

ÍNDICE

1	Matrices	2
1.1	Operaciones de matrices	3
1.1.1	Multiplicación de matrices	4
1.2	Tipos de matrices	6
2	Soluciones de sistemas de ecuaciones lineales	7
2.1	Resolución de sistemas lineales	10
2.2	Sistemas homogéneos	11
3	Inversa de una matriz	11
4	Aplicaciones de sistemas de ecuaciones	12
4.1	Factorización LU	13
4.2	Mínimos cuadrados	14
5	Determinantes	15
5.1	Propiedades de los determinantes	16
5.2	Cofactores	18
5.3	Más sobre la inversa de una matriz	18
6	El espacio \mathbb{R}^n	19
6.1	Geometría de \mathbb{R}^n	22
7	Espacios vectoriales	24
7.1	Subespacios	26
7.2	Conjunto generador	27
7.3	Independencia lineal	27
7.4	Bases	28
7.5	Dimensión	29
7.6	Componentes y Cambio de base	30
8	Espacios con producto interno	31
8.1	Productos internos usuales	32
8.2	Bases ortogonales	34
8.3	Complemento ortogonal	35
9	Aplicaciones lineales	36
9.1	Ejemplos de transformaciones lineales	37
9.2	Núcleo e imagen	37
9.3	Propiedades de aplicaciones lineales	38
9.4	Isomorfismos	39

9.5 Matriz asociada	40
10 Valores y vectores propios	41
10.1 Valores y vectores propios de aplicaciones lineales	42
10.2 Diagonalización de Matrices	42

1. MATRICES

En este curso, tomaremos:

- $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > 0$ y $m > 0$;
- $I = \{1, 2, \dots, m\}$ y $J = \{1, 2, \dots, n\}$; y
- \mathbb{K} un cuerpo o campo (es decir, cualquier conjunto que cumpla con los axiomas de cuerpo), puede ser \mathbb{Q} , \mathbb{R} o \mathbb{C} .

DEFINICIÓN 1: Matriz.


Una matriz sobre un cuerpo \mathbb{K} es una función


$$\begin{aligned} A: I \times J &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (i, j) &\longmapsto A(i, j) = a_{ij}, \end{aligned}$$

la cual se representa por

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Con esto, se dice que A es de orden $m \times n$ y que tiene m filas y n columnas. Al conjunto de todas las matrices de orden $m \times n$ sobre el campo \mathbb{K} se denota por $\mathbb{K}^{m \times n}$.

 Dada una matriz A , esta se la representa también por $A = (a_{ij})$.

 Otras notaciones usuales para el conjunto de la matrices, que se puede encontrar en la literatura, son $\mathcal{M}_{m \times n}$, $M_{m \times n}$, \mathcal{M}_{mn} o M_{mn} .

DEFINICIÓN 2: Filas y columnas.

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $i \in I$ y $j \in J$. A la matriz

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

se la llama la j -ésima columna de A y a la matriz

$$(a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in})$$

se la llama la i -ésima fila de A .

PROPOSICIÓN 1: Igualdad de matrices. Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{p \times q}$. Se dice que las A y B son iguales, y se representa por $A = B$, si:

- $m = p$ y $n = q$; y
- $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $i \in I$ y $j \in J$.

DEFINICIÓN 3: Vectores.

El conjunto \mathbb{K}^n es:

$$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K} \times \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}}_{n \text{ veces}}$$

es decir,

$$\mathbb{K}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in J\}.$$

⚠ Por notación, si $\alpha \in \mathbb{K}^n$, se asumirá $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$.

Podemos identificar cada elemento de \mathbb{K}^n con una matriz de $\mathbb{K}^{n \times 1}$ de la siguiente manera: si

$$\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n,$$

entonces, visto como matriz es

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times 1}.$$

1.1 Operaciones de matrices

DEFINICIÓN 4: Suma de matrices.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. La suma de las matrices A y B es la matriz $C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por $A + B$.

⚠ Con esto, tenemos que $(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.

DEFINICIÓN 5: Multiplicación por un escalar.

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. El producto del escalar α por la matriz A es la matriz $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ tal que:

$$b_{ij} = \alpha a_{ij}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por αA .

⚠ Con esto, tenemos que $\alpha(a_{ij}) = (\alpha a_{ij})$.

DEFINICIÓN 6: Transpuesta de una matriz.

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. La matriz transpuesta de A es la matriz $B \in \mathbb{K}^{n \times m}$ tal que:

$$(b_{ij}) = (a_{ji})$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por A^T .



Con esto, tenemos que si $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, entonces $A^T \in \mathbb{K}^{n \times m}$ y $(a_{ij})^T = (a_{ji})$.

TEOREMA 2.

Sean $A, B, C \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Se tiene que

- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.
- Existe una única matriz O de orden $m \times n$ tal que

$$A + O = A$$

para cualquier matriz A de orden $m \times n$. La matriz O se denomina neutro aditivo de orden $m \times n$, también llamada la matriz nula.

- Para cada matriz A de orden $m \times n$, existe una única matriz, denotada por $-A$, de orden $m \times n$ tal que:

$$A + (-A) = O.$$

A la matriz $-A$ se la denomina el inverso aditivo A .

TEOREMA 3.

Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Se tiene que

- $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; y
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

1.1.1 Multiplicación de matrices

En esta sección consideramos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p > 0$ y $q > 0$.

DEFINICIÓN 7: Multiplicación de matrices.

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$, el producto de las matrices A y B es la matriz $C \in \mathbb{K}^{m \times p}$ tal que

$$\begin{aligned} c_{ij} &= a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} \\ &= \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \end{aligned}$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$. A esta matriz se la denota por AB .

TEOREMA 4.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, $C, D \in \mathbb{K}^{n \times p}$, $E \in \mathbb{K}^{p \times q}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se tiene que

- $A(DE) = (AD)E$;
- $A(C + D) = AC + AD$;
- $(A + B)C = AC + BC$;
- $A(\alpha C) = \alpha(AC) = (\alpha A)C$.

⚠ En general, $AB \neq BA$.

DEFINICIÓN 8: Matriz cuadrada.

Si A es un elemento de $\mathbb{K}^{n \times n}$, se dice que A es una matriz cuadrada de orden n .

DEFINICIÓN 9: Matriz identidad de orden n .

Se define la matriz identidad de orden n al elemento A de $\mathbb{K}^{n \times n}$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in I$. A esta matriz se la denota por I_n .

PROPOSICIÓN 5. Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ se tiene que

$$I_m A = A I_n = A.$$

DEFINICIÓN 10.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $r \in \mathbb{N}$. Se define A^r a la potencia r por

- $A^0 = I_n$; y
- $A^{r+1} = A^r A$.

TEOREMA 6.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $r, s \in \mathbb{N}$. Se tiene que

- $A^r A^s = A^{r+s}$; y
- $(A^r)^s = A^{rs}$.

⚠ Note que en general $(AB)^r \neq A^r B^r$.

TEOREMA 7.

Sean $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $C \in \mathbb{K}^{n \times p}$. Se tiene que

- $(A^T)^T = A$;

- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(AC)^T = C^T A^T$;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.

1.2 Tipos de matrices

DEFINICIÓN 11: Matriz diagonal.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es una matriz diagonal si verifica que:

$$a_{ij} = 0$$

para todo $i \in I$ y $j \in J$ con $i \neq j$.

DEFINICIÓN 12: Matriz escalar.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es una matriz escalar si es una matriz diagonal que verifica:

$$a_{ii} = \alpha$$

para todo $i \in I$, con $\alpha \in \mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 13: Matriz simétrica.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es simétrica si $A^T = A$.

