Péndulo doble

4/1/2021

Péndulo simple

Antes de estudiar el péndulo doble comencemos por estudiar el péndulo simple. El péndulo simple consiste en un punto de masa fijado a una estructura por medio de una vara. Denotamos por θ el ángulo formado entre la vara y el eje vertical. Para simplificar las cuentas, supongamos que el largo de la vara es 1 y la masa del objeto también es 1. Supongamos que podemos ignorar la masa de la vara y en un principio también la fricción (después incluiremos la fricción). Entonces la única fuerza que actúa sobre el objeto es la gravedad, por lo que la aceleración del ángulo θ es proporcional a $sin(\theta)$. Podemos representar el sistema por medio de la siguiente ecuación:

$$\ddot{\theta} = -g\sin(\theta)$$

Añadiendo una variable para la velocidad angular $\omega = \dot{\theta}$ reescribimos el sistema como:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -g\sin(\theta) \end{aligned}$$

Este es un sistema conservativo por lo que podemos utilizar el método del potencial para esbozar su retrato fase.

Primero encontramos la energía potencial del sistema:

$$\begin{aligned} u(\theta) &= -\int_0^{\theta} -g\sin(t)\,dt = -g\left(\cos(t)\right)\Big|_0^{\theta} = g\left(1-\cos(\theta)\right) \\ u'(\theta) &= g\sin(\theta) = 0 \iff \theta = k\pi \quad con \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Por lo tanto los puntos de equilibrio son de la forma $(\theta, \omega) = (k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$

Para cada nivel de energía h tenemos que las órbitas del sistema están dadas por:

$$\omega = \pm\sqrt{2\left(h - g\left(1-\cos(\theta)\right)\right)}$$

Graficando para cada nivel de energía podemos esbozar el retrato fase:

% Agregar interpretación de las soluciones.

Ahora vamos a empezar a tomar en cuenta la fricción. Supongamos que ésta es proporcional a la velocidad ω. Tenemos que agregar un término a la ecuación de $\dot{\omega}$ de la forma $-b\omega$ con b una constante positiva. El sistema resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega \\ \dot{\omega} &= -b\,\omega - g\sin(\theta) \end{aligned}$$

Los puntos de equilibrio son donde $\omega = 0$ y $\sin(\theta) = 0$. Es decir, son los puntos de la forma $(\theta, \omega) = (k\pi, 0)$ con $k \in \mathbb{Z}$ (siguen siendo los mismos de antes).

Vamos a analizar el comportamiento cerca de los puntos de equilibrio utilizando la Jacobiana del sistema (y el teorema de Hartman–Grobman).

$$Df(\theta,\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g\cos(\theta) & -b \end{pmatrix}$$

Para los puntos de equilibrio con un múltiplo par de π tenemos:

$$Df(2k\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -g & -b \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico y valores propios:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + b\lambda + g \\ p(\lambda) = 0 &\iff \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4g}}{2} \end{aligned}$$

Dependiendo del signo de $b^2 - 4g$ vamos a tener valores propios reales o complejos. Si asumimos que la fuerza de fricción no es demasiado fuerte y por lo tanto la constante b no es muy grande, vamos a tener doe valores propios complejos con parte real negativa, por lo que el equilibrio va a ser espiral estable.

Para los puntos de equilibrio que son un múltiplo impar de π tenemos:

$$Df((2k+1)\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g & -b \end{pmatrix}$$

Su polinomio característico y valores propios:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 + b\lambda - g \\ p(\lambda) = 0 &\iff \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4g}}{2} \end{aligned}$$

Podemos ver que ambos valores propios son reales, uno positivo y uno negativo, por lo tanto tenemos un punto silla.

Para esbozar el retrato fase utilizaremos las ceroclinas.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} = 0 &\iff \omega = 0 \\ \dot{\omega} = -b\,\omega - g\sin(\theta) = 0 &\iff \omega = -\frac{g}{b}\sin(\theta) \end{aligned}$$

Utilizando la información que tenemos hasta ahora podemos esbozar el retrato fase:

Como podemos ver, el retrato fase es parecido al del péndulo sin fricción. La principal diferencia es que ahora hay espirales en lugar de las órbitas periódicas de antes. Esto se debe a que, debido a la frición, el péndulo ya no oscila indefinidamente, sino que cada vez la trayectoria es más corta y se va acercando poco a poco a la posición de equilibrio en la que el péndulo cuelga hacia abajo sin moverse (puntos de la forma $(\theta,\omega) = (2k\pi, 0)$).

Péndulo doble

Consideremos ahora un péndulo que está unido a otro péndulo. Tenemos una masa m_1 unida por un una vara de longitud l_1 que, a su vez, tiene otra masa m_2 unida por medio de una vara de longitud l_2. Sean θ_1 y θ_2 los ángulos que forman cada una de estas varas con el eje vertical (ver figura).

Este sistema no es tan sencillo. Para plantear las ecuaciones de este sistema necesitamos utilizar la ecuación de Euler-Lagrange.

Dadas la energía potencial V de un sistema y su energía cinética T, definimos el Lagrangiano como:

$$L = T - V$$

La ecuación de Euler-Lagrange nos dice:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)$$

Para aplicarlo en nuestro caso tenemos que empezar por encontrar las coordenadas de cada uno de los puntos de masa:

$$\begin{aligned}
x_1 &= l_1 \sin(\theta_1) \\
y_1 &= -l_1 \cos(\theta_1) \\
x_2 &= l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_2) \\
y_2 &= -l_1 \cos(\theta_1) - l_2 \cos(\theta_2)
\end{aligned}$$

La energía potencial del sistema está dada por:

$$\begin{aligned}
V &= m_1 g y_1 + m_2 g y_2 \\
&= -(m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) - m_2 g l_2 \cos(\theta_2)
\end{aligned}$$

Para encontrar la energía cinética necesitamos primero los cuadrados de las velocidades v_1 y v_2:

$$\begin{aligned}
v_1^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\
v_2^2 &= l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)
\end{aligned}$$

Entonces la energía cinética está dada por:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \\
&= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 [l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)]
\end{aligned}$$

El Lagrangiano es:

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos(\theta_1) + m_2 g l_2 \cos(\theta_2)$$

Para θ_1:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = m_1 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1^2 \dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) = (m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -l_1 g (m_1 + m_2) \sin(\theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2)$$

Por lo tanto la ecuación de Euler-Lagrange para θ_1 es:

$$(m_1 + m_2) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta} \cos(\theta_1 - \theta_2) + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_1 g (m_1 + m_2) \sin(\theta_1) = 0$$

Podemos hacer lo mismo para θ_2 y la ecuación de Euler-Lagrange queda:

$$m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \cos(\theta_1 - \theta_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + l_2 m_2 g \sin(\theta_2) = 0$$