#### 数论函数选讲

任之洲

.....

PE312

PE530

PE441

杜教筛

DIVICITA

5...

和此系数方面

DIVCNT3

## 数论函数选讲

任之洲

绍兴市第一中学

2016年3月27日

## 数论函数

数论函数选讲

任之洲

数论函数

秋性函数 Dirichlet#

Möbius反演

PE512

PE530

DE44

31 44 A

DIVCIVI

和此不知书玉

DIVCNT3

### 数论函数

定义域为正整数的函数。

## 数论函数

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlet#

Möbius反源

D.E. . .

PE530

PE44

11 24 6

DIV (CA

DE400

积性函数求和

DIVCNT3

### 数论函数

定义域为正整数的函数。

#### 积性函数

对于所有gcd(a,b)=1,满足f(ab)=f(a)f(b)。

## 数论函数

数论函数选讲

任之洲

数论函数

秋性函数 Dirichlet

Möbius反源

PE512

PE53

DE//1

P E44.

杜教第

DIVCNT:

PF430

积性函数求和

数论函数

定义域为正整数的函数。

积性函数

对于所有gcd(a,b) = 1, 满足f(ab) = f(a)f(b)。

完全积性函数

对于所有a,b,满足f(ab)=f(a)f(b)。

## 常见的积性函数

数论函数选讲

任之洲

数论函数

积性函数 Dirichlets

Möbius反演

PE512

PE530

DE44:

41 36 2

DIVCNIT

积性函数求和

DIVCNT3

### Euler函数

 $\varphi(n)$ 表示[1, n]中与n互质的数的个数。

## 常见的积性函数

数论函数选讲

任之洲

数论函数

Möbius反演

2E512

PE53

PE441

红越尔

DIVCNT

PF430

积性函数求利

DIVCNT3

#### Euler函数

 $\varphi(n)$ 表示[1, n]中与n互质的数的个数。

#### Möbius函数

若n有平方数因子,则 $\mu(n)=0$ 。

否则, 若n为k个不同质数之积, 则 $\mu(n) = (-1)^k$ 。

## 常见的积性函数

数论函数选讲

任之洲

#### 数论函数

积性函数 Dirichlet#

Möbius反演 DEE1つ

DEE312

DE44:

P E441

D. 1. (C.)

DE420

积性函数求和

#### Euler函数

 $\varphi(n)$ 表示[1, n]中与n互质的数的个数。

#### Möbius函数

否则,若n为k个不同质数之积,则 $\mu$ (n) =  $(-1)^k$ 。

### 除数函数

 $\sigma_k(n)$ 表示所有正因子的k次幂之和。

 $d(n) = \sigma_0(n)$ , 表示n的正因子个数。

 $\sigma(n) = \sigma_1(n)$ ,表示n的所有正因子之和。

## 常见的完全积性函数

数论函数选讲

任之洲

#### 数论函数

秋性函数 Dirichlat#

Möbius反演

PE512

PE530

PF44

11 4/ /

DIVCNI

\_\_\_\_\_

积性函数求和

DIVCNT3

### 幂函数

$$Id_k(n) = n^k$$

$$1(n) = Id_0(n) = 1$$

$$Id(n) = Id_1(n) = n$$

## 常见的完全积性函数

#### 数论函数选讲

任之洲

#### 数论函数

対性函数 Dirichlet:

Möbius反演

PE512

PE530

PE44

11 34. 4

DE420

. . . .

积性函数求和

DIVCNT

### 幂函数

$$Id_k(n) = n^k$$
  
 
$$1(n) = Id_0(n) = 1$$

$$Id(n) = Id_1(n) = n$$

### 单位函数

$$e(n) = \epsilon(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

### Dirichlet卷积

数论函数选讲

任之洲

Möbius反演

PE512

PE530

DE44

11 4/ /

DIVCNIT

2...

积性函数求利

DIVCNT3

#### Dirichlet卷积

定义两个数论函数f,g的Dirichlet卷积

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

### Dirichlet卷积

数论函数选讲

任之洲

数论函数 <sup>积性函数</sup> Dirichlet卷积

Möbius&

DEE30

DEAA

г Ц44.

D. 1 (C.)

DIVCNI

积性函数求利

DIVCNT

#### Dirichlet卷积

定义两个数论函数f,g的Dirichlet卷积

$$(f*g)(n) = \sum_{d|n} f(d)g(\frac{n}{d})$$

### Dirichlet卷积的性质

交换律: f\*g=g\*f

结合律: (f \* g) \* h = f \* (g \* h)

分配律: f \* (g + h) = f \* g + f \* h

单位元:  $f * \epsilon = \epsilon * f$ 

若f,g均为积性函数,则f\*g也为积性函数。

### 常见的Dirichlet卷积

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数 <sup>积性函数</sup> Dirichlet卷积 Möbius后海

PE512

PE53

PE44

杜教员

DIVCNT

DE420

积性函数求和

DIVCNT3

### 常见的Dirichlet卷积

$$\begin{array}{l} d(n) = \sum_{d|n} 1, \ \ \mathbb{F}^p d = 1*1 \text{.} \\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d, \ \ \mathbb{F}^p \sigma = d*1 \text{.} \\ \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}, \ \ \mathbb{F}^p \varphi = \mu*Id \text{.} \\ \epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d), \ \ \mathbb{F}^p \epsilon = \mu*1 \text{.} \end{array}$$

### 常见的Dirichlet卷积

数论函数选讲

任之洲

数论函数 <sup>积性函数</sup> Dirichlet卷积 Möbius反演

PE512

. 2000

PE441

杜教师

DIVCNI

DE420

积性函数求和

DIVCNT3

#### 常见的Dirichlet卷积

$$\begin{array}{l} d(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \mathbb{P}^p d = 1*1\circ\\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d, \quad \mathbb{P}^p \sigma = d*1\circ\\ \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}, \quad \mathbb{P}^p \varphi = \mu* \mathit{Id}\circ\\ \epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d), \quad \mathbb{P}^p \epsilon = \mu*1\circ \end{array}$$

■ 设n有k(k > 0)个不同质因子。

### 常见的Dirichlet卷积

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数 <sup>积性函数</sup> Dirichlet卷积 Möbius反演

PE512

PE53

PE44

杜教师

DIVCNT:

DE420

积性函数求和

DIVCNT3

#### 常见的Dirichlet卷积

$$\begin{array}{l} d(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \operatorname{FP} d = 1*1\circ\\ \sigma(n) = \sum_{d|n} d, \quad \operatorname{FP} \sigma = d*1\circ\\ \varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d}, \quad \operatorname{FP} \varphi = \mu*\operatorname{Id}\circ\\ \epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d), \quad \operatorname{FP} \epsilon = \mu*1\circ \end{array}$$

- 设n有k(k > 0)个不同质因子。
- ■那么

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{i} {k \choose i}$$
$$= (1-1)^{k} = 0$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 <sup>积性函数</sup> Dirichlet卷8

Möbius反演

PE512

PE530

PE44

11 Jul. A

DIVCNT

J., C., . .

积性函数求和

DIVCNI

#### Möbius反演

如果有两个函数f,g满足

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$$

则它们也满足

$$g(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$$

反之亦然, 即

$$f = g * 1 \Leftrightarrow g = \mu * f$$

数论函数选讲

任之洲

**致比**购引

积性函数

Möbius反演

11100100

DEFOO

PE530

PE44:

杜教员

DIVCNT

和性函数求和

DIVCNTS

■ 设

$$f = g * 1$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 <sup>积性函数</sup>

Möbius<sub>反演</sub>

DE230

PF441

杜教》

DIVCNT

6-10 7 to 10 6

DIVCNT3

■ 设

$$f = g * 1$$

■ 两侧都卷上µ, 得

$$\mu*f=\mu*g*1$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 <sup>积性函数</sup> Dirichlet##

Möbius反演

DEESU

....

DIVCN 12

积性函数求和

DIVCNT3

■ 设

$$f = g * 1$$

■ 两侧都卷上µ, 得

$$\mu*f=\mu*g*1$$

■ 整理得

$$\mu * f = \epsilon * g = g$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 <sup>积性函数</sup> Dirichlet卷8

Möbius反演

DEESO

.. .. ..

**社**教师

DIVCN12

积性函数求和

DIVCNT

■ 设

$$f = g * 1$$

■ 两侧都卷上µ, 得

$$\mu*f=\mu*g*1$$

■ 整理得

$$\mu * f = \epsilon * g = g$$

■ 两侧都卷上µ, 得

$$g * 1 = \mu * f * 1 = \epsilon * f = f$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

D==00

F L44

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和

DIVCN.

#### 题目大意

设

$$f(n) = \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(n^{i})\right) \mod (n+1)$$

$$g(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

如
$$g(100) = 2007$$
。

数论函数选讲

任之洲

数比的 PE512

F L312

PE530

PE44:

杜教筛

DIVONT

DIVCIVI

7-11 7 to 11 7

DIVCNT3

■ 设n有m个不同质因子 $p_1 \sim p_m$ ,那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

数论函数选讲

PE512

■ 设n有m个不同质因子p<sub>1</sub> ~ p<sub>m</sub>, 那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

易得

$$\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$$

数论函数选讲

任之洲

**PE512** 

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT2

PE439

DIVCNT3

■ 设n有m个不同质因子 $p_1 \sim p_m$ ,那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

■ 易得

$$\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$$

■ 由于 $n \equiv -1 \pmod{n+1}$ ,所以

$$f(n) = \varphi(n) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}$$

数论函数选讲

任之洲

数化的 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和

■ 设n有m个不同质因子p<sub>1</sub> ~ p<sub>m</sub>, 那么有

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{m} \frac{p_i - 1}{p_i}$$

■ 易得

$$\varphi(n^k) = n^{k-1}\varphi(n)$$

■ 由于 $n \equiv -1 \pmod{n+1}$ ,所以

$$f(n) = \varphi(n) \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1}$$

■ 当n为奇数时, $f(n) = \varphi(n)$ ,否则f(n) = 0。利用线性筛可以O(n)计算。

数论函数选讲

**数 趴 瓜 数** 

PF512

PE530

FESSU

PE44

杜教筛

**DIVCNT2** 

积性函数求和

DIVCN.

