Dualité de Pontryagin

Tristan Moreau

Thomas Richard

23 mai 2007

Table des matières

Introduction

La dualité est présente dans de très nombreuses branches des mathématiques, elle joue un rôle important autant en analyse (analyse fonctionnelle, théorie des distributions) qu'en algèbre (algèbre linéaire, cohomologie). On va étudier ici la dualité sur les groupes abéliens discrets et les groupes abéliens compacts. Le dual d'un groupe abélien discret est un groupe abélien compact et le dual d'un groupe abélien compact est un groupe abélien discret. Cette dualité a d'abord été étudiée par le mathématicien russe Lev Semenovich Pontryagin dans les années 1930 qui a montré que tout groupe abélien discret ou compact est canoniquement isomorphe à son bidual, résultat qu'on appelera dans la suite Théorème de Pontryagin (il l'a en fait montré dans le cadre plus général des groupes abéliens localement compacts). Cette construction a ensuite servi à la construction dans les années 1940 de l'analyse harmonique abstraite, unifiant et généralisant les théories des séries et des intégrales de Fourier dans le cadre des groupes abéliens localement compacts.

Le but de ce travail est d'étudier la dualité de Pontryagin dans les groupes abéliens discrets et dans les groupes abéliens compacts et de montrer dans ce cadre l'isomorphisme entre un groupe et son bidual. Le fait d'étudier séparément les groupes abéliens discrets et les groupes abéliens compacts nous oblige à démontrer séparément le théorème de Pontryagin dans chacun de ces cas.

Nous commencerons par définir la dualité de Pontryagin et étudier ses propriétés élémentaires. On démontrera ensuite l'isomorphisme annoncé pour les groupes abéliens discrets grâce à l'opération de limite projective. Nous étudierons aussi les représentations des groupes abéliens compacts qui constitueront un outil important dans la démonstration du théorème de Pontryagin pour les groupes abéliens compacts. On terminera par énoncer ces résultats dans le langage de la théorie des catégories qui permet d'exprimer de manière concise les bonnes propriétés de la dualité de Pontryagin.

1 Groupes abéliens compacts et dualité

Dans cette partie, on définit les duaux des groupes abéliens discrets et des groupes abéliens compacts : le dual d'un groupe abélien compact est un groupe abélien discret, le dual d'un groupe abélien discret est un groupe abélien compact.

On démontre aussi des propriétés simples : un produit de groupes compacts est un groupe compact, la dualité se comporte bien vis-à-vis des sommes directes. On applique ensuite ceci aux groupes finis et de type fini qui, via l'opération de limite projective définie dans la partie suivante, constituent les briques élémentaires de la démonstration du théorème de Pontryagin algébrique.

1.1 Définitions et premières propriétés des groupes compacts

Définition 1.1. Un groupe topologique est un groupe G muni d'une topologie séparée telle que les applications $(g, h) \mapsto gh$ et $g \mapsto g^{-1}$ soient continues. En particulier, G est un groupe compact si c'est un groupe topologique qui est aussi un espace topologique compact.

Remarque 1.1. Si H est un sous groupe de G, les restrictions à H de la composition et de l'inversion sont à valeurs dans H car H est un sous-groupe et sont continues sur H (comme restrictions d'applications continues). H a alors une structure naturelle de groupe topologique.

Définition 1.2. Un morphisme de groupes topologiques est un morphisme de groupes qui est continu. Un isomorphisme de groupes topologiques est un isomorphisme de groupes qui est aussi un homéomorphisme.

Remarque 1.2. Tout morphisme bijectif de groupes topologiques n'est pas un isomorphisme (considérer l'identité de $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète au départ et usuelle à l'arrivée). Cependant, si G et H sont deux groupes compacts, tout morphisme continu est alors une application fermée (on utilise ici le fait que tout compact d'un espace séparé est fermé), et est donc un homéomorphisme s'il est bijectif.

Exemple 1. Tout groupe fini muni de la topologie discrète est un groupe topologique compact.

Exemple 2. $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}^*, .)$, munis de leur topologie usuelle sont des groupes topologiques abéliens (non compacts)

Exemple 3. On pose : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. $\mathbb{T}$ est un groupe abélien compact isomorphe, en tant que groupe compact, au cercle unité du plan complexe $\mathbb{S}^1$ par le passage au quotient du morphisme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{2i\pi t} \in \mathbb{S}^1$ de noyau $\mathbb{Z}$.

Exemple 4. Soit E un espace de Banach, le groupe linéaire $Gl(E)$ avec la topologie de la norme d'opérateur, est un groupe topologique. Si E est un espace euclidien (en particulier E est de dimension finie) alors les groupes $O(E)$ et $SO(E)$ sont des groupes compacts, de même que les groupes $U(E)$ et $SU(E)$ si E est préhilbertien de dimension finie.

On énonce maintenant deux propostions simples qui seront très utiles dans la suite :

Proposition 1.1. *Soit G un groupe compact, H un sous groupe de G, alors H est un groupe compact si et seulement si H est fermé dans G.*

Preuve. H est un groupe topologique muni de la topologie induite. Comme H est fermé dans G compact, H est un espace topologique compact. H est donc un groupe compact.

Réciproquement, si H est compact dans G, alors H est fermé. On a utilisé ici le fait que les groupes topologiques sont séparés. $\square$

Proposition 1.2. *Soit $(G_j)_{j\in J}$ une famille de groupes compacts (sans hypothèse sur la cardinalité de J), le groupe produit $G = \prod_{j\in J} G_j$ est un groupe topologique compact.*

Preuve. On va d'abord montrer que G est un groupe topologique, on note $\pi_j : G \to G_j$ les projections canoniques. Elles sont continues par définition de la topologie produit. On note $p : G \times G \to G$ le produit sur G et p_j le produit sur G_j. p est continue si et seulement si les $\pi_j \circ p : G \times G \to G_j$ sont continues pout tout j. Mais, pour tout $g, g' \in G$, on a :

$$\pi_j \circ p(g, g') = g_j g'_j = p_j(\pi_j(g), \pi_j(g'))$$

Et $\pi_j \circ p$ est continue comme composée d'applications continues. De même, on montre que l'inversion est continue. Le théorème de Tychonov permet ensuite de montrer que G est compact comme produit d'espaces compacts. $\square$

1.2 Dualité dans les groupes abéliens

On va maintenant associer à chaque groupe abélien discret un groupe abélien compact, son dual.

Définition 1.3. Soit A un groupe abélien (sans topologie) on appelle dual de A, et on note $\widehat{A}$, l'ensemble des morphisme de groupes de A dans $\mathbb{T}$. Un élément de $\widehat{A}$ est appelé caractère de A.

On va maintenant munir $\widehat{A}$ d'une structure de groupe abélien compact.

Proposition 1.3. *$\widehat{A}$ est un sous-groupe fermé de $\mathbb{T}^A$ et est donc un groupe abélien compact.*

Preuve. Tout d'abord, par la Propostion 1.2, $\mathbb{T}^A$ est un groupe abĺien compact. Il est facile de vérifier que $\widehat{A}$ est un sous-groupe de $\mathbb{T}^A$ (la loi sur $\widehat{A}$ est donc celle de l'addition ponctuelle). Montrons que $\widehat{A}$ est fermé dans $\mathbb{T}^A$. Pour cela, on pose, si $a, b \in A : M(a,b) = \{\chi \in \mathbb{T}^A | \chi(a)+\chi(b)-\chi(a+b) = 0\}$. $M(a,b)$ est fermé comme image réciproque de $\{0\}$ par l'application sur $\mathbb{T}^A$ définie par $\chi \mapsto \chi(a) + \chi(b) - \chi(a+b)$ qui est continue par définition de la topologie produit (voir la remaque suivante). Comme $\widehat{A} = \{\chi \in \mathbb{T}^A | \forall a, b \in A,\ \chi(a+b) = \chi(a) + \chi(b)\}$, on a : $\widehat{A} = \bigcap_{(a,b)\in A^2} M(a,b)$, qui est donc une intersection de fermés. Donc $\widehat{A}$ est fermé. La compacité de $\widehat{A}$ découle de la Propostion 1.1. $\square$

Remarque 1.3. Il faut toujours garder en tête que la topologie sur $\widehat{A}$ est la topologie induite par la topologie produit sur $\mathbb{T}^A$, c'est à dire la topologie de la convergence ponctuelle. En d'autres termes, pour tout $a \in A$, l'application $ev_a : \widehat{A} \to \mathbb{T}$ définie par $ev_a(\chi) = \chi(a)$ est continue et une application f à valeurs dans $\widehat{A}$ est continue si et seulement si $ev_a \circ f$ est continue pour tout $a \in A$.

On va maintenant montrer que la dualité définie ci-dessus se comporte bien vis-à-vis des sommes directes.

Proposition 1.4. *Soit* $\{A_j\}_{j\in J}$ *famille de groupes abéliens. Alors* $\widehat{\bigoplus_{j\in J} A_j}$ *et* $\prod_{j\in J} \widehat{A_j}$ *sont isomorphes en tant que groupes compacts.*

Preuve. Posons : $\Phi : \prod_{j\in J} \widehat{A_j} \to \widehat{\bigoplus_{j\in J} A_j}$ définie par :

$$\Phi((\chi_j)_{j\in J})((a_j)_{j\in J}) = \sum_{j\in J} \chi_j(a_j)$$

Φ est bien définie car comme $(a_j)_{j\in J}$ est un élément de la somme directe, la somme à droite ne porte que sur un nombre fini de termes. On va montrer que Φ est un isomorphisme de groupes compacts.

Commençons par l'aspect algébrique. Φ est un morphisme de groupes. Pour l'injectivité, soit $(\chi_j)_{j\in J}$ tel que $\Phi((\chi_j)_{j\in J})$ soit le morphisme nul. Soit $i \in J$, en évaluant $\Phi((\chi_j)_{j\in J})$ sur $(a_j)_{j\in J}$ avec $a_j = 0$ si $j \neq i$ et $a_i = a$ élément quelconque de A_i, on obtient $\chi_i = 0$. On a donc $(\chi_j)_{j\in J} = 0$ et Φ est injective. Pour la surjectivité, soit $\chi \in \widehat{\bigoplus_{j\in J} A_j}$, on définit $(\chi_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} \widehat{A_j}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \chi_j : & A_j \longrightarrow \mathbb{T} \\ & x \longmapsto \chi \circ inc_j(x) \end{aligned}$$

Où l'on a noté $inc_j : A_j \to \bigoplus_{j\in J} A_j$ l'inclusion canonique. On a alors $\Phi((f_j)_{j\in J}) = f$, d'où la surjectivité.

