Remplir en majuscule

Nom:	
Prénom:	
Matricule:	

Pont vers le supérieur: mathématiques

GUERRIERI R., HILLEWAERE R., JOLY M., NGUYEN K.

Avril 2025

Consignes

- Complétez l'encadré en haut de cette page en majuscule.
- La calculatrice est **interdite**.
- Les réponses sans explications ne seront pas comptabilisées.
- Tous les angles sont donnés en **radians**.
- Vous pouvez détacher les feuilles de brouillon à la fin de l'examen.
- **Bien lire** les questions dans leur entiereté.

Bonne chance à tous.tes!

Question	Points	Score
Nombres complexes et trigonométrie	15	
Vecteurs	12	
Système	7	
Conique	13	
Droites et dérivées	11	
Limites	15	
Optimisation	14	
Fonctions réciproques	13	
Total:	100	

a. (5 points) Calculez le quotient $-\frac{16i}{-1+\sqrt{3}i}$, et mettez la réponse

1. sous la forme $a + bi$
2. en forme exponentielle.

Solution:

M1 A1 Multiplication par le binôme conjugué ou forme polaire pour obtenir $-4\sqrt{3} + 4i$.
M2 A1 Calcul de

$$-\frac{16i}{-1+\sqrt{3}i} = -4\sqrt{3} + 4i = 8e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

en coordonnées polaires. La méthode de l'angle doit être complètement correcte.

b. (10 points) Dès lors, résolvez l'équation

$$z^3 = -\frac{16i}{-1+\sqrt{3}i}e^{\frac{i\pi}{6}},$$

en écrivant vos solutions sous la forme $a + bi$. Esquissez-les ensuite sur le plan complexe.

Solution:

M1 A1 Utilisation de leur forme polaire

$$z^3 = 8e^{i(\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{6})} = 8e^{i(\pi)}$$

M1 Une méthode correcte pour avoir **toutes** les réponses, e.g.

$$z = 2e^{\frac{i\pi(2k+1)}{3}}$$

A2 $2e^{\frac{i\pi}{3}}$, -2, $2e^{-\frac{i\pi}{3}}$, peut être sous-entendu
M1 A2 Utilisation de la forme d'Euler pour obtenir

$$1 + \sqrt{3}i, -2, 1 - \sqrt{3}i,$$

B2 Esquisse cohérente.

Soient les points

$$A(-1,-1,-2), \quad B(-2,1,-1), \quad C(-1,-2,0), \quad O(0,0,0)$$

a. (4 points) Trouvez un vecteur perpendiculaire au plan contenant A, B, C.

> **Solution:**
>
> **M1** Identifie deux vecteurs pour lesquels le produit vectoriel est pertinent
>
> **M1 A2** Obtient par exemple $\vec{A}B \times \vec{A}C = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

b. (3 points) Que vaut l'aire du triangle ABC?

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Calcule la norme du vecteur précédent $\sqrt{30}$
> **A1** Déduire l'aire du triangle $\frac{\sqrt{30}}{2}$

c. (2 points) Calculez le volume du parallélépipède engendré par les arrêtes AB, AC, et AO.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Produit mixte tel que $(\vec{A}B \times \vec{A}C) \cdot \vec{A}O = 9$

d. (3 points) Le point $D(-3,4,-2)$ est-il dans le plan ABC?

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Produit mixte tel que $(\vec{A}B \times \vec{A}C) \cdot \vec{A}D = 0$ ou équivalent.
> **A1** Oui

(7 points) Résolvez le système suivant

$$\begin{cases} -x - 2z & = -1 \\ -2x + 3y - 5z & = 3 \\ x + 3y + 2z & = 7 \end{cases}$$

en appliquant la méthode du pivot de Gauss jusqu'à ce que la matrice principale soit échelonnée.

Vous devez indiquer clairement quelles opérations élémentaires vous appliquez. Les solutions employant une autre méthode ne seront pas acceptées.

Solution:

M2 Opérations élémentaires correctes pour créer deux zéros (e.g. en première colonne).

M1 Opération élémentaire correcte pour créer un autre zéro **qui ne détruit pas les autres**. L'étudiant obtient 0 à l'exercice (faute grave) s'il obtient M0 ici, cela a été annoncé au cours.

