова А. С. Проницаемость мембранны из плотно уложенных закрытых углеродных нанотрубок// Геометрия многообразий и ее приложения. Материалы пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова. Улан-Удэ, 2018. С. 98-108.

5. Жамбаа С., Усенко О. В. Проницаемость туннеля из сферических наночастиц // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. № 7. С. 10—15.

6. Рудяк В. Я. Статистическая аэрогидромеханика гомогенных и гетерогенных сред. Новосибирск: НГАСУ, 2004.

7. Шерстобитов А. А., Жамбаа С., Усенко О. В., Цыренова В. Б., Фирсов Д. К. Взаимодействие молекул с системой наночастиц // Известия высших учебных заведений. Физика. 2014. Т. 57. № 8/2. С. 210—214.

8. Тараков Е. А. Взаимодействие нанообъектов на основе углерода с компонентами природного газа. Томск: 2017. 121 с.

Некипелова Татьяна Ивановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, дискретной математики и прикладной информатики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: intavo@mail.ru

Nekipelova Tatyana Ivanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ПЛАСТА

Аннотация. Автором была разработана и реализована технология решения задач двухфазной фильтрации в деформируемых пластах. Реализация выполнена на примере модели Ван Генуктена для движения флюида и газа в пористых пластах и модели линейно-упругой деформации пористого пласта, содержащего флюид в различной степени насыщенности. Полученная вычислительная технология универсальна и позволяет производить дальнейшие обобщения математической модели, такие, как влияние влагонасыщенности на параметры упругости, или появление новых трещин в пласте.

Ключевые слова: пористый объем, анизотропная среда, двухфазная фильтрация, деформация, теория упругости, итерационно-разностная технология, математическая модель.

© S. Tsydypov

MATHEMATICAL MODEL OF TWO-PHASE FILTRATION DURING FORMATION DEFORMATION

Abstract. The author has developed and implemented a technology for solving two-phase filtration problems in deformable layers. The implementation was carried out using the Van Genuchten model as an example for the movement of fluid and gas in porous formations and the model of linear-elastic deformation of a porous formation containing fluid with varying degrees of saturation. The resulting computing technology is universal and allows further generalizations of the mathematical model, such as the effect of moisture saturation on elastic parameters, or the appearance of new fractures in the formation.

Keywords: porous volume, anisotropic medium, two-phase filtration, deformation, theory of elasticity, iterative-difference technology, mathematical model.

В работах [1]–[5] автором была описана математическая модель двухфазной фильтрации в анизотропных средах, разработана и протестирована вычислительная технология, позволяющая решать плоские и пространственные задачи двухфазной фильтрации

флюида и газа в пористых пластах. В данной работе представлено обобщение результатов предыдущих работ, рассматривается влияние деформации пласта на течение фильтрационных процессов в нем.

Пусть векторное поле перемещений найдено во всей рассматриваемой области, т.е. известны распределения $u(x,y,z)$, $v(x,y,z)$, $w(x,y,z)$ как результат решения упругой задачи в перемещениях.

Введем в рассмотрение эффективную плотность влаго и газонасыщенной среды:

$$p = (1 - s)\rho_0 + S\rho^F m + (1 - S)\rho^G m \quad (1)$$

Здесь ρ_0 - плотность материала, составляющего пористый каркас, S – влагонасыщенность, m – пористость, ρ^F и ρ^G - газовой фаз плотности жидкой (постоянные величины).

Величина эффективной плотности ρ может быть найдена из уравнения материального баланса, справедливого для каждой точки рассматриваемой области:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0$$

После того, как значение ρ найдено, пористость m может быть оформлена по формуле:

$$m = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho(1)}, \quad (2)$$

где $\rho(1) = S\rho^F + (1 - S)\rho^G$ – эффективная плотность перемещающейся среды (получается из (1) при $m=1$).

Отметим, когда в результате деформаций пористого каркаса поры схлопываются, формула (2) дает значение $m=0$. Более того, если деформации таковы, что начинает уплотняться материал каркаса, а мы, по-прежнему, для расчета пористости используем формулу (3), то следует брать $m=0$. Это означает, что в данной точке пространства поры уже схлопнулись и фильтрация отсутствует. Другими словами, пористость не может быть отрицательной величиной, что вполне отвечает фактическому положению дел. То же самое относится и к случаю возникновения явления «откола», для которого m ограничено верхним значением, то есть единицей.

Определение эффективной плотности внутри пласта и в разностных узлах на его границе

Для нахождения величины эффективной плотности вещества в области залегания угольной породы будем исходить из уравнения материального баланса, дополненного частной производной от плотности по итерационному параметру:

$$\frac{\partial \rho}{\partial S} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

Здесь S - безразмерный итерационный параметр.

Используя для внутренних точек плоскости симметричную аппроксимацию производных по всем пространственным направлениям и явную аппроксимацию производной по итерационному параметру, можем записать явное выражение для значения эффективной плотности на новом итерационном слое:

$$\tilde{\rho} = \rho - S \left(\frac{(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_{i-1}}{2dx} + \frac{(\rho v)_{j+1} - (\rho v)_{j-1}}{2dy} + \right. \\ \left. + \frac{(\rho w)_{k+1} - (\rho w)_{k-1}}{2dz} \right) \quad (4)$$

При записи рекуррентного соотношения (4) опущены несмещенные индексы, т.е. пара индексов из совокупности i, j, k , дополняющая эту совокупность до полной тройки. Волной отмечено значение плотности на новом слое по параметру S .

При определении значений плотности на гранях пласта (параллелепипеда) используются аналогичные соотношения, только с внутренними двусторонними разностями для производных по нормальной по отношению к выбранной грани координате. Таким образом, для значений эффективной плотности на всех шести гранях можем записать:

$$\tilde{\rho}_{1,,} = \rho_{1,,} - S \left(\frac{(\rho u)_2 - (\rho u)_1}{dx} + \frac{(\rho v)_{j+1} - (\rho v)_{j-1}}{2dy} + \right. \\ \left. + \frac{(\rho w)_{k+1} - (\rho w)_{k-1}}{2dz} \right)$$

$$\tilde{\rho}_{M,,} = \rho_{,1} - S \left(\frac{(\rho u)_M - (\rho u)_{M-1}}{dx} + \frac{(\rho v)_{j+1} - (\rho v)_{j-1}}{2dy} + \right. \\ \left. + \frac{(\rho w)_{k+1} - (\rho w)_{k-1}}{2dz} \right)$$

$$\tilde{\rho}_{,1} = \rho_{,1} - S \left(\frac{(\rho u)_{j+1} - (\rho u)_{j-1}}{2dx} + \frac{(\rho v)_2 - (\rho v)_1}{dy} + \right. \\ \left. + \frac{(\rho w)_{k+1} - (\rho w)_{k-1}}{2dz} \right)$$

$$\tilde{\rho}_{,N} = \rho_{,N} - S \left(\frac{(\rho u)_{j+1} - (\rho u)_{j-1}}{2dx} + \frac{(\rho v)_{N+1} - (\rho v)_{N-1}}{dy} + \right. \\ \left. + \frac{(\rho w)_{k+1} - (\rho w)_{k-1}}{2dz} \right)$$

$$\tilde{\rho}_{,,1} = \rho_{,,1} - S \left(\frac{(\rho u)_{j+1} - (\rho u)_{j-1}}{2dx} + \frac{(\rho v)_{j+1} - (\rho v)_{j-1}}{2dy} + \right. \\ \left. + \frac{(\rho w)_2 - (\rho w)_1}{dz} \right)$$

$$\tilde{\rho}_{,,K} = \rho_{,,K} - S \left(\frac{(\rho u)_{j+1} - (\rho u)_{j-1}}{2dx} + \frac{(\rho v)_{j+1} - (\rho v)_{j-1}}{2dy} + \right. \\ \left. + \frac{(\rho w)_{K+1} - (\rho w)_{K-1}}{dz} \right)$$

Здесь M,N,K – число шагов соответственно по направлениям x,y,z.

Для сходимости итераций по плотности мы проводим релаксацию по величине средней по всем точкам эффективной плотности:

$$\tilde{\rho} = \rho (\tilde{\rho}_{cp} - \rho_{cp})$$

Причем среднеарифметическая величина плотности находилась по формуле

$$\rho_{cp} = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^K \rho_{i,j,k}}{M \cdot N \cdot K}$$

Рассмотрим другой вариант расчета эффективной плотности пласта. Разрабатываемый итерационный алгоритм расчета плотности (на фоне уже найденных распределений u, v, w) должен сходиться к реальному распределению. Поэтому по мере продвижения по итерационной оси Os первое слагаемое в (3) должно уменьшаться. При определенном количестве итераций по

плотности мы в конце концов получаем $\frac{\partial \rho}{\partial S} = 0$. Это означает, что

уравнение сплошности приобретает обычный вид.

Частные производные, входящие в (3), распишем с учетом знаков перемещений так, чтобы обеспечить положительный коэффициент (в разностном аналоге уравнения сплошности) при значении плотности в центральном узле шаблона:

При $u_i > 0$ и с учетом того, что плотность всегда положительна, для аппроксимации частной производной по x можно использовать выражение:

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} \right)_i \approx \frac{(\rho u)_i - (\rho u)_{i-1}}{\Delta x} \quad (5)$$

Если же $u_i < 0$, то аппроксимация должна быть следующей:

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} \right)_i \approx \frac{(\rho u)_{i+1} - (\rho u)_i}{\Delta x}$$

Предположим, что участок $[i-1, i, i+1]$ является участком знакоопределенности для рассматриваемой компоненты перемещения. Тогда с учетом того, что $\rho > 0$, частную производную по x можно приближенно определить алгебраической суммой следующих слагаемых:

$$\left(\frac{\partial \rho u}{\partial x} \right)_i \approx \rho \frac{|u_i|}{\Delta x} + \rho \frac{|u_{i-1}| + |u_{i+1}|}{2 \Delta x} + \rho \frac{|u_{i+1}| + |u_{i+1}|}{2 \Delta x}$$

Аналогично, другие частные производные, входящие в уравнение материального баланса можно определить:

$$\left(\frac{\partial \rho v}{\partial y} \right)_i \approx \rho_i \frac{|v_i|}{\Delta y} + \rho_{i-1} \frac{v_{i-1} + |v_{i-1}|}{2\Delta y} + \rho_{i+1} \frac{v_{i+1} + |v_{i+1}|}{2\Delta y}$$

$$\left(\frac{\partial \rho w}{\partial z} \right)_i \approx \rho_i \frac{|w_i|}{\Delta z} + \rho_{i-1} \frac{w_{i-1} + |w_{i-1}|}{2\Delta z} + \rho_{i+1} \frac{w_{i+1} + |w_{i+1}|}{2\Delta z}$$

Частную производную по итерационному параметру аппроксимируем следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial S} = \frac{\tilde{\rho} - \rho}{\Delta S},$$

где $\tilde{\rho}$ - значение эффективной плотности на новом слое по времени. Подставляя аппроксимации всех производных в уравнение материального баланса получим для определения плотности в центральном узле шаблона следующие рекурентные соотношения:

$$\tilde{\rho} = \left(\begin{array}{l} \rho_{i-1} \frac{u_{i-1} + |u_{i-1}|}{2dx} - \rho_{i+1} \frac{u_{i+1} + |u_{i+1}|}{2dx} + \\ + \rho_{j-1} \frac{v_{j-1} + |v_{j-1}|}{2dy} - \rho_{j+1} \frac{v_{j+1} + |v_{j+1}|}{2dy} + \\ + \rho_{k-1} \frac{w_{k-1} + |w_{k-1}|}{2dz} - \rho_{k+1} \frac{w_{k+1} + |w_{k+1}|}{2dz} + \frac{\rho}{\Delta S} \end{array} \right) / \left(\begin{array}{l} \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y} + \\ + \frac{|w|}{\Delta z} + \frac{1}{\Delta S} \end{array} \right) \quad (6)$$

В соотношении (6) присутствуют лишь смешанные индексы. При этом полная запись предполагает наличие у каждой переменной трех индексов. Представленное соотношение позволяет существенно, по сравнению с ранее рассмотренным случаем, увеличить шаг ΔS , то есть добиться более быстрой сходимости итераций.

Литература

- Цыдыпов С. Г.-Ц. Построение математической модели двухфазной фильтрации в анизотропных средах / Бубенчиков А. М. // Геометрия многообразий и ее приложения – Улан-Удэ : Изд-во Бурятского госуниверситета, 2014. С. 75-81.

2. Цыдыпов С. Г.-Ц.Динамика газожидкостной среды в угольном пласте / Цыренова В. Б.,Бубенчиков А. М./ Вестник Бурятского государственного университета. Математика и информатика. - 2014-№1.- С. 53-60.
3. Цыдыпов С. Г.-Ц. Фильтрация газо-жидкостной среды в плоской горизонтальной области / Цыренова В. Б.,Бубенчиков А. М. // Вестник Томского государственного университета. Серия Математика и механика —2014. —№ 6 (32). —С. 59-65.
4. Цыдыпов С. Г.-Ц. Построение математической модели фильтрации газо-жидкостной среды в плоской горизонтальной области /Бубенчиков А. М.,Цыренова В. Б. // Геометрия многообразий и ее приложения —Улан-Удэ : Изд-во Бурятского госуниверситета, 2016. С. 119-128.
5. Цыдыпов С. Г.-Ц. Двухфазная фильтрация в трещиновато-пористой среде // Вестник Бурятского государственного университета - 2019.- №2 – С. 104-115

Цыдыпов Севан Гуро-Цыренович, ст. преподаватель кафедры алгебры, дискретной математики и прикладной информатики Бурятского государственного университета, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: sivan77@mail.ru

Tsydypov Sevan Guro-Tsyrénovich, Senior Lecturer, Banzarov Buryat State University

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

УДК 004.4

© E. A. Andreev, B. V. Xabituev

СПОСОБ ФОРМИРОВАНИЯ ЕДИНОЙ ОЦЕНКИ АКТИВНОСТИ СТУДЕНТА

Аннотация. В настоящее время одной из главных задач в учебном процессе университета, заключается в формировании цифрового портфеля студента. Такой портфель показывает статистику студента по различным активностям таким как: успеваемость, посещаемость, наука, культура, спорт и т.д. В Институте математики и информатики Бурятского государственного университета разработана система автоматического формирования цифрового портфеля. Важно отметить, что такая система формирует уровень по конкретной активности, тем самым цифровой портфель представляет собой набор нескольких уровней. Важно отметить, что сформированный портфель не даёт общую числовую оценку студента, тем самым нет возможности математически сравнивать студентов, производить классификацию и многое другое. В данной статье предложен способ формирования единой числовой оценки студента.

Ключевые слова: информационная система, интернет, базы данных, организация учебного процесса, студенческие активности, цифровой портфель, площадь Гаусса.

© E. Andreev, B. Khabituev

THE METHOD OF FORMING A SINGLE ASSESSMENT OF STUDENT ACTIVITY

Abstract. Currently, one of the main tasks in the educational process of the university is the formation of a digital portrait of a student. This portrait shows student statistics on various activities such as academic performance, attendance, science, culture, sports, etc. The Institute of Mathematics and Computer Science of Buryat State University has developed a system for automatically generating a digital portrait. It is important to note that such a system forms a level for a specific activity, thereby a digital portrait is a set of several levels. It is important to note that the generated portrait does not give a general numerical assessment of the student, thus there is no way to mathematically compare students, produce classification, and much more. This

article proposes a method of forming a unified numerical assessment of a student.

Keywords: information system, Internet, databases, educational process organization, student activities, digital portrait, Gauss square.

1. Введение

За последние годы возросла общественная активность студенческой молодежи. Выразилось это, прежде всего в развитии студенческого самоуправления. [1]. Из этого утверждения следует, что важнейшей задачей, в учебном процессе университета, является формирования цифрового портreta студента, в котором будут учтены такие студенческие показатели как: посещаемость, достижения в различных мероприятиях (научных, спортивных, культурных, учебных, общественных). В Институте математики и информатики Бурятского государственного университета разработана система автоматического формирования цифрового портreta [2]. Планируется, что система будет формировать цифровой портрет, на котором отражены уровни активностей студента по разным показателям. Сформированный портрет не дает общую числовую оценку студента. Таким образом, важной задачей стало, предложить способ, который будет формировать единую числовую оценку активности студента.

2. Постановка задачи

В 2020 году в Институте математики и Информатики Бурятского государственного университета была разработана система “Ежедневного внутрифакультетского анализа неявок и достижений” [3]. Эта система предоставляет функционал для учета данных о посещаемости студентов, а также рейтинга культурной общественной научной учебной и спортивной деятельности (далее КОНУС). Важной особенностью системы заключается в возможности добавлении дополнительных модулей для учета активностей. Из полученных данных об активностях планируется формировать цифровой портрет студента (см. рис 1).

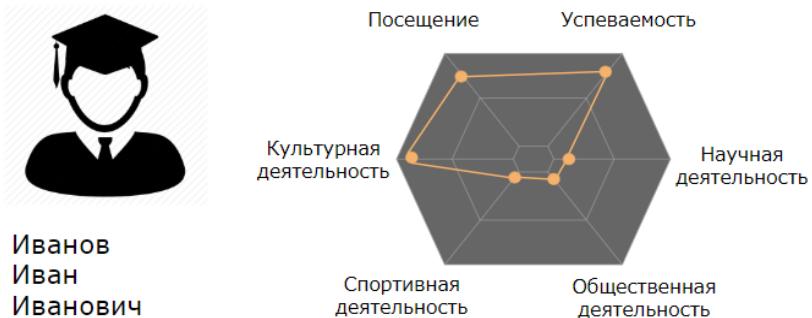


Рис.1. Визуализация цифрового портфеля студента

На рисунке 1 представлена визуализация цифрового портфеля студента. Цифровой портфель характеризуется достижениями студента по разным видам активностей. Чем больше достижений по конкретному виду активности, тем дальше точка располагается от центра фигуры.

В свою очередь цифровой портфель формируется следующим способом (см. рис 2)

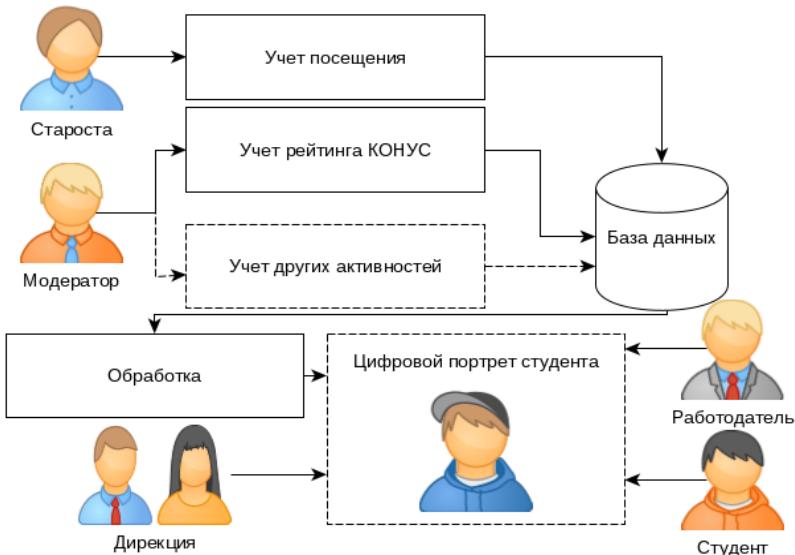


Рис.2. Формирование цифрового портфеля

Согласно рисунку 2, учетом конкретной активности занимаются определенные группы лиц. Все полученные данные передаются в модуль “Обработчик”, который формирует цифровой портрет студента.

На рисунке 1 показан вариант визуализации цифрового портreta студента. Подобная визуализация бывает полезна при работе с данными, однако стоит отметить, при массовой обработке данных (например, при ранжировании и составлении рейтингов) визуальное представление может быть не всегда применимо. В связи с чем возникает задача формирования числовой оценки данных об активностях студента (цифрового портreta).

3. Описание способа

Для формирования числовой оценки цифрового портreta был предложен способ вычисления площади фигуры сформированного цифрового портreta.

Для вычисления площади многоугольника на входе имеем следующие данные:

1. Количество вершин многоугольника n - количество активностей, по которым формируется цифровой портret.
2. n -мерный вектор неотрицательных вещественных чисел vec - уровни успеваемости студента по активностям.

Для вычисления будем использовать формулу площади Гаусса [4]. Формула может быть представлена следующим выражением:

$$S = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_{i+1} + x_n y_1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1} y_i - x_1 y_n \right|$$

Где:

S – площадь фигуры,

n – количество сторон многоугольника,

$$x_i = vec_i \cdot \cos\left(\frac{360}{n}\right)$$

$$y_i = vec_i \cdot \sin\left(\frac{360}{n}\right)$$

4. Заключение

Формирования единой числовой оценки цифрового портreta студента, является важной задачей в учебном процессе. Такая оценка позволит математически эффективно сравнивать студентов, осуществлять анализ, производить различные классификации.

На данный момент идет разработка и внедрения такого подхода в систему формирования цифрового портрета.

Литература

1. Дудин Е. И. Общественная активность студентов // Образование. Карьера. Общество. - 2019. - С. 50-51.
2. Андреев Е. А., Хабитуев Б. В. Система ежедневная внутри факультетского анализа неявок и достижений // Наука Технологии инновации: сборник научных трудов (Новосибирск, 02-06 декабря 2019 г.) /ред А. В. Гадюкиной. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2019. – С. 121-124.
3. Андреев Е. А., Хабитуев Б. В. Система ежедневная внутри факультетского анализа неявок и достижений //Сборник тезисов работ участников в XLV Всероссийской конференции обучающихся "ОБРЕТЁННОЕ ПОКОЛЕНИЕ - НАУКА, ТВОРЧЕСТВО, ДУХОВНОСТЬ" / Под. ред. А. А. Румянцева, Е. А. Румянцевой .-:НС "ИНТЕГРАЦИЯ", "ОФИЦЕРЫ РОССИИ", РПЦ, Минобрнауки России, Минпросвещения России, Минкультуры России, Минсельхоз России, Минздрав России, Минтранс России, РОСКОСМОС, РОСВОЕНЦЕНТР, РИА, РАО, 2020.- С. 151
4. Формула площади Гаусса [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://wi-ki.ru/wiki/Формула_площади_Гаусса (Дата обращения: 10.06.2020).

Андреев Евгений Андреевич, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, студент. Тел. 8-924-759-50-40. Email: gjhonic@gmail.com

Хабитуев Баир Викторович, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, ст.преп., зав. лаб. Тел. 8-924-010-11-76. Email: bairinc0@gmail.com

Andreev Evgenii Andreevich, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, student.

Khabituev Bair Victorovich, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, senior lecturer, laboratory chief.

СИНГУЛЯРНО-СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПУЛЬСОВОГО СИГНАЛА

Аннотация. В данной работе рассматриваются гармонические составляющие сфигмограммы пульсового сигнала, как один из перспективных источников информации, связанных с определенными психофизиологическими состояниями человека. Сфигмограмма есть графическое представление временного ряда, характеризующего динамику расширения участка артерии. Для ее получения используется специализированный диагностический комплекс регистрации пульсовых сигналов СДК (разработчик Дудин С.А.). Для извлечения гармонических составляющих сигнала применяется метод сингулярно-спектрального разложения матрицы временного ряда (Singular Spectrum Analysis). С помощью разработанного программного комплекса изучен гармонический спектр набора пульсовых сигналов. С помощью комбинирования «соседних» главных компонент сигналов выявлены три основные информативные гармоники. Первая гармоника почти всегда соответствует частоте сердечных сокращений. Остальные гармоники и их взаимодействие являются предметом будущих исследований.

Ключевые слова: сфигмограмма, сингулярно-спектральный анализ, гармоника, функциональная диагностика.

© A. Ayushiev, A. Tsybikov

SINGULAR-SPECTRAL ANALYSIS OF THE PULSE SIGNAL

Annotation. In this paper, the harmonic components of the pulse signal sphygmogram are considered as one of the promising sources of information related to certain psychophysiological States of a person. A sphygmogram is a graphical representation of a time series that characterizes the dynamics of the expansion of an artery section. To obtain it, a specialized diagnostic tool for registering pulse signals is used (developed By S. A. Dudin). To extract the harmonic components of the signal, the method of singular-spectral decomposition of the time series matrix (Singular Spectrum Analysis) is used. The harmonic spectrum of a set of pulse signals was studied using the developed software package. By combining the "neighboring" main components of the signals, three main informative harmonics were identified. The first harmonic

almost always corresponds to the heart rate. The remaining harmonics and their interaction are the subject of future research.

Keywords: sphygmogram, singular spectral analysis, harmonics, functional diagnostics.

Введение

На сегодняшний день существует множество аппаратно-программных комплексов функциональной диагностики позволяющие оценить состояние тех или иных органов и систем организма человека. Но зачастую многие из них имеют ряд недостатков, прежде всего это неэргономичность, неэкспрессивность, дороговизна оборудования, неполнота информации. В связи с этим, проблема разработки более эффективных методов комплексной оценки функционального состояния организма человека остается актуальной. В свете этого разработка аппаратно-программного комплекса обработки и анализа пульсовых сигналов представляется перспективным для многих специалистов и исследователей [4,5]. При этом одним из перспективных разделов по извлечению информативных признаков является анализ спектральных характеристик сигнала. Стандартным методам спектрального анализа, как правило, относятся преобразование Фурье, вейвлет-преобразование и анализ автокорреляций [6,7,8], которые уже широко применяются для подобных сигналов. Интерес представляет применение сингулярного разложения к матрице сдвигов временного ряда (SSA), который может выдать информацию по сути отличную от применения стандартных методов [2].

Сингулярно-спектрального анализа позволяет извлечь из сигнала латентные периодические компоненты и позволяет выявить индивидуальный набор гармоник. SSA широко и достаточно успешно применяется в различных областях, включая биомедицинскую обработку сигналов, экономику и финансы, обработку изображений, науку о Земле и гидрологию. Также метод может быть полезен для анализа данных со сложными сезонными закономерностями и нестационарными тенденциями, особенно в тех случаях, когда имеется одноканальное измерение. По сути SSA относится к непараметрическим методам и одним из его преимуществ является то, что он может быть использован без необходимости проверки предположений о стационарности и нормальности распределений данных. Вначале метод разлагает

временной ряд на три составляющие: тренд, гармоники и шум. Затем он реконструирует ряд, используя оцененные трендовые и гармонические компоненты, и вычисляет прогнозы на основе восстановленного ряда.

Математическое описание метода SSA

Процедура метод SSA, как правило, разбивается на четыре шага.

Шаг №1. Вложение. Выбирается параметр L «длинна окна». Далее происходит построение траекторной матрицы X , где $K = N-L$.

$$X = \begin{pmatrix} f_0 & \cdots & f_{K-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & \cdots & f_{N-1} \end{pmatrix}$$

Шаг №2. Разложение. В данном шаге строится матрица $S = XX^T$. Из полученной матрицы находятся собственные значения и вектора, для представления матрицы X , в виде суммы элементарных матриц.

$$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_d, \text{ где } X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$$

Шаг №3. Группировка. Полученное множество элементарных матриц, делится на непересекающихся подмножества. А элементы подмножества, представляющие собой матрицу, суммируются в одну результирующую матрицу.

Шаг №4. Диагональное усреднение. Результирующие матрицы, полученные из предыдущего шага, переводятся в новый ряд с помощью диагонального усреднения.

$$f_k^i = \begin{cases} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \tilde{X}_{k,k-i+1}, & \text{для } 1 \leq k \leq L \\ \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \tilde{X}_{k,k-i+1}, & \text{для } L \leq k \leq K \\ \frac{1}{N-k+1} \sum_{i=1}^{N-k+1} \tilde{X}_{i+k-K, K-i+1}, & \text{для } K \leq k \leq N \end{cases}$$

Сингулярно-спектральный анализ пульсовых сигналов

С целью автоматизации применения метода SSA для поступающих пульсовых сигналов, разработан программный модуль, который реализует данную технологию согласно следующей блок-схеме? изображенной на рисунке 1.

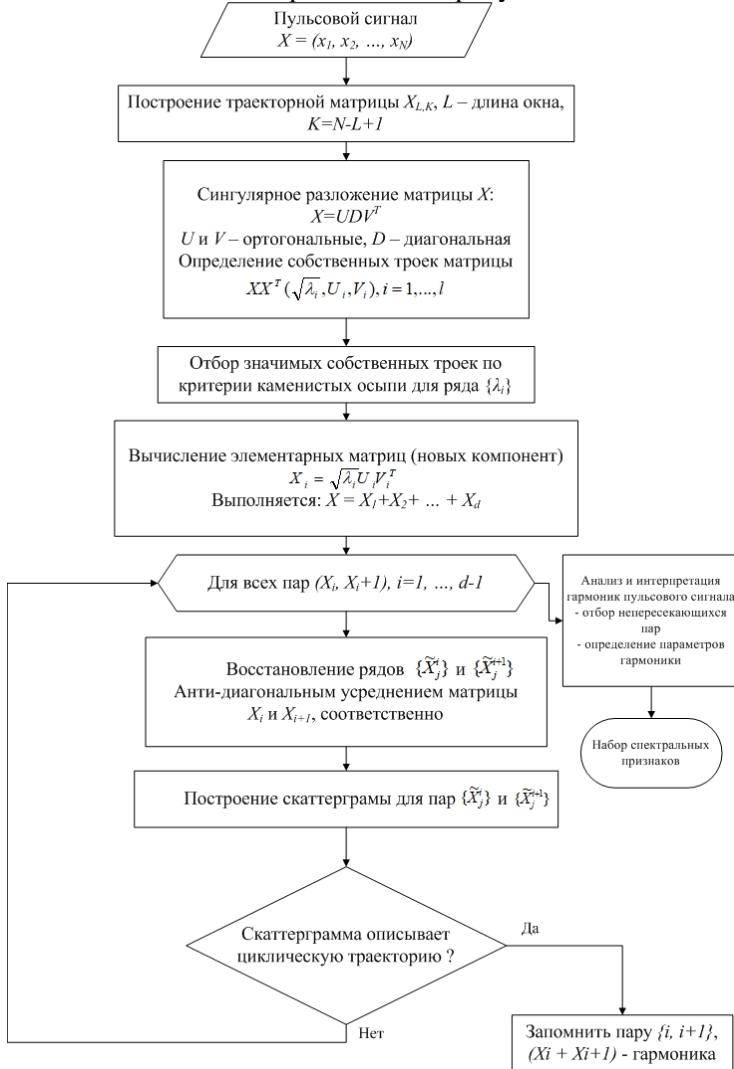


Рис. 1. Схема применения метода SSA для пульсовых сигналов

Пример исходного пульсового сигнала, имеющей длину $N=450$ отсчетов, представлен на рисунке 2.

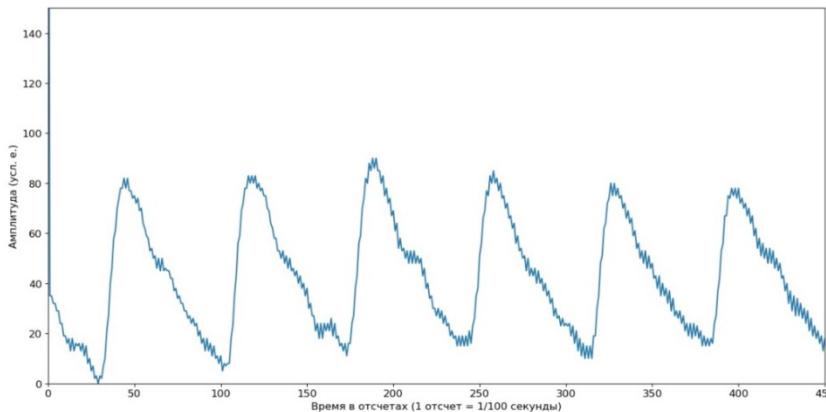


Рис. 2. Исходный пульсовой сигнал

Для достижения наиболее точного выделения гармонических колебаний, длина окна L выбирается большой, близкой к середине ряда. При $N = 450$ возьмем $L=200$.

Результатом применения сингулярного разложения является набор собственных значений, представленные на рисунке 3. Видно, что собственные числа близкие по значению образуют ступеньки. Это означает, что данная пара образует гармоническую составляющую ряда. В подтверждении, можно отобразить собственные вектора этих компонент на двумерных скаттеграммах. Также сингулярные вектора образуют графически хорошо различимые пары (типа фигур Лиссажу), представленные на рисунке 4. У данного временного ряда выделяются пять пар собственных значений, которые образуют главные компоненты сигнала. Начиная с 50-го номера, собственные значения постепенно убывают, не образуя ступенек. Это говорит, что эти компоненты являются шумовым составляющим сигнала.

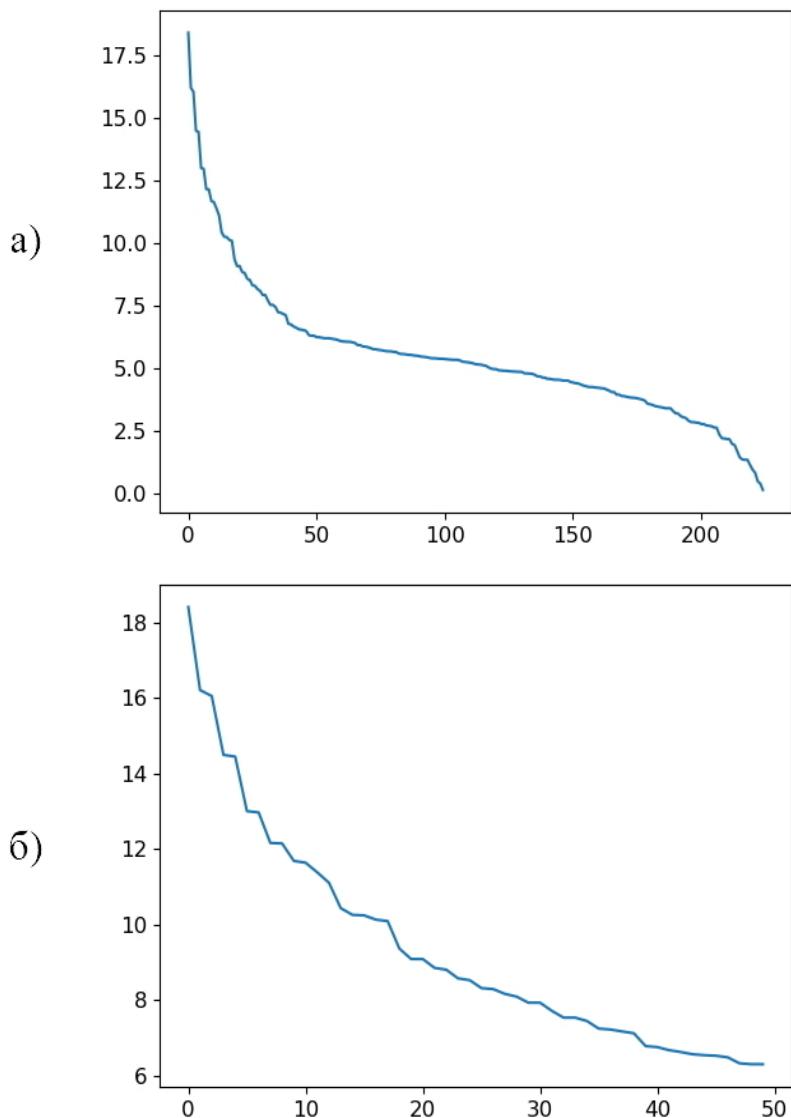


Рис. 3. Логарифмы собственных чисел: а) исходный набор б) без шумовых компонент (метод каменистой осьпи)

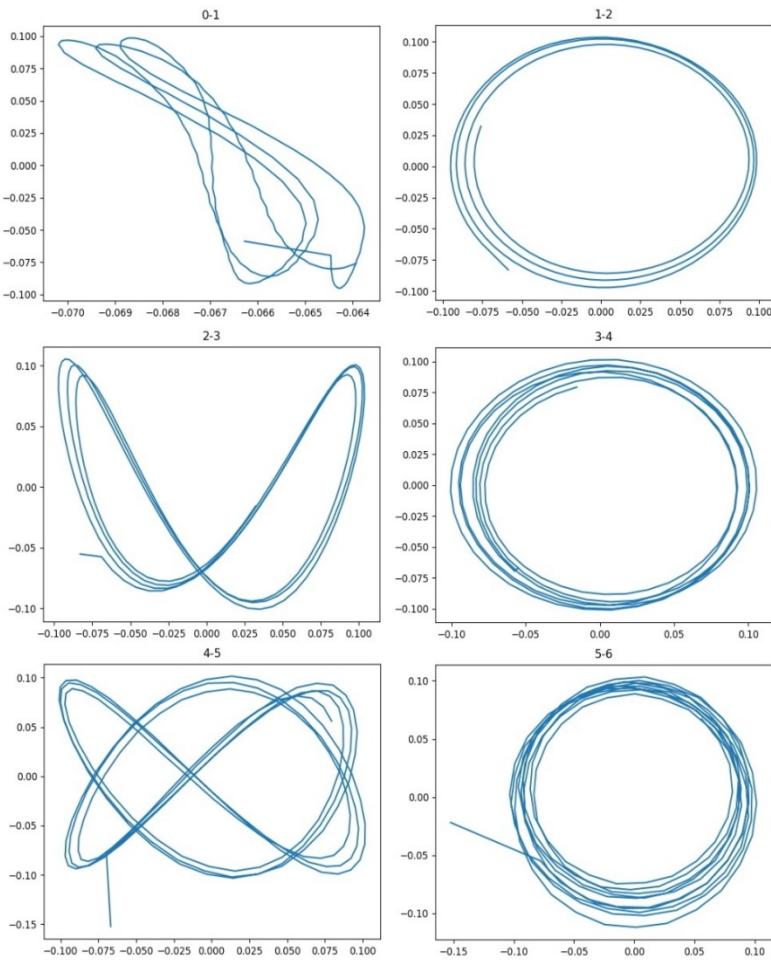


Рис. 4. Связь пар собственных векторов, образующие гармоники

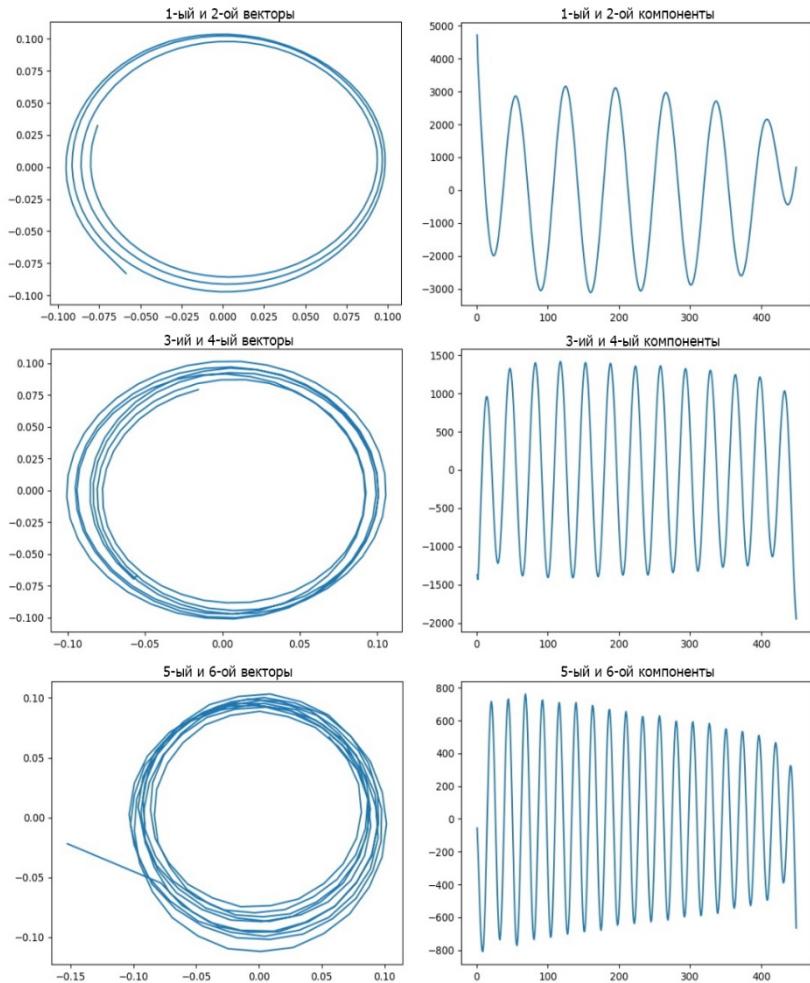


Рис. 5. Гармонические компоненты и их фазовые портреты

После выявления пар главных компонент, далее на рисунке 5 показана их визуализация, которые образуют гармоническую составляющую ряда. Также видно, что эти найденные гармоники имеют синусоидальное поведение, что подтверждает правильность выделений главных компонент сигнала. Дальнейшая задача состоит в интерпретации полученных гармоник, с целью извлечения информативных признаков.

На представленной ниже таблице, показаны периоды каждой выявленной гармоники.

Гармоника (пара компонент)	Период (в отсчётах)
1-2	69
3-4	34
5-6	23

Из полученных характеристик было проведены различные эксперименты. В результате, была найдена связь первой гармоники с частотой пульса человека.

- 1) $69 / 100 = 0,69$ с (период в секундах)
- 2) $1 / 0,69 = 1,449$ удар/сек
- 3) $1,449 * 60 = 86,94$ удар/мин

Полученный результат на 92,1% совпадает с реальными данными о состоянии частоты пульса человека. Но для полного удостоверения примерной точности с реальными данными, необходимо применить найденную формулу на других пульсовых сигналов.

В таблице приведены результаты применения метода SSA на других пульсовых сигналах.

№ сигнала	Период в отсчетах	Период в секундах $\frac{T}{c}$	Частота пульса (удар/мин) *60
1	74	0,74	81,1
2	98	0,98	61,2
3	97	0,97	61,8
4	73	0,73	82,2
5	75	0,75	80

В результате применения данного метода, с 85-93% вероятностью совпадают с реальными данными. Дополнительно проведены эксперименты на 100 различных сигналов. Итогом стало, что результаты лишь 3 сигнала, расходятся с реальными данными. Это подтверждает о том, что первая гармоника может определять частоту пульса человека с небольшой погрешностью.

Заключение

Итак, в данной проведен анализ гармонических составляющие сфигмограммы пульсового сигнала, как один из перспективных источников информации? связанных с определенными психофизиологическими состояниями человека. Разработан программный модуль сингулярно-спектрального разложения

пульсового сигнала на языке Python. Проведен анализ гармонического спектра набора пульсовых сигналов. Выявлено, что у большинства рассматриваемых пульсовых сигналов выделяется 3 пары главных компонент, образующих гармоники. Первая гармоника соответствует частотесердечных сокращений. Остальные гармоники и их взаимодействие являются предметом будущих исследований.