Il faut maintenant montrer que Φ est un homéomorphisme. Vu la topologie considérée sur $\widehat{\bigoplus_{j\in J} A_j}$, il suffit de montrer que, pour tout $a \in \bigoplus_{j\in J} A_j$, l'application $(\chi_j)_{j\in J} \mapsto \Phi((\chi_j)_{j\in J})(a)$ est continue. Comme $a = (a_j)_{j\in J}$ est une famille qui ne contient qu'un nombre fini d'éléments non nuls, $\Phi((\chi_j)_{j\in J})(a) = \sum_{j|a_j\neq 0} \chi_j(a_j)$. On a donc seulement à vérifier que, si $a_i \in A_i$, $(\chi_j)_{j\in J} \mapsto \chi_i(a_i)$ est continue. Ce qui est clair car c'est la composition : $(\chi_j)_{j\in J} \xrightarrow{\pi_j} \chi_j \xrightarrow{ev_{a_j}} \chi_i(a_i)$. On a donc la continuité de Φ. La Remarque 1.2 permet de conclure que ϕ est un isomorphisme. $\square$

1.3 Dualité dans les groupes compacts

Définition 1.4. Soit G un groupe abélien compact, on appelle dual de G, et on note $\widehat{G}$, le groupe abélien des morphismes de groupes continus de G dans $\mathbb{T}$. Un élément de $\widehat{G}$ est appelé caractère de G.

Remarque 1.4. Il faut remarquer que l'on n'a pas muni $\widehat{G}$ d'une topologie. $\widehat{G}$ est donc un groupe abélien discret.

Remarque 1.5. On utilise la même notation pour le dual d'un groupe abélien discret et d'un groupe abélien compact. Pour ne pas créer de confusion, on désignera toujours les groupes abéliens discrets par A et les groupes abéliens compacts par G.

Remarque 1.6. On peut donc maintenant définir $\widehat{\widehat{A}}$, qui est un groupe abélien discret, et $\widehat{\widehat{G}}$ qui est un groupe abélien compact. La situation ressemble à la dualité dans les espaces vectoriels. On sait que, dans les espaces de dimension finie, le bidual d'un espace est isomorphe à l'espace de départ ; et que cette propriété se retrouve dans certains espaces de dimension infinie si l'on considère les duals topologiques (espaces de Hilbert, espaces L^p pour $1 < p < +\infty$). La suite de ce travail va montrer que la dualité définie ici se comporte bien : on démontrera que $G \simeq \widehat{\widehat{G}}$ et $A \simeq \widehat{\widehat{A}}$.

Les théorèmes suivants décrivent les premières propriétés des morphismes canoniques entre A et $\widehat{\widehat{A}}$ ainsi qu'entre G et $\widehat{\widehat{G}}$.

Théorème 1.5. *Soit A un groupe abélien, on pose :*

$$\eta_A \ : \ A \to \widehat{\widehat{A}} \ , \ \eta_A(\chi)(a) = \chi(a)$$

Alors η_A est un morphisme de groupes injectif.

La démonstration nécessite quelques résultats préliminaires :

Définition 1.5. Un groupe abélien A est dit divisible si :

$$\forall a \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists x \in A \mid nx = a$$

Par exemple, $\mathbb{T}$ est divisible. Les groupes divisibles ont une propriété remarquable :

Proposition 1.6. *Soit D un groupe divisible, A un groupe abélien et B un sous groupe de A. Alors tout morphisme $f : B \to D$ sétend en un morphisme $F : A \to D$ faisant commuter le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & D \\ \cap & {\scriptstyle F}\nearrow & \\ A & & \end{array}$$

On admet cette proposition, la démonstration ressemble un peu à celle du théorème de Hahn-Banach : on place une relation d'ordre sur les prolongements de f, on montre que cet ensemble est ordonné inductif, le Lemme de Zorn nous donne alors un élément maximal F et on montre que F est nécessairement défini sur A tout entier.

Ce résultat va nous permettre de démontrer le Lemme suivant :

Lemme 1.7. *$\widehat{A}$ sépare les points de A, c'est à dire, si a et a' sont dans A, il existe χ dans $\widehat{A}$ tel que : $\chi(a) \neq \chi(a')$.*

Preuve. Tout d'abord, notons que comme les élements de $\widehat{A}$ sont des morphismes, il suffit de montrer que, si $a \neq \mathbf{1}_A$, il existe χ tel que : $\chi(a) \neq 0$ dans $\mathbb{T}$.

Soit $a \neq \mathbf{1}_A$, on note S le sous-groupe monogène engendré par a. Si S est infini, alors $S \sim \mathbb{Z}$ et si $t \in \mathbb{T}$ est non nul, on a un morphime $f : S \to \mathbb{T}$ en posant $f(na) = nt$. Sinon, $S \sim \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ ou encore au sous groupe de $\mathbb{T}$: $(\frac{1}{k}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$. On pose alors : $f(na) = n.\frac{1}{k}$ qui est un morphisme $S \to (\frac{1}{k}\mathbb{Z})/\mathbb{Z} \subset \mathbb{T}$. Par la Propostion 1.6, f sétend en $\chi : A \to \mathbb{T}$. □

On peut maintenant démontrer le résultat annoncé.

Preuve (du Théorème 1.5). Vu les lois de groupes sur A et $\widehat{\widehat{A}}$, on a facilement que η_A est un morphisme. Déterminons maintenant le noyau de η_A. Soit $a \in A$ tel que : $\forall \chi \in \widehat{A}$, $\eta_A(a)(\chi) = \chi(a) = 0$. Comme $\widehat{A}$ sépare les points, on a : $a = \mathbf{1}_A$. □

On énonce maintenant l'équivalent du Théorème 1.5 pour les groupes abéliens compacts.

Théorème 1.8. *Soit G un groupe abélien compact, on pose :*

$$\eta_G \ : \ G \to \widehat{\widehat{G}} \ , \ \eta_G(\chi)(g) = \chi(g)$$

Alors η_G est un morphisme de groupes compacts.

Preuve. Le fait que η_G soit un morphisme de groupes découle directement de sa définition. Il reste à montrer que η_G est continu. Par la Remarque 1.3, il suffit de montrer que, pour tout $\chi \in \widehat{G}$, l'application : $ev_\chi \circ \eta_G : g \in G \mapsto \eta_G(g)(\chi) = \chi(g) \in \mathbb{T}$ est continue. Ce qui est immédiat vu que les éléments de $\widehat{G}$ sont les morphismes continus. □

1.4 Cas des groupes finis et de type fini

On va maintenant s'intéresser aux groupes les plus simples que l'on connaisse : les groupes abéliens finis (en tant que groupes discrets et groupes compacts) et de type fini (en tant que groupes discrets), et l'on va montrer que pour ces groupes, les morphismes des Propositions 1.5 et 1.8 sont des isomorphismes.

Remarque 1.7. Si A est un groupe abélien fini, c'est un groupe abélien compact. L'écriture $\widehat{A}$ peut donc paraître ambiguë. Cependant, comme toute application définie sur un ensemble discret est continue, tout morphisme de A dans $\mathbb{T}$ est un morphisme continu. Les deux définitions de la dualité conïncident donc dans ce cas.

On rappelle d'abord le résultat classique[1] :

Théorème 1.9. *Soit A un groupe abélien de type fini, alors on a N et $k_1, \ldots, k_n$ tels que :*

$$A \simeq \mathbb{Z}^N \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z})$$

On va donc maintenant chercher à déterminer les duaux et les biduaux de $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.

Proposition 1.10. $\widehat{\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{T}$ *(en tant que groupes compacts).*

[1]Voir par exemple *Algèbre 3^e^ année*Lionel Schwartz, éd. Dunod

Preuve. On définit un morphisme $\psi : \widehat{\mathbb{Z}} \to \mathbb{T}$ par $\psi(\chi) = \chi(1)$. Ce morphisme est continu par définition de la topologie sur $\widehat{\mathbb{Z}}$. Comme $\chi(k) = k.\chi(1)$, ψ est injectif. De plus, si $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit le morphisme $\chi' : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ par $\chi'(k) = k\alpha$. En évaluant ψ sur $\chi = p \circ \chi'$ (où p désigne la projection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{T}$), on obtient la surjectivité de ψ. Par la Remarque 1.2, ψ est un morphisme de groupes compacts. $\square$

On s'intéresse maintenant au bidual de $\mathbb{Z}$, c'est à dire $\widehat{\mathbb{T}}$.

Proposition 1.11. *Pour tout $\chi \in \widehat{\mathbb{T}}$ il existe un entier n tel que $\chi(t + \mathbb{Z}) = nt + \mathbb{Z}$. $\widehat{\mathbb{T}}$ est donc isomorphe à $\mathbb{Z}$.*

Preuve. En identifiant $\mathbb{T}$ à $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, si $\chi \in \widehat{\mathbb{T}}$, on définit $\xi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ par $\xi(t) = \chi(e^{it})$. Montrons que ξ est dérivable. On a $\frac{d}{dt}\int_0^t \xi(s)ds = \xi(t)$, donc $\frac{1}{t}\int_0^t \xi(s)ds$ tend vers $\xi(0) = 1$ quand t tends vers 0. On a donc $a > 0$ tel que $\frac{1}{a}\int_0^a \xi(s)ds > 0$. Ensuite :

$$\xi(t)\int_0^a \xi(s)ds = \int_0^a \xi(t+s)ds = \int_t^{t+a} \xi(s)ds$$

Donc : $\xi(t) = (\int_0^a \xi(s)ds)^{-1}\int_t^{t+a} \xi(s)ds$, et ξ est dérivable. En dérivant la relation $\xi(s+t) = \xi(s)\xi(t)$ par rapport à s, on obtient $\xi'(s+t) = \xi'(s)\xi(t)$, qui donne, en $s = 0$, l'équation différentielle : $\xi'(t) = \xi'(0)\xi(t)$.

Vu la condition $\xi(0) = 1$, les solutions sont de la forme $\xi(t) = e^{\xi'(0)t}$. De plus, ξ est 2π-périodique par définition, donc $\xi(t) = e^{2i\pi kt}$ pour un $k \in \mathbb{Z}$, on vérifie facilement que les ξ ainsi trouvés donnent commes caractères $\xi(t + \mathbb{Z}) = kt + \mathbb{Z}$. $\square$

Remarque 1.8. On a ainsi montré que $\eta_{\mathbb{Z}}$ est un isomorphisme, car $\eta_{\mathbb{Z}}(n)(\chi) = \chi(k) = k\chi(1) + \mathbb{Z}$.

