Remplir en majuscule

Nom:	
Prénom:	
Matricule:	

Pont vers le supérieur: mathématiques (A)

GUERRIERI R., HILLEWAERE R., JOLY M., NGUYEN K.

Septembre 2024

Consignes

- Compléter l'encadré en haut de cette page en majuscule.
- La calculatrice est **interdite**.
- Les réponses sans justifications ne seront pas comptabilisées.
- Tous les angles sont donnés en **radians**.
- Vous pouvez détacher les feuilles de brouillon à la fin de l'examen.
- **Bien lire** les questions dans leur entiereté.

Bonne chance à tous.tes!

Question	Points	Score
Nombres complexes et trigonométrie	13	
Vecteurs	9	
Système	8	
Coniques	10	
Droites et dérivées	10	
Limites	15	
Optimisation	17	
Fonctions réciproques	18	
Total:	100	

a. (4 points) Écrivez $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{-i\frac{\pi}{6}}$ sous la forme $a+bi$. En utilisant le fait que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, montrez ensuite que

$$e^{i\frac{\pi}{12}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

et déduisez-en une expression similaire pour $e^{i\frac{7\pi}{12}}$.

Solution:

B2 $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right)$ et $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + -\frac{i}{2}\right)$
B1 Multiplie les deux valeurs obtenues et obtient exactement

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}i}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + -\frac{i}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} + i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

B1 On multiplie l'équation donnée par i pour obtenir $-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} + i\left(\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}\right)$

b. (9 points) Résolvez l'équation $z^3 = 32\sqrt{2}\cdot(1+i)$ en exprimant vos solutions sous la forme $z = a+bi$.

Utilisez vos réponses au point précédent pour simplifier pleinement vos réponses.

Solution:

M2 A1ft Calcul du membre de droite en coordonnées polaires: $z^3 = 64e^{\frac{i\pi}{4}}$
M1 Une méthode correcte pour avoir toutes les réponses, e.g. $z = 4e^{\frac{i\pi(8k+1)}{12}}$
A1 $4e^{\frac{i\pi}{12}}$, $4e^{\frac{3i\pi}{4}}$, $4e^{-\frac{7i\pi}{12}}$, peut-être sous-entendu.
M1 Utilisation d'au moins une réponse du point précédent pour simplifier.
A3 $\sqrt{2}+\sqrt{6}+i\left(-\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$, $-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$, $-\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(-\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$

Soient les points

$$A(1,-2,-2), \quad B(7,0,-3), \quad C(4,4,0), \quad O(0,0,0)$$

a. (4 points) Trouvez un vecteur perpendiculaire au plan contenant A, B et C.

Solution:

M1 Identifie deux vecteurs pour lesquels le produit vectoriel est pertinent

M1 A2 Produit vectoriel tel que $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} 10 \\ -15 \\ 30 \end{bmatrix}$

b. (3 points) Que vaut l'aire du triangle ABC?

Solution:

M1 A1 Calcule la norme du vecteur obtenu au point précédent: 35

A1ft Aire du triangle: $\frac{35}{2}$

c. (2 points) Calculez le volume du parallélépipède engendrés par les arrêtes AB, AC et AO.

Solution:

M1 A1 Produit scalaire de leur réponse au a, avec le vecteur $\vec{O}A$

$$(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AO} = 20$$

(8 points) Résolvez le système suivant

$$\begin{cases} x + y - z & = -3 \\ -2x - y + z & = 4 \\ 3x + 2y - z & = -6 \end{cases}$$

en appliquant la méthode du pivot de Gauss jusqu'à ce que la matrice principale soit échelonnée.

Vous devez indiquer clairement quelles opérations élémentaires vous appliquez. Les solutions employant une autre méthode ne seront pas acceptées.

Solution:

B1 Présence d'une matrice dont la partie principale est équivalente à $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ (point gratuit).

M2 Opérations élémentaires correctes pour créer deux zéros (e.g. en première colonne).

M1 Opération élémentaire correcte pour créer un autre zéro **qui ne détruit pas les autres**. L'étudiant obtient 0 à l'exercice (faute grave) s'il obtient M0 ici, cela a été annoncé au cours.

A1 Vérifiez que la dernière ligne de leur système est équivalente à $z = 1$

M1 Backward substitution

A2 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Question 4: Coniques . . . . *10 points*

Considérons l'ellipse dont l'équation est

$$16x^2 - 32x + 25y^2 + 100y - 284 = 0$$

a. (6 points) Trouvez les coordonnées de son centre et la longueur des axes.

Solution:

M1 A1 Compléter le carré pour obtenir $16\left(x-1\right)^2 + 25\left(y+2\right)^2 - 400 = 0$ ou équivalent
M1 A1 Ramener à la forme réduite $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$
A1ft Déduit de la forme réduite le centre $(1, -2)$
A1ft Axe principal: 10, axe secondaire: 8.

b. (4 points) Quelles sont les coordonnées du foyer?