DEFINICIÓN 14: Matriz antisimétrica.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es antisimétrica si $A^T = -A$.

DEFINICIÓN 15: Matriz triangular.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es

- una matriz triangular superior si $a_{ij} = 0$ para todo $i > j$ con $i, j \in J$; y
- una matriz triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para todo $i < j$ con $i, j \in J$.

DEFINICIÓN 16: Matriz nilpotente.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $r \in \mathbb{N}$. Se dice que A es nilpotente de orden r si r es el menor entero positivo tal que

$$A^r = 0.$$

DEFINICIÓN 17: Matriz idempotente.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es una matriz idempotente si $A^2 = A$.

2. SOLUCIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

DEFINICIÓN 18: Matriz aumentada.

Dado un sistema de ecuaciones lineales de m ecuaciones lineales en las cuales figuran n incógnitas:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$ y $b_i \in \mathbb{R}$ con $i \in I$ y $j \in J$. A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se la llama matriz de coeficientes del sistema y a

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad y \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

se las llama columnas de constantes y de incógnitas, respectivamente.

Bajo estas definiciones, dado un sistema de ecuaciones lineales, se dice que



$$Ax = b$$

es la representación matricial del sistema de ecuaciones.

DEFINICIÓN 19: Matriz ampliada.

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m \times p}$, se define la matriz ampliada de A y B al elemento de $\mathbb{K}^{m \times (n+p)}$ dado por:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mp} \end{array} \right)$$

y se la denota por $(A|B)$.

DEFINICIÓN 20.

Dado el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial

$$Ax = b$$

con $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, se dice que

$$(A|b)$$

es la matriz ampliada asociada al sistema.

DEFINICIÓN 21: Matriz escalonada reducida por filas.

Se dice que una matriz está en forma escalonada reducida por filas cuando satisface las siguientes propiedades:

- I. Todas las filas que constan de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.
- II. La primera entrada distinta de cero de la fila, al leer de izquierda a derecha, es un 1. Esta entrada se denomina entrada principal o uno principal de su fila.
- III. Para cada fila que no consta sólo de ceros, el uno principal aparece a la derecha y abajo de cualquier uno principal en las filas que le preceden.
- IV. Si una columna contiene un uno principal, el resto de las entradas de dicha columna son iguales a cero.

Se dice que una matriz está en forma escalonada por filas si satisface las primeras tres propiedades.

DEFINICIÓN 22: Operaciones elementales de fila.

Dada una matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, una operación elemental por filas sobre A es una de las siguientes:

- **Intercambio de filas:** dados $i \in I$ y $j \in J$, intercambiar la fila i por la fila j , denotado por

$$F_i \leftrightarrow F_j,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

por la fila

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

y viceversa.

- **Multiplicar una fila por un escalar:** dados $i \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, con $\alpha \neq 0$, multiplicar la fila i por α , denotado por

$$\alpha F_i \rightarrow F_i,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$$

por

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \end{pmatrix}.$$

- **Sumar un múltiplo de una fila con otra:** dados $i, j \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, multiplicar la fila i por α y sumarlo a la fila j , denotado por

$$\alpha F_i + F_j \rightarrow F_j,$$

es reemplazar la fila

$$\begin{pmatrix} a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \end{pmatrix}$$

por

$$\begin{pmatrix} \alpha a_{i1} + a_{j1} & \alpha a_{i2} + a_{j2} & \dots & \alpha a_{in} + a_{jn} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 23: Matriz elemental.

Dada una operación elemental por fila, se llama matriz elemental correspondiente a la operación al resultado de aplicar dicha operación a la matriz identidad.

TEOREMA 8.

Sean $E \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz elemental y $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$, el resultado aplicar la operación por filas correspondiente a E a la matriz A es EA .

DEFINICIÓN 24: Equivalente por filas.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$, se dice que la matriz A es equivalente por filas a una matriz B , denotado por $A \sim B$, si B se puede obtener al aplicar a la matriz A una sucesión de operaciones elementales por fila.

TEOREMA 9.

Toda matriz $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida por filas.



El proceso para obtener una matriz escalonada reducida por filas a partir de una matriz cualquiera se conoce como eliminación de Gauss-Jordan.

DEFINICIÓN 25.

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ la única matriz escalonada reducida por filas equivalente a A . El rango de A , denotado por $\text{rang}(A)$, es el número de filas no nulas que tiene la matriz B .

PROPOSICIÓN 10. Sean $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Se tiene que si $A \sim B$, entonces

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(B).$$

PROPOSICIÓN 11. Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Se tiene que si A es una matriz escalonada, entonces $\text{rang}(A)$ es el número de filas no nulas que tiene A .

2.1 Resolución de sistemas lineales

TEOREMA 12.

Sean $A, C \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b, d \in \mathbb{K}^m$, se tiene que los sistemas de ecuaciones lineales

$$Ax = b \quad \text{y} \quad Cx = d$$

tienen las mismas soluciones si y solo si

$$(A|b) \sim (C|d),$$

es decir, si las matrices aumentadas de los sistemas son equivalentes por filas.

DEFINICIÓN 26.

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se dice que

- el sistema es **inconsistente** si no tiene solución;
- el sistema es **consistente** si tiene solución.

TEOREMA 13.

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se tiene una y solo una de las siguientes

- el sistema es inconsistente;
- el sistema es consistente y tiene una única solución; o
- el sistema es consistente y tiene infinitas soluciones.

TEOREMA 14: Teorema de Rouché–Frobenius.

Sean $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ y $b \in \mathbb{K}^m$, dado el sistema de ecuaciones lineales

$$Ax = b,$$

se tiene que

- el sistema es consistente si y solo si $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|b)$;
- en caso de que el sistema sea consistente, la solución es única si y solo si

$$\text{rang}(A) = n.$$

2.2 Sistemas homogéneos

DEFINICIÓN 27: Sistema homogéneo.

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ al sistema

$$Ax = 0$$

se lo denomina sistema de ecuaciones lineales homogéneo.

DEFINICIÓN 28.

Sea $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$, dado el sistema homogéneo

$$Ax = 0,$$

entonces

- a $x = 0$ se la llama la solución trivial del sistema;
- a $x \neq 0$ tal que $Ax = 0$ se la llama una solución no trivial.

TEOREMA 15.

Un sistema homogéneo de m ecuaciones con n incógnitas siempre tiene una solución no trivial si $m < n$, es decir, si el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones.

3. INVERSA DE UNA MATRIZ

DEFINICIÓN 29.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ es no singular o invertible si existe una matriz $B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que

$$AB = BA = I_n.$$

A la matriz B se la denomina inversa de A y se la denota por A^{-1} . Si no existe tal matriz, entonces se dice que A es singular o no invertible.

TEOREMA 16.

Si una matriz tiene inversa, la inversa es única.

TEOREMA 17.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

- Si A es una matriz no singular, entonces A^{-1} es no singular y

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

- Si A y B son matrices no singulares, entonces AB es no singular y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

- Si A es una matriz no singular, entonces

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

TEOREMA 18.

Sean $p \in \mathbb{N}^*$ y $A_1, A_2, \dots, A_p \in \mathbb{K}^{n \times n}$ matrices no singulares. Se tiene que $A_1 A_2 \cdots A_p$ es no singular y

$$(A_1 A_2 \cdots A_p)^{-1} = A_p^{-1} A_{p-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}.$$

TEOREMA 19.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se tiene que si $AB = I_n$, entonces $BA = I_n$.

