Clase 1: Mercado de Renta Fija - Tasas de Interés y Estructura Temporal

---

1. Tipos de Tasas de Interés

Objetivo: Diferenciar entre tasas de interés simple, compuesta y continua

---

a) Fórmulas Básicas

Tasa Simple:

$$VF = VP \times (1 + r \times t)$$

Donde:

- VF = Valor Futuro
- VP = Valor Presente
- r = Tasa de interés
- t = Tiempo

Tasa Compuesta:

$$VF = VP \times (1 + r)^t$$

Tasa Continua:

$$VF = VP \times e^{r \times t}$$

Tasa Continua:

$$VF = VP \times e^{r \times t}$$

Capitalización Continua

La capitalización continua constituye el límite matemático del interés compuesto cuando el número de períodos de capitalización tiende a infinito ($n \to \infty$). Este concepto se fundamenta en el límite de Euler:

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Aplicando este límite a la fórmula del interés compuesto, obtenemos:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = P\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{r}{n}\right)^{n}\right]^{t} = P(e^r)^t = Pe^{rt}$$

Por tanto, la fórmula para la capitalización continua es:

$$A = P\,e^{rt}$$

donde:

- P es el capital inicial.
- r es la tasa de interés expresada en términos continuos.
- t es el tiempo en años.
- e es la base de los logaritmos naturales (aproximadamente 2.71828).

La capitalización continua es especialmente relevante en modelos financieros avanzados, valoración de derivados y en el cálculo de tasas forward implícitas en la estructura temporal de tipos de interés.

A continuación, se muestra un ejemplo en Python que utiliza un método numérico iterativo para calcular el límite de la capitalización continua.

In [23]:
```python
import math

def continuous_compounding(P, r, t, tol=1e-10, max_iter=1000):
    """
    Calcula numéricamente el límite de la capitalización compuesta cuando n -> ∞.
    Se utiliza un método iterativo duplicando n hasta que la diferencia entre itera
    sea menor que la tolerancia 'tol'.

    Parámetros:
        P (float): Capital inicial.
        r (float): Tasa de interés en términos continuos.
        t (float): Tiempo en años.
        tol (float): Tolerancia para la convergencia.
        max_iter (int): Número máximo de iteraciones.

    Retorna:
        (float, int): Valor calculado y el número de subdivisiones (n) utilizado.
    """
    n = 1
    A_prev = P * (1 + r/n)**(n*t)

    for i in range(max_iter):
        n *= 2
        A_curr = P * (1 + r/n)**(n*t)
        if abs(A_curr - A_prev) < tol:
            return A_curr, n
        A_prev = A_curr

    # En caso de no converger dentro de max_iter
    return A_curr, n

# Ejemplo de uso:
```

```python
P = 1         # Capital inicial
r = 1         # Tasa de interés del 5%
t = 1            # Tiempo de 5 años

valor_limite, n_usado = continuous_compounding(P, r, t)
valor_continuo = P * math.exp(r * t)

print(f"Valor calculado numéricamente: A = {valor_limite:.6f} (n = {n_usado})")
print(f"Valor por capitalización continua: A = {valor_continuo:.6f}")
```

```
Valor calculado numéricamente: A = 2.718282 (n = 17179869184)
Valor por capitalización continua: A = 2.718282
```

In [7]:

```python
import numpy as np

vp = 1000  # Valor presente
t = 2      # Período en años
r = 0.05   # Tasa anual

# Cálculos
simple = vp * (1 + r * t)
compuesto = vp * (1 + r)**t
continuo = vp * np.exp(r * t)

print(f"Tasa Simple: ${simple:.2f}")
print(f"Tasa Compuesta: ${compuesto:.2f}")
print(f"Tasa Continua: ${continuo:.2f}")
```

```
Tasa Simple: $1100.00
Tasa Compuesta: $1102.50
Tasa Continua: $1105.17
```

In [ ]:

```python
vp = 1000  # Valor presente
t = 2      # Período en años
r = 0.05   # Tasa anual

# Cálculos
simple = vp * (1 + r * t)
compuesto = vp * (1 + r)**t
continuo = vp * np.exp(r * t)

print(f"Tasa Simple: ${simple:.2f}")
print(f"Tasa Compuesta: ${compuesto:.2f}")
print(f"Tasa Continua: ${continuo:.2f}")
```

```
Tasa Simple: $1100.00
Tasa Compuesta: $1102.50
Tasa Continua: $1105.17
```

---

2. Tasas Spot vs Forward

Definiciones:

Tasa Spot: Tasa para inversión que comienza hoy hasta plazo t. Ejemplo la tasa de hoy para un plazo de 1 año. (t_1)

Tasa Forward: Tasa pactada hoy para un período futuro t_1, para un plazo de t_2. Ejemplo $[t_1 = 1, t_2 = 1]$ Significa que se pacta hoy la tasa con plazo de 1 año (t_2), para 1 año más en el futuro (t_1).