Литература

1. Бороноев В. В. / Пульсовая диагностика заболеваний в тибетской медицине: физические и технические аспекты / Бороноев В. В. // Улан-Удэ: Изд-во БНЦ СО РАН, 2005. – 250 с.
2. Браулов К. А. / Главные компоненты временных рядов: метод «Гусеница» / К. А. Браулов, Н.Э. Голяндина, В. В. Некрутин // Под ред. Д. Л. Данилов, А. А. Жиглявский– Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский университет, 1997. – 302 с.
3. Безручко Б. П. / Статистическое моделирование по временным рядам / Безручко Б. П., Смирнов Д. А. // Саратов: Учебно-методическое пособие – Издательство ГосУНЦ “Колледж”, 2000. – 23 с.
4. Цыбиков А. С. Математическое моделирование пульсовых волн на основе теории солитонов и уравнения Кортевега Де Фриза [Текст] / Т. Г. Дармаев, А. С. Цыбиков, Б. В. Хабитуев // Вестник Бурятского государственного университета – 2014. –Вып. 9(1) / 2014. –С. 35-39.
5. Раднаев Б. Б. ARIMA-модель пульсового сигнала [Текст] /Б. Б. Раднаев, А. С. Цыбиков, Б. В. Хабитуев // Вестник Бурятского государственного университета – 2017. – Вып. 1 – С. 78-85.
6. Задираха В. К. Теория вычисления преобразования Фурье / В. К. Задираха. – Киев: Наук. думка, –1983. – 213 с.
7. Воробьев В. И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В. И. Воробьев, В. Г. Грибунин. – СПб: ВУС, 1999. – 204 с.
8. Broersen P. M. T. AutomaticAutocorrelationandSpectralAnalysis. – London: Springer-Verlag. –2006. –295 с.

Аюшиев Амгалаан Бадмаевич, магистрант Института математики и информатики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, ayushiev2702@gmail.com, 8 (999) 603 10 76.

Цыбиков Анатолий Сергеевич – к. п. н., заведующий кафедрой «Информационных технологий», Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, г.Улан-Удэ, e-mail: cas313@rambler.ru

Ayushiev Amgalan Badmaevich, master's degree student of the Institute of mathematics and informatics, Banzarov Buryat State University.

Tsybikov Anatoly Sergeevich, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Department of Information Technology of the Banzarov Buryat State University, cas313@rambler.ru

ОБ ИНТЕРВАЛАХ МОНОТООННЫХ И САМОДВОЙСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ В РЕШЕТКЕ УЛЬТРАКЛОННОВ РАНГА 2⁷

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию классической для теории дискретных функций задачи описания решетки так называемых клонов – множеств функций, замкнутых относительно операции суперпозиции и содержащих все функции-проекции. Рассматриваются гиперфункции, определенные на двухэлементном множестве, и специальная суперпозиция, при которой множество всех гиперфункций образует H_2 – полный ультраклон ранга 2. В связи с трудностью решения задачи полного описания решетки клонов дискретных функций, во многом из-за того, что решетка в большинстве известных случаев континуальна, исследуется не вся решетка целиком, а только ее отдельные фрагменты, различные интервалы. В данной статье изучаются два интервала в H_2 , а именно $\mathfrak{I}(M, H_2)$ – интервал клонов, содержащих M – клон всех монотонных булевых функций, и $\mathfrak{I}(S, H_2)$ – интервал клонов, содержащих S – клон всех самодвойственных булевых функций. Показано, что каждый из этих интервалов содержит ровно 4 клона.

Ключевые слова: гиперфункция, булева функция, монотонная функция, самодвойственная функция, суперпозиция, замкнутое множество, клон, максимальный клон, ультраклон, решетка, интервал решетки.

© S. Badmaev, A. Dugarov, I. Fomina

ON INTERVALS OF MONOTON AND SELF-PROPERTY FUNCTIONS IN LATTICE OF ULTRACLONES OF RANK 2

Abstract. This work is devoted to the study of the classical for the theory of discrete functions problem of describing the lattice of so-called clones – sets of functions closed with respect to the superposition operation and containing all projection functions. We consider hyperfunctions defined on a two-element set

⁷ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект №18-31-00020

and a special superposition in which the set of all hyperfunctions forms H_2 is full ultraclose of rank 2. Due to the difficulty of solving the problem of a complete description of the lattice of clones of discrete functions, in particular, because the lattice is continual in most known cases, it is studied not the entire lattice, but only its individual fragments, different intervals. This article studies two intervals in H_2 , namely, $\mathfrak{I}(M, H_2)$ is the interval of clones containing M is the clone of all monotone Boolean functions, and $\mathfrak{I}(S, H_2)$ is the interval of clones containing S is the clone of all self-dual Boolean functions. It was shown that each of these intervals contains exactly 4 clones.

Keywords: hyperfunction, Boolean function, monotonous function, self-dual function, superposition, closed set, clone, maximal clone, ultraclose, lattice, interval of lattice.

Введение

В теории функций k -значной логики одно из основных направлений представляют исследования, связанные с подмножествами функций вместе с операцией суперпозиции. Традиционной задачей здесь является описание решетки замкнутых классов функций. Первые результаты в этом направлении были получены американским математиком Э. Постом [8], который полностью описал решетку замкнутых классов булевых функций.

Результаты, полученные в двузначной логике, способствовали дальнейшему развитию исследований теории функций k -значной логики. При этом выделяются два направления: первое связано с увеличением мощности основного множества, второе – с рассмотрением функций, которые определены не на всех наборах. Не всюду определенные функции удобно рассматривать как отображения из декартовой степени k -элементного множества A во множество всех его подмножеств, причем одноДементные подмножества отождествляются с элементами A , а остальные подмножества понимаются как неопределенности. Очевидно, что операция суперпозиции в обычном смысле для работы с этими функциями не подходит. Существует несколько способов расширения операции суперпозиции, каждый из которых позволяет находить значения суперпозиции на наборах с неопределенностями. В зависимости от вида и числа неопределенностей, а также измененной операции суперпозиции их называют частичными, недоопределенными, доопределяемыми, гиперфункциями, мультифункциями. Такие функции возникают при изучении многозначных логик, решении функциональных уравнений,

моделировании схем с неисправностями. Естественно, что и для них также ставится задача описания решетки клонов. Сложность полного решения этой задачи приводит к исследованию отдельных фрагментов решетки, различных интервалов. С некоторыми результатами, полученными для частичных функций, гиперфункций и мультифункций, можно ознакомиться в работах [1,4,5,6,7].

1. Основные понятия и определения

Пусть $E = \{0,1\}$ и $F = \{\{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$$H_{2,n} = \{f \mid f : E^n \rightarrow F\}, H_2 = \bigcup H_{2,n},$$

$$O_{2,n} = \{f \mid f : E^n \rightarrow E\}, O_2 = \bigcup_n O_{2,n}.$$

Функции из H_2 называются гиперфункциями на E , а из O_2 – булевыми функциями. Очевидно, что $O_2 \subset H_2$.

Для того чтобы суперпозиция $f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ определяла некоторую гиперфункцию $g(x_1, \dots, x_n)$ определим значения гиперфункции g на наборах из подмножеств множества E .

Если $(a_1, \dots, a_n) \in E^n$, то по определению

$$g(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \bigcap_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m); \\ \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m), \end{cases}$$

пересечение берется если оно не пусто, в противном случае берется объединение. Это определение позволяет вычислить значение гиперфункции на любом наборе $(a_1, \dots, a_n) \in F^n$.

Отметим, что в настоящей работе мы будем придерживаться терминологии, принятой в [3], что позволит нам здесь не вводить дополнительных определений.

Интервалом $\mathfrak{I}(Q, R)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех клонов, содержащих клон Q и являющихся подклонами клона R . Интервалы для наглядности представляются в виде диаграмм.

Пусть R^s s -местный предикат, заданный на множестве F . Будем говорить, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сохраняет предикат R^s , если

для любых наборов $(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{s1}), \dots, (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{sn})$ принадлежащих предикату набор $f(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \dots, f(a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn})$ принадлежит R^s .

Для упрощения записи договоримся использовать кодировку: $\{0\} \leftrightarrow 0, \{1\} \leftrightarrow 1, \{0,1\} \leftrightarrow -$.

В [3] доказано, что одними из максимальных ультраклонов ранга 2 являются следующие множества:

- 1) O_2 – множество всех булевых функций;
- 2) S^- – класс функций, сохраняющих предикат

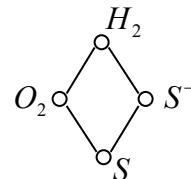
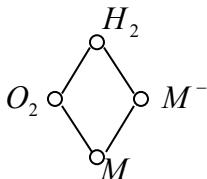
$$R_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix};$$

- 3) M^- – класс функций, сохраняющих предикат

$$R_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix}.$$

2. Основной результат

Теорема. Каждый из интервалов $\mathfrak{I}(M, H_2)$, $\mathfrak{I}(S, H_2)$ содержит ровно по 4 различных клона, а именно, клоны, представленные на диаграммах ниже.



Заключение

В данной работе получены результаты, относящиеся к решению классической задачи описания решетки клонов, а именно, получены описания интервалов решетки ультраклонов ранга 2, содержащие максимальные клоны булевых монотонных и самодвойственных функций. Показано, что каждый интервал состоит из 4 клонов. Поскольку мультифункции являются обобщениями гиперфункций, данные результаты будут необходимы при изучении интервалов мультифункций, которые содержат интервалы $\mathfrak{I}(M, H_2)$ и $\mathfrak{I}(S, H_2)$.

Литература

1. Алексеев В. Б., Вороненко А. А. О некоторых замкнутых классах в частичной двузначной логике // Дискретная математика. 1994. Т. 6, вып. 4. С. 58–79.
2. Марченков С. С. Замкнутые классы булевых функций. М: Физматлит, 2000. 128 с.
3. Пантелеев В. И. Критерий полноты для доопределляемых булевых функций // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер. 2009. Т. 2, № 68. С. 60–79.
4. Пантелеев В. И., Халтанова С. Ю. О некоторых интервалах в решетке клонов частичных ультрафункций // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2010. Т. 4. С. 80–87.
5. Халтанова С. Ю. О двух изоморфных интервалах в решетке ультраклонов ранга 2 // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 7. С. 133–140.
6. Doroslovački R., Pantović J., Vojvodić G. One interval in the lattice of partial hyperclones // Chechoslovak Mathematical Journal. 2005. Vol. 55, №130. P. 719–724.
7. Pantović J., Vojvodić G. On the partial hyperclone lattice // Proceedings of 35th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2005). 2005. P. 96–100.
8. Post E. L. Two-valued iterative systems of mathematical logic // Annals of Math. Studies. Princeton: Univ. Press. 1941. Vol. 5. 122 p.

Бадмаев Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры, дискретной математики и прикладной информатики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: badmaevsa@mail.ru

Дугаров Александр Евгеньевич, студент Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: dugarov_aleksandr@mail.ru

Фомина Ирина Владимировна, студент Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: fomina-irina0104@yandex.ru

Badmaev Sergey Alexandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Banzarov Buryat State University

Dugarov Aleksandr Evgenievich, Student, Banzarov Buryat State University

Fomina Irina Vladimirovna, Student, Banzarov Buryat State University

О КЛАССАХ И МИНИМАЛЬНЫХ БАЗИСАХ МУЛЬТИФУНКЦИЙ РАНГА 2⁸

Аннотация. Данная работа посвящена исследованию множеств мультифункций – функций, определенных на некотором k -элементном множестве и принимающих в качестве значений любые подмножества этого множества. Дискретные функции, как правило, рассматриваются с некоторым оператором замыкания, которым традиционно является оператор суперпозиции. Очевидно, что для мультифункций необходимо расширить понятие суперпозиции. В данной работе рассматривается один из вариантов суперпозиции, при которой множество всех мультифункций образует полный частичный ультраклон ранга 2.

В теории дискретных функций, одной из важнейших является задача классификации функций. Широко известен вариант классификации, основанный на принадлежности функций предполным классам. В данной работе проведена классификация всех мультифункций относительно принадлежности предполным классам полного частичного ультраклона ранга 2. Отношение принадлежности предполным классам является отношением эквивалентности и порождает соответствующее разбиение на классы эквивалентности. В результате компьютерного эксперимента и путем выявления специальных свойств мультифункций, решена задача описания всех классов эквивалентности, общее число которых равно 91. С использованием данного описания было выяснено, что имеется 1 тип минимальных базисов мощности 1, 690 типов минимальных базисов мощности 2, 7940 типов минимальных базисов мощности 3, 2830 типов минимальных базисов мощности 4, минимальных базисов большей мощности не существует.

Ключевые слова: мультифункция, суперпозиция, замкнутое множество, клон, максимальный клон, частичный ультраклон, классификация, минимальный базис.

© S. Badmaev, I. Sharankhaev

ON CLASSES AND MINIMAL BASES OF MULTIFUNCTIONS OF RANK 2

Abstract. This work is devoted to the study of sets of multifunctions – functions defined on some k -element set and taking any subsets of this set as

⁸ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ проект №18-31-00020

values. Discrete functions, as a rule, are considered with some closure operator, which is traditionally the superposition operator. Obviously, for multifunctions it is necessary to expand the concept of superposition. In this paper, we consider one of the superposition variants in which the set of all multifunctions forms a full partial ultraclone of rank 2.

In the theory of discrete functions, one of the most important is the task of classifying functions. The classification option based on membership of functions to complete classes is widely known. In this paper, we classify all multifunctions with respect to belonging to precomplete classes of a full partial ultraclone of rank 2. The membership relation to precomplete classes is an equivalence relation and generates the corresponding partition into equivalence classes. As a result of a computer experiment and by revealing the special properties of multifunctions, the problem of describing all equivalence classes, the total number of which is 91, has been solved. Using this description, it has been found that there is 1 type of minimal power bases 1, 690 types of minimal power bases 2, 7940 types of minimal bases of power 3, 2830 types of minimal bases of power 4, minimal bases of greater power do not exist.

Keywords: multifunction, superposition, closed set, clone, maximal clone, partial ultraclone, classification, minimal basis.

Введение

Расширением класса функций k -значной логики являются недоопределенные функции. Функции такого типа могут моделировать ситуации неопределенности или запретности информации. Область значений таких функций удобно интерпретировать как множество подмножеств множества $A = \{0, 1, \dots, k - 1\}$, при этом одноэлементные подмножества отождествляются с элементами A , а остальные подмножества понимаются как неопределенности. В зависимости от вида неопределенностей такие функции называют частичными функциями, гиперфункциями, мультифункциями. Для мультифункций, как правило, рассматривается два вида суперпозиции: в основе первого лежит объединение подмножеств множества A , и в этом случае замкнутые множества, содержащие все проекции, называются мультиклонами, а в основе второго – пересечение подмножеств множества A , и замкнутые множества, содержащие все проекции, называются частичными ультраклонами.

В теории функций важное место занимают задачи их классификации. Одним из наиболее известных подходов к решению задач классификационного характера является тот, при котором

функции могут быть разбиты согласно их принадлежности предполным классам. В настоящей работе рассматривается множество всех мультифункций на двухэлементном множестве, и при этом предполными классами являются максимальные частичные ультраклоны. С использованием данного разбиения можно оценить мощности всевозможных базисов и описать все типы базисов.

1. Основные понятия и определения

Пусть $A = \{0,1\}$ и $B = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$$P_{2,n}^{\bar{*}} = \left\{ f \mid f : A^n \rightarrow F \right\}, P_2^{\bar{*}} = \bigcup_n P_{2,n}^{\bar{*}},$$

$$P_{2,n}^* = \left\{ f \mid f \in P_2^{\bar{*}}, |f(\tilde{\alpha})| \leq 1, \forall \tilde{\alpha} \in A^n \right\}, P_2^* = \bigcup_n P_{2,n}^*,$$

$$P_{2,n}^- = \left\{ f \mid f \in P_2^{\bar{*}}, 1 \leq |f(\tilde{\alpha})| \leq 2, \forall \tilde{\alpha} \in A^n \right\}, P_2^- = \bigcup_n P_{2,n}^-,$$

$$P_{2,n} = \left\{ f \mid f \in P_2^{\bar{*}}, |f(\tilde{\alpha})| = 1, \forall \tilde{\alpha} \in A^n \right\}, P_2 = \bigcup_n P_{2,n}.$$

Функции из $P_2^{\bar{*}}$ называют мультифункциями на A .

Суперпозиция мультифункций $f(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$ определяет некоторую мультифункцию $g(x_1, \dots, x_n)$ по следующему правилу:

$$g(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \bigcap_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m); \\ \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_n)} f(b_1, \dots, b_m), \end{cases}$$

для любого набора $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$. Если набор, содержит пустое множество, то значение мультифункции на этом наборе будет равняться пустому множеству.

В дальнейшем используется следующая кодировка: $\emptyset \leftrightarrow *, \{0\} \leftrightarrow 0, \{1\} \leftrightarrow 1, \{0,1\} \leftrightarrow -$.

Для того, чтобы не вводить некоторых определений, будем использовать терминологию из [1].

2. Основной результат

Теорема 1. [2] Имеется в точности 15 классов эквивалентности функций из P_2 , где в качестве отношения эквивалентности рассматривается отношение принадлежности максимальным частичным ультраклонам.

Теорема 2. [3] Имеется в точности 49 классов эквивалентности функций из P_2^* , где в качестве отношения эквивалентности рассматривается отношение принадлежности максимальным частичным ультраклонам.

Теорема 3. [4] Имеется в точности 28 классов эквивалентности функций из P_2^- , где в качестве отношения эквивалентности рассматривается отношение принадлежности максимальным частичным ультраклонам.

Теорема 4. Имеется в точности 29 классов эквивалентности функций из $P_2^* \setminus (P_2^- \cup P_2^*)$, где в качестве отношения эквивалентности рассматривается отношение принадлежности максимальным частичным ультраклонам.

Теорема 5. Имеется в точности 91 класс эквивалентности мультифункций, где в качестве отношения эквивалентности рассматривается отношение принадлежности максимальным частичным ультраклонам.

Заключение

Полное описание классов эквивалентности, полученное в теореме 5, позволяет дать описание всех типов минимальных базисов. С помощью программы на языке C++ нами были подсчитаны все типы, оказалось, что имеется 1 тип для мощности 1, 690 типов мощности 2, 7940 типов мощности 3, 2830 типов мощности 4, минимальных базисов большей мощности нет.

Литература

1. Бадмаев С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 // Сиб. электрон. матем. изв. 2018. Т. 15. С. 450–474.

2. Бадмаев С. А. О классах булевых функций, порожденных максимальными частичными ультраклонами // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2019. Т. 27. С. 3–14.

3. Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К. О классах частичных функций, порожденных максимальными частичными ультраклонами // Сиб. электрон. матем. изв. 2020. Т. 17. С. 32–46.

4. Badmaev S. A. Classification of Hyperfunctions of Rank 2 with Respect to Membership in the Maximal Partial Ultraclones. Journal of Siberian Federal University. Math. and Phys. 2019. Vol. 12. Pp. 645–652.

Бадмаев Сергей Александрович, кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры алгебры, дискретной математики и прикладной информатики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: badmaevsa@mail.ru

Шаранхаев Иван Константинович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры, дискретной математики и прикладной информатики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: goran5@mail.ru

Badmaev Sergey Alexandrovich, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Banzarov Buryat State University

Sharankhaev Ivan Konstantinovich, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА «СТУДЕНЧЕСКИЙ ДЕКАНАТ»

Аннотация. В статье описано применение информационной системы для организации студенческих консультаций, в которых консультантами выступают студенты.

Консультации являются важной частью обучения студентов. Консультации помогают студентам восполнить пробелы по освоению учебной программы, и углубится в изучении интересующей дисциплины.

Чаще всего в вузах проводятся только предэкзаменационные консультации. Однако в вузах есть сложность проведения регулярных консультаций с преподавателями, которая связана с тем, что они не включаются в педагогическую нагрузку.

Если трудности организации консультаций с преподавателем устраниить достаточно проблематично, то обязанности консультанта можно делегировать студентам, например, студентам старших курсов. Многие специалисты отмечают, что подобная активность будет полезна не только консультируемым, но и самим консультантам, так как поможет глубже освоить материал.

Ключевые слова: информационная система, интернет, базы данных, организация учебного процесса.

© M. Donilenko, B. Khabituev

INFORMATION SYSTEM «STUDENT DEANERY»

Abstract. The article describes the use of an information system for organizing student consultations in which students act as consultants.

Counseling is an important part of student learning. Consultations help students fill in the gaps in mastering the curriculum, and will delve into the study of the discipline of interest.

Most often, only consultations before examinations are held at universities. However, in universities, there is the difficulty of conducting regular consultations with teachers, which is since they are not included in the teaching load.

If the difficulties of organizing consultations with a teacher are difficult to eliminate, then the duties of a consultant can be delegated to students, for example, senior students. Many experts note that such activity will be useful not

only to consultants but also to the consultants themselves, as it will help to master the material more deeply.

Keywords: information system, Internet, databases, educational process organization.

1. Введение

В «Студенческом деканате» Института математики и информатики (далее ИМИ) Бурятского государственного университета, консультации для студентов проводят студенты старших курсов.

Работу «Студенческого деканата» обеспечивают:

1. Директор - студент ИМИ, который осуществляет связь с деканом и преподавателями.
2. Дежурные - студенты ИМИ, которые производят прием заявок от студентов и подбор консультантов.
3. Консультанты - студенты ИМИ, которые оказывают помощь по усвоению учебного материала студентам.

Организация консультаций в «Студенческом деканате» подразумевает: подачу заявки от студента, подбор консультанта, оповещение консультанта, выбор времени, удобного для консультанта и студента, проведение консультации и составление отчета. Отчет о проведенных консультациях подается в деканат ИМИ. В зависимости от количества проведенных консультаций, у консультантов повышается количество рейтинговых баллов «КОНУС» («КОНУС» - это балльно-рейтинговая система, использующаяся в ИМИ для поощрения активности студентов). В связи с этим возникает проблема, системной организации и учета консультаций.

2. Постановка задачи

При организации консультаций в «Студенческом деканате» возникают следующие проблемы:

1. Если дежурного не оказывается на дежурстве, то студент не может подать заявку на консультацию.
2. Процесс подбора консультанта может затянуться, если тема консультации имеет повышенную сложность.
3. Заполнение отчета является для консультантов затратным по времени процессом, так как отчеты заполняются вручную.

Также стоит отметить, что возможна ситуация, когда на консультацию по одной теме хотят записаться несколько студентов.

Тогда дежурный должен записывать их на уже назначенную консультацию, но чем больше консультаций и студентов, тем сложнее дежурному контролировать записи.

Частично решить описанные проблемы можно при помощи внедрения информационной системы. В связи с этим, нами было принято решение разработать информационную систему для организации консультаций.

Анализ проблем позволил выявить требования к системе:

1. Система должна публиковать список предстоящих консультаций в сети Интернет.
2. Система должна обеспечивать пользователям возможность удаленного назначения консультаций и записи на них.
3. Система должна формировать отчеты по проведенным консультациям.

3. Описание способа решения задачи.

Для помощи в организации консультаций была реализована ИС «Студенческий деканат».

Для этого был проведен анализ работы «Студенческого деканата». В результате анализа были описаны основные роли пользователей в системе:

1. «Консультанты» - пользователи, которые могут назначать консультации.
2. «Студенты» - пользователи, которые могут записываться на консультации и оставлять заявки на создание новых консультаций.
3. «Администратор» - пользователь, который может назначать Консультантов и получать отчеты о проведенных консультациях.

В связи с этим, в системе реализована ролевая модель авторизации. Ролевая модель позволяет управлять доступом пользователей к функционалу системы, в зависимости от их роли.

Были выделены основные модули и построена архитектура системы. В систему входят «Модуль аутентификации и авторизации», модуль «Личный кабинет», «Модуль работы с консультациями» и «Модуль работы с отчетами». Схема взаимодействия модулей представлена на рисунке 1.



Рис. 1. Схема взаимодействия модулей системы

«Модуль аутентификации и авторизации» предоставляет пользователю доступ к модулю «Личный кабинет». Модуль «Личный кабинет» формирует интерфейс, для работы с «Модулем работы с отчетами» и «Модулем работы с консультациями».

В «Модуль работы с консультациями» входит «Функционал управления консультациями» и «Функционал работы с расписанием». «Функционал управления консультациями» позволяет пользователю создавать, редактировать и удалять консультации. «Функционал работы с расписанием» позволяет пользователю просматривать расписание, записываться на консультации и создавать заявки на консультации.

Для работы модули используют ядро системы. Под ядром системы может пониматься как фреймворк, так и набор скриптов и функций для работы с базой данных и сервером. Задачи ядра системы заключаются в обработке запросов и выдаче результатов модулям.

Организация консультаций в ИС «Студенческий деканат» реализована следующим образом: консультанты создают консультации, указывая дату, время и предмет консультации. Добавленные консультации отображаются на странице

«Расписание» в виде списка, который упорядочен по дате и времени. Студенты могут просматривать расписание консультаций и записываться на консультации. Консультанты получают уведомление от системы о каждой записи на их консультацию. Если консультант вносит изменение в назначенную консультацию или отменяет ее, то записанные студенты получают уведомления об этом.

Описанная система реализована в виде веб-ресурса. В качестве ядра системы был выбран фреймворк Yii2 [1], работающий на языке PHP. В качестве СУБД использовалась MySQL [2, 3]. Для front-end разработки были использованы фреймворки Bootstrap и Jquery [4, 5, 6].

При проектировании учитывались современные требования к интерфейсу, в частности, адаптивность верстки [7].

На рисунке 2 представлен скриншот страницы «Добавить консультацию», при просмотре с настольного компьютера.

The screenshot shows a web-based application for managing consultations. At the top, there is a navigation bar with tabs for 'Консультации' (Consultations), 'Добавить консультацию' (Add consultation), and 'Иванов Д. А. (консультант)' (Ivanov D. A. (consultant)). Below the navigation bar, there are two buttons: 'Консультация' (Consultation) and 'Серия консультаций' (Series of consultations). The main content area is titled 'Добавить консультацию' (Add consultation). It contains several input fields: 'Предмет' (Subject) with a dropdown menu showing 'Мат. анализ'; 'Дата' (Date) with a date picker showing '06.06.2020'; 'Начало' (Start) with a time picker showing '15:00'; 'Конец' (End) with a time picker showing '16:00'; and a 'Комментарий' (Comment) text area containing the text 'Консультация проводится в аудитории 1212'. At the bottom of the form is a green 'Сохранить' (Save) button.

Рис 2. Добавление консультации на настольном ПК или ноутбуке

В верхней части страницы «Добавить консультацию» находится «шапка» сайта, на которой расположено меню с разделами сайта.

Центральная часть страницы содержит форму с выпадающим списком предметов, полями выбора даты и времени, текстовым полем для ввода комментария к консультации и кнопкой «Сохранить».

На рисунке 3 представлены скриншоты той же страницы, но открытой на мобильном телефоне со стандартным разрешением экрана 800*480 и диагональю экрана 4 дюйма.

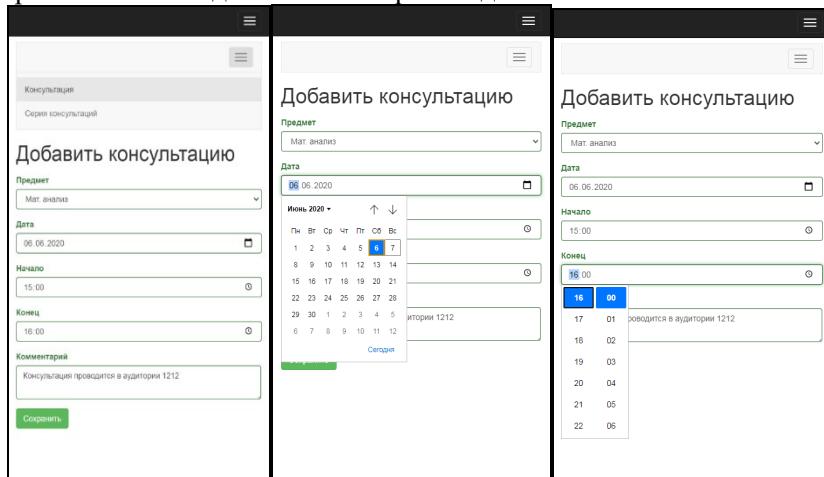


Рис. 3. Добавление консультации на мобильном телефоне

При адаптации дизайна к просмотру с мобильного телефона, виджеты даты и времени автоматически подстраиваются для работы с мобильными устройствами. «Шапка» сайта минимизируется для экономии места.

4. Заключение

Использование данной информационной системы позволит качественно облегчить и частично автоматизировать работу «Студенческого деканата». Использование информационной системы позволит студентам удаленно назначать консультации, записываться на консультации и делать заявки на консультации. Также использование информационной системы позволит минимизировать время формирования отчетов по проведенным

консультациям и полностью исключит риск возникновения ошибок при обработке отчетов.

Литература

1. Полное руководство по Yii 2.0 [электронный ресурс] режим доступа: <https://www.yiiframework.com/doc/guide/2.0/ru/intro-yii/> (Дата обращения: 2.06.2020).
2. Документация по MySQL [электронный ресурс] режим доступа: <https://dev.mysql.com/doc/> (Дата обращения: 2.06.2020).
3. Дюбуа П. Сборник рецептов. – Пер. с англ. – Санкт-Петербург: Символ-Плюс, 2006. – 1056 с.
4. Документация по Bootstrap [электронный ресурс] режим доступа: <https://getbootstrap.com/docs/4.5/getting-started/introduction/> (Дата обращения: 2.06.2020).
5. Документация по Jquery [электронный ресурс] режим доступа: <https://api.jquery.com/> (Дата обращения: 2.06.2020)
6. Каслдайн Э. Изучаем jQuery. 2-е изд. / Э Каслдайн, К. Шарки, – Санкт-Петербург, 2012. – 400 с.
7. Григсби, Г. Разработка веб-сайтов для мобильных приложений / Л. Гарднер, Д. Григси ; : Изд-во ПИТЕР, 2013. – 448 с.

Дониленко Михаил Александрович, Институт математики и информатики Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, студент. Тел. 8-951-634-53-01. Email: donilenco@ya.ru

Хабитуев Баир Викторович, Институт математики и информатики Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, ст.преп., зав. лаб. Тел. 8-924-010-11-76. Email: bairinc0@gmail.com

Donilenko Michail Aleksandrovich, Institute of Mathematics and Informatics, Buryat State University, student.

Khabituev Bair Victorovich, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, senior lecturer, laboratory chief.

ПРОТОТИП СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОЙ ПРОВЕРКИ SQL-ЗАПРОСОВ

Аннотация. В настоящее время автоматизация выполнения различных процессов охватывает все больше сфер жизни. Образование – в том числе. Автоматическая проверка некоторых заданий открывает новые возможности, как для преподавателя, так и для студента: преподаватель может охватить большую аудиторию обучающихся, тогда как студент получает возможность обучаться самостоятельно.

При подготовке ИТ-специалистов необходимо их обучение работе с базами данных. На текущий момент наиболее популярны реляционные СУБД. Стандартным языком для работы с данными в них является SQL.

На сегодняшний день системы автоматической проверки SQL-запросов существуют преимущественно в виде web-сервисов, контролировать наполнение которых преподаватель не в силах. Таким образом, актуальной является задача разработки локальной системы автоматической проверки SQL-запросов. В статье рассматривается прототип данной системы.

Ключевые слова: информационная система, базы данных, автоматическая проверка, самостоятельное обучение.

PROTOTYPE OF AN AUTOMATIC SQL-QUERY CHECKING SYSTEM

Abstract. Currently, automation of various processes covers more and more areas of life. Education - including. Automatic verification of certain tasks opens up new opportunities for both the teacher and the student: the teacher can reach a larger audience of students, while the student gets the opportunity to study independently. When preparing IT-specialists, it is necessary to train them to work with databases. At the moment, relational databases are the most popular. The standard language for working with data in them is SQL. To date, automatic checking systems for SQL-queries exist mainly in the form of web-services, which the teacher cannot control. Thus, the task of developing a local system for automatic checking of SQL-queries is urgent. In the article discusses the prototype of this system.

Keywords: information system, databases, automatic check, self-study.

1. Введение

При обучении студентов программированию нередко применяются системы автоматической проверки текстов программ. Принцип работы таких систем заключается в многократном запуске кода пользователя на различных тестовых наборах данных и сравнении полученных результатов с верным ответом.

Также для успешного развития специалиста в сфере информационных технологий важно владеть навыками не только в программировании, но и в работе с базами данных. Данная дисциплина очень схожа с программированием и к ней также применимы системы автоматической проверки.

Одной из главных идей системы автоматической проверки SQL-запросов является то, что проверка их работоспособности схожа с проверкой задач по программированию:

1. Существует множество SQL-запросов, решающих конкретную задачу.
2. Результат выполнения SQL-запроса напрямую зависит от набора данных, на которых проводится тестирование.

2. Постановка задачи

Несмотря на схожесть принципов проверки программ и SQL-запросов возникает ряд проблем [3]:

1. Настройка проверяющих систем общего назначения для проверки SQL-запросов имеет множество трудностей.
2. Программные комплексы, предназначенные для проверки SQL-запросов, либо отсутствуют, либо малоизвестны.
3. Во многих web-сервисах существует возможность подбора решения.

Помимо проблем, перечисленных выше, существующие web-сервисы проверки SQL-запросов не предоставляют преподавателю необходимого функционала: добавление собственных заданий, формирование контрольно-измерительных материалов, проведение текущего и итогового контроля знаний студентов и т.д.

Возможность добавления собственных заданий позволит как варьировать уровень их сложности, так и разделить задания на обучающие и контрольные. Обучающие задания - задания доступные для просмотра и решения в любое время. Контрольные задания - задания, доступные лишь на время проведения текущего или итогового контроля. Такие мероприятия имеют определенные временные рамки.

Также каждый студент сможет видеть свое текущее положение и сможет самостоятельно его контролировать [1].

3. Требования к прототипу

Прототип данной системы должен удовлетворять следующим требованиям:

1. Автоматическая проверка SQL-запросов на различных наборах данных в режиме online.
2. Создание и редактирование теоретических блоков.
3. Составление набора задач для проведения контрольных работ.
4. Ролевая система авторизации.
5. Разделение заданий на обучающие и контрольные.
6. Возможность проводить текущий и итоговый контроль.
7. Возможность задавать уровень сложности проводимого мероприятия [2].

В рамках системы были выделены следующие типы задач:

1. **SQL-задачи** – задачи на получение определенных данных в определенном формате из исходной БД.
2. **DML-задачи** – задачи на вставку, изменение и удаление каких-либо данных в готовых таблицах, без изменения их структуры.
3. **DDL-задачи** – задачи на добавление, изменение и удаление как отдельных столбцов таблиц, так и самих таблиц.

В рамках прототипа будет реализована проверка только SQL-задач. Автоматическая проверка SQL-запросов будет производиться на заранее подготовленных преподавателем наборах данных, при этом один набор исходных данных может соответствовать нескольким заданиям в системе.

4. Схема проверки решений

Так как SQL-задачи рассчитаны лишь на получение каких-либо данных из готовых таблиц, то запрещены любые запросы, модифицирующие структуру и данные тестовых таблиц.

Изначально производится проверка полученного от пользователя SQL-запроса на соответствие разрешениям. Если запрос не соответствует требованиям, то он игнорируется системой и пользователь получает сообщение об ошибке. В противном случае происходит выполнение запроса, а данные, полученные в результате его выполнения, сравниваются с правильным ответом задачи, на основе чего система выдает пользователю вердикт о правильности его запроса (см. рис. 1).

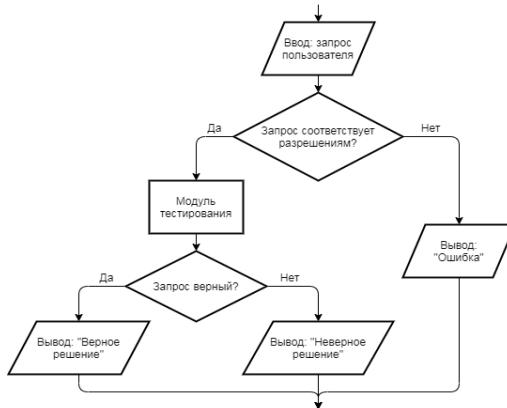


Рис. 1. Схема проверки SQL-задачи.

Модуль тестирования получает запрос пользователя, соответствующий разрешениям. Запрос выполняется на каждом teste из набора и результат выполнения сравнивается с верным решением для текущего teste. Решение считается верным, если решение прошло все teste (модуль возвращает значение True). В случае хотя бы одной ошибки, запрос пользователя считается неверным (модуль возвращает значение False) (см. рис. 2).

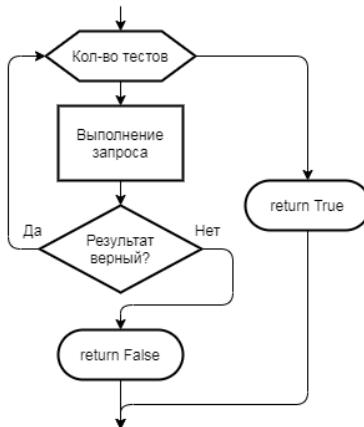


Рис. 2. Схема работы модуля тестирования для SQL-задач.

5. Заключение

Внедрение такой системы в образовательный процесс принесет следующие преимущества:

Для преподавателя:

1. Сокращение времени, затрачиваемого на проверку контрольных, зачетных или экзаменационных работ.
2. Возможность охватить большую аудиторию обучающихся.
3. Возможность пополнения архива задач.
4. Возможность формирования контрольных работ по конкретным темам.
5. Возможность самостоятельно задать уровень сложности заданий при проведении тестирования.
6. Ограничение доступа к задачам ограничит возможность получения студентами готовых решений в отличие от web-сервисов, решения заданий которых легко находятся в интернете.

Для студента:

1. Моментальное получение информации о правильности составленного им SQL-запроса без участия преподавателя.
2. Возможность самостоятельного обучения в любое время: прочтение теоретических материалов и практическое применение полученных знаний.

Литература

1. Смирнов А. И., Смирнова Е. А., Корнякова Е. Н. Опыт применения дистанционных образовательных технологий для повышения качества самостоятельной работы студентов в Уральском институте экономики, управления и права // Вестник Уральского института экономики, управления и права – 2012. – Вып. 1(18). – С. 76-83.
2. Семенова З. В., Любич С. А., Кузнецов А. Г., Мальцев П. А. Система автоматизированной проверки правильности составления sql-запросов: защита от уязвимостей // Динамика систем, механизмов и машин – 2017. – Т. 5, № 4. – С. 90-95.
3. Семенова З. В., Любич С. А., Кузнецов А. Г., Мальцев П. А. Сравнительная характеристика средств автоматизированной проверки правильности составления sql-запросов // Научный рецензируемый журнал «Вестник СибАДИ» – 2017. – Вып. 3(55). – С. 152-160.

Кузнецов Юрий Александрович, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, студент. Тел. 8-983-450-78-85. Email: 25lykl13@gmail.com

Дерюгин Даниил Федорович, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, ст. преп. Тел. 8-924-751-53-05. Email: dandwor@gmail.com

Kuznetsov Yury Aleksandrovich, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, student.

Deryugin Daniil Fedorovitch, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, senior lecturer, lead programmer.

АЛГОРИТМ «OPTIMAL BRAIN DAMAGE» НА ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Аннотация. Данная работа посвящена эмпирической оценке эффективности классической стратегии прореживания «Optimal Brain Damage» для глубоких нейронных сетей прямого распространения на прикладных задачах. Алгоритмы прореживания на практике довольно популярны и применяются как методы борьбы с переобучением нейронных сетей. Но при всем этом на сегодняшний день отсутствуют строгие теоретические оценки их эффективности, что считается трудной задачей ввиду конструктивной сложности нейронных сетей. Таким образом, получение экспериментальных оценок эффективности различных стратегий прореживания сетей на различных прикладных задачах остается актуальной. В данной работе проведен ряд численных экспериментов с применением алгоритма OBD на реальных данных. Для проведения численных экспериментов выбраны глубокие полно связные сети прямого распространения ориентированных на решение задач классификации. Приведены результаты влияния длины шага удаления связей на результирующую эффективность алгоритма OBD на четырех реальных задачах. Все прикладные задачи (наборы данных) взяты из публичного репозитория машинного обучения UCI (archive.ics.uci.edu).

Ключевые слова: Optimal Brain Damage, прореживание, нейронные сети, переобучение.

© A. Motorov, A. Tsybikov

ALGORITHM «OPTIMAL BRAIN DAMAGE» ON APPLIED TASKS

Abstract. This work is devoted to an empirical assessment of the effectiveness of the classic pruning strategy “Optimal Brain Damage” for deep direct distribution neural networks for applied problems. Pruning algorithms are quite popular in practice and used as methods to combat the retraining of neural networks. However, with all this, today is considered there are no rigorous theoretical estimates of their effectiveness, which a difficult task in view of the structural complexity of neural networks. Thus, obtaining experimental estimates of the effectiveness of various pruning network strategies for various applied problems remains relevant. In this paper is performed a series of numerical experiments using the OBD algorithm on real data. For conducting

numerical experiments were selected deep fully connected direct distribution networks of solution-oriented classification problems. Presented results of the influence of the stripping distance of the bonds on the resulting efficiency of the OBD algorithm for four real problems. All applied tasks (data sets) taken from the UCI public machine learning repository (archive.ics.uci.edu).

Keywords: Optimal Brain Damage, pruning, neural network, overtraining.

1. Введение. В нейронных сетях прямого распространения производная (градиент) целевого функционала среднеквадратичной ошибки на выборке по параметрам сети сообщает, как должны корректироваться параметры, чтобы минимизировать значение данного функционала с учетом поведения остальных элементов сети. Таким образом, некоторые блоки сети могут меняться, исправляя при этом ошибки других блоков. Это может привести к чрезмерной совместной адаптации (co-adaptation), что, в свою очередь, приводит к переобучению, поскольку эти совместные адаптации невозможно обобщить на данные, не участвовавшие в обучении [3].

2. Метод обучения. Для обучения нейронной сети используется метод обратного распространения ошибки (BackPropagationalgorithm). Зависимость ошибки выходного слоя от предыдущих позволяет вычислить ошибку и обновить веса.

Способ вычисления ошибки на весах, отличает его от других способов обучения. В основе идеи алгоритма лежит использование выходной ошибки нейронной сети. Алгоритм так называется из-за того, что сначала мы вычисляем ошибку на выходном слое и наблюдаем, как она перетекает в предыдущие слои [7]. Формулу для ошибки внешнего слоя – это производная активационной функции, помноженная на градиент целевой функции [5]. Таким образом, ошибка каждого нейрона выходного слоя вычисляется по формуле:

$$\delta = y - f(a)$$

где y – требуемое значение, $f(a)$ – выход нейрона.

И её обратное распространение на каждом нейроне от слоя к слою:

$$\delta_i = \sum_j w_{ji} \delta_j \quad (1)$$

где δ_i – ошибка нейрона текущего слоя, δ_j – ошибка нейрона следующего слоя, w_{ji} – вес между i -м и j -м нейронами.

После вычисления ошибки происходит обновление весов по формуле:

$$w_{ij} = w_{ij} + \eta \delta_i y_j f'(a_i) \quad (2)$$

где η – коэффициент скорости обучения, f' – производная от функции активации, y_j – выход j -го нейрона предыдущего слоя.

3.Стратегия Optimal Brain Damage. Суть стратегии состоит в удалении параметров с небольшой «значимостью», то есть тех, чье удаление будет иметь наименьшее влияние на ошибку аппроксимации [6].

