Andrés Merino • Semestre 2024-2

1. CONCEPTOS BÁSICOS DE TEORÍA DE CONJUNTOS

DEFINICIÓN 1: Conjunto.
Un **conjunto** es una colección bien definida de elementos, que se denota por letras mayúsculas como A, B, C. Los elementos de un conjunto se representan por letras minúsculas, por ejemplo, $x \in A$ significa que x es un elemento de A.

DEFINICIÓN 2: Igualdad de conjuntos.
Dos conjuntos A y B son **iguales** si y solo si tienen exactamente los mismos elementos.

DEFINICIÓN 3: Conjunto vacío.
El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es un conjunto que no tiene elementos.

DEFINICIÓN 4: Conjunto universal.
El **conjunto universal**, denotado por $\mathcal{U}$, es el conjunto que contiene a todos los elementos de interés en un contexto dado.

DEFINICIÓN 5: Subconjunto.
Un conjunto A es un **subconjunto** de un conjunto B, denotado $A \subseteq B$, si cada elemento de A también es un elemento de B, es decir,

$$x \in A \implies x \in B.$$

TEOREMA 1.
Para cualquier conjunto A, se cumple que $\varnothing \subseteq A$ y $A \subseteq \mathcal{U}$.

2. OPERACIONES CON CONJUNTOS

Material recomendado para esta sección: https://math24.net/set-operations-venn-diagrams.html

DEFINICIÓN 6: Diagrama de Venn.
Un **diagrama de Venn** es una representación gráfica de conjuntos que consiste en círculos que se superponen para mostrar todas las posibles relaciones entre los conjuntos.

DEFINICIÓN 7: Unión de conjuntos.
La **unión de dos conjuntos** A y B, denotada $A \cup B$, es el conjunto de todos los ele-

mentos que están en A, en B, o en ambos; es decir:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Teorema 2.
Para cualquier conjunto A, se cumple que $\varnothing \cup A = A$ y $U \cup A = U$.

Definición 8: Intersección de conjuntos.
La **intersección de dos conjuntos** A y B, denotada $A \cap B$, es el conjunto de todos los elementos que están tanto en A como en B; es decir:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Teorema 3.
Para cualquier conjunto A, se cumple que $\varnothing \cap A = \varnothing$ y $U \cap A = A$.

Definición 9: Diferencia de conjuntos.
La **diferencia de conjuntos** A y B, denotada $A \smallsetminus B$, es el conjunto de todos los elementos que están en A pero no en B; es decir:

$$A \smallsetminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Definición 10: Complemento de un conjunto.
El **complemento de un conjunto** A respecto de un conjunto universal U, denotado A^c, es el conjunto de todos los elementos que no están en A, es decir,

$$A^c = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}.$$

Teorema 4.
Para cualquier conjunto A, se cumple que $(A^c)^c = A$.

Definición 11: Producto cartesiano.
El **producto cartesiano** de dos conjuntos A y B, denotado $A \times B$, es el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) donde $a \in A$ y $b \in B$; es decir,

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

3. Cardinalidad

Definición 12: Cardinalidad.
La **cardinalidad** de un conjunto A, denotada por $|A|$, es el número de elementos en A.

Teorema 5.
Dados dos conjuntos A y B, se cumple que $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

TEOREMA 6.
Dados dos conjuntos A y B, se cumple que $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

4. CONJUNTOS NUMÉRICOS

DEFINICIÓN 13: Conjunto de los números naturales.
El **conjunto de los números naturales**, denotado por $\mathbb{N}$, es el conjunto:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

DEFINICIÓN 14.
El **conjunto de los números enteros**, denotado por $\mathbb{Z}$, es el conjunto:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

DEFINICIÓN 15.
El **conjunto de los números racionales**, denotado por $\mathbb{Q}$, es el conjunto de todos los números que pueden ser expresados como una fracción de dos enteros, es decir:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}.$$

DEFINICIÓN 16.
El **conjunto de los números reales**, denotado por $\mathbb{R}$, es el conjunto de todos los números que pueden ser representados en la recta numérica.

TEOREMA 7.
Se tiene que

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

DEFINICIÓN 17: Intevalos.
Dados dos números reales a y b, con $a < b$, se definen los siguientes intervalos:

- $]a, b[= \{x : a < x < b\}$.
- $[a, b] = \{x : a \leqslant x \leqslant b\}$.
- $[a, b[= \{x : a \leqslant x < b\}$.
- $]a, b] = \{x : a < x \leqslant b\}$.
- $]-\infty, a[= \{x : x < a\}$.
- $]-\infty, a] = \{x : x \leqslant a\}$.
- $[a, +\infty[= \{x : x > a\}$.
- $[a, +\infty] = \{x : x \geqslant a\}$.