

构造题选讲

SJTU_作战动员
TankEngineer
倪昊斌

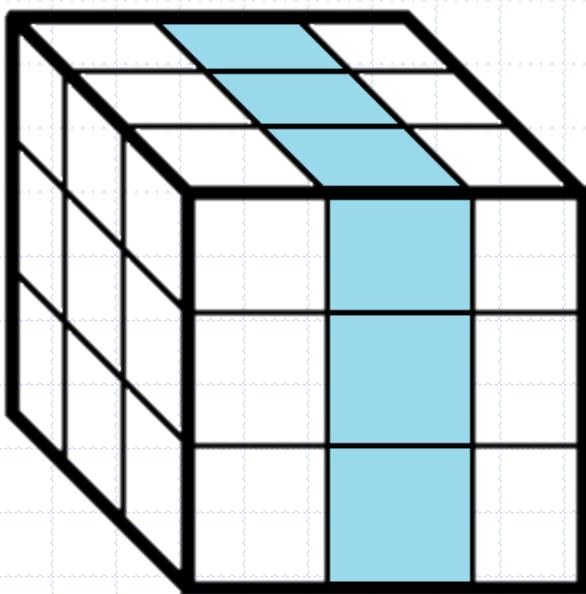
TRIVIAL

Constructor Ftiasch Class



Ural1979:Resources Distribution

- ◆ 一个 $n \times n \times n$ 的立方体，在外表面的 $6n^2$ 个面上写上 $1 \sim 6n^2$ 这些数字，使得从任意格子出发向任意一个方向走一圈和都相等。



Solution

◆ 考虑对称性

◆ 每个面和其对面一定会同时出现在某个环中

◆ $1+6n^2=2+6n^2-1\dots$

VERY EASY

Constructor AngryBacon Class



CF226D:The table

- ◆ 有一个 $n*m$ ($n,m \leq 100$)的矩阵(元素绝对值 ≤ 100), 每次可以将一列取负或者将一行取负, 求一个方案使得每行每列的和都非负。

Solution

- ◆ Naive algorithm: 每次看有没有行/列和为负，如果是就reverse。
- ◆ 和递增，一定会结束。
- ◆ 复杂度：操作次数*n

Solution

- ◆ 每次至少使和增加2
- ◆ 和最大 100^3 , 最小 -100^3
- ◆ 复杂度 : 100^4

CF468C:Hack it!

- ◆ 求给出区间 $[l, r]$ 使得区间中的数的数位之和模a为0。
- ◆ $l, r \leq 10^{200}$ $a \leq 10^{18}$

Solution

- ◆ 令 $l=1$ $r=10^{19}$ 的数位和为 s
- ◆ 可以方便计算
- ◆ 则 $l=k$ $r=10^{19}+k-1$ 的数位和为 $s+k-1$ 。
- ◆ 可构造答案

Andrew Stankevich Contest 44: H. Huffman Codes

- ◆ 给出 $n \leq 100$ 个哈夫曼编码当中的 0/1 个数，问是否存在可能的哈夫曼编码。

Solution

- ◆ 自底向上构建哈夫曼树。
- ◆ 0和1个数之和最大且1最多的点深度最深，且一定有一个1个数少1 0个数多一的点和其匹配。
- ◆ 合并两个点，得到一个新点。不断重复至构建完成或出现矛盾。

CF209C: Trails and Glades

- ◆ 有一张无向图 $\leq 10^6$ 。加最少的边使之有欧拉回路。

Solution

- ◆ 如果图连通，那么只需把奇度点两两相连即可。
- ◆ 如果图有 $k > 1$ 个连通块，则至少需要 $k-1$ 条边把它们先连成一个连通块。
- ◆ 优先选取奇度点向外连。

