Remplir en majuscule

Nom:
Prénom:
Matricule:

Pont vers le supérieur: mathématiques

ANNENKOFF D., GUERRIERI R., JOLY M., MARCRHAL J., NGUYEN K.

Septembre 2024

Consignes

- Compléter l'encadré en haut de cette page
- La calculatrice est **autorisée**.
- Les réponses sans justifications ne seront pas comptabilisées
- Tous les angles sont donnés en **radians**.
- Un **formulaire** est fourni, il peut être dégrafé.
- **Bien lire** les questions dans leur entiereté.

Bonne chance à tous.tes!

Question	Points	Score
Nombres complexes	9	
Droites et cercles	12	
Systèmes	8	
Trigonométrie	10	
Vecteurs	15	
Factorisation et limites	11	
Dérivées	11	
Optimisation	14	
Équations différentielles	10	
Total:	100	

1. (5 points) Convertissez $w = -8\sqrt{3} + 8i$ en **forme polaire**, c'est-à-dire

$$w = re^{i\theta}, \qquad \text{où} \quad r \geq 0 \quad \text{et} \quad \theta \in]-\pi, \pi].$$

Veillez à donner la réponse sous forme ***exacte****, en vous assurant que l'argument est dans le bon intervalle et simplifié au maximum.*

Solution:

M1 Applique le théorème de Pythagore:

$$r = \sqrt{\left(-8\sqrt{3}\right)^2 + (8)^2}$$

A1 Obtient $r = 16$.
M1 Utilise une méthode correcte pour obtenir $\tan\theta$ ou tout autre nombre trigonométrique. Tolérer uniquement des erreurs de signe.
A1 Obtient $\tan\theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$
A1 $\theta = \frac{5\pi}{6}$. L'expression doit être simplifiée, dans $]-\pi, \pi]$ et être exacte.

2. (4 points) Dès lors, déduisez toutes les solutions complexes de l'équation

$$z^4 = -8\sqrt{3} + 8i$$

Veillez à donner la réponse sous forme ***exacte****, en vous assurant que les arguments sont dans le bon intervalle et simplifiés au maximum.*

Solution:

M1 Application correcte de *de Moivre-Laplace*

$$z = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi k}{2}\right)},$$

c'est-à-dire racine 4-ème de la norme **et** division de l'argument par 4.

A3 A1 pour $2e^{i\frac{5\pi}{24}}$, A2 s'il y a présence d'au moins deux solutions de

$$\left\{2e^{-\frac{19i\pi}{24}}, 2e^{-\frac{7i\pi}{24}}, 2e^{\frac{5i\pi}{24}}, 2e^{\frac{17i\pi}{24}}\right\}$$

Octroyer A3 seulement si toutes les réponses sont correctes.

Soit C un cercle de centre $A(7,5)$ et de rayon inconnu.

1. (3 points) Sachant que la droite $y = 2x + 1$ est tangente à C au point P, montrez qu'une équation de la droite PA est donnée par $2y + x = 17$.

Solution:

B1 Calcul de la pente de PA: $m = -\frac{1}{2}$
M1 Tentative suffisante pour l'équation de la droite et manipulations algébriques
A1 Preuve complètement correcte

2. (5 points) Trouvez les coordonnées de P et déduisez-en une équation cartésienne pour C.

Solution:

M1 A1 Calcul des coordonnées de P, $P(3,7)$
M1 A1 Calcul de PA^2 par Pythagore pour obtenir 20
A1 Obtient $(x-7)^2 + (y-5)^2 = 20$ sans erreurs.

3. (4 points) L'équation $y = 2x + k$, avec $k \neq 1$ est une autre tangente à C. Trouvez la valeur de k.

Solution:

M1 A1 $Q = P + 2\vec{PA} = \begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix}$
M1 A1 $y = 2(x-11) + 3 \implies k = -2 \cdot 11 + 3 = -19$

Méthode alternative

(8 points) Résolvez le système suivant

$$\begin{cases} x - y + z & = 3 \\ -3x + 4y - 4z & = -11 \\ -2x + 3y - 2z & = -7 \end{cases}$$

en appliquant la méthode du pivot de Gauss jusqu'à ce que la matrice principale soit échelonnée.

Vous devez indiquer clairement quelles opérations élémentaires vous appliquez.