Solution:

M1 A1 Calcul de $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$
A2ft $(-2, -2)$, $(4, -2)$

Soit la courbe C dont l'équation est

$$y = x^3 - 2x^2 - x + 9, \quad x > 0.$$

a. (5 points) Calculez l'équation de d, la tangente au point $x = 2$.

Solution:

M1 A1 La dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$
M1 A1ft Évaluez f' en $x = 2$: $f'(2) = 3$
A1 $y = 3x + 1$

b. (5 points) Trouvez l'abscisse du point de la courbe C où la tangente est perpendiculaire à d.

Solution:

B1ft $m = -\frac{1}{3}$
M1 A1 Équation correcte

$$3x^2 - 4x - 1 = -\frac{1}{3}$$

M1 A1 Résolution de l'équation pour obtenir $x = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{6}}{3}$

a. (5 points) Factorisez $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ et $-2x^2 + 5x - 2$.

Solution:

Factorisation du polynôme de degré 3

B1 trouve 1 ou 2 comme racine (peut être sous-entendu)
M2 A1 factorise complètement $(x-2)^2(x-1)$.

Factorisation du polynôme de degré 2

M1 A1 $-(x-2)(2x-1)$

b. (4 points) Dès lors, calculez la limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{(-2x^2 + 5x - 2)\sin(x-2)}$$

Solution:

M1 Emploi de leur factorisation au numérateur ou au dénominateur
M1 Reconnaissance de la limite classique $\frac{\sin x}{x}$.
A2 Tombent sur

$$-\frac{x-1}{2x-1} = -\frac{1}{3}$$

c. (6 points) En utilisant la règle de l'Hospital, calculez

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{e^{\sin(x)} - \cos(3x) - e}{\tan(2x)}$$

Veuillez préalablement vérifier que vous êtes bien dans les conditions d'application de la règle de l'Hospital.

Solution:

B1 On vérifie que l'on a bien $0/0$
M1 A2 Dérivée du numérateur et dérivée du dénominateur pour obtenir

$$\frac{e^{\sin(x)}\cos(x) + 3\sin(3x)}{2\tan^2(2x) + 2}$$

M1 A1 Remplace x par $\frac{\pi}{2}$ pour obtenir

$$\frac{-3}{2}$$

Le volume d'une canette de forme cylindrique de rayon r cm est de 128π cm^3.

a. (6 points) Montrez que la surface totale de la cannette en cm^2 est donnée par

$$S = 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$$

> **Solution:**
>
> **B2** $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ écrit explicitement ou sous-entendu.
> **M1 A1** Écriture de h en fonction de r à l'aide de l'équation sur le volume: $h = \frac{128}{r^2}$
> **M1 A1** Substitution de h dans S pour obtenir $2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}$. A1 accordé uniquement si toute la preuve est correcte.

b. (8 points) Quelles sont les dimensions de la canette si l'on souhaite minimiser la quantité de métal employée? Justifiez votre réponse par les propriétés des dérivées. Donnez également la surface de cette canette.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** $S'(r) = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2}$
> **M1 A1** $S'(r) = 0$ donc $r = 4$
> **M1 A1** $h = 8$
> **M1 A1** $S = 96\pi$

c. (3 points) À l'aide du critère de la dérivée seconde, montrez que la valeur obtenue est bien un minimum.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** $S''(r) = 4\pi\left(1 + \frac{128}{r^3}\right)$
> **B1** Conclusion correcte à partir du signe de la dérivée seconde.

Soit la fonction $f(x) = \cos^{-1}(e^x)$.

a. (3 points) Déterminez le domaine de f.

> **Solution:**
>
> **B1** La condition d'existence est correcte: $-1 \leq e^x \leq 1$
> **B1** Conclut que $e^x > -1$ est toujours vrai (peut être sous-entendu)
> **B1** Conclut que $x \leq 0$

b. (3 points) Donnez les asymptotes éventuelles de f.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Tentative raisonnable de calcul de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$
> **A1ft** Équation de l'asymptote $y = \frac{\pi}{2}$.

c. (4 points) Calculez la dérivée f' et son domaine.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Méthode raisonnable de dérivation pour arriver à $-\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.
> **B1** Condition d'existence correcte: $1 - e^{2x} > 0$
> **B1** Conclut que $x < 0$.

d. (3 points) Donnez l'équation de la tangente en $x = 0$.

Indication: une fonction peut tout de même avoir une tangente si la dérivée n'existe pas.

> **Solution:**
>
> **M1 A1** Calcul de la limite $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$
> **B1** $x = 0$

e. (5 points) Donnez l'approximation linéaire de f en $x = -\ln 2$.

Veuillez simplifier autant que possible.

> **Solution:**
>
> **M2 A1** $f'(-\ln 2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ou équivalent. Le second point de méthode est octroyé
> **B1** $f(\ln 2) = \frac{\pi}{3}$
> **A1** $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x + \ln 2) + \frac{\pi}{3}$ ou équivalent.