### 题目大意

设

$$f(n) = \sum_{d|n} gcd(d, \frac{n}{d})$$

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$$

如
$$F(10) = 32$$
, $F(1000) = 12776$ 。  
求 $F(10^{15})$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE44

杜教员

DIVONT

DIVCIVI.

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \gcd(d, \frac{i}{d})$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE530

PESSU

PE44:

杜教育

DIVCNT

6-11 7 to 1: 6

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \gcd(d, \frac{i}{d})$$

$$= \sum_{d} d \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d^2} \rfloor} \sum_{d'|i} \epsilon(\gcd(d', \frac{i}{d'}))$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

PE441

杜教第

DIVONT

DIV CIVI.

\_\_\_\_

积性函数求和

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \gcd(d, \frac{i}{d})$$

$$= \sum_{d} d \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^{2}} \right\rfloor} \sum_{d'|i} \epsilon(\gcd(d', \frac{i}{d'}))$$

$$= \sum_{d} \sum_{d'} d\mu(d') \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{(dd')^{2}} \right\rfloor} \sigma_{0}(i)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE530

. 2550

杠教师

DIVCNT:

积性函数求和

$$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} \gcd(d, \frac{i}{d})$$

$$= \sum_{d} d \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor} \sum_{d'|i} \epsilon(\gcd(d', \frac{i}{d'}))$$

$$= \sum_{d} \sum_{d'} d\mu(d') \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{(dd')^2} \right\rfloor} \sigma_0(i)$$

$$= \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor} \sigma_0(i)$$

数论函数选讲

任之洲

数论画

\_\_\_\_

PE530

PF441

科粉鱼

DIVICALE

DIVCIVI

DIVCNT3

■ 需要计算

$$F(n) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor} \sigma_0(i)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

DIVCNTS

DIVCIVIZ

积性函数求和

■ 需要计算

$$F(n) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor} \sigma_0(i)$$

■  $\varphi(d)$ 只需要前 $\sqrt{n}$ 项,约数个数和可以 $O(\sqrt{n})$ 计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

DIVCNT2

DE420

积性函数求和

■ 需要计算

$$F(n) = \sum_{d=1}^{n} \varphi(d) \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d^2} \right\rfloor} \sigma_0(i)$$

■  $\varphi(d)$ 只需要前 $\sqrt{n}$ 项,约数个数和可以 $O(\sqrt{n})$ 计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i) = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

■暴力计算的复杂度为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i^2}}\right) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\frac{\sqrt{n}}{i}\right) = O(\sqrt{n} \ln n)$$

# The inverse summation of coprime couples Project Euler 441

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512 BE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

PE439

积性函数求和

#### 题目大意

设R(M)为所有满足以下条件的数对p, q的 $\frac{1}{nq}$ 的和。

- $1 \le p < q \le M$
- $p+q \geq M$
- $\gcd(p,q)=1$

设
$$S(N) = \sum_{i=2}^{N} R(i)$$
。  
如 $S(2) = R(2) = \frac{1}{2}$ , $S(10) \approx 6.9147$ , $S(100) \approx 58.2962$ 。  
求 $S(10^7)$ ,保留小数点后4位。

# The inverse summation of coprime couples Project Euler 441

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教翁

DIVCNT

DIVCNI

积性函数求和

■ 原问题为求

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

# The inverse summation of coprime couples Project Euler 441

数论函数选讲

任之洲

数论函参 PE512

PE530

PE441

DIVCNI

DIVCNT2

积性函数求利

■ 原问题为求

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

■ 设

$$F(N) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$$

# The inverse summation of coprime couples Project Euler 441

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE441

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和

■ 原问题为求

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

■ 设

$$F(N) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$$

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

数论函数选讲

PE441

■ 原问题为求

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \geq i] [gcd(p,q) = 1]$$

■ 设

$$F(N) = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$$

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$T(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q \ge N]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

. \_---

DIVCIVI

DE400

积性函数求和

$$T(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q \ge N]$$

数论函数选讲

数论函。 PE512

PE530

PE441

杜教翁

DIVCNT

DE420

积性函数求和

$$T(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q \ge N]$$

$$= \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{q=p+1}^{N-1} \frac{1}{pq} ([p+q \ge N-1] - [p+q=N-1])$$

$$+ \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{Np}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE441

. ...

DIVCNT

\_\_\_\_\_

积性函数求和

积性函数求和 DIVCNT3

$$T(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q \ge N]$$

$$= \sum_{p=1}^{N-1} \sum_{q=p+1}^{N-1} \frac{1}{pq} ([p+q \ge N-1] - [p+q=N-1])$$

$$+ \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{Np}$$

$$= T(N-1) - G(N-1) + \frac{F(N-1)}{N}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

41 44 2

DIVCNT

DIVCIVI.

和此派教士和

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

F L312

PE530

PE441

杜教员

DIVCN

\_\_\_\_\_

PE439

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p(N-p)} - \frac{1}{(\frac{N}{2})^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEESO

PE441

科教翁

DIVICINITY

DIVCNIZ

PE439

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p(N-p)} - \frac{1}{(\frac{N}{2})^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{N} (\frac{1}{p} + \frac{1}{N-p}) - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEFOO

PE441

.. .. ..

DIVCNIZ

PE439

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p(N-p)} - \frac{1}{\left(\frac{N}{2}\right)^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{N} (\frac{1}{p} + \frac{1}{N-p}) - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{Np} - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

数论函数选讲

PE441

$$G(N) = \sum_{p=1}^{N} \sum_{q=p+1}^{N} \frac{1}{pq} [p+q=N]$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{p(N-p)} - \frac{1}{(\frac{N}{2})^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{N} (\frac{1}{p} + \frac{1}{N-p}) - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left( 2 \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{Np} - \frac{4}{N^2} [N \mod 2 = 0] \right)$$

$$= \frac{F(N-1)}{N} - \frac{2}{N^2} [N \mod 2 = 0]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEFO

PE441

D. 101

DIVCIVI

. - . - .

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

DEESU

PE441

15 4/2/1

DIVCNT

积性函数求和

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] \sum_{d|gcd(p,q)} \mu(d)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 DEE10

DEE20

PE441

. . . . . .

\_ .. . \_ . \_

DIVCNT2

PE439

积性函数求和

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] \sum_{\substack{d \mid gcd(p,q)}} \mu(d)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \mu(d) \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \sum_{q=p+1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \frac{1}{pqd^{2}} [pd+qd \ge i]$$

数论函数选讲

PE441

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] [gcd(p,q) = 1]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{p=1}^{i} \sum_{q=p+1}^{i} \frac{1}{pq} [p+q \ge i] \sum_{\substack{d \mid gcd(p,q)}} \mu(d)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \mu(d) \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \sum_{q=p+1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \frac{1}{pqd^{2}} [pd+qd \ge i]$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \sum_{p=1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \sum_{q=p+1}^{\lfloor \frac{i}{d} \rfloor} \left( \frac{1}{pq} [p+q \ge \lfloor \frac{i}{d} \rfloor] \right)$$

$$- \frac{1}{pq} [p+q = \lfloor \frac{i}{d} \rfloor] [i \mod d \ne 0]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 DEE10

DEESU

PE530

PE441

杜教师

DIVCNT:

积性函数求和

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \frac{\mu(d)}{d^2} \left( T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$

数论函数选讲

双化四多 PE512

PE530

PE441

科教符

DIVENTS

DIVCN 12

PE439

积性函数求和

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \left( T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$
$$= \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \sum_{i=d}^{N} \left( T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$

数论函数选讲

数论函数 PE512 PE530 PE441 杜教筛 DIVCNT2 PE439 积性函数求和

$$S(N) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{d=1}^{i} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \left( T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$
$$= \sum_{d=1}^{N} \frac{\mu(d)}{d^{2}} \sum_{i=d}^{N} \left( T(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor) - G(\lfloor \frac{i}{d} \rfloor)[i \mod d \neq 0] \right)$$

■ 按 $\left|\frac{i}{d}\right|$ 的值分段计算,复杂度 $O(n \ln n)$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

DEE30

PE441

. . . . . .

DIV (CNIT

DIVCIVI

F L439

DIVCNT3

■ 经过一些复杂的分类讨论可以做到O(n)。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教筛 DIVCNT2

DIVCN I.