On s'intéresse maintenant au cas de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Proposition 1.12. $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Preuve. Tout d'abord, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est isomorphe au sous-groupe $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ de $\mathbb{T}$ par l'isomorphisme $\varphi : k+n\mathbb{Z} \mapsto \frac{k}{n}+\mathbb{Z}$. On a donc un morphisme injectif $\Phi : Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \to Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{T}\ ); f \mapsto \varphi \circ f$. De plus, comme, pour tout $g \in Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{T}\ )$, $g(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$

est un sous groupe de $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ et $f = \varphi^{-1} \circ g$ est bien défini et appartient à $Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Φ est donc bijectif.
On a donc $\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \simeq Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$. Mais $Hom(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ par le morphisme d'évaluation en 1. On a donc la proposition. $\square$

On a ainsi que $\eta_{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mapsto \widehat{\widehat{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}} \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un isomorphisme car c'est un morphisme injectif entre deux groupes finis de même cardinal. Il nous manque un outil pour montrer que η_A est un isomorphisme si A est de type fini.

Proposition 1.13. *Soient A et B deux groupes abéliens tels que η_A et η_B soient des isomorphismes, alors $\eta_{A\oplus B}$ est un isomorphisme.*

Preuve. Il suffit de montrer que $\eta_{A\oplus B}$ est surjectif. Soit $\chi \in \widehat{A \oplus B}$, par la Propostion 1.4, on a $\chi_A \in \widehat{A}$ et $\chi_B \in \widehat{B}$ tels que $\chi(a, b) = \chi_A(a) + \chi_B(b)$ et un calcul montre que $\eta_{A\oplus B} = \eta_A \oplus \eta_B$. Si $\Lambda \in \widehat{\widehat{A} \oplus \widehat{B}}$, on a $\Lambda(\chi) = \Lambda(\chi_A, \chi_B)$. On définit $\Lambda_A \in \widehat{\widehat{A}}$ par $\Lambda_A(\chi_A) = \Lambda(\chi_A, 0)$, de même pour Λ_B. Comme η_A et η_B sont des isomorphismes, on a : $\Lambda_A = \eta_A(a)$ et $\Lambda_B = \eta_B(b)$ et un calcul donne $\eta_{A\oplus B}(a, b) = \Lambda$. Donc $\eta_{A\oplus B}$ est un surjectif et est donc un isomorphisme. $\square$

On a ainsi le résultat :

Corollaire 1.14. *Pour tout groupe A de type fini, η_A est un isomorphisme.*

Preuve. $A \simeq \mathbb{Z}^N \oplus (\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}/k_i\mathbb{Z})$, et on a démontré que η était un isomorphisme pour chacun des termes de la somme directe, par la proposition précédente, η_A est un isomorphisme. $\square$

2 Théorème de Pontryagin : groupes abéliens discrets

Le but de cette partie est de montrer que, si A est abélien discret, $\eta_A : A \to \widehat{\widehat{A}}$ est un isomorphisme. On a montré dans la partie précédente ce résultat pour les groupes abéliens de type fini. L'opération de limite projective permet d'approcher $\widehat{A}$ par les duaux des sous-groupes de type fini de A et de montrer que η_A est un isomorphisme par "passage à la limite".

2.1 Limites projectives

Définition 2.1. Soit J un ensemble ordonné tel que toute partie finie aie une borne supérieure (on dit que J est filtrant). On appelle système projectif de groupes topologiques abéliens la donnée :

1. d'une famille $\{G_j | j \in J\}$ de groupes topologiques abéliens
2. pour tout couple $(j, k) \in J^2$ tel que $j \leq k$, d'un morphisme (continu !) $f_{jk} : G_k \to G_j$, avec : $f_{jj} = id_{G_j}$ et, si $j \leq k \leq l$, $f_{jk} \circ f_{kl} = f_{jl}$.

Les f_{jk} sont appelés morphismes de structure.

On peut maintenant donner la construction de la limite projective d'un système projectif.

Proposition 2.1. *Soit $\{G_j | j \in J\}, \{f_{jk} | j \leq k\}$ un système projectif de groupes topologiques abéliens. On pose : $P = \prod_{j \in J} G_j$ et :*

$$G = \{(g_j)_{j \in J} \in P | f_{jk}(g_k) = g_j \ si \ j \leq k\}$$

Alors G est un sous-groupe fermé de P. Si l'on note f_j la restriction à G de la projection $P \to G_j$, on a : $f_j = f_{jk} \circ f_k$.

Si les G_j sont compacts, alors P et G sont compacts.

Preuve. On définit : $\Phi_{jk} : P \to G_j$ par $\Phi(g) = f_{jk}(g_k) g_j^{-1}$. Φ est un morphisme de groupes topologiques. Donc $G_{jk} = \Phi^{-1}(\mathbf{1}_j)$ est un sous-groupe fermé de P ($\mathbf{1}_j$ désigne le neutre de G_j). Donc $G = \bigcap \{(j,k)|j \leq k\} G_{jk}$ est un sous groupe fermé de P. Ensuite, soit $g \in G$, $f_{jk}(f_k(g)) = f_{jk}(g_k) = g_j = f_j(g)$ et donc $f_j = f_{jk} \circ f_k$.

Pour la compacité, la Propostion 1.2 permet de dire que P est compact. Comme sous-groupe fermé de P, G est compact. $\square$

Définition 2.2. Le groupe G construit dans la proposition est la limite projective du système projectif $\{G_j|j \in J\}, \{f_{jk}|j \leq k\}$. On le note $lim_{j\in J} G_j$. Les applications f_j sont appelés projections canoniques.

La limite projective est donc l'ensemble des J-uples de P compatibles avec les morphismes de structures. On voit sur la définition de G que si, dans le système projectif, on remplace G_j par $f_{jk}(G_k) \subset G_j$, on ne change pas G, on s'intéresse donc aux limites projectives ayant cette propriété :

Définition 2.3. Si, dans le système projectif, les morphismes de structures sont tous surjectifs, on dit que G est la limite projective stricte du système projectif.

La proposition suivante donne une autre caractérisation d'une limite projective stricte.

Proposition 2.2. *Soit $G = lim_{j\in J} G_j$ limite projective de groupes compacts, les morphismes de structure f_{jk} sont surjectifs si et seulement si les projections canoniques f_j sont surjectives.*

Preuve. Supposons d'abord les f_{jk} surjectifs. Soit $i \in J, h \in G_i$, on cherche $g \in G$ tel que $f_i(g) = g_i = h$. On définit, si $i \leq k$, $C_k \subset \prod_{j\in J} G_j$ par :

$$C_k = \{(g_j)_{j\in J}|\forall j \leq k \ f_{jk}(g_k) = g_j \text{ et } g_i = h\}$$

Admettons pour l'instant que $C = \bigcap_{k\geq i} C_k$ est non-vide (ceci est prouvé dans le lemme suivant). On a $C = \{(g_j)_{j\in J}|f_{jk}(g_k) = g_j \text{ si } j \leq k\} \cap \{g|g_i = h\}$ Donc $C \subset G$ et $f_j(g) = h$ donc f_j est surjective.

Si les f_j sont surjectives, comme on a $f_j = f_{jk} \circ f_k$, f_{jk} est surjective. $\square$

Lemme 2.3. $\bigcap_{k \geq i} C_k$ *est non vide.*

Preuve. Comme, pour tout $k \geq i$, $f_{ik} : G_k \to G_j$ est surjective, on a un g_k tel que $f_{ik}(g_k) = h$. Comme $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$, si on pose :

$$g_j = \begin{cases} f_{jk}(g_k) \text{ si } j \leq k \\ \mathbf{1}_j \text{ sinon} \end{cases}$$

on a $g = (g_j)_{j \in J} \in C_k$ et C_k est non vide.

De plus, si $i \leq k \leq k'$, on a $C_{k'} \subset C_k$. En effet, si $(g_j)_{j \in J} \in C_{k'}$, on a : $f_{jk}(g_k) = f_{jk} f_{kk'}(g_{k'}) = f_{jk'}(g_{k'}) = g_j$ et $g \in C_k$.

Les C_k sont compacts car :

$$C_k = \{(g_j)_{j \in J} | g_i = h\} \cap \bigcap_{j \leq k} G_{jk}$$

est fermé (les G_{jk} ont été définis dans la construction de la limite projective). Donc C_k est compact.

Comme J est filtrant, si $k, k' \geq i$ on a un $l \geq k, k'$ et on a alors $\emptyset \neq C_l \subset C_k \cap C_{k'}$. La famille de compact $\{C_k | k \geq i\}$ a donc la propriété de l'intersetction finie et $C = \bigcap_{k \geq i} C_k$ est non vide. $\square$

2.2 Théorême de Pontryagin

Soit A un groupe abélien discret. On note $\mathcal{F}$ la famille des sous-groupes de type fini de A ordonnée par l'inclusion. Cette famille est filtrante car si $E, F \in \mathcal{F}$, le sous-groupe H engendré par E et F est encore de type fini et contient G et H De plus $A = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} F$. On va maintenant construire un système projectif sur les $\widehat{F}$. Soit $E, F \in \mathcal{F}$, avec $E \subset F$. On définit $f_{EF} : \widehat{F} \to \widehat{E}$ par $f_{EF}(\chi) = \chi|_E$ (la restriction à E de χ). On a ainsi un système projectif de groupes abéliens compacts. De plus, comme $\mathbb{T}$ est divisible, tout caractère de E s'étend en un caractère de F, donc f_{EF} est surjective. Le système projectif est donc strict. Les projections canoniques sont données par $f_F : \chi \in \widehat{A} \to \chi|_F \in \widehat{F}$. On va montrer que la limite projective $lim_{F \in \mathcal{F}} \widehat{F}$ est isomorphe à $\widehat{A}$.

Proposition 2.4. *Soit* $\varphi : \widehat{A} \to lim_{F\in\mathcal{F}}\widehat{F}$ *définie par* $\varphi(\chi) = (\chi|_F)_{F\in\mathcal{F}}$. φ *est un isomorphisme de groupes compact.*

Preuve. Montrons tout d'abord que φ est à valeurs dans $\lim_{F\in\mathcal{F}} \widehat{F}$. En effet, si $E \subset F$, on a $f_{EF}(\varphi(\chi)_F) = f_{EF}(\chi|_F) = \chi|_E$. Par construction φ est un morphisme de groupes. Pour l'injectivité, il suffit de remarquer que $\varphi(\chi) = 0$ équivaut à χ nul sur tout sous-groupe de type fini.