Автор алгоритма предлагает аналитически предсказать эффект возмущения вектора параметров, аппроксимируя целевую функцию E рядом Тейлора [4]. Однако были введены некоторые упрощающие приближения. Такие как «Диагональное», «Экстремальное» и «Квадратичное». Подробнее это описано в статье «Optimal Brain Damage» 1990г. за авторством LeCun Yann A. Исходя из всех упрощений и изменений возмущения вектора параметров δU , получается уравнение:

$$\delta E = \frac{1}{2} \sum_i h_{ii} \delta u_i^2 \quad (3)$$

где δu_i – это элемент δU , g_i – элементы градиента G относительно U , а h_{ii} – элементы матрицы Гессиана H относительно U :

$$g_i = \frac{\partial E}{\partial u_i} \quad u \quad h_{ij} = \frac{\partial^2 E}{\partial u_i \partial u_j} \quad (4)$$

Целевой функцией является обычная среднеквадратическая ошибка (MSE); Для других аддитивных мер ошибок, обобщение является простым. К одному входному шаблону применяются следующие выражения; после этого E и H должны быть усреднены по тренировочной выборке[4]. Состояние сети вычисляется с использованием стандартных формул:

$$x_i = f(a_i) \quad u \quad a_i = \sum_j w_{ij} x_j \quad (5)$$

где x_i – это вход i -го элемента, a_i его суммарный выход (взвешенная сумма), f функция активации, а w_{ij} – вес, от нейрона j к нейрону i . В сети с общими весами, один параметр u_k может управлять одним или несколькими входами: $w_{ij} = u_k$ для всех $(i, j) \in V_k$, где V_k - набор индексных пар [4]. По правилу цепочки диагональные члены H задаются как:

$$h_{kk} = \sum_{(i,j) \in V_k} \frac{\partial^2 E}{\partial w_{ij}^2} \quad (6)$$

Слагаемое может быть преобразовано как:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial w_{ij}^2} = \frac{\partial^2 E}{\partial a_i^2} x_j^2 \quad (7)$$

Вычисление второй производной на выходном слое для всех элементов i :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a_i^2} = 2f'(a_i)^2 - 2(d_i - x_i)f''(a_i) \quad (8)$$

Их обратное распространение от слоя к слою:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial a_i^2} = f'(a_i)^2 \sum_l w_{li}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial a_l^2} + f''(a_i) \frac{\partial E}{\partial x_i} \quad (9)$$

На рисунке 1 изображена обобщённая последовательность действий алгоритма.

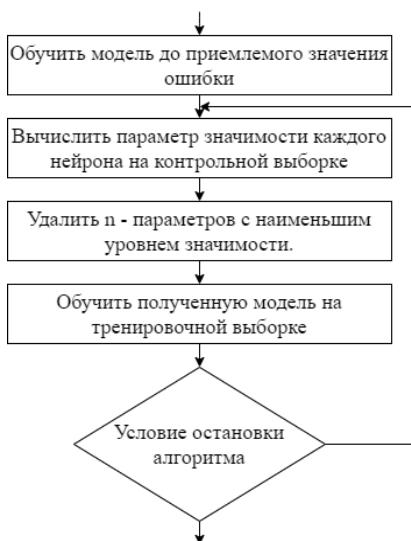


Рис.1. Алгоритм Optimal Brain Damage

3. Численные эксперименты.

Для улучшения качества моделей данные подверглись обработке нормировкой [1]. Выходом сети для задач классификации является

вектор, в котором номер наиболее близкого к единице нейрона будет являться номером класса. Этот прием – специальный тип кодирования для многоклассовой классификации называется one-hot encoding [2]. Для численных экспериментов были отобраны следующие датасеты.

1. Классификация неисправностей стальных пластин. Имеет двадцать семьючисловых независимых параметров, информирующих о различных характеристиках пластин. Метки классов от 0 до 7 соответствуют классам: «Pastry», «Z_Scratch», «K_Scratch», «Stains», «Dirtiness», «Bumps», «Other_Faults».

2. Оценка стоимости медобслуживания. Имеет шесть параметров: возраст, половая принадлежность, индекс массы тела, количество детей, наличие никотиновой зависимости, регион проживания. Нужно предсказать расходы на страхование.

3. Классификация изображений «Библии Авила» по переписчику. Имеет десять параметров: расстояние между колонками, верхний отступ, нижний отступ, эксплуатация, номер строки, модульное соотношение, межлинейный интервал, вес, пиковое число, отношение модульного соотношения к межлинейному интервалу. Метки классов от 0 до 12 соответствуют различным переписчикам.

4. Предсказание произнесенной буквы. Имеет шестьсот семнадцать параметров. Метки классов от 0 до 26 соответствуют буквам латинского алфавита.

На представленных ниже таблицах показаны результаты экспериментов для алгоритма OptimalBrainDamagec различной «длиной шага». Для каждого датасета было обучено от 1 до 3 различных моделей. Точность обучения варьируется от 70% до 100% в зависимости от датасета.

Dataset №1: «Классификация неисправностей стальных пластин»

На Dataset №1 была обучена модель классификации, сеть с 2 скрытыми слоями, состоящими из 21 и 14 нейронов соответственно – всего 980 параметров. Точность на обучающей и контрольной выборках равны 71.6% и 69% соответственно. Для этой модели наблюдается небольшой прирост точности при 63 удаленных параметрах с длиной шага 1 (рис. 2).

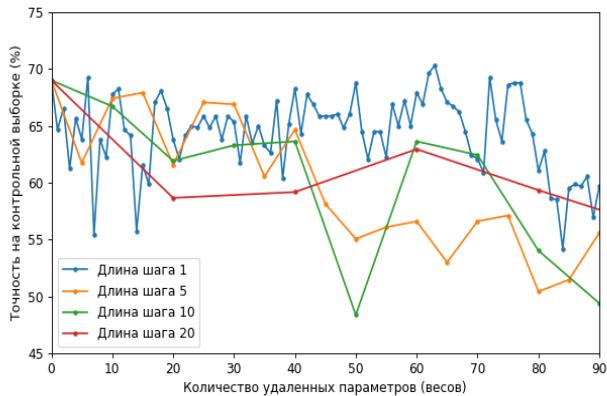


Рис. 2. Динамика изменения точности при различном выборе шага удаления параметров для Dataset №1

Dataset №2: «Оценка стоимости медобслуживания»

На Dataset №2 была обучена модель линейной регрессии, сеть с 2 скрытыми слоями, состоящим из 30 и 10 нейронов соответственно – всего 580 параметров. Точность на обучающей и контрольной выборках равны 75.4 и 73.8 соответственно. Для этой модели мы можем наблюдать удаление около 250 параметров без весомой потери точности (рис. 3).

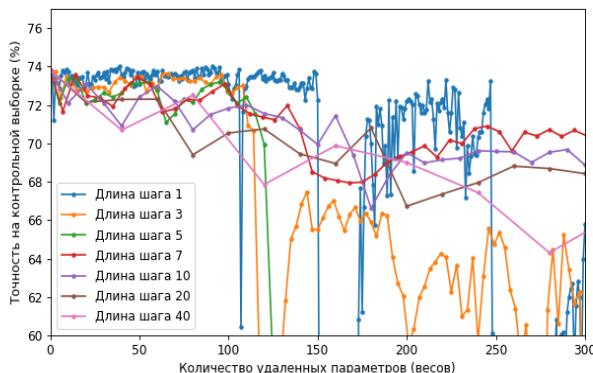


Рис. 3. Динамика изменения точности при различном выборе шага удаления параметров для Dataset №2

Dataset №3: «Классификация изображений “Библии Авила” по переписчику»

На Dataset №3 была обучена модель классификации, сеть с 1 скрытым слоем, состоящим из 42 нейронов – всего 966 параметров. Точность на обучающей и контрольной выборках равны 82.7 и 80.4 соответственно. Для этой модели наблюдается повышение точности при удалении 42 параметров. Так же наблюдается удаление до 90 параметров без весомой потери точности (рис. 4).

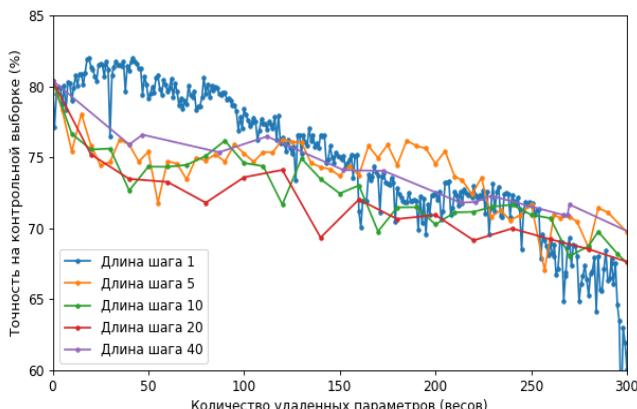


Рис. 4. Динамика изменения точности при различном выборе шага удаления параметров для Dataset №3

Dataset №4: «Предсказание произнесенной буквы»

На Dataset №4 была обучена модель классификации, сеть с 1 скрытым слоем, состоящем из 52 нейронов – всего 33436 параметров. Точность на обучающей и контрольной выборках равны 96.4 и 93.5 соответственно. Для этой модели, как и для первой наблюдается практически не изменяющаяся точность до 1400 удаленных параметров. И так же для больших шагов, модель начинает стремительно терять точность после 200 удаленных параметров (рис. 5).

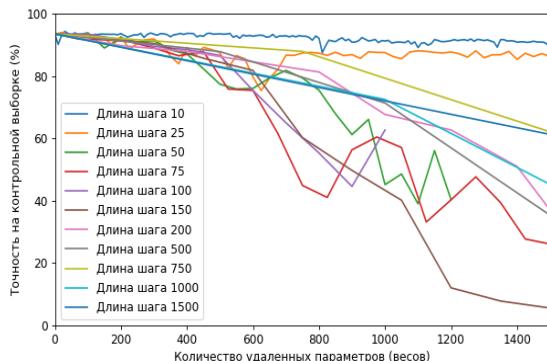


Рис. 5. Динамика изменения точности при различном выборе шага удаления параметров для Dataset №4

Итоговая эмпирическая оценка эффективности OBD.

Как мы видим на графике (рис. 6), на всех моделях, кроме двух мы повысили точность на контрольной выборке после применения алгоритма Optimal Brain Damage. Так же следует упомянуть о Dataset №3, для моделей которого мы смогли применить алгоритм без потери точности.

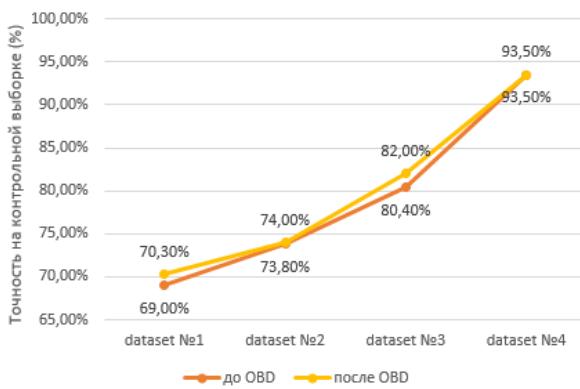


Рис. 6. График изменения точности моделей до и после применения алгоритма Optimal Brain Damage

4. Заключение

Исходя из полученных результатов, можно вынести следующие практические рекомендации. К повышению обобщающей способности нейроструктурных моделей при использовании алгоритма

OBD приводит выбор как можно меньшей длины шага удаления весов. Для более конструктивно сложных моделей с большим количеством синаптических связей применение алгоритма с малым шагом требует больших вычислительных мощностей и времени на обучение. Поэтому выбор шага удаления связей следует подбирать исходя из сложности архитектуры нейронной сети.

Литература

1. Коэльо Л. П. Построение систем машинного обучения на языке Python / Л. П. Коэльо, В. Ричарт. — М.: ДМК Пресс, 2016. — 302 с.
2. Chollet F. Deep Learning with Python / F. Chollet. — Manning, 2018. — 386 с.
3. Hinton G. E. Improving neural networks by preventing co-adaptation of feature detectors / G. E., N. Srivastava, A. Krizhevsky, I. Sutskever and R. R. Salakhutdinov// Department of Computer Science, University of Toronto, Toronto, Canada, 2012. — c.1
4. LeCun, Yann A, Optimal brain damage / Y. Le Cun, J. S. Denker and S. A. Solla // in Advances in Neural Information Processing Syst. II, ed. D. S. Touretzky (MorganKaufman, SanMateo, 1990)
5. LeCun, Yann A., et al. Efficient backprop. Neural networks: Tricks of the trade. SpringerBerlinHeidelberg, 2012. — с.9-48.
6. Оптимальное прореживание нейронных сетей [Электронный ресурс]. — Режим доступа: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Оптимальное_прореживание_нейронных_сетей (Дата обращения: 30.05.2020)
7. A StepbyStepBackpropagationExample [Электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://mattmazur.com/2015/03/17/a-step-by-step-backpropagation-example/> (Дата обращения: 15.03.2020)

Моторов Андрей Михайлович, студент, Бурятский Государственный университет имени Доржи Банзарова, г. Улан-Удэ, e-mail: joleyjoker14@gmail.com

Цыбиков Анатолий Сергеевич, к. п. н., заведующий кафедрой «Информационных технологий», Бурятский Государственный университет имени Доржи Банзарова, г. Улан-Удэ, e-mail: cas313@rambler.ru

Motorov Andrey Mikhaylovich, student, Banzarov Buryat State University.

Tsybikov Anatoly Sergeevich, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Department of Information Technology of the Banzarov Buryat State University, cas313@rambler.ru

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА «НАУЧНЫЕ ТРУДЫ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ»

Аннотация. Научная деятельность имеет огромную роль в жизни каждого студента. Первой задачей для начала научной деятельности студента является как выбор направления, так и выбор научного руководителя. Публикация информации о научной активности сотрудников университета в открытом доступе может быть полезна для решения этого вопроса. В Бурятском государственном университете существует достаточно много научных школ и направлений в рамках разных факультетов, в которых работает множество сотрудников университета, что делает выбор научного руководителя нетривиальной задачей. Поэтому в ходе обсуждения с Научной библиотекой Бурятского государственного университета было принято решение разработать информационный ресурс, выступающий в качестве площадки для публикации сведений о научных трудах сотрудников. Для обеспечения деятельности такого ресурса необходима информационная система, осуществляющая обработку предназначенных для ресурса данных. В статье описаны проблемы формирования данных для информационного ресурса, поставлены задачи для их формирования и описана архитектура прототипа информационной системы.

Ключевые слова: информационная система, база данных, организация научной деятельности.

© N. Namsaraev, D. Deryugin

INFORMATION SYSTEM «SCIENTIFIC WORKS OF TEACHERS»

Abstract. Scientific activity has a huge role in the life of every student. The first task for starting a student's scientific activity is both the choice of direction and the choice of a research supervisor. Publishing information about the scientific activity of University employees in the open access can be useful for solving this issue. Buryat State University has quite a lot of scientific schools and areas of activity within different faculties, where many University employees work, which makes the choice of a research supervisor a non-trivial task. Therefore, during the discussion with the Scientific Library of the Buryat State University, it was decided to develop an information resource that acts as a

platform for publishing information about the scientific works of employees. To ensure the operation of such a resource, an information system is required that processes the data intended for the resource. The article describes the problems of forming data for an information resource, sets the tasks for their formation, and describes the architecture of the prototype of an information system.

Keywords: information system, database, organization of scientific activity.

1. Введение

Выбор научного руководителя играет важнейшую роль для организации и осуществления научной деятельности студента. В Бурятском государственном университете существует достаточно много научных школ и направлений в рамках разных факультетов. Наличие информации о публикациях сотрудников университета помогает студенту сделать взвешенный выбор как будущего научного руководителя, так и направления своей научной работы. В связи с этим крайне важной задачей становится публикации информации о научных трудах сотрудников университета в рамках единой площадки. В ходе обсуждения с Научной библиотекой Бурятского государственного университета было принято решение разработать информационный ресурс, позволяющий формировать и публиковать в открытом доступе информацию о научных трудах сотрудников и выступающей как публичная часть информационной системы, обрабатывающей данные о научных трудах. Одним из эффектов внедрения такой системы будет более удобный поиск информации и, как следствие, более осознанный выбор студентами научного руководителя.

2. Постановка задачи

В рамках предметной области были выделены 2 основные сущности:

- единица научного труда преподавателя (далее ЕНТП) – это запись о научном труде сотрудника Бурятского государственного университета;
- сборник научных трудов преподавателей (далее СНТП) – это сборник, объединяющий сведения о научных трудах сотрудников Бурятского государственного университета, то есть представляет собой набор ЕНТП;

Структура ЕНТП представлена в табл. 1.

Таблица 1

Структура ЕНТП

№	ББК	Библиографическое описание	Подразделения
1	32.81	Хабитуев Б. В., Аюшеева Л. В., Дармаев Т. Г., Дудин С. А., Занданова Г. И., Хандаров Ф. В., Цыбиков А. С., Очирбат Б. Информационная система мониторинга состояния здоровья студентов и сотрудников Бурятского государственного университета // Вестник БГУ Улан-Удэ: изд-во БГУ, 2010. Вып.9: математика и информатика. – С. 244–251	Институт математики и информатики, кафедра Информационных технологий, Лаборатория программных систем
2	63.3(4) + 32.973 (018.2)	Фартусов Д. Б., Хабитуев Б. В., Дерюгин Д. Ф. База данных репрессированного буддийского духовенства в Бурятии // Культура Центральной Азии: письменные источники. Вып. 11. Ч. 2. - С. 235-243	Исторический факультет, Институт математики и информатики, кафедра Информационных технологий, Лаборатория программных систем

Стоит отметить, что помимо библиографического описания научной работы сотрудника университета, структура ЕНТП включает в себя информацию о принадлежности научного труда к подразделениям Бурятского государственного университета. Используемая в настоящий момент в Научной Библиотеке Бурятского государственного университета библиотечная система ИРБИС не содержит сведений о принадлежности научного труда подразделению университета.

Обработка имеющегося массива данных о научных трудах для его прикрепления к соответствующему подразделению требует многоэтапной проверки для контроля правильности данных, что требует наличия механизмов экспертизы.

В качестве основного источника данных для системы выступает библиотечная система ИРБИС Научной библиотеки Бурятского государственного университета. Для более полного охвата

публикаций сотрудников университета необходимо предусмотреть возможность подключения различных внешних источников данных.

Таким образом, возникают следующие задачи формирования СНТП:

1. Разработка механизма прикрепления сотрудника и соответствующих ему научных трудов к подразделениям Бурятского государственного университета в рамках СНТП.
2. Реализация средств экспертизы научных трудов, поступающих из внешних источников.
3. Реализация возможности подключения различных внешних источников данных.

3. Описание решения задач

Была предложена архитектура прототипа информационной системы, которая представлена на рис. 1.



Рис. 1. Схема архитектуры прототипа системы

Научные труды поступают из различных внешних источников в базу данных системы. При поступлении в базу данных, научные труды не будут доступны для публичного просмотра до прохождения экспертизы, то есть не попадут в СНТП.

Для проверки принадлежности научных трудов сотрудникам Бурятского государственного университета, каждый научный труд

должен пройти экспертизу. Результатом экспертизы будет либо прикрепление научного труда к сотруднику Бурятского государственного университета в базе данных и поступление научного труда в СНТП, либо удаление научного труда из базы данных.

Таким образом, информационная система позволит быстро и качественно получать СНТП. Одним из преимуществ внедрения системы будет более удобный поиск информации.

4. Заключение

Выбор научного руководителя на старте научной деятельности студента имеет огромное значение. Внедрение описанной информационной системы позволит студентам взвешенно подходить к выбору научного руководителя и будущего направления своей научной деятельности.

В статье представлена схема архитектуры прототипа информационной системы. На данный момент информационная система находится на этапе разработки.

Литература

1. Программирование баз данных SQL [Текст] : типичные ошибки и их устранение / Билл Карвин ; [пер. с англ. - М. Райтман]. - Москва : Рид Групп, 2012. - 332, [1] с. : ил., табл.; 24 см. - (Профессиональные компьютерные книги).; ISBN 978-5-4252-0510-0
2. Сафонов, М. Разработка веб-приложений в Yii 2 / М. Сафонов. – Москва: ДМК Пресс, 2015. – 392 с.
3. William S. Davis, David C. Yen. The Information System Consultant's Handbook. Systems Analysis and Design. — CRC Press, 1998. — 800 с. — ISBN 0849370019.

Namsaraev Nikolai Baishalovich, Институт математики и информатики Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, студент. Тел. 8-902-451-30-89. Email: namsaraev.kolya@gmail.com

Deryugin Daniil Fedorovitch, Институт математики и информатики, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, ст. преп. Тел. 8-924-751-53-05. Email: dandwor@gmail.com

Namsaraev Nikolay Baishalovich, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, student.

Deryugin Daniil Fedorovitch, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, senior lecturer, lead programmer.

ИЗВЛЕЧЕНИЕ ИНФОРМАТИВНЫХ ПРИЗНАКОВ ВЕЙВЛЕТ-СПЕКТРА ПУЛЬСОВЫХ СИГНАЛОВ

Аннотация. Данная работа посвящена вейвлет-преобразованию пульсовых сигналов (сфигмограмм) и извлечению скрытых спектральных признаков для построения систем поддержки принятия решений в области функциональной диагностики. Осуществлено вейвлет-преобразование набора пульсовых сигналов реальных пациентов и посредством обучения сверточного автокодировщика на сформированной выборке вейвлет-спектров выявлены латентные признаки. С помощью этих признаков решена задача классификации пациентов по половому признаку с точностью 78,77% на тестовой выборке. Для решения исследовательских задач разработан аналитический программный комплекс, состоящий из четырех модулей: 1) модуль вейвлет-преобразования пульсовых сигналов; 2) модуль инициализации и обучения нейронной сети типа сверточного автокодировщика; 3) модуль визуализации скрытых признаков; 4) модуль предиктивной аналитики. Апробация разработанной технологии демонстрирует определенные перспективы применение вейвлет-преобразования в разработке систем искусственного интеллекта в области диагностики состояния здоровья человека по пульсовому сигналу.

Ключевые слова: пульсовая волна, вейвлет-преобразование, нейронная сеть, автокодировщик, функциональная диагностика.

© *D. Tolstykh, A. Tsybikov*

EXTRACTING INFORMATIVE FEATURES OF THE PULSE SIGNALS WAVELET SPECTRUM

Abstract. This paper is devoted to the wavelet transform of pulse signals (sphygmograms) and extraction of hidden spectral features to build decision support systems in the field of functional diagnostics. Wavelet transformation of real patients pulse signals data set was carried out and latent signs were revealed on the generated sample of wavelet spectrum by training a convolutional auto-encoder. With help of these features, the problem of classifying patients by gender was solved with an accuracy of 78.77%. To solve research problems, an analytical software package has been developed consisting of four modules: 1) wavelet transform module for pulse signals; 2) module for initializing and training neural network such as convolutional auto-encoder; 3) module for

visualization of hidden signs; 4) predictive analytics module. Testing the developed technology demonstrates certain prospects for the use of wavelet transform in the development of artificial intelligence systems in the field of diagnosing human health by pulse signal.

Keywords: pulse wave, wavelet transform, neural network, auto-encoder, functional diagnostics.

Введение

Диагностическая значимость характеристик пульсового сигнала лучевой артерии, подтверждаемая многовековым опытом восточной медицины, создаёт предпосылки для выявления информативных признаков этого сигнала с помощью современных инструментальных и информационных технологий.

Возможности пульсовой диагностики обусловлены тем, что сигнал периферического пульса, в частности лучевой артерии, содержит в себе информацию о многих физиологических процессах, протекающих в организме и в первую очередь в сердечно-сосудистой системе [1]. В пульсовом сигнале лучевой артерии находят своё отражение, как процессы высших уровней регуляции, так и многие гемодинамические показатели сердечно-сосудистой системы. Математический анализ сфигмограммы (пульсового сигнала) является перспективной областью восточной биометрии [2]. Существующие на данный момент модели пульсового сигнала остаются далеко не совершенными ввиду сложности данного биофизического явления в организме человека [3].

Вейвлет-преобразование.

Пусть $x(t)$ – анализируемый сигнал. Так как в работе используются пульсовые сигналы, записанные на временном промежутке равном двум минутам, для анализа применяется дискретное вейвлет-преобразование. В дискретном случае, параметры вейвлета масштабирования a и сдвига b представлены дискретными величинами:

$$a = a_0^m, b = nb_0$$

Тогда анализирующий вейвлет имеет следующий вид:

$$\varphi_{m,n} = a_0^{-\frac{m}{2}} \varphi\left(\frac{t - nb_0}{a_0^m}\right)$$

где m и n – целые числа.

В таком случае для непрерывного сигнала дискретное вейвлет-преобразование и его обратное преобразование запишутся следующими формулами:

$$T_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi_{m,n}^*(t) dt$$

Величины $T_{m,n}$ также известны как вейвлет-коэффициенты.

$$x(t) = K_\varphi \sum_{-\infty}^{\infty} \sum_{-\infty}^{\infty} T_{m,n} \varphi_{m,n}(t)$$

где K_φ – постоянная нормировки.

Схема извлечения спектральных признаков.

Для достижения цели поставленной задачи, был разработан программный алгоритм, изображённый на рисунке 1.

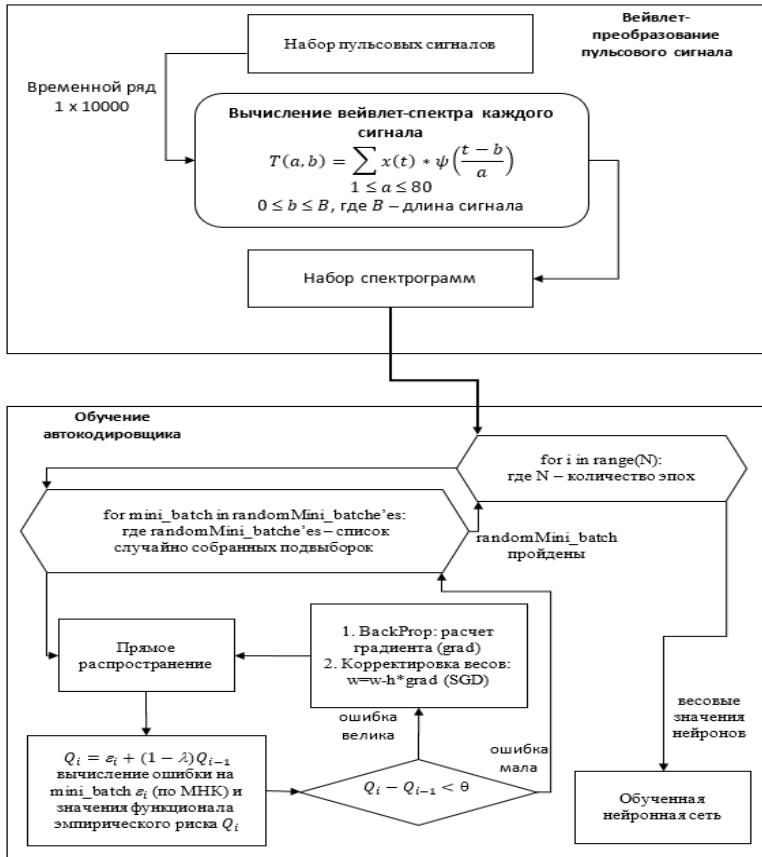


Рис. 1. Алгоритм извлечения информационных признаков

В основе метода вейвлет-анализа лежит преобразование одномерного временного ряда в многомерный.

Первым шагом проводится вейвлет-преобразование сфигмограммы пульсовых сигналов всего набора данных. Для выполнения данной операции используется вейвлет под названием «Мексиканская шляпа» (рис. 2) рекомендованный для анализа сигналов подобного типа [4, 5]. Функция вейвлета:

$$\psi(t) = (1-t^2) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right).$$

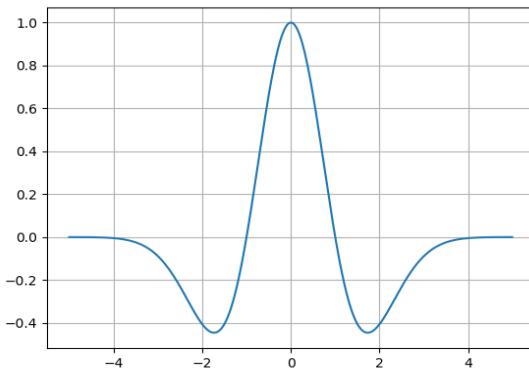


Рис. 2. Вейвлет «Мексиканская шляпа»

Происходит это следующим образом: на длине промежутка равного длине пульсового сигнала вычисляется вейвлет зависящий от двух параметров: a – масштаб и b – смещение. Тогда анализирующий вейвлет имеет следующий вид:

$$\psi_{a,b} = \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

При дискретном вейвлет-преобразовании параметры a и b принимают дискретные величины по сетке: a меняется от 1 до A - масштабирование по времени с шагом 1, b от 0 до B - временной сдвиг с шагом 1. После того, когда вейвлет будет вычислен производится скалярное произведение вейвлет вектора и пульсового сигнала $x(t)$. После указанных действий временное (рис. 3) представление сфигмограммы принимает частотно-временное (спектрограмма) (рис. 4) представление, более

поддающиеся изучению, в виде матрицы вейвлет-коэффициентов размером $A \times B$.

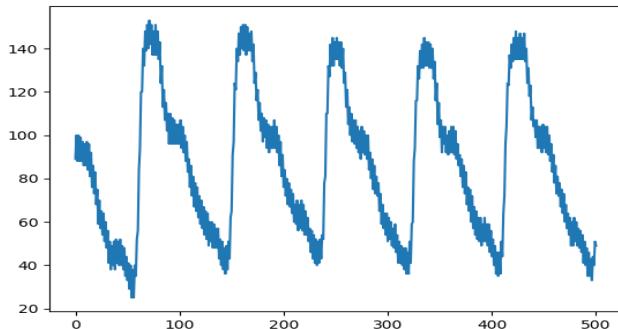


Рис. 3. Сфигмограмма пульсового сигнала

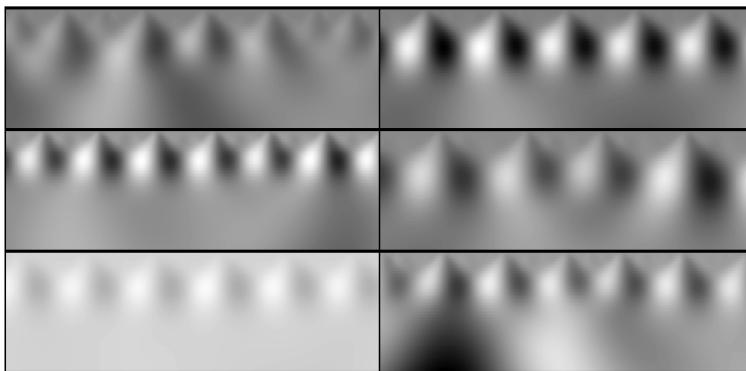


Рис. 4. Спектрограммы пульсовых сигналов

Далее формируется модель свёрточной нейронной сети типа автокодировщик. Модель состоит из двух зеркальных частей: энкодера, который кодирует выборку в свое внутреннее представление, и декодера, который восстанавливает исходную выборку [6]. Энкодер включает три блока чередующих слой свёртки и слой подвыборки (рис. 5) суммарно имеющих 6 слоёв нейронов. Первый свёрточный слой использует фильтр масштаба 7 x 7 для сжатия достаточно массивных входных данных, последующие слои свёртки и подвыборки используют фильтр 2 x 2 для более точного выявления признаков. При этом составляющие автокодировщика ограничены уменьшающимися слоями нейронов,

чтобы автоэнкодер был вынужден отбирать наиболее важные свойства сигнала. После инициализации описанной нейронной сети запускается её обучение с применением метода обратного распространения ошибки.

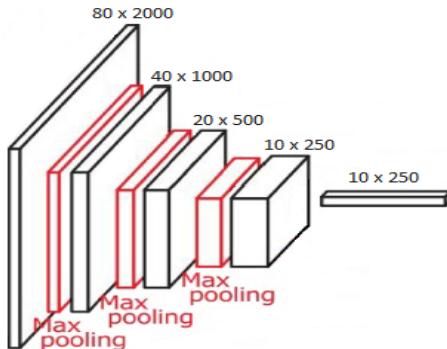


Рис. 5. Энкодер

Таблица 1

Гиперпараметры нейронной сети

Технология	Причины выбора
Слой подвыборки: MaxPooling (выбор максимального)	<ul style="list-style-type: none"> снижение размерности; если на предыдущей операции свертки уже были выявлены некоторые признаки, то для дальнейшей обработки настолько подробное изображение уже не нужно, и оно уплотняется до менее подробного; фильтрация уже ненужных деталей помогает не переобучаться.
Активационная функция: Rectified linear unit (ReLU)	<ul style="list-style-type: none"> менее требователен к вычислительным ресурсам; хороший аппроксиматор.
Функция потерь: квадратичное отклонение	<ul style="list-style-type: none"> самая простая функция

После обучения нейронная сеть будет содержать информативные признаки скрытые в весах свёрточных слоёв. Чтобы увидеть какие признаки выделяет нейронная сеть,

достаточно обрезать модель автокодировщика на последнем свёрточном слое енкодера и визуализировать его выход, после чего мы получим тепловые карты признаков (рис. 6).

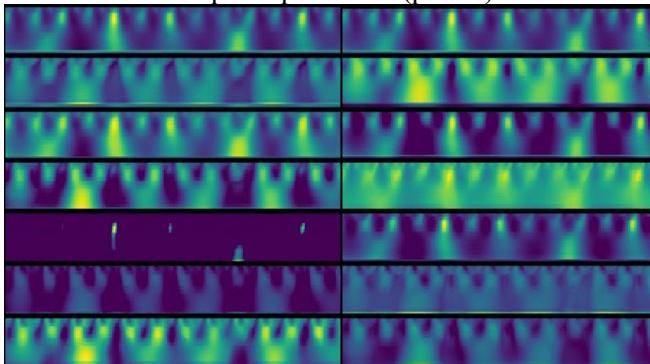


Рис. 6. Карты признаков

Применение энкодера для классификации пациентов по половому признаку. Для проверки полученных данных описанная выше нейронная сеть перстраивается для классификации сfigмограмм по половой принадлежности. Для этого вторая половина автокодировщика «декодер» заменяется на классификатор, состоящий из полносвязанного слоя, соединённого с двумя выходами (так как существует два вида биологического пола) и функции активации «softmax» которая возвращает вероятность принадлежности к определённому классу для каждой метки.

Полученная модель обучается на данных с метками и в результате проведённых экспериментов достигнуто значение точности классификации на тестовом наборе данных 78.77%, что говорит о жизнеспособности данного метода извлечения признаков вейвлет-спектра пульсовых сигналов.

Заключение

Таким образом, в данной работе осуществлено вейвлет-преобразование набора пульсовых сигналов реальных пациентов и посредством обучения автокодировщика на полученном наборе вейвлет-спектров выявлены латентные признаки. С помощью выявленных признаков решена задача классификации пациентов по половому признаку с точностью 78,77%.

Также в рамках исследования разработан аналитический программный комплекс, состоящий из четырех модулей: 1) модуль вейвлет-преобразование пульсового сигнала; 2) модуль инициализации и обучения нейронной сети типа «автокодировщик»; 3) модуль визуализации признаков; 4) модуль предиктивной аналитики.

Апробация разработанной технологии демонстрирует определенные перспективы применение вейвлет-преобразования в разработке систем искусственного интеллекта в области диагностики состояния здоровья человека по пульсовому сигналу.

Литература

1. Боронеев В. В. / Пульсовая диагностика заболеваний в тибетской медицине: физические и технические аспекты / Боронеев В. В. – Улан-Удэ: БНЦ СО РАН, 2005. – 250 с.
2. Дудин А. С. Методы анализа данных и распознавания образов: практикум / А. С. Дудин – Улан-Удэ: Издательство Бурятского госуниверситета, 2019. – 64 с.
3. Цыбиков А. С. Математическое моделирование пульсовых волн на основе теории солитонов и уравнения Кортевега Де Фриза / Т. Г. Дармаев, А. С. Цыбиков, Б. В. Хабитуев – Улан-Удэ: Вестник Бурятского государственного университета —2014. —Вып. 9(1) / 2014. – С. 35-39.
4. Витязев В. В. Вейвлет-анализ временных рядов: Учебное пособие / В. В. Витязев – СПб: СПбГУ, 2001г. – 58 с.
5. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши – М.; Ижевск: РХД, 2001. – 464 с.
6. Николенко С. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей / С. Николенко, А. Кадурин, Е. Архангельская – СПб.: Питер, 2018. – 480 с.

Толстых Дмитрий Владимирович, студент, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Институт математики и информатики, dmitrijtolstyh97@gmail.com

Цыбиков Анатолий Сергеевич – к. п. н., заведующий кафедрой «Информационных технологий», Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, г. Улан-Удэ, e-mail: cas313@rambler.ru

Tolstykh Dmitry Vladimirovich, student, Banzarov Buryat State University, Institute of Mathematics and Computer Science, dmitrijtolstyh97@gmail.com

Tsybikov Anatoly Sergeevich, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Department of Information Technology of the Banzarov Buryat State University, cas313@rambler.ru

ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА ДЛЯ СБОРА И ХРАНЕНИЯ СПОРТИВНЫХ ДОСТИЖЕНИЙ СТУДЕНТОВ

Аннотация. В настоящее время одной из важных задач в учебном процессе университета, является сбор и хранение спортивных достижений студентов. Результаты по нормативам показывают общую физическую подготовку студента. В Институте математики и информатики Бурятского государственного университета разработана система для сбора и хранения спортивных достижений студентов.

Система предназначена для сбора и хранения данных о спортивных нормативах. Кроме того, система способна подсчитывать баллы по пороговым значениям и строить графики по результатам нормативов. В статье описана разработанная система. Внедрение этой системы позволит хранить спортивные нормативы каждого студента вуза в едином формате, уменьшить затраты на поиск информации, автоматически формировать различные отчеты по физической успеваемости студентов.

Ключевые слова: информационная система, базы данных, учёт результатов испытаний.

© К. Угрюмов, Б. Хабитуев

INFORMATION SYSTEM FOR COLLECTION AND STORING OF STUDENT SPORT ACHIEVEMENTS

Abstract. Nowadays, the collection and storage of students' sports achievements is an important task for the educational process in a university. The student's results show the general physical fitness of the student. The Institute of Mathematics and Informatics of the Buryat State University used an information system for collecting and storing students' sports achievements.

The main goal of the system is to collect and store data on sports achievements. In addition, the system is able to calculate students' results by range values and build figures for data analysis. This paper describes the developed system. The system integration will make it possible to store sports standards for each university student in a single format, reduce the cost of searching, and automatically generate various reports on students' physical statements.

Keywords: information system, databases, sport results storing.

1. Введение

Спортивные нормативы являются важной частью учебного процесса по физической культуре. В связи с этим возникает ряд проблем, которые связаны с необходимостью регистрации результатов студентов по нормативам для дальнейшего подсчета оценок итогового контроля по семестру. Объем информации по результатам нормативов растет с увеличением масштаба выборки. Также возможна потеря, дублирование и редактирование результатов по нормативам хранящихся в бумажном виде.

В целом можно считать, что сбор и хранение спортивных достижений является важной задачей для университета.

2. Постановка задачи

Мировой и отечественный опыт показывает, что физическая культура и спорт решает проблемы повышения уровня здоровья населения, воспитания и образования детей, подростков и молодежи, позволяют формировать здоровое психологическое состояние в обществе [1].

Элективные курсы по физической культуре входят в программу образования. В качестве контрольно измерительных материалов и оценочных средств обычно используются спортивные нормативы [2].

Под спортивным нормативом понимается испытание, которое должен пройти спортсмен или другое лицо его проходящее. Обычно подразумевается оценка результатов испытания по заранее определенной шкале, которая зависит от конкретного норматива.

Для ведения сбора и хранения результатов нормативов по физической культуре в Институте математики и информатики Бурятского государственного университета разработана информационная система для сбора и хранения спортивных достижений студентов.

3. Описание прототипа

Главной задачей системы является сбор и хранение спортивных достижений студентов. Исходя из этого, было принято решение разделить систему на модули и разработать взаимодействие компонентов приложения. В качестве ядра системы был использован фреймворк Yii2 на основе PHP [3].

На основании прецедентов были выделены основные роли:

1. Администратор добавляет новые нормативы и пороги нормативов. Создает аккаунты преподавателей, прикрепляет к ним нужные группы студентов.

2. Преподаватели фиксируют результаты по нормативам в информационной системе, имеют права редактирования и удаления результатов по нормативам. Анализируют результаты по нормативам и выставляют итоговые оценки.

3. Студенты имеют право просмотра своих результатов по нормативам и аналитики.

4. Неавторизованные пользователи имеют доступ только к публичным страницам.

Все пользователи получают доступ к разным функциональным возможностям системы в зависимости от роли.

Система состоит из четырех взаимодействующих модулей различного назначения, нацеленных на выполнение сбора и хранение информации о спортивных нормативах (см. рис. 1).



Рис.1. Логическая структура системы

Модуль авторизации и аутентификации позволяет разграничивать права доступа к различным модулям системы.

Модуль управления студентами позволяет пользователю с ролью «Преподаватель» добавлять новые результаты по нормативам и редактировать имеющиеся.

Модуль нормативы отвечает за подсчет оценок и формирование графиков.

Модуль личный кабинет обеспечивает разные функциональные возможности для каждой роли пользователей.

Для хранения результатов по нормативам была разработана структура базы данных (см. рис. 2).

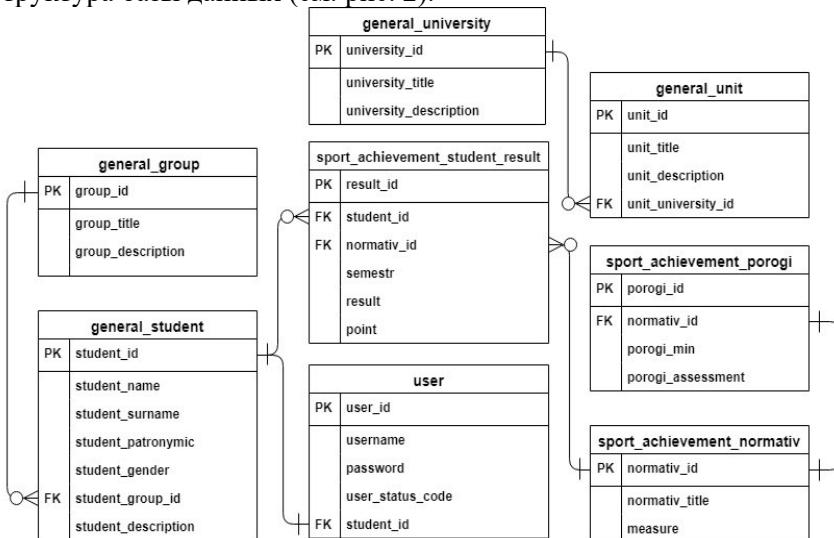


Рис.2. Структура базы данных

В ходе анализа постановки задачи были выделены справочники для работы с данными:

1. Справочник пороговых значений нормативов хранит данные для оценивания физической подготовленности студентов по каждому нормативу в баллах.
2. Справочник группы хранит данные о номере группы, факультете и направлении.
3. Справочник наименований нормативов.
4. Справочник университетов.
5. Справочник факультетов.

В таблицах хранятся данные о спортивных нормативах, списках групп и студентов, авторизационных данных. Структура базы данных удовлетворяет третьей нормальной форме.

4. Заключение

Сбор и хранение спортивных достижений студентов является одной из важнейших задач в учебном процессе, внедрение данной системы позволит оперативно получать информацию о физической успеваемости студентов, при наличии устройства с возможностью доступа в интернет, установленного браузера и интернет соединения.