Calculo de Tasas Forward

Para interpretar las tasas spot como tasas forward que inician en 0, se considera que la tasa spot para un período de n años, denotada como $r_{0,n}$, es equivalente a la tasa forward para el período [0, n]. Es decir:

$$f_{0,n} = r_{0,n}$$

La relación general entre tasas spot y tasas forward se expresa de la siguiente manera:

$$(1 + r_{0,n})^n = (1 + r_{0,m})^m \times (1 + f_{m,n})^{n-m}$$

donde:

- $r_{0,n}$: Tasa spot para el período desde 0 hasta n años.
- $r_{0,m}$: Tasa spot para el período desde 0 hasta m años, con $m < n$.
- $f_{m,n}$: Tasa forward para el período comprendido entre m y n años.

Si se toma $m = 0$, la ecuación se transforma en:

$$(1 + r_{0,n})^n = (1 + r_{0,0})^0 \times (1 + f_{0,n})^n$$

Dado que $(1 + r_{0,0})^0 = 1$, se tiene:

$$(1 + r_{0,n})^n = (1 + f_{0,n})^n$$

Por lo tanto:

$$f_{0,n} = r_{0,n}$$

Demostración: A continuación, se presenta la demostración paso a paso para despejar la tasa forward $f_{m,n}$ a partir de la ecuación:

$$(1 + r_{0,n})^n = (1 + r_{0,m})^m \times (1 + f_{m,n})^{n-m}$$

Paso 1: Dividir entre $(1 + r_{0,m})^m$

Dividimos ambos lados de la ecuación por $(1 + r_{0,m})^m$ para aislar el término que contiene $f_{m,n}$:

$$\frac{(1 + r_{0,n})^n}{(1 + r_{0,m})^m} = (1 + f_{m,n})^{n-m}$$

Paso 2: Aplicar la raíz $(n-m)$-ésima

Para despejar $1 + f_{m,n}$, aplicamos la raíz $(n-m)$-ésima en ambos lados de la ecuación:

$$\left(\frac{(1 + r_{0,n})^n}{(1 + r_{0,m})^m}\right)^{\frac{1}{n-m}} = 1 + f_{m,n}$$

Paso 3: Despejar $f_{m,n}$

Finalmente, restamos 1 en ambos lados para obtener la expresión de la tasa forward $f_{m,n}$:

$$f_{m,n} = \left(\frac{(1 + r_{0,n})^n}{(1 + r_{0,m})^m}\right)^{\frac{1}{n-m}} - 1$$

In [12]:
```
# %% CELDA DE CÓDIGO 2
def calcular_forward(s1, s2, t1, t2):
    return (( (1 + s2)**t2 / (1 + s1)**t1 ) ** (1/(t2 - t1)) ) - 1

# Tasas spot observadas
spot_1a = 0.10   # 10% a 1 año
spot_2a = 0.12   # 12% a 2 años

forward_1v1 = calcular_forward(spot_1a, spot_2a, 1, 2)
print(f"Forward 1a_1a: {forward_1v1:.2%}")
```

```
Forward 1a_1a: 14.04%
```

Resultados:

Notación Forward	s_1 (t₁)	s_2 (t₂)	t_1	t_2	Cálculo	Resultado
f_{1a_1a}	10% (1a)	12% (2a)	1	2	$\frac{(1.12)^2}{(1.10)^1} - 1$	14.04%

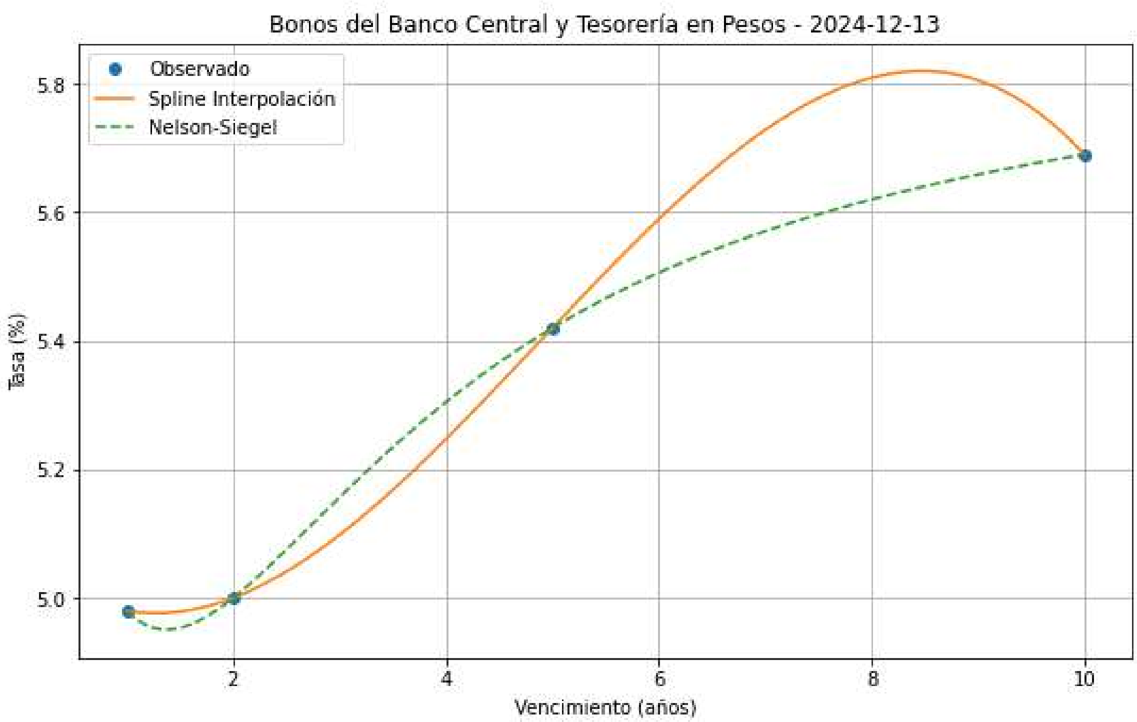
In [24]:
```
import pandas as pd
import sys
import os
sys.path.append(os.path.abspath("../.."))

from web_scraping import scraping_tasas as ws
```