TEOREMA 20.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se tiene que A es no singular si y solo si es equivalente por filas a I_n . Es más

$$(A|I_n) \sim (I_n|A^{-1}).$$

TEOREMA 21.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, el sistema homogéneo

$$Ax = 0$$

tiene una solución no trivial si y solo si A es singular.

TEOREMA 22.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se tiene que A es no singular si y solo si el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{K}^n$.

TEOREMA 23.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se tienen que las siguientes son equivalentes:

- I. A es no singular;
- II. el sistema $Ax = 0$ solamente tiene la solución trivial;
- III. A es equivalente por filas a I_n ;
- IV. $\text{rang}(A) = n$; y
- V. el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{K}^n$.

4. APLICACIONES DE SISTEMAS DE ECUACIONES

4.1 Factorización LU

Sea matriz $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz triangular superior y cuyas entradas en la diagonal sean distintas de 0, dado $b \in \mathbb{K}^n$, el sistema

$$Ux = b,$$

cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} & b_1 \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} & b_n \end{array} \right),$$

se puede resolver por *sustitución regresiva*, obteniendo que la solución del sistema es

$$x_n = \frac{b_n}{u_{nn}} \quad y \quad x_k = \frac{b_k - \sum_{j=k+1}^n u_{kj}x_j}{u_{kk}},$$

para $k = n-1, \dots, 1$.

De manera análoga, Sea matriz $L \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz triangular inferior y cuyas entradas en la diagonal sean distintas de 0, dado $b \in \mathbb{K}^n$, el sistema

$$Lx = b,$$

cuya matriz ampliada es

$$\left(\begin{array}{cccc|c} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 & b_2 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} & b_n \end{array} \right),$$

se puede resolver por *sustitución progresiva*, obteniendo que la solución del sistema es

$$x_1 = \frac{b_1}{l_{11}} \quad y \quad x_k = \frac{b_k - \sum_{j=1}^{k-1} u_{kj}x_j}{u_{kk}},$$

para $k = 2, \dots, n$.

Finalmente, si $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se puede escribir como el producto de una matriz triangular inferior L , un una matriz triangular superior U , es decir,

$$A = LU,$$

entonces se dice que A tiene una factorización LU, y dado $b \in \mathbb{K}^n$, se tiene que el sistema

$$Ax = b$$

equivale al sistema

$$L(Ux) = b,$$

con esto, podríamos resolver el sistema inicial, resolviendo los sistemas

$$Ly = b \quad \text{y} \quad Ux = y.$$

TEOREMA 24: Factorización LU.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz tal que sea equivalente por filas a una matriz $U \in \mathbb{K}^{n \times n}$ triangular superior, entonces se tiene que

$$U = E_m \cdots E_2 E_1 A,$$

donde E_k , para $k = 1, \dots, m$, son las matrices elementales correspondientes a las operaciones por filas. Si no se ha utilizado intercambio de filas y únicamente se han eliminado los elementos bajo la diagonal, entonces

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_m^{-1}$$

es una matriz triangular inferior y se tiene que $A = LU$.

4.2 Mínimos cuadrados

DEFINICIÓN 30: Problema de la recta de mínimos cuadrados.

En \mathbb{R}^2 , dados n puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, se plantea encontrar la ecuación de la recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias verticales de los puntos a la recta, es decir, se busca la pendiente m y el intercepto b de una recta que minimice la función definida por

$$L(b, m) = \sum_{k=1}^n (y_k - mx_k - b)^2.$$

A la recta de pendiente m e intercepto b que minimizan la función anterior se la llama recta de mínimos cuadrados.

TEOREMA 25.

Dados los puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, definimos

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad u = \begin{pmatrix} b \\ m \end{pmatrix}.$$

Se tiene que el problema de la recta de mínimos cuadrados es equivalente a resolver

el sistema

$$A^T A u = A^T y.$$

TEOREMA 26.

Sea $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que $\text{rang}(A) = n$, entonces, $A^T A$ es no singular.

5. DETERMINANTES

En esta sección tomaremos $n \in \mathbb{N}$, con $n > 0$, e $I = \{1, 2, \dots, n\}$.

DEFINICIÓN 31: Menor.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ e $i, j \in I$. A la matriz de $\mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ que se obtiene eliminar la fila i y la columna j de A se la llama el menor ij de A , denotado por A_{ij} .



En la literatura se puede encontrar la notación de M_{ij} para el menor de ij de A .

DEFINICIÓN 32: Menor principal.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $k \in I$. A la matriz de $\mathbb{K}^{k \times k}$ que se obtiene eliminar las $n - k$ últimas filas y columnas de A , se la llama el menor principal k de A , denotado por M_k .



En la literatura se puede encontrar la notación de A_k para el menor principal k de A .

DEFINICIÓN 33: Determinantes.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ se define el determinante de A , denotado por $\det(A)$ (o por $|A|$), de manera inductiva, como sigue:

- Si $n = 1$ y $A = (a_{11})$, entonces $\det(A) = a_{11}$.
- Si $n > 1$, entonces

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^n a_{1k} (-1)^{1+k} \det(A_{1k}) \\ &= a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) + \dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det(A_{1n}). \end{aligned}$$

Ejemplos:

- Sea A una matriz de orden 2×2 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

se tiene que

$$A_{11} = (a_{22}) \quad \text{y} \quad A_{12} = (a_{21}),$$

por lo tanto

$$\det(A_{11}) = a_{22} \quad \text{y} \quad \det(A_{12}) = a_{21},$$

de esta forma,

$$\det(A) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{12} \det(A_{12}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

es decir,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- Sea A una matriz de orden 3×3 de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

el determinante de la matriz A está dado por:

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

5.1 Propiedades de los determinantes

TEOREMA 27.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si una fila o columna de A contiene solo ceros, entonces $\det(A) = 0$.

TEOREMA 28.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz triangular superior o triangular inferior, entonces

$$\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn},$$

es decir, el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de su diagonal principal.

TEOREMA 29.

Sea $E \in \mathbb{K}^{n \times n}$ una matriz elemental, $i, j \in I$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, con $\alpha \neq 0$. Se tiene que

- si la operación es $F_i \leftrightarrow F_j$, entonces $\det(E) = -1$;
- si la operación es $\alpha F_i \rightarrow F_i$, entonces $\det(E) = \alpha$; y
- si la operación es $\alpha F_i + F_j \rightarrow F_j$, entonces $\det(E) = 1$.

TEOREMA 30.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. El determinante de una matriz A y de su transpuesta son iguales, es decir,

$$\det(A^T) = \det(A).$$

TEOREMA 31.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se tiene que:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

TEOREMA 32.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si la matriz B se obtiene intercambiando dos filas o columnas de A entonces

$$\det(B) = -\det(A).$$

TEOREMA 33.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si dos filas o columnas de A son iguales, entonces

$$\det(A) = 0$$

TEOREMA 34.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si B se obtiene al multiplicar una fila o columna de A por un escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces

$$\det(B) = \alpha \det(A).$$

TEOREMA 35.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $\alpha \in \mathbb{K}$. Se tiene que

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

TEOREMA 36.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ e $i, j \in I$, con $i \neq j$. Si B se obtiene al aplicar una operación de fila $\alpha F_i + F_j \rightarrow F_j$, entonces

$$\det(B) = \det(A).$$

TEOREMA 37.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si A es no singular, entonces $\det(A) \neq 0$ y

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

TEOREMA 38.

Sean $A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $j \in I$ tales que A, B y C difieran únicamente en la columna j . Si la columna j de C es el resultado de sumar las columnas j de A y B , entonces

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

5.2 Cofactores

DEFINICIÓN 34: Cofactores.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ e $i, j \in I$. El cofactor ij de A , denotado C_{ij} , está dado por

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

donde A_{ij} es el menor ij de A .