Литература

1. Ширяева Е., Слепова Л. Н., Хаирова Т. Н., Диженова Л. Б. Физическая культура и спорт в современной россии // Успехи современного естествознания. – 2013. – № 10. – С. 193-194.
2. Физическая культура: учебник / коллектив авторов под ред. М.Я. Виленского. - 2-е изд., стер. - М.: КНОРУС, 2013. - 424 с. - (Бакалавриат).
3. Сафонов, Марк Разработка веб-приложений в Yii 2 / Марк Сафонов. - М.: ДМК Пресс, 2019. – 175 с.

Угрюмов Кирилл Алексеевич, Институт математики и информатики Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, студент. Тел. 8-924-552-00-68. Email: kiruya2108000@gmail.com

Хабитуев Баир Викторович, Институт математики и информатики Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, ст.преп., зав. лаб. Тел. 8-924-010-11-76. Email: bairinc0@gmail.com

Ugryumov Kirill Alekseyevich, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, student.

Khabituev Bair Victorovich, Institute of Mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University, senior lecturer, laboratory chief.

ГИПЕРПАРАМЕТРЫ ГРАДИЕНТНЫХ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Аннотация. State-of-the-art алгоритмами обучения нейронных сетей считаются разновидности градиентных методов, которые имеют множество параметров, влияющих на процесс обучения. Эти параметры обычно называют гиперпараметрами, чтобы отличить от параметров самой модели. В данной статье рассматриваются два вида градиентных методов обучения: стандартный стохастический градиентный спуск и сопряженных градиентов Флетчера-Ривза. Экспериментальным путем, на основе 5 наборов данных из репозитория UCI, оценивается эффективность упомянутых методов обучения в зависимости от вариаций гиперпараметров обучения: темп обучения, размер батча, период сброса сопряженного направления. Нужно отметить заметное преимущество метода сопряженных градиентов по сравнению с обычным. По результатам экспериментов сформулированы практические рекомендации по настройке гиперпараметров методов обучения. Разработан программный комплекс обучения нейронных сетей градиентными методами на языке Python.

Ключевые слова: градиентный спуск, метод сопряженных градиентов, обучение нейронной сети, метод обратного распространения ошибки

HYPERPARAMETERS OF GRADIENT METHODS FOR TRAINING NEURAL NETWORKS

Abstract. State-of-the-art algorithms of training neural networks are considered to be gradient methods with a variety of parameters influencing the quality of training process, so-called hyperparameters. The aforementioned article outlines a few types of gradient methods for training neural network: stochastic and conjugate gradient algorithms, and their effectiveness dependent on hyper parameter: learning rate, size of mini-batch, reset interval of conjugate direction. Practical recommendations on hyperparameters setup were made on the basis of experiments.

Keywords: gradient descent, training neural networks, backpropagation algorithm

1. Введение. Выбор гиперпараметров накладывает большое влияние на процесс обучения градиентными методами [1]. Градиентные методы обучения нейронных сетей – одни из наиболее распространенных и относительно простых методов обучения, заключающих в себе легкость вычислений и их эффективность.

Оценено влияние гиперпараметров на эффективность градиентных методов первого порядка для обучения нейронных сетей на тестовых данных из открытого репозитория UCI.

Данная работа включает в себя обзор существующих градиентных методов, реализация нейронной сети, основанной на методе обратного распространения. Проведено сравнение модификаций градиентного метода обратного распространения ошибки на прикладных задачах при различных значениях гиперпараметров.

2. Структура сети. Реализуемая нейронная сеть состоит из трех слоев: внешнего, одного скрытого и входного. Все нейроны состоят из стандартной суммирующей функции и активационной – сигмоидальная функция активации:

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (1)$$

Однако, сигмоид не очень хорошо показывает при стандартной инициализации [2].

Функция потери ошибки, используемая в качестве целевой функции для оптимизации, – квадратичная.

Используется специальный тип кодирования для многоклассовой классификации one-hot encoding [3].

Гиперпараметры нейронной сети — все параметры, которые задаются не обучающей выборкой [4]. Настраиваемые гиперпараметры нейронной сети, которые представляются в исследовании – скорость обучения, размер мини-батча и интервал сброса сопряженного направления. При выборе гиперпараметров и сравнении моделей существует риск переобучения нейронной сети.

Для улучшения качества классификации данные подверглись обработке нормировкой, а отсутствующие данные заполнены средними значениями параметров [5].

3. Метод обратного распространения ошибок. Для вычисления градиента используется метод обратного распространения ошибки.

Ошибка выходного слоя:

$$\delta^L = \nabla_a J \square \sigma(z^L) \quad (2)$$

Формула ошибок предыдущих слоев:

$$\delta^l = \left((W^{l+1})^T \delta^{l+1} \right) \square \sigma'(z^l) \quad (3)$$

Градиенты по весам и смещениям:

$$\frac{\partial J}{\partial b_j^l} = \delta_j^l \quad (4)$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_{jk}^l} = a_k^{l-1} \delta_j^l \quad (5)$$

4. Градиентные методы. Метод стохастического градиента использует градиент случайного набора примеров:

$$\Delta_{p+1} = \gamma \cdot \Delta_p + \eta \cdot \nabla L(w_p) \quad (6)$$

$$w_{p+1} = w_p - \Delta_{p+1} \quad (7)$$

Метод сопряженных градиентов отличается специальным выбором направления изменения весов. Это направления выбирается так, чтобы оно было ортогональным к предыдущим:

$$\Delta W = \eta \cdot (p + \rho \cdot W) + \mu \cdot \Delta W \quad (8)$$

Направление изменения параметров выбирается по следующей формуле:

$$p = \nabla E + \beta \cdot p \quad (9)$$

Начальное направление выбирается как градиент от целевой функции.

Коэффициент сопряжения β вычисляется по формуле Флэтчера-Ривза:

$$\beta = \frac{g_t^T \cdot g_t}{g_{t-1}^T \cdot g_{t-1}} \quad (10)$$

где градиент $g = \nabla E$ - градиент функции потери ошибки на этом и предыдущем этапах.

5. Результаты. В рамках данной работы для численных экспериментов задач многоклассовой классификации были отобраны пять датасетов.

Наиболее высокую точность ответов показал выбор коэффициента скорости обучения в пределах от 0.5 до 0.8. Маленький коэффициент в большинстве случаев показал, что процесс обучения сильно замедляется и нужная точность ответов может быть и не достигнута (рис.1). Однако алгоритм сопряженных градиентов показал стабильность при всех значениях темпа обучения (рис.2).

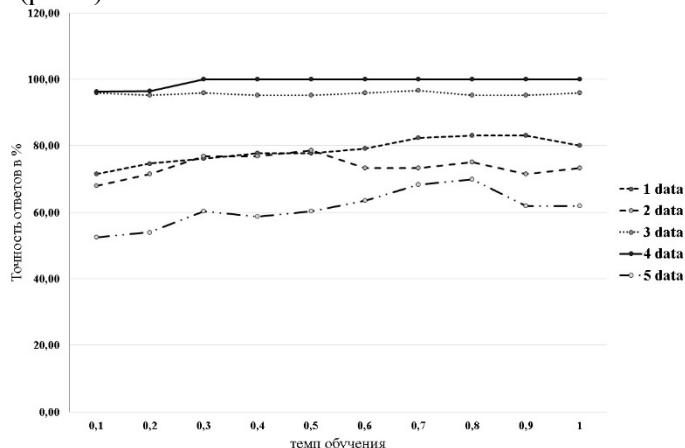


Рис. 1. Точности модели и темп обучения SGD

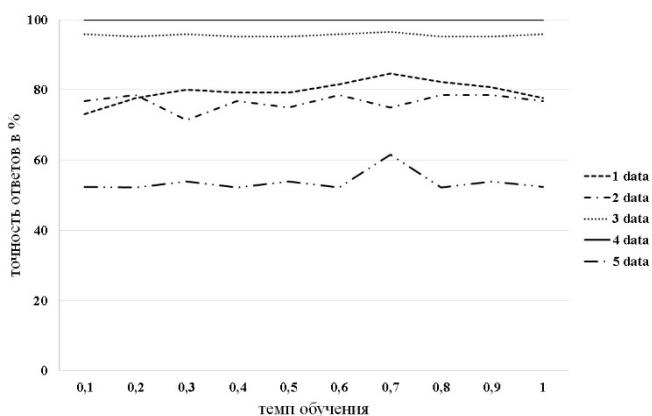


Рис. 2. Точности модели и темп обучения CGD

Наблюдается тенденция увеличения точности ответов при уменьшении мини-батча, при этом на максимальном размере, который соответствует пакетному спуску, в четырех из 5 случаев происходило застревание в локальном минимуме и спустя ещё множество эпох находился там. Так как размер обучающей выборки в среднем меньше или равен 1000, то можно предположить, что размер мини-батча, меньший чем одна десятая от обучающей выборке, будет более оптимальен, чем максимально большие (рис.3). Среднее значение вариации — 21.5 процентов.

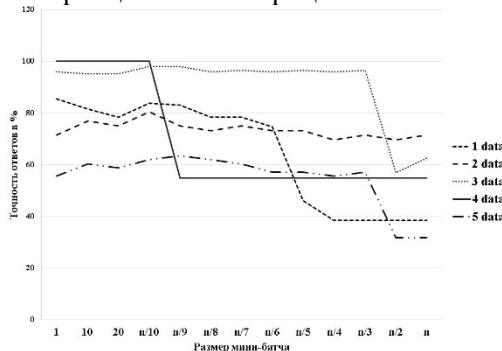


Рис. 3. Точность и размер мини-батча SGD

Результаты показали, что отсутствие сброса сопряженного направления может негативно сказаться на качестве классификации, накопленная ошибка в сопряженном направлении мешает нейронной сети выдавать оптимальный ответ (рис.4). Среднее значение вариации по всем датасетам — 22 процента.

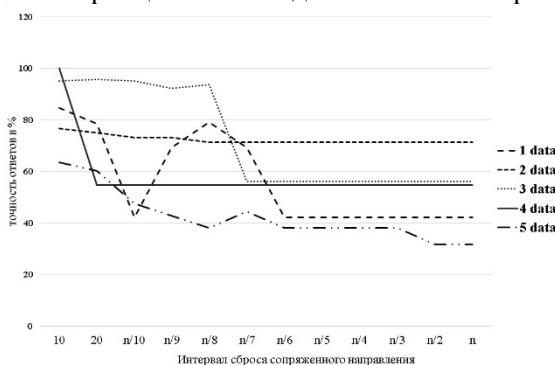


Рис. 4. Точность и интервал сброса CGD

6. Выводы. Обычный градиентный метод обучения, основанный на методе обратного распространения ошибок, в своем изначальном виде может иметь множество недостатков, такие как плохая сходимость, зависимость от начальной инициализации, пропуск глобального минимума, застревание в областях локального минимума.

Также по результатам численного эксперимента сформулированы следующие рекомендации:

1. При выборе постоянного коэффициента скорости обучения следует выбрать его из соображений улучшения сходимости больше 0.5, но меньше 0.8.

2. Не рекомендуется использовать пакетный (полная выборка) градиентный спуск из-за его высокого риска застрять в локальном минимуме.

3. Для небольших тренировочных множеств рекомендуется разбивать их на мини-батчи меньшие, чем одна десятая данного множества, но больше чем 10.

4. Использование сопряженных градиентов сильно увеличивает скорость сходимости, однако следует сбрасывать сопряженное направление не менее чем раз в 20 примеров.

7. Заключение. Таким образом, в работе рассмотрены два вида градиентных методов обучения: стандартный стохастический градиентный спуск и сопряженных градиентов Флетчера-Ривза. На основе вычислительных экспериментов на 5 наборах данных из репозитория UCI оценивается относительная эффективность методов обучения в зависимости от вариаций гиперпараметров обучения: темп обучения, размер батча, период сброса сопряженного направления. Нужно отметить заметное преимущество метода сопряженных градиентов по сравнению с обычным. По результатам экспериментов сформулированы практические рекомендации по настройке параметров методов обучения. Разработан программный комплекс обучения нейронных сетей градиентными методами на языке Python.

Литература

1. Головко В. А. Нейронные сети: обучение, организация и применение / В. А. Головко. — М.: ИПРЖР, 2001. — 256 с.
2. Glorot X. Understanding the difficulty of training deep feedforward neural networks / X. Glorot, Y. Bengio // Intern. conference on artificial intelligence and statistics. — 2010. — с. 249-256.
3. Chollet F. Deep Learning with Python / F. Chollet. — Manning, 2018. — 386 с.
4. Hutter F. An Efficient Approach for Assessing Hyperparameter Importance / F. Hutter, H. Hoos, K. Leyton-Brown // Proceedings of the 31 st

International Conference on Machine Learning, Beijing, China, 2014. JMLR: W&CP volume 32. — 2014. — с.764-762

5. Коэльо Л. П. Построение систем машинного обучения на языке Python / Л. П. Коэльо, В. Ричарт. — М.: ДМК Пресс, 2016. — 302 с.

Цыдылова Сэсэгма Юрьевна, б.т.н., Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, г.Улан-Удэ, e-mail: suikaminaru@gmail.com

Цыбиков Анатолий Сергеевич, к.п.н., заведующий кафедрой «Информационных технологий», Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, г.Улан-Удэ, e-mail: cas313@rambler.ru

Tsydypova Sesegma Yurevna, Bachelor of Technology, Banzarov Buryat State University, e-mail: suikaminaru@gmail.com

Tsybikov Anatoly Sergeevich, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Department of Information Technology of the Banzarov Buryat State University, cas313@rambler.ru

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДЛЯ РЕГИСТРАЦИИ И СБОРА ПУЛЬСОВЫХ СИГНАЛОВ

Аннотация. Целью данной работы является поиск решения проблемы сбора и записи пульсового сигнала при использовании оптического датчика, микроконтроллера и персонального компьютера. Для решения данной задачи был разработан программный комплекс. Данная программа способна получать данные с микроконтроллеров, подключенных к компьютеру по технологии «USB-to-COM», и отображать полученные данные в виде графика реального времени. Программа способна автоматически обнаруживать устройства, подключенные к компьютеру через COM-порты. Также была разработана система хранения данных о пациентах, и их сфигмограммах. Программный продукт имеет удобный пользовательский интерфейс и гибкую настройку отображения сфигмограммы. Программа прошла апробацию, с использованием оптического датчика «MAX30102» и микроконтроллера ESP32, по результату которой, она зарекомендовала себя способной решать поставленные перед ней задачи.

Ключевые слова: сфигмограмма, оптический датчик, микроконтроллер, COM-порт, программный комплекс, пульс, база данных.

© I. Shurygin, A. Tsybikov

SOFTWARE FOR REGISTRATION AND COLLECTION OF PULSE SIGNALS

Abstract. The aim of this work is to find a solution to the problem of collecting and recording a pulse signal using an optical sensor, microcontroller, and personal computer. To solve this problem, a software package was developed. This program is capable of receiving data from microcontrollers connected to a computer using the USB-to-COM technology, and displaying the received data in a real-time graph. The program is able to automatically detect devices connected to the computer via COM ports. A system for storing patient data and their sphygmograms has also been developed. The software product has a convenient user interface and flexible display settings for the sphygmogram. The program was tested using the optical sensor "MAX30102" and the microcontroller ESP32, as a result of which, it has proven itself capable of solving the tasks assigned to it.

Keywords: sphygmogram, optical sensor, microcontroller, COM port, software, pulse, database.

1. Введение. Существующие программные решения регистрации сфигмограммы пульсового сигнала, как правило, подразумевают приобретение специальных фотоплетизмографов. Существуют оптические датчики пульса, как например, «MAX30102». Такой датчик в связке с микроконтроллером, например, семейств «Arduino», «ESP», способен получать сфигмограмму человека и имеет гибкую настройку, как самого оптического датчика, так и микроконтроллера, в зависимости от потребности пользователя. Для сбора и хранения сфигмограммы, таким образом, требуется программа для компьютера.

2. Архитектура программного продукта. При проектировании программного решения, для сбора и хранения сфигмограмм были выделены две основные роли: пользователь (человек, задачами которого являются сбор и отображение сфигмограмм, а также редактирование картотеки пациентов при помощи данной программы) и пациент (человек, подвергающийся медицинскому наблюдению при помощи фотоплетизмографа).

Было выделено несколько основных модулей программы. Модуль подключения к микроконтроллеру, задачей которого является предоставление пользователю списка всех подключенных к компьютеру через COM-порт устройств. Данный модуль также должен предоставлять пользователю возможность выбирать необходимую скорость подключения к COM-порту. Разное значение скорости подключения на микроконтроллере и компьютере сделает передачу данных невозможной.

Модуль отображения сфигмограммы представляет полученные из микроконтроллера данные в виде графика в режиме реального времени. Также данный модуль используется для отображения ранее записанных сфигмограмм.

Модуль записи сфигмограммы предоставляет пользователю возможность выбрать время записи сфигмограммы. Записанная сфигмограмма должна иметь привязку к определенному пациенту.

Модуль взаимодействия с базой данных позволяет пользователю обращаться к картотеке пациентов и вносить в нее изменения при помощи базы данных и осуществлять привязку записанной сфигмограммы к нужному пациенту.

Схема взаимодействия модулей представлена на рисунке 1.

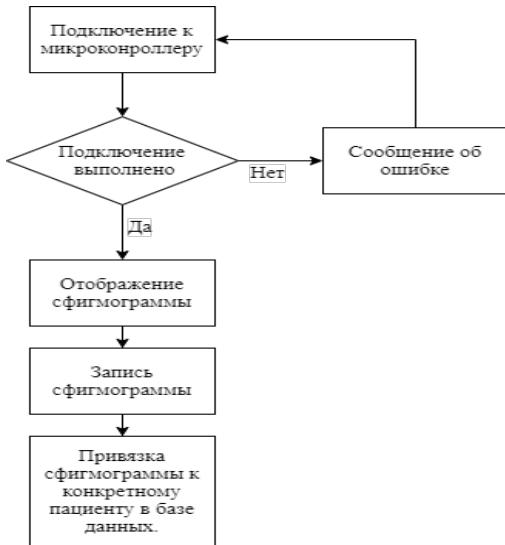


Рис. 1. Схема взаимодействия модулей

Для получения сфигмограммы, пользователь должен выполнить подключение к СОМ-порту. Если указанный пользователем СОМ-порт недоступен или не обнаружен, то программа сообщит о данной ошибке. Если соединение с СОМ-портом было успешно установлено, модуль отображения сфигмограммы начнет отображать график, на основе полученных данных. Для записи сфигмограммы, пользователю необходимо выбрать нужного пациента из базы данных.

В качестве СУБД программы был выбран «Microsoft SQL Server». Структура базы данных представлена на рисунке 2.

Patients			Data		
PK	Id	int	PK	Id	int
	Фамилия	nvarchar(50)		Пациент	int
	Имя	nvarchar(50)		Время	datetime
	Отчество	nvarchar(50)		Длительность	int
	Пол	bit		Примечание	nvarchar(max)
	Дата_рождения	date			
	Рост	float			
	Вес	float			

Рис. 2. Структура базы данных

Таблица «Patients» содержит в себе информацию о пациентах: идентификатор пациента (генерируется автоматически), фамилия, имя, отчество, пол, дата рождения, рост и вес пациента.

Таблица «Data» хранит информацию о сфигмограммах пациентов: идентификатор сфигмограммы, идентификатор пациента, время записи и длительность записи, примечание. Все данные этой таблицы, за исключением примечания, программа заполняет автоматически.

3. Реализация программного решения для сбора и хранения пульсового сигнала. При реализации данной программы были использованы следующие средства и технологии: «.NET Framework», «Windows Forms» и язык программирования «C#».

На плате микроконтроллера («Arduino», «ESP») находится USB-TTL конвертер, который позволяет ему взаимодействовать с компьютером через последовательный порт (СОМ-порт). Порт называется «последовательным», так как информация через него передается последовательно бит за битом.

Для подключения к последовательному порту, на языке «C#» используется пространство имён «System.IO.Ports», которое содержит классы для управления последовательными портами.

После открытия СОМ-порта данные с микроконтроллера поступают в буфер обмена. Стандартная модель предполагает наличие 16-ти байтного программного буфера для приема и такого же буфера для передачи данных. В случае подключения микроконтроллера посредством «USB-to-COM» применяется виртуализационный подход к буферизации данных. Буфер СОМ-порта работает по принципу «FIFO» (first in, first out).

Для отображения графика был использован класс «Chart». Чтобы график отображал данные в режиме реального времени, был использован элемент «Timer», который представляет из себя бесконечный цикл с заданным промежутком работы. Данный цикл, считывает данные из буфера обмена СОМ-порта и отображает их на графике. Данные в буфер СОМ-порта поступают построчно, было решено за одно прохождение цикла считывать все строки до тех пор, пока буфер не станет пустым. Такой подход к чтению данных позволяет программе не давать буферу обмена переполняться (что может привести к потере данных), если данные с микроконтроллера поступают быстрее, чем элемент «Timer» может их получать из-за заданного интервала. На рисунке 3 отображена схема цикла чтения данных из СОМ-порта.

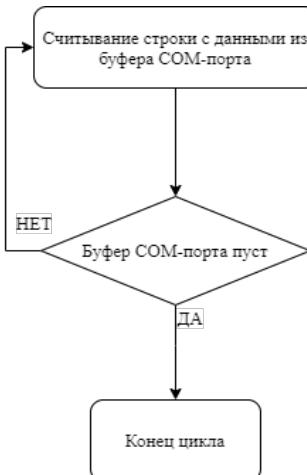


Рис. 3. Схема цикла чтения данных из буфера СОМ-порта

Для того, чтобы предоставить пользователю удобный вариант просмотра списка всех пациентов был использован элемент «DataGridView». Благодаря данному элементу можно полученную из базы данных информацию отображать в привычном для представления табличном виде. Чтобы пользователь мог редактировать информацию о пациентах или добавлять новых, в программу была добавлена специальная форма с полями для заполнения. В случае если пользователь заполнит данную форму не полностью или использует неправильные типы данных, программа оповестит пользователя об этом.

При помощи картотеки со списком пациентов, пользователь может просмотреть все сfigмограммы, относящиеся к определенному пациенту, а также выбрать нужного пациента для записи новой сfigмограммы.

В программу был добавлен дополнительный функционал, как, например, отображение частоты сердечных сокращений, если он вычисляется микроконтроллером и отправляется в последовательный порт специальным образом. Также добавлена возможность изменение визуальной части графика при помощи цветовой палитры.

На рисунке 4 отображен пользовательский интерфейс программы.

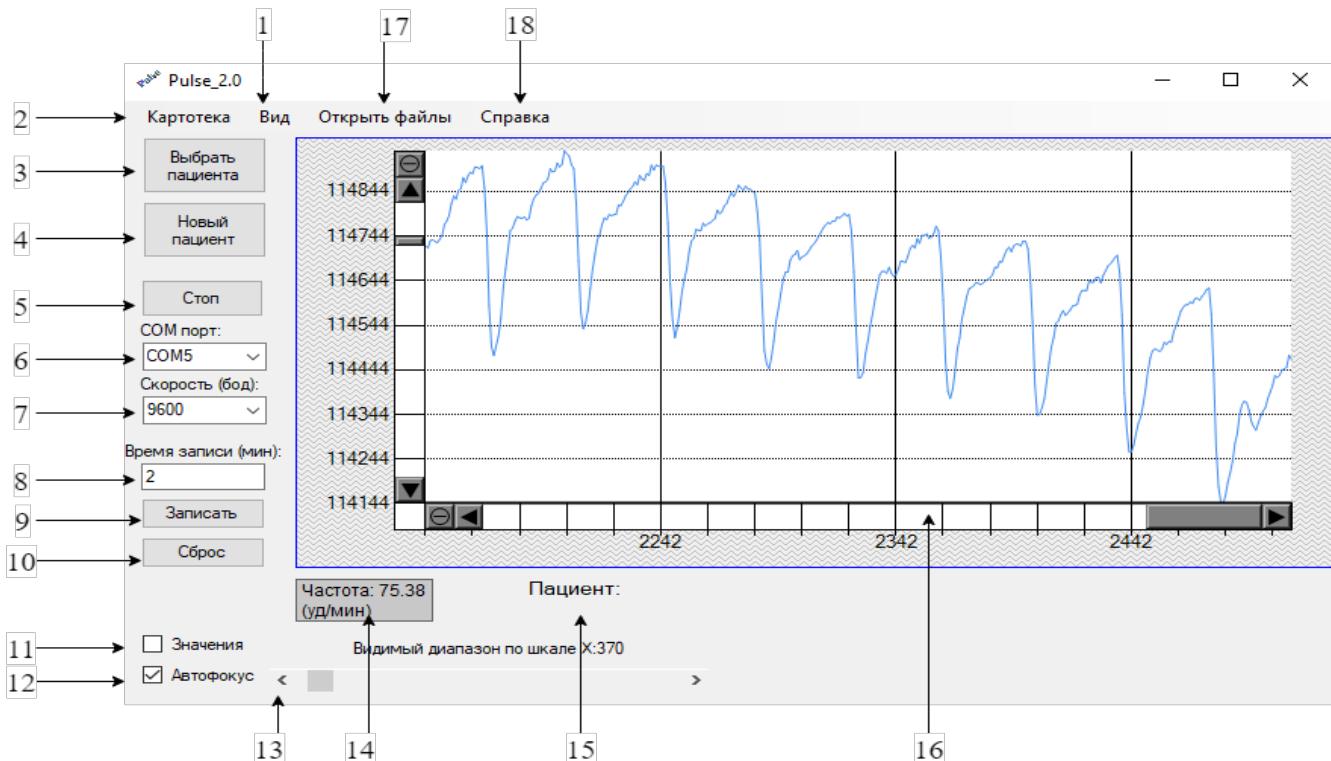


Рис. 4. Пользовательский интерфейс программы

На рисунке 4 цифрами отмечены следующие элементы.

1. Кнопка «Вид», при помощи которой пользователь может менять цвет графика и некоторых его элементов.

2. Кнопка «Картотека», с помощью которой пользователь может открыть картотеку, в которой хранятся все данные о пациентах.

3. Кнопка «Выбрать пациента», позволяет пользователю выбрать того пациента, сфигмограмму которого он хочет записать.

4. Кнопка «Новый пациент». Позволяет пользователю добавить в картотеку данные о новом пациенте.

5. Кнопка «Старт». После нажатия на данную кнопку, программу подключается к указанному СОМ-порту и начинает получать данные из него.

6. Элемент «ComboBox», для выбора СОМ-порта, к которому подключен микроконтроллер.

7. Элемент «ComboBox», для выбора скорости подключения к СОМ-порту.

8. Элемент «TextBox». Представляет собой поле для ввода необходимой продолжительности записи сфигмограммы.

9. Кнопка «Записать». Используется для того, чтобы начать запись сфигмограммы.

10. Кнопка «Сброс». Используется для очистки графика от данных. В случае, если идет запись сфигмограммы, нажатие на данную кнопку приведет к тому, что запись начнется с начала.

11. Элемент «CheckBox». После активации данного элемента, на графике будет отображаться значение каждой точки относительно оси «ординат».

12. Элемент «CheckBox». После активации данного элемента, происходит автоматическая фокусировка сфигмограммы на графике.

13. Элемент «HScrollBar». Применяется для того, чтобы пользователь мог изменить видимый диапазон графика относительно оси «абсцисс».

14. Элемент «Label», отображает частоту сердечных сокращений, если ее специальным способом высчитывает и отправляет в СОМ-порт микроконтроллер.

15. Элемент «Label», отображает фамилию, имя и отчество пациента, которого выбрал пользователь для записи сфигмограммы.

16. Элемент «Chart». Отображает данные, полученные с микроконтроллера в режиме реального времени.

17. Кнопка «Открыть файлы», позволяет пользователю, при необходимости, без использования базы данных открыть записанную ранее сфигмограмму.

18. Кнопка «Справка». Открывает инструкцию, для пользователя, по правильному использованию данной программы.

Выводы. Для решения проблемы сбора и хранения данных с оптического датчика совместно с микроконтроллером, имеющим технологию подключения к компьютеру «USB-to-COM», был разработан программный комплекс, включающий в себя визуализацию полученных данных, хранение данных о пациентах и их сfigмограммах, с возможностью их редактировать при помощи пользовательского интерфейса. В программу был добавлен дополнительный функционал, направленный на удобный пользовательский интерфейс. Была проведена апробация программы, по результатам которой она зарекомендовала себя способной решать поставленные перед ней задачи.

Литература

1. Гриффитс, И. Программирование на C# 5.0 / И. Гриффитс. - М.: ЭКСМО, 2016. - 208 с.
2. Рихтер, Дж. CLR via C#. Программирование на платформе Microsoft .NET Framework 4.5 на языке C# / Дж. Рихтер. - СПб.: Питер, 2019. - 896 с.
3. Chart класс [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://docs.microsoft.com/ru-ru/dotnet/api/system.windows.forms.datavisualization.charting.chart?view=netframework-4.8> (Дата обращения: 23.06.2020).
4. Heart Rate [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://www.livescience.com/42081-normal-heart-rate.html> (Дата обращения: 24.06.2020).
5. Heart Rate Monitor Using MAX30102 and Pulse Oximetry [Электронный ресурс] – Режим доступа: <https://makersportal.com/blog/2019/6/24/arduino-heart-rate-monitor-using-max30102-and-pulse-oximetry> (Дата обращения: 24.06.2020).
6. Timer C# [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://plssite.ru/csharp/csharp_timer_article.html (Дата обращения: 24.06.2020).

Шурыгин Иван Андреевич, студент Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, тел. 8 (924)-65-34-281, e-mail: shurygin.ivan03@yandex.ru..

Цыбиков Анатолий Сергеевич – к.п.н., заведующий кафедрой «Информационных технологий», Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, г.Улан-Удэ, тел. 8 (301-2) 221-215 e-mail: cas313@rambler.ru

Shurygin Ivan Andreevich, student of Banzarov Buryat State University.

Tsybikov Anatoly Sergeevich, Candidate of Pedagogical Sciences, Head of the Department of Information Technology of the Banzarov Buryat State University.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ. ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

УДК 37.025

© Л. В. Антонова, Т. В. Бурзалова, А. В. Данеев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ РЕШЕНИИ ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО АЛГЕБРЕ

Аннотация. В данной статье рассматривается применение элементов векторной алгебры и, в частности, неравенства Коши-Буняковского при решении задач школьного курса алгебры и начал математического анализа. При таком подходе решение некоторых задач существенно упрощается по сравнению с решениями, выполненными традиционными методами, поскольку позволяют избежать громоздких алгебраических вычислений. Они, как правило, непривычны для учащихся, но, как показывает опыт, легко ими воспринимаются. Благодаря интеграции «негеометрического» условия задачи и ее геометрического решения математические знания предстают перед учащимися как живая, динамичная система, способная решать задачи из других наук и практики. Приведены примеры использования элементов векторной алгебры для решения некоторых систем алгебраических уравнений, доказательства алгебраических неравенств, задач на поиск наибольшего и наименьшего значений.

Ключевые слова: векторы, скалярное произведение векторов, неравенство Коши-Буняковского.

© L. Antonova, T. Burzalova, A. Daneev

THE USING OF VECTOR ALGEBRA ELEMENTS IN SOLVING SCHOOL PROBLEMS IN ALGEBRA

Abstract. This article examines the application of vector algebra elements and, in particular, the Cauchy –Bunyakovsky inequality in solving the problems of the school course of algebra and the beginning of mathematical analysis. With this approach, the solution of some problems is significantly simplified in comparison with the solutions performed by traditional methods, since they allow one to avoid cumbersome algebraic calculations. They are generally unusual for students, but experience shows that they are easily perceived by them. Thanks to the integration of the “non-geometric” condition of the problem and its geometric solution, mathematical knowledge is presented to students as a

living, dynamic system capable of solving problems from other sciences and practice. Examples of the using elements of vector algebra for solving some systems of algebraic equations, proofs of algebraic inequalities, problems of finding the highest and lowest values are given.

Keywords: vectors, scalar product of vectors, Cauchy-Bunyakovsky inequality.

Общеизвестны огромные возможности, которые предоставляют методы векторной алгебры при решении задач элементарной геометрии. Особенно естественно применять эти методы при решении задач, связанных с простым отношением трех точек, с вычислением углов между прямыми, прямой и плоскостью, двугранных углов, вычислением объемов фигур, расстоянием между скрещивающимися прямыми и т.д. В задачах такого рода традиционные методы решения обычно связаны со значительными трудностями – довольно громоздкими тригонометрическими вычислениями, с необходимостью тонких геометрических построений, тогда как такие трудности даже не возникают при применении векторных методов. Но векторы могут быть успешно применены не только в геометрии, но и при изучении некоторых вопросов школьного курса алгебры, например, при решении некоторых систем алгебраических уравнений, доказательстве неравенств и решении задач на отыскание экстремума.

В рассматриваемых ниже примерах применяется векторное неравенство Коши-Буняковского и его следствие:

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

Надо заметить, что в первом неравенстве равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы \vec{a}, \vec{b} коллинеарны, а во втором – сонаправлены.

Пусть векторы \vec{a}, \vec{b} имеют координаты $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

Тогда неравенства примут вид:

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы \vec{a}, \vec{b} коллинеарны, то есть координаты этих векторов пропорциональны:

$$a_1 = \lambda b_1, \quad a_2 = \lambda b_2, \quad a_3 = \lambda b_3.$$

Рассмотрим примеры:

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 15, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16. \end{cases}$$

На первый взгляд может показаться, что система имеет бесконечное множество решений (три переменные, два уравнения), но это только на первый взгляд. Введем векторы

$$\vec{a} = (x, y, z), \quad \vec{b} = (1, -2, 3).$$

В векторном виде:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 15,$$

$$|\vec{a}| = 4,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{14}.$$

Очевидное противоречие с неравенством Коши-Буняковского показывает, что система не имеет решений. Теперь проиллюстрируем этот факт геометрически. Точка $O(0,0,0)$ - центр сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ радиуса 4 удалена от плоскости $x - 2y + 3z = 15$ на расстояние $\rho = \frac{15}{\sqrt{14}} > 4$, то есть сфера и плоскость не имеют общих точек.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3, \\ x^5 + y^5 + z^5 = 3. \end{cases}$$

Решение: Рассмотрим векторы

$$\vec{a} = (x, y, z), \quad \vec{b} = (1, 1, 1) \quad \vec{c} = (x^4, y^4, z^4)$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3}.$$

Наша система в векторной форме имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = 3, \\ |\vec{a}| = \sqrt{3}, \\ \vec{a} \cdot \vec{c} = 3. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений по следствию неравенства Коши-Буняковского следует коллинеарность векторов \vec{a}, \vec{b} , то есть $x = y = z = \lambda$.

С учетом первого и третьего уравнений получим единственное решение системы $x=y=z=1$.

Пример 3. Для любых действительных x, y, z доказать неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} \leq \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}$$

Решение: Рассмотрим векторы $\vec{a} = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}, \frac{y}{\sqrt{3}}, \frac{z}{\sqrt{3}} \right)$,

$$\vec{a} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), |\vec{b}| = 1.$$

И неравенство немедленно вытекает из неравенства Коши-Буняковского.

Покажем далее применение неравенства Коши-Буняковского к доказательству условных неравенств

Пример 4. Доказать, что

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}, \text{ если } x+y+z=1.$$

Решение: Введем векторы с координатами

$$\vec{a} = (\sqrt{4x+1}, \sqrt{4y+1}, \sqrt{4z+1})$$

$$\vec{b} = (1,1,1).$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4x+1 + 4y+1 + 4z+1} = \sqrt{4(x+y+z)+3} = \sqrt{7},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3}.$$

Значит, $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \leq \sqrt{21}$.

В заключение покажем применение векторной алгебры в задачах оптимизации.

Пример 5. Найти наибольшее значение функции

$$y = \sqrt{x} + 4\sqrt{1 - \frac{x}{2}}.$$

Решение: Область определения этой функции отрезок [0,2].

Рассмотрим векторы $\vec{a} = (\sqrt{8x}, \sqrt{16-8x})$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, 1\right)$.

$$|\vec{a}| = 4, |\vec{b}| = \frac{3}{2\sqrt{2}}.$$

Имеем: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 3\sqrt{2}$. Отсюда следует справедливость данного неравенства.

Пример 6. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{(x-9)^2 + 4} + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(y-3)^2 + 9}$$

Решение: Пусть A(9,2), B(x,0), C(0,y), D(3,3). Тогда $AB = \sqrt{(x-9)^2 + 4}$, $BC = \sqrt{x^2 + y^2}$, $CD = \sqrt{(y-3)^2 + 9}$, значит, данное выражение представляет собой длину ломаной линии ABCD: $L(ABCD) = AB + BC + CD$.

Следовательно, надо найти такое положение точек B¹ и C¹ на осях координат, чтобы длина ломаной AB¹C¹D была наименьшей. Если ввести точки A₂(9,-2) и A₃(-9,-2), симметричные A относительно оси ОХ и начала координат соответственно, то легко увидеть, что минимальное значение достигается тогда и только тогда, когда искомые точки лежат на прямой A₃D и $L = \sqrt{(3+9)^2 + (3+2)^2} = 13$.

И, наконец, рассмотрим задачу с экономическим содержанием, предлагавшемся на ЕГЭ.

Пример 7. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара, а если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. На каждом из заводов за каждый час работы Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5 млн рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее

количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение: Пусть на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов в неделю, а на заводе, расположенном во втором городе – y^2 часов в неделю. Тогда за неделю будет произведено $3x+4y$ единиц товара. На оплату труда рабочих уйдет $500(x+y)$ рублей. Введем целевую функцию $f(x,y)=3x+4y$ при условии $500(x^2+y^2)=5000000$, откуда $0 \leq x \leq 100$, $0 \leq y \leq 100$.

Тогда надо найти наибольшее значение функции $f(x) = 3x + \sqrt{10000 - x^2}$

Рассмотрим векторы $\vec{a} = (x, \sqrt{10000 - x^2})$, $\vec{b} = (3,4)$, $|\vec{a}| = 100$, $|\vec{b}| = 5$

Тогда $f(x) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 500$, то есть наибольшее значение этой функции равно 500 и достигается, когда векторы \vec{a}, \vec{b} сонаправлены, то есть $x=60$.

Таким образом, использование методов векторной алгебры часто позволяет нам значительно упрощать решение школьных задач алгебры и начал анализа.

В каждом этюде приведены геометрические приемы решения задач. Они, как правило, не обладают для учащихся признаком привычности, но, как показывает опыт, легко ими воспринимаются. Благодаря интеграции «негеометрического» условия задачи и ее геометрического решения математические знания предстают перед учащимися как живая, динамичная система, способная решать задачи из других наук и практики.

Литература

1. Антонова Л. В. О формировании компетенций учащихся профильных математических классов // Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Педагогика. 2010. № 4. с. 56-61.
2. Бурзалова Т. В. Межпредметные связи в преподавании математики// Вестник Бурятского государственного университета. - 2011. - Вып. 15: Теория и методика обучения. - С. 21-23.
3. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2020. Профильный уровень. тренировочных вариантов по демоверсии 2020 года:учебно-методическое пособие/ под.редакцией Ф. Ф.Лысенко, С. Ю. Кулабухова. Ростов-на-Дону: Легион, 2019. 416 с.

Антонова Лариса Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, директор Института математики и информатики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Бурзалова Татьяна Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: burzalova@mail.ru

Данеев Александр Васильевич, доктор технических наук, доцент кафедры информационных технологий Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: daneev@mail.ru

Antonova Larisa Vasilyevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

Burzalova Tatyana Vasilyevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

Daneev Alexander Vasilyevich, Doctor of Technical Science, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ ПРИ РЕШЕНИИ ШКОЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПО ГЕОМЕТРИИ

Аннотация. В данной статье рассматривается векторный метод решения геометрических задач - один из ведущих методов в школьном курсе геометрии. Для решения задач элементарной геометрии с помощью векторов необходимо, прежде всего, научиться «переводить» условие геометрической задачи на «векторный» язык, то есть строить векторное представление задачи. После такого перевода осуществляются алгебраические вычисления с векторами, а затем полученное снова «переводится» на «геометрический» язык. В этом и состоит сущность векторного метода решения геометрических задач. Представление задачи в векторной форме позволяет значительно упростить решение многих геометрических задач, поэтому проблема совершенствования содержания и методов обучения математике в школе в свете современных требований с необходимостью включает в себя совершенствование методики изучения векторов.

Ключевые слова: Векторное представление, вектор, геометрическая задача, обучение решению задач.

© L. Antonova, T. Burzalova, A. Daneev

THE USE OF ELEMENTS OF VECTOR ALGEBRA IN THE SOLUTION OF SCHOOL PROBLEMS IN GEOMETRY

Abstract. This article deals with the vector method of solving geometric problems, one of the leading methods in the school course of geometry. To solve problems of elementary geometry using vectors, it is necessary, first of all, to learn how to “translate” the condition of a geometric problem into a “vector” language, that is, to construct a vector representation of the problem. After such translation, algebraic calculations with vectors are performed and then the obtained result is again “translated” into a “geometric” language. This is the essence of the vector method for solving geometric problems. The representation of the problem in vector form makes it much easier to solve many geometric problems, therefore, the problem of improving the content and methods of teaching mathematics at school in the light of modern requirements necessarily includes improving the methodology for studying vectors.

Keywords: Vector representation, vector, geometric problem, learning of solving problems.

Представление задачи означает формулировку задачи на языке некоторой теории, что позволяет применять для решения задачи в исходной постановке теоремы, операции, алгоритмы и методы той теории, в терминах которой она адекватно представлена. Надо отметить, что одна и та же задача может иметь различное представление в рамках одной теории. Важным шагом этапа представления задачи является абстракция, игнорирование несущественных для задачи деталей. И, естественно, для успешного решения задачи, необходима свободная ориентация в той теории, в терминах которой представлена задача.

Не секрет, что геометрическая подготовка выпускников даже профильных математических классов оставляет желать лучшего. Одной из причин этого можно назвать, тот факт, что учащиеся зачастую не «видят» чертеж, не замечают на нем уже известных теорем и закономерностей. В геометрии развить «видение» очень трудно, этим надо заниматься постоянно, начиная еще с начальных классов, когда вводятся элементарные понятия фигур на плоскости и в пространстве. Поэтому необходимо большее внимание уделять методам, основанным на наглядно-геометрических представлениях, поскольку таковые имеют ярко выраженный развивающий характер и подчеркивают приоритетность и первичность геометрических представлений в школьной математике. Векторное представление геометрических задач в настоящее время становится одним из ведущих методов. Но для учащихся этот метод остается одним из самых сложных. Основной причиной трудностей усвоения векторного метода решения задач, на наш взгляд, является то, что школьники недостаточно овладевают аппаратом векторной алгебры.

В геометрических задачах, решаемых векторным методом, векторы явно в условие могут и не входить. Поэтому необходимо уметь перевести условие на векторный язык, чтобы была возможность применить к ее решению векторный аппарат. Формулировка данной геометрической задачи есть векторное представление задачи или является векторной моделью задачи.