Pour la surjectivité, soit $\xi = (\chi_F)_{F\in\mathcal{F}} \in lim_{F\in\mathcal{F}}\widehat{F}$. Comme ξ est dans la limite projective des $\widehat{F}$ on a, si $E \subset F$: $\chi_F|_E = \chi_E$. On peut donc sans ambiguïté définir :

$$\begin{aligned} \chi : &A \to \mathbb{T} \\ &c \mapsto \chi_F(a) \text{ si } a \in F \end{aligned}$$

Et $\varphi(\chi) = \xi$. φ est donc un isomorphisme algébrique.

Montrons que φ est continue. Vu qu'on a sur $lim_{F\in\mathcal{F}}\widehat{F}$ la topologie produit, il suffit de montrer $\chi \mapsto \chi|_F$ de $\widehat{A}$ dans $\widehat{F}$ est continu. De même, vu que la topologie sur $\widehat{F}$ est la topologie induite par celle de $\mathbb{T}^F$, il suffit de montrer que, si $x \in F$, $\chi \mapsto \chi(x)$ est continue de $\widehat{A}$ dans $\mathbb{T}$. Ceci est vrai par définition de la topologie sur $\widehat{A}$. Comme $\widehat{A}$ est compact, φ est un homéomorphisme. □

Vu que l'on a : $\widehat{A} \simeq lim_{F\in\mathcal{F}}\widehat{F}$, on va étudier le dual d'une limite projective de groupes abéliens compacts. Ceci permettra de mieux comprendre $\widehat{\widehat{A}}$ pour montrer ensuite la partie algébrique du théorème de Pontryagin.

On considère $G = lim_{j\in J}G_j$ la limite projective *stricte* d'un système projectif de groupes abéliens. On note $f_j : G \to G_j$ les projections canoniques. On définit un morphisme $\psi_j : \widehat{G_j} \to \widehat{G}$ par $\psi_j(\chi) = \chi \circ f_j$. Comme f_j est surjective (G est une limite projective stricte), ψ_j est injectif. On peut donc identifier $\widehat{G_j}$ au sous-groupe $\psi_j(\widehat{G_j})$ de $\widehat{G}$.

Proposition 2.5. *Soit la limite projective stricte* $G = lim_{j\in J}G_j$, *on a :* $\widehat{G} = \bigcup_{j\in J}\widehat{G_j}$.

La démonstration nécessite ce lemme :

Lemme 2.6. *Pour tout voisinnage V du neutre $\mathbf{1}$ de G, on un $j \in J$ tel que : $\mathbf{1} \in ker(f_j) \subset V$*

Preuve. Soit V voisinnage de $\mathbf{1}$, comme la topologie sur G est induite par celle de $P = \prod_{j \in J} G_j$, on a une partie finie F de J et de voisinnage V_j de $\mathbf{1}_j$ pour $j \in F$ tels que :

$$V = G \cap (\prod_{j \in J \setminus F} G_j \times \prod_{j \in F} V_j)$$

Si $j \in F$, $ker f_j = G \cap \{g \in P | g_j = \mathbf{1}_j\}$ et on a donc : $\bigcap_{j \in F} ker f_j \subset V$. Comme la partie F est finie, elle a un majorant $k \in J$ et pour tout $j \in F$ on a $f_{jk} \circ f_k = f_j$. D'où, $ker f_k \subset ker f_j$ et donc : $ker f_k \subset V$. □

Preuve (de la Propostion 2.5). Avec l'identification faite avant la proposition, l'inclusion $\bigcup_{j \in J} \widehat{G_j} \subset \widehat{G}$ est évidente. Pour l'inclusion inverse, soit χ dans $\widehat{G}$, on note U l'image de $]-1/3, 1/3[$ dans $\mathbb{T}$. $\{0\}$ est le seul sous groupe de $\mathbb{T}$ inclus dans U. Ensuite, $V = \chi^{-1}(U)$ est un voisinnage du neutre de G. Par le lemme, on a donc un j tel que $ker\ f_j \subset V$ Mais l'image de $ker\ f_j$ par χ est un sous groupe de $\mathbb{T}$ inclus dans U, et est donc égal à $\{0\}$, d'où $ker\ f_j \subset ker\ \chi$. χ passe donc au quotient en $\chi_j : G/ker\ f_j \to \mathbb{T}$. De plus, comme f_j est surjective, $G/ker\ f_j \simeq G_j$ et on a le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\chi} & \mathbb{T} \\ \downarrow f_j & \nearrow \chi_j & \\ G_j & & \end{array}$$

Ce qui montre que l'on a $\chi \in \widehat{G_j}$ vu l'identification précédente. □

On peut maintenant montrer le théorème de Pontryagin pour les groupes abéliens discrets. On rappelle que $\eta_A : A \to \widehat{\widehat{A}}$ est défini par $\eta_A(a)(\chi) = \chi(a)$.

Théorème 2.7. $\eta_A : A \to \widehat{\widehat{A}}$ *est un ismorphisme.*

Preuve. L'injectivité a déjà été montrée dans le Théorème 1.5. Pour la surjectivité, les deux propositions précédentes montrent que : $\widehat{\widehat{A}} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \widehat{\widehat{F}}$. Soit $\omega \in \widehat{\widehat{A}}$, on a donc un sous-groupe de type fini F et $\omega_F \in \widehat{\widehat{F}}$ tel que $\omega = \omega_F \circ f_F$. On a vu à la fin de la section précédente que, comme F est de type fini, η_F est un isomorphisme. On a donc $a \in F$ tel que $\omega_F(\chi) = \chi(a)$ pour tout $\chi \in \widehat{F}$. Mais alors :

$$\begin{aligned}
\omega(\chi) &= \omega_F \circ f_F(\chi) \\
&= \eta_F(a) \circ f_F(\chi) \\
&= \eta_F(a)(\chi|_F) \\
&= \chi|_F(a) \\
&= \chi(a) \\
\omega(\chi) &= \eta_A(a)(\chi)
\end{aligned}$$

D'où la surjectivité de η_A. $\square$

3 Représentations linéaires des groupes

Avant de démontrer la deuxième partie du théorème de Pontryagin, on étudie ici les représentations linéaires des groupes compacts. Une repésentation de G sur E est un morphisme de G dans $Gl(E)$, où E est un espace de Banach. Pourquoi étudier les représentations ici ? Comme $\mathbb{S}^1$ s'identifie à un sous groupe de $Gl(\mathbb{C})$, un caractère est une représentation de G sur $\mathbb{C}$. C'est d'ailleurs en quelque sorte une représentation "minimale". On verra que si G est abélien et si la représentation est à valeurs dans $U(\mathcal{H})$, où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, alors la représentation se décompose, en un certain sens, en une somme caractères. Ce sera un outil essentiel pour montrer la deuxième partie du théorème de Pontryagin.

Dans cette partie, on utilisera beaucoup de résultats d'analyse fonctionnelle dans les espaces de Banach et de Hilbert, les résultats les moins courants seront démontrés, pour les résultats admis ou seulement cités on renvoie à *Analyse Fonctionnelle*, Walter Rudin ou à *Éléments d'Analyse Fonctionnelle*, Hirsch Lacombe.

3.1 Définitions, premières propriétés

Dans la suite, E désignera un espace de Banach et G un groupe compact. On peut développer une théorie des représentations sous des hypothèses plus faibles, mais cela ne nous aiderai pas dans notre étude. On notera $Gl(E)$ le groupe des isomorphismes linéaires de E. Opérateur signifiera toujours application linéaire continue.

Définition 3.1. Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et G un groupe compact, une représentation de G est un morphisme continu π de G dans $Gl(E)$ muni de la topologie de la convergence ponctuelle (c'est à dire la topologie induite par la topologie produit sur E^E).

Définition 3.2. Un G-module E est un espace de Banach E muni d'une action de G linéaire continue $E \to E$ si $g \in G$ est fixé et continue $G \to E$ si $x \in E$ est fixé[2].

[2]Il n'est pas exigé que l'action soit continue sur $G \times E$, mais ceci est automatique pour les groupes compacts comme le montrera les propositions suivantes.

On voit facilement que les deux définitions ne sont que deux formulations différentes de la même notion. Certains énoncés sont plus simples dans un langage que dans l'autre et l'on utilisera indifféremment les deux langages. On note l'action de $g \in G$ sur $x \in E$ par gx. Dans la suite, dès que l'on considèrera l'action de G sur E, la loi de groupe sur G sera noté multiplicativement, pour ne pas créer de confusion avec l'addition sur E.

On rappelle que l'on peut normer l'espace vectoriel $L(E)$ des endomorphismes linéaires de E par : $\|A\| = sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\|$, c'est alors un espace de Banach. En général, la représentation $\pi : G \to Gl(E)$ n'est pas continue si $Gl(E)$ est muni de cette norme. On a quand même :

Proposition 3.1. *Soit π une représentation de G groupe compact sur E. Alors l'ensemble $\{\|\pi(g)\|, g \in G\}$ est borné.*

Preuve. Par la compacité de G et la continuité de $g \mapsto gx$, l'ensemble $\{\|\pi(g)x\|, g \in G\}$ est borné. Le théorème de Banach-Steinhaus implique donc que $\{\|\pi(g)\|, g \in G\}$ est borné. □

Remarque 3.1. On a en fait montré que la famille d'opérateurs $\pi(G)$ est équicontinue.

Ceci va nous permettre de montrer que $(g, x) \mapsto gx$ est en fait continue sur $G \times E$.