En la literatura, también se suele llamar menor al determinante de A_{ij} en lugar de a la matriz, como lo haremos en este texto. Además, al cofactor, se lo suele denotar por A_{ij} .

TEOREMA 39.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se tiene que para todo $i \in I$,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ik} = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \dots + a_{in} C_{in}$$

y

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n a_{ki} C_{ki} = a_{1i} C_{1i} + a_{2i} C_{2i} + \dots + a_{ni} C_{ni}.$$

El lado derecho de las igualdades toma el nombre de expansión por cofactores del determinante de A .

5.3 Más sobre la inversa de una matriz

DEFINICIÓN 35: Matriz de cofactores.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. La matriz de cofactores de A , que se denota por $\text{cof}(A)$, es la matriz de $\mathbb{K}^{n \times n}$ que está formada por los cofactores de A , es decir,

$$\text{cof}(A) = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

DEFINICIÓN 36.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. La matriz adjunta de A , que se denota por $\text{adj}(A)$, es la matriz de $\mathbb{K}^{n \times n}$ que está formada por la transpuesta de la matriz de los cofactores de A , es decir,

$$\text{adj}(A) = \text{cof}(A)^T.$$

TEOREMA 40.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, entonces

$$A(\text{adj}(A)) = (\text{adj}(A))A = \det(A)I_n.$$

COROLARIO 41. Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A).$$

TEOREMA 42.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Una matriz A es no singular si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

TEOREMA 43.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene una solución no trivial si y sólo si $\det(A) = 0$.

TEOREMA 44.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{K}^n$. El sistema $Ax = b$ tiene una solución única si y sólo si $\det(A) \neq 0$ y su solución es

$$A^{-1}b.$$

TEOREMA 45: Equivalencias no singulares.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se tienen que las siguientes son equivalentes:

- I. A es no singular;
- II. el sistema $Ax = 0$ tiene solamente la solución trivial;
- III. A es equivalente por filas a I_n ;
- IV. $\operatorname{rang}(A) = n$;
- V. el sistema lineal $Ax = b$ tiene una solución única para cada vector $b \in \mathbb{K}^n$; y
- VI. $\det(A) \neq 0$.

6. EL ESPACIO \mathbb{R}^n

En esta sección, consideramos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.

DEFINICIÓN 37: El conjunto \mathbb{R}^n .

El conjunto \mathbb{R}^n es

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ veces}},$$

es decir

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, n\}.$$



Recordemos que, por notación, si $y \in \mathbb{R}^n$, se asumirá $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$.



Recordemos que podemos identificar cada elemento de \mathbb{R}^n con una matriz de $\mathbb{R}^{n \times 1}$ de la siguiente manera: si

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n,$$

entonces, visto como matriz es



$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times 1}.$$

TEOREMA 46.

En \mathbb{R}^n se cumplen las siguientes propiedades:

I. **asociativa de la suma:** para todo $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

II. **conmutativa de la suma:** para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$x + y = y + x;$$

III. **elemento neutro de la suma:** existe un elemento de \mathbb{R}^n , denotado por 0 , tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$x + 0 = 0 + x = x;$$

IV. **inverso de la suma:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$, existe un elemento de \mathbb{R}^n , denotado por $-x$, tal que

$$x + (-x) = 0;$$

V. **distributiva del producto I:** para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

VI. **distributiva del producto II:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x;$$

VII. **asociativa del producto:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x);$$

VIII. **elemento neutro del producto:** para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$1x = x.$$

DEFINICIÓN 38: Base canónica.

En \mathbb{R}^n , el conjunto $\{e^1, e^2, \dots, e^n\} \subset \mathbb{R}^n$, definidos por

$$e_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, se lo denomina *base canónica* de \mathbb{R}^n .

TEOREMA 47.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que existen únicos

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

tales que

$$x = \alpha_1 e^1 + \alpha_2 e^2 + \dots + \alpha_n e^n.$$

DEFINICIÓN 39: Producto punto.

La función

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{aligned}$$

se denomina producto punto de \mathbb{R}^n o producto interno de \mathbb{R}^n .

TEOREMA 48: Propiedades del producto punto.

Sean $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $x \cdot x \geq 0$;
- $x \cdot x = 0$ si y solo si $x = 0$;
- $x \cdot y = y \cdot x$;
- $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$;
- $(\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y) = \alpha(x \cdot y)$.

DEFINICIÓN 40: Norma.

La función

$$\begin{aligned} \|\cdot\|: \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x \cdot x} \end{aligned}$$

se la llama la norma de \mathbb{R}^n . Para $x \in \mathbb{R}^n$ a $\|x\|$ se le llama norma, módulo o longitud de x .

TEOREMA 49: Desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|.$$

TEOREMA 50: Propiedades de la norma.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene que

- $\|x\| \geq 0$;
- $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$



Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia entre x y y por $\|x - y\|$.

DEFINICIÓN 41: Vector unitario.

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, se dice que x es un vector unitario si $\|x\| = 1$.

DEFINICIÓN 42: Ángulo entre vectores.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, ambos diferentes de 0, se define el ángulo entre estos vectores por

$$\theta = \arccos \left(\frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|} \right).$$

DEFINICIÓN 43.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se dice que

- son ortogonales si $x \cdot y = 0$;
- son paralelos si $|x \cdot y| = \|x\| \|y\|$;
- tienen la misma dirección si $x \cdot y = \|x\| \|y\|$.

TEOREMA 51.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$ tal que $y \neq 0$. Si x y y son paralelos, entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $x = \alpha y$.

DEFINICIÓN 44: Proyección ortogonal.

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, con $y \neq 0$, la proyección ortogonal de x sobre y es

$$\text{proy}_y(x) = \frac{x \cdot y}{\|y\|^2} y$$

y la componente normal de x respecto a y es

$$\text{norm}_y(x) = x - \text{proy}_y(x).$$

6.1 Geometría de \mathbb{R}^n

En esta sección, a menos que se indique lo contrario, asumiremos $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$.

DEFINICIÓN 45: Puntos de \mathbb{R}^n .

Se llama punto de \mathbb{R}^n a cualquier elemento de \mathbb{R}^n .

DEFINICIÓN 46: Recta de \mathbb{R}^n .

Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, con $b \neq 0$, la recta que pasa por a con dirección b es el conjunto

$$L(a; b) = \{a + tb : t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo. En \mathbb{R}^2 , tenemos la recta que pasa por $(1, -2)$ con dirección $(3, 2)$ es

$$\begin{aligned} L((1, -2); (3, 2)) &= \{(1, -2) + t(3, 2) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 + 3t, -2 + 2t) : t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 1 + 3t, y = -2 + 2t, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - 3y = 4\} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que la recta está definida por

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3t, \\ y &= -2 + 2t, \end{aligned}$$

con $t \in \mathbb{R}$; a esta se la llama la ecuación paramétrica de la recta. Por otro lado, también tenemos que la recta está definida por

$$2x - 3y = 4$$

con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; a esta se la llama la ecuación cartesiana de la recta. □

DEFINICIÓN 47: Plano de \mathbb{R}^n .