Анализируя метрические и аффинные задачи, имеющие векторное представление, можно выделить группу ассоциаций, которые помогают составлять векторное представление геометрической задачи. Как правило, эти ассоциации тройные: геометрическое условие — векторное условие — аналитическая

запись векторного условия. Перечислим основные типы ассоциаций:

1. Параллельные прямые a и b — коллинеарные векторы \vec{a}, \vec{b} — один вектор линейно выражается через другой $\vec{a} = \lambda \vec{b}$.
2. Перпендикулярные прямые a и b — ортогональные векторы \vec{a}, \vec{b} — скалярное произведение векторов равно нулю $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0$.
3. Вычислить угол между прямыми a и b — вычислить угол между векторами \vec{a}, \vec{b} — найти косинус угла между векторами \vec{a}, \vec{b} по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

4. Найти длину отрезка AB — вычислить длину вектора $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ — найти длину вектора по формуле
$$|\vec{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
5. Простое отношение трех точек A, B, C — коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ — вычисление $\lambda: \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$.
6. Задачи на доказательство принадлежности трех точек A, B, C одной прямой C — коллинеарность векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ — вычисление $\lambda: \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{BC}$
7. Задачи на доказательство принадлежности четырех точек A, B, C, D одной плоскости — компланарность векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ — смешанное произведение векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ равно нулю $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}) = 0$.
8. Задачи на вычисление площади треугольника (параллелограмма) ABC — длина векторного произведения векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ — вычисление длины векторного произведения.
9. Задачи на вычисление объемов призмы (тетраэдра) — модуль смешанного произведения векторов $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ — вычисление смешанного произведения по формуле.

При решении геометрических задач векторным методом рекомендуется пользоваться следующей схемой:

1. Проанализировать условия задачи: а) Выяснить в какой системе координат (двумерной или трехмерной) рассматривается данная задача; б) Записать, что нам дано, что нужно найти или доказать, а также построить чертеж по условию задачи.
2. Составить векторное представление задачи
3. Составить векторные соотношения в задаче, соответствующие требованиям задачи.
4. Перевести полученный результат на геометрический язык.

Пример.

Доказать, что если точка О – центр тяжести треугольника АВС, то верно равенство: $AB^2+BC^2+CA^2=3(OA^2+OB^2+OC^2)$.

Решение: Задача двумерная. Составим векторное представление:

$$\overrightarrow{AB} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}.$$

Тогда $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}(\vec{c} - \vec{b}), \overrightarrow{BO} = \frac{1}{3}(\vec{a} - \vec{c}), \overrightarrow{CO} = \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a})$.

$$AB^2+BC^2+CA^2-3(OA^2+OB^2+OC^2)=\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})^2 = 0.$$

Сила векторного метода заключается в том, что он позволяет легко делать обобщения, роль которых в математике трудно переоценить [1].

Литература

1. Антонова Л. В., Антонов В. И., Бурзалова Т. В. Обобщение как путь формирования теоретического мышления учащихся // Вестник Бурятского государственного университета. - 2009. - Вып. 15: Теория и методика обучения. - С. 7-9.
2. Антонова Л. В., Бурзалова Т. В. О преподавании в математических классах // Вестник Бурятского государственного университета. - 2009. - Вып. 15: Теория и методика обучения. - С. 9-11.
3. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2017 – 383 с.: ил.

Антонова Лариса Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, директор Института математики и информатики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5

Бурзалова Татьяна Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующая кафедрой прикладной математики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: burzalova@mail.ru

Данеев Александр Васильевич, доктор технических наук, доцент кафедры информационных технологий Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: daneev@mail.ru

Antonova Larisa Vasilyevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

Burzalova Tatyana Vasilyevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

Daneev Alexander Vasilyevich, Doctor of Technical Science, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

© Батхүү Цереннаадмид, Н. Б. Лумбунова, Е. П. Миронова

КОМПЕТЕНТНОСТНО-ОРИЕНТИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ОБЩИХ КОМПЕТЕНЦИЙ

Аннотация. При изучении математики одним из инструментов реализации компетентностного подхода могут служить компетентностно-ориентированные задачи. В статье описаны проблемы направленности, содержания компетентностно-ориентированных задач. Выявлено, что компетентностно-ориентированные задачи могут быть использованы при формировании общих компетенций, являющихся одним из основных результатов при компетентностном подходе в образовании. Описаны обязательные признаки компетентностно-ориентированных задач. Рассмотрены отличия компетентностно-ориентированных задач от традиционных. Выделены мотивационный и формулировочный аспекты в структуре данных задач, направленных на формирование мотивационного и деятельностного компонентов общих компетенций. Для формирования когнитивного компонента общих компетенций могут быть использованы любые задачи, связанной с математикой. В качестве примера предложены описание проблемной ситуации и формулировка задачи по теме «Градусная мера угла» для студентов, обучающихся по специальностям Землеустройство и Прикладная геодезия.

Ключевые слова: компетентностно-ориентированная задача, общие компетенции, компоненты компетенций.

© Batkhuu Tserenadmid, N. Lumbunova, E. Mironova

COMPETENCE-ORIENTED TASKS AS A FORMING GENERAL COMPETENCIES MEANS

Abstract. When studying mathematics, one of the tools for implementing the competence-based approach can be competence-oriented tasks. The article describes the problems of focus and content of competence-oriented tasks. It has been found that competence-oriented tasks can be used in the formation of general competencies, which are one of the main results in the competence-based approach in education. The mandatory features of competence-oriented tasks are described. The differences between competence-oriented tasks and traditional ones are considered. The motivational and formulation aspects are

highlighted in the structure of these tasks aimed at the forming of motivational and activity components of general competences. To form the cognitive component of general competencies, any tasks related to mathematics can be used. As an example, we offer a description of the problem situation and the formulation of the problem on the topic "Degree measure of an angle" for students studying in the specialties of Land Management and Applied Geodesy.

Keywords: competence-oriented task, general competencies, competencies components.

Современная экономика, все больше направленная на технологизацию, цифровизацию, автоматизацию требует от профессиональных образовательных организаций подготовки специалистов, обладающих компетенциями не только в профессиональной сфере, но и общими компетенциями, которые в научной литературе называют ключевыми, универсальными или «гибкими навыками». В.И. Байденко и Б. Оскарссон отмечают, что общие компетенции – это «личностные качества, способности, навыки и знания, которые выражены в различных формах в многообразных ситуациях работы и социальной жизни. Для индивида в условиях развитой рыночной экономики существует прямое соответствие между уровнем имеющихся базовых навыков и возможностью получения занятости» [2].

Результаты исследования, проведенного в Гарвардском университете и Стенфордском исследовательском институте, говорят о том, что успешность сотрудника зависит от его профессиональных компетенций всего лишь на 15%, оставшиеся 85% зависят от общих компетенций [7]. В федеральных государственных образовательных стандартах всех уровней образования общие компетенции отражены в виде отдельных перечней образовательных результатов (ключевых, общих, универсальных компетенций) и обязательны к формированию у учащихся на протяжении всего периода обучения.

В системе среднего профессионального образования общие компетенции едины для всех специальностей и отражают информационную, личностную, коммуникативную, социальную составляющие.

Для нас представляет интерес формирование общих компетенций в процессе изучения студентами математики. По мнению В. И. Байденко, общие компетенции не могут формироваться в процессе традиционного обучения на предметно-

содержательном уровне путем воспроизведения студентами информации или отдельных действий [1]. Появляется необходимость интегрировать в образовательный процесс различные деятельности: учебно-познавательную, исследовательскую, проектную, квазипрофессиональную.

Основным видом деятельности на уроках математики является решение задач. А. Ф. Эсаулов определяет задачу более в широком смысле, не только как вычислительный аппарат в поставленных задачах, но и в дидактическом контексте [6, с.27]. Очевидно, что в целях формирования общих компетенций можно использовать задачи компетентностно-ориентированного характера. Данный термин достаточно широко используется в педагогической практике, но в научной литературе не наблюдается определения, полностью отражающего его суть. Многие исследователи связывают компетентностную ориентацию обучения с контекстным содержанием задач.

Л. В. Павлова считает, что компетентностными являются «...задачи, целью решения которых является разрешение [4] стандартной или нестандартной ситуации (предметной, межпредметной, практической) посредством нахождения соответствующего способа с обязательным использованием предметных (математических) знаний». При выделении обязательных признаков компетентностно-ориентированных задач к этой особенности она добавляет:

- сюжетную, ситуативную или проблемную формулировку условия;
- нестандартную форму представления данных в виде рисунка, таблицы, схемы, графика и др.;
- область применения решения данной задачи в явном или неявном виде.

По мнению И. Б. Шмигириловой [5] для компетентностно-ориентированной задачи недостаточно наличия практического содержания. С учетом индивидуальных особенностей учащихся, она должна быть ориентирована на развитие:

мыслительных операций (анализ, синтез, обобщение, конкретизация, сравнение, абстрагирование и т.д.);

умений работать с информацией (поиск, анализ, преобразование, интерпретация, представление в различных формах и т.д.);

приемов внутренней познавательной деятельности (внимание, запоминание, оперирование образами, представлениями, понятиями, суждениями, умозаключениями и т.д.);

личностных качеств учащихся, способствующих самостоятельной познавательной деятельности.

Группой педагогов Санкт-Петербургского национального исследовательского университета информационных технологий, механики и оптики [3] выведен обобщенный алгоритм составления компетентностно-ориентированных задач, который отражает их основные структурные компоненты:

1. Определение компетенций, подлежащих формированию;
2. Составление задачи на основе выбранного аспекта;
3. Поиск источников, позволяющих реализовать планируемую деятельность;
4. Формирование мотивов и стимулов;
5. Создание ключей или модельных ответов, шкал, бланков и инструкций к предъявлению результата решения задачи;
6. Самоэкспертиза задания.

Таким образом, между компетентностно-ориентированными и традиционными задачами существует ряд отличительных признаков:

- достаточно объемный текст с данными и дополнительной информацией в виде таблиц, диаграмм, схем, графиков, географических карт, рисунков, фотографий и др., имеющий сложную структуру;
- контекст задания, сформулированного как сюжет или ситуация, направленные на познавательную мотивацию учащегося и в котором нет явного указания на использование знаний, необходимых для решения задачи;
- возможность получения разных ответов, в разных формах с указанием области применения результата решения задачи;
- нестандартность формулировки задания, содержащего в условии избыточные или недостаточные для решения данные.

В структуре любой компетенции выделяют как минимум три компонента: мотивационный, когнитивный и деятельностный. Поскольку речь идет об общих компетенциях специалиста среднего звена, мотивационный компонент позволяет студентам осознать значимость выбранной ими профессии, проявлять интерес к себе как к будущему специалисту, создать положительные мотивы при

обучении, активизировать мыслительную деятельность, стимулировать инициативность студентов, самовыражение, самосознание, обусловленные потребностями личности, познавательный интерес к обучению и творческий подход к изучению математики. Основной задачей данного компонента является осуществление целенаправленного формирования общих компетенций; формирование направленности мотивации студентов на различные виды деятельности.

Контекстную составляющую компетентностно-ориентированных задач можно продумать таким образом, чтобы она была связана с мотивацией обучения. В этой связи формирование мотивов и стимулов к освоению компетенции посредством компетентностно-ориентированных задач по математике становится одной из задач преподавателя. В компетентностно-ориентированных задачах целесообразно включать проблемы, реальные ситуации и задачи, возникающие за пределами математики и связанные с ней в различных областях знаний.

Приведем пример описания проблемной ситуации компетентностно-ориентированной задачи по теме «Градусная мера угла» для студентов, обучающихся по специальностям 21.02.08 Прикладная геодезия и 21.02.04 Землеустройство. Для них необходимы глубокие знания по тригонометрии, математическому анализу, геометрии, а также умения работать с пропорциями, масштабом, единицами измерения длин, площадей, системами координат.

Описание проблемной ситуации. Методы решения научных и практических задач геодезии и землеустройства основываются на законах математики и физики. При создании геодезических сетей, градостроительного планирования земельного участка, топографической съемке, изыскательных работах, строительстве и эксплуатации зданий, сооружений одним из основных видов работ является измерение углов. На основе математики производится обработка результатов измерений, позволяющая получать с наибольшей достоверностью значения искомых величин. Основной единицей измерения углов в геодезии и землеустройстве служит градус ($^{\circ}$), представляющий $1/90$ прямого угла, или $1/360$ окружности. Меньше распространены градовая и радианная меры угла. Данные, полученные посредством измерений в геодезии, — важнейшая информация, которая служит

источником решений абсолютного большинства задач современных кадастровых инженеров. Очевидна значимость точности измерения и вычисления углов.

Когнитивный компонент компетенций направлен на формирование у студентов умений интегрировать знания различных областей математики и применять их в реальной жизни. Владение такими основными логическими приемами и операциями, как анализ, сравнение, классификация, аналогия, обобщение, выявление закономерности, развивающихся у учащихся преимущественно на занятиях математики, позволяет полноценно воспринимать и познавать мир и является важным фактором становления всесторонне развитой личности. Способность четко и логически мыслить, ясно излагать свои мысли требуется человеку любой профессии.

Любая задача, связанная с математикой, направлена на формирование когнитивного компонента общих компетенций.

Деятельностный компонент ориентирован на включение студентов в практическую деятельность, где он может оптимально использовать полученные знания и умения, принимать решения и брать на себя ответственность, реагировать на происходящие изменения в социально-трудовой, производственной сфере, осознанно применять свой индивидуальный опыт при решении нестандартных задач, в том числе, связанных с будущей профессиональной деятельностью. С социальной точки зрения, данный компонент рассматривает будущего специалиста как личность, способную на реальное действие, поступок, поведенческий акт в пределах общепринятых норм. С профессиональной точки зрения будущий специалист рассматривается как профессионал, который обладает не только значительными знаниями и умениями в какой-либо области, но и обладающего способностями креативно подходить к своей работе.

Самым содержательным этапом составления компетентностно-ориентированной задачи является этап ее составления. В зависимости от категорий учебных целей, в формулировке задания можно указать систему действий обучающегося.

Формулировка задания. Выполните расчетное задание на тему «Проектирование межевания земельного участка». Задание должно содержать следующие разделы:

1. *Определение цели проектного задания*

2. Сформулируйте задачи проектного задания для достижения цели

3. Систематизация исходных данных

4. Построение математической модели обработки результатов

5. Интерпретация полученных математических результатов

В ФГОС среднего профессионального образования указаны одиннадцать общих компетенций. Для наиболее эффективного формирования и охвата большего их количества целесообразно сконструировать систему компетентностно-ориентированных заданий на межпредметном и практическом содержании, установив межпредметные связи данных задачи с другими учебными дисциплинами, подобрав факты, которые могут быть использованы для решения жизненных ситуаций и т.д.

Литература

1. Байденко В. И. Компетенции в профессиональном образовании (к освоению компетентностного подхода) // Высшее образование в России. 2004. №11. С. 3-11.
2. Байденко В. И., Оскарsson Б. Базовые навыки (ключевые компетенции) как интегрирующий фактор образовательного процесса // Профессиональное образование и личность специалиста. М, 2002. №5. С. 22-46.
3. Компетентностно-ориентированные задания в системе высшего образования / Шехонин А. А., Тарлыков В. А., Клещева И. В., Багаутдинова А. Ш., Будько М. Б., Будько М. Ю., Вознесенская А. О., Забодалова Л. А., Надточий Л. А., Орлова О. Ю. СПб: НИУ ИТМО, 2014. 99 с.
4. Павлова Л. В. Система познавательных компетентностных задач как средство совершенствования предметно-методической компетентности будущего учителя математики // Вестник Псковского государственного университета. Серия: Естественные и физико-математические науки. 2009. №8. С. 58-66.
5. Шмигирилова И. Б. К вопросу о понятии "компетентностно ориентированная задача" // Вестник ТГПУ. 2018. №7 (196). С.121-129. DOI 10.23951/1609-624X-2018-7-121-129.
6. Эсаулов А. Ф. Психология решения задач. Методическое пособие. М., Высшая школа, 1972. 216 с.
7. Marcel M. Robles Executive Perceptions of the Top 10 Soft Skills Needed in Today's Workplace // Business Communication Quarterly. 2012. No.75(4). Pp. 453–465. DOI: 10.1177/1080569912460400

Батхуу Цереннадмид, профессор-доктор математики, заведующий научно-исследовательским центром по математике и естественным наукам, Монгольский государственный университет образования, Монголия, Улан-Батор, e-mail: tsbatkhuu@yahoo.com

Лумбунова Наталья Баировна, преподаватель, ГБПОУ «Бурятский аграрный колледж им. М.Н. Ербанова», 670031, Республика Бурятия, г.Улан-Удэ, ул. Трубачеева, 140, e-mail: gnat6856mk@gmail.com

Миронова Екатерина Пурбуевна, кандидат педагогических наук, старший преподаватель кафедры геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: mirkaterina84@mail.ru

Batkhuu Tserenadmid, Professor – Doctor of Mathematics, Mongolian State University of Education

Lumbunova Natalya, teacher, Buryat Agricultural College named after M.N. Erbanov, Trubacheeva, 140, Ulan-Ude, Russia, 670031, e-mail: gnat6856mk@gmail.com

Mironova Ekaterina, Candidate of Physics and Mathematics, Senior Lecturer, Banzarov Buryat State University

В СВЕТЕ НОВЫХ ВОСПИТАТЕЛЬНЫХ ПЕРСПЕКТИВ: МЕТОДОЛОГИЯ «КРУГИ ЭЙЛЕРА»

Аннотация. В статье мы анализируем высказывания некоторых государственных деятелей относительно вносимых поправок в Закон об образовании, предлагаем свой проект воспитания через гуманизацию мышления на основе применения теоретико-множественной методики «круги Эйлера» к этико-политико-правовым и другим мировоззренческим конструктам. Сформулированы примеры понятий, выяснение отношений между которыми, повышает познавательный интерес учащихся к социо-гуманитарным проблемам, заставляет их задуматься о своей человеческой природе, о духовных ценностях, приучает мыслить самостоятельно, ответственно и по-доброму. Мысление может быть ответственным, только если человек осознает единство и взаимозависимость всего сущего. А для этого осознания необходимо очень много размышлять на соответствующие темы. Проведенное исследование может лежать в основу возможного и необходимого курса «Логика и философские размышления», с помощью которого наилучшим образом можно было бы гуманизировать мышление.

Ключевые слова: воспитание; закон об образовании; гуманизация мышления; конструкты; логика; круги Эйлера; понятия.

© L. Gomboeva, V. Tsyrenova

IN THE LIGHT OF NEW EDUCATIONAL PERSPECTIVES: EYLER'S CIRCLE METHODOLOGY

Abstract. In the article we analyze the comments of some public figures about the amendments to the Law on Education, we propose our project of education through humanization of thinking based on the application of the theoretical-plural methodology «Euler's circles» to ethical, politico-legal and other worldview constructs. Examples of concepts have been formulated, the clarification of relations between them increases the pupils' cognitive interest in social and humanitarian problems, prompts them to reflect on their human nature and spiritual values, and teaches them to think independently, responsibly and kindly. Thinking can only be responsible if one realizes the unity and interdependence of all things. This awareness requires a great deal of reflection on the relevant subjects. The research carried out can form the basis of a possible and necessary course «Logic and Philosophical Thinking», with the help of which it would be possible to humanize thinking in the best way.

Keywords: education; Education Act; humanization of thinking; constructs; logics; Euler circles; concepts.

Теоретическая часть. Как известно, сейчас в Конституцию РФ вносятся некоторые изменения, и в одной из добавленных статей – 67.1 – правильно утверждается необходимость духовно-нравственного воспитания: «дети являются важнейшим приоритетом государственной политики, государство создает условия, способствующие всестороннему духовному, нравственному и интеллектуальному развитию детей, воспитанию в них патриотизма и гражданственности, а также уважения к памяти защитников Отечества и старшему поколению».

В соответствии с изменениями в Конституции 21 мая 2020 г. президент РФ Владимир Путин внес в Государственную думу поправки в Закон «Об образовании в Российской Федерации» по вопросам воспитания обучающихся. В них отмечается, что «принятие федерального закона будет способствовать всестороннему духовному, нравственному и интеллектуальному развитию обучающихся, воспитанию в них чувства патриотизма и гражданственности, уважения к памяти защитников Отечества, старшему поколению и человеку труда». По мнению главы Комитета Госдумы по образованию и науке В. Никонова, эти поправки предоставляют достаточно обширное пространство для творчества в постановке целей, выборе методов в этом направлении.

Председатель СФ В. Матвиенко считает важным усилить внимание к формированию в подрастающем поколении таких ценностей, как добро, справедливость, честность и любовь к родине. «Для жизни общества не менее значимо следование ценностям, на которых базируется наша цивилизация. Таких, как добро, справедливость, счастье, здоровье, забота о других и помочь им, гражданственность, честность, любовь к Родине» [3]. Ранее она отмечала, что «воспитательная работа "не должна быть ни проповедью, ни назиданием". "Ее необходимо строить как диалог педагогов и школьников. Она должна включать в себя такие элементы, как доказательность, терпимость к иному мнению, уважение достоинства учащихся"» [7]. Спикер СФ добавила, что современные информационные технологии позволят преодолеть угрозы доминирования технократического и прагматического мышления и поведения в современном мире глобализации, когда во

главу угла экономики, бизнеса и деятельности органов власти ставятся рациональность, эффективность и выгода. Эти критерии, по ее мнению, безусловно, важны и нужны, но «не должны быть самодовлеющими...»

Министр просвещения РФ С. Кравцов предлагает следующие ценности: «родина, семья, дружба, взаимопомощь, спорт и здоровье, любовь к природе, стремление к знаниям, труд» [9].

Первый зампред комитета ГД по образованию и науке О. Смолин предостерегает, что вопросы патриотического воспитания собираются решать традиционными бюрократическими методами. «Отныне каждого учителя, помимо неизвестного числа документов, обязут писать план воспитательной работы, причем не на один год, и затем отчитываться о его выполнении... появится отчет номер 301... Сомневаюсь, что это реально поможет реальному воспитательному процессу. Бюрократизация образования в целом и воспитания в частности приведет к обратному эффекту... Поэтому мы однозначно за патриотическое воспитание, но против того, чтобы эту задачу пытались решить бюрократическими средствами» [10].

Лидер фракции «Единая Россия» С. Неверов подчеркивает, что «Актуальность вопроса очевидна, достаточно вспомнить акты вандализма и проявления неуважения к памятникам, посвященным героям Великой Отечественной войны» [5]. Принятие закона, по его мнению, также поможет бороться с активным втягиванием молодых в движения, организованные криминалом и неонацистами. Здесь еще можно вспомнить многочисленные тиражируемые в сетях акты изdevательств детей и молодежи над другими детьми, мучений и убийств животных. Стоит отметить, что этот садизм – следствие всеобщего размытования представлений о том, что «хорошо» и «плохо», следствие капитализации и деидеологизации культуры, болонской политики дефундаментализации образования.

На наш взгляд, из перечисленных мнений государственных деятелей, в определенной степени, более отчетливое понимание проблем воспитания прослеживается в высказываниях В. Матвиенко и О. Смолина, призывающих к неформальному подходу в воспитании. И эта неформальность может начинаться уже в самом провозглашении ожидаемых от воспитания ценностей. В нашем изменчивом мире, как отмечал Ч. Пирс, «ценности расплывчаты как очертания облаков». Важно поэтому не навязывать образованию незыблемую картину мира и ценностей, а способствовать развитию

собственного мышления и чувствования учащегося, его способность различать добро и зло, справедливое и несправедливое и др. Тем более, что определений лишь одной ценности, например, «справедливость» философия дает не менее десятка.

Воспитание, в общем-то, складывается из двух основ: чувственно-интуитивной и рациональной. К первой отнесем культурную среду, здоровый образ жизни, личный пример; ко второй – духовно-развивающие тексты (возможно, проповеди) и размышления над ними. Так как конференция все-таки математическая, мы не будем обсуждать первые перечисленные пункты, и остановимся на последних.

Воспитывать человека значит не только развивать его чувственно-эмоциональную сферу, но и научить: во-первых, мыслить; во-вторых, мыслить ответственно и по-доброму. Как в английском языке вместо метода «слушай и повторяй» более продуктивен метод «слушай и отвечай», также в области воспитания более продуктивен подход самостоятельного или коллективного думания. Учащихся следует поставить в ситуацию размышления. В этом случае, при регулярном попадании в ситуации размышления, у учащегося, действительно, может развиться нравственное начало. Об этом писал еще Конфуций, это применяется и в буддизме. Лама Цонкапа учил Трем этапам Пути: слушанию, размышлению и практике. Для начала стоит акцентироваться на первых двух из указанных трех этапов Пути.

Пока народ не начнет «думать своей головой», а не наивно писать, например, в соцсетях: «Будем переживать и молиться, чтобы "Россия встала с колен"», ни о каком успешном воспитательном процессе речи быть не может. Иначе, если воспитывать мы будем без развития мышления, получится не процесс воспитания, а процесс зомбирования. Напомним, законопроект предлагает определить воспитание как «деятельность, направленную на развитие личности, создание условий для самоопределения и социализации обучающихся на основе социокультурных, духовно-нравственных ценностей ... в интересах человека, семьи, общества и государства...». Одним из ключевых слов в этом определении воспитания является слово «самоопределение». А как возможно самоопределение, если человек не умеет мыслить?

Об этом писал, в частности, А. Швейцер: помочь новому поколению «можно, только вновь наставляя на путь мышления»

[Цит. по 4, С. 244]. Вечтомов Е. М. «Именно в разуме и духовности заключается подлинная всеобщая природа человека. Воспитание должно совершенствовать в человеке его природу» [4, С. 244].

Ну а главная дисциплина, развивающая мышление, – математика. Ее, как учил М. В. Ломоносов, «уже затем следует изучать, что она ум в порядок приводит». Как отмечает Астанкова И. А., «Даже выполнение скучных и рутинных преобразований опосредованно способствует выработке таких качеств, как собранность и систематичность. Математика учит строить и оптимизировать деятельность, вырабатывать и принимать решения, проверять действия, исправлять ошибки, различать аргументированные и бездоказательные утверждения, а значит, видеть манипуляцию и хотя бы отчасти противостоять ей. Решение задач требует от учащихся добросовестной и серьезной работы над приобретением и укреплением знаний, что приводит к систематическому напряжению умственных усилий, настойчивости в преодолении трудностей. При этом у учащегося воспittleются такие черты характера как трудолюбие, усидчивость, упорство в преследовании намеченной цели, умение не останавливаться перед трудностями и не впадать в уныние при неудачах» [1].

Некоторые авторы отмечают, что наряду с развитием чувства красоты, навыков логики и интуиции, математика воспитывает такие качества, как честность, правдивость, настойчивость и мужество [11, С. 79].

Итак, важно учить мыслить, но не менее важно учить мыслить гуманно. Именно гуманизация мышления ведет к гуманизации культурного пространства. Ещё Сократ известен тем, что постоянно задавал вопросы своим ученикам, заставлял их задуматься о значении слов, выявлял поверхностность их суждений, направлял на истинные ценности. Наличие у Сократа множества выдающихся учеников говорит о том, что выбранный Сократом метод был весьма успешен. Выдающийся ученик выдающегося ученика Сократа – Платона – Аристотель стал основателем логики. В буддизме также широко используется логика для гуманизации мышления.

Но гуманитарные дисциплины в нашей стране не опираются на логику и крайне недостаточно развивают мышление гуманитарно: вместо самостоятельного мышления часто культивируется воспроизведение готовых текстов, вместо установления причинно-следственных связей в социокультурном пространстве нередко

даются какие-то обрывочные сведения. В самом интересном, на наш взгляд, учебнике по обществознанию – учебнике Л. Н. Боголюбова – тема «социальные нормы» дается вне их связи с ценностями, вообще про ценности ничего не говорится в курсе обществознания 10 и 11 классах. А ведь откуда берутся нормы? – Из ценностей! Поэтому очень важно развивать ценностное сознание, осмысление ценностей. Ведь пока господствуют материальные ценности, мы никогда по-человечески жить не будем. Напоминаем мнение Дж. Келли: каждый человек обладает уникальной, свойственной только ему системой личных конструктов, которая определяет его поведение и позволяет ему прогнозировать будущие события. И если гуманитарии по тем или иным причинам «тормозят» и не занимаются реальной гуманизацией личностных конструктов, то за дело могут и должны взяться не-гуманитарии, например, или в первую очередь, математики.

Гуманизация мышления с помощью математики хороша именно культурой стремления к четкой формулировке проблемных с гуманистической точки зрения понятий, суждений и рассуждений. Так, М. Кляйн писал: «... изощренность природы неизмеримо превосходит человеческую мудрость. А чистая математика, напротив, дает нам примеры четко поставленных проблем, допускающих полное решение. Для человеческого разума такие четко поставленные и до конца решаемые проблемы обладают особой привлекательностью в отличие от проблем недосягаемой глубины и неисчерпаемой сложности» [6, С. 328-329].

Мы для гуманизации мышления предлагаем проводить логико-смысловой анализ соответствующих понятий, суждений и умозаключений с помощью кругов Эйлера из теории множеств. Знакомство с множествами и отношениями между ними способствует развитию мыслительных операций и речи учащихся: дети постоянно должны сравнивать объекты, выявлять в них сходство и различие, классифицировать, строить обобщения, выражать в речи и обосновывать наблюдаемые свойства и отношения. Эта методика позволяет поставить учащихся в ситуацию думания, необходимости четкого формулирования и обоснования мыслей.

Здесь важно научить видеть однозначные отношения между относительно простыми понятиями, потому что в противном случае, человек путается в понятиях, выстраивает ложные суждения и т.п., соответственно, он не уверен в себе, в своём мышлении, и

значит, он легко готов пойти против истины, если это сулит ему какую-то выгоду, поступить безответственно. Следующий этап в развитии мышления – научить видеть неоднозначности в достаточно сложных понятиях, а также неоднозначности и относительность отношений между этими понятиями.

У метода «круги Эйлера» есть определенные преимущества по сравнению с нередко размытыми гуманитарными рассуждениями: наглядность, четкость, вариативность, интеллектуальная привлекательность, возможность самостоятельного размышления и групповых обсуждений. Можно подбирать бесконечное количество вариантов понятий, суждений и рассуждений для размышлений гуманизирующего типа. Откуда? – Можно не изобретать велосипед, а взять за основу огромный массив духовно-развивающих, прежде всего, философских учений. Их можно критически осмысливать и применять наиболее подходящие в воспитательно-образовательных целях.

Очень важно учить видеть отношения между понятиями и проблемы их определений в гуманитарной и социальной области. Как учил еще Конфуций: «Если имена неправильны, речь противоречива. Если речь противоречива, дела не завершаются успехом, если дела не завершаются успехом, не процветают правила поведения и музыка, народу некуда поставить ноги и положить руки».

Практическая часть. В начале мы приводим наборы понятий, предназначенные для усвоения методики «круги Эйлера». Ставится задача: изобразить отношения между понятиями в кругах Эйлера. Ниже приведен скриншот из решения ребятами в он-лайн формате первого набора понятий (композитор; пианист; музыкант; поэт). Как видно, лишь одиннадцатая попытка оказалась успешной.

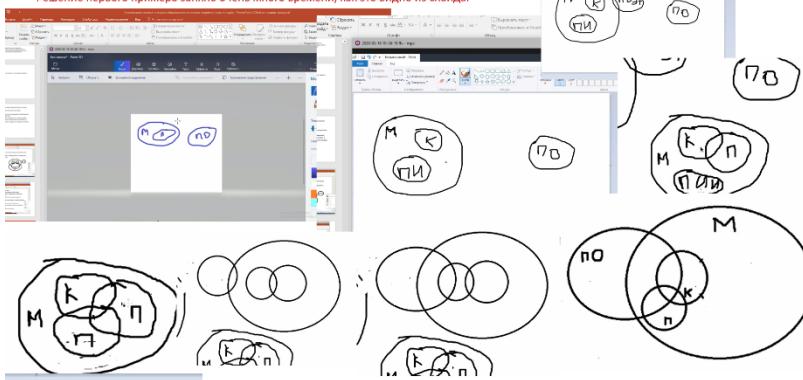
Наборы понятий для усвоения методики «круги Эйлера»

1. Композитор; пианист; музыкант; поэт.
2. Млекопитающее; кит; водное животное; рыба; акула.
3. Квадрат; куб; треугольник; плоская фигура; правильная фигура.
4. Мужчина; сын; отец; дед; брат.
5. Дочь; внучка; мать; бабушка; врач; школьница.

Первый пример для усвоения методики работы с кругами Эйлера.

Данные понятия: музыкант, поэт, гианист, композитор.

Решение первого примера заняло очень много времени, как это видно из слайда.



Далее, после усвоения методики, для гуманизации мышления мы предлагаем изобразить отношения между понятиями, выявляющими и развивающими мировоззренческую позицию личности. Блоки гносеологически развивающих и онтологических конструктов призваны убрать или хотя бы поколебать наивно-реалистические представления учащихся, которые зачастую и являются основой их неведения, их непонимания взаимозависимости и изменчивости мира. Этический блок позволит осмысливать понятия, касающиеся морали и нравственности. Социальный политико-правовой блок необходим для гуманизации мышления, поскольку бесправный рабски мыслящий человек не может быть духовно-нравственным человеком; духовный человек – это всегда человек независимо мыслящий, задумывающийся о благе других, понимающий основные политico-правовые проблемы. Осмысление этого блока также может способствовать формированию ясности понимания социальных причин гуманитарных проблем. Традиционно, сфера правосознания глубоко изучается только юристами. Но ещё Л. Петражицкий в 1907 г. отмечал, что правосознание должно предшествовать нравственному сознанию: «Воспитание «без права» дает в результате отсутствие прочной этической почвы и гарантии против житейских искушений, а что касается специально отношения к человеческой личности, чужой и своей, то естественный продукт такого воспитания — «рабская душа» и вместе с тем неуважение чужой личности, деспотизм и самодурство» [8, С. 9].

Наборы понятий для гуманизации мышления

Группа психологических конструктов

1. Здоровый ум; нездоровный ум; деньги; самая большая ценность в жизни человека, самая большая правильная ценность в жизни человека.

2. Улыбка; внутренняя улыбка; проявление доброжелательности; проявление агрессивности; правильное проявление личности в дискуссии.

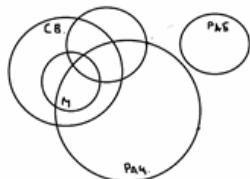
3. Комплекс неполноценности; комплекс превосходства; состояние баланса «я уникален» и «другие уникальны»; результат сравнения себя с другими; препятствие для развития.

Группа этических конструктов

4. Духовно свободный; духовный раб; рациональный человек; мудрый человек; тот, кто несёт свет и устраниет тьму неведения.

5. Мужество; страх; состояние, совместимое со счастьем.

6. Воспитание; воспитание без воспитания правосознания; почва для отсутствия гарантии противостояния житейским искушениям.



Духовно-свободный человек; духовный раб; рациональный человек; мудрый человек; человек, привносящий свет во тьму неведения.

Группа антропологических смысловых конструктов

7. Человек, который должен иметь перспективное видение своего дальнейшего существования; руководитель; стариk; юноша.

8. Лидер; харизматический лидер; настоящий лидер; ответственный человек.

9. Человек; современный человек; периферийное устройство к смартфону; AliveCor Mobile ECG.

10. Интеллектуал; человек, чувствующий чужие страдания; человек, который должен быть у власти; представитель политической элиты.

11. Человек реактивного типа (действующий по типу стимул-реакция); человек проактивного типа (самостоятельно формирующий обстоятельства); современный студент.

Группа гносеологически-развивающих конструктов

12. Солнце, каким оно нам видится в данный момент; Солнце, каким оно было примерно 8 минут назад; Солнце, существующее на данный момент.
13. Познание, чувственное познание, мышление, интуиция.
14. Ясность понимания; ценность; очень большая ценность.
15. Мотивация; правильная мотивация; бодхичитта; эгоцентризм.
16. Внимание; сконцентрированное внимание; рассеянное внимание; внимание студента на занятии.

Группа онтологических конструктов

17. Мир как организм; мир как механизм; взгляд на мир, формируемый классической механикой Ньютона; целостный взгляд на мир; дискретный взгляд на мир.
18. Взаимозависимость; единство; фрактальность; свойства нашего мира с целостной точки зрения.
19. Эффект бабочки; проявление взаимозависимости; эффект, когда маленькое зло повлекло за собой большое зло; эффект, когда маленькое добро повлекло за собой большое добро.

Социальный политико-правовой блок

20. Здоровое общество; нездоровое общество; общество как единый организм; раздробленное общество, состоящее из отчуждённых индивидов; легко манипулируемое общество.
21. Человек, разбирающихся в экономических теориях; человек, который должен разбираться в этико-политико-право-экономических теориях; человек, определяющий стратегию развития страны; премьер-министр; президент страны.
22. Горизонтальное управление, вертикальное управление, правильное управление в инновационно развивающемся обществе.
23. Демократически зрелое общество; российское общество; общество, школы которого успешно готовят учащихся к демократии.
24. Признак демократии; признак авторитаризма; сменяемость власти; несменяемость власти.

В процессе выполнения таких заданий, учащиеся начинают задумываться: «кто такой духовный раб», «кто – духовно свободный», «что такое здоровый ум» и т.д.

Можно лишь предполагать, почему ранее эта, в принципе, несложная и интересная методика не применялась. Во-первых, вследствие разрыва культур, о котором писал Ч. Сноу,

гуманитарии, математики, естественники, технари, - все они, как правило, занимаются своими узкими проблемами, своими достаточно узкими методами. Во-вторых, дисциплина «Логика» все еще является редкостью в нашей стране, она раньше была только при подготовке юристов, но сейчас, даже у юристов, она не всегда встречается. В-третьих, дисциплина «Этика» также является большой редкостью в учебных программах, что совершенно неоправданно и даже в определенной степени, преступно, так как люди без этических учений остаются не ориентированными на самое главное в своей жизни – самопознание, самопреобразование и помочь другим. В-третьих, отечественная и западная философии во многом находится под влиянием ошибочной точки зрения Л. Витгенштейна: «О чём говорить нельзя, о том следует молчать».

В заключение, подведем итоги. В работе мы обосновали невозможность воспитания без гуманизации мышления и представили способ гуманизации мышления через постановку учащихся перед задачей выяснения отношений между мировоззренчески значимыми понятиями. Привнесение таких задач в учебный процесс – возможность преодолеть обыденный в наши дни разрыв между умом и душой, который является главной проблемой наших дней, так как именно он лежит в основе политического, экономического, экологического и других кризисов.

Регулярный анализ гуманистически ориентированных смысловых конструктов – это и есть самый элементарный уровень гуманизации мышления. Мы показали, что без гуманизации мышления, без развития уважения человека к самому себе и к другим на основе понимания онтологического единства мира, связи всего со всем, невозможно формирование свободного независимого человека и общества. А без свободы нет нравственности, нет ответственности, нет справедливости, нет развития экономики, права, политики, культуры. Поэтому гуманитариям, да и всем нам, был бы полезен междисциплинарный курс «Логика и философские размышления». Впрочем, материал может быть использован не только в специальном курсе, но и просто для общего развития и для совместных обсуждений через среду ZOOM, например.

Литература

1. Астанкова И. А. Духовно-нравственное воспитание на уроках математики. <http://kursk-sosh52.ru/obuchenie/metod-kopilka/biblioteka-statej/1-joomla.html>

2. Брызгалина Е. В. Гуманизация и гуманитаризация образования: от школы к университету. Новые образовательные программы МГУ и школьное образование. – 2012. lib.teacher.msu.ru/pub/2303
3. Валентина Матвиенко рассказала о ценностях, которые должны прививать детям в школах. –Российская газета. 01.06.2020. https://vogazeta.ru/articles/2020/6/1/upbringing/13271-matvienko_rasskazala_o_tsennostyah_kotorye_dolzhny_privivat_detyam_v_shkolah
4. Вечтомов Е. М. Метафизика математики. – Киров: Изд-во ВятГГУ, 2006. – 508 с.
5. Депутаты обсудили с министром Просвещения президентский законопроект о воспитательной работе. 19.06.2020 – <http://duma.gov.ru/news/48860/>
6. Кляйн М. Математика. Утрата определенности. М.: Мир, 1984.
7. Матвиенко рассказала какой должна быть воспитательная работа в школах. – Российская газета. 02.09.2019. – <https://rg.ru/2019/09/02/matvienko-rasskazala-kakoj-dolzhna-byt-vospitatelnaiia-rabota-v-shkolah.html>
8. Петражицкий Л. Теория права и государства в связи с теорией нравственности. – М.: Юрайт, 2019. – 343 с.
9. Сергей Кравцов объявил ценности // Вести образования. 16.06.2020. –https://vogazeta.ru/articles/2020/6/16/edpolitics/13501-sergey_kravtsov_obyavil_tsennosti?fbclid=IwAR3ZgkjDOEwZ1UoU-qfJcsrkK6Pav6xsGuRkZUJtZh-n_Uf-PZoy0vYDAA
10. Смолин О. Воспитание патриотическое, но не бюрократическое //Вести образования. 28.05.2020. https://vogazeta.ru/articles/2020/5/28/edpolitics/13224-vospitanie_patrioticheskoe_no_ne_byurokraticheskoe
11. Цыренова В. Б., Миронова Е. П. Развитие гуманитарной культуры студентов средствами математики // Вестник Бурятского госуниверситета, 2015. Вып. 15. - С. 78-82.

Гомбоева Лидия Викторовна, кандидат философских наук, доцент кафедры философии, истории и культурологии, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 670013, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40 «в», e-mail: lida67@mail.ru

Цыренова Валентина Бабасановна, кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, доцент, профессор кафедры геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: v.ts@mail.ru

Gomboeva Lidya Viktorovna, Candidate of Philosophy, Associate Professor, East-Siberian State University of Technology and Management

Tsyrenova Valentina Babasanova, Canditate of Physics and Mathematics, Doctor of Pedagogics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

ПЕРСПЕКТИВЫ ПРИМЕНЕНИЯ КОМПЕТЕНТНОСТНОГО ПОДХОДА В ВЫСШЕМ ОБРАЗОВАНИИ

Аннотация. В статье рассматриваются перспективы и различные аспекты применения компетентностного подхода в высшем образовании. Особое внимание уделено анализу условий повышения эффективности образовательного процесса и формирование профессиональных компетенций в высшем образовании. Также рассмотрена характеристика специфики подготовки бакалавров и магистрантов в высшем образовании. В данной статье обозначены перспективы эффективной реализации компетентностного подхода обучения специалистов. В этой работе уделяется внимание роли преподавателя, занимающегося подготовкой бакалавров и магистрантов, и его показателям компетентности. Сделан вывод о том, что в основе образовательного процесса лежат знания, умения, навыки, способность самостоятельно добывать информацию и умение применять полученные знания в профессиональной деятельности. Данная работа может быть учтена при планировании учебного процесса бакалавров магистрантов всех специальностей.

Ключевые слова: учебный процесс, компетентностный подход, профессиональные компетенции, высшее образование, преподаватель, качество обучения.

© T. Koroleva

PROSPECTS FOR THE APPLICATION OF A COMPETENT APPROACH IN HIGHER EDUCATION

Abstract. The article discusses the prospects and various aspects of the application of the competence approach in higher education. Particular attention is paid to the analysis of conditions for increasing the efficiency of the educational process and the formation of professional competencies in higher education. The characteristics of the specifics of training bachelors and undergraduates in higher education are also considered. This article outlines the prospects for the effective implementation of the competence approach to training specialists. In this work, attention is paid to the role of the teacher involved in the preparation of bachelors and undergraduates, and his competency indicators. It is concluded that the educational process is based on knowledge, skills, abilities, the ability to independently obtain information and

the ability to apply the acquired knowledge in professional activities. This work can be taken into account when planning the educational process of bachelors of undergraduates of all specialties.

Keywords: educational process, competenceapproach, professional competence, higher education, teacher, higher education.