积性函数求和

- 经过一些复杂的分类讨论可以做到O(n)。
- 还有一个奥妙重重的做法:



 $O(N\log\log N)$  for precomputing Möbius function O(N) for precomputing Harmonic numbers O(N) for overall sum after that

$$S(N) = rac{1}{2} \Biggl( N - 3 + \sum\limits_{g=1}^N \mu(g) rac{1}{g^2} H(\left\lfloor rac{N}{g} 
ight
floor)^2 \Biggr) \,, \quad N \geq 2$$

0.6s in C++

### 一个实用技巧

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEE10

PE530

PE44

针粉分

杜教等

计算μ(n)之

DE420

1 1433

DIVICINTS

杜教筛

设f(n)为一个数论函数, $S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(i)$ 。 考虑再找到一个合适的数论函数g(n)。

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{d|i} f(d)g(\frac{i}{d}) = \sum_{i=1}^{n} g(i)S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

可以得到一个S(n)的递推式

$$g(1)S(n) = \sum_{i=1}^{n} (f * g)(i) - \sum_{i=2}^{n} g(i)S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

\_\_\_\_

DEESU

PE44

杜教》

杜教筛

计算μ(n)

DIVCNE

PF430

积性函数求利

DIVCNT3

■ 考虑计算 $S(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$ 。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

PF512

PE530

DE441

.. .. .

4年9天)

杜教筛

**サ非μ(n)**:

\_\_\_\_

See Jul. 27 dec. 40

DIVCNT3

■ 考虑计算
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$$
。

■ 由于 $\mu*1=\epsilon$ , 所以设g(n)=1, 那么

$$S(n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PF441

杜教员

杜教等

**计**界μ(**n**)之

DIVCIVI

积性函数求利

DIVCNT3

■ 考虑计算
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$$
。

■ 由于 $\mu*1=\epsilon$ , 所以设g(n)=1, 那么

$$S(n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

■ 由于 $\begin{bmatrix} \frac{\left\lfloor \frac{\lambda}{a} \right\rfloor}{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{ab} \end{bmatrix}$ ,所以递推时 $\begin{bmatrix} \frac{n}{i} \end{bmatrix}$ 的取值只有 $O(\sqrt{n})$ 种。

数论函数选讲

■ 考虑计算
$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(i)$$
。

■ 由于 $\mu * 1 = \epsilon$ , 所以设g(n) = 1, 那么

$$S(n) = 1 - \sum_{i=2}^{n} S(\lfloor \frac{n}{i} \rfloor)$$

- 由于 $\left[\frac{\left|\frac{\lambda}{a}\right|}{a}\right] = \left|\frac{\lambda}{a}\right|$ ,所以递推时 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 的取值只 有 $O(\sqrt{n})$ 种。
- 设 $m = |\sqrt{n}|$ , 那么这些取值为

$$1, 2, 3, \ldots, m-1, m, \lfloor \frac{n}{m} \rfloor, \lfloor \frac{n}{m-1} \rfloor, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lfloor \frac{n}{1} \rfloor$$

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函

DEE10

PE530

DEAA

41.4X.99

...,...,

DIVCIV

PE439

积性函数求利

DIVCNT3

■ 直接计算的复杂度为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O(\sqrt{i}) + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)$$

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函

DEE13

PE530

DE44

杜教第

计算**µ(n)**之和

DE400

积性函数求利

DIVCNT3

■ 直接计算的复杂度为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O(\sqrt{i}) + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)$$

■ 只需要考虑后半部分

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right) \approx O(n^{\frac{3}{4}})$$

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函

PE510

PE530

PF44

杜教師

##μ(n)之#

PF439

积性函数求和

DIVCNT3

■ 直接计算的复杂度为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O(\sqrt{i}) + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)$$

■ 只需要考虑后半部分

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} O\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right) \approx O(n^{\frac{3}{4}})$$

■ 利用积性预处理前n³项,可以将复杂度降到O(n²)。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

杜教翁

DIVCNT2

DIVCIVIZ

PE439

积性函数求和

#### 题目大意

设 $\sigma_0(n)$ 为n的约数个数,

$$S_2(n) = \sum_{i=1}^n \sigma_0(i^2)$$

求 $S_2(n)$ 。

### 数据范围

 $1 < n < 10^{12}$ , 20s, 1536MB.

数论函数选讲

任之洲

数论函数 DE512

PF530

DIVCNT2

2.....

和地不数书工

DIVCNT3

■ 设 $\omega(n)$ 为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函参 PE512

PE330

**科教**您

DIVCNT2

DIVCIVI.

积性函数求和

■ 设 $\omega(n)$ 为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

■ 考虑n的每个约数d,可以在 $d^2$ 中去掉d的一个质因子集合,也就是 $2^{\omega(d)}$ 种。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

55...

**杜教**篇

DIVCNT2

DIVCIVIZ

积性函数求和

■ 设ω(n)为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

- 考虑n的每个约数d,可以在 $d^2$ 中去掉d的一个质因子集合,也就是 $2^{\omega(d)}$ 种。
  - 这样可以枚举出n<sup>2</sup>的所有约数。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

DE441

**科粉節** 

DIVCNT2

DE420

积性函数求和

■ 设 $\omega(n)$ 为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

- 考虑n的每个约数d,可以在 $d^2$ 中去掉d的一个质因子集合,也就是 $2^{\omega(d)}$ 种。
  - 这样可以枚举出n<sup>2</sup>的所有约数。
- 于是,有

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE441

杜粉筛

DIVCNT2

DIVCIVIZ

积性函数求和

■ 设ω(n)为n的不同质因子个数,有

$$\sigma_0(n^2) = \sum_{d|n} 2^{\omega(d)}$$

- 考虑n的每个约数d,可以在 $d^2$ 中去掉d的一个质因子集合,也就是 $2\omega(d)$ 种。
  - 这样可以枚举出n<sup>2</sup>的所有约数。
- 于是,有

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

■ 可以按|?|分段计算。

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

. \_---

杜教员

DIVCNT2

和此派粉步和

DIVCNT3

■ 现在需要计算的是 $2^{\omega(i)}$ 之和, $2^{\omega(n)}$ 相当于n的无平方因子的约数个数。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PF512

DE230

\_\_\_.

DIVCNT2

DIVCIVIZ

和从系数书系

- 现在需要计算的是 $2^{\omega(i)}$ 之和, $2^{\omega(n)}$ 相当于n的无平方因子的约数个数。
- 所以,有

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE44

DIVCNT2

DIVCNIZ

GUZWE

DIVCNT3

- 现在需要计算的是 $2^{\omega(i)}$ 之和, $2^{\omega(n)}$ 相当于n的无平方因子的约数个数。
- 所以,有

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d)$$

■ 即

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^{2}(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

F L330

PE44:

杜教师

DIVCNT2

积性函数求和

■ 现在需要计算的是 $2^{\omega(i)}$ 之和, $2^{\omega(n)}$ 相当于n的无平方因子的约数个数。

■ 所以,有

$$2^{\omega(n)} = \sum_{d|n} \mu^2(d)$$

■ 即

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^{2}(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

■  $\sum_{i=1}^{n} \mu^{2}(i)$ 可以这样暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^{2}(i) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{n}{i^{2}} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

DE//1

11 - 林 尔

DIVCNT2

和州系数书和

DIVCNT3

数论函数选讲

任之洲

数论函 PF512

PE530

DEAA1

. \_ . . .

4上4X 列

DIVCNT2

1 2433

DIVCNT3

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函 PE512

PE530

PE441

杜教师

DIVCNT2

DIVCIVIZ

积性函数求和

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$
$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512 PE530 PE441 杜教筛 DIVCNT2

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{n}{i^2} \right\rfloor$$

### 数论函数选讲

DIVCNT2

### ■ 整理一下

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma_0(i^2) = \sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{\omega(i)} = \sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mu^2(i) = \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \mu(i) \left\lfloor \frac{n}{i^2} \right\rfloor$$

■ 用线性筛预处理n³ 以内的函数值, 复杂度O(n³ )

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512 PE530

PE441 杜教篇

DIVCNT:

PE439

积性函数求和

### 题目大意

设 $\sigma(n)$ 为n的所有约数之和,

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma(ij)$$

如S(1000) = 563576517282。 求 $S(10^{11}) \mod 10^9$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

DEAA.

11 27 4

D. 1. (C.)

PE439

DIVCNT3

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

PE44

11 M. A

DIVERT

PE439

积性函数求和

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv\epsilon(gcd(v, \frac{i}{u}))$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

DE441

.. .. .

DIVCNI

PE439

积性函数求和

DIVCNT3

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \epsilon(gcd(v, \frac{i}{u}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \sum_{d|gcd(v, \frac{i}{u})} \mu(d)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

PF441

11 34 75

D. 1 (CN) T

DIVCNI

PE439

积性函数求和

DIVCNT3

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \epsilon(gcd(v, \frac{i}{u}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \sum_{d|gcd(v, \frac{i}{u})} \mu(d)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mu(d) \sum_{l=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{l=1}^{l} u(vd) \lfloor \frac{n}{ud} \rfloor \lfloor \frac{n}{vd} \rfloor$$

$$S(n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k|ij} k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \epsilon(gcd(v, \frac{i}{u}))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{u|i} \sum_{v|j} uv \sum_{d|gcd(v, \frac{i}{u})} \mu(d)$$

$$= \sum_{d=1}^{n} \mu(d) \sum_{u=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{v=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} u(vd) \lfloor \frac{n}{ud} \rfloor \lfloor \frac{n}{vd} \rfloor$$

$$= \sum_{d=1}^{n} d\mu(d) \left( \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor} \sigma(i) \right)^{2}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

\_\_\_\_\_

PE53U

PE44

科教部

DIVCNT

PE439

和性函数求和

DIVCNT3

■  $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ 可以 $O(\sqrt{n})$ 暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT

PE439

积性函数求和

■  $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ 可以 $O(\sqrt{n})$ 暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

■ 线性筛预处理前n³3项后,这一部分复杂度为O(n²3)。

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

イータス プリ・

DIVCN I.