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, con b y c no paralelos y diferentes de 0, el plano que pasa por a con dirección b y c es el conjunto

$$P(a; b, c) = \{a + sb + tc : s, t \in \mathbb{R}\}.$$

Ejemplo. En \mathbb{R}^3 , tenemos la recta que pasa por $(1, -2, -1)$ con direcciones $(3, 2, 1)$ y $(1, 0, 2)$ es

$$\begin{aligned} L((1, -2, -1); (3, 2, 1), (1, 0, 2)) &= \{(1, -2, -1) + s(3, 2, 1) + t(1, 0, 2) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 + 3s + t, -2 + 2s, -1 + s + 2t) : s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 1 + 3s + t, y = -2 + 2s, z = -1 + s + 2t, s, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 4x - 5y - 2z = 8\} \end{aligned}$$

Con esto, tenemos que la recta está definida por

$$\begin{aligned} x &= 1 + 3s + t, \\ y &= -2 + 2s, \\ z &= -1 + s + 2t \end{aligned}$$

con $s, t \in \mathbb{R}$; a esta se la llama la ecuación paramétrica del plano. Por otro lado, también

tenemos que la recta está definida por

$$4x - 5y - 2z = 8$$

con $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$; a esta se la llama la ecuación cartesiana de la recta. \square



Podemos pasar de la ecuación paramétrica a la ecuación cartesiana si, al verlas como un sistema de ecuaciones en sus parámetros, analizamos cuándo el sistema es consistente.

Además, podemos pasar de la ecuación cartesiana a la ecuación paramétrica si, al verla como un sistema de ecuaciones, resolvemos el sistema.



En \mathbb{R}^2 , dados dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, la ecuación cartesiana de la recta que pasa por estos dos puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



En \mathbb{R}^3 , dados tres puntos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$, la ecuación cartesiana del plano que pasa por estos tres puntos es

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

7. ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN 48: Espacio Vectorial.

Dados un campo \mathbb{K} , un conjunto no vacío E y dos operaciones

$$\begin{aligned} \oplus: E \times E &\longrightarrow E & \text{y} & \quad \odot: \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x \oplus y, & & \quad (\alpha, x) \longmapsto \alpha \odot x \end{aligned}$$

llamadas suma y producto, respectivamente; se dice que $(E, \oplus, \odot, \mathbb{K})$ es un espacio vectorial si cumplen las siguientes propiedades

- i. **asociativa de la suma:** para todo $x, y, z \in E$ se tiene que

$$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z);$$

II. **conmutativa de la suma:** para todo $x, y \in E$ se tiene que

$$x \oplus y = y \oplus x;$$

III. **elemento neutro de la suma:** existe un elemento de E , denotado por 0_E o simplemente 0 , tal que para todo $x \in E$ se tiene que

$$x \oplus 0 = 0 \oplus x = x;$$

IV. **inverso de la suma:** para todo $x \in E$, existe un elemento de E , denotado por $-x$, tal que

$$x \oplus (-x) = 0;$$

V. **distributiva del producto I:** para todo $x, y \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\alpha \odot (x \oplus y) = \alpha \odot x + \alpha \odot y$$

VI. **distributiva del producto II:** para todo $x \in E$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$(\alpha + \beta) \odot x = \alpha \odot x + \beta \odot x;$$

VII. **asociativa del producto:** para todo $x \in E$ y todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$(\alpha\beta) \odot x = \alpha \odot (\beta \odot x);$$

VIII. **elemento neutro del producto:** para todo $x \in E$ se tiene que

$$1 \odot x = x,$$

donde $1 \in \mathbb{K}$ es el elemento neutro multiplicativo de \mathbb{K}

Utilizamos los símbolos \oplus y \odot para enfatizar el hecho de que, en general, las operaciones definidas no son la suma y el producto estándar que utilizamos. Si no existe riesgo de confusión, utilizaremos la notación



$$x \oplus y = x + y \quad \text{y} \quad \alpha \odot x = \alpha x$$

y diremos que el espacio vectorial es $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$, es más, en caso de que no exista ambigüedad en las operaciones utilizadas se dirá simplemente que E es un espacio vectorial.

TEOREMA 52.

Los siguientes conjuntos son espacios vectoriales en el campo \mathbb{R} :

- \mathbb{R}^n , con $n \in \mathbb{N}^*$;
- $\mathbb{R}^{m \times n}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;

- $\mathcal{F}(I) = \{f: I \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es una función}\}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$.
- $\mathbb{R}_n[x]$ el conjunto de todos los polinomios de grado menor igual que n en la variable x , con $n \in \mathbb{N}$;

TEOREMA 53.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, se tiene que para todo $u \in E$ y todo $\alpha \in \mathbb{K}$, se tiene que

- I. $0u = 0$;
- II. $\alpha 0 = 0$;
- III. si $\alpha u = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $u = 0$;
- IV. $(-1)u = -u$.

7.1 Subespacios**DEFINICIÓN 49: Subespacio Vectorial.**

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $W \subset E$ un conjunto no vacío de E . Si W es un espacio vectorial con respecto a las operaciones de E , entonces se dice que W es un subespacio de E .

TEOREMA 54.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de E . Entonces W es un subespacio de E si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

- si $u, v \in W$, entonces $u + v \in W$; u
- si $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u \in W$, entonces $\alpha u \in W$.

DEFINICIÓN 50: Combinación lineal.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $k \in \mathbb{N}^*$ y $v_1, v_2, \dots, v_k \in E$. Se dice que un vector $v \in E$ es una combinación lineal de v_1, v_2, \dots, v_k si

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$$

para algunos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$.

DEFINICIÓN 51.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset E$. Al conjunto de todos los vectores en E que son combinaciones lineales de los vectores de S se lo llama cápsula de S y se denota por $\text{span}(S)$, es decir

$$\text{span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}\}.$$



A este conjunto también se lo conoce como *clausura lineal* y su notación viene de su nombre en inglés, *linear span*. También se utiliza la notación $\langle S \rangle$.

TEOREMA 55.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subset E$. Se tiene que $\text{span}(S)$ es un subespacio vectorial de E .

7.2 Conjunto generador**DEFINICIÓN 52.**

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Al subespacio vectorial más pequeño que contiene a S (es decir, la intersección de todos los subespacios que contienen a S) se lo denomina espacio generado por S y se denota por $\text{gen}(S)$.

TEOREMA 56.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Se tiene que

$$\text{span}(S) = \text{gen}(S).$$

DEFINICIÓN 53.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se dice que S genera el espacio vectorial E si cada vector en E es una combinación lineal de los elementos de S , es decir, si para todo $v \in E$, existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k.$$

TEOREMA 57.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se tiene que S genera el espacio vectorial E si y solo si

$$E = \text{gen}(S) = \text{span}(S).$$

7.3 Independencia lineal**DEFINICIÓN 54.**

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se dice que S es un conjunto linealmente dependiente si existen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$, no todos iguales a cero, tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

en caso contrario, se dice que S es un conjunto linealmente independiente.

De esta definición, se tiene que $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente si y solo si

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$$

implica que

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$



Se puede extender esta definición para conjuntos infinitos diciendo que S es linealmente independiente si todo subconjunto finito de S es linealmente independiente.

TEOREMA 58.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$. Si $0 \in S$, entonces S es linealmente dependiente.

TEOREMA 59.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subseteq E$. Se tiene que S es un conjunto linealmente dependiente si y sólo si alguno de los vectores $v_j \in S$ es una combinación lineal de otros elementos de S .

7.4 Bases

DEFINICIÓN 55.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$. Se dice que B es una base de E si

- B genera a E y
- B es linealmente independiente.

TEOREMA 60: Base canónica de \mathbb{R}^n .

En \mathbb{R}^n , el conjunto $\{e^1, e^2, \dots, e^n\} \subset \mathbb{R}^n$, definidos por

$$e_j^i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j, \end{cases}$$

para todo $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, es una base de \mathbb{R}^n .

TEOREMA 61: Base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$.