EASY

Constructor ArchDruid Class

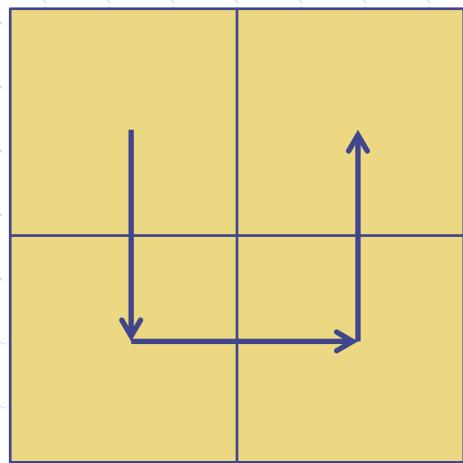


ZOJ3823: Excavator Contest

- ◆ 在 $n*n$ 的网格上，由边界某个格子出发四连通经过所有格子一次且仅一次再回到边界上，要求拐弯的数量至少有 $n*(n-1)-1$ 次。

Solution

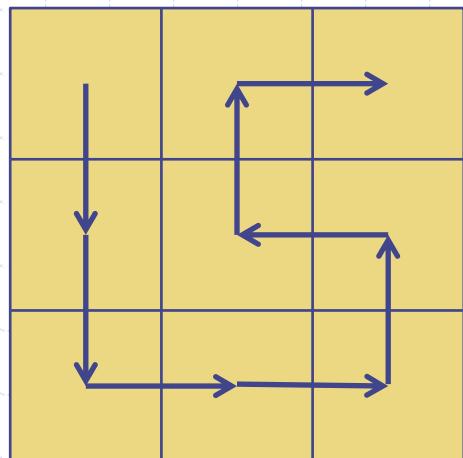
◆ $n=2$



Solution



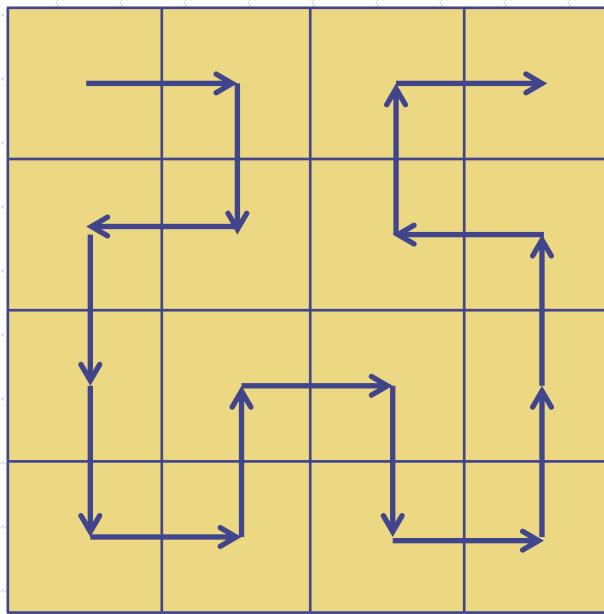
$n=3$



Solution



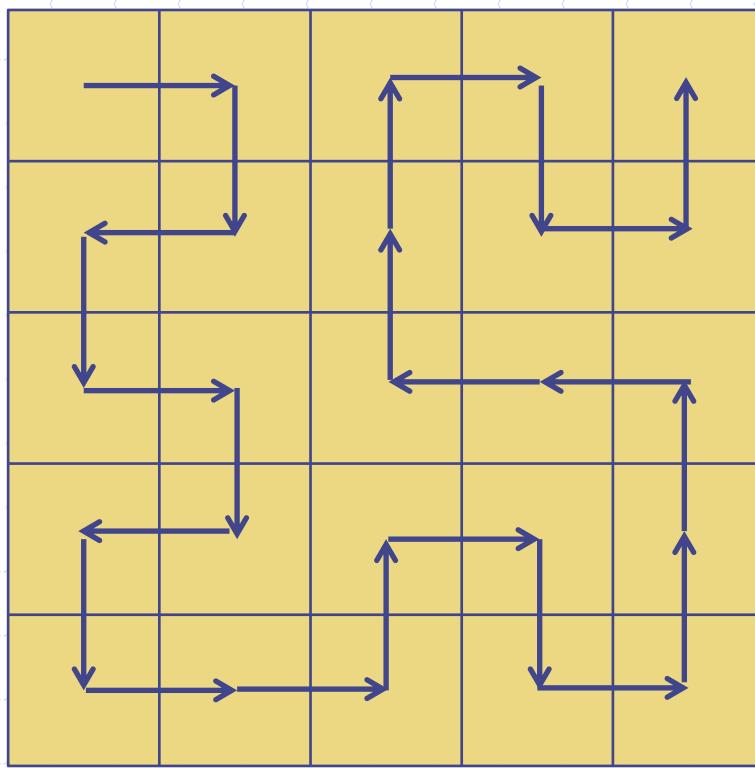
$n=4$



Solution

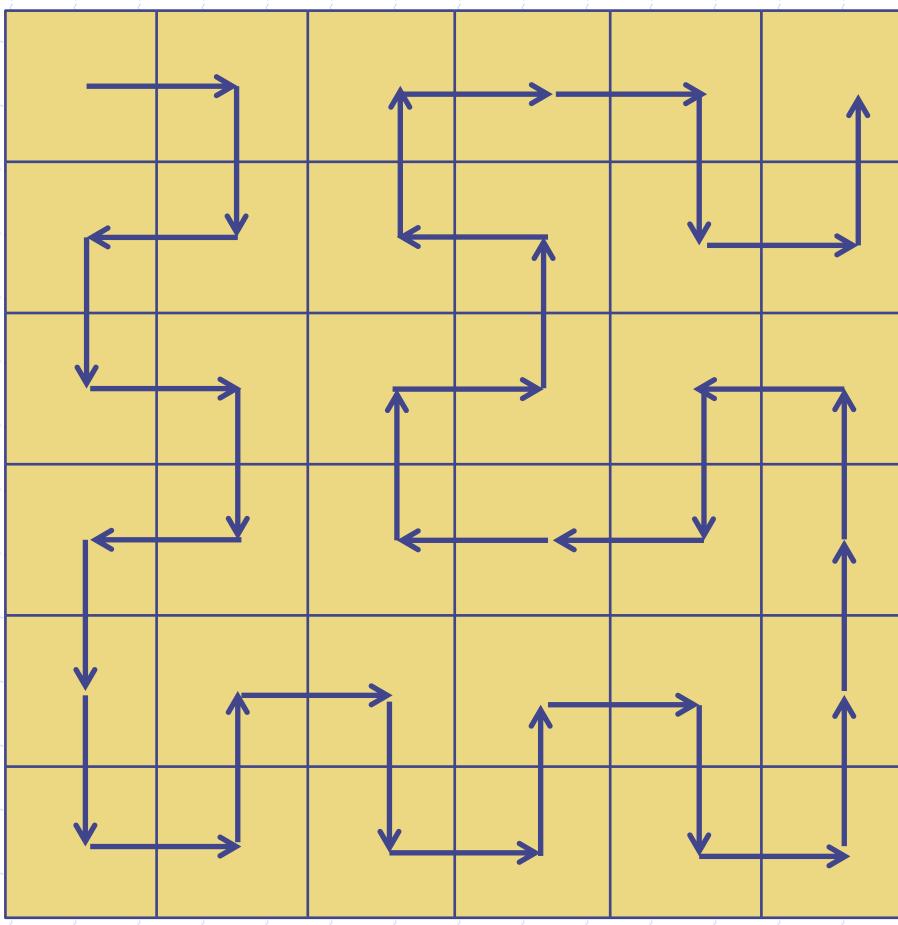


$n=5$



Solution

◆ $n=6$

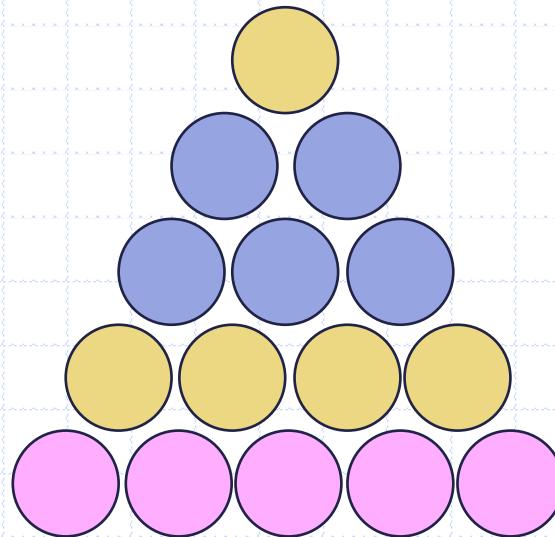


Solution

- ◆ 沿着左边沿和下边缘走一圈，接着递归套用n-2的构造方案。
- ◆ 走左下边沿的方案奇偶略有区别。

Latvia U Contest14: G. Mosaic