PE439

积性函数求和

■  $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ 可以 $O(\sqrt{n})$ 暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

- 线性筛预处理前n³3项后,这一部分复杂度为O(n²3)。
- 还需要计算 $\sum_{i=1}^{n} i\mu(i)$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

DE441

. . . . . .

DIVICALE

DIVCIVI.

PE439

积性函数求和

■  $\sum_{i=1}^{n} \sigma(i)$ 可以 $O(\sqrt{n})$ 暴力计算

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(i) = \sum_{i=1}^{n} i \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

- 线性筛预处理前n³ 项后,这一部分复杂度为O(n²)。
- 还需要计算 $\sum_{i=1}^{n} i\mu(i)$ 。
- 考虑如下等式

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)g\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$\Leftrightarrow g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

数论函数选讲

PE439

■ 证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

数论函数选讲

PE439

■ 证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{n} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 DEE12

DEESU

DE441

11 11 10

DIVCNI

PE439

积性函数求和

■证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{n} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|j} \mu(i)i\frac{j}{i}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT

PE439

积性函数求和

■ 证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{n} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|j} \mu(i)i\frac{j}{i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \epsilon(j)j$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

PE439

积性函数求和

■证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{n} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|j} \mu(i)i\frac{j}{i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \epsilon(j)j$$

$$= g(n)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函 DEE10

DEE20

1.1 347 745

D. 1 (CL)

DIVCNT

PE439

积性函数求和

■ 证明

$$g(n) = \sum_{k=1}^{n} kf\left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \sum_{i=1}^{n} i\mu(i)g\left(\left\lfloor \frac{n}{ki} \right\rfloor\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \sum_{i|j} \mu(i)i\frac{j}{i}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g\left(\left\lfloor \frac{n}{j} \right\rfloor\right) \epsilon(j)j$$

$$= g(n)$$

■ 反之亦然。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

DE44

杜教》

DIVCNI

PE439

积性函数求和

DIVCNT3

■ 设

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

DE441

杜教员

DIVCNI

PE439

积性函数求和

■ 设

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)$$

■那么

$$\sum_{k=1}^n kf(k) = 1$$

数论函数选讲

PE439

■ 设

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)$$

■ 那么

$$\sum_{k=1}^{n} kf(k) = 1$$

■ 可以得到一个f(n)的递推式

$$f(n) = 1 - \sum_{k=2}^{n} kf(k)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PF44

杜教筛

DIVCNT2

PE439

积性函数求和

■ 设

$$f(n) = \sum_{k=1}^{n} k\mu(k)$$

■那么

$$\sum_{k=1}^{n} kf(k) = 1$$

■ 可以得到一个f(n)的递推式

$$f(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n} kf(k)$$

■ f(n)也可以O(n<sup>2</sup>/<sub>3</sub>)完成计算, 总复杂度O(n<sup>2</sup>/<sub>3</sub>)。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEE10

PE530

PE44

杜教

DIVCN

PE439

积性函数求和

G(p)的计算F(x)的计算

■ 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DEE11

DEFO

P = 44

1-42

DIVCN.

积性函数求和

G(p)的计算 F(x)的计算

( ) . . . .

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:

数论函数选讲

任之洲

数论函数

DE513

\_\_\_\_

. 2550

. \_---

1-9271

DIVCNT

积性函数求和

G(p)的计算

DIVCNT3

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:
  - 当n为质数时,即n = p,F(p) = G(p)。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE510

DEFO

....

. . . . . .

\_ .. . \_ . . \_

DE420

积性函数求和

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNIS

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:
  - 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。
  - 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1, $F(p^c) = T(p^c)$ 。

#### 数论函数选讲

任之洲

#### 数论函

DEE10

\_\_\_\_

DEAA

\_ .. . \_ . . \_

PF430

#### 积性函数求和 G(p)的计算

F(x)的计算

DIVCNIS

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:
  - 当n为质数时,即n = p,F(p) = G(p)。
  - 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1, $F(p^c) = T(p^c)$ 。
  - 剩下的情况根据积性, $F(n) = \prod_{i=1}^k F(p_i^{c_i})$ 。

### 数论函数选讲

任之洲

#### 数论幽

PE512

PE530

PF441

**杜粉筛** 

DIVCNT

DE 400

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$ 。

■ 考虑这样来描述一个积性函数:

- 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。
- 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1, $F(p^c) = T(p^c)$ 。
- 剩下的情况根据积性, $F(n) = \prod_{i=1}^k F(p_i^{c_i})$ 。
- $\varphi(n)$   $\psi$ , G(p) = p 1,  $T(p^c) = (p 1)p^{c-1}$ .

#### 数论函数选讲

积性函数求和

■ 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^{k} p_i^{c_i}$ 。

■ 考虑这样来描述一个积性函数:

■ 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。

■ 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1,  $F(p^c) = T(p^c)$ 。

■ 剩下的情况根据积性,  $F(n) = \prod_{i=1}^{k} F(p_i^{c_i})$ 。

• 
$$\varphi(n)$$
  $\psi$ ,  $G(p) = p - 1$ ,  $T(p^c) = (p - 1)p^{c-1}$ .

■  $\mu(n)$   $\oplus$  , G(p) = -1 ,  $T(p^c) = 0$  。

#### 数论函数选讲

任之洲

#### 数论函

DEE13

PE530

PE44

科粉節

DIVCNT

DE 420

积性函数求和 G(p)的计算

DIVCNT3

NACN 13

- 设F(n)为一个积性函数,n的质因子分解为 $\prod_{i=1}^k p_i^{c_i}$ 。
- 考虑这样来描述一个积性函数:
  - 当n为质数时, 即n = p, F(p) = G(p)。
  - 当n为质数的幂时,即 $n = p^c$ 且c > 1, $F(p^c) = T(p^c)$ 。
  - 剩下的情况根据积性, $F(n) = \prod_{i=1}^k F(p_i^{c_i})$ 。
- $\varphi(n)$   $\psi$ , G(p) = p 1,  $T(p^c) = (p 1)p^{c-1}$ .
- $\mu(n)$  中 , G(p) = -1 ,  $T(p^c) = 0$  。
- 当G(p)和 $T(p^c)$ 是项数比较少的关于 $p, p^c$ 的多项式时怎么做?

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

55...

PE441

杜教筛

PE439

积性函数求和 G(p)的计算

DIVCNT3

### 一个简单的例子

定义一个欧拉函数的变种 $\phi(n,d)$ ,设 $n=\prod_{k=1}^{m}p_{k}^{c_{k}}$ 。其中 $p_{k}$ 为互不相同的质因子( $c_{k}>0$ ,即把n质因子分解),那么

$$\phi(n,d) = \prod_{k=1}^{m} (p_k^{c_k} + d)$$

特别地,定义 $\phi(1,d)=1$ 。对于给定的n,d,求

$$\left(\sum_{i=1}^n \phi(i,d)\right) \mod 10^9 + 7$$

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

...

1-42

PE439

#### 积性函数求和

G(p)的针》 F(x)的针》

DIVCNT3

### ■ 在这个函数中

$$G(p) = p+d$$
  
 $T(p^c) = p^c+d$ 

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

PF512

PF530

PF441

11 M. A

1-327

DIVCIN

DE420

### 积性函数求和

G(p)的計算 F(x)的計算

DIVCNT3

■ 在这个函数中

$$G(p) = p+d$$
  
 $T(p^c) = p^c+d$ 

对于一个正整数x(≤ n)。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

科粉節

DIVCNI

PE439

#### 积性函数求和

G(p)的开非 F(x)的计算

DIVCNT3

■ 在这个函数中

$$G(p) = p+d$$
  
 $T(p^c) = p^c+d$ 

- 对于一个正整数x(≤ n)。
  - 最多拥有一个> √n的质因子。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

1.1 Jul. 1/4

D. 1. (CA)

PE439

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

■ 在这个函数中

$$G(p) = p+d$$
  
 $T(p^c) = p^c+d$ 

- 对于一个正整数x(≤ n)。
  - 最多拥有一个> √n的质因子。
  - 如果存在,则幂次一定为1。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

11 並 25

DIV (CN)

PE439

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 在这个函数中

$$G(p) = p+d$$
  
 $T(p^c) = p^c+d$ 

- 对于一个正整数x(≤ n)。
  - 最多拥有一个> √n的质因子。
  - 如果存在,则幂次一定为1。
- 所以,有

$$\sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \\ x \wr f \uparrow f f \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{\frac{1}{2}}}} F(x) \left( 1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

PE530

DE44

11 40.0

DIVCN

DE420

积性函数求和

G(p)的計算 F(x)的計算

DIVCNT3

$$\sum_{i=1}^n F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \ x 
eq f 
otin 
otin f 
otin f$$

数论函数选讲

任之洲

**级比**购

PE512

PE530

PF441

11 44 7

D. 1. (C.

PE43

积性函数求和 G(p)的计算

F(x)的计算

DIVCNT3

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \\ x \wr f \uparrow f \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{2}}} F(x) \left( 1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 分为两部分计算

数论函数选讲

任之洲

双比吗!