En $\mathbb{R}_n[x]$, el conjunto $\{1, x, \dots, x^{n-1}, x^n\}$ es una base de $\mathbb{R}_n[x]$. A esta base se la denomina la base canónica de $\mathbb{R}_n[x]$.

TEOREMA 62.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E . Se tiene que todo elemento de E se puede escribir, de manera única, como combinación lineal de elementos de B .

TEOREMA 63.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$. Se tiene que si todo elemento de E se puede escribir, de manera única, como combinación lineal de elementos de B , entonces B es una base de E .

TEOREMA 64.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$ un conjunto que genera a E . Se tiene que algún subconjunto de S es base de E .

TEOREMA 65.

Todo espacio vectorial tiene una base.

7.5 Dimensión**TEOREMA 66.**

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E . Si $S \subseteq E$ es un conjunto linealmente independiente, entonces

$$|S| \leq |B|.$$

TEOREMA 67.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E . Si $S \subseteq E$ es un conjunto que genera a E , entonces

$$|B| \leq |S|.$$

TEOREMA 68.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B, T \subseteq E$ bases de E . Se tiene que

$$|B| = |T|.$$

DEFINICIÓN 56: Dimensión.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E . Se define la dimensión de E , denotado por $\dim(E)$, por la cantidad de elementos de B .

TEOREMA 69.

Se tiene que

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$, con $n \in \mathbb{N}^*$;
- $\dim(\mathbb{R}^{m \times n}) = mn$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- $\dim(\mathbb{R}_n[x]) = n + 1$, con $n \in \mathbb{N}$;
- $\dim(\{0\}) = 0$.

TEOREMA 70.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $S \subseteq E$ un conjunto linealmente independiente. Se tiene que existe una base B de E que contiene a S .

TEOREMA 71.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial, $B \subseteq E$ y $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\dim(E) = n$ y $|B| = n$. Se tiene que

- si B es linealmente independiente, entonces B es una base de E .
- si B genera a E , entonces B es una base de E .

7.6 Componentes y Cambio de base

En esta sección, asumiremos $n \in \mathbb{N}^*$.

DEFINICIÓN 57: Base ordenada.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $B \subseteq E$ una base de E . Si numeramos los vectores de B , obteniendo

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

se la llama una base ordenada.

DEFINICIÓN 58: Vector de componentes.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq E$$

una base ordenada. Para $u \in E$, se define el vector de componentes de u por

$$[u]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ son tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$



En la literatura, también se puede encontrar la definición anterior bajo el nombre de vector de coordenadas.

DEFINICIÓN 59: Matriz de cambio de base.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial tal que $\dim(E) = n$ y $S, T \subseteq E$ bases ordenadas de E . Se llama matriz de cambio de base T a S a la única matriz de $\mathbb{K}^{n \times n}$, denotada por $P_{S \leftarrow T}$, que cumple que

$$[v]_S = P_{S \leftarrow T} [v]_T$$

para todo $v \in E$.



En la literatura, también se puede encontrar la definición anterior bajo el nombre de matriz de transición.

TEOREMA 72.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial tal que $\dim(E) = n$, $S, T \subseteq E$ bases ordenadas de E y $P_{S \leftarrow T}$ la matriz de cambio de base T a S . Se tiene que $P_{S \leftarrow T}$ es no singular y

$$(P_{S \leftarrow T})^{-1} = P_{T \leftarrow S}.$$

8. ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

DEFINICIÓN 60: Producto interno.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial. Un producto interno sobre E es una función

$$\begin{aligned}\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (u, v) &\longmapsto \langle u, v \rangle\end{aligned}$$

tales que cumple:

- I. $\langle v, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in E$;
- II. $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$;
- III. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ para todo $u, v, w \in E$;
- IV. $\langle \alpha v, w \rangle = \alpha \langle v, w \rangle$ para todo $v, w \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$.
- V. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ para todo $v, w \in E$.

Otra notación para el producto interno es

$$\langle u, v \rangle = (u|v).$$

En caso de tratarse de un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, la propiedad 5 se transforma en

- V. $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ para todo $v, w \in E$.

Se puede demostrar utilizando la propiedad 4 que

- si $v = 0$, entonces $\langle v, v \rangle = 0$;

por lo cual, podríamos cambiar la propiedad 2 por

- II. si $\langle v, v \rangle = 0$, entonces $v = 0$

Si se define un producto interno sobre un espacio vectorial E , a este se lo denomina espacio con producto interno o pre-Hilbertiano.

TEOREMA 73.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces:

- I. Para todo $u, v, w \in E$

$$\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle.$$

- II. Para todo $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\langle u, \alpha v \rangle = \bar{\alpha} \langle u, v \rangle.$$

- III. Para todo $u \in E$

$$\langle u, 0 \rangle = \langle 0, u \rangle = 0.$$

En caso de tratarse de un espacio vectorial sobre el campo de los números reales, la propiedad 2 se transforma en



II. Para todo $u, v \in E$ y $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\langle u, \alpha v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$$

8.1 Productos internos usuales

I. En $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$, para $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k.$$

II. En $(\mathbb{C}^n, +, \cdot, \mathbb{C})$, para $x, y \in \mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{y_k}.$$

III. En $(\mathbb{R}_n[x], +, \cdot, \mathbb{R})$, para $p(x), q(x) \in \mathbb{R}_n[x]$, si

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \text{y} \quad q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

entonces

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \sum_{k=0}^n a_k b_k.$$

IV. En $(\mathbb{K}^{m \times n}, +, \cdot, \mathbb{R})$, para $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T).$$

V. En $(\mathcal{C}([a, b]), +, \cdot, \mathbb{R})$, para $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

DEFINICIÓN 61.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y suponga que $u, v \in E$. Entonces:

I. u y v son ortogonales si $\langle u, v \rangle = 0$.

II. La norma de u , denotada por $\|u\|$, está dada por

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

DEFINICIÓN 62.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. La distancia en el espacio se define por

$$\begin{aligned} d: E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto \|u - v\|. \end{aligned}$$

TEOREMA 74: Vectores ortogonales.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para $u, v \in E$, se dice que son ortogonales si

$$\langle u, v \rangle = 0.$$

TEOREMA 75: Teorema de Pitágoras.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Si u, v son vectores ortogonales de E , entonces

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

TEOREMA 76: Desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para todo $u, v \in E$ se cumple que

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

TEOREMA 77: Desigualdad triangular.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Para todo $u, v \in E$ se cumple que

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

DEFINICIÓN 63: Conjunto ortogonal.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y

$$C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq E.$$

Se dice que C es un conjunto ortogonal en E si

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0$$

para todo $i \neq j$.

DEFINICIÓN 64: Conjunto ortonormal.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno y

$$C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq E.$$

Se dice que C es un conjunto ortonormal en E si es ortogonal y

$$\|v_k\| = 1$$

para todo $k \in \{1, \dots, n\}$.

TEOREMA 78.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial provisto de producto interno. Si $C \subseteq E$ es un conjunto ortogonal de vectores no nulos, entonces es linealmente independiente.

A partir de aquí, siempre consideraremos espacios vectoriales provistos con un producto interno.

8.2 Bases ortogonales

DEFINICIÓN 65: Base ortogonal (ortonormal).

En un espacio vectorial, una base ortogonal (ortonormal) es una base cuyos vectores forman un conjunto ortogonal (ortonormal).