1. Введение. В настоящее время во многих сферах деятельности современного общества существует запрос на продуктивное использование человеческого потенциала, который применяется на основе использования компетентностного подхода. В данной статье попытаемся рассмотреть перспективы применения компетентностного подхода при подготовке магистрантов математических специальностей. В условиях внедрения федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования особенности трудовой деятельности будущих специалистов базируются на компетенциях, развитие которых становится немаловажной целью обучения. На основании ФГОС студент по завершению обучения обязан уметь решать прикладные задачи, базирующиеся на его профессиональных компетенциях, и применять полученные знания в своей профессиональной деятельности.

Вступление России в новое мировое образовательное пространство требует постановки новых задач в обучении, в частности преподавания математических дисциплин. В настоящее время требуется формирование у магистрантов новых компетенций. Следует отметить, что процесс формирования окончательного перечня компетенций в этой области еще не закончен. Тем не менее, исследователи сходятся в одном мнении, что применение компетентностного подхода достаточно перспективно при подготовке обучающихся в высшем образовании. При этом изменение математического образования предопределяется работой вузов, которая требует постоянного совершенствования образовательных программ, обеспечение современной системы, нацеленной на подготовку в вузах хорошо подготовленных и конкурентоспособных сотрудников в различных отраслях.

2. Компоненты компетентностного подхода в высшем образовании. Основной задачей высшего образования, несомненно, является подготовка бакалавров и магистрантов, главное внимание уделяется тому, чтобы специалисты обладали высокой степенью квалификации. Нельзя не согласиться, что не менее важна подготовка конкурентоспособных специалистов в связи со

сложившейся ситуацией в стране, с ее уровнем экономики, что влечет за собой и другие сферы деятельности. Таким образом, состояние современного общества диктует свои нормы и правила, для удовлетворения которых понадобилось ввести компетентностный подход в систему образования. Только так можно ожидать, что будущие выпускники, обладая определенными компетенциями, смогут осуществлять свою трудовую деятельность согласно требованиям рынка труда.

Некоторые исследователи замечают, что осуществление компетентностного подхода – это задача, направленная не столько на суть образования, сколько на используемые технологии обучения и результат в виде сформированных компетенций. Но сам факт перехода к образованию, в основе которого лежит компетентностный подход, оказался не простым. С одной стороны, подготовка высококвалифицированного специалиста со сформированными компетенциями, а значит такого специалиста, который будет востребован работодателями, требует привлечение в процесс образования соответствующих профессионалов. С другой стороны, не все образовательные учреждения могут это сделать. И тому существует немало причин, от наличия высококлассных специалистов в данной отрасли, готовых передавать свои знания, навыки подрастающим поколениям и имеющих на это время, до способности самой учебной организации оплатить труд профессионалов.

Поэтому смена образовательной системы была обусловлена потребностями практической стороны трудовой деятельности. Так как набор теоретических знаний и умений не всегда гарантировал эффективность выпускника в профессиональной деятельности, то сложилась потребность в компетентностном подходе.

Для того чтобы систематизировать информацию по перспективам применения компетентностного подхода, рассмотрим его основные компоненты внедрения в процесс обучения студентов.

Хотелось бы отметить, что уровень компетентности каждого преподавателя определяет эффективность всего учебного процесса обучения и подготовки будущих специалистов. Оценивание результатов обучения студентов преподавателями необходимо проводить на каждом занятии и качественно уделять внимание каждому студенту. Только так можно ожидать становление хорошего специалиста в математической отрасли, его дальнейшего роста в выбранной профессии. Для эффективного оценивания уровня знаний обучающихся преподаватель должен использовать

эффективную обратную связь со студентами, предоставлять возможность самим студентам оценивать себя и устанавливать благоприятную атмосферу на занятии, основанную на уважении друг к другу.

Что касается подхода к преподаванию различных дисциплин, то здесь особое внимание необходимо уделять на усиление познавательной деятельности обучающихся, мотивированию к самостоятельному поиску информации и создание тех умений, которые пригодятся в последующей трудовой деятельности. В связи с этим крайне важно повышение уровня владения математическими знаниями. Следует отметить, что эффективное освоение дисциплин зависит от многих причин. Это и базовый уровень, с которым обучающийся пришел в высшее образование и уровень владения знаниями самим преподавателем, в частности его педагогическим навыкам для успешного процесса передачи знаний. Характерно, что постановка целей образования лежит на преподавателе. Именно он определяет знания, умения, усвоение которых и будет являться целями обучения. Таким образом, действенная совместная работа преподавателей и студентов осуществляется с помощью компетентностного подхода. Можно считать, что результатом эффективного применения компетентностного подхода в подготовке высокоэффективных специалистов является развитие у обучающихся умения применять профессиональные компетенции в разных областях своей деятельности. Также особое внимание при компетентностном подходе уделяется личности выпускника, от которого ожидают в дальнейшем умение разрешать задачи в профессиональной деятельности наиболее эффективно. Можно отметить, что именно это и легло в основу, в смысл компетентностного подхода. Для этого и создаются оценочные средства, оценки качества обучения и в результате профессионализм выпускника, что сделает его конкурентоспособным на рынке труда. Фонд оценочных средств должен включать в себя не только проверку знаний и умений, которые студент получил в процессе учебы, но и способность применять их в трудовой деятельности на практике. Совокупность личностных качеств в сочетании с высоким уровнем знаний определяет конкурентоспособность бакалавра, магистра или аспиранта. Овладение теоретической базой своей профессии и прикладной частью на практике позволяют эффективно решать задачи и быть востребованным специалистом на рынке труда. Профессиональная компетенция является основной составляющей

компетентностного подхода, что приводит к самостоятельному поиску знаний и умения самостоятельно принимать адекватные решения и меняет значение самостоятельной деятельности студентов во время получения высшего образования. Все это привело к тому, что перед образовательными организациями ставятся задачи по обучению студентов самостоятельному поиску информации, ее отбору, структурированию и умению делать соответствующие выводы. А для этого необходимо постоянно контролировать, направлять и оценивать знания студентов с помощью оценочных средств. В связи с этим сформировалась новая система оценок качества получаемых знаний с учетом сформированных компетенций.

При формировании оценочных средств надо помнить о важности развития познавательной сферы студента, развития мотивации и поощрения самостоятельной активности обучающегося. Также при формировании оценочных средств необходимо учитывать ориентацию студента на результат обучения. Результаты должны быть связаны с его профессиональной деятельностью, его способностью анализировать профессиональную ситуацию и принять решение на основе имеющихся знаний. Таким образом, компетентностный подход более ориентирован на умение практически использовать полученные знания. Поэтому традиционная система знаний не может конкурировать с применением компетентностного подхода в образовании.

Предполагается, что высшие учебные заведения обеспечат гарантию качества подготовки бакалавров и магистров различных специальностей. А значит, возможно, имеет смысл составить инструкцию по обеспечению качества подготовки выпускников.

Таким образом, внедрение компетентностного подхода в систему высшего образования выдвигает новые требования, которые отражаются на всех участниках учебного процесса. Новые требования, выдвигаемые к будущим специалистам, влекут за собой новые требования к качеству преподавания и профессионализму профессорско-преподавательского состава. Также компетентностный подход применяется для определения профессионализма преподавателя.

Рассматривая компетентностный подход в высшем образовании, можно сделать вывод о том, что главное значение придается цели и результату обучения. Это во многом определяет его сущность и свидетельствует о его важности в процессе обучения. Компетентностный подход действительно способен удовлетворить

потребности, которые ставит работодатель в профессиональной деятельности. В связи с этим реализация компетентностного подхода при подготовке будущих специалистов требует скорректировать методику преподавания дисциплин и имеет далеко идущие перспективы. Данные корректировки отражают связь содержания дисциплины и направление будущей деятельности обучающегося. Также важным направлением преподавания в высшем образовании становится обучение решению задач, направленных на более полное понимание объектов, что влечет за собой появление новых методических приемов. Хотелось бы отметить, что учебный процесс, в основе которого лежит компетентностный подход, ориентированный на результат будет, достаточно эффективен.

Литература

1. Алмазова Н. И., Мохоров Д. А. К вопросу о понятии преподавательская деятельность в современной доктрине образования // Актуальные проблемы науки и практики. 2017. № 1 (006). С. 5-12.
2. Болонский процесс и его значение для России: интеграция высшего образования в Европе // Под ред. К. Пурсиайнена, С. А. Медведева. М., 2005.
3. Убоженко Е. В. Субъекты инноваций в инновационном образовании будущего // Материалы международной научно-практической конференции с элементами научной школы для молодых ученых-49- Евсевьевские чтения: Наука и образование: актуальные психологические проблемы и опыт решения, Мордовский государственный педагогический институт Саранск, 2014. - 214с.
4. Митяева Н. В. Магистратура как уровень высшего образования: реалии и перспективы // Значение экономического образования населения для роста эффективности экономики России: сб. ст. регионал. науч.-практ. конф. Воронеж: Научная книга, 2010. С. 68– 72.
5. Приказ Минобрнауки России от 05.04.2017 № 301 «Об утверждении Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования - программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры» (Зарегистрировано в Минюсте России 14.07.2017 № 47415) [Электронный ресурс]. URL: Официальный интернет-портал правовой информации <http://www.pravo.gov.ru> (дата обращения 18.10.2018).

Королева Татьяна Эдуардовна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра «Высшая математика» ДВГУПС, г. Хабаровск 680006, ул. Индустриальная, дом 1в, кв. 21. Тел. 8-909-87-31-60. Email: tanya.zon@mail.ru

Koroleva Tatiana Eduardovna, Far Eastern State Transport University, Khabarovsk.

ТЕОРЕМА БРАУЭРА О СОХРАНЕНИИ ОБЛАСТИ В КУРСЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Аннотация. Теорема Брауэра о сохранении гомеоморфизмом области в евклидовом пространстве является фундаментом теории многообразий. Однако обычно доказательство этой теоремы не изучают ввиду его сложности. Цель данной работы – исследовать возможность изучения теоремы Брауэра в курсе математического анализа для студентов, обучающихся по математическим направлениям подготовки. В работе описаны источники, содержащие доказательства этой теоремы. Представлен краткий обзор различных методов доказательства. Подробно описана схема доказательства теоремы Брауэра, приведенного в монографии А.Д. Александрова. Это доказательство выбрано как наиболее понятное студентам. Студентам могут быть не знакомы понятия «симплекс» и «триангуляция», но геометрические рассуждения делают доказательство наглядным для малых размерностей. В нашей работе также показано, как можно встроить это доказательство в курс математического анализа.

Ключевые слова: теорема Брауэра о сохранении области, многообразия, преподавание математического анализа.

© E. Lazareva, A. Novgorodova

THE BROUWER INVARIANCE OF DOMAIN THEOREM IN THE COURSE OF MATHEMATICAL ANALYSIS

Abstract. Brouwer's theorem on the preservation of a domain by a homeomorphism in a Euclidean space is the foundation of the theory of manifolds. However, the proof of this theorem is usually not studied due to its complexity. The aim of this work is to investigate the possibility of studying the Brouwer invariance of domain theorem in the course of mathematical analysis for students studying in mathematical fields of training. The paper describes sources containing proofs of this theorem. A brief overview of various methods of proof is presented. We have presented the scheme of the Brouwer theorem's proof from the monograph by A. D. Aleksandrov in detail. This proof have been selected as the most apprehensible to students. Students may not be familiar with the concepts of "simplex" and "triangulation", but geometric reasoning

makes the proof clear for low dimensions. Our paper also shows how one can embed this proof in a course of mathematical analysis.

Keywords: the Brouwer invariance of domain theorem, manifolds, teaching mathematical analysis.

Введение

В курсе математического анализа на механико-математическом факультете Томского государственного университета на протяжении последних десятков лет сложилась успешная практика изучения интегрирования на многообразиях (4-й семестр обучения). Этот подход соответствует классическому учебнику В. А. Зорича [1]. Введение в теорию многообразий начинается с понятия *Многообразие размерности k в пространстве R^n* . Однако теория размерностей не используется, так как достаточно далека от методических целей математического анализа. Необходимой оказывается теорема Брауэра о сохранении области [2]:

Теорема 1. (Брауэр, 1911 г.) Пусть $A, B \subset R^n$, $\phi: A \xrightarrow{\text{дiffeоморфизм}} B$. Тогда если множество A открыто в R^n , то и множество B также открыто в R^n .

Из этой теоремы вытекает два важных для теории многообразий в R^n следствия:

Следствие 1. Размерность k многообразия $S \subset R^n$ без края определяется однозначно.

Следствие 2. Понятие точки края для многообразия $S \subset R^n$ с краем является корректным.

К сожалению, в [1] не уделяется никакого внимания теореме Брауэра, дважды она упоминается как известный факт. При этом говорится, что мы будем иметь дело с диффеоморфизмами, для которых принцип сохранения области хорошо известен [1, стр. 314]. Но тогда непонятно, что делать с кусочно-гладкими многообразиями? Обычный квадрат с краем на плоскости уже не может быть задан с помощью гладких карт. Поэтому мы считаем, что обойтись без упоминания теоремы Брауэра об инвариантности области невозможно, следовательно, нужно найти возможность изложить ее доказательство в курсе, в дополнительных материалах к курсу либо предложить студентам источник, в котором имеется доступное студентам второго курса доказательство.

Таким образом, задачи данной работы:

- оценка имеющихся опубликованных доказательств теоремы Брауэра с точки зрения методической доступности для студентов,
- выбор подходящего подхода к доказательству,
- изучение возможности встроить доказательство теоремы Брауэра в курс математического анализа.

1. Источники с доказательством теоремы Брауэра

Нами были отобраны следующие источники: [3–7]. Мы делали попытки изучать иностранную литературу и первоисточник [2], но отказались от них в силу малой доступности для студентов и наличия достаточного выбора литературы на русском языке. Безусловно, мы не претендуем на полноту охвата русскоязычной литературы по этому вопросу, однако в перечисленных выше источниках мы уже увидели различные подходы к доказательству теоремы Брауэра об инвариантности области.

Так, в [3] сначала излагается теория топологической размерности, а потом уже в рамках этой теории доказывается теорема Брауэра об инвариантности размерности. В курсе математического анализа можно использовать эту теорему вместо теоремы о сохранении области, но теория размерности – далекий от вещественного анализа материал.

В [4] приводится доказательство теоремы Брауэра об инвариантности области, основанное на теореме о неподвижной точке и на идее продолжения непрерывных отображений. Нам кажется, что это доказательство подошло бы для курса топологии, но указанные методы выходят за рамки математического анализа.

В учебнике [5], посвященном многообразиям, реализован геометрический (более общий) подход к этому понятию: многообразия рассматриваются как топологические пространства и не обязательно являются подмножествами R^n . Теорема Брауэра о сохранении области также доказывается с помощью теории размерностей.

Наконец, в [6] и [7] приведен практически одинаковый подход к доказательству теоремы Брауэра, но в [6] дается больше предварительного теоретического материала, сначала доказывается теорема Брауэра о неподвижной точке, а уже потом – о сохранении области.

Нам показался наиболее доступным источник [7], в котором доказательство изложено целиком, без отсылок к другим разделам книги, и занимает 5 страниц. Надо сказать, что это переиздание книги А. Д. Александрова «Выпуклые многогранники» (1950 г.),

дополненное комментариями, показалось нам актуальным и современным.

2. Схема доказательства теоремы Брауэра по А. Д. Александрову

Несмотря на небольшой объем, доказательство, предложенное А. Д. Александровым, содержит тонкие и неочевидные рассуждения, основанные как на метрических понятиях (замкнутость, предельные точки), так и на геометрических образах, основным из которых является n -мерный симплекс. Приведем здесь схему этого доказательства.

Прежде всего, делается переход от окрестностей к симплексам:

Теорема 2. *При гомеоморфном отображении φ n -мерного симплекса T на подмножество пространства R^n всякая внутренняя точка симплекса T переходит во внутреннюю точку множества $\Phi = \varphi(T) \subset R^n$.*

Затем приводится топологически инвариантная характеристика внутренних точек замкнутого множества в евклидовом пространстве.

Теорема 3. *Пусть $p \in \Phi \subset R^n$, Φ – замкнутое множество. Точка p является внутренней точкой множества Φ тогда и только тогда, когда существует замкнутое покрытие $\alpha = \{A_1, \dots, A_s\}$ множества Φ кратности $n+1$ такое, что:*

- 1) p – единственная точка из Φ , принадлежащая $n+1$ множеству A_i ;
- 2) *всякое покрытие $\alpha \setminus p$, отличающееся от α в малой окрестности $U(p) \subset \Phi$ имеет кратность не меньше $n+1$.*

Доказательство теоремы 3 состоит из двух частей.

Сначала приводится доказательство достаточности условий 1) и 2) для того, чтобы точка p была внутренней для множества Φ . В этом доказательстве существенную роль играет

Лемма 1. *При сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ существует замкнутое ε -покрытие границы n -мерного симплекса T , имеющее кратность $\leq n$.*

Лемма 1 имеет достаточно наглядное доказательство при малых n , которое без труда переносится на любую конечную размерность евклидового пространства. В доказательстве используется хорошо известная студентам теорема Больцано-Вейерштрасса.

Дальнейшее доказательство достаточности представляет из себя тонкое геометрическое рассуждение, весьма наглядное для размерности 2.

Доказательство необходимости требований 1) и 2) основано на лемме Шпернера (см., например: [7, стр. 149], [6, стр. 212]).

Лемма 2. (Шпернер, 1928). *Пусть K – триангуляция n -мерного симплекса T с вершинами e_1, \dots, e_{n+1} . Пусть каждой вершине e триангуляции K поставлена в соответствие вершина $S(e)$ – симплекса T , принадлежащая той его грани наименьшего числа измерений, на которой лежит e . Тогда существует такой n -мерный симплекс T_j триангуляции K , что его вершины отображаются во все вершины симплекса T .*

Доказательство леммы Шпернера содержит нетривиальный ход: докажем, что таких симплексов – нечетное число, значит, по крайней мере, один есть. Доказательство использует индукцию по размерности евклидова пространства и простые комбинаторные рассуждения.

Дальнейшее доказательство необходимости условий 1) и 2) также основано на геометрических рассуждениях и не представляет сложности.

3. Методика изучения теоремы Брауэра в курсе математического анализа

Мы предлагаем следующий подход к изучению этого доказательства в курсе математического анализа. Мы считаем, что освоиться с понятиями симплекса *триангуляция* и разобрать лемму Шпернера можно заранее, в теме «Евклидово пространство», которую, как правило, изучают в первом или втором семестре. Лемму Шпернера можно включить в практическую часть курса как задачу повышенной сложности, предложив студентам хотя бы убедиться в ее справедливости на конкретных примерах в двух- и трехмерном пространстве. Также можно сформулировать эту лемму в лекционном курсе и упомянуть, что она доказывается методом математической индукции по размерности евклидового пространства.

Далее, замкнутое покрытие симплекса и его границы (лемма 1) неплохо вписывается в тему «Метрические пространства», которую изучают в курсе математического анализа, как правило, во втором семестре. Замкнутость, граничные и предельные точки, компактность – все эти понятия отрабатываются именно в этой

теме, и они необходимы для доказательства леммы 1. Также мы получаем некоторое знакомство с понятием границы симплекса, которое имеет аналогии с краем многообразия.

Теорему Брауэра следует сформулировать при изучении *принципа сохранения области*, который является частью теории дифференцируемых отображений евклидовых пространств. Методически нам кажется правильным, рассказывая про сохранение области при диффеоморфизме, упомянуть теорему Брауэра, так как это более общий результат.

Наконец, топологически инвариантная характеристика внутренних точек множества в R^n должна быть приведена после формулировки теоремы Брауэра в начале изучения темы «Многообразия». К этому моменту (начало 4 семестра, уже изучен начальный курс топологии) студенты имеют достаточный опыт работы с различными эквивалентными утверждениями и хорошо воспринимают топологические включения в курсе математического анализа.

Что касается доказательства необходимости и достаточности в теореме 3, по-видимому, их придется оставить на самостоятельное изучение. Есть возможность включить этот материал в содержание коллоквиума по теме «Многообразия», который, как правило, проводится в середине 4-го семестра. Однако требовать от студентов полного изучения этого доказательства, по-видимому, не стоит. Главное – указать источник [7] и сообщить, что доказательство содержит известную студентам терминологию. Возможно, в лекционном курсе стоит привести схему доказательства и предложить студентам (по желанию) выступить с разбором этого доказательства на коллоквиуме. Можно при этом предложить студентам групповую работу: такая деятельность, как правило, приносит им удовлетворение и повышает интерес к изучаемому материалу.

Заключение

В результате проделанной работы мы выяснили, что в литературе имеется несколько различных методов доказательства теоремы Брауэра о сохранении области. Книга А. Д. Александрова [7] содержит, на наш взгляд, самое доступное изложение этого результата для студентов второго курса направления «Математика» и близких направлений подготовки.

Доказательство теоремы Брауэра можно встроить в курс математического анализа, но не целиком, а по частям, выделив

отдельные утверждения, часть материала сформулировать как задачи, часть отдать на самостоятельное изучение.

В целом, мы считаем, что это доказательство показывает целостность математики, эффективность совместного использования геометрических и топологических методов и понятий, тем самым, имеет большое методическое значение. Кроме того, теорема Брауэра представляет собой введение в теорию размерностей, которую студентам, возможно, захочется изучить глубже после знакомства с этим доказательством.

Литература

1. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 2 : Учебник для университетов по специальности "Математика" и "Механика". М.: Наука , 1984. 640 с.
2. Brouwer L. E. J. Beweis der Invarianz des n -dimensionalen Gebiets, *Mathematische Annalen* 71 (1911), pp. 305–315; 72 (1912), pp. 55–56.
3. Прасолов В. В. Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО , 2004. 352 с.
4. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: Гос. изд. иностранной литературы, 1948. 232 с.
5. Постников М. М. Гладкие многообразия: Учебное пособие для вузов по специальности "Математика". М.: Наука. Физматлит, 1987. 478 с.
6. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности: Введение в теорию топологических пространств и общую теорию размерности. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1973. 575 с.
7. Александров А. Д. Избранные труды [в 3 т.] Т. 2. Выпуклые многогранники. Новосибирск: Наука, Сиб. изд. фирма , 2007. 491 с.

Лазарева Елена Геннадьевна – к.ф.-м.н., доцент, доцент кафедры Общей математики механико-математического факультета Томского государственного университета. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 36, ТГУ, ММФ. Тел. 8-913-847-35-61, e-mail: lazareva@math.tsu.ru, lazareva-e-g73@mail.ru

Новгородова Анастасия Николаевна – студент 2-го курса механико-математического факультета Томского государственного университета. Тел. 8-952-892-53-46, e-mail: annicnov@gmail.com

Lazareva Elena Gennadievna – Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of the Department of General Mathematics, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University. 36 Lenin Ave., Tomsk, Russia 634050. E-mail: lazareva@math.tsu.ru, lazareva-e-g73@mail.ru

Novgorodova Anastasia Nikolaevna - 2nd year student, Faculty of Mechanics and Mathematics, Tomsk State University. E-mail: annicnov@gmail.com

ФОРМИРОВАНИЕ ПРОЕКТНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ ПРИ РАБОТЕ НАД КУРСОВЫМ ПРОЕКТОМ

Аннотация. В статье рассматривается важность формирования проектно-исследовательских компетенций современного студента, поскольку в век глобального применения ИТ во всех сферах жизни человека, выпускнику вуза для успешной конкуренции необходимо обладать качествами профессионала и, в связи с этим, процесс обучения должен быть направлен на то, чтобы обучающийся был активно вовлечен в учебную деятельность с высокой степенью самостоятельности обучающегося и с всесторонним вовлечением его в исследовательскую деятельность с применением проектных методов. Одновременно, самостоятельность студента, но в тоже время направленное участие преподавателя дают эффект развития необходимых компетенций студента, поэтому в статье рассматриваются уровни самостоятельной организации деятельности студента при работе над курсовым проектом и достигаемые при этом цели.

Ключевые слова: проектная деятельность, исследовательская деятельность, компетентностный подход, профессиональные компетенции.

© O. Lobsanova

FORMATION OF DESIGN AND RESEARCH ACTIVITIES OF STUDENTS WHEN WORKING ON A COURSE PROJECT

Abstract. The article considers the importance of the formation of design and research competencies of a modern student, since in the age of global application of information technologies in all spheres of human life. A graduate of a university for successful competition must have the qualities of a professional and, in this regard, the learning process should be aimed at ensuring that the student was actively involved in educational activities with a high degree of independence of the student and with his all-round involvement in research activities using project methods. At the same time, the independence of the student, but at the same time, the directed participation of the teacher gives the effect of the development of the necessary competencies of the student, therefore, the article considers the levels of independent organization of the student's activities when working on a course project and the goals achieved.

Keywords: project activity, research activity, competence-based approach, professional competence.

В современных образовательных условиях наибольшее значение приобретают не столько сами знания студента, а сколько его компетенции, т.е. способность студента использовать приобретенные знания, полученные в результате образования, в практической профессиональной деятельности. Таким образом, компетенции бакалавра, развивающиеся им при взаимодействии с образовательной практикой, становятся основным объектом оценивания и свойством качества обучения.

В настоящее время в процессе обучения в университете будущих специалистов, важно, чтобы студент активно принимал участие в образовательном процессе и являлся не только объектом педагогического воздействия, но и занимал активную позицию субъекта образовательной деятельности, где имел бы возможности для проявления всех качеств, присущих будущему профессиональному – инновационное мышление, активность, самостоятельность и самостоятельная организация своего профессионального роста, креативность, инициативность, способность работать над проектами, наличие практического опыта разработки и внедрения исследовательских решений. Проявление данных качеств несомненно позволит обучающемуся в его профессиональном развитии. Вследствие этого в современном образовательном пространстве очень актуален переход от репродуктивных методов обучения к исследовательским с высокой степенью самостоятельности, которые обеспечивают эффективное формирование профессиональных знаний и навыков, стимулируют развитие познавательной деятельности, создают условия для реализации и совершенствования личности. В таких условиях повышение эффективности профессионального обучения связано с организацией студенческой исследовательской деятельности.

Исследовательская деятельность – интеллектуальная деятельность, направленная на получение новых знаний, уяснения сущности явления, истины, открытие новых закономерностей, понятий, законов, теорий для решения различных проблем (технологических, инженерных, социальных, гуманитарных и т.д.) [2]. Проектная деятельность наряду с исследовательской деятельностью занимает важное место в учебном процессе любой

образовательной организации, так как в современном обществе важны такие качества человека, как творческое мышление, умение решать нестандартные жизненные задачи, способность к постоянному обучению и принятию решений.

В образовательном процессе ВУЗа развитию исследовательской и инновационной деятельности студентов уделяется большое внимание. Многие учебные дисциплины преподаются с использованием современных инновационных и интерактивных технологий, используются проектные образовательные технологии, но наибольшее внимание уделяется курсовому и дипломному проектированию. Поэтому очень важно определить, при каких условиях проектная деятельность студентов будет наиболее эффективной.

При подготовке курсовых работ студентам нужна помочь преподавателя в выборе тематики исследования, в постановке задач и целей учебного проекта, в подборе учебно-методических материалов, т.е. с тем, что является основой исследовательской деятельности. Здесь можно выделить следующие основные компоненты: постановка гипотезы исследования; организация и проведение эксперимента; обобщение полученных фактов и сравнение с исходной гипотезой, получение результатов, их обобщение и сравнительный анализ, выводы по исследованию. Помимо данных компонентов студентам в процессе работы над проектом необходимо закрепить и повысить свои компетенции в следующих умениях: работа с научной литературой, теоретические и эмпирические методы исследования, оформление и презентация проекта (курсового исследования, курсового проектирования).

В процессе работы над проектом и представлении результатов проекта, защиты курсовой работы можно выделить несколько уровней проектно-исследовательской компетентности студентов в зависимости от степени самостоятельности выполнения курсового проекта. Истомина Н. Б., Айзенберг Т. Н., Шайденкова М. И. определяют следующие уровни:

– начальный – репродуктивный уровень. Студент проявляет низкую самостоятельность при выполнении проекта, работает при постоянном контроле со стороны преподавателя, исследовательская деятельность студента проявляется в стандартных, типичных ситуациях.

- основной – фрагментарный уровень. Студент проявляет частичную самостоятельность при выполнении проекта при частичной поддержке со стороны преподавателя (например, наводящие вопросы и т.д.)
- высокий – рациональный уровень. Деятельность студента основана на умении планировать и оценивать свои результаты.

Рассмотрим более детально процесс работы над курсовым проектом в Институте математики и информатики Бурятского государственного университета на примере студентов направления подготовки 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем и 09.03.03 Прикладная информатика. Курсовой проект по данным направлениям подготовки согласно учебному плану предусмотрен в 6 семестре по дисциплине «Базы данных». Однако, работая под руководством научного руководителя над проектом, студенты зачастую выходят за рамки одной дисциплины, либо проводят исследование на стыке дисциплин – это создание и разработка информационных систем, веб-программирование, администрирование информационных систем, прикладной анализ данных, анализ данных и машинное обучение. Для многих обучающихся данный проект является стартом для работы над следующим исследованием – выпускной квалификационной работой.

Можно обозначить следующие цели организации проектно-исследовательской деятельности студентов в рамках выполнения курсового проекта:

- углубленное и дополнительное изучение теоретического материала;
- выявление талантливых студентов и привлечение их к реальным проектам;
- формирование у студентов профессионально значимых качеств.

Работа над курсовым проектом выявляет в студентах такие качества исследователя, как самостоятельность, самореализация, независимость мышления, что и составляет основу современной концепции образования.

В заключении отметим, что организация проектно-исследовательской деятельности обучающихся в образовательных учреждениях требует грамотного научно-обоснованного подхода,

высоко квалифицированного преподавательского состава, учебного и информационно-методического обеспечения.

Литература

1. Сотник, В. Г. Формирование исследовательской компетентности студентов в процессе организации самостоятельной проектно-исследовательской деятельности: автореф. дисс. канд. пед. наук: 13.00.08 / В. Г. Сотник. – СПб. – 2006. – 22 с.
2. Чем исследовательская деятельность отличается от проектной деятельности? [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://nsportal.ru/blog/shkola/obshcheshkolnaya-tematika/all/2012/01/07/chem-issledovatelskaya-deyatelno> (дата обращения: 03.06.2020).
3. Бурая, О. В. Исследовательская деятельность студентов в колледже / О. В. Бурая. — Текст : непосредственный // Актуальные задачи педагогики : материалы VIII Междунар. науч. конф. (г. Москва, ноябрь 2017 г.). — Москва : Буки-Веди, 2017. — С. 123-125. — URL: <https://moluch.ru/conf/ped/archive/272/13157/> (дата обращения: 15.06.2020).

Лобсанова Оюна Анатольевна, старший преподаватель кафедры информационных технологий Института математики и информатики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: otumur@mail.ru

Lobsanova Oyuna Anatol'evna, Senior Lecturer of the Department of Information Technologies, Banzarov Buryat State University

СОЗДАНИЕ ИС «АБИТУРИЕНТ ИМИ»

Аннотация. В статье рассмотрены теоретические аспекты проблемы организации профориентационной работы в ИМИ БГУ, рассматривается важность создания информационной системы для хранения данных по проводимым профориентационным мероприятиям в вузе, на факультете, институте, в любой образовательной организации. В современных условиях конкурентной борьбы за потенциального абитуриента, вузы и факультеты проводят различные профориентационные мероприятия с целью поиска будущих абитуриентов. В связи с этим наблюдается проблема хранения и обработки накопленных данных. Для ее решения было решено разработать информационную систему учета абитуриентов, что позволило бы эффективно проводить профориентационную работу и приемную кампанию в целом.

Ключевые слова: профориентационная работа, приемная кампания, информационная система, абитуриент.

© *O. Lobsanova, E. Darmaeva*

CREATION OF THE INFORMATION SYSTEM "ABITURIENT OF THE INSTITUTE OF MATHEMATICS AND INFORMATICS"

Abstract. The article considers the theoretical aspects of the problem of organizing career guidance work in IMI BSU, considers the importance of creating an information system for storing data on ongoing career guidance activities at a university, faculty, institute, in any educational organization. In modern conditions of competition for a potential applicant, universities and faculties conduct various career guidance activities in order to find future applicants. In this regard, there is a problem of storing and processing the accumulated data. To solve it, it was decided to develop an information system for registering applicants, which would make it possible to effectively conduct career guidance work and the admission campaign as a whole.

Keywords: career guidance work, admission campaign, information system, applicant.

В условиях рыночной экономики, когда современные организации и предприятия вынуждены постоянно находиться в состоянии конкурентной борьбы за потенциального клиента, особую актуальность приобретает необходимость создания баз

данных клиентов, призванных к эффективному продвижению продукта на рынке.

Эта тенденция находит свое отражение и в сфере современных образовательных услуг. Сегодня отечественные высшие учебные заведения, государственные и частные, также вынуждены вести конкурентную борьбу за потенциального абитуриента, который, с одной стороны должен представлять личность, обладающую базовыми знаниями и умениями, полученными в общеобразовательной школе, с другой стороны, стремящуюся к получению новых профессиональных компетенций. Как отмечает А. А. Рыбанов, «цель современного ВУЗа в части работы с абитуриентами: обеспечить 100% набор студентов, удовлетворяющих требованиям ВУЗа в части знаний и желания получить соответствующие специальности. Чтобы добиться выполнения первого критерия, ВУЗ должен постоянно накапливать базу потенциальных абитуриентов, чтобы далее целенаправленно проводить по этой аудитории маркетинговые мероприятия» [1].

В связи с этим возникает необходимость создания базы данных абитуриентов, которая будет пополняться сведениями в течение учебного года в ходе проведения профориентационных мероприятий, научно-практических конференций и олимпиад для школьников.

Таким образом, создание информационной системы «Абитуриент ИМИ» для ведения учета абитуриентов в рамках профориентационной работы ВУза может быть необходимой задачей для вуза, института и любого образовательного учреждения. В рамках выпускной квалификационной работы со студентами направления «Прикладная информатика» было начато создание ИС «Абитуриент ИМИ». В качестве задач было выдвинуто следующее:

1. Анализ профориентационной деятельности ВУза на примере Института математики и информатики;

2. Проектирование информационной системы «Абитуриент ИМИ»;

3. Апробация информационной системы «Абитуриент ИМИ».

С целью эффективного продвижения своего товара или услуги на конкурентном рынке, организации вынуждены заниматься разработкой клиентской базы данных, которая позволит

плодотворно сотрудничать с клиентами в течение длительного времени.

Эта тенденция находит свое отражение и в сфере образовательных услуг.

Прежде всего необходимо дать определение понятию клиентская база данных. Клиентская база — это база данных, содержащая сведения обо всех клиентах компании, когда-либо совершивших с ней сделки. Кроме того, иногда к клиентской базе относят и сведения о потенциальных клиентах компании [1].

На основе этого определения попытаемся сформулировать определение понятия «база данных абитуриентов».

База данных абитуриентов — это разновидность клиентской базы, используемая образовательными учреждениями для привлечения потенциальных абитуриентов из числа учащихся образовательных школ в ходе проведения профориентационных и других мероприятий.

Для решения задач приемных кампаний ВУЗам необходимо решить ряд задач:

- Заранее собрать базу данных по абитуриентам;
- Классифицировать абитуриентов по направлениям подготовки с учетом предпочтений и выбранных дисциплин к сдаче ЕГЭ;
- Эффективно сотрудничать с абитуриентами с момента их регистрации до непосредственного поступления в вуз.

Для решения поставленных задач для ИМИ БГУ предлагаем разработать программу мероприятий по привлечению будущих абитуриентов, которая должна иметь поступательный и системный характер, а также охватывать большое количество школьников.

На сегодняшний день необходимость создания базы данных «Абитуриент» для Института математики и информатики продиктована рядом объективных причин:

1. Условиями конкуренции с ВУЗами региона;
2. Оттоком абитуриентов в ведущие ВУЗы страны в центральные города;
3. Снижением качества подготовки школьников в школах региона;
4. Повышением качества информирования, открытости и доступности информации.

Несмотря на то, что много лет Институт математики и информатики проводит достаточное количество профориентационных мероприятий для школьников и студентов СУЗов, не разработана единая база данных абитуриентов. В связи с этим возникают проблемы в информировании о мероприятиях всех школ республики, затруднение в обратной связи с учителями, школьниками и их родителями, невозможность обобщения предпочтений и выбора учащихся. Отсутствие такой базы также отражается и на результатах приемной кампании, так как данных об абитуриентах в базе института может быть больше, чем в базе «Приемная комиссия». Например, абитуриент, который в течение года зарегистрировался и участвовал в мероприятиях ИМИ, может и не подать документы в приемную комиссию ИМИ. При недоборе абитуриентов в ИМИ всегда будет возможность пригласить дополнительно тех абитуриентов, данные о которых зарегистрированы в базе ИМИ.

Литература:

1. Рыбанов А. А., Бородавченко Д. В. Разработка web-ориентированной и мобильного приложения системы учета и анализа взаимодействия ВУЗа с потенциальными абитуриентами [Электронный ресурс] – Режим доступа – <https://novainfo.ru/article/15332> (Дата обращения 14.06.2020 г.)
2. Акбашева Г. А., Акбашева Е. А., Лампежев З. С. Автоматизированные системы «Абитуриент» и «Студент» как часть единой информационной среды вуза // Фундаментальные исследования. – 2016. – № 4-3. – С. 465-469.

Лобсанова Оюна Анатольевна, старший преподаватель кафедры информационных технологий Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: otumur@mail.ru

Дармаева Евгения Борисовна, студент кафедры информационных технологий Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5, e-mail: elpodato6@gmail.com

Lobsanova Oyuna Anatol'evna, Senior Lecturer of the Department of Information Technologies, Banzarov Buryat State University

Darmaeva Evgeniya Borisovna, student of Institute of mathematics and Informatics, Banzarov Buryat State University

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ И ИГРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРОЦЕССЕ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Аннотация: в статье рассмотрены теоретические аспекты цифровых и игровых технологий, которые используются при обучении математике для развития познавательных универсальных учебных действий. После этого приводится разработанный нами пример одной технологической карты урока по математике «Действия с десятичными дробями», в которой используются данные технологии. Целью данной технологической карты урока является, как закрепление и систематизация материала, так и повышение мотивации школьников и активизации их действий на уроке. Данная разработка покажет учащимся, что смартфон, возможно, использовать не только для развлечения, но и в образовательных целях. Карта предназначена для учащихся 5 классов. После данной разработки показаны примеры игры, которые можно использовать на уроках математики в 5 – х классах. Данные примеры созданы как с помощью игровых технологий, так и с помощью цифровых.

Ключевые слова: методика обучения математике, игровые технологии, цифровые технологии, технологическая карта урока, разработка, познавательные УУД, математика.

© A. Mordovskoy, N. Gachegeva

APPLICATION OF DIGITAL AND GAME TECHNOLOGIES IN THE PROCESS OF TEACHING MATHEMATICS

Abstract. The article discusses the theoretical aspects of digital and gaming technologies that are used in teaching mathematics for the development of cognitive universal educational actions. After that, we give an example of one of the technological maps of the lesson in mathematics “Actions with decimal fractions”, which uses these technologies. The purpose of this technological map of the lesson is to consolidate and systematize the material, as well as increase the motivation of schoolchildren and activate their actions in the lesson. This development will show students that it is possible to use a smartphone not only for entertainment, but also for educational purposes. The card is intended for students in grades 5. After this development, examples of the game are

shown that can be used in mathematics lessons in 5th grade. These examples are created using both gaming technology and digital.

Keywords: mathematics teaching methodology, game technologies, digital technologies, lesson technological map, development, cognitive UUD, mathematics.

На преподавание математики в 5 классе отводится 170 часов. Изучается она чаще на уровне простого и скучного урока, который для учащихся кажется целой вечностью.

В настоящее время, учителя пытаются найти такие новые средства, которые бы помогли школьникам получить знания в полной форме, активизировать их познавательную деятельность, так же повысить их мотивацию к обучению. Для этого они изучают много литературы и интернет источников.

Пройдя долгий и упорный путь, они часто выбирают педагогические технологии. Эти технологии часто обозначают, как систему педагогических установок. Эти установки определяют набор специальных приемов и методов, так же их рассматривают как воспитательные средства и методический инструментарий.

Какие же все такие нам учителям, нужно взять технологии, чтобы дети на уроке были намного активнее, а процесс обучения превращался в процесс глубокого познания материала?

Игровые технологии – это составная часть педагогических технологий. В то время, как идет игра, можно применить очень много разных видов работ, как групповую, так и индивидуальную, можно обсудить что-то совместно с детьми, провести для них тестирование или опросы, даже можно создать ролевые ситуации (например: школьники могут стать учителями, а учитель школьником).

В Федеральном государственном образовательном стандарте под игровыми технологиями понимают познавательные универсальные учебные действия (УУД).

Обращаясь к представителям, которые рассматривали тему познавательных универсальных учебных действий, можно удостовериться, что развитие познания окружающего мира для школьников очень важны в современном обществе. Основными из них являются: Л. С. Выготский, А. С. Макаренко, Г. К. Селевко, Д. Б. Эльконин и д.р.

В своей работе за основу игровых технологий мы взяли – дидактические игры. Дидактические игры вносят разнообразие в образовательный процесс, но, сегодня время стало намного интереснее и понятнее, в мир вошли цифровые технологии. Школьники сейчас не могут представить жизнь без гаджетов и компьютеров, но им стоит задуматься о том, что важно в жизни не только играть, но и уметь писать, считать и просто быть образованным человеком.

На данный момент все совершенствуется, многие школы переходят на цифровое обучение: бумажные учебники заменяют электронными книжками, журнал с оценками, заменяют электронные журналы разных видов, многие проверочные работы и самостоятельные, ребята выполняют на электронных платформах: Учи.ру, Яклас, Российская электронная школа и многое другое.

Современное информационное общество, в котором люди все чаще и чаще применяют различные информационные, коммуникационные, цифровые и игровые технологии, предъявляет новые требования и к содержанию, и к методам обучения. Поэтому только традиционным методом преподавания уже нельзя достичь поставленных целей.

Так как использование цифровых технологий для 5 – х классов возможно только 20 - 25 минут, оставшееся время нам помогут восполнить игровые технологии.

В настоящее время, возможно, использовать на уроке сразу несколько вариантов: либо только игровые технологии, либо игровые и цифровые технологии.

Поэтому внедрение цифровых и игровых технологий в настоящее время будет большим прорывом в обучении.

Нами были разработаны примеры технологических карт уроков, в которых используются цифровые и игровые технологии.

Представим один пример такой карты на тему: «Действия с десятичными дробями».

Технологическая карта

(рассматривается этап закрепления изученного материала)

Тема: «Действия с десятичными дробями».

Цель: закрепить и систематизировать знания, умения и навыки учащихся по теме «Десятичные дроби»

Задачи:

Образовательные:

- Закрепить знания учащихся при решении задач на тему «Десятичные дроби».

Воспитательные:

- Воспитать активность, самостоятельность, трудолюбие;
- Сформировать культуру личностных качеств учащихся;
- Воспитать сознательное усвоение предмета.

Развивающие:

- Развить умение использовать термины и понятия грамотно;
- Развить умение анализировать, делать выводы, обобщать, выделять главное;
- Повысить мотивацию к обучению.

Форма урока: урок обобщение

Оборудование, раздаточный материал: компьютер, мультимедийный проектор, презентация, карточки с заданиями, гаджеты, ноутбуки.