PE512

F L550

PE441

杜粉節

DIVCN

DE42

P E43

积性函数求和 G(p)的计算

DIVCNT3

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \\ x \wr f \nmid f + \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{2}}} F(x) \left( 1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 分为两部分计算

$$\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

数论函数选讲

任之洲

致化吗!

PE512

PE530

PF44

11 bl 6

DIVCN

PE43

积性函数求和 G(p)的计算

F(x)的计算

DIVCNI3

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = \sum_{\substack{x \leq n \\ x \gtrsim n \neq 1 + \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{2}}} F(x) \left( 1 + \sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 分为两部分计算

$$\sum_{\substack{x \le n \\ x \ni x + x = G \neq 0}} F(x)$$

数论函数选讲

■ 需要对每种 | つ | 计算

$$\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT

积性函数求: **G(p)的计算** F(x)的计算

DIVCNT3

■ 需要对每种 | <sup>n</sup>/<sub>x</sub> | 计算

$$\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 相当于求≤ [n/x]的质数和及质数个数。

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE511

DEES

DIVCIVI

积性函数求 G(p)的计算 F(v)的计算

DIVONTE

■ 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PF512

DEE30

DE441

杜粉的

DIVCNT

积性函数求

F(X)的计非

- 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。
- 设 $P_k[i][j]$ 为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论幽

PE512

PE530

PE441

杜粉篇

DIVCNT

积性函数求:

DIVONT

- 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。
- 设 $P_k[i][j]$ 为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
  - 需要求的即为P<sub>0</sub>[m][j]和P<sub>1</sub>[m][j]。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函 PF512

PE530

DE//1

11 14 15

\_ .. . \_ .

PE439

イバイエ 四 数 ネイ **G(p)**的計算 F(x)的計算

DIVCNI

- 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。
- 设 $P_k[i][j]$ 为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
  - 需要求的即为P<sub>0</sub>[m][j]和P<sub>1</sub>[m][j]。
- 设 $I = \begin{bmatrix} \underline{j} \\ p_i \end{bmatrix}$ ,容易得到以下递推式

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCN

DE/20

PE439

イス (王 1945) (元 イ **G(p) 的 计算** F(x) 的 计算

DIVCNT:

- 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。
- 设 $P_k[i][j]$ 为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
  - 需要求的即为P<sub>0</sub>[m][j]和P<sub>1</sub>[m][j]。
- 设 $I = \begin{bmatrix} \underline{j} \\ p_i \end{bmatrix}$ ,容易得到以下递推式

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

■ 即去掉1~j中还没有被筛掉的p;的倍数。

数论函数选讲

任之洲

数论函数 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCN

PE439

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。

- 设P<sub>k</sub>[i][j]为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
  - 需要求的即为P<sub>0</sub>[m][j]和P<sub>1</sub>[m][j]。
- 设 $I = \begin{bmatrix} \underline{j} \\ \underline{n} \end{bmatrix}$ ,容易得到以下递推式

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

- 即去掉1~ j中还没有被筛掉的p;的倍数。
- 递推时只需要计算[n/z]这些状态就能完成转移。

数论函数选讲

数论函数

PE512 PE530

PE441

杜教筛

DE420

积性函数求和 **G(p)的计算** F(x)的计算

ア(x)約打手 DIVCNT3 ■ 设 $p_1 \sim p_m$ 为 $\leq \sqrt{n}$ 的质数,且 $p_i < p_{i+1}$ 。

- 设 $P_k[i][j]$ 为[1,j]范围内与前i个质数互质的数的k次方之和。
  - 需要求的即为P<sub>0</sub>[m][j]和P<sub>1</sub>[m][j]。
- 设 $I = \begin{bmatrix} \underline{j} \\ \underline{n} \end{bmatrix}$ , 容易得到以下递推式

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

- 即去掉1~ j中还没有被筛掉的p;的倍数。
- 递推时只需要计算 | □ | 这些状态就能完成转移。
- 递推完成后,也就计算出了我们需要所有值。

#### 数论函数选讲

任之洲

30,70,20

PE512

DE230

. \_---

DIVCIVI

积性函数求

**G(p)的计算** F(x)的计算

DIVONTE

■ 估计暴力递推的复杂度

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

#### 数论函数选讲

任之洲

DE===

1 L312

. 2000

PE441

杠视师

DIVCNI

DE....

积性函数求利 G(p)的计算

DIVCNT3

■ 估计暴力递推的复杂度

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

■ 考虑对于每个[n/x]计算有多少质数需要转移。

#### 数论函数选讲

**G(p)**的计算

■ 估计暴力递推的复杂度

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

- 考虑对于每个| □ | 计算有多少质数需要转移。
  - 设质数密度为O(<sup>1</sup>/<sub>log n</sub>)。

# 数论函数选讲

G(p)的计算

■ 估计暴力递推的复杂度

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k P_k[i-1][l]$$

- 考虑对于每个|?|计算有多少质数需要转移。
  - 设质数密度为O(<sup>1</sup>/<sub>log n</sub>)。
  - 那么计算量可估计为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{\log i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \min(\frac{n}{i}, \sqrt{n}) \rfloor}{\log n} \approx O\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论函

PE512

DEFO

. - . .

仁似

DIVCNT

积性函数求

**G(p)的计算** F(x)的计算

DIVCNT

 $\blacksquare$  当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函

PF512

DEESU

....

. \_---

\_ .. . \_ . .

积性函数求 G(p)的计算

DIVCN 13

- 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。
- 所以,当 $p_i^2 > j \ge p_i$ 时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

#### 数论函数选讲

**G(p)**的计算

■ 当 $p_{i+1} > i$ 时,一定满足 $P_{k}[i][j] = 1$ 。

- 所以, 当p<sub>i</sub><sup>2</sup> > i > p<sub>i</sub>时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

■ 因此,不必重新计算p;<sup>2</sup> > j的情况。

数论函数选讲

任之洲

双比吗

. \_\_\_\_

----

F L44.

1- 4-671

积性函数求和 **G(p)的计算** F(x)的计算 ■ 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。

■ 所以, 当 $p_i^2 > i \ge p_i$ 时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

- 因此,不必重新计算 $p_i^2 > j$ 的情况。
  - 记录j最近一次被更新时的i的值,设为 $pre_j$ 。

数论函数选讲

任之洲

数论函 DEF10

PE530

PF441

杜教筛

DIVCNT

积性函数求和 **G(p)的计算** F(x)的计算 ■ 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。

■ 所以、当p<sub>i</sub><sup>2</sup> > j > p<sub>i</sub>时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

- 因此,不必重新计算 $p_i^2 > j$ 的情况。
  - 记录j最近一次被更新时的i的值,设为prej。
  - 在调用P<sub>k</sub>[i][j]时,将编号pre<sub>j</sub> + 1 ~ i间的质数计入。

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。

■ 所以, 当p<sub>i</sub><sup>2</sup> > j > p<sub>i</sub>时

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

- 因此,不必重新计算 $p_i^2 > j$ 的情况。
  - 记录j最近一次被更新时的i的值,设为prej。
  - 在调用 $P_k[i][j]$ 时,将编号 $pre_i + 1 \sim i$ 间的质数计入。
- 考虑对于每个[n/]计算有多少质数需要转移。

数论函数选讲

任之洲

数论函。 PE512

PE530

PE441

杜粉絲

DIVCNT

积性函数求和 **G(p)的计算** F(x)的计算 DIVCNT3 ■ 当 $p_{i+1} > j$ 时,一定满足 $P_k[i][j] = 1$ 。

■ 所以, 当 p;<sup>2</sup> > i > p;时

$$a p_i > J \leq p_i$$

$$P_k[i][j] = P_k[i-1][j] - p_i^k$$

- 因此,不必重新计算 $p_i^2 > j$ 的情况。
  - 记录j最近一次被更新时的i的值,设为prei。
  - 在调用P<sub>k</sub>[i][j]时,将编号pre<sub>i</sub>+1~i间的质数计入。
- 考虑对于每个[n/x]计算有多少质数需要转移。
  - 那么计算量可估计为

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\sqrt{i}}{\log i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \sqrt{\frac{n}{i}} \rfloor}{\log n} \approx O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$$

数论函数选讲

任之洲

双印

PE512

DEESC

DE441

DIV (CNI

积性函数求和 G(n)的计算

F(x)的计算

■ 需要对每种[n/x]计算

$$\sum_{\substack{x \le n \\ x \not = f \ f \ f}} F(x)$$

#### 数论函数选讲

数论函。 DEC10

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

积性函数求系 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 需要对每种 | ½ | 计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x \not \subseteq f, f \neq \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{\frac{n}{2}}}} F(x)$$

■ 由于 $\left[\frac{n}{x}\right]$ 值相同的F(x)需要乘的系数是相同的,所以可以直接用 $\left[\frac{n}{y}\right]$ 来表示状态。

#### 数论函数选讲

任之洲

**双阳**的

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT:

PE439

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT:

■ 需要对每种 | º | 计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x$$
没有大于 $\sqrt{n}$ 质因子

- 由于 $\left[\frac{n}{x}\right]$ 值相同的F(x)需要乘的系数是相同的,所以可以直接用 $\left[\frac{n}{x}\right]$ 来表示状态。
  - \* 状态数 O(√n)。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函 PF512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT2

积性函数求和 G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT3

■ 需要对每种 | ½ | 计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x \not \in \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{2}}} F(x)$$

- 由于 $\lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 值相同的F(x)需要乘的系数是相同的,所以可以直接用 $\lfloor \frac{n}{y} \rfloor$ 来表示状态。
  - 状态数O(√n)。
  - 设 $y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ , 那么转 $8x \to xp$ , 等价于 $y \to \lfloor \frac{y}{p} \rfloor$ .

