Fernando Jiménez T. • *Semestre 2024-2*

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

DEFINICIÓN 1: Variable.
Una variable es una letra que puede representar cualquier número tomado de un conjunto de números dado.

Nota: Usualmente las variables se representan con las letras del final del abecedario (x, y, z).

DEFINICIÓN 2: Expresión algebraica.
Una expresión algebraica es una combinación de variables y números reales usando operaciones como la suma, resta, multiplicación, división, potencias y raíces.
Las expresiones se pueden clasificar según su forma:

- Un **monomio** es una expresión algebraica de la forma ax^k, donde a es un número real y k es un número entero no negativo.
- Un **binomio** es una expresión algebraica formada por la suma de dos monomios.
- Un **trinomio** es una expresión algebraica formada por la suma de tres monomios.
- La suma de varios monomios, en general se llama **polinomio**.

DEFINICIÓN 3: Polinomio.
Un polinomio en una variable x es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

donde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ son números reales, y n es un número entero no negativo.
Si $a_n \neq 0$, entonces el polinomio tiene grado n.
Cada monomio $a_k x^k$ del polinomio se dice **término** del polinomio.

PROPOSICIÓN 1: Suma y resta de polinomios. Para sumar o restar se debe agrupar los términos con las variables elevadas a las mismas potencias y usando la propiedad distributiva combinar los números reales. Es decir, sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$, dos polinomios, con $m \geqslant n$. La suma de estos polinomios es:

$$\begin{aligned} p(x) + q(x) = & b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots b_{n+1}x^{n+1} + (a_n + b_n)x^n + \\ & + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0) \end{aligned}$$

Proposición 2: Multiplicación de polinomios. El producto de polinomios es aplicar repetidamente la propiedad distributiva y usar correctamente las leyes de los exponentes. Por ejemplo, el producto de $p(x) = ax + b$ por $q(x) = cx + d$ es:

$$p(x)q(x) = (ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Proposición 3: Fórmulas de productos notables. Ciertos productos son tan comunes que en ocasiones aplicar las siguientes formulas facilita los cálculos.
Sean A y B dos expresiones algebraicas, entonces

- $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$
- $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
- $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
- $(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$
- $(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$

Definición 4: Factorización de factores comunes.
Factorizar una expresión consiste en aplicar la propiedad distributiva de forma inversa, de tal forma que la expresión resultante sea el producto de dos o más expresiones algebraicas más sencillas que la expresión inicial.

Proposición 4: Factorización de trinomios. Para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$ se debe seleccionar dos números $r, s \in \mathbb{R}$ tales que $r + s = b$ y $r \cdot s = c$. Si dichos números existen, entonces tendremos que:

$$(x + r)(x + s) = x^2 + (r + s)x + rs.$$

Proposición 5: Fórmulas especiales de factorización. Algunas factorizaciones comunes son:

Diferencia de cuadrados: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

Cuadrado perfecto: $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$.

Cuadrado perfecto: $A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$.

Diferencia de cubos: $A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$.

Suma de cubos: $A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$.

Nota: Cuando factorizamos una expresión, a veces el resultado puede factorizarse aún más.

2. Expresiones racionales

Definición 5: Expresión fraccionaria.
El cociente de dos expresiones algebraicas se denomina **expresión fraccionaria**.
Una **expresión racional** es una expresión fraccionaria donde el numerador y el denominador son polinomios.

Definición 6: Dominio.
El domino de una expresión algebraica es el conjunto de números reales que se permite que tenga la variable.

Proposición 6: Simplificación de expresiones racionales. La simplificación de expresiones racionales, consiste en factorizar el numerador y denominador de tal forma que se puedan eliminar términos comunes siguiendo la siguiente propiedad:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B},$$

cuando $C \neq 0$.

Nota: Las operaciones de suma, resta, producto y división se usa de forma similar como se definen los operadores en números reales.