Proposition 3.2. *Soit G un groupe compact et E un G-module, l'application $(g, x) \mapsto gx$ est continue sur $G \times E$.*

Preuve. On note $M = sup_{g\in G}\|\pi(g)\|$, on a l'estimation : $\|gx\| \leq M\|x\|$. De plus, on a : $gx - hy = \pi(h)(h^{-1}g(x - y) + (h^{-1}gy - y)$, donc si h et y sont fixés, vu la continuité de $x \mapsto hx$ et $g \mapsto gy$, on voit qu'il suffit de montrer que $(g, x) \mapsto g(x-y)$ est continue au point (y, h), ce qui résulte de l'estimation donnée précédemment. □

On donne maintenant un premier exemple de représentation :

Exemple 5. Soit $E = C(G, \mathbb{C})$ l'espace des fonction continues de G un groupe compact dans $\mathbb{C}$ muni de la norme $\|f\| = sup_{g\in G}|f(g)|$ qui en fait un espace de Banach. On note $\tau_g : h \mapsto gh$. On définit une représentation de G par $\pi(g)f = f \circ \tau_g$. La démonstration de la continuité de $f \mapsto gf$ est immédiate, pour montrer la continuité de $g \mapsto gf$ il faut noter que, comme G est compact, f est uniformément continue et donc $|f(gt)-f(g't)|$ est petit si gt et $g't$ sont proches au sens où $gt(g't)^{-1} = gg'^{-1}$ est dans un voisinnage du neutre indépendant de t. On montre aussi facilement que cette représentation est injective, on dit que la représentation est fidèle.

3.2 Mesure de Haar

On verra dans la suite qu'il est très utile de disposer d'une "bonne" mesure sur G. Une des propriétés les plus importantes de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est l'invariance par translation : $\int_{\mathbb{R}} f(x+t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt$. Cette situation se généralise :

Définition 3.3. Soit G un groupe compact et μ une mesure borélienne positive sur G (c'est à dire une forme linéaire continue positive sur l'espace de Banach $C(G,\mathbb{C})$ des fonctions continues de G dans $\mathbb{C}$). μ est une mesure de Haar si :

$$\forall h \in G \ \forall f \in C(G,\mathbb{C}) \ \int_G f(hg)d\mu(g) = \int_G f(g)d\mu(g) \tag{1}$$

Remarque 3.2. Si λ est un réel strictement positif, alors $\lambda\mu$ est encore une mesure de Haar. Comme G est compact, il est de mesure fini, et on choisit une mesure de Haar telle que $\mu(G) = 1$. On dit que μ est normalisée.

On va maintenant prouver l'existence de la mesure de Haar pour les groupes abéliens compacts, cadre qui nous intéresse ici. On utilise pour cela le théorème d'analyse fonctionnelle suivant :

Théorème 3.3 (Point fixe de Kakutani)**.** *Soit E un espace vectoriel topologique dont la topologie est définie par une famille séparante de semi-normes, K une partie compacte convexe de E et $\mathcal{F}$ une famille d'applications affines continues commutant deux à deux telles que $\forall T \in \mathcal{F}$ $T(K) \subset K$.*

Alors il existe un $x \in K$ qui est un point fixe de tout $T \in \mathcal{F}$.

Preuve. Soit $T \in \mathcal{F}$, on pose : $T_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k$. On montre d'abord que $K' = \bigcap_{n\in\mathbb{N}, T\in\mathcal{F}} T(K)$ est non vide.

Par continuité de T, $T_n(K)$ est une partie compacte, convexe et non vide de E. De plus, pour tout k, $T^k(K) \subset K$, et si $x \in K$, $T_n x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} T^k(x)$ est un barycentre de points de K qui est convexe, donc $T_n(K) \subset K$. Supposons que K' soit vide, comme K est compact on a un nombre fini d'opérateurs $T_{n_1}^{(1)}, \ldots, T_{n_N}^{(N)}$ tels que : $T_{n_1}^{(1)}(K) \cap \cdots \cap T_{n_N}^{(N)}(K) = \emptyset$. On pose alors : $U = \prod_{i=1}^{N} T_{n_i}^{(i)}$, comme tous les opérateurs dans la composition commutent, on a : $U(K) \subset T_{n_i}^{(i)}(K)$ pour tout i, et $U(K) = \emptyset$, ce qui est absurde. Donc : $K' \neq \emptyset$.

Soit donc $x \in K'$, montrons que x est un point fixe de tout $T \in \mathcal{F}$. Si T est dans $\mathcal{F}$, pour tout n, on a un y_n dans K tel que $x = T_n(y_n)$. On a :

$$\begin{aligned}
T(x) - x &= T(T_n(y_n)) - T_n(y_n) \\
&= \frac{1}{n}((T(y_n) + \cdots + T^n(y_n)) - (y_n + \cdots + T^{n-1}(y_n))) \\
&= \frac{1}{n}(T^n(y_n) - y_n)
\end{aligned}$$

Si p est une semi-norme, comme K est compact, $p(y' - y)$ est borné sur K^2 et on a donc un $M > 0$ tel que : $p(T(x) - x) \leq \frac{M}{n}$ où M ne dépend pas de n. Comme la famille de semi-normes est séparante, $T(x) = x$ □

On va maintenant pouvoir montrer l'existence et l'unicité de la mesure de Haar sur un groupe abélien compact.

Théorème 3.4. *Tout groupe abélien compact* $(G, +)$ *admet une unique mesure de Haar normalisée.*

Preuve. On montre d'abord l'unicité : soit μ et ν deux mesures de Haar normalisées sur G. Du fait de la normalisation, on a $\int_G 1 d\mu(g) = \int_G 1 d\nu(g) = 1$. Par le théorème de Fubini, on écrit, si f est dans $C(G,\mathbb{C})$:

$$\begin{aligned}\int_G f(g)d\mu(g) &= \int_G d\nu(h)\int_G f(g)d\mu(g)\\ &= \int_{G^2} f(g+h)d\mu(g)\otimes d\nu(h)\\ &= \int_G (\int_G f(g+h)d\nu(h))d\mu(g)\\ &= \int_G d\mu(g)\int_G f(h)d\nu(h)\\ \int_G f(g)d\mu(g) &= \int_G f(h)d\nu(h)\end{aligned}$$

L'existence est une conséquence du théorème de Kakutani. On note E le dual de $C(G,\mathbb{C})$, $B\subset E$ l'ensemble des mesures positives de masse totale 1 sur G. On montre facilement que B est convexe. De plus, si E est muni de la topologie *-faible[3] , le théorème de Banach-Alaoglu[4] montre que B est compact (c'est une partie fermée de la boule unité fermée de E).

On définit sur E les opérateurs T_g par, si $g\in G$:

$$T_g(\mu)(f) = \int_G f(x)d(T_g(\mu))(x) = \int_G f(x+g)d\mu(x)$$

μ est la mesure de Haar sur G si et seulement si on a : $\forall g\in G\ T_g(\mu)=\mu$. Une simple vérification montre que T_g applique B dans B. Comme G est abélien, on a $T_g\circ T_h = T_h\circ T_g$. Pour la continuité, si on note $\tilde{f} : x\mapsto f(x+g)$, on a $p_f(T_g(\mu)) = p_{\tilde{f}}(\mu)$. Les hypothèses du théorème de Kakutani sont donc vérifiées et on a donc l'existence d'un point fixe pour la famille $\{T_g, g\in G\}$, qui est une mesure de Haar normalisée. $\square$

3.3 G-modules Hilbertiens

On s'intéresse maintenant à une famille particulière de G-modules, les G-modules Hilbertiens. En utilisant conjointement l'analye hilbertienne et la mesure de Haar, on va pouvoir analyser finement la structure de ces représentations.

[3]définie par les semi-normes $p_f(\mu) = |\mu(f)|$, avec $f\in C(G,\mathbb{C})$

[4]On en rappelle l'énoncé : *Si E est un espace de Banach, alors la boule unité de E^* est compacte pour la topologie *-faible.* Pour la démonstration, voir *Analyse fonctionnelle* , Walter Rudin, éd. édisciences.

Définition 3.4. On appelle G-module Hilbertien une représentation de G sur $\mathcal{H}$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert et, pour tout $g \in G$, l'opérateur $\pi(g)$ est un opérateur unitaire.

On va montrer que, si G est compact, tout G-module sur un espace de Hilbert est en fait un G-module Hilbertien pour un produit scalaire équivalent.

Théorème 3.5 (Astuce de Weyl)**.** *Soit G un groupe compact et $\mathcal{H}$ un G-module sur $(\mathcal{H}, (\bullet, \bullet))$ espace de Hilbert, on pose :*

$$< x, y >= \int_G (gx, gy) dg$$

où dg est la mesure de Haar de G. Alors $(\mathcal{H}, < \bullet, \bullet >)$ un G-module hilbertien donbt la topologie norme est équivalente à celle de $(\mathcal{H}, (\bullet, \bullet))$.

Preuve. Tout d'abord $g \mapsto (gx, gy)$ est continue sur G compact et donc intégrable. Montrons que $< \bullet, \bullet >$ est un produit scalaire, la sesquilinéarité est évidente du fait de la linéarité de l'intégrale. Pour le caratère défini positif, Soit $x \in \mathcal{H}$ non nul, pour tout $g \in G$, $(gx, gx) > 0$ car $x \mapsto gx$ est un isomorphisme, et donc $< x, x > > 0$.

Montrons maintenant que les $\{\pi(h), h \in G\}$ sont unitaires pour $< \bullet, \bullet >$. En effet, $< hx, hy >= \int_G < ghx, ghy > dg$ et donc, comme la mesure de Haar est invariante par translation, $< hx, hy >= \int_G < gx, gy > dg =< x, y >$.

Pour l'équivalence des topologies on va montrer que les normes $N(x) = (x, x)^{\frac{1}{2}}$ et $\|x\| =< x, x >^{\frac{1}{2}}$ sont équivalentes. En effet :

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \int_G (gx, gx) dg \\
&\leq \int_G N(\pi(g))^2 N(x)^2 dg \\
&\leq sup_{g \in G} N(\pi(g))^2 \ \mathbb{N}(x)^2 \\
\|x\|^2 &\leq M^2 N(x)^2
\end{aligned}$$

Où $M = sup_{g \in G} N(\pi(g))$ est borné par la Propostion 3.1. De plus, comme $(x, x) =$

$(g^{-1}gx, g^{-1}gx) \leq M^2(gx, gx)$, on a :

$$\begin{aligned} M^2N(x)^2 &= \int_G M^2N(x)^2 dg \\ &\leq \int_G (gx, gx) dg = \|x\|^2 \end{aligned}$$

On a donc l'équivalence des normes. □

Remarque 3.3. Comme tous les espaces de dimension finie sont des espaces de Hilbert, on voit qu'un G-module de dimension finie peut toujours être considéré comme un G-module Hilbertien.

Remarque 3.4. L'idée de cette construction est que (gx, gy) définit un produit scalaire pour tout $g \in G$, et qu'en moyennant cette fammille de produits scalaires par rapport à la mesure naturelle sur G, on obtient un produit scalaire conservé par les opérateurs $\pi(g)$.