- ◆ 有三种颜色的珠子各 $a, b, c \leq 2^{31}$ 个，给出方案铺满若干层的三角形，且每层颜色必须相同。



Solution

◆ 猜测 : $a+b+c$ 为某个三角形数时必有解

◆ 构造 : 每次用最多的颜色填最后一行

◆ 反例 : 2 2 2 or 1 1 1

Solution

◆ 补丁：如果有两个2或者两个1无解

◆ $n=1$ 0 0 1 trivial

◆ $n=2$ 1 1 1 无解 0 1 2 0 0 3 trivial

◆ $n=3$ 2 2 2 否则必有一个 ≥ 3

Solution

- ◆ $n > 3$ 设 $a + b + c = n(n+1)/2$ $c \leq b \leq a$
- ◆ 由 $n(n+1)/2 > 3(n-1)$ 知 $a \geq n$
- ◆ 若 $n > b$ 只能放 a 转化为 $n-1$ 否则称这一列为可选择的 先放 a

Solution

- ◆ 若最后出现了2 2 2 or 1 1 1且前面存在可选择的列。
- ◆ 找到最小的可选择的列k，则k和k-1列必然颜色不同，且交换k和k-1列的颜色必然是合法的，使之变成1 2 3或0 1 2即可。

NEERC2013: K. Kids in a Friendly Class