#### 数论函数选讲

F(x)的计算

в 需要对每种 | <u>п</u> | 计算

$$\sum_{\substack{x \leq n \\ x \not \subseteq A \neq T \sqrt{n} \notin \mathbb{B}^{\frac{n}{2}}}} F(x)$$

- 由于[元]值相同的F(x)需要乘的系数是相同的,所以可以直接用[元]来表示状态。
  - 状态数 O(√n)。
  - 设 $y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ , 那么转移 $x \to xp$ , 等价于 $y \to \lfloor \frac{y}{p} \rfloor$ 。
- 枚举每一个不超过√n的质数进行转移。

数论函数选讲

任之洲

双印

PE512

DEESC

DIVENT

积性函数求利

G(p)的计算 E(v)M21 #

(x)-2-131

■同样考虑对于每个[n/x]计算有多少质数需要转移。

数论函数选讲

任之洲

**致比**幽。

PE512

PE530

PE441

杜教筛

DIVCNT

积性函数求 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 同样考虑对于每个| ½| 计算有多少质数需要转移。

■ 转移时需要枚举这种质因子的幂次,看上去计算量是这 样的

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{\log i} \log i + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \min(\frac{n}{i}, \sqrt{n}) \rfloor}{\log n} \log n \approx O(n)$$

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE530

PF441

44 数 篇

DIVCNT

积性函数求系 G(p)的计算 F(x)的计算 DIVCNT3

- 同样考虑对于每个[n/]计算有多少质数需要转移。
  - 转移时需要枚举这种质因子的幂次,看上去计算量是这 样的

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{i}{\log i} \log i + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \min(\frac{n}{i}, \sqrt{n}) \rfloor}{\log n} \log n \approx O(n)$$

■ 考虑有哪些质因子贡献1次、2次、3次...

$$h(n) = \sum_{2 \le i \le \log n} \lfloor n^{\frac{1}{i}} \rfloor \approx O(\sqrt{n})$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{i + h(i)}{\log i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{\lfloor \min(\frac{n}{i}, \sqrt{n}) \rfloor + h(\frac{n}{i})}{\log n} \approx O\left(\frac{n}{\log n}\right)$$

数论函数选讲

任之洲

数论幽?

DEE11

PE53

PE44

11 47 7

DIV (CNI

D. . . . . .

DE.00

积性函数求和

F(x)的计算

DIVCNITS

■回想前一部分是如何优化的。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

DEESC

. -..

1-42

DIVCNT

积性函数求和

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNT

- ■回想前一部分是如何优化的。
- 考虑如何省去 $p_i^2 > y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 时的运算。

#### 数论函数选讲

- 回想前一部分是如何优化的。
- 考虑如何省去 $p_i^2 > y = |\frac{n}{v}|$ 时的运算。
  - $p_i^2 > y \Rightarrow \lfloor \frac{y}{p_i} \rfloor < p_i \leq \sqrt{n}$ .

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

PF512

PF530

DEAA1

DIVCN 12

积性函数求 G(p)的计算 F(x)的计算 ■ 回想前一部分是如何优化的。

■ 考虑如何省去 $p_i^2 > y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 时的运算。

$$p_i^2 > y \Rightarrow \lfloor \frac{y}{p_i} \rfloor < p_i \leq \sqrt{n}$$
.

■ 当 $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor \leq \sqrt{n}$ 时

$$1+\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

### 数论函数选讲

#### 数论函数

PE512

PE530

PE441

科粉節

DIVCNIT

DIV CIVI

积性函数求和 G(p)的计算 F(v)的计算

F(x)的计算

■ 回想前一部分是如何优化的。

- 考虑如何省去 $p_i^2 > y = \lfloor \frac{n}{x} \rfloor$ 时的运算。

  - 当 $\left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor \leq \sqrt{n}$ 时

$$1+\sum_{\substack{\sqrt{n}$$

■ 于是不需要区分转移后的[½]具体是多少,只要计算对应的质数和累计入答案即可。

#### 数论函数选讲

任之洲

数论函数

\_\_\_\_\_

D= . . .

.. .. ..

DIV (CNIT

DIVCIVIZ

PE439 积性函数求利

G(p)的计算 F(x)的计算

DIVCNI

■ 同样考虑对于每个| □ | 计算有多少质数需要转移。

$$h(n) = \sum_{2 \le i \le \log n} \lfloor n^{\frac{1}{i}} \rfloor \approx O(\sqrt{n})$$

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{h(i)}{\log i} + \sum_{i=1}^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \frac{h(\frac{n}{i})}{\log n} \approx O\left(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n}\right)$$

## Counting Divisors (cube) SPOJ DIVCNT3

数论函数选讲

任之洲

数论函数

PE512

PE53

PF44

4 数 篇

DIVCNT

DIV CIVI 2

PF439

积性函数求和

DIVCNT3

#### 题目大意

设 $\sigma_0(n)$ 为n的约数个数,

$$S_3(n) = \sum_{i=1}^n \sigma_0(i^3)$$

求 $S_3(n)$ 。

#### 数据范围

 $1 < n < 10^{11}$ , 20s, 1536MB.

### Counting Divisors (cube) SPOJ DIVCNT3

数论函数选讲

任之洲

致化吗!

PE512

PE530

PE44:

44 数 3

DUCKIT

DIVCIVIZ

. . . . .

DIVCNT3

■ 设
$$F(n) = \sigma_0(n^3)$$
,那么

$$G(p) = 4$$

$$T(p^c) = 3c + 1$$

### Counting Divisors (cube) SPOJ DIVENT3

数论函数选讲

任之洲

数论函 PF512

DEESO

55...

1 2441

杜教师

DIVCNT2

积性函数求和

DIVCNT3

■ 设
$$F(n) = \sigma_0(n^3)$$
, 那么

$$G(p) = 4$$

$$T(p^c) = 3c + 1$$

■ 可以直接计算,复杂度 $O(\frac{n^{\frac{3}{4}}}{\log n})$ 。

#### To Be Continued

数论函数选讲

任之洲

XX 10 109

PE512

PE530

PF44

11 Jul. 10

\_ .. . \_ . . \_

DIVCN I

\_\_\_\_

积性函数求和

DIVCNT3

这里大概会有一张插图

ASC选讲

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D

#### 题目大意

给出两个由 $\leq k$ 的正整数构成的数列A,B,长度为n,m。 求出一个由 $\leq k$ 的正整数构成的数列C,使得C既不是A的子序列也不是B的子序列。

要求输出一个最小长度的可行方案。

#### 数据范围

 $n, m, k \le 5000$ 

ASC选进

任之洲

ASC35H

. . . . . .

ASC45

ASC451

ΔSC471

. . . . . .

ASC 241

■ 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?

ASC选进

任之洲

ASC35H

ASC3F

. . . . . . .

ASC45L

A C C 471

ASC19

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
  - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。

ASC选访

ASC35H ASC35F

ASC45D

ASC47D

ASCIO

ΔSC24

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
  - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。

ASC选计

ASC35H
ASC35F
ASC45H
ASC45D
ASC47D
ASC18I

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
  - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA<sub>i.c</sub>为在数列A中, i之后第一次出现c的位置。

ASC选计

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D ASC18I

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
  - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA<sub>i,c</sub>为在数列A中,i之后第一次出现c的位置。
  - 这个数组可以O(nk)递推得到。

ASC选讲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
  - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA<sub>i.c</sub>为在数列A中,i之后第一次出现c的位置。
  - 这个数组可以O(nk)递推得到。
  - 对于一个i,  $Max{nextA_{i,c}} i \ge k 1$ 。

ASC选讲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D ASC18I

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
  - 在A, B上贪心逐个匹配, 尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA<sub>i.c</sub>为在数列A中,i之后第一次出现c的位置。
  - 这个数组可以O(nk)递推得到。
  - 对于一个i,  $Max{nextA_{i,c}} i \ge k 1$ 。
    - 一定能找到一个c, 使得c下次出现在k个位置之后。

ASC选讲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D ASC18I

- 对于一个已知数列,如何判断它是否是A,B的子序列?
  - 在A.B上贪心逐个匹配,尽可能匹配靠前位置。
- 预估一下答案的上界。
- 设nextA<sub>i.c</sub>为在数列A中, i之后第一次出现c的位置。
  - 这个数组可以O(nk)递推得到。
  - 对于一个i,  $Max{nextA_{i,c}} i \ge k 1$ 。
    - 一定能找到一个c,使得c下次出现在k个位置之后。
- 可以贪心每次选择一个在A,B中下次出现最靠后的数放到C末端,所以答案在O(\(\frac{n+m}{k}\))范围内。

ASC选讲

任之洲

ASC35H

V 2 C 3 E

ASC45I

ACC4FF

ASC 24

■ 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。

ASC选计

任之洲

ASC35H

ASC35F ASC45F

ASC45D

ASC47[

ASC18

- 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。
  - 可以O(k)枚举下一个位置的数。

ASC选讲

任之洲

ASC35H

ASC45F

ASC45D

ASC47I

ASCIO

- 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。
  - 可以O(k)枚举下一个位置的数。
  - 利用nextA<sub>i,c</sub>和nextB<sub>i,c</sub>转移。