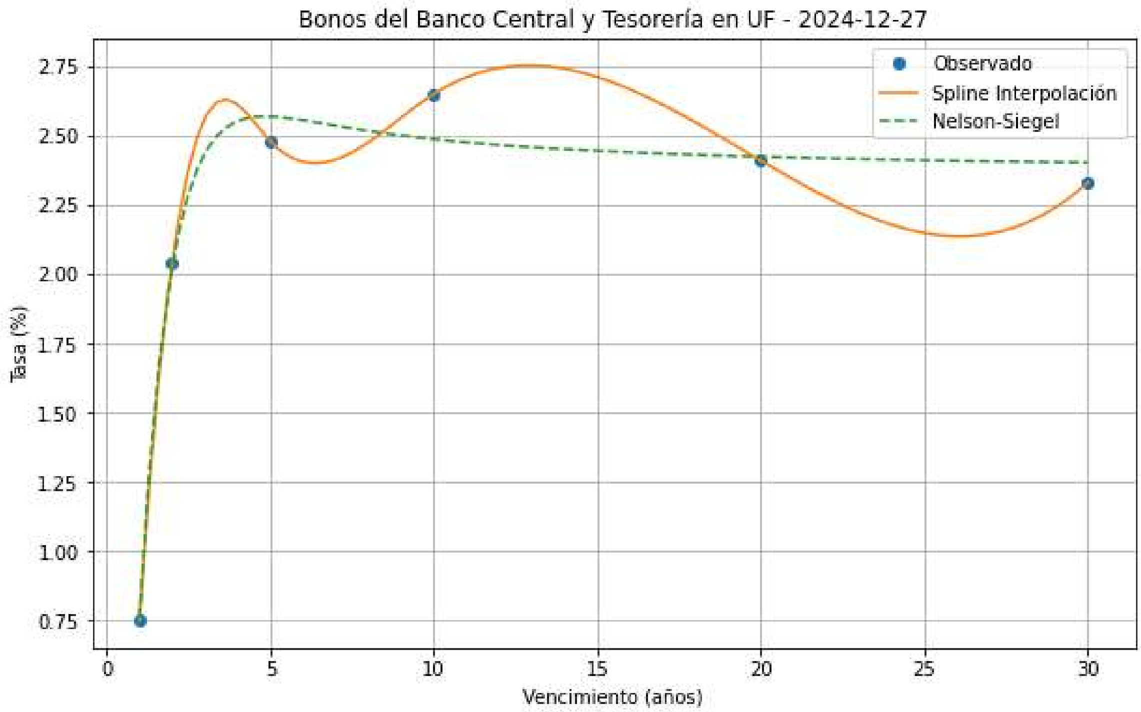
In [25]:
```
swap = False
URL_PESOS, URL_UF = ws.obtener_urls(swap=swap)
# Ejemplo de consulta para varios años
years = [2024, 2025]  # por ejemplo

# Descarga y concatenación de datos
df_pesos_raw = ws.fetch_multiple_years(URL_PESOS, years)
df_uf_raw = ws.fetch_multiple_years(URL_UF, years)
```

```
# Unir ambos DataFrames
df_total = pd.concat([df_pesos_raw, df_uf_raw], ignore_index=True)

# Aplicar renombrado y extraer vencimientos
df_total, tenor_dict = ws.apply_renaming(df_total, swap=swap)

# Generar pivot
pivot_df = ws.pivot_data(df_total)

# Separar instrumentos en pesos y UF (según prefijo)
df_pesos, df_uf = ws.separate_instruments(pivot_df, swap=swap)
```

In [26]:
```
date = pd.Timestamp("2024-12-13 00:00:00")
data = df_pesos.loc[date].dropna()
data
```

Out[26]:
```
Serie
BCP_BTP1     4.98
BCP_BTP2     5.00
BCP_BTP5     5.42
BCP_BTP10    5.69
Name: 2024-12-13 00:00:00, dtype: float64
```




Bonos del Banco Central y Tesorería en UF - 2024-12-27
Observado
Spline Interpolación
Nelson-Siegel
Tasa (%)
Vencimiento (años)
2.75
2.50
2.25
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0
5
10
15
20
25
30