- ◆ 一张图有黑点和白点， 每个黑点和**a**条边和黑点相连**b**条边和白点相连， 每个白点有**c**条边和黑点相连有**d**条边和白点相连。 $(a,b,c,d \leq 50)$ 求一个方案使总点数最少。

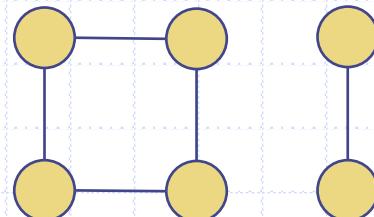
Solution

- ◆ 枚举黑点个数 n 。则白点有 nb/c 个。
- ◆ 连黑点和白点之间的边 - trivial
- ◆ 问题转化为给一个图如何使得每个点的度数都相等。

Wrong Solution

◆ 每次选两个剩余度最大的点相连。

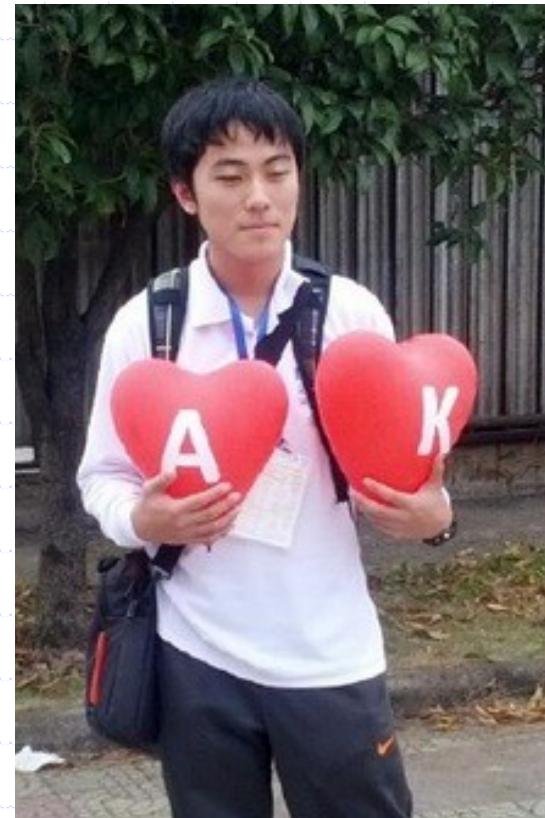
◆ 反例：6 2



Solution

- ◆ 每次选一个剩余度最大的点，将其与其余度最大的若干个点连接使其度满足要求。
- ◆ 正确性？留给聪明的读者作为练习。
- ◆ 可用于构造任意给定每个点度数的图。

NOT HARD



Constructor **data_h** Class

Udmurt SU + Izhevsk STU contest: J. Cranes

◆ 把 n 个箱子从0号位置移动到 m 号位置。
你可以使用 k 个机械手。每个机械手每个
单位时间可以左右移动一格或不动，提
起/放下箱子的时间可以忽略不计，求最
短时间。

◆ $n,m,k \leq 10^6$

Trivial?