ASC选讲

任之洲

ASC35H

ASC451

ASC4ED

ACC471

46610

73610

- 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。
  - 可以O(k)枚举下一个位置的数。
  - 利用nextA<sub>i,c</sub>和nextB<sub>i,c</sub>转移。
- 这一部分的复杂度为

$$O(|C_{ans}|nk) \le O(\frac{n+m}{k}nk) = O((n+m)n)$$

ASC选讲

任之洲

ASC35H

ASC35F

ASC45D

ASC47[

ASC18I

ASC24

- 设F[i][j]表示长度为i的C数列,在A数列中匹配到第j位时,B数列中匹配的最远位置。
  - 可以O(k)枚举下一个位置的数。
  - 利用nextA<sub>i,c</sub>和nextB<sub>i,c</sub>转移。
- 这一部分的复杂度为

$$O(|C_{ans}|nk) \le O(\frac{n+m}{k}nk) = O((n+m)n)$$

■ 时间复杂度 O((n+m)k+(n+m)n)

#### **Graph Factorization**

Andrew Stankevich Contest 35 F

ASC选讲

任之洲

ASC35H
ASC35F
ASC45H
ASC45D
ASC47D

#### 题目大意

对于一张2n个点的无向完全图G。

要求将其拆为m个边集不相交的子图,其中第i张子图的每个点的度数都必须恰好为ai。

构造一组可行解。

#### 数据范围

$$n \le 100$$
,  $m \le 2n - 1$ ,  $\sum a_i = 2n - 1$ 

#### **Graph Factorization**

Andrew Stankevich Contest 35 F

ASC选讲

任之洲

ASC35H
ASC35F
ASC45H
ASC45D
ASC47D
ASC18I

#### 题目大意

对于一张2n个点的无向完全图G。

要求将其拆为m个边集不相交的子图,其中第i张子图的每个点的度数都必须恰好为ai。

构造一组可行解。

#### 数据范围

$$n \le 100, m \le 2n-1, \sum_{i=1}^{n} a_i = 2n-1$$

■ 由于m可以取到2n-1, 所以问题等价于a; = 1。

ASC选讲

任ラ洲

ASC35F

ASC35F

V C V E L

A3C47L

ASC1

**ASC24** 

ASC选讲

任之洲

ASC35

ASC35F

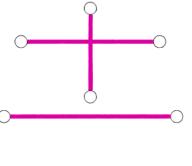
A C C A E I

A3C43D

ASC47[

ACC10

ASC241





ASC选讲

任之洲

ASC35

ASC35F

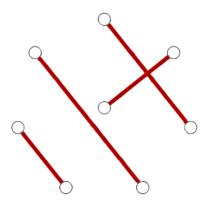
ASC45I

ASC/ED

713 C 11 L

ASCI

ASC24



### Graph Factorization

Andrew Stankevich Contest 35 F

ASC选讲

任之洲

ASC35

ASC35F

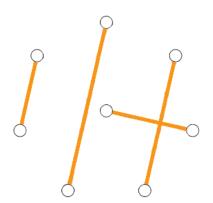
ASC451

A3C+3L

ASC47I

A C C 1 C

46604



ASC选讲

任之洲

ASC351

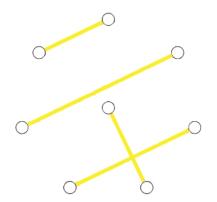
ASC35F

V C V E F

A3C4/1

ASC18

15024



ASC选讲

任之洲

ASC351

ASC35F

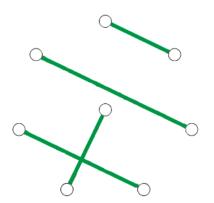
ASC45I

ASC450

713 C 11 L

ASCI

ASC24



ASC选讲

任之洲

ASC35

ASC35F

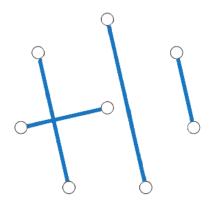
ASC451

ASCAED

. . . . .

. . . . .

A C C 2 4 1



ASC选讲

任之洲

ASC35

**V2C3E** 

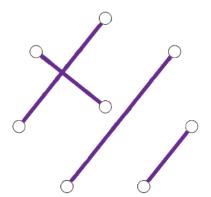
ASC45I

V & C \ E D

713 C-171

ASCI

ASC24



ASC选讲

任之洲

ASC35

ASC35I

ASC451

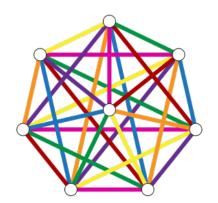
ASC45D

ASC47I

ACC1

40004

■ 最终整张图会被划分成这样, 问题解决。



#### Hide and Seek

Andrew Stankevich Contest 45 H

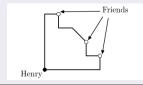
ASC45H

#### 题目大意

给出一个n个点的多边形。

- 1号点所在的角是凸的,即两边多边形内部夹角< 180°。
- 1号点能在多边形内部看见其他所有点。

求一个最大的顶点集合, 使得点集中的点两两不可见。



#### 数据范围

$$3 \le n \le 500, -10^5 \le x_i, y_i \le 10^5$$

## Hide and Seek Andrew Stankevich Contest 45 H

ASC选讲

任之 洲

ASC45I

ASC45E

ASC47E

ASC18

ASC24I

■ 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。

#### Hide and Seek

Andrew Stankevich Contest 45 H

ASC选计

任之洲

ASC35

A C C S E I

ΔSC451

A C C 4 F F

ASC47[

ASC18

ASC24I

- 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。
  - 不选点/的情况即为F[/+1][r]。

任之洲

ASC351

ASC35I

ASC45H

ASCAED

ASCI

4SC24

- 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。
  - 不选点/的情况即为F[/+1][r]。
  - 假设选择了点1,设点1能依次看到点a1~am。

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} F[a_i + 1][a_{i+1} - 1]$$

任之洲

ASC351

ASC35I

ASC45H

ASC45D

ASC47

ASC19

ASC24

- 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。
  - 不选点/的情况即为F[/+1][r]。
  - 假设选择了点1,设点/能依次看到点a1~am。

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} F[a_i + 1][a_{i+1} - 1]$$

■ 可以参考下图



任之洲

ASC35

ASC35I

ASC45H

ASC45D

A C C 471

. . . . .

, 10 010

45C24

- 设F[/][r]为1~r这一段顶点中能选取的最大点集。
  - 不选点/的情况即为F[/+1][r]。
  - 假设选择了点/,设点/能依次看到点a1~am。

$$1 + \sum_{i=1}^{m-1} F[a_i + 1][a_{i+1} - 1]$$

■ 可以参考下图



■ 时间复杂度O(n³)或O(n²)

## Drunkard's Walk

Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D ASC18I

#### 题目大意

构造一张n个点的图,除了点n-1和点n外均有两条出边。 一开始的位置在点1,每次等概率选择一条出边走,最终必须 到达n-1或n,并且到n-1的概率为 $\frac{D}{q}$ 。

#### 数据范围

$$1 \le p < q \le 100$$
 要求构造出的 $n \le 1000$ 

### Drunkard's Walk

Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

ASC35

ΔSC351

ASC45I

ASC45D

ACC10

ASC241

■ 构造一条q+1个点的链



# Drunkard's Walk Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

ASC351

ASC45F

ASC45D

A C C 47F

ACC10

ASC24

■ 构造一条q+1个点的链



■ 起点设为p, 两个终点分别为0和q。

#### Drunkard's Walk Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

ASC351

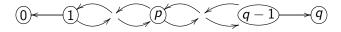
ASC45D

ASC47D

ASC181

ASC24

■ 构造一条q+1个点的链



- 起点设为p, 两个终点分别为0和q。
- 设这条链上第 $i(1 \le i < q)$ 个点最终走到0的概率为 $g_i$ 。

#### Drunkard's Walk

Andrew Stankevich Contest 45 D

ASC选讲

任之洲

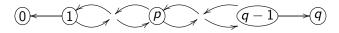
ASC35F ASC35F ASC45F

ASC47D

ACC101

ASC24

■ 构造一条q+1个点的链

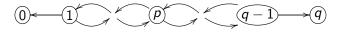


- 起点设为p, 两个终点分别为0和q。
- 设这条链上第 $i(1 \le i < q)$ 个点最终走到0的概率为 $g_i$ 。
- 那么有

$$g_i = \frac{g_{i-1} + g_{i+1}}{2}$$

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ■ 构造一条q+1个点的链



- 起点设为p, 两个终点分别为0和q。
- 设这条链上第 $i(1 \le i < q)$ 个点最终走到0的概率为 $g_i$ 。
- ■那么有

$$g_i = \frac{g_{i-1} + g_{i+1}}{2}$$

■ 易得 $g_i = \frac{i}{a}$ ,  $g_p = \frac{p}{a}$ , 问题解决。

ASC47D

#### 题目大意

给出一个长度为n的串,要求构造两个的DFA自动机。

- 状态数不超过n+1。
- 1为起始态,可以自由确定若干接收态。
- 对干字符集(小写字母)中的每种字符都有对应转移。
- 这两个DFA自动机能接受的串的集合的交为给定串。

#### 数据范围

$$1 \le n \le 50$$

ASC选讲

任之洲

ASC35

40000

ACC45

. . . .