№	Этапы проведения урока	Содержание
1	Организационный этап	Приветствие учителя учеников. Учитель начинает настраивать учеников на учебный процесс, создает комфортную ситуацию для детей. Так же он объясняет учащимся, в какой форме будет проходить урок, тем самым уже с начала урока повышает мотивацию школьников и их эмоциональный фон. По окончанию урока, учитель выставляет оценки за урок.
2	Постановка цели и задач урока. Мотивация учебной деятельности учащихся	
3	Актуализация знаний	Устная работа. На доске записано задание: Вычислите устно: а) $0,4 \cdot 5$; б) $1,6 \cdot 6$; в) $3,7 \cdot 1000$; г) $1-0,9$; д) $3-0,3$; е) $0,3 \cdot 3$; ж) $0,09 \cdot 5$; з)

		0,341*1000; и) 0,6+0,8; к) 0,2*0,9.
4	Закрепление изученного материала	Игра: « <i>Математическое лото</i> » (разработка игры расположена после технологической карты).
5	Физкультминутка.	Учитель включает на проекторе видеоролик, в котором проходит небольшая разминка. Ученики повторяют, тем самым отдохвая физически и эмоционально от учебного процесса. Дальше ученики готовятся к продолжению работы.
6	Закрепление изученного материала	Работа с помощью гаджетов или ноутбуков (разработка заданий расположена после технологической карты).
7	Рефлексия	1. Что по вашему мнению сегодня у вас получалось лучше всего? 2. Как вы себя оцените?
8	Информация о домашнем задании	Номера: № 859, 861, 854(в)

Описание:

В данной разработке, рассматривается этап «Закрепления изученного урока». Данный этап делится на ДО физкультминутки и ПОСЛЕ физкультминутки, так как дети 5 – х классов находятся в таком возрасте, в котором нужно во время уроков отдохнуть, разминать руки, ноги.

ДО физкультминутки предлагается провести игру «Математическое лото», которая поможет учителю выявить проблемы учеников самым простым способом, если получилась картинка, значит, проблем у ребенка нет, если же не получилась, учитель сразу поймет, в каком направлении у ученика есть проблемы и сможет быстро их исправить.

ПОСЛЕ физкультминутки учащимся предлагается воспользоваться своими гаджетами (учащихся заранее оповещают, чтобы они принесли смартфоны, планшеты или ноутбуки). Учитель

каждому ученику раздает листок с QR-кодом, отсканировав который школьники переходят на сайт, на котором им нужно пройти тест на время. Этот тест поможет учителю, так же отследить проблемные зоны детей, так ответы на тест учитель сразу сможет проследить в своем профиле на данном сайте.

Игра «Математическое лото»

Правила игры: учитель раздает детям специальный конверт, в котором находится набор карточек. Их больше чем ответов на большой карте, эта карта так же вложена в конверт. Школьники достают карточку, решают примеры и накрывают ею соответствующий прямоугольник. Карточки ложатся лицевой стороной вниз. Если ученик правильно решил и наложил карточку, то в итоге у него получится рисунок. Учителю очень легко проверять результаты учащихся, так сразу видно получился рисунок или нет.

$$605 \cdot 37$$

$$97500 : 125$$

$$744 \cdot 12$$

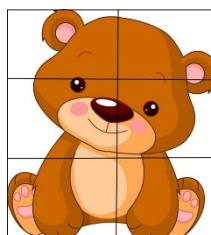
$$7585 : 37$$

$$Z : 35 = 18$$

$$35 \cdot x = 175$$

$$\begin{array}{l} k:19+329 \text{ при} \\ k=5719 \end{array}$$

22385	780
205	630
5	8928



Задания для гаджетов:

1.



2.



Таким образом, используя на уроках математики цифровые и игровые технологии, мы - учителя повышаем мотивацию школьников, развиваем интеллектуальные способности, активизируем детей на уроке, формируем вычислительные навыки, развиваем чувство ответственности.

Литература

1. Лихачев Б. Т. Педагогика: курс лекций / Б.Т. Лихачев; под ред. В. А. Сластенина. М.: Гуманитар, изд. центр ВЛАДОС, 2010. 647 с.
2. Селевко, Г. К. Современные образовательные технологии. М.: Народное образование, 1998. 128 с.
3. Бесова М. А. Познавательные игры от А до Я/ М. А. Бесова. Я.: Академия развития, 2004. 272 с.
4. Зайцева И. А. Формирование познавательного интереса к учению как способ развития креативных способностей личности/И.А. Зайцева. М.: Просвещение, 2005. 12-24 с.

Мордовской Андрей Константинович, кандидат физико-математических наук, Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова, Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а. E-mail: mak13@mail.ru

Гачегова Наталья Сергеевна, студентка 2 курса магистратуры Бурятского государственного университета им. Доржи Банзарова Института математики и информатики, Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24 а, E-mail: mgachegova@mail.ru

Mordovskoy Andrey, Canditate of Physics and Mathematics, Banzarov Buryat State University

Gachegova Natalia, 2nd year student of the Banzarov Buryat State University

ОРГАНИЗАЦИЯ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ СТУДЕНТОВ КОЛЛЕДЖА ПРИ ДИСТАНЦИОННОМ ОБУЧЕНИИ

Аннотация. В статье рассматривается ряд проблем, возникших при переходе на дистанционное обучение. Некоторые особенности такой организации образовательного процесса для сохранения непрерывности образовательного процесса глазами авторов и соблюдение педагогических условий для побуждения к исследовательской работе студентов технологического колледжа ВСГУТУ. Интеграция очной и заочной формы обучения во второй половине 2019-2020 учебного года явилась наилучшим выходом из создавшейся ситуации, при этом особенностями такого перехода являлись повышение уровня образованности студентов и получение ими качественных образовательных услуг. Образовательная среда была расширена для удовлетворения прав человека в области получения образования, повышения профессиональной и социальной мобильности студентов.

Ключевые слова: качество образования, цели, задачи, проблемы и особенности дистанционного обучения.

© E. Pavlova, E. Bulgatova

ORGANIZATION OF RESEARCH ACTIVITY OF COLLEGE STUDENTS WITH REMOTE TRAINING

Abstract. The article discusses a number of problems that arose during the transition to distance learning. Some features of such an organization of the educational process in order to maintain the continuity of the educational process through the eyes of the authors and the observance of pedagogical conditions for inducing research work by students of the Technological College of the Voronezh State Technical University. The integration of full-time and part-time studies in the second half of the 2019-2020 academic year was the best way out of the current situation, while the features of this transition were to increase the level of students' education and to receive high-quality educational services. The educational environment has been expanded to meet human rights in the field of education, increasing the professional and social mobility of students.

Keywords: quality of education, goals, objectives, problems and features of distance learning.

Для того чтобы обеспечить непрерывность обучения в достаточно непростых условиях 2019-2020 учебного года, возникших из-за пандемии COVID-19, вузы и школы были вынуждены прибегнуть к форс-мажорному переходу на дистанционное обучение. В силу возникших обстоятельств пришлось решать ряд проблем: временные затраты преподавателей возросли в разы, наличие технических сложностей, вопросы коммуникаций и стандартов, качество программного обеспечения и курсов. Отсутствие специальных навыков привело к лихорадочному освоению новых платформ, затраты на дорогостоящее оборудование также ударили по карману и педагогов, и студентов, отдаленность некоторых населенных пунктов не позволяла выходить на связь, качество которой также оставляло желать лучшего, дальнодействие и асинхронность обучения утратили свои преимущества. Последний из упомянутых аспектов имеет как положительные, так и отрицательные моменты. Например, влияние асинхронности на общение со студентами несет массу неудобств, расхолаживая и без того не очень дисциплинированных граждан. При такой форме обучения студент не привязан к конкретному времени и месту, может самостоятельно составить график своего учебного процесса, получить информацию в виде лекции, не привязываясь к определенному времени, выполнять тесты, решать задачи, просматривать нужные презентации. Звучит весьма привлекательно, но на практике возникает множество затруднений: обычного человека, привыкшего к deadline. Такая форма обучения очень расслабляет и расхолаживает, так как между получением информации и ее отправкой преподавателю может возникать значительный временной интервал. Отсутствие «живого» общения со студентами, в том числе «живого» контроля, также приносит свои негативные плоды - к финишной прямой пришло гораздо меньше студентов, что вполне объяснимо трудностями с концентрацией внимания, расслабляющей домашней обстановкой и т.д. Дистанционное обучение не может заменить традиционные методы обучения (классическую советскую школу, по мнению авторов, которые получили образование до широкого распространения цифровых технологий) по нескольким причинам: понижается качество обучения, вызывает вопросы содержание обучения, и, как следствие, уменьшается эффект усвоения знаний обучающимся. Некоторые студенты даже не пытаются вникнуть в

излагаемый материал, не веря в свои силы, отсутствие какой-либо мотивации, кроме материальной, также приносит отрицательный результат.

К сожалению, дистанционное обучение не предусматривает жесткий контроль со стороны педагога и это мешает среднестатистическому студенту добиться результатов в освоении высшей математики. С другой стороны, синхронный формат обучения в чистом виде был недоступен по ряду объективных причин, а современным пользователям различного рода гаджетов, может быть, привычнее работать удаленно, удобнее выполнять онлайн различные тесты, но с постоянным контролем преподавателя. Такие особенности дистанционного обучения как гибкость и специализированный контроль качества обучения здесь как нельзя более кстати. Одним из выходов из создавшегося положения мы видим создание на «онлайн-парах» атмосферы сотрудничества, где студенты и преподаватель становятся партнерами в достижении одних и тех же целей: изучение основных понятий и методов математических дисциплин и приобретение навыков использования аппарата и методов высшей математики [1].

Наилучшим выходом из сложившейся ситуации, по мнению авторов, является комбинированный метод обучения, где дистанционное обучение рассматривается как дополнительный прием. Например, отдельные темы можно давать на самостоятельное изучение, при этом, разработав схему, по которой студент сможет ориентироваться в огромном информационном потоке.

Сporadически переходить на дистанционное обучение было бы крайне удобно в тех случаях, когда преподавателя нельзя заменить; когда проходит углубление тем, изученных в средней школе; наконец, когда некоторый курс рассчитан на развитие исследовательской деятельности студентов. В процессе самореализации студентов совершаются такие навыки как концентрация внимания, самоконтроль, самоанализ.

В качестве контролирующей составляющей вполне уместно применение тестовой методики как средства педагогического контроля обученности студентов. Основной акцент во время дистанционного обучения мы делали на диагностические тесты, которые позволяли определить трудные для самостоятельного обучения разделы, фокусировались на часто встречающихся

ошибках, выпукло показывали результаты обучения и, как правило, имели не очень высокий уровень сложности. Доминирующий принцип при составлении таких тестов – разноуровневость предлагаемого материала, что позволяет выйти некоторым студентам на творческий уровень. Как правило, применение тестов позволяло наладить самоконтроль, отчетливо видеть рейтинг, выйти на уровень творческих умений, когда студенты применяют полученные знания в нестандартных ситуациях и переходят к исследовательской деятельности.

К педагогическим условиям, которые позволяют вовлечь студентов в увлекательный процесс исследовательской деятельности, можно отнести создание соответствующей образовательной среды, подталкивающих к личностному и профессиональному росту. Готовность к исследовательской деятельности в полной мере формируют планомерные занятия (теоретические и практические) математикой. Важно дать понять каждому студенту, что самостоятельная работа одна из основных видов познавательной деятельности и направлена на качественную подготовку будущих специалистов. Цель дистанционного обучения заключается в развитии основного навыка – самостоятельной работы, которая в будущей профессии является основой самообразования и повышения квалификации. Дистанционное обучение за время пандемии расширило и обновило роль преподавателя в учебном процессе, который каждодневно координирует познавательный процесс, совершенствует с каждым разом преподаваемые курсы дисциплин, повышает квалификацию в соответствии с нововведениями и инновациями. Хорошим подспорьем во время пандемии для повышения квалификации преподавателя стали различные онлайн-семинары и курсы, видеоконференции на тему организации дистанционного обучения, онлайн-экзаменов, онлайн-зачетов для более тесного и глубокого общения со студентами.

Извлечь уроки из сложившейся непростой ситуации довольно сложно в силу ее неоднозначности, но найти плюсы в дистанционном обучении вполне возможно, хотя авторы и являются ярыми поборниками традиционной системы передачи знаний.

Литература

1. Павлова Е. Б., Булгатова Е. Н. Формирование математических компетенций у студентов ВСГУТУ // Формирование компетенций выпускников вуза: соответствие образовательным и профессиональным стандартам: сборник статей международной научно-методической конференции, выпуск 26 - Улан-Удэ: изд-во ВСГУТУ, 2019. – С.437

Павлова Елена Бадмаевна, старший преподаватель, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 670013, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в, тел.: +7 (3012) 431415, e-mail: pavlova2607@mail.ru

Булгатова Елена Николаевна, кандидат физико-математических наук, доцент, Восточно-Сибирский государственный университет технологий и управления, 670013, Россия, г. Улан-Удэ, ул. Ключевская, 40в, тел.: +7(3012)431415, e-mail: belena77@mail.ru

Pavlova Elena Badmaevna, Senior Lecturer, East Siberian State University of Technology and Management

Bulgatova Elena Nikolaevna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, East Siberian State University of Technology and Management

ОРГАНИЗАЦИЯ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИМ УЧЕБНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ В ОБЩЕМ ОБРАЗОВАНИИ В УСЛОВИЯХ КОМПЬЮТЕРИЗАЦИИ И МАТЕМАТИЗАЦИИ ОБЩЕСТВА

Аннотация. В статье деятельностный подход в методике обучения математике рассмотрен как системообразующий фактор технологии обучения и активизации познавательной деятельности. Для педагогической практики его использования выявлены отношения процессов компьютеризация и математизация общества и организации обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании. На основе анализа педагогической практики предложены некоторые варианты такой технологической составляющей организации обучения математическим учебным дисциплинам, представленной элементами методической системы обучения реализации деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации.

Ключевые слова: организация обучения математике в общем образовании в условиях компьютеризации и математизации; математизация; компьютеризация; цифровизация; информатизация образования; адаптационные способности обучающихся к инновационным изменениям в элементах методических систем обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании; методы реализации деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации.

© A. Polichka

ORGANIZATION OF TEACHING MATHEMATICAL ACADEMIC DISCIPLINES IN GENERAL EDUCATION IN THE CONDITIONS OF COMPUTERIZATION AND MATHEMATIZATION OF SOCIETY

Abstract. In the article, the activity approach in the methodology of teaching mathematics is considered as a system-forming factor of learning technology and activation of cognitive activity. For the pedagogical practice of its use, the relationship between the processes of computerization and

mathematization of society and the organization of teaching mathematical academic disciplines in General education is revealed. Based on the analysis of pedagogical practice, some variants of such a technological component of the organization of teaching mathematical academic disciplines, represented by elements of the methodological system of teaching the implementation of the activity approach to the formation of adaptive abilities of students to study mathematics in the conditions of computerization and mathematization, are proposed.

Keywords: organization of teaching mathematics in General education in the conditions of computerization and mathematization; mathematization; computerization; digitalization; Informatization of education; adaptive abilities of students to innovative changes in the elements of methodological systems of teaching mathematical academic disciplines in General education; methods of implementation of the activity approach to the formation of adaptive abilities of students to study mathematics in the conditions of computerization and mathematization.

Введение. В системе целей Национальной доктрины образования Российской Федерации [1] выделяются такие направления, соотносящиеся с обучением математическим учебным дисциплинам в общем образовании, как: своевременное и разностороннее развитие молодежи и детей, их самообразовательных способностей, навыков творчества и самореализации; организация процесса обучения с применением современных научных достижений, периодическое обновление образовательных аспектов в соответствии с изменениями в культурной, экономической, научной, технической и технологической сферах; выработка многовариантных типов программ, которые будут обеспечивать индивидуализацию и личностное ориентирование процесса воспитания и обучения.

Возможностями учебных математических дисциплин для организации реализации таких направлений целей являются положения Концепции развития математического образования в Российской Федерации [2] (далее Концепции РМО). В частности, в ней отмечены, с одной стороны, значимость обеспечения готовности обучающихся применять математику в других областях, а, с другой стороны, наличие у изучения и преподавания математики системообразующей функции формирования интеллектуальной готовности обучающихся всех уровней образования к обучению и влияния на содержание и преподавание

других учебных дисциплин. В данной Концепции РМО, исходя из потребностей обучающихся и потребностей общества во всеобщей математической грамотности, в специалистах различного профиля и уровня математической подготовки, отмечается также важная необходимость модернизации содержания с обеспечением их преемственности учебных программ математического образования на всех уровнях. Важным для основного общего и среднего общего образования выделяется положение Концепции РМО по обеспечению на доступном уровне каждого обучающегося математическим образованием с использованием присущей математике увлекательности и развивающей интеллектуальной деятельностью.

Наше исследование деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации опирается на то, что в Концепции РМО указывается необходимость: реализации возможности достижения необходимого уровня математического образования при поддержке индивидуализацией обучения, использованием электронного обучения и дистанционных образовательных технологий; обеспечения совершенствования содержания математического образования в первую очередь за счет опережающей подготовки и дополнительного профессионального образования педагогов на базе лидерских практик математического образования, сформировавшихся в общеобразовательных организациях.

На этой основе организацию обучения математике в общем образовании в условиях компьютеризации и математизации представим в виде процесса по выбору и осуществлению целенаправленной деятельности педагогического работника, направленной на:

- координацию его интеграционной деятельности и условий деятельности, нацеленных на реализацию математических учебных дисциплин в условиях компьютеризации и математизации;
- достижение взаимного соответствия функционирования составляющих его деятельности по реализации математических учебных дисциплин (функций; целей; видов содержания, методов, форм, средств реализации, мониторинга и контроля) и условий компьютеризации и математизации;

- проектирование содержания его деятельности по преподаванию математических учебных дисциплин в конкретных условиях образовательной организации, учитывающих условия компьютеризации и математизации.

Данное исследование посвящено описанию варианта такой организации для реализации деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации и рассмотрению некоторых методов такой реализации.

Отношения процессов компьютеризации и математизации общества и организации обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании. В нашем исследовании рассмотрим энциклопедический подход использования смысла основных понятий. При многообразии [3] будем трактовать математизацию в виде внедрения методов математики и ее достижений в различные сферы человеческой деятельности. Компьютеризацию [4] рассмотрим в виде широкого внедрения в различные сферы человеческой деятельности современных электронных цифровых вычислительных машин (ЭЦВМ).

Применение и внедрение ЭЦВМ и математики естественно рассмотреть в отношениях с понятием «цифровизация». Именно «цифра» как символ, необходимый для формализации и исследования количества, должна соотносится с математизацией и компьютеризацией. На этом пути возникает необходимость рассмотрения цифровых компетенций, получаемых приобретением знаний, опыта цифровых умений, навыков и отношений к цифровым представлениям данных. Учеными и практическими пользователями средств информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) обсуждается и отношения между употребляемыми терминами «цифровизация» и «информатизация». Научная школа И. В. Роберт информатизацию образования представляет новой областью педагогического знания, ориентированной на обеспечение сферы образования методологией, технологией и практикой решения актуальных проблем и задач модернизации образования [5]. При варианте рассмотрения информатизации как части цифровизации информационные технологии могут рассматриваться как цифровые [6]. Таким образом, процессы обработки данных в условиях компьютеризации

и математизации требуют навыков представления данных в формализованном виде.

В связи с этим, естественно рассмотрение такого отношения процессов компьютеризации и математизации общества и организации обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании, когда выделяется важная роль формализации.

На основе важной роли формализации в научных исследованиях, закономерностью развития современной науки выявлено углубление и расширение процессов математизации и компьютеризации науки, которые в свою очередь в настоящее время рассматриваются базами новых информационных технологий.

Важным же основным инструментом математизации современными исследователями выделяется математическое моделирование в условиях цифровизации, сущностью и главным преимуществом которого является замена исследуемых систем специальной моделью на языке математики, которая позволяет вычислительно-логические алгоритмы для ее изучения и экспериментирования с нею реализовывать на вычислительных машинах при цифровом представлении данных.

Важным отношением процессов компьютеризации и математизации общества, влияющим на организацию обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании, выделим то, что абстрактно-формальная сторона познания в настоящее время основательно использует математизацию и компьютеризацию при цифровом представлении данных.

Формализацию рассматривают также и в виде гносеологического метода, основанного на выявлениях и фиксациях формальных структур оригинала и приписывающего его элементам специальные абстрактные символы. В широком смысле формализацию понимают в виде отделения от содержания объекта его формы.

Специальной особенностью формализации, определяющим отношение процессов компьютеризации и математизации общества и организации обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании выделим и ее творческий характер.

Важным отношением процессов компьютеризации и математизации общества, влияющим на организацию обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании, является и то, что при использовании фундаментальных сходств

науки происходит универсализация ряда семейств формальных языков.

Выделим также такое отношение процессов компьютеризации и математизации общества и организации обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании, основанное на понятии абстрагирования, рассматриваемого в виде метода мысленного упрощения при исследовании одной из сторон объекта.

Важное отношение процессов компьютеризации и математизации общества и организации обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании определяется понятием идеализации, рассматриваемым в виде процесса создания понятий, только с той или иной степенью приближающие свои прототипы в реальной действительности.

Выделим характеристики отношений понятий формализации и математизации.

Характеристика этапа математизации формализации, направленного на улучшение качества формализованного знания и, в частности, называемого именно математизацией, рассматривается в виде специфического метода формализации знания для выделения формальной структуры объекта и оперирование с ней на основе математических действий: измерение; сравнение; счет.

Для реализации деятельностного подхода к формированию адаптационных способностей учеников к изучению математики выделим такие варианты основных методов математизации, как: метод метрической математизации на основе измерения, сравнения и счета; метод неметрической математизации на основе переноса структур математического знания в нематематическую науку.

Некоторые варианты элементов методических систем обучения реализации деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации. Отметим важность процесса выбора и осуществления целенаправленной деятельности учителя разработке соответствующих методических систем обучения [7]. Выделим в этой деятельности работу по проектированию содержания инновационной деятельности учителя по реализации математических учебных дисциплин в конкретных условиях образовательной организации, причем при достижении взаимного соответствия функционирования составляющих деятельности учителя по реализации математических учебных дисциплин

(функций; целей; видов содержания, методов, форм, средств реализации, мониторинга и контроля) и условий компьютеризации и математизации.

Вариант реализации деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации предложим на основе активизации познавательной деятельности обучаемых.

В структуре активизации познавательной деятельности обучаемых, рассматриваемой как деятельность учителя, выделим виды его деятельности по созданию определенных условий с целью возбуждения интереса, повышения активности, творчества, самостоятельности обучаемых в освоении образовательных программ. Именно, рассмотрим виды его деятельности по созданию следующих педагогических условий по: реализации социальных и государственных требований к образовательным программам; постановке соответствующей дидактической задачи (развитие интереса, повышение активности, творчества, самостоятельности обучаемых; выбор цели обучения в соответствии с социальными требованиями; отбор содержания обучения); проектирование дидактического процесса с выбором адекватных организационных форм обучения, средств обучения, методов обучения.

Анализ источников (см., напр., [7, 8, 9]), описывающих педагогическую практику по организации дидактического процесса (выбор адекватных организационных форм обучения, средств обучения, методов обучения), показывает, что реализация деятельностного подхода в обучении математике рассматривается как инновационная деятельность учителя.

Инновационную педагогическую деятельность учителя можно рассматривать как мотивированный, целенаправленный и сознательный процесс по созданию, освоению, использованию и распространению современных идей (теорий, методик, технологий), актуальных и адаптированных для данных условий и соответствующих определенным критериям.

Некоторые приемы, методы и технологии обучения математике, основанные на деятельностном подходе формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации. Развитие деятельности учащихся в учебно-воспитательном процессе знаменует собой поступательное развитие личности, поскольку

меняется характер деятельности: исполнительская → активно исполнительская → активно самостоятельная → творчески самостоятельная.

Элементами реализации деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации для формирования опыта творческой деятельности учащихся являются методы и технологии обучения, основанные на принципах развивающего обучения, личностно-ориентированного и деятельностного подходах. К методам реализации деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации можно отнести: проблемно-поисковый метод; исследовательский метод; метод учебных проектов; технологию мастерских; технологию модульного обучения; приемы и методы выполнения творческих, поисковых, проблемных заданий.

Заключение. Введение понятия организации обучения математике в общем образовании в условиях компьютеризации и математизации позволило значение формирования адаптационных способностей обучающихся к инновационным изменениям в элементах методических систем обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании способность к адаптации обучаемого к информационно-образовательной предметной среде обучения школьным математическим дисциплинам представить в виде его естественного состояния, которое проявляется в привыкании к: новой деятельности; изменившимся условиям; появившимся социальным контактам и изменившимся социальным ролям, по накоплению и использованию информации в данной среде, направленной на достижение для обучаемого определённого, обычно оптимального в некотором смысле, состояния или динамики (поведения) при начальной неопределенности и изменяющихся внешних условий, изменений окружающей информационно-образовательной предметной среды. Тогда деятельностный подход формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации будем представлять как подход, заключающегося в организации обучения математики в общем образовании, в котором главное место отводится активной и разносторонней, в максимальной степени самостоятельной

познавательной деятельности обучаемого в информационно-образовательной предметной среде обучения школьным математическим дисциплинам, когда любые принимаемые человеком решения основываются на опыте взаимодействия индивидуума с окружающей информационно-образовательной предметной средой обучения школьным математическим дисциплинам. Адаптационные способности же обучающихся к инновационным изменениям в элементах методических систем обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании можно представить как индивидуально-психологические особенности личности, выражающиеся в выборе наиболее эффективных способов адаптации к информационно-образовательной предметной среде обучения школьным математическим дисциплинам. Тогда деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации можно реализовать на основе введенной организации обучения математике в общем образовании в условиях компьютеризации и математизации.

В этой связи отметим важность для этого процесса выбора и осуществления целенаправленной деятельности учителя по разработке соответствующих методических систем обучения. Существенно выделить в этой деятельности проектирование содержания деятельности учителя по реализации математических учебных дисциплин в конкретных условиях образовательной организации, причем, при достижении взаимного соответствия функционирования составляющих деятельности учителя по реализации математических учебных дисциплин (функций; целей; видов содержания, методов, форм, средств реализации, мониторинга и контроля) и условий компьютеризации и математизации.

Вариантом деятельностного подхода формирования адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации предлагается реализация на основе активизации познавательной деятельности обучаемых при необходимой для этого инновационной педагогической деятельности учителя применением выделенных методов реализации деятельностного подхода формирования

адаптационных способностей учеников к изучению математики в условиях компьютеризации и математизации.

Литература

1. Национальная доктрина образования в Российской Федерации: Постановление Правительства РФ от 04.10.2000 N 751, программа развития до 2025 г., цели, задачи, способы их достижение и результаты [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: <https://fb.ru/article/413885/natsionalnaya-doktrina-obrazovaniya-v-rossiyskoy-federatsii-postanovenie-pravitelstva-rf-ot-n-programma-razvitiya-do-g-tseli-zadachi-sposobyi-ih-dostijenie-i-rezulattyi> (дата обращения 09.02.2020).
2. Распоряжение Правительства Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. N 2506-р г. Москва. Концепция развития математического образования в Российской Федерации [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: <https://rg.ru/2013/12/27/matematika-site-dok.html> (дата обращения 09.02.2020).
3. Энциклопедический словарь. 2009. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : URL: <https://dic.academic.ru/dic.nsf/es/112276> (дата обращения 04.05.2019).
4. Большой энциклопедический словарь – компьютеризация. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: <http://www.terminy.info/literature/great-encyclopedic-dictionary/kompyuterizaciya> (дата обращения 04.05.2019).
5. Роберт, И. В. Современное состояние информатизации отечественного образования: фундаментальные и прикладные исследования / И. В. Роберт. – Информатизация образования – 2017: сборник материалов Международной научно-практической конференции (Чебоксары, 15 июня – 17 июня 2017 года) / Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ун-т, 2017. – С. 3-29.
6. Маркова, В. И. Деятельностный подход в обучении математике: теоретические основы и практика реализации / В. И. Маркова [Электронный ресурс]. – Режим доступа: URL: <https://sites.google.com/site/dpodhodmatematik/ucebnyj-plan/tema-4-1> (дата обращения 19.01.2020).
7. Поличка, А. Е. Место задачного материала в авторской методической системе обучения математики для педагогического образования / А. Е. Поличка // Геометрия многообразий и её приложения: материалы Пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова (Улан-Удэ – оз. Байкал, 3-6 июля 2018 г.) / отв. Ред. В. Б. Цыренова. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2018. – С. 270-278.
8. Табачук, Н. П. Творческая активность личности и ее проявление в деятельности / Н. П. Табачук // Научный альманах: 2015. №8(10), 2015. – С. 1559–1568.

9. Кислякова, М. А. Проблема целей и содержания учебного предмета «Математика» / М. А. Кислякова // Томский педагогический вестник. 2012. – №2. – С.175-179.

Поличка Анатолий Егорович, доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, доцент, профессор кафедры математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», 680000, г. Хабаровск, ул. Запарина, 30, кв. 120, тел.: +7 914 5499461, e-mail: aepol@mail.ru

Polichka Anatoly Egorovich, Doctor of Pedagogics, Canditate of Physicsl and Mathematics, Associate Professor, Pacific National University

**ИНФОРМАЦИОННАЯ КОМПЕТЕНЦИЯ –
МЕТАКОМПЕТЕНЦИЯ – ЭКОКОМПЕТЕНЦИЯ:
МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РАЗВИТИЯ У БУДУЩИХ
УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ, ФИЗИКИ И ИНФОРМАТИКИ**

Аннотация. Рассматривается педагогический опыт развития информационной компетенции студентов как будущих учителей математики, физики и информатики. Описывается многообразие контекстов в понимании феноменов «информационная компетенция – метакомпетенция – экокомпетенция». Раскрывается роль информационной компетенции как метапредметной экокомпетенции, превышающей существующую номенклатуру компетенций и работающей на опережение ситуации в рамках существования в мире «цифры». Выделяются научно-методические условия развития информационной компетенции студентов как будущих учителей. Сделан акцент на виртуальный калейдоскоп студенческих проектов педагогической направленности, которые связаны с глубоким и безошибочным «цифровым следом» студентов. Сформулировано заключение о том, что под влиянием становления цифровой парадигмы образования, выстраивания виртуальной образовательной среды вуза возникают новые ценности и отношения к процессу развития информационной компетенции студентов вуза как метакомпетенции и экокомпетенции.

Ключевые слова: информационная компетенция, метакомпетенция, экокомпетенция, «цифровой след», виртуальная образовательная среда вуза.

© N. Tabachuk

**INFORMATION COMPETENCE – METACOMPETENCE
ECO-COMPETENCE: METHODOLOGICAL DEVELOPMENT
FOR FUTURE TEACHERS OF MATHEMATICS, PHYSICS AND
INFORMATICS**

Abstract. The pedagogical experience of the development of information competence of students as future teachers of mathematics, physics and computer science is considered. The variety of contexts in understanding the phenomena of «information competence - metacompetence – ecocompetence» is described. The role of informational competence as a meta-subject eco-competence is

disclosed, exceeding the existing range of competencies and working to outstrip the situation within the framework of the existence of the «figure» in the world. Scientific and methodological conditions for the development of information competence of students as future teachers are highlighted. Emphasis is placed on a virtual kaleidoscope of student pedagogical projects that are associated with a deep and unmistakable «digital footprint» of students. The conclusion is formulated that under the influence of the digital paradigm of education, building a virtual educational environment of the university, new values and attitudes to the process of developing the information competence of university students as metacompetence and eco-competence arise.

Keywords: information competence, metacompetence, eco-competence, «digital footprint», the virtual educational environment of the university.

На современном этапе становления цифровой парадигмы образования многими учеными (А. В. Хуторской, Т. Н. Носкова, М. Е. Вайндорф-Сысоева, Н. П. Табачук, А. Е. Поличка, И. В. Карпова, М. А. Кислякова, А. В. Никитенко и др.) подчеркивается актуальность процесса развития информационной компетенции личности [1, 4, 6, 7, 8, 9]. Сегодня развивается виртуальная образовательная среда. В связи с этим изменяются подходы и научно-методические условия развития информационной компетенции у будущих учителей математики, физики и информатики, которые связаны с активным взаимодействием студентов в виртуальной образовательной среде; встраивается новое методическое обеспечение данного процесса через понимание многообразия контекстов в конгломерате «информационная компетенция – метакомпетенция – экокомпетенция».

В нашем понимании информационная компетенция студентов есть универсальная метапредметная экокомпетенция взаимодействия в виртуальной образовательной среде вуза.

В данном контексте интересен подход Д. С. Ермакова к осмыслению феномена экокомпетенция, по его мнению, это есть потребность в самоактуализации и реализации своего внутреннего потенциала экологического сознания [2].

Д. С. Ермаков в описании экокомпетенции делает акцент на том, что ее развитие возможно при объяснении связей и зависимостей в экосистемах и овладении студентами экологически безопасными приемами и способами жизнедеятельности, обеспечивающими безопасность общения, безопасность устройств и безопасность

информации [2]. Для нас такой экосистемой, поддерживающей функции безопасности, является виртуальная образовательная среда вуза, где разворачивается процесс развития информационной компетенции как экокомпетенции.

Метапредметность как характеристика информационной компетенции студентов раскрывает следующие ее грани: умение студентов осуществлять самооценку собственного уровня развития информационной компетенции, принимать решения и осуществлять осознанный выбор в познавательной и учебной деятельности; нахождение общего решения, которое будет удовлетворять общим интересам в рамках взаимодействия в виртуальной образовательной среде вуза; владение универсальными способами работы с информацией и источниками сети Интернет; управление деятельностью по коммуникации в виртуальной образовательной среде на принципах «цифровой гигиены»; владение универсальными способами самопрезентации в виртуальной образовательной среде с положительным оттенком [6].

Т. Н. Носкова в своем исследовании делает акцент на том, что виртуальная образовательная среда есть новый «этаж» образовательной среды – своеобразная «надстройка», в которой изменяется ход процесса и проявляются его новые качественные аспекты: необходимость сместить центр образовательных взаимодействий от педагога к обучающемуся; потребность «видеть» обучающегося через эту среду по фиксируемым в ней «следам» информационных и коммуникационных действий; готовность формировать передовые ИКТ-компетенции [4].

М. Е. Вайндорф-Сысоева характеризует виртуальную образовательную среду как информационное содержание и коммуникационные возможности локальных, корпоративных и глобальных компьютерных сетей, формируемые и используемые для образовательных целей всеми участниками образовательного процесса. Она подчеркивает, что отсутствие компетенции владения виртуальной образовательной средой ограничивает профессиональные возможности, оставляя студента на «обочине» прогрессивных тенденций в области образования [1].

Т. Н. Носкова, М. Е. Вайндорф-Сысоева, характеризую виртуальную образовательную среду, акцентируют внимание на потребности в развитии информационной компетенции студентов и формировании их глубокого и безошибочного «цифрового образа»

или «следа». В ранее проведенных исследованиях нами подчеркивалась важность «цифрового следа» в развитии информационной компетенции студентов [9].

Мы утверждаемся в том, что информационная компетенция студентов должна превышать существующую номенклатуру компетенций – чтобы работать на опережение ситуации. Развитие информационной компетенции студентов как процесс в вузе позволяет «научить учиться» в виртуальной образовательной среде, быть готовым поддерживать глубокий и безошибочный «цифровой образ» и тенденции к самообразованию и самосовершенствованию собственного уровня информационной компетенции [6].

И тогда научно-методическими условиями развертывания данного процесса в вузе являются:

- взаимодействие преподавателей вуза на основе единого понимания педагогической сущности феномена «информационная компетенция студентов»;

- создание антропоориентированного цифрового образовательного пространства как экосистемы взаимодействия с ориентиром на индивидуальные образовательные траектории развития информационной компетенции личности;

- включение в образовательный процесс вуза цифровых информационных технологий, развивающих ценностное отношение студентов к избранной профессии;

- использование методов самостроительства, самоконтроля и самооценки собственного уровня развития информационной компетенции;

- внедрение новых организационных форм антропоориентированной направленности: лекция–пресс-конференция, подиумная дискуссия, баскет-метод, дневник как метод самопознания [6];

- применение современных средств информатизации и цифровизации процесса обучения.

В рамках педагогического опыта развития информационной компетенции студентов Тихookeанского государственного университета можно проследить глубокий и безошибочный «цифровой след» студентов через виртуальный калейдоскоп студенческих проектов педагогической направленности как показано в табл. 1.

Таблица 1

Виртуальный калейдоскоп студенческих проектов
педагогической направленности

Название проекта	Ссылка на проект
Курс «Физические фокусы» для внеклассной деятельности по физике	https://stepik.org/course/59141
Интерактивная книга физических фокусов	https://www.storyjumper.com/book/read/73885345/5dccbee20d8ab
Интерактивная книга «Дроби»	https://www.storyjumper.com/book/read/75091565/5dcc887cd6f2a
Ребусы на тему «Квадратные уравнения»	https://onlinetestpad.com/dhwdmhb5awhk
Онлайн анаграммы по теме «Функции»	https://etreniki.ru/5NJSZG4Q7Y
Комплекс интерактивных модулей по информационным системам	https://learningapps.org/5257793 https://learningapps.org/5257798 https://learningapps.org/5257805 https://learningapps.org/5308831
Комплекс интерактивных модулей по компьютерным сетям	http://learningApps.org/display?v=puanxg8wn17

Разработанные студентами проекты как метапредметные результаты владения универсальными способами самопрезентации в виртуальной образовательной среде с положительным оттенком, осознанная готовность культурного восхождения в мире «цифры» направлены на осмысление индивидуальных достижений в профессиональной деятельности.

Таким образом, возникают новые ценности и отношения к процессу развития информационной компетенции студентов вуза как метакомпетенции и экокомпетенции, связанные с взаимодействием в виртуальной образовательной среде, с поддержанием глубокого и безошибочного «цифрового следа» и тенденций к самообразованию и самосовершенствованию собственного уровня информационной компетенции.

Литература

1. Вайндорф-Сысоева М. Е. Виртуальная образовательная среда как неотъемлемый компонент современной системы образования // Вестник ЮУрГУ. – 2012. – № 14. – С. 86-91.

2. Ермаков Д. С. Экологическая компетенция учащихся: содержание, структура, особенности формирования // Вестник РУДН. – 2008. – № 1. – С. 86-91.
3. Носкова Т. Н. Педагогическая сущность виртуальной образовательной среды // КиберЛенинка [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://cyberleninka.ru/article/n/pedagogicheskaya-suschnost-virtualnoy-obrazovatelnoy-sredy/viewer> (дата обращения 06.05.2020).
4. Поличка А. Е., Малыхина О. А., Карпова И. В., Табачук Н. П. Современные проблемы информационного и математического образования: научно-методические основы совершенствования профессиональной компетентности учителя математики: монография. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2020. – 211 с.
5. Современные проблемы информационного и математического образования: научно-методические основы совершенствования профессиональной компетентности учителя математики: [монография] / А. Е. Поличка, О. А. Малыхина, И. В. Карпова, Н. П. Табачук: [науч. ред. В. А. Казинец]; Министерство науки и высшего образования Российской Федерации, Тихоокеанский государственный университет. – Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2020. – 211, [1] с.
6. Табачук Н. П. Информационная компетенция личности студента как социокультурный феномен цифрового общества: монография. Хабаровск: Изд-во Тихоокеан. гос. ун-та, 2019. – 180 с. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://lib.pnu.edu.ru/downloads/TextExt/uchposob/Tabachuk_NP11.pdf?id=992190 (дата обращения 06.05.2020).
7. Хуторской А. В. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированной парадигмы образования // Народное образование. – 2003. – № 2. – С. 58-64.
8. Anatolii E. Polichka, Natalia P. Tabachuk, Ekaterina K. Dvoryankina, Maria A. Kislyakova, Irina V. Karpova, Andrey V. Nikitenko Process Approaches to Personal and Professional Becoming of Students Based on Developing Their Information Competency // International Journal of Applied Exercise Physiology. 2019. Vol. 8. No. 2.1. S. 871-876. [Online] Available: <http://ijaep.com/Journal/vol.8.2.1.pdf>
9. Natalia P. Tabachuk, Anatolii E. Polichka, Ekaterina K. Dvoryankina and Irina V. Karpova "Digital Image" in the Methodological System of Information Competency Development by University Students // International Journal of Applied Exercise Physiology. 2020. Vol. 9. No. 2. S. 81-87. [Online] Available: <http://ijaep.com/Journal/835-Article%20File-2572-1-2-20200227.pdf>

Табачук Наталья Петровна, кандидат педагогических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», 680521 Хабаровский край, Хабаровский район, с. Восточное, ул. Клубная 6-12, e-mail: tabachuk@yandex.ru

Tabachuk Natalia Petrovna, Candidate of Pedagogics, Associate professor, Pacific National University

ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ НАПРАВЛЕННОСТЬ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В МЕДИЦИНСКОМ КОЛЛЕДЖЕ

Аннотация. В статье рассматривается профессионально-ориентированный подход к обучению математике будущих средних медицинских специалистов, как повышающий заинтересованность студентов к предмету, улучшающий усвоение программы, способствующий формированию прочных знаний и навыков, развивающий информационную компетентность обучающихся и, в целом, делающий качественное профессиональную подготовку среднего специалиста. Показана целесообразность связи курса математики с курсом информатики и медицинскими дисциплинами, показаны примеры практико-ориентированных задач с реализацией решения в программе MS Excel, используемых на интегрированных уроках математики и информатики, что оживляет курс математики, вызывает интерес к предмету, активизирует мыслительную деятельность студентов, подготавливает их к проектной деятельности.

Ключевые слова: профессионально-ориентированное обучение, информационно-математическая компетентность, практико-ориентированные задачи, проектная деятельность.

© B. Kharmakshanova, S. Yantranova

MATHEMATICS PROFESSIONAL DIRECTION IN MEDICAL COLLEGE

Abstract. Abstract. The article discusses a professionally-oriented approach to teaching mathematics for future secondary medical specialists, which increases the interest of students in the subject, improves the assimilation of the program, contributes to the formation of solid knowledge and skills, develops the information competence of students and, in general, improves the quality of the professional training of an average specialist. The expediency of linking the mathematics course with the course of computer science and medical disciplines is shown, examples of practice-oriented tasks with the implementation of solutions in MS Excel, used in integrated lessons of mathematics and computer science, are shown, which revives the mathematics course, arouses interest in the subject, activates the mental activity of students, prepares them to project activities.

Keywords: professionally oriented teaching, information and mathematical competence, practice-oriented tasks, project activities.

Главная цель среднего профессионального образования в условиях осуществления требований федерального государственного образовательного стандарта – это подготовка высоко квалифицированных, грамотных, ответственных специалистов, хорошо владеющих профессиональными навыками и востребованных на рынке труда, практико-ориентированных, способных к развитию в профессиональной сфере и профессионально мобильных в условиях информатизации общества и быстрым развитии информационных технологий.

Все изучаемые учебные дисциплины вносят свой вклад в повышение качества среднего профессионального образования, но именно математические знания дают возможность для нахождения быстрого и оптимального решения задач в области профессиональной деятельности. Студенты при решении профессиональных задач учатся видеть и формулировать проблему, выделять главное, анализировать проблемные ситуации и принимать решение, находить нужную информацию, предлагать нестандартные способы решения задач, делать выводы.

Современная практика среднего образования сталкивается с противоречием между необходимостью получения прочных математических знаний и слабой самомотивацией студентов к изучению курса математики, обучающиеся часто не видят будущей прикладной пользы дисциплины. Студенты не видят взаимосвязи профессиональных дисциплин с математикой, не осознают значения математики в интеграции интеллектуальных умений будущего специалиста [6].