TEOREMA 79.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base ortogonal para E . Se tiene que, para $v \in E$,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

donde

$$c_k = \frac{\langle v, u_k \rangle}{\langle u_k, u_k \rangle}$$

para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

TEOREMA 80.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base ortonormal para E . Se tiene que, para $v \in E$,

$$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n$$

donde

$$c_k = \langle v, u_k \rangle$$

para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

TEOREMA 81: Proceso de Gram-Schmidt.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ un conjunto linealmente independiente de E . Definamos

$$\text{I. } v_1 = u_1 \text{ y}$$

$$\text{II. } v_k = u_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_k, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} v_i, \text{ para } k = 2, \dots, n.$$

Se tiene que el conjunto

$$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

es un conjunto ortogonal. Además, si definimos

$$w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}$$

para $k = 1, \dots, n$, se tiene que el conjunto

$$\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$$

es un conjunto ortonormal.

TEOREMA 82.

Todo espacio vectorial de dimensión finita tiene una base ortogonal y una base ortonormal.

EJEMPLO 1. Considere la base $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ de \mathbb{R}^3 , donde

$$u_1 = (1, 1, 0), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1)$$

mediante el proceso de Gram-Schmidt, se obtiene la base ortonormal $T = \{w_1, w_2, w_3\}$ para \mathbb{R}^3 donde

$$w_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad w_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}} \right), \quad w_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

8.3 Complemento ortogonal

A partir de aquí, siempre consideraremos espacios vectoriales provistos con un producto interno.

DEFINICIÓN 66: Complemento ortogonal.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y $H \subset E$. El complemento ortogonal de H , denotado por H^\perp , se define por:

$$H^\perp = \{x \in E : \langle x, h \rangle = 0, \text{ para todo } h \in H\}.$$

TEOREMA 83.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y H subespacio vectorial de E , entonces:

- I. H^\perp es un subespacio vectorial de E .
- II. $H \cap H^\perp = \{0\}$.
- III. Si $\dim(E) = n$, entonces $\dim(H^\perp) = n - \dim(H)$

TEOREMA 84.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, W un subespacio vectorial de E , entonces

$$E = W \oplus W^\perp.$$

TEOREMA 85.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, W un subespacio vectorial de E , entonces

$$(W^\perp)^\perp = W.$$

DEFINICIÓN 67: Proyección ortogonal.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial y H un subespacio vectorial de E , con base ortogonal $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Para $v \in E$, la proyección ortogonal de v sobre H , denotado por

$\text{proy}_H v$, se define por:

$$\text{proy}_H(v) = \frac{\langle v, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 + \frac{\langle v, u_2 \rangle}{\langle u_2, u_2 \rangle} u_2 + \cdots + \frac{\langle v, u_n \rangle}{\langle u_n, u_n \rangle} u_n,$$

donde $\text{proy}_H(v) \in H$.

TEOREMA 86: Teorema de la proyección.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, H un subespacio vectorial de E y $v \in E$. Se tiene que

$$v = \text{proy}_H(v) + \text{proy}_{H^\perp}(v).$$

TEOREMA 87.

Sea $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ un espacio vectorial de dimensión finita, H un subespacio vectorial de E y $v \in E$. Se tiene que el vector en H más cercano a v es $\text{proy}_H(v)$, es decir,

$$\|v - w\| \text{ es mínima cuando } w = \text{proy}_H(v).$$

9. APLICACIONES LINEALES

DEFINICIÓN 68: Aplicación lineal.

Sean $(E, +_1, \cdot_1, \mathbb{K})$ y $(F, +_2, \cdot_2, \mathbb{K})$ espacios vectoriales. A una función $T: E \rightarrow F$ se la llama una aplicación lineal (transformación lineal) si satisface que para todo $\alpha \in \mathbb{K}$, y todo $u, v \in E$ se cumple

$$\text{I. } T(u +_1 v) = T(u) +_2 T(v) \quad y$$

$$\text{II. } T(\alpha \cdot_1 v) = \alpha \cdot_2 T(v).$$

En adelante, consideraremos $(E, +_1, \cdot_1, \mathbb{K})$ y $(F, +_2, \cdot_2, \mathbb{K})$ espacios vectoriales. Notaremos por $\mathcal{L}(E, F)$ el espacio de las aplicaciones lineales de E en F .

En caso de que no exista riesgo de ambigüedad, dado $T \in \mathcal{L}(E, F)$, se denotará



$$\text{I. } T(u + v) = T(u) + T(v) \quad y$$

$$\text{II. } T(\alpha v) = \alpha T(v),$$

para $\alpha \in \mathbb{K}$ y $u, v \in E$.

TEOREMA 88.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Para todo $u, v, v_1, v_2, \dots, v_n \in E$ y $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$

$$\text{I. } T(0_E) = 0_F;$$

$$\text{II. } T(u - v) = T(u) - T(v); y$$

$$\text{III. } T\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k v_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k T(v_k).$$

9.1 Ejemplos de transformaciones lineales

I. Transformación nula,

$$\begin{aligned} T: F &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

II. Transformación identidad,

$$\begin{aligned} T: F &\longrightarrow F \\ v &\longmapsto v. \end{aligned}$$

III.

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y). \end{aligned}$$

IV.

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, 0). \end{aligned}$$

V.

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + y, y + z, x). \end{aligned}$$

VI.

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

VII.

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}_2[t] \\ (x, y, z) &\longmapsto x + (x - y)t + zt^2. \end{aligned}$$

TEOREMA 89.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ es una base de E , entonces T está completamente determinada por

$$\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\}.$$

Es decir, si se conoce el valor de $\{T(u_1), T(u_2), \dots, T(u_n)\}$, entonces se conoce $T(u)$ para todo $u \in E$.

9.2 Núcleo e imagen

DEFINICIÓN 69: Núcleo e imagen de una aplicación lineal.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

I. El núcleo de T , denotado por $\ker(T)$, está definida por:

$$\ker(T) = \{v \in E : T(v) = 0\}.$$

II. La imagen de T , denotada por $\text{img}(T)$, está definida por:

$$\text{img}(T) = \{w \in F : w = T(v) \text{ para algún } v \in E\}.$$

TEOREMA 90.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$, entonces

- I. $\ker(T)$ es un subespacio vectorial de E .
- II. $\text{img}(T)$ es un subespacio vectorial de F .

TEOREMA 91.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se tiene que T es inyectiva si y solo si $\ker(T) = \{0\}$.

DEFINICIÓN 70: Nulidad y rango de una aplicación lineal.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

- I. Se llama nulidad de T a $\dim(\ker(T))$.
- II. Se llama rango de T a $\dim(\text{img}(T))$.

TEOREMA 92.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con E un espacio de dimensión finita. Se tiene que

$$\dim(E) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{img}(T)).$$

TEOREMA 93.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ con E un espacio de dimensión finita. Si $\dim(E) = \dim(F)$, entonces se tiene que las siguientes son equivalentes

- T es inyectiva,
- T es sobreyectiva.

9.3 Propiedades de aplicaciones lineales**TEOREMA 94.**

Se tiene que $\mathcal{L}(E, F)$ es un espacio vectorial.

TEOREMA 95.

Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(E, F)$ y $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base para E . Si

$$T_1(v_i) = T_2(v_i)$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, entonces se tiene que $T_1(v) = T_2(v)$, para todo $v \in E$, es decir,

$$T_1 = T_2.$$

TEOREMA 96.

Sean $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base para E y $w_1, w_2, \dots, w_n \in F$. Se tiene que existe una única transformación lineal $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que

$$T(v_i) = w_i$$

para todo $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

TEOREMA 97.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Supongamos que $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$, se tiene que:

- I. si $n > m$, entonces T no es inyectiva; y
- II. si $m > n$, entonces T no es sobreyectiva.