Dans toute la suite, $\mathcal{H}$ sera un G-module Hilbertien et toutes les intégrales sur G seront prises par rapport à la mesure de Haar. On présente maintenant un exemple important de G-module.

Exemple 6. On se place sur $\mathcal{H} = L^2(G, dg)$ où dg est la mesure de Haar sur G. C'est un espace de Hilbert avec le produit scalaire $< u, v >= \int_G u(g)\overline{v(g)}dg$. Les opérateurs $\pi(g)$ définis dans l'exemple 5 sur $C(G, \mathbb{C})$ se prolongent par densité en des opérateurs unitaires de $L^2(G, dg)$ (par l'invariance par translation de la mesure de Haar), et $L^2(G, dg)$ est ainsi un G-module Hilbertien. Comme dans le cas de $C(G, \mathbb{C})$, la représentation ainsi définie est injective.

De la même façon que pour les groupes ou les espaces vectoriels, on va maintenant étudier les morphismes de G-modules et les sous-G-modules.

Définition 3.5. Soit $\mathcal{H}$ un G-module, un sous-G-module de $\mathcal{H}$ est un sous espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{H}$ stable sous l'action de G au sens où $G\mathcal{V} = \{gv | g \in G, v \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{V}$. On dit alors que $\mathcal{V}$ est G-invariant.

Définition 3.6. Soit T un opérateur sur $\mathcal{H}$, on dit que T est un morphisme de G-modules si T commute avec tout les opérateurs de $\pi(G)$. Autrement dit : $\forall g \in G, \forall x \in \mathcal{H}, gTx = Tgx$. L'ensemble des morphismes de G-modules est noté $Hom_G(\mathcal{H})$.

Remarque 3.5. D'un point de plus algébriste, on peut noter que $Hom_G(\mathcal{H})$ est le centralisateur de $\pi(G)$ dans l'algèbre $L(\mathcal{H})$ des opérateurs linéaires de $\mathcal{H}$. On montre aussi que c'est une sous-algèbre de $L(\mathcal{H})$.

Proposition 3.6. *Si $T \in Hom_G(\mathcal{H})$, alors $Ker\ T$ est un sous-G-module.*

Preuve. Soit $x \in Ker\ T$ et $g \in G$, comme $T \in Hom_G(\mathcal{H})$, on a $Tgx = gTx = g0 = 0$, et $Ker\ T$ est un sous-G-module. □

On va maintenant réutiliser la méthode du Théorème 3.5 pour construire, à partir d'un opérateur quelconque, un morphisme de G-module.

Théorème 3.7. *Soit G groupe compact, soit T un opérateur sur le G-module $\mathcal{H}$, il existe un unique morphisme de G-module $\tilde{T}$ tel que, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$:*

$$< \tilde{T}x, y >= \int_G < Tgx, gy > dg$$

De plus : $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$

Pour la démonstration, on a besoin du lemme :

Lemme 3.8. *Soit B une forme sesquilinéaire sur $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ telle que l'on ait $M \geq 0$ tel que $|B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$, il existe alors un unique opérateur T tel que : $< Tx, y >= B(x, y)$. De plus : $\|T\| \leq M$.*

Preuve. Soit $x \in \mathcal{H}$ fixé, $y \mapsto B(x, y)$ est une forme antilinéaire continue sur $\mathcal{H}$. Par le théorème de représentation de Riesz, on a un unique $Tx \in \mathcal{H}$ tel que $< Tx, y >= B(x, y)$, et T est ainsi bien défini. Pour la continuité et la majoration de la norme, on fait $y = Tx$ dans $| < Tx, y > | = |B(x, y)| \leq M\|x\|\|y\|$. □

Preuve (du Théorème 3.7). On pose $B(x,y) = \int_G < Tgx, gy > dg$, B est sesquilinéaire. Comme $| < Tgx, gy > | \leq \|T\| \|\pi(g)\|^2 \|x\| \|y\| = \|T\| \|x\| \|y\|$ (les $\pi(g)$ sont unitaires), $|B(x,y)| \leq \|T\| \|x\| \|y\|$. Par le lemme, on a l'existence de $\tilde{T}$ et la majoration de sa norme.

Montrons maintenant que $\tilde{T}$ est un morphisme de G-module. Soit $h \in G$:

$$\begin{aligned}
< \tilde{T}hx, y > &= \int_G < Tghx, gy > dg \\
&= \int_G < T(gh)x, (gh)h^{-1}y > dg \\
&= \int_G < Tgx, gh^{-1}y > dg \\
&= < \tilde{T}x, h^{-1}y > \\
< \tilde{T}hx, y > &= < h\tilde{T}x, y >
\end{aligned}$$

On a ici utilisé l'invariance par translation de la mesure de Haar et le fait que les $\pi(h)$ sont unitaires. $\square$

Remarque 3.6. Par un calcul purement formel (et dénué de sens au vu des outils d'intégration à notre disposition), on pourrait écrire que : $\tilde{T} = \int_G \pi(g)^{-1} T \pi(g) dg$ et $\tilde{T}$ est en quelque sorte une moyenne sur G des opérateurs $\pi(g)^{-1} T \pi(g)$.

On va maintenant montrer que $\tilde{T}$ hérite de certaines propriétés de T. On rappelle qu'un opérateur sur $\mathcal{H}$ est dit autoadjoint si, pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, $< Tx, y > = < x, Ty >$.

Théorème 3.9. *Si T est auto-adjoint (resp. positif), $\tilde{T}$ est auto-adjoint (resp. positif).*

Preuve. Soient $x, y \in \mathcal{H}$, et T auto-adjoint :

$$\begin{aligned}
< \tilde{T}x, y > &= \int_G < Tgx, gy > dg \\
&= \int_G < gx, Tgy > dg \\
&= \int_G \overline{< Tgy, gx >} dg \\
&= \overline{< \tilde{T}y, x >} \\
< \tilde{T}x, y > &= < x, \tilde{T}y >
\end{aligned}$$

Et $\tilde{T}$ est auto-adjoint. Le fait que $\tilde{T}$ est positif se déduit simplement du fait que $< Tgx, gx >$ est positif pour tout $g \in G$. □

On s'intéteresse maintenant à la compacité de T. T est dit compact si l'image par T de la boule unité de $\mathcal{H}$ est une partie relativement compacte de $\mathcal{H}$. On va montrer si T est compact alors $\tilde{T}$ est compact. Il nous faut avant cela énoncer deux résultats géométrques sur les espaces de Hilbert.

Proposition 3.10. *Soit K une partie $\mathcal{H}$. On note $\overline{c}(K)$ l'enveloppe convexe fermée de K, c'est à dire le plus petit convexe fermé contenant K. $\overline{c}(K)$ est compact si K est comapct.*

Pour la démonstration on renvoie à Rudin,*Analyse Fonctionnelle*. Dans un espace de Hilbert, on appelle demi-espace réel une partie de $\mathcal{H}$ de la forme, pour $y \in \mathcal{H}$ fixé, $\{x \mid Re < x, y > \leq 1\}$.

Proposition 3.11. *Soit K une partie convexe et fermée de H, K est égal à l'intersection des demi-espaces réels la contenant.*

C'est un corollaire de la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach. On peut maintenant démontrer le résultat annoncé :

Théorème 3.12. *Si T est un opérateur compact, alors $\tilde{T}$ est un opérateur compact.*

Preuve. On note B la boule unité de $\mathcal{H}$. Comme T est compact, $\overline{TB}$ est compact. Comme les opérateurs $\pi(g)$ sont unitaires, on a $GB = B$. Et ainsi $A = \overline{TGB}$ est compact dans $\mathcal{H}$. Comme l'application $(g, x) \mapsto gx$ est continue (Propostion 3.2), GA est compact dans $\mathcal{H}$. On pose $K = \overline{c}(GA)$, la Propostion 3.10 montre que K est compact.

Soit $y \in \mathcal{H}$ tel que le demi-espace réel $D = \{x \in \mathcal{H} \mid Re < x, y > \leq 1\}$ contienne K. On va montrer que D contient $\tilde{T}B$. Soit $x \in B$, $g \in G$, on a $g^{-1}Tgx \in GTGB \subset GA \subset K$. On a donc $< g^{-1}Tgx, y > = < Tgx, gy > \leq 1$. D'où :

$$Re < \tilde{T}x, y > = \int_G Re < Tgx, gy > dg \leq 1$$

Donc $\tilde{T}B \subset D$ dès que $K \subset D$. Par la Propostion 3.11, on a : $\tilde{T}B \subset K$. Comme K est compact, $\tilde{T}B$ est relativement compact et donc $\tilde{T}$ est un opérateur compact. □

Ceci permet de montrer le résultat suivant, qui sera essentiel pour comprendre la structure des G-modules Hilbertiens :

Proposition 3.13. *Si G est compact, $Hom_G(\mathcal{H})$ contient toujours un opérateur autoadjoint compact non nul.*

Preuve. Soit v dans $\mathcal{H}$ un vecteur de norme 1. On pose $T(x) =< x, v > v$ (c'est la projection sur $\mathbb{K}v$). T est clairement compact, autoadjoint et positif. Donc $\tilde{T}$ est compact, autoadjoint et positif. Il reste à montrer que $\tilde{T}$ est non nul. En effet :

$$\begin{aligned} < \tilde{T}v, v > &= \int_G < Tgv, gv > dg \\ &= \int_G << gv, v > v, gv > dg \\ < \tilde{T}v, v > &= \int_G | < gv, v > |^2 dg \end{aligned}$$

La fonction $g \mapsto | < gv, v > |^2$ est continue, positive et non identiquement nulle car $| < \mathbf{1}v, v > |^2 = 1$. Donc $< \tilde{T}v, v >> 0$ et $\tilde{T}v \neq 0$ □

3.4 Structure des G-modules Hilbertiens

On touche au but de cette partie, on va établir un théorème fin sur la structure des G-modules Hilbertiens. On va utiliser pour cela un peu de théorie spectrale des opérateurs compacts autoadjoints.