A1 Vérifiez que la dernière ligne de leur système est équivalente à $z = 1$

M1 Backward substitution

A2 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Considérons la conique dont l'équation est

$$16x^2 + 32x - 9y^2 + 18y - 137 = 0$$

(13 points) De quel type de conique s'agit-il? Trouvez les caractéristiques de cette conique (centre, foyers, sommets, asymptotes éventuelles), et esquissez-la.

Veillez à vous assurer que votre esquisse contienne toutes les caractéristiques de la conique

Solution:

B1 Déduire qu'il s'agit d'une **hyperbole** de la différence des carrés, ou avec une justification correcte équivalente.

M1 A1 Compléter le carré pour obtenir $16\left(x+1\right)^2 - 9\left(y-1\right)^2 - 144 = 0$

M1 A1 Ramener à la forme réduite $\frac{(x+1)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$

A1 Déduire que la translation est $(-1, 1)$. Peut être sous-entendu si cela apparaît plus tard dans la solution de l'étudiant.e.

M1 A1 Calcul de $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$.

A1ft Coordonnées du foyer: $(-6, 1)$, $(4, 1)$

A1ft Coordonnées du sommet: $(-4, 1)$, $(2, 1)$

A1ft Équations des asymptotes: $y - 1 = \pm\frac{4}{3}(x + 1)$

B2 Un point pour la cohérence de l'esquisse, l'autre point pour s'assurer que l'hyperbole est correcte.

La courbe C a pour équation

$$qx^3 - 5xy + 3y^2 = 26,$$

où q est une constante réelle. Le point $P(-1, -4)$ appartient à C.

a. (3 points) Trouvez la valeur de q, et réécrivez l'équation de départ.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Substitution de $(-1, -4)$ dans l'équation pour obtenir $q = 2$
> **A1** $2x^3 - 5xy + 3y^2 = 26$

b. (4 points) Utilisez la dérivée implicite pour obtenir une expression de $y' = \frac{dy}{dx}$

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Dérivation des deux membres de l'équation, en respectant la règle de composée
> **M1 A1** Isole y' pour obtenir
>
> $$y' = \frac{-6x^2 + 5y}{-5x + 6y}$$

c. (4 points) Donnez une équation de la normale à C au point P.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Méthode correcte pour obtenir la pente
>
> $$m = -\frac{19}{26}$$
>
> **M1 A1** Méthode correcte pour une courbe passant par $(-1, -4)$

a. (5 points) Factorisez $2x^3 - 3x^2 + 1$ et $x^2 + x - 2$.

Solution:

Factorisation du polynôme de degré 3

B1 trouve une racine (peut être sous-entendu)
M2 A1 factorise complètement $(x-1)^2 \cdot (2x+1)$.

Factorisation du polynôme de degré 2

M1 A1 $(x-1)(x+2)$

b. (4 points) Dès lors, calculez la limite

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{(x^2 + x - 2)\sin(x-1)}$$

sans utiliser la règle de l'Hospital.

Solution:

M1 Emploi de leur factorisation au numérateur ou au dénominateur
M1 Reconnaissance de la limite classique $\frac{\sin x}{x}$.
A2 Tombent sur

$$\frac{2x+1}{x+2} = 1$$

c. (6 points) En utilisant la règle de l'Hospital, calculez

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\ln(\tan x)}{\sin(x) - \cos(x)}$$

Veuillez préalablement vérifier que vous êtes bien dans les conditions d'application de la règle de l'Hospital.