A3C47

ASC18

ASC24E

■ 为了帮助理解题意,再给出一些说明。

ASC选计

任之洲

ASC35

ASC35

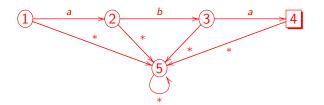
A5C45D

ASC47I

. . . . .

ASC 24

- 为了帮助理解题意,再给出一些说明。
- 容易构造一个状态数为n+2的DFA自动机使得它只能接收给定的串。



ASC选计

任之洲

ASC35

ASC45H

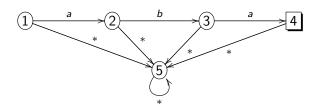
ASC45D

ASC471

A3C10

ASC241

- 为了帮助理解题意,再给出一些说明。
- 容易构造一个状态数为n+2的DFA自动机使得它只能接收给定的串。



■ 整个串由同一种字符构成时, 无解。

ASC选讲

任之洲

ASC35F

۸۶۲۵۶

ASC45F

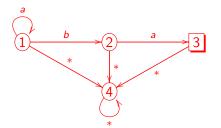
A C C A E D

A3C411

ASC18

ASC241

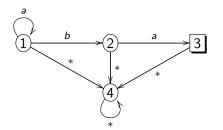
■ 可以构造出一个点数不超过n+1的DFA来接收将串首字符无限复制的串集。



ASC选讲

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ■ 可以构造出一个点数不超过n+1的DFA来接收将串首字符无限复制的串集。



■ 同理可以对串尾字符构造,将这个两个DFA取交即为给 定串。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

A5C35

ASCAE!

ASC45D

A C C 47 F

ASC18I

ASC24

#### 题目大意

给出一个 $1 \sim k$ 的排列B,求有多少 $1 \sim n$ 的排列A满足

- B是A子序列。
- $\blacksquare A_{A_i} = i \circ$

#### 数据范围

$$1 \le k \le n \le 200$$
,  $B_i \le k$ 

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC351

, 10 000.

. . . . . . .

A3C43

ASC45

ASC47I

ASC18

ASC24I

■ 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$ ,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35I

A C C O F I

V C ( V E I

ASC45L

ΔSC47[

ASC18I

ASC24

- 因为B是A的子序列,设A<sub>bi</sub> = B<sub>i</sub>,那么A<sub>Bi</sub> = b<sub>i</sub>。
  - 对于i < j, 一定满足A<sub>Bi</sub> < A<sub>Bj</sub>。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35F

ASC45H

ASC45D

ASC47E

ASC18I

ASC24I

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$ ,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
   对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚举 $0 \le m \le k$ , 强制对于 $i \le m$ 满足 $A_{B_i} \le k$ 。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35F

ASC45H

ASC45D

ΔS*C*47Γ

ASC18I

ASC24I

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$ ,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
   对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚举0 ≤ m ≤ k,强制对于i ≤ m满足A<sub>B</sub> ≤ k。
  - 对于i > m满足A<sub>Bi</sub> > k。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D

ASC18I

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$ ,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
   对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚举0≤m≤k,强制对于i≤m满足A<sub>Bi</sub>≤k。
   对于i>m满足A<sub>Bi</sub>>k。
- 对于*i* > m的那些B<sub>i</sub>,需要将b<sub>i</sub>填入A<sub>B<sub>i</sub></sub>。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D ASC18I

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$ ,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
   对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚 $\neq$ 0  $\leq$  m  $\leq$  k, 强制对于i  $\leq$  m满足 $A_{B_i}$   $\leq$  k。
   对于i > m满足 $A_{B_i}$  > k。
- 对于*i* > m的那些B<sub>i</sub>,需要将b<sub>i</sub>填入A<sub>Bi</sub>。
- 剩下的位置必须将i ≤ m的Bi依次填入。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选讲

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D ASC18I

- 因为B是A的子序列,设 $A_{b_i} = B_i$ ,那么 $A_{B_i} = b_i$ 。
   对于i < j,一定满足 $A_{B_i} < A_{B_i}$ 。
- 枚举0≤m≤k,强制对于i≤m满足A<sub>Bi</sub>≤k。
   对于i>m满足A<sub>Bi</sub>>k。
- 对于i > m的那些B<sub>i</sub>,需要将b<sub>i</sub>填入A<sub>B<sub>i</sub></sub>。
- 剩下的位置必须将 $i \leq m$ 的 $B_i$ 依次填入。
  - 方案是唯一的。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

A3C33

ASC45

ASC45I

ASC47[

ASC18

ASC24E

■ 考虑i > m的这些A<sub>Bi</sub>, 这些A<sub>Bi</sub> > k。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

. . . . . .

ASC45

ASC45E

ASC 471

ACC10

ASC 241

- 考虑i > m的这些 $A_{B_i}$ ,这些 $A_{B_i} > k$ 。
  - 对于i < j, 一定满足A<sub>Bi</sub> < A<sub>Bj</sub>。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASCS

ASC35

ASC451

ACC4FF

ASC18I

- 考虑i > m的这些A<sub>Bi</sub>, 这些A<sub>Bi</sub> > k。
  - 对于i < j, 一定满足A<sub>Bi</sub> < A<sub>Bj</sub>。
  - 方案数为(n-k)。

Andrew Stankevich Contest 18 I

ASC选计

任之洲

ASC35

ASC35

ASC45

ASCAED.

713 C-11 E

ASC18I

- 考虑i > m的这些ABi, 这些ABi > k。
  - 对于i < j, 一定满足A<sub>Bi</sub> < A<sub>Bi</sub>。
  - 方案数为(n-k)。
- 考虑i > k且 $A_i > k$ 的那些位置,共有n k m个位置。

ASC选计

任之洲

ASC35

ASCSS

A3C43F

ASC45D

A C C 475

ASC18I

73616

A C C 2 A E

- 考虑i > m的这些 $A_{B_i}$ , 这些 $A_{B_i} > k$ 。
  - 对于i < j, 一定满足A<sub>Bi</sub> < A<sub>Bi</sub>。
  - 方案数为(n-k)。
- 考虑*i* > k且A<sub>i</sub> > k的那些位置,共有n-k-m个位置。
  - 可以设计简单的递推式

$$f_N = f_{N-1} + (N-1)f_{N-2}$$

任之洲

ASC35

ASC45H

ASC45D

A C C 475

ASC18I

. . .

- 考虑i > m的这些ABi, 这些ABi > k。
  - 对于*i* < *j*, 一定满足A<sub>Bi</sub> < A<sub>Bi</sub>。
  - 方案数为(n-k),
- 考虑i > k且A<sub>i</sub> > k的那些位置,共有n-k-m个位置。
  - 可以设计简单的递推式

$$f_N = f_{N-1} + (N-1)f_{N-2}$$

■ 至此,已经完成了所有计算,只需要枚举m判断后累 $m\binom{n-k}{k-m}f_{n-m-k}$ 即可。

任之洲

ASC35

. . . . . . .

ASC45D

ASC47I

ASC18I

ASC24

- 考虑i > m的这些ABi, 这些ABi > k。
  - 对于i < j, 一定满足A<sub>Bi</sub> < A<sub>Bi</sub>。
  - 方案数为(n-k),
- 考虑*i* > k且A<sub>i</sub> > k的那些位置,共有n-k-m个位置。
  - 可以设计简单的递推式

$$f_N = f_{N-1} + (N-1)f_{N-2}$$

- 至此,已经完成了所有计算,只需要枚举m判断后累 $m\binom{n-k}{k-m}f_{n-m-k}$ 即可。
- 复杂度 O(n+m²)。

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

ASC35H
ASC35F
ASC45H
ASC45D
ASC47D
ASC18I

ASC24F

#### 题目大意

对于一个 $1 \sim n$ 的排列a,定义a/i为在该排列中去掉i后,剩下数相对大小和位置不变构成一个 $1 \sim n-1$ 的排列。如(1,3,5,2,6,4)/2=(1,2,4,5,3)。所有 $1 \leq i \leq n$ 的a/i顺序打乱后给出。要求还原一个合法的排列a。

#### 数据范围

$$5 \le n \le 300$$

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

ASC35F

ASC35F ASC45F

ASC45D

. . . . .

A C C 1 0

ASC24E

■ 移除一个*i*(≥2)后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。

Andrew Stankevich Contest 24 E

- 移除一个i(≥ 2)后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。
  - 1在原排列中的位置最多只有3种可能。

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D ASC18I

- 移除一个*i*(≥2)后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。
  - 1在原排列中的位置最多只有3种可能。
- 枚举哪个读入的排列是删1的,将1补在对应位置。

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

ASC35H ASC35F ASC45H ASC45D ASC47D ASC18I

- 移除一个 $i(\ge 2)$ 后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。
  - 1在原排列中的位置最多只有3种可能。
- 枚举哪个读入的排列是删1的,将1补在对应位置。
  - 用hash判断是否和输入符合。

Andrew Stankevich Contest 24 E

ASC选讲

任之洲

ASC35H
ASC35F
ASC45H
ASC45D
ASC47D
ASC18I

- 移除一个 $i(\ge 2)$ 后,排列中1的大小一定不变,位置不变 或前移一格。
  - 1在原排列中的位置最多只有3种可能。
- 枚举哪个读入的排列是删1的,将1补在对应位置。
  - 用hash判断是否和输入符合。
- 复杂度O(n³)

## 祝大家省选顺利!

SC选讲

任之洲

, 10 000.

ASC35F

ASC451

ASC45E

A S C 47 F

ASCIO

ASC24E

这里大概会有一张插图