Proposition 3.14. *Soit T un opérateur compact autoadjoint positif et non nul, alors T a une valeur propre non nulle λ et l'espace propre associé est de dimension finie.*

Ceci permet d'énoncer le théorème fondamental :

Théorème 3.15. *Soit G un groupe compact. Tout G-module Hilnertien $\mathcal{H}$ admet un sous-G-module de dimension finie.*

Preuve. On a montré qu'il existait un morphisme de G-module compact, autoadjoint, positif non nul sur $\mathcal{H}$. Soit T ce morphisme et λ une valeur propre non nulle de T, $\mathcal{H}_\lambda = Ker(T - \lambda Id_{\mathcal{H}})$ est de dimension finie. Comme $T - \lambda Id_{\mathcal{H}}$ est un morphisme de G-modules, $\mathcal{H}_\lambda$ est un sous-G-module. □

On cherche maintenant à décomposer $\mathcal{H}$ en sous-G-modules "élémentaires" dans un sens que l'on définit maintenant :

Définition 3.7. Un G-module $\mathcal{H}$ est dit simple si $\{0\}$ et $\mathcal{H}$ sont ses seuls sous-G-modules.

Dans le cadre Hilbertien qui nous intéresse ici, les choses se passent bien :

Proposition 3.16. *Soit G un groupe compact, tout G-module Hilbertien contient un G-module simple.*

Preuve. Par le Théorème 3.15, on peut se placer sur $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}$ de dimension finie égale à $n_0 > 0$. Si $\mathcal{H}_0$ est simple, la proposition est démontrée. Sinon, $\mathcal{H}_0$ contient un sous-G-module $\mathcal{H}_1$ de dimension $n_1 < n_0$. On a ainsi une suite strictement décroissante de sous-G-module de dimension finie. On a donc un sous-G-module de dimension minimale $\mathcal{V}$, qui est un G-module simple. □

On peut maintenant énoncer un premier théorème de structure sur les G-modules Hilbertiens :

Théorème 3.17. *Si G est un groupe compact, tout G-module Hilbertien est une somme directe orthogonale Hilbertienne de G-modules simples de dimension finie.*

Il faut noter que l'on parle ici de somme directe Hilbertienne et non de somme directe algébrique. Cela signifie qu'on a des sous-G-modules de dimension finie $\{\mathcal{H}_j | j \in J\}$ tels que : $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$ si $i \neq j$, et $\bigoplus_{j \in J} \mathcal{H}_j$ est dense dans $\mathcal{H}$. Pour la démonstration, on utilisera ce lemme :

Lemme 3.18. *Soit $\mathcal{V}$ un sous espace fermé de $\mathcal{H}$ G-module Hilbertien, $\mathcal{V}^\perp$ est un sous-G-module si et seulement si $\mathcal{V}$ est un sous-G-module.*

Preuve. On montre l'implication directe, la réciproque en découlant car $(\mathcal{V}^{\perp})^{\perp} = \mathcal{V}$. Soit $x \in \mathcal{V}^{\perp}$ et $g \in G$. On a, pour $y \in \mathcal{V}$, $< gx, y >=< x, g^{-1}y >= 0$ car $g^{-1}y \in \mathcal{V}$. Et donc $gx \in \mathcal{V}^{\perp}$. □

Preuve (du Théorème 3.17). On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des familles de sous-G-modules simples de dimension finie de $\mathcal{H}$ deux à deux orthogonaux. $\mathcal{F}$ est partiellement ordonné par l'inclusion. On vérifie facilement que $\mathcal{F}$ est inductif (toute partie totalement ordonnée admet un majorant). Par le lemme de Zorn, on a donc une famille F maximale dans $\mathcal{F}$.Supposons que $\mathcal{V} = \overline{\bigoplus_{E\in F} E}$ soit différent de $\mathcal{H}$. $\mathcal{V}$ est un sous-G-module de $\mathcal{H}$ (on montre avec des suites que l'adhérence d'un sous-G-module est encore un sous-G-module). Donc $\mathcal{V}^{\perp}$ est un G-module Hilbertien, et la proposition montre qu'il admet un sous-G-module simple $\mathcal{W}$. $F \cup \{\mathcal{W}\}$ est donc un élément de $\mathcal{F}$ contenant strictement F, ce qui est contradictoire. On a donc $\mathcal{V} = \mathcal{H}$. □

Quand G est abélien, on peut aller plus loin et faire le lien avec les caractères de G.

Théorème 3.19. *Soit G un groupe abélien compact et $\mathcal{H}$ un G-module simple sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, alors $dim(\mathcal{H}) = 1$ et on a un morphisme continu $\chi : G \to \mathbb{S}^1$ tel que : $gx = \chi(g)x$.*

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.20. *Soit G un groupe compact et $\mathcal{H}$ un G-module simple sur $\mathbb{C}$ de dimension finie, alors $Hom_G(\mathcal{H}) = \mathbb{C}.Id_{\mathcal{H}}$.*

Preuve. On a trivialement $\mathbb{C}.Id_{\mathcal{H}} \subset Hom_G(\mathcal{H})$. Soit $T \in Hom_G(\mathcal{H})$. Par la simplicité de $\mathcal{H}$, 0 est le seul sous-G-module strict de $\mathcal{H}$. C'est donc le noyau T si ce dernier n'est pas nul. Comme $\mathcal{H}$ est de dimension finie, T est alors un isomorphisme et a donc une valeur propre non nulle λ. Mais alors $T - \lambda Id_{\mathcal{H}}$ est un morphisme de G-module non injectif, et est donc nul. Donc $T = \lambda Id_{\mathcal{H}}$. □

Preuve (du Théorème 3.19). Comme G est abélien, on a $\pi(g)\pi(h) = \pi(h)\pi(g)$ et donc : $\pi(G) \subset Hom_G(\mathcal{H})$. Mais alors tout sous espace de $\mathcal{H}$ est un sous-G-module et donc $dim(\mathcal{H}) = 1$. De plus, pour tout g, on a donc un complexe non nul $\chi(g)$ tel que

$gx = \chi(g)x$ (en fait $\chi(g) = \pi(g)1$). χ est un morphisme continu de G dans $\mathbb{C}^\times$. En effet, par définition $g \mapsto \pi(g)$ est continue de G dans $Gl(\mathbb{C})$ continu pour la topologie faible. Donc $\chi(g) = \pi(g)1$ est continu. $\chi(G)$ est donc un sous groupe compact de $\mathbb{C}$, et est donc inclus dans $\mathbb{S}^1$. $\square$

4 Retour au théorème de Pontryagin et prolongements

4.1 Théorème de Pontryagin : groupes abéliens compacts

Les résultats de théorie des représentations démontrés dans la partie précédente vont permettre de montrer la seconde partie du théorème de Pontryagin. On rappelle que $\eta_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$ est défini par $\eta_G(g)(\chi) = \chi(g)$.

Théorème 4.1. *Soit G un groupe abélien compact, alors le morphisme $\eta_G : G \to \widehat{\widehat{G}}$ est un isomorphisme.*

On commence par montrer le lemme suivant :

Lemme 4.2. *Si G est un groupe abélien compact, les caractères de G séparent les points, c'est à dire, si g et g' sont deux éléments différents de G, on a un caractère χ dans $\widehat{G}$ tel que : $\chi(g) \neq \chi(g')$*

Preuve. Grâce à l'exemple 6, on sait qu'il existe une représentation Hilbertienne injective de G. Le Théorème 3.17 et le Théorème 3.19 permettent de décomposer le G-module $\mathcal{H}$ en sous-G-modules de dimension 1 sur lesquels la représentation est un caractère. Du fait de l'injectivité de la représentation, les opérateurs $\pi(g)$ et $\pi(g')$ sont différents si g est différent de g', on a donc au moins un sous-G-module de dimension 1 sur lequel les deux opérateurs ne coincident pas et le caractère χ correspondant à la restriction de π à ce sous-G-module est donc tel que $\chi(g) \neq \chi(g')$. □

Preuve (du Théorème 4.1). Pour l'injectivité, soit $g \in G$ non nul, par le lemme, on a un caractère χ tel que $\chi(g) \neq \chi(\mathbf{1}) = 0$, et donc $\eta_G(g)$ est non nul.

Pour la surjectivité, on note Γ l'image de G par η_G. Comme $\widehat{\widehat{G}}$ est un groupe abélien compact, les caractères de $\widehat{\widehat{G}}$ séparent les points. Donc $\Gamma = \widehat{\widehat{G}}$ si et seulement si tout caractère s'annulant sur Γ est nul. Soit f un caractère de $\widehat{\widehat{G}}$, par le Théorème 2.7 f est donné par $\omega \in \widehat{\widehat{G}} \mapsto f(\omega) = \omega(\chi) \in \mathbb{T}$ pour un certain $\chi \in \widehat{G}$. Si f s'annule sur Γ, on a, pour tout $g \in G$: $0 = f(\eta_G(g)) = \eta_G(g)(\chi) = \chi(g)$. D'où $\chi = 0$ et donc $f = 0$. Donc $\Gamma = \widehat{\widehat{G}}$.

Le fait que η_G soit un homéomorphisme résulte de la Remarque 1.2 □

4.2 Aspects catégoriels de la théorie de Pontryagin

Dans les parties précédentes, la dualité de Pontryagin a permis d'associer à chaque groupe abélien discret un groupe abélien compact. Les deux théorèmes de Pontryagin disent en quelques sorte que cette correspondance est bijective. Les deux dualités définies (pour les groupes abéliens compacts et pour les groupes abéliens discrets) sont en un certain sens réciproques l'une de l'autre, quand on les "composent" (même si la dualité n'est pas une application) on obtient un groupe isomorphe au groupe de départ. Pour exprimer de façon précise ses informations, on va introduire quelques éléments de théorie des catégories.

Définition 4.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée :

1. d'une collection[5] $Ob\ \mathcal{C}$ dont les éléments sont appelés les objets de $\mathcal{C}$.
2. pour chaque paire ordonnée d'objets X, Y d'un ensemble $Hom(X, Y)$ dont les éléments sont appelés les morphismes (ou flèches) de X dans Y. On les note $\varphi : X \to Y$.
3. d'une "loi de composition" : $Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z) \to Hom(X, Z)$, qui a (φ, ψ) associe $\psi \circ \varphi$. On appelle cette application composition des morphismes.

De plus les propriétés suivantes doivent être vérifiées :

1. dès que trois flèches peuvent être composées, l'opération doit être associative.
2. on doit avoir, pour $X \in Ob\ \mathcal{C}$, un morphisme $id_X : X \to X$ qui est un élément neutre pour la composition dès que celle-ci a un sens.
3. En tant qu'ensembles, les $Hom(X, Y)$ doivent être disjoint, en d'autres termes, la donnée d'une flèche définit uniquement les points de départ et d'arrivée de cette flèche.

Définition 4.2. Deux objets X, Y de $\mathcal{C}$ sont isomorphes si on a deux flèches $\varphi : X \to Y$ et $\psi : Y \to X$ telles que $\varphi \circ \psi = id_Y$ et $\psi \circ \varphi = id_X$.