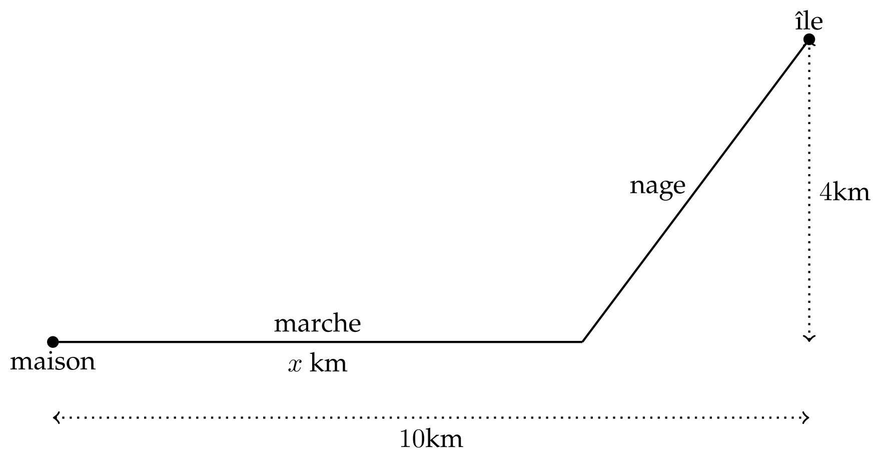
Solution:

B1 On vérifie que l'on a bien $0/0$
M1 A2 Dérivée du numérateur et dérivée du dénominateur pour obtenir

$$\frac{\frac{\tan^2(x)+1}{\tan(x)}}{\sin(x) + \cos(x)}$$

M1 A1 Remplace x par $\frac{\pi}{4}$ pour obtenir

$$\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$



Une personne marche à une vitesse de 5 km/h et nage a une vitesse de 3 km/h. Elle compte partir de sa maison et marcher le long de la côte durant x km, pour ensuite nager en ligne droite vers une île qui se trouve 10 km plus loin le long de la côte, et à 4 km de la côte (voir dessin ci-dessus).

a. (2 points) Expliquez pourquoi le temps en *heures* pour rejoindre l'île en fonction de x est donné par

$$T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{(10-x)^2 + 16}}{3}$$

> **Solution:**
>
> **B1** Utilisation de $t = \frac{d}{v}$.
> **B1** Utilise Pythagore pour arriver à une conclusion correcte.

b. (4 points) La personne souhaite arriver sur l'île *le plus vite possible*. Montrez alors que la distance x qu'elle doit parcourir le long de la côte satisfait

$$25\,(10-x)^2 = 9\,(10-x)^2 + 144$$

> **Solution:**
>
> **M1 A1** $T'(x) = \frac{x-10}{3\sqrt{(10-x)^2+16}} + \frac{1}{5}$
> **M1 A1** Transformation de l'equation $T'(x) = 0$ et élévation au carré pour obtenir la bonne réponse.

c. (5 points) Dès lors, combien de temps la personne devra-t-elle marcher avant de se mettre à nager?

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Résolution de l'équation donnée pour obtenir $x = 7$.
> **B1** Exclusion de l'autre racine
> **M1 A1** En déduire que $t = \frac{7}{5}$ **heures** ou équivalent. Unité indispensable.

d. (3 points) Calculez la dérivée seconde T'', et expliquez comment vous pourriez montrer que le x obtenu au point précédent est bien minimal (sans pour autant effectuer les calculs)

Solution:

M1 A1 $T''(x) = \frac{-\frac{(x-10)^2}{(x-10)^2+16}+1}{3\sqrt{(x-10)^2+16}}$

B1 Conclusion appropriée

Soit la fonction

$$f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x^2-9}\right)$$

a. (6 points) Déterminez le domaine de définition de f

Solution:

M1 A1 méthode correcte pour la CE de la la racine, réponse $\mathbb{R}\backslash]-3,3[$ ou équivalent.

B1 M1 A1 Pour la CE de l'arcsin, $-1 \leq \sqrt{x^2-9} \leq 1$. B1 pour une argumentation sur l'inéquation de gauche, M1 pour une méthode correcte de l'inéquation de droite.

A1 $[-\sqrt{10}, -3] \cup [3, \sqrt{10}]$

b. (3 points) Calculez la dérivée de f.

Solution:

M2 A1 M1 pour une tentative de dérivation de $\arcsin$, M1 pour la racine. M0 en cas d'erreur de composée.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{10-x^2}\sqrt{x^2-9}}$$

c. (4 points) Déterminez l'image de f.

Solution:

M1 A1 L'argument de $\arcsin$ atteint $[0, 1]$.

A2 Conclusion correcte $[0, \frac{\pi}{2}]$