9.4 Isomorfismos

DEFINICIÓN 71: Isomorfismo.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se dice que T es un isomorfismo de E en F si T es biyectiva.

DEFINICIÓN 72: Espacios isomorfos.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{K})$ y $(F, +, \cdot, \mathbb{K})$. Se dice que E y F son isomorfos si existe un isomorfismo T de E en F , se lo denota por $E \cong F$.

TEOREMA 98.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorfismo, se tiene que

- I. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ genera a E , entonces

$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$

genera a F ;

- II. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ son linealmente independientes en E , entonces

$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$

es linealmente independientes en F ;

- III. si $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es base de E , entonces

$$\{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$

es base de F ;

- IV. si E es de dimensión finita, entonces F es de dimensión finita y

$$\dim(E) = \dim(F).$$

TEOREMA 99.

Sean $(E, +, \cdot, \mathbb{R})$ y $(F, +, \cdot, \mathbb{R})$ espacios de dimensión finita tales que $\dim(E) = \dim(F)$, entonces $E \cong F$.

TEOREMA 100.

Se tiene que

- I. $\mathbb{R}^{m \times n} \cong \mathbb{R}^{mn}$, con $m, n \in \mathbb{N}^*$;
- II. $P_n[x] \cong \mathbb{R}^{n+1}$, con $n \in \mathbb{N}^*$.

9.5 Matriz asociada

En adelante, consideraremos E y F espacios vectoriales de dimensión finita tales que $\dim(E) = n$ y $\dim(F) = m$.

DEFINICIÓN 73.

Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y B, D bases para E y F , respectivamente. Se tiene que existe una única matriz de $\mathbb{K}^{m \times n}$, denotada por $[T]_{D,B}$, tal que

$$[T(v)]_D = [T]_{D,B}[v]_B$$

para todo $v \in E$. A esta matriz se la llama matriz asociada a la aplicación lineal T .

TEOREMA 101.

Sean $T \in \mathcal{L}(E, F)$ y

$$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{y} \quad D = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$$

bases para E y F , respectivamente. Se tiene que las columnas de la matriz $[T]$ son los vectores de coordenadas de $T(v_j)$ en la base D , para $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, es decir

$$[T]_{D,B} = \begin{pmatrix} [T(v_1)]_D & [T(v_2)]_D & \cdots & [T(v_n)]_D \end{pmatrix}.$$



En caso de no existir riesgo de confusión en las bases que se utiliza, se nota simplemente $[T]$ a la matriz asociada a la aplicación lineal T .

Se pueden ver ejemplos del procedimiento para encontrar una matriz asociada a una aplicación lineal entre las páginas 522 y 527 del libro de Kolman.

TEOREMA 102.

Sean $I \in \mathcal{L}(E, E)$ la aplicación identidad y B, D dos bases para E , considerando B para el conjunto de salida y D para el conjunto de llegada. Se tiene que

$$[I]_{D,B} = P_{D \leftarrow B}.$$

TEOREMA 103.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se tiene que T es biyectiva si y solo si $[T]$ es invertible.

TEOREMA 104.

Sean $T_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ y $T_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, con G un espacio vectorial de dimensión finita. Se tiene que

$$[T_2 \circ T_1] = [T_2][T_1].$$

TEOREMA 105.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, F)$ una aplicación lineal invertible. Se tiene que

$$[T^{-1}] = [T]^{-1}.$$

TEOREMA 106.

Se tiene que $\mathcal{L}(E, F)$ es isomorfo a $\mathbb{K}^{m \times n}$, es decir

$$\mathcal{L}(E, F) \cong \mathbb{K}^{m \times n}.$$

10. VALORES Y VECTORES PROPIOS

DEFINICIÓN 74.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se tiene que $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de A si existe $v \in \mathbb{R}^n$, con $v \neq 0$, tal que

$$Av = \lambda v,$$

además, v es un vector propio de A asociado al valor propio λ .

TEOREMA 107.

Sean $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se tiene que λ es un valor propio de A si y solo si

$$\det(A - \lambda I) = 0,$$

donde I es la matriz identidad.

TEOREMA 108.

Los valores propios de una matriz triangular son los elementos de la diagonal de la matriz.

DEFINICIÓN 75.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Al polinomio

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

se lo denomina polinomio característico de A .

TEOREMA 109: Teorema de Cayley-Hamilton.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y $p_A(\lambda)$ su polinomio característico. Se tiene que

$$p_A(A) = 0.$$

10.1 Valores y vectores propios de aplicaciones lineales

DEFINICIÓN 76.

Sean $T \in \mathcal{L}(E, E)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se dice que λ es un valor propio de T si existe $v \in E$, con $v \neq 0$, tal que

$$T(v) = \lambda v.$$

A este vector v se lo llama vector propio de T asociado al valor propio λ .



Note que, por definición, el vector 0 no puede ser un vector propio asociado a una aplicación lineal.

TEOREMA 110.

Sean $T \in \mathcal{L}(E, E)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de T . Se tiene que el conjunto

$$E_\lambda = \{v \in E : T(v) = \lambda v\}$$

es un subespacio vectorial de E . Se lo denomina el espacio propio de T asociado al valor propio λ .

TEOREMA 111.

Sean $T \in \mathcal{L}(E, E)$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ valores propios de T distintos entre sí. Si tomamos v_1, v_2, \dots, v_m vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, respectivamente, se tiene que $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ es un conjunto linealmente independiente.

En adelante, consideraremos a E como un espacio vectorial de dimensión finita.

DEFINICIÓN 77.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Se denomina espectro de T al conjunto de todos los valores propios de T .

TEOREMA 112.

Sea $T \in \mathcal{L}(E, E)$. Se tiene

- I. $\lambda \in \mathbb{K}$ es un valor propio de T si y solo si es un valor propio de $[T]$; y
- II. $v \in E$ es un vector propio de T si y solo si $[v]$ es un vector propio de $[T]$.



De este resultado, se sigue que, para determinar los valores, vectores y espacios propios de un operador lineal, basta determinar los valores, vectores y espacios propios de una matriz.

10.2 Diagonalización de Matrices

DEFINICIÓN 78.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es semejante a B si existe una matriz invertible $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que

$$A = P^{-1}BP.$$

TEOREMA 113.

Sean $A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se tiene que

- I. A es semejante a A .
- II. Si A es semejante a B , entonces B es semejante a A .
- III. Si A es semejante a B y B es semejante a C , entonces A es semejante a C .

DEFINICIÓN 79.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$, se dice que A es diagonalizable si A es semejante a una matriz diagonal. Es decir, si existe una matriz invertible $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ y una matriz diagonal $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ tal que

$$A = P^{-1}DP.$$

TEOREMA 114.

Sean $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si A y B son semejantes, entonces A y B tienen los mismos valores propios, es decir, tienen el mismo espectro.

TEOREMA 115.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se tiene que A es diagonalizable si y solo si tiene n vectores propios linealmente independientes.

TEOREMA 116.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si A tiene n valores propios distintos entre sí, entonces A es diagonalizable.

TEOREMA 117.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si A es diagonalizable, entonces tomando D la matriz diagonal formada por los valores propios de A , y P la matriz cuyas columnas son los vectores propios de A , se tiene que

$$A = P^{-1}DP.$$

TEOREMA 118.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si A es simétrica, entonces A todos sus valores propios son reales; además, A es diagonalizable.

DEFINICIÓN 80.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Se dice que A es ortogonal si $A^T = A^{-1}$.

TEOREMA 119.

Sea $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Si A es simétrica, y $D, P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ son tales que

$$A = P^{-1}DP,$$

entonces P es ortogonal.