◆ 请大家手算数据体会一下

◆ 3个机械手 4个箱子 长度5

Level 0

◆ Ans = 20

◆ 方案：来回两趟

Level 1

◆ Ans = 15

◆ 方案：最后可以不用回去.....

Level 2

◆ Ans = $4 * 5 / 3 + 1 = 7$ or 其他公式

◆ 方案 : What are you thinking?

◆ 反例 : 1机械手 2个箱子 长度5 or 其他反
例

Level 3

◆ Ans = 13

◆ 方案：两个机械手直接走到5，另一个先走到4，两个到5的回去一个接好，走到4的再把另一个箱子送到5。

Level 4

◆ Ans = 11

◆ 方案：两个机械手直接送两个箱子到5，剩下
一个把一个箱子运到3，再回去拿一
个到5。两个机械手其中一只回到3去
拿。

Level 5

◆ Ans = 9

◆ 方案：

◆ 机械手A：直接到5，回到3再拿一个

◆ 机械手B：先送到3，回到1再拿一个

◆ 机械手C：先送到1，再回去拿一个

更复杂的情况？



Computer Science will destroy you!

计算机科学将会毁灭你！

Solution

◆ 每秒对于每个机械手采取这样的贪心行动（假设机械手数量小于等于箱子数量，且先考虑离m位置较靠后的手）：

- 1.如果有箱子在自己位置后面且没有被抓着，扔下手上的箱子，回去一步。
- 2.否则自己当前位置必有没有抓的箱子，抓起它向前一步。

Prove

◆ 这样使得所有手往回走的步数最少。

Ufa SATU + Bucharest U Contest: J. Reverse Sort

- ◆ 有 $n \leq 32 * 10^3$ 的一个序列，每次可以 reverse一个区间，代价是区间长度。在总代价不超过 $4 * 10^6$ 的条件下 sort 这个序列。

Solution

◆ 根据给出的界的范围来考虑可能的构造

◆ $\approx n \log^2 n$

◆ 重要思路：模仿快速排序进行构造

Solution

- ◆ 快排每次确定一个元素的位置，再对左右两边进行分治。
- ◆ 构造算法每次以不超过 $n \log n$ 的代价确定一个元素的位置，再对左右两边进行分治。

Solution

- ◆ 如果确定了中间元素，那么每个元素实际上只是0或者1
- ◆ 对于一个01序列以 $n \log n$ 代价进行排序。
- ◆ 贪心：对于相连的一块0/1应一起处理

Solution

- ◆ 直接进行排序，每次交换相邻两块。
- ◆ $10101010 \rightarrow 01010101 \rightarrow 00101011\dots$
- ◆ 复杂度 n^2

Solution

- ◆ 每次交换相邻两块，但间隔一组01。
- ◆ $10101010 \rightarrow 01100110 \rightarrow 00011110 \rightarrow 00001111$
- ◆ 可见开头的0的个数呈几何增长，故复杂度 $n\log n$ 。

NOT VERY
HARD



Constructor rowdark Class

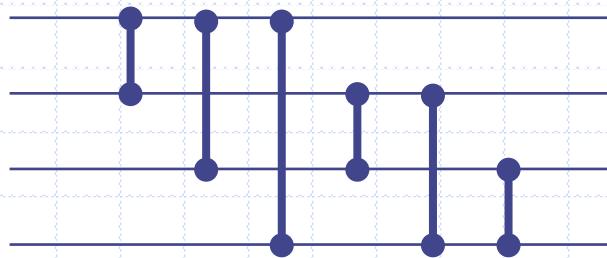
Andrew Stankevich Contest 42: C. Comparator Networks

- ◆ 一个比较器 (i, j) ($i < j$) 会比较 i 和 j 这两个位置的比特 b_i, b_j , 若 $b_i > b_j$ 则会将它们交换。
- ◆ 一个比较器网络是一系列依次执行的设定好参数的比较器。
- ◆ 一个比较器网络对某个比特序列是排序的, 当且仅当输入这个比特序列的输出是单调递增的。

Andrew Stankevich Contest 42:

C. Comparator Networks

- ◆ 构造一个比较器网络(比较器 ≤ 1000),使其对于输入的01序列($n \leq 10$)是非排序的,且对其他的所有01序列都是排序的。无解输出-1。



例：一个选择排序网络

Solution

- ◆ 若输入已经排好序显然无解
- ◆ 大胆猜测其他情况全有解

Solution

- ◆ 不是无解意味着最早出现的1在最晚出现的0前面。设其位置为 $p_1 < p_0$
- ◆ 先使 p_0 位置上是所有给定序列为0的位置中的最大值。
- ◆ 再使 p_1 是所有给定为1的位置的最小值。

Solution

- ◆ 这时，显然只有给定序列会有 p_0 是0且 p_1 是1。
- ◆ 先不看这两个位置，对其他位置进行全排序。

Solution

- ◆ 设给定序列0的个数是c个。有不等式 $p_1 \leq c < p_0$ 。设其他某序列0的个数是d个。此时对于其他某序列有三种情况：
 - ◆ Case 1: $c = d$ 此时必有 p_0 位置上是1 p_1 位置上是0 且由 $p_1 \leq d < p_0$ 知序列已经有序。任何比较都不变。

Solution

- ◆ Case 2: $c < d$ 则 p_1 上是 0 p_0 上不确定 由不等式 $p_1 \leq c < p_0$ 则只可能 p_0 上是 1
 $p_0 \leq d$ 或 p_0 上是 0 $p_0 > d$ 时未排序。
 - 则依次比较 $(c+i, p_0)$ 和 $(p_0, n-j)$ i, j 都递增 这里比较的顺序非常重要。

- ◆ Case 3: $c > d$ 对称, 同理。

CodeChef DEC14: Divide or die

- ◆ 给出平面上一个n度角（三点坐标，n是整数）。求一个方案通过尺规作图将其n等分。无解输出-1。

Solution

- ◆ 世界人民熟知不能三等分任意角。
- ◆ 由大数学知，尺规扩张是最多是二次扩张。而三等分60度角需求解的多项式是三次的，故60度不可三等分。

Solution



- ◆ 考虑尺规直接画能画出什么度数的角。
- ◆ 1度/2度与60度不可三等分矛盾。
- ◆ 若3度角可以画出，利用角度的加减法，任何与不是3的倍数的整数度角都可以被等分。而所有3的倍数的角由于可被直接画出必然不能被等分。

Solution



- ◆ 怎么画3度角。
- ◆ 利用黄金分割三角形72度底角 !

$$\diamond \sin 72^\circ = (\sqrt{5} - 1) / 4$$

Solution

- ◆ $\sqrt{5}$ 可通过直角边长为2比1的直角三角形得到。
- ◆ 72度四等分得到18度。等边三角形60度四等分得到15度。相减得到3度角。

World Finals 2014:

A. Baggage

- ◆ 初始序列**BABABA...BA**(长度 $2n \leq 200$)，每次可以移动相邻的恰好两个元素到某两个连续空位，求一个方案在最短步骤内将其排为**AA...A**若干空格**BB...B**。

Solution

◆ $n=3$ ans=3

BABABA

ABB ABA

ABBBAA

AAABBB

Solution

◆ n=4 ans=4

BABABABA

ABBABAB A

ABBA BAAA

A BBBBAA

AAAABBAA

Solution

◆ n=5 ans=5

BABABABABA
ABBABABAB_A
ABBA__BABBA
ABBAABB_BAA
A_AABBBBBBAA
AAAAAABB BBBB

Solution

◆ n=6 ans=6

BABABABABABA
ABBABAB ABABA
ABBABABBAAB A
ABBA BBAABBAA
ABAAAABB BBAAA
 AAABBBBBBAA
AAAAAAABBBBBBB

Solution

◆ n=7 ans=7

BABABABABABABA
ABBABABAB ABABA
ABBABA BBAABABA
ABBABAABBBAAB A
ABBA ABBBAABBAA
ABBAAAAABBB BBAA
A AAAABBBBBBBBAA
AAAAAAAABBBBBBBB

Solution

◆ n=8 ans=8

BABABABABABABABA
ABBABABABAB ABABA
ABBA BABABBAABABA
ABBAABBABABBAAB A
ABBAABBA BBAABBAA
ABBA ABBBBAABBAA
ABAAAAAAABBBB BA
A AAAAAABBBBBBBBAA
AAAAAAAABBBBBBBB

Solution

◆ That's all, thank you!