Реализация методической системы профессионально-ориентированного подхода к обучению математике в медицинском колледже дает возможность наиболее эффективно достичь основного результата обучения – умения применять математические методы при решении задач, возникающих в профессиональной деятельности [2]. Вместе с тем, у обучающихся становятся глубже знания в предметной области математики и общемедицинских дисциплинах, повышается уровень математической подготовки и учебной мотивации студентов,

возрастает интерес к изучаемым дисциплинам и, как итог, улучшается профессиональная подготовка среднего специалиста.

С приходом сложных информационных технологий в систему здравоохранения, у среднего медицинского персонала существенно расширяются функции, и это требует сформированности у выпускника медицинского колледжа не только математической компетентности, но и в интеграции с предметом информатика, информационно - математической компетентности.

Курс математики в медицинском колледже целесообразно связать с курсом информатики, в частности при решении медицинских задач, и изучать их совместно: на занятиях по математике использовать компьютерные технологии, а на занятиях по информатике решать медицинские задачи. Такая тесная связь математики с информатикой и медициной оживляет курс, вызывает интерес к предмету, активизирует мыслительную деятельность студентов, расширяет знания по информатике, полученные в школе, хорошо мотивирует включение дисциплины математика в программу медицинского колледжа. При этом необходимо сотрудничество преподавателей математики с преподавателями профессиональных медицинских дисциплин.

Например, при изучении темы «Моделирование в медицине», в среде MS Excel студенты создают программы для расчета суточного рациона питания, веса и роста ребенка, и других параметров. Для этой практической работы разрабатываются задачи совместно с преподавателем педиатрии. Для апробации проведено объединенное занятие по математике и педиатрии. Созданную программу студенты используют для подготовки к практическим занятиям по педиатрии, сестринскому делу и другим дисциплинам, где составляются и рассчитываются параметры развития ребенка.

Решение задач по теме «Применение математических методов в профессиональной деятельности», таких как, приготовление растворов из сухого вещества, из растворов другой концентрации, расчёты лекарственных доз, перевод из одних единиц измерения в другие, вычисления ЖЕЛ (жизненной емкости легких), латентной полноты и других важных характеристик здоровья человека можно тоже реализовать в программе MS Excel.

Одной из технологий осуществления профессиональной направленности является проектная деятельность. Так, например, студенты, обучающиеся по специальности «Лечебное дело»,

выполняют проектно-исследовательские работы в учебном модуле «Диагностическая деятельность» на тему «Большой контроль детей». Работая над проектом, обучающиеся учатся работать с информацией. В практической части студенты создают книгу в MS Excel, листы которой именуются Карточка, Приём, Масса, Длина, Питание, Зубы, Сердце, Антибиотики и др. Используя ссылки с листов, вся информация отображается на главных листах Карточка и Прием, где видны все параметры ребенка на данный момент. Также для подобного проекта можно использовать программу MS Access, создать базу данных учета детей.

Из этого можно сделать вывод: профессиональная подготовка будущего медицинского специалиста по математике будет наиболее эффективной, если на занятиях задания будут прикладного характера. Это повышает заинтересованность студентов к предмету, улучшает усвоение программы, способствует формированию прочных знаний и навыков, развивает информационную компетентность среднего специалиста. [4]

Сейчас, в это непростое для нашей республики время, когда в мире объявлена пандемия COVID-19, студенты нашего колледжа самоотверженно работают в различных лечебных учреждениях, в том числе и на станции скорой помощи, участвуют в оказании медицинской помощи, госпитализации пациентов. Как никогда, будущие выпускники понимают важность своей профессии, понимают насколько важны знания и умения, которые они приобрели, обучаясь в колледже. Анализировать, выполнять профессионально значимые задачи, принимать самостоятельное решение им помогают знания, полученные на интегрированных уроках математики и информатики.

Литература

1. Федорова О. А. Методическая система профессионально-ориентированного обучения математике в колледжах технического профиля: автореферат дис. кандидата педагогических наук: 13.00.02 / Федорова О. А.; [Место защиты: Ярослав. гос. пед. ун-т им. К. Д. Ушинского]. - Ярославль, 2016. - 26 с.
2. Садыкова А. А., Ларина М. В. Методическая система подготовки студентов к использованию моделирования при решении математических задач // Вестник ННГУ. 2013. №5-2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/metodicheskaya-sistema-podgotovki-studentov->

k-ispolzovaniyu-modelirovaniya-pri-reshenii-matematicheskikh-zadach (дата обращения: 02.07.2020).

3. Абдикаримова А. Б. Профессиональная направленность обучения учебным дисциплинам студентов средних профессиональных учебных заведений экономического и технического профилей // Преподаватель XXI век. 2013. №4. URL: [https://cyberleninka.ru/article/n/professionalnaya-napravlennost-obucheniya-uchebnym-distsiplinam-studentov-srednih-professionalnyh-uchebnyh-zavedeniy](https://cyberleninka.ru/article/n/professionalnaya-napravленность-обучения-учебным-дисциплинам-студентов-средних-профессиональных-учебных-заведений).

4. Шмонова Марина Александровна Формирование профессиональной компетентности студентов медицинских вузов в обучении математике // Ярославский педагогический вестник. 2016. №2. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/formirovanie-professionalnoy-kompetentnosti-studentov-meditsinskikh-vuzov-v-obuchenii-matematike> (дата обращения: 02.07.2020).

5. Тарасова Светлана Анатольевна Реализация профессиональной направленности обучения математике в медицинском вузе на основе прогнозирования // АНИ: педагогика и психология. 2018. №4 (25). URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/realizatsiya-professionalnoy-napravlenosti-obucheniya-matematike-v-meditsinskom-vuze-na-osnove-prognozirovaniya> (дата обращения: 02.07.2020).

6. Шибаева Л. М., Шибаев В. П. Профессиональная направленность процесса обучения математике студентов нематематических специальностей, журнал Научные исследования и образование. 2016. № 2 (22). С. 40-42.

Хармакшанова Баирма Баторовна, преподаватель математики, информатики ГАПОУ «Республиканский базовый медицинский колледж им. Э. Р. Раднаева», г. Улан-Удэ, 670013, ул. Ключевская, дом 11, кв.25. Тел. 8-950-389-14-42. Email: bairmaharmakshanova@mail.ru

Янtranova Светлана Степановна, к.ф.-м.н., доцент, кафедра геометрии и методики преподавания математики ФБГОУ ВО «Бурятский государственный университет им. Доржи Банзарова», г. Улан-Удэ, ул. Тобольская 161, кв.37. Тел. 8-914-836-64-66. Email: Yantranova@mail.ru

Kharmakshanova Bairma Batorovna, teacher

Yantranova Svetlana Stepanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ГРАМОТНОСТЬ ОБУЧАЮЩИХСЯ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ
БУРЯТИЯ В РАМКАХ РЕГИОНАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ
ПО МОДЕЛИ PISA**

Аннотация. В статье приведены результаты участия обучающихся образовательных организаций Республики Бурятия в региональной оценке качества образования по модели PISA. Международная программа по оценке образовательных достижений учащихся PISA оценивает способности 15-летних школьников применять полученные знания и умения в повседневной жизни. Авторы в данной статье акцентировали внимание на результатах исследования математической грамотности-способности человека определять и понимать роль математики в окружающем мире, высказывать обоснованные математические суждения и использовать математические знания для удовлетворения собственных потребностей. Задания на математическую грамотность в PISA представляют собой нестандартные математические задачи, характерные для реальных проблемных ситуаций. Авторы приводят результаты по уровням математической грамотности; так же представлены результаты по типам населенных пунктов.

Ключевые слова: математическая грамотность, качество образования, PISA, уровень владения, региональная оценка.

© D. Chimitova, A. Dambueva

**MATHEMATICAL LITERACY OF STUDENTS
OF EDUCATIONAL ORGANIZATIONS OF THE REPUBLIC
OF BURYATIA IN THE FRAMEWORK OF REGIONAL
ASSESSMENT BY THE PISA MODEL**

Abstract. The article presents the results of participation of students of educational organizations of the Republic of Buryatia in the regional assessment of the quality of education according to the PISA model. The international student assessment program PISA assesses the ability of 15-year-olds to apply their knowledge and skills in everyday life. The authors in this article focused on the results of research on mathematical literacy-the ability of a person to determine and understand the role of mathematics in the world around them, to make sound mathematical judgments and use mathematical knowledge to satisfy

their own needs. Tasks for mathematical literacy in PISA are non-standard mathematical tasks that are typical of real problem situations. the Authors provide results on the levels of mathematical literacy, as well as results on the types of localities.

Keywords: mathematical literacy, quality of education, PISA, level of proficiency, regional assessment.

Указом Президента Российской Федерации от 7 мая 2018 года № 204 «О национальных целях и стратегических задачах развития Российской Федерации на период до 2024 года» обозначена одна из приоритетных целей развития образования Российской Федерации – вхождение в число 10 ведущих стран мира по качеству общего образования.

В настоящее время на федеральном уровне создана единая система оценки качества образования, включающая такие государственные итоговые испытания, как ОГЭ и ЕГЭ, а также комплекс таких оценочных процедур, как ВПР и НИКО.

В соответствии с Приказом Минпросвещения и Рособрнадзора №590/219 от 06.05.2019 г. "Об утверждении Методологии и критериев оценки качества общего образования в общеобразовательных организациях на основе практики международных исследований качества подготовки обучающихся" общеобразовательные организации принимают участие в общероссийской и региональной оценке качества образования по модели PISA.

Основной задачей исследований, проводимых Международной программой по оценке образовательных достижений учащихся PISA, является оценка способностей 15-летних школьников применять полученные знания и умения в повседневной жизни. Содержание оценки математических знаний основано на понятии «математическая грамотность». Математическая грамотность—это «способность человека определять и понимать роль математики в мире, в котором он живет, высказывать хорошо обоснованные математические суждения и использовать математику так, чтобы удовлетворять в настоящем и будущем потребности, присущие созидательному и мыслящему гражданину» [1].

Задания на математическую грамотность в PISA представляют собой нестандартные математические задачи, характерные для реальных проблемных ситуаций [2].

Задания в диагностических работах PISA разделены на содержательные области.

Содержательная область «Пространство и форма» содержит задачи, связанные с пространственными плоскими геометрическими формами и отношениями. Решение этих задач связано с анализом геометрических фигур, свойств объектов в различных конфигурациях.

Содержательная область «Изменение и отношение» представлена математическими зависимостями между переменными в различных процессах.

Содержательная область «Количество» представлена арифметическими задачами, при решении которых учащиеся должны уметь выполнять сравнение чисел и величин, распознавать числовые выражения и формулы, использовать числа для представления количественных характеристик реальных объектов.

Содержательная область «Неопределенность» представлена задачами, включающими в себя вероятностные и статистические явления и зависимости.

В региональной оценке по модели PISA приняли участие 3687 обучающихся из 104 общеобразовательных организаций Республики Бурятия [3].

В таблице 1 представлено распределение участников по классам/курсам.

Таблица 1. Распределение участников по классам/курсам

	Республика Бурятия, %	Российская Федерация, %
7-8 класс	2	1
9 класс	54	69
10-11 класс	34	23
1-2 курс СПО	10	7

Результаты выполнения диагностической работы представлены в таблице 2.

Таблица 2. Результаты региональной оценки по модели PISA

	Грамотность, средние баллы		
	Читательская	Математическая	Естественнонаучная
Республика Бурятия	466	466	463

Российская Федерация	488	483	479
Доля ОО, результаты которых ... (%)			
Ниже российского результата	46	40	41
Сопоставим с российским результатом	40	47	46
Выше российского результата	14	13	13

За умение формулировать задачу, предполагающее умение учащегося превратить «задачу в контексте» в «математическую задачу», которую в дальнейшем можно решить средствами математики участники Республики Бурятия получили 466 баллов, что на 19 пунктов меньше общероссийского показателя.

За умение применять математические концепции, факты, процессы и методы рассуждения для получения «математических результатов» участники Республики Бурятия получили 464 балла, что на 16 пунктов меньше общероссийского показателя.

За умение интерпретировать полученные математические результаты участники Республики Бурятия получили 471 балл, что на 15 пунктов меньше общероссийского показателя.



В региональной оценке по модели PISA выделяют 6 уровней владения каждым видом грамотности. При этом самым высоким

уровнем владения является шестой уровень, а пороговым является второй.

Ниже второго уровня владения математической грамотностью оказалось 29% участников исследования, что выше общероссийских показателей на 8%. Уровни 2-4 математической грамотности продемонстрировали 66% участников региона, что ниже общероссийских показателей на 7%. Уровни 5-6 на региональном и общероссийском уровнях составили 5% и 6 % соответственно.

Разные результаты демонстрируют участники из сельских и городских образовательных организаций. Средний балл участников из сельских образовательных организаций Республики Бурятия составил 444, что ниже российских показателей (472 балла). Средний балл участников из городских образовательных организаций Республики Бурятия и Российской Федерации составил 485 и 490 соответственно.

Факторами, негативно влияющими на результаты, можно считать отсутствие мотивации или низкую учебную мотивацию у учащихся. Всё больше обучающихся считают, что «их должны научить в школе и всё меньше тех, кто хочет сам учиться».

Среди множества факторов, влияющих на результаты обучающихся, можно выделить такие, как уровень профессионального мастерства педагогов, дисциплина обучающихся на занятиях, умение работать самостоятельно, отношение родителей к учебе детей и т. д.

Таким образом, результаты исследования математической грамотности свидетельствуют о необходимости повышения качества образования, выявления факторов, способствующих этому.

Литература

1. Основные результаты международного исследования образовательных достижений учащихся PISA-2003. М.: Центр оценки качества образования ИСМО РАО, 2004. 82 с.
2. Примеры заданий по математике / Г. С. Ковалева, К. А. Краснянская. М., 2006. URL: http://window.edu.ru/window_catalog/files/r60337/PISA2003_Example_UnitsMath.pdf (дата обращения: 12.06.2019).
3. Результаты региональной оценки по модели PISA: Республика Бурятия / ФИОКО, 2020. 30с.

Чимитова Джамиля Кимовна, д.и.н., профессор, директор ГБУ «Региональный центр обработки информации и оценки качества образования», 670033, г. Улан-Удэ, ул. Краснофлотская, 2, 8(3012) 200-380, chimitova.dk@mail.ru

Дамбуева Альбина Борисовна, к.ф-м.н., доцент, заведующий кафедрой общей и теоретической физики, ФГБОУ ВО «Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова», 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина 24а, 8-914-984-24-99, abain76@list.ru

Chimitova Dzhamilya Kimovna, Doctor of Historical Sciences, Professor, Director, State Budgetary Institution “Regional Center for Information Processing and Education Quality Assessment”

Dambueva Albina Borisovna, Candidate Candidate of Physical and Mathematical sciences, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

РОЛЬ ЧЕРТЕЖЕЙ В СИСТЕМЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ ШКОЛЬНИКОВ

Аннотация. В данной статье рассматривается одна из проблем решения задач по планиметрии школьниками – неумение строить геометрические чертежи, что является одним из условий успешного решения любых геометрических задач. Автором предложены некоторые пути решения этой проблемы: использование в курсе геометрии 7-8 классов задач прикладного характера, использование на уроках геометрии интерактивной геометрической среды GeoGebra. С помощью данной программы можно легко показать детям красоту математики, пространственные фигуры в движении, геометрический чертеж решаемой задачи. В данной статье представлен педагогический опыт автора и его коллег.

Ключевые слова: геометрия, геометрические чертежи, GeoGebra, визуализация решения, стереометрия.

© S. Yantranova

THE ROLE OF DRAWINGS IN GEOMETRICAL SYSTEM OF TRAINING STUDENTS

Abstract. This article discusses one of the problems of solving problems in planimetry by schoolchildren – the inability to build geometric drawings, which is one of the conditions for the successful solution of any geometric problems. The author suggests some ways to solve this problem: the use of applied problems in the course of geometry grades 7-8, the use of the interactive geometric environment GeoGebra in geometry lessons. With this program, you can easily show children the beauty of mathematics, spatial figures in motion, geometric drawing of the problem being solved. This article presents the pedagogical experience of the author and his colleagues.

Keywords: geometry, geometric drawings, GeoGebra, solution visualization, stereometry.

В течение последних нескольких лет результаты по ОГЭ и ЕГЭ показывают неуклонный рост снижения качества геометрического образования в школе. Самые проблемные задачи – это задачи по планиметрии. В данной ситуации виноваты не дети, не учителя.

Основная причина заключается в реформе математического образования, предпринятого государством в 1968 г., когда геометрия была незаслуженно отодвинута на второй план. Некоторое время даже в итоговых результатах ЕГЭ по математике не учитывались оценки за геометрические решения. Можно было получить отличную оценку, не решив ни одной задачи по геометрии.

Проводя дополнительные занятия с учениками, выбравшими профильную математику, преподаватели сталкиваются с нежеланием этих детей научиться решать эти задачи. По их словам, надо прочитать, представить и сделать чертеж и на это у них уходит много времени, что в конечном итоге может привести к тому, что они все равно не справятся с геометрическими задачами, а на остальные задачи не хватит времени. Причина, как они говорят, кроется в том, что им трудно делать чертежи. Как отмечают многие геометры и известные методисты по методике геометрии, начинающему обучение по геометрии, нужно выполнить большое количество геометрических чертежей, чтобы с максимальной точностью интерпретировать условие задачи. Что в конечном итоге позволяет приобрести для своих знаний хорошую конструктивную основу: геометрический чертеж поможет сделать открытие решения даже очень сложной геометрической задачи. Конечно, перед построением чертежа нужно осмыслить условие задачи. Очень важно в данный момент вспомнить необходимые геометрические свойства. После воспроизведения геометрического чертежа необходимо найти связь между данными значениями и искомыми. В решении геометрической задачи на плоскости может помочь такой конструктивный прием обучения планиметрии как метод дополнительных построений. К сожалению, с проблемой построения геометрического чертежа сталкиваются не только учащиеся как общеобразовательных и профильных классов, но и студенты, обучающиеся на последних курсах математического факультета. Причина заключается в неумении использовать геометрические свойства при построении чертежа.

Геометрия, как известно, возникла из практических нужд. К сожалению, на современном этапе при геометрической подготовке школьников, утеряна практическая составляющая. В настоящее время становится актуальным ответ на вопрос: «Разумно ли изучать геометрию на абстрактном формализованном уровне в отрыве от

процессов познания окружающего мира? Приводит ли существующая система изучения геометрии в школе «ум в порядок»? Как же излагают авторы школьных учебников по геометрии доказательства теорем? Как учителя должны учить рассуждать и доказывать на уроках геометрии?» [2]. Опыт работы современных школьных учителей, организующих учебный процесс по геометрии с помощью действующих учебных пособий, показывает, что при изучении систематического курса в 7 классе мало материала прикладного характера. Школьные учителя непосредственно участвующие в учебном процессе говорят, что современное изложение школьной геометрии непонятно ученикам и приближенно к вузовскому изложению. Представляет собой систему теорем, т.е. при которой систематический курс геометрии лишь излагает теоретический материал для применения при решении задач. Лишь ограниченное количество учащихся видят красоту в этих теоремах. Неплохо знать и доказывать теоремы, но к большому сожалению такое представление не вызывает повышенного интереса к предмету. Нельзя не согласиться с известным ученым и популяризатором математики Д. Пойя, который пишет: «Математика, излагаемая в стиле Евклида, представляется нам систематической, дедуктивной наукой. Но математика в процессе создания является экспериментальной, индуктивной наукой» [1, с. 7].

Как показывает опыт проведения уроков геометрии в основной школе, учащиеся плохо подготовлены к восприятию материала, основанного на аналитических рассуждениях и логических умозаключениях. После пропедевтического курса математики, изложенного в 5-6 классах ребятам очень трудно адаптироваться при изучении систематического курса геометрии. В курсе математики уже представлены понятия точка, прямая, треугольник, прямоугольник и даже параллелепипед. Для них непонятно почему же так долго и нудно опять дают эти понятия. Почему нужно очевидные факты доказывать в течение целого урока. Очевидно, что нужно найти необходимый баланс между теорией и практикой и при этом в 7 классе увеличить долю практических задач, основанных на экспериментальной работе. И здесь построение геометрического чертежа может решить важную задачу, а именно соединение теории с практикой, то есть покажет значимость теоретических знаний для достижения практических целей. В

настоящее время многие методисты и учителя занимаются данной проблемой и отмечают долю снижения задач, связанных с построением геометрического чертежа. Факты, подтверждающие о снижении количества задач прикладного и конструктивного характера, приводят известные методисты. Также резко уменьшилось количество задач на построение циркулем и линейкой в 7-8 классах. Что касается задач конструктивного характера в старших классах то их количество сведено практически к минимуму. Как отмечают известные ученые в области методики преподавания геометрии, что решение задач конструктивного характера, позволяет значительно поднять качество подготовки учащегося по геометрии. На уроках математики 5-6 классов, где излагается геометрический материал учителя, дают задание учащимся: «изобразите геометрический объект на доске, а потом в тетради», или «нарисуйте прямую, треугольник, окружность с помощью инструментов в тетради» и т.д. Проблемой обучения геометрии непосредственно занимаются преподаватели кафедры геометрии и методики преподавания математики БГУ. Бакалавры и магистранты, занимающиеся научно-методической работой под руководством сотрудников кафедры внедряют в своей практической работе разработки, позволяющие повысить конструктивную культуру. В частности, была проведена экспериментальная работа, по внедрению пропедевтического курса для 5-6, основанная на геометрическом материале по учебному пособию автора Мерзляк А. Г. Особенностью курса является использование интерактивной геометрической среды GeoGebra с целью повышения конструктивной культуры детей. Было замечено, что дети рисуют, т. е. делают примерное изображение заданной геометрической фигуры по условию задачи очень неуверенно. Использование в учебном процессе программы GeoGebra помогает изображать более точные геометрические чертежи. Такое изображение приносит большую пользу для процесса обучения геометрии, помогает найти идею для решения задач. На данном этапе с помощью геометрических инструментов важно прививать ученикам конструктивные навыки, необходимые в геометрическом обучении. Обратно, изучение геометрических свойств окружающего мира, позволяет выявить и развить конструктивные навыки, необходимые в профессиональной деятельности. С помощью интерактивной геометрической среды GeoGebra важно

ввести такое понятие, как «геометрическое место точек на плоскости», которое упрощает многие геометрические представления на плоскости. Позволяет наглядно и динамично построить - серединный перпендикуляр к отрезку, точку пересечения серединых перпендикуляров к сторонам треугольника, геометрическое место точек, равноудаленных от точек окружности, центры описанной и вписанной окружностей, степени точки относительно окружности. Особенно успешно используется данная геометрическая программа при изучении свойств преобразований симметрии, гомотетии и параллельного переноса. Например, в 7 классе можно воспользоваться при построении с помощью циркуля и линейки интерактивной геометрической средой GeoGebra при построении середины отрезка, биссектрисы угла, угла равному данному, отрезка равного данному, треугольника равному данному. Опыт использования данной программы в основном звене Сотниковской средней общеобразовательной школы показал хорошие результаты по выявлению и закреплению конструктивных навыков. Успешность в обучении геометрии были подтверждены контрольными срезами. Задания содержали следующие условия:

- а) семь точек, равноудаленных от концов отрезка на плоскости;
- б) пять точек, равноудаленные от сторон угла на плоскости;
- в) шесть точек, равноудаленных от двух параллельных прямых на плоскости, и т. п.

В 8 классе – изобразить геометрическое место точек на плоскости, из которых данный отрезок виден под одним и тем же углом.

В 9 классе – геометрическое место на плоскости, у которых произведения отрезков секущих относительно двух данных окружностей равны. В дальнейшем, кропотливая работа, проведенная на данном этапе, позволит учащимся, успешно справляться с задачами ОГЭ и ЕГЭ.

В старших классах с помощью эскиза геометрического чертежа ввести понятия геометрического места точек пространства, где можно использовать интерактивную геометрическую среду GeoGebra:

- 1) геометрическое место точек пространства равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей – биссекторная плоскость;
- 2) построение сечений многогранников;

3) построение сечений круглых тел.

Как показывает опыт проведения со студентами – магистрантами ИМИ БГУ уроков геометрии с помощью интерактивной геометрической среды GeoGebra, данная программа кроме мотивационного аспекта, позволяет делать точные геометрические чертежи пространственных объектов. Точные геометрические чертежи, как на плоскости, так и в пространстве позволяют во многом успешно справляться с решениями геометрических задач ФГОС.

Литература

1. Пойя Д. Математика и правдоподобные рассуждения М., 1957
2. Фалилеева М. В. Точные чертежи в обучении планиметрии// Современные проблемы науки и образования. – 2013. – № 2.;

Янtranova Светлана Степановна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики Бурятского государственного университета имени Доржи Банзарова, 670000, Республика Бурятия, г. Улан-Удэ, ул. Ранжурова, 5.

Yantranova Svetlana Stepanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University

ПРОГРАММА GEOGEBRA, КАК СПОСОБ ПОВЫСИТЬ МОТИВАЦИЮ К ГЕОМЕТРИИ В СУЗ

Аннотация. В данной статье рассматривается один из способов повышения мотивации студентов средних учебных заведений на уроках геометрии - интерактивная геометрическая среда GeoGebra. Данная программа способна визуализировать решение любой геометрической задачи, показать красоту пространственной геометрии, упростить построение чертежа, а самое главное участвовать одним из способов повышения мотивации на уроках геометрии. Известно, что учащиеся СУЗ не всегда имеют достаточную мотивацию для обучения, тем более математике. В данном случае программа участвует как помощник, который одновременно упрощает работу с чертежами и заинтересовывает работой за компьютером на уроках математики. Стоит отметить простоту в использовании программы. Выполнение всех вышеперечисленных пунктов не трудно отследить после проведения уроков по рабочим картам урока.

Ключевые слова: геометрия, мотивация, повышение мотивации, чертежи, GeoGebra, визуализация решения, СУЗ, стереометрия.

© S. Yantranova, E. Purevdorzh

GEOGEBRA PROGRAM AS A WAY TO IMPROVE MOTIVATION TO GEOMETRY IN A SECONDARY SCHOOL

Abstract. This article discusses one of the ways to increase the motivation of students of secondary schools in geometry classes — the interactive geometric environment of GeoGebra. This program is able to visualize the solution of any geometric problem, show the beauty of spatial geometry, simplify the construction of the drawing, and most importantly participate in one of the ways to increase motivation in geometry lessons. It is known that students of colleges do not always have sufficient motivation for learning, especially mathematics. In this case, the program participates as an assistant, which simultaneously simplifies the work with drawings and makes you interested in working at a computer in mathematics lessons. It is worth noting the ease of use of the program. The implementation of all of the above items is not difficult to track after the lessons on the working cards of the lesson.

Keywords: geometry, motivation, increasing motivation, drawings, GeoGebra, solution visualization, secondary school, stereometry.

Особенность преподавания математики в среднем учебном заведении заключается в том, что студенты изучают математику один год (10-11 класс), а не два года, как в школе, что несомненно тяжело из-за возрастных особенностей и неготовности студентов к усвоению многих математических положений. Не стоит забывать и о том, что, поступая в средние учебные заведения, студент чаще всего имеет низкий средний балл, который варьируется от 3.2 до 4.5, а урок математики становится как таковой «наукой для науки».

Любой преподаватель всегда думает о том, как разнообразить свой урок, выбирая среди множества методик одну или даже несколько.

Современное общество неразрывно связано с процессом информатизации. Происходит повсеместное внедрение информационных технологий. Одним из приоритетных направлений процесса информатизации современного общества является информатизация образования, т.е. внедрение средств новых информационных технологий в систему образования. Не секрет, что низкая мотивация учения - одна из главных проблем современной школы.

В настоящее время существует огромное количество пособий, методических разработок, из которых преподаватель «творит» свой урок. Но ни один традиционных урок не сравнится с уроком с применением информационных технологий (мультимедиа-презентации, игры, тренажеры и др.), особенно это касается урока математики.

Сейчас преподаватели средних учебных заведений используют в своей практике достаточно математических программ, таких как Mathematica, MathCad, MathLab, но они являются довольно сложными в использовании из-за наличия языка программирования, а также сложностей приобретения лицензионной версии данных программ.

Что касается простоты и удобства, то интерактивная геометрическая среда GeoGebra идеально подходит даже учителям с минимальными знаниями компьютерных технологий, а также студентам, имеющим базовые навыки работы за компьютером.

«Сечения тел вращения» методом внутреннего проектирования в ИГС GeoGebra

Рассмотрим применение ИГС GeoGebra на уроках геометрии при изучении темы «Сечения тел вращения. Метод внутреннего проецирования».

Цель урока: Создать условия для изучения и закрепления полученных знаний учащихся по теме «Сечения тел вращения». Метод внутреннего проецирования тел вращения, формировать умение строить сечения методом внутреннего проецирования в ИГС GeoGebra и в тетради, применять полученные знания к решению задач.

Вначале урока обязательно идет повторение ранее изученных тем «Цилиндр. Сечение цилиндра», «Конус. Сечение конуса», обязательно уделив внимание тому, что может являться сечениями конуса и цилиндра. В конце урока учащиеся должны были заполнить рабочую карту урока:

Таблица 1

Рабочая карта урока

ФИО	Изложение материала	Ясность при построении сечения	Чтение чертежа	Содержание программы Geogebra

Критерии:

0-малопонятно

1-имеются сомнения

2-все понятно

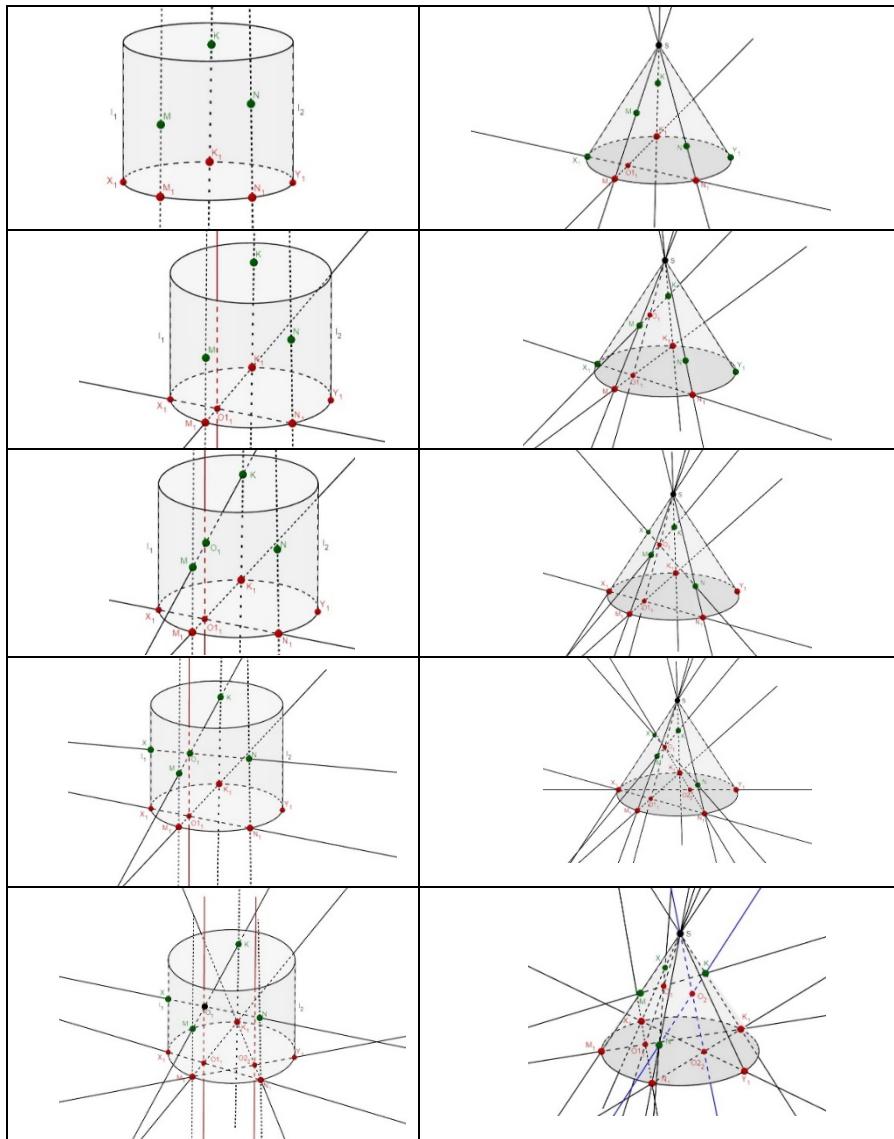
Далее делаем переход непосредственно к теме урока, причем материал изучается непосредственно в ИГС GeoGebra, чтобы учащиеся наглядно понимали, какие точки следует соединить прямой.

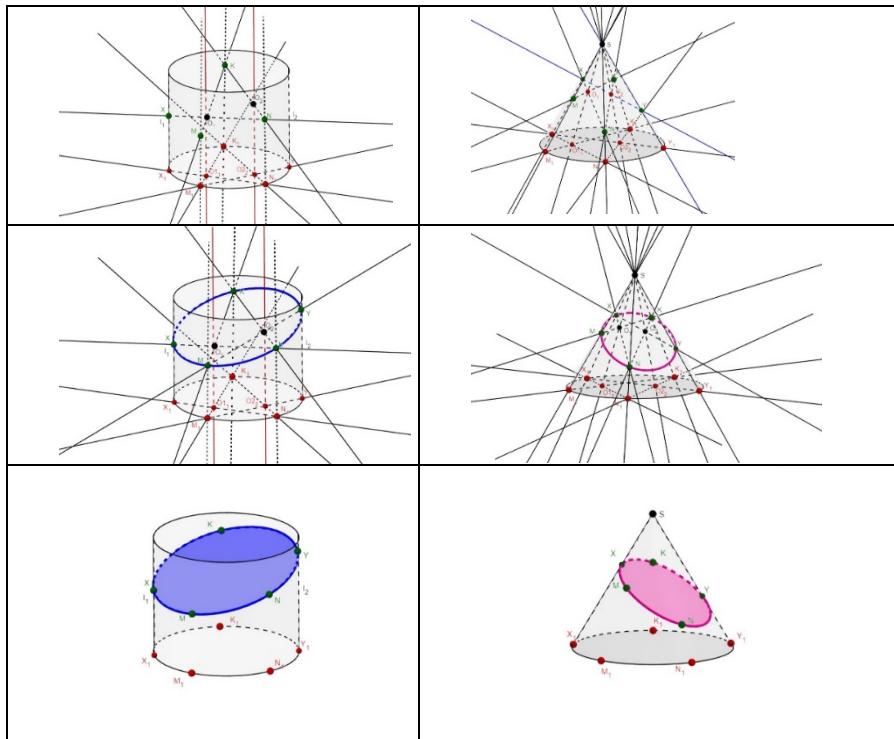
Вот что получилось:

Таблица 2.

Полученные сечения цилиндра и конуса методом внутреннего проецирования

Сечение цилиндра	Сечение конуса





По окончании урока был получен средний балл по рабочим картам:

Таблица 3
Результаты урока

Изложение материала	Ясность при построении сечения	Чтение чертежа	Содержание программы Geogebra
0,96	0,85	0,8	0,86

По результатам можно судить о том, что ИГС GeoGebra дает преимущественно лучшие результаты в сравнении с традиционным уроком, где бы пришлось работать с доской и учебником.

Учащимся удобно вращать фигуру, приближать/отдалять, делать необходимые построения, корректируя действия. Каждый преподаватель понимает, что урок зависит не только от подачи материала, но и от организации урока в целом. Если урок будет

обогащен работой за компьютером, то он несомненно оставит след в понимании темы, особенно это касается урока геометрии. Программа GeoGebra несомненно становится в данном случае помощником в достижении таких целей как повышение мотивации, качества знаний по геометрии, а также овладение исследовательскими навыками работы за компьютером.

Литература

1. Официальный сайт GeoGebra. [Электронный ресурс] — Режим доступа: <http://www.geogebra.org/>
2. Киселев Г. М. Информационные технологии в педагогическом образовании: Учебник / Г. М. Киселев, Р. В. Бочкова. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и Ко», 2012.
3. Чернышева Д. А., Кравченко Г. В. Возможности применения интерактивной среды GeoGebra в обучении студентов математическим дисциплинам // MAK-2015: «Математики - Алтайскому краю»: сборник трудов всероссийской конференции по математике / Алтайский государственный университет. - Барнаул: Изд-во Алт. унта. - 2015. - С. 225-229.

Янtranova Светлана Степановна, кандидат физико-математических наук, доцент, Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова, Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: Yantranova@mail.ru

Пурэвдорж Евгения Анатольевна, студентка 2 курса магистратуры Бурятского Государственного университета имени Доржи Банзарова, Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а, e-mail: evanikitina5443@gmail.com

Yantranova Svetlana Stepanovna, Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor, Banzarov Buryat State University, Ulan-Ude, Russia. e-mail: Yantranova@mail.ru

Purevdorzh Evgenia Anatolyevna, 2nd year student of the Banzarov Buryat State University Institute of Mathematics and Computer Science, Ulan-Ude, Russia, e-mail: evanikitina5443@gmail.com

СОДЕРЖАНИЕ

ГЕОМЕТРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ

Башашина К. В. Приклеенная линейная связность на поверхности проективного пространства	3
Белова О. О. Редукция кручения грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей	8
Букушева А. В. Продолжение структуры неголономного многообразия Кенмоцу	14
Выонг Б. Геометрические свойства антипризмы, допускающей зеркально-вращательную симметрию порядка $2n$	22
Галаев С. В. (F, V)-связности на почти контактных метрических многообразиях	31
Курманбаев Д. М. Солитонные деформации при инверсированных минимальных поверхностях	38
Полякова К. В. О канонической плоской аффинной связности	42
Цыренова В. Б., Миронова Е. П. Аналог задачи Бианки в квазигиперболическом пространстве ${}^{11}S_3^1$	51
Шевченко Ю. И., Скрыдлова Е. В. Квазитензор кривизны-кручения пространства со связностью Картана	57

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ

Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Лун-Фу А. В., Овчинников В. А. Прецессионные характеристики вращающегося фуллерена C60 при молекулярно-атомных взаимодействиях	64
Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Мамонтов Д. В. Симуляция молекулярной динамики структур, состоящих из B42	76
Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А., Мамонтов Д. В. Углеродные материалы с внутренними степенями свободы	83
Бубенчиков А. М., Челнокова А. С. Динамика фуллеренов молекулярного кристалла на основе (D2d)-C36	91
Бубенчиков А. М., Челнокова А. С., Каастоянов Д. Многошаговые схемы с переменным шагом интегрирования	99
Дубанов А. А., Заитуев Б. В., Севээн А. Э. Моделирование поверхностей вращения в программе MATHCAD	107
Зинкевич М. С., Тарасов Е. А. Взаимодействие молекул метана и атомов гелия с мембраной, составленной из поликумулиновых	

карбиноных нитей	115
------------------	-----

Ламуева М. В., Воробьева В. П., Луцык В. И. Участие криминанты гиперболического параболоида в конструировании поверхностей фазовых диаграмм	124
Некипелова Т. И. Матричная наноструктура и ее проницаемость	134
Цыдыпов С. Г.-Ц. Математическая модель двухфазной фильтрации при деформации пласта	145

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ

Андреев Е. А., Хабитуев Б. В. Способ формирования единой оценки активности студента	152
Аюшиев А. Б., Цыбиков А. С. Сингулярно-спектральный анализ пульсового сигнала	157
Бадмаев С. А., Дугаров А. Е., Фомина И. В. Об интервалах монотонных и самодвойственных функций в решетке ультраклонов ранга 2	167
Бадмаев С. А., Шаранхаев И. К. О классах и минимальных базисах мультифункций ранга 2	172
Дониленко М.А., Хабитуев Б.В. Информационная система «Студенческий деканат»	177
Кузнецов Ю.А., Дерюгин Д.Ф. Прототип системы автоматической проверки SQL-запросов	184
Моторов А. М., Цыбиков А. С. Алгоритм «OPTIMAL BRAIN DAMAGE» на прикладных задачах	189
Намсараев Н. Б., Дерюгин Д. Ф. Информационная система «Научные труды преподавателей»	198
Толстых Д. В., Цыбиков А. С. Извлечение информативных признаков вейвлет-спектра пульсовых сигналов	203
Угрюмов К. А., Хабитуев Б. В. Информационная система для сбора и хранения спортивных достижений студентов	211
Цыдылова С. Ю., Цыбиков А. С. Гиперпараметры градиентных методов обучения нейронных сетей	216
Шурыгин И. А., Цыбиков А. С. Программное обеспечение для регистрации и сбора пульсовых сигналов	223

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ. ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Антонова Л. В., Бурзалова Т. В., Данеев А. В. Использование элементов векторной алгебры при решении школьных задач по алгебре	231
--	-----

Антонова Л. В., Бурзалова Т. В., Данеев А. В. Использование элементов векторной алгебры при решении школьных задач по геометрии	238
Батхуу Цереннадмид, Лумбунова Н. Б., Миронова Е. П. Компетентностно-ориентированные задачи как средство формирования общих компетенций	243
Гомбоева Л. В., Цыренова В. Б. В свете новых воспитательных перспектив: методология «Круги Эйлера»	251
Королева Т. Э. Перспективы применения компетентностного подхода в высшем образовании	263
Лазарева Е. Г., Новгородова А. Н. Теорема Брауэра о сохранении области в курсе математического анализа	269
Лобсанова О. А. Формирование проектно-исследовательской деятельности студентов при работе над курсовым проектом	276
Лобсанова О. А., Дармаева Е. Б. Создание ИС «Абитуриент ИМИ» в рамках ВКР	281
Мордовской А. К., Гачегова Н. С. Применение цифровых и игровых технологий в процессе преподавания математики	285
Павлова Е. Б., Булгатова Е. Н. Организация исследовательской деятельности студентов колледжа при дистанционном обучении	292
Поличка А. Е. Организация обучения математическим учебным дисциплинам в общем образовании в условиях компьютеризации и математизации общества	297
Табачук Н. П. Информационная компетенция – метакомпетенция – экокомпетенция: методическое обеспечение развития у будущих учителей математики, физики и информатики	308
Хармакшанова Б. Б., Янtranova C. C. Профессиональная направленность обучения математике в медицинском колледже	314
Чимитова Д. К., Дамбуева А. Б. Математическая грамотность обучающихся образовательных организаций Республики Бурятия в рамках региональной оценки по модели PISA	319
Янtranova C. C. Роль чертежей в системе геометрической подготовки школьников	325
Янtranova C. C., Пурэвдорж Е. А. Программа GEOGEBRA, как способ повысить мотивацию к геометрии в СУЗе	331

Научное издание

Геометрия многообразий и ее приложения

*Материалы Шестой научной конференции
с международным участием*

(Улан-Удэ — оз. Байкал, 27–29 августа 2020 г.)

Текст печатается в авторской редакции

Компьютерная верстка
Н. Б. Лумбуновой

Свидетельство о государственной аккредитации
№ 2670 от 11 августа 2017 г.

Подписано в печать 18.08.2020 г. Формат 60×84 1/16.
Усл. печ. л. 19,8. Уч.-изд. л. 12,9. Тираж 150. Заказ 104.
Цена договорная

Издательство Бурятского госуниверситета
имени Доржи Банзарова
670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: riobsu@gmail.com

Отпечатано в типографии ИП «Найданов Жигжит Аюрович»
670000, г. Улан-Удэ, ул. Толстого, 23, оф. 205
Свидетельство ОГРНИП 318032700036773