Solution:

B1 Présence d'une matrice dont la partie principale est équivalente à $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & -4 \\ -2 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

M2 Opérations élémentaires correctes pour créer deux zéros (e.g. en première colonne).

M1 Opération élémentaire correcte pour créer un autre zéro **qui ne détruit pas les autres**. L'étudiant obtient 0 à l'exercice (faute grave) s'il obtient M0 ici.

A1 Vérifiez que la dernière ligne de leur système est équivalente à $z = 1$

M1 Backward substitution

A2 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Solution:

Question 4: Trigonométrie .... *10 points*

1. (4 points) Prouvez que

$$1 - \cos 2\theta = \tan\theta \sin 2\theta, \quad \theta \neq \frac{(2n+1)\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}.$$

Solution:

M2 Remplacement de $\tan\theta$ et utilisation de la formule de l'angle double

$$\tan\theta \sin 2\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} 2\sin\theta\cos\theta = 2\sin^2\theta$$

M1 Simplification et utilisation de la formule $\cos 2\theta$ ou Carnot
A1 Preuve complète et sans erreurs

2. (6 points) Dès lors, en **utilisant le point précédent**, trouvez les 3 solutions à l'équation

$$(\tan^2 x - 4)(1 - \cos 2x) = 3\tan^2 x \sin 2x$$

sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Veillez arrondir toute réponse non exacte à 3 chiffres significatifs.

Solution:

M1 Utilisation du point précédent

$$(\tan^2 x - 4)(1 - \cos 2x) = 3\tan x(1 - \cos 2x)$$

M1 Factorise convenablement

$$(\tan^2 x - 3\tan x - 4)(1 - \cos 2x) = 0$$

A1 Déduit que $x = 0$ est une solution.
M1 A1 Résoudre l'équation quadratique en tangente pour obtenir $(\tan x - 4)(\tan x + 1) = 0$.
A1 Obtient les solutions $\left\{0, -\frac{\pi}{4}, \operatorname{atan}(4)\right\}$. Remarque: $\tan^{-1} 4 = 1.32581766366803\ldots$

Soit le plan Π donné par les équations paramétriques

$$\vec{r} = \begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix}$$

1. (3 points) Trouvez un vecteur normal non nul au plan Π.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Utilise le produit vectoriel. Octroyer A1 si les vecteurs choisis sont corrects.
> **A1**
> $$\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\3\\-4\end{bmatrix}$$

2. (3 points) En déduire une équation cartésienne de Π.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Calcul de $\vec{n} \cdot \begin{bmatrix}3\\3\\2\end{bmatrix}$
> **A1ft** Calcul $2x + 3y - 4z = 7$

La droite l a pour équation

$$\vec{r} = \begin{bmatrix}5\\-5\\1\end{bmatrix} + t \begin{bmatrix}1\\6\\-3\end{bmatrix}$$

3. (5 points) Trouvez l'intersection entre la droite l et le plan Π.

> **Solution:**
>
> **M1** Injection de l'équation paramétrique de l dans leur équation cartésienne
> **A1** $32t - 9 = 7$
> **B1** $t = \frac{1}{2}$
> **M1 A1** Substitution pour obtenir $\begin{bmatrix}\frac{11}{2}\\-2\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$

4. (4 points) Donnez l'angle entre le plan Π et la droite l.

   Donnez votre réponse en radians, arrondie à deux chiffres après la virgule.

Solution:

M1 A1 $\cos\tilde{\theta} = \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}}{\sqrt{29}\sqrt{46}} = \frac{16\sqrt{1334}}{667}$

M1 A1 Utilise le fait que l'angle s'obtient en soustrayant $\frac{\pi}{2} - \tilde{\theta}$:

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tilde{\theta} = -\operatorname{acos}\left(\frac{16\sqrt{1334}}{667}\right) + \frac{\pi}{2} = 1.06778957823626$$

1. (2 points) Factorisez l'expression $2x^3 + 4x^2 - 6x$

Solution:

M1 Identifie les facteurs communs et utilisation de somme-produit
A1 $2x^3 + 4x^2 - 6x = 2x\,(x-1)\,(x+3)$

2. (2 points) Dès lors, calculez la limite suivante:

$$\lim_{x \to -3} \frac{2x^3 + 4x^2 - 6x}{x+3}$$

Solution:

M1 Utilisation de leur factorisation et simplification de $x + 3$
A1 Obtient 24

3. (7 points) En employant la règle de l'Hôpital après avoir soigneusement justifié son emploi, calculez la limite

$$\lim_{x\to 0} \ln x \sin x$$

Indication: réécrivez le produit sous la forme $\frac{\ln x}{g(x)}$.