[5]le terme "collection" ici est vague, cela provient du fait que l'on peut utiliser des catégories où $Ob\mathcal{C}$ n'est pas un ensemble au sens de la théorie axiomatique des ensembles, l'exemple le plus simple étant la catégorie des ensembles et applications. On se permettra quand même d'écrire $X \in Ob\mathcal{C}$.

On introduit maintenant les deux catégories qui nous intéressent :

Exemple 7. La catégorie **Ab** des groupes abéliens et morphismes où Ob **Ab** est la collection des groupes abéliens et, si A et B sont des groupes abéliens, $Hom(A, B)$ est l'ensemble des morphismes de groupes de A dans B. La notion d'isomorphisme dans cette catégorie est la notion habituelle d'isomorphisme entre deux groupes.

Exemple 8. La catégorie **AbC** des groupes abéliens compacts et morphismes où Ob **AbC** est la collection des groupes abéliens compacts et, si G et H sont des groupes abéliens compacts, $Hom(G, H)$ est l'ensemble des morphismes de groupes continus de G dans H. La notion d'isomorphisme dans cette catégorie est la notion habituelle d'isomorphisme entre deux groupes compacts.

On va maintenant définir ce qu'est une "application" d'une catégorie dans une autre.

Définition 4.3. Soit $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est la donnée :

1. pour tout objet $X \in Ob\,\mathcal{C}$, d'un objet $F(X) \in Ob\,\mathcal{D}$.
2. si $X, Y \in \mathcal{C}$, pour tout morphisme de $\varphi : X \to Y$ d'un morphisme $F(\varphi) : F(X) \to F(Y)$ avec $F(\varphi \circ \psi) = F(\varphi) \circ F(\psi)$ dès que la composition a un sens. (En particulier $F(id_X) = id_{F(X)}$)

Remarque 4.1. On appelle parfois foncteur *covariant* la notion de foncteur définie ci-dessus. On appelle foncteur *contravariant* une "application" $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ vérifiant les mêmes propriétés que dans la définition à la nuance près que F renverse les flèches : si $\varphi : X \to Y$ alors $F(\varphi) : F(Y) \to F(X)$ et $F(\varphi \circ \psi) = F(\psi) \circ F(\varphi)$. On pourrait se passer de cette terminologie en disant que F est alors un foncteur de $\mathcal{C}^\circ \to \mathcal{D}$ où la catégorie $\mathcal{C}^\circ$, la catégorie duale de $\mathcal{C}$, est obtenue en renversant les flèches de $\mathcal{C}$.

Remarque 4.2. On définit de façon naturelle un foncteur identité $id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$. De même, si on a deux foncteurs $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$, on définit naturellement la composée $\mathcal{C} \xrightarrow{G \circ F} \mathcal{D}$.

La dualité de Pontryagin est un foncteur contravariant :

Exemple 9. La dualité de Pontryagin permet de définir un foncteur contravariant Δ : $\mathbf{Ab} \to \mathbf{AbC}$. Si A est un groupe abélien discret, $\Delta(A) = \widehat{A}$. Si $\varphi : A \to B$ est un morphisme, on définit le morphisme continu $\Delta(\varphi) : \widehat{B} \to \widehat{A}$ par, si $\chi \in \widehat{B}$: $\Delta(\varphi)(\chi) = \widehat{\varphi}(\chi) = \chi \circ \varphi$. De la même façon, on définit le foncteur contravariant $\nabla : \mathbf{AbC} \to \mathbf{Ab}$.

La fin de ce travail a pour but de montrer que ces foncteurs sont dans un sens à définir réciproques l'un de l'autre. On pourrait vouloir montrer que $\Delta \circ \nabla = id_{\mathbf{AbC}}$ et $\nabla \circ \Delta = id_{\mathbf{Ab}}$ (on dit alors que Δ et ∇ sont des isomorphismes de catégories) mais ceci est trop restrictif, les théorèmes de Pontryagin ne nous donnant pas des égalités entre groupes mais seulement des isomorphismes. C'est pourquoi on introduit encore quelques notions :

Définition 4.4. Soit $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ deux foncteurs. Un morphisme de foncteurs f entre F et G (on écrit : $f : F \to G$) est la donnée pour chaque $X \in Ob\ \mathcal{C}$ d'un morphisme $f(X) : F(X) \to G(X)$ tel que, pour tout morphisme $\varphi : X \to Y$, le diagramme :

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "f(X)"] \arrow[d, "F(\varphi)"'] & G(X) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(Y) \arrow[r, "f(Y)"'] & G(Y) \end{tikzcd}$$

soit commutatif.

On définit de manière évidente la compostion de deux morphismes de foncteurs ainsi que le morphisme identité $id_F : F \to F$. On obtient ainsi une nouvelle catégorie $Funct(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ dont les objets sont les foncteurs et les flèches les morphismes de foncteurs. Ceci va nous permettre de définir la notion d'équivalence de catégories, bien plus souple que la notion d'isomorphisme entre deux catégories.

Définition 4.5. Soit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur, on dit que F est une équivalence de catégories s'il existe un foncteur $E : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tel que FE soit isomorphe à $id_{\mathcal{D}}$ dans $Funct(\mathcal{D}, \mathcal{D})$ et EF soit isomorphe à $id_{\mathcal{C}}$ dans $Funct(\mathcal{C}, \mathcal{C})$. On dit alors que E est un quasi-inverse de F.

En appliquant les définitions, montrer qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est isomorphe à l'identité revient à trouver pour tout objet X un isomorphisme (dans $\mathcal{C}$!) $f(X) : X \to F(X)$, tel que pour toute flèche $\varphi : X \to Y$ on aie le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f(X)} & F(X) \\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow F(\varphi) \\ Y & \xrightarrow[f(Y)]{} & F(Y) \end{array}$$

Deux catégories équivalentes ont les mêmes objets à isomorphisme près au sens où, si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une équivalence, deux objets X et Y de $\mathcal{C}$ sont isomorphes si et seulement si $F(X)$ et $F(Y)$ le sont. De plus, la correspondance $Hom(X,Y) \to Hom(F(X), F(Y))$ donnée par $\varphi \to F(\varphi)$ est bijective. On va maintenant montrer, grâce aux théorèmes de Pontryagin, que les foncteurs ∇ et Δ sont quasi-inverses l'un de l'autre.

Théorème 4.3. *∇ et Δ sont quasi-inverses l'un de l'autre.*

Preuve. On pose $F = \nabla \circ \Delta : \mathbf{Ab} \to \mathbf{Ab}$ et $E = \Delta \circ \nabla : \mathbf{AbC} \to \mathbf{AbC}$.

On montre d'abord que F est isomorphe à $id_{\mathbf{Ab}}$. Soient $\varphi : A \to B$ morphisme. On a $F(A) = \widehat{\widehat{A}}$, l'isomorphisme de foncteurs entre $id_{\mathbf{Ab}}$ et F sera donné par l'application $\eta_A : A \to \widehat{\widehat{A}}$ définie par $\eta_A(a)(\chi) = \chi(a)$. Le théorème de Pontryagin a montré que η_A est un isomorphisme. Il faut donc montrer que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & \widehat{\widehat{A}} \\ \varphi\big\downarrow & & \big\downarrow \widehat{\widehat{\varphi}} \\ B & \xrightarrow[\eta_B]{} & \widehat{\widehat{B}} \end{array}$$

En effet, soit $\chi_B \in \widehat{B}$ et $a \in A$, on a :

$$\eta_B \circ \varphi(a)(\chi_B) = \chi_B(\varphi(a))$$

De plus, si $\xi \in \widehat{\widehat{A}}$ et $\chi_B \in \widehat{B}$, on a :

$$\widehat{\widehat{\varphi}}(\xi)(\chi_B) = (\xi \circ \widehat{\varphi})(\chi_B) = \xi(\chi_B \circ \varphi)$$

Et donc :

$$\widehat{\widehat{\varphi}}(\eta_A(a))(\chi_B) = \eta_A(a)(\chi_B \circ \varphi) = \chi_B(\varphi(a))$$

Le diagramme commute donc.

Pour montrer que E est isomorphe $id_{\mathbf{AbC}}$, on utilise exactement les mêmes arguments. $\square$

On a donc montré que la catégorie des groupes abéliens est équivalente à la catégorie des groupes abéliens compacts via la dualité de Pontryagin. En fait, comme les foncteurs de dualité de Pontryagin sont contravariant, la catégorie des groupes abéliens est plutôt équivalente à la catégorie duale de la catégorie des groupes abéliens compacts.

Épilogue

On a montré ici les bonnes propriétés de la dualité de Pontryagin. On va essayer de donner un aperçu de l'utilité que cette dualité peut avoir. Pour voir le lien avec l'analyse harmonique, considérons une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 1-périodique. On peut aussi voir f comme une fonction de $\mathbb{T}$ dans $\mathbb{C}$. Si f est assez régulière, on définit ces coefficients de Fourier par :

$$\widehat{f}(k) = \int_{\mathbb{T}} f(t)e^{-2i\pi kt}dt \text{ si } k \in \mathbb{Z}$$

où dt est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, c'est à dire la mesure de Haar sur $\mathbb{T}$. Toujours si f est assez régulière, elle est égale à la somme de sa série de Fourier :

$$f(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k)e^{2i\pi kt}$$

On a vu au début de cette étude, le dual de $\mathbb{T}$ est le groupe des fonctions $t \mapsto e^{2i\pi kt} \in \mathbb{S}^1$. Par analogie avec cette situation, on définit, pour $f : G \to \mathbb{C}$ assez régulière et G groupe abélien compact, la transformée de Fourier généralisée de f par :

$$\begin{aligned} \widehat{f} : &\widehat{G} \to \mathbb{C} \\ &\chi \mapsto \int_G f(g)\overline{\chi(g)}dg \end{aligned}$$

où dg est la mesure de Haar sur G. Toujours si f est assez régulière, on a la formule de synthèse :

$$f(g) = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \widehat{f}(\chi)\chi(g)$$

où $d\chi$ est la mesure de Haar sur $\widehat{G}$.

Il est possible, comme pour la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$, de prolonger la transformée de Fourier en une isométrie de $L^2(G) \to L^2(\widehat{G})$ (c'est le théorème de Plancherel). On pourra consulter l'article *Analyse Harmonique* de Wikipedia ou le livre *Abstract Harmonic Analysis* , Loomis.