Solution:

M1 Réécriture comme un quotient

$$\lim_{x\to 0} \ln x \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/\sin x}$$

B1 On a un quotient de type $0/0$

M1 A1 Application de l'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \ln x \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cos x}$$

M1 Simplifications

$$\lim_{x\to 0} \ln x \sin x = -\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x}$$

M1 Reconnaissance de la limite classique $\frac{\sin x}{x}$ ou deuxième emploi de l'Hôpital

A1 0

Considérons la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{e^{x^2}}{(x-1)^2}, \quad x \neq 1$$

1. (4 points) Calculez sa dérivée f' et simplifiez jusqu'à obtenir une expression sous la forme

$$f'(x) = \frac{(Ax^2 + Bx + C)e^{x^2}}{(x-1)^3}$$

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Tentative de dérivée raisonnable.
> **M1** Factorise l'expression
> **A1** $f'(x) = \frac{2(x^2-x-1)e^{x^2}}{(x-1)^3}$

2. (3 points) En déduire les abscisses des **points critiques**.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Tentative de résolution de $f'(0) = 0$ menant à $x^2 - x - 1 = 0$.
> **A1** $\left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$

3. (4 points) Donnez les équations de la tangente et de la normale au point $x = 0$?

> **Solution:**
>
> **M1 A1** $f'(0) = 2$
> **A1** Obtient $y = 2x + 1$
> **A1** Obtient $y = 1 - \frac{x}{2}$

La somme des périmètres d'un cercle et d'un rectangle est de 100 mètres, et le rectangle a une longueur qui vaut deux fois sa largeur, qui elle, vaut x.

1. (4 points) Montrez que la somme des aires est donnée par

$$A(x) = 2x^2 + \frac{(3x-50)^2}{\pi}$$

Solution:

M1 A1 Utilisation de l'information sur le périmètre pour obtenir

$$r(x) = \frac{50-3x}{\pi}$$

M1 Substitution de cette expression dans l'équation de l'aire

A1 Preuve complète sans erreurs

2. (7 points) Donnez les dimensions (exactes pour le rectangle, arrondies à deux chiffres après la virgule pour le cercle) des deux formes qui maximisent l'aire. Donnez également l'aire maximale, arrondie à deux chiffres après la virgule.

Solution:

M1 A1 $A'(x) = 4x + \frac{18x-300}{\pi}$
M1 Tentative de résolution de $A'(x) = 0$.
A1 $x = \frac{150}{2\pi+9}$
A1ft $2x = \frac{300}{2\pi+9}$
A1 $r = \frac{50-\frac{450}{2\pi+9}}{\pi} = 6.54313861868985$. Accepter le diamètre.
A1 $A(x_{\text{min}}) = 327.156930934492$

3. (3 points) À l'aide du critère de la **dérivée seconde**, prouvez que votre point critique est bien un **maximum**.

Une étude de croissance ne vous donnera pas de points.

Solution:

M1 A1 $A''(x) = 4 + \frac{18}{\pi}$
B1 Conclusion appropriée

1. (2 points) Résolvez l'équation suivante dans $\mathbb{C}$:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$$

Solution:

M1 Méthode appropriée pour la résolution d'une équation du second degré
A1 $\{3-2i, 3+2i\}$

2. (2 points) Déduisez la forme générale de la solution à l'équation différentielle sous **forme réelle**.

$$y'' - 6y + 13y = 0$$

Solution:

M1 Utilisation de l'équation caractéristique ci-dessus
A1ft $y = e^{3t}(A\cos 2t + B\sin 2t)$

3. (6 points) Donnez l'équation de la solution particulière satisfaisant $y(0) = 2$ et $y'(0) = 4$

Solution:

M1 A1ft Calcul de la dérivéé de y
M1 A1 Évaluer y et y' en 0 pour obtenir le système
M1 A1 Résolution du système
A1ft Substitution dans leur équation générale

Cette page est intentionnellement laissée blanche.