计数类问题入门

同安第一中学 叶芃

2016年12月31日

计数类问题

在OI中，有一些问题，会让你求满足某些条件的方案数。

计数类问题

在OI中，有一些问题，会让你求满足某些条件的方案数。
这类问题我们称为计数类的问题。

计数类问题

在OI中，有一些问题，会让你求满足某些条件的方案数。
这类问题我们称为计数类的问题。
在解决这类问题的时候，往往需要一些数学知识。

加法原理和乘法原理

加法原理：完成一件事情有n类方式，第i类方式有m_i种方法，则完成这件事有$\sum\limits_{i=1}^{n} m_i$种方法。

加法原理和乘法原理

加法原理：完成一件事情有n类方式，第i类方式有m_i种方法，则完成这件事有$\sum_{i=1}^{n} m_i$种方法。

乘法原理：完成一件事情有n步，第i步有m_i种方法，则完成这件事有$\prod_{i=1}^{n} m_i$种方法。

排列数和组合数

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$表示在$n$个不同元素中取$m$个并按某种顺序排成一列的方案数。

排列数和组合数

$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$表示在$n$个不同元素中取$m$个并按某种顺序排成一列的方案数。

$C_n^m = \frac{n!}{m! \times (n-m)!}$表示在$n$个不同元素中取$m$个的方案数。

排列数和组合数的有关公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$$

排列数和组合数的有关公式

$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$

$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$

排列数和组合数的有关公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

排列数和组合数的有关公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^m = \sum_{k=n}^{m} C_{k-1}^{n-1}$$

排列数和组合数的有关公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^m = \sum_{k=n}^{m} C_{k-1}^{n-1}$$

$$C_{r+s}^n = \sum_{k=0}^{n} C_r^k \times C_s^{n-k}$$

排列数和组合数的有关公式

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$$

$$C_n^m = C_n^{n-m}$$

$$C_n^m = \sum_{k=n}^{m} C_{k-1}^{n-1}$$

$$C_{r+s}^n = \sum_{k=0}^{n} C_r^k \times C_s^{n-k}$$

$C_n^m \equiv C_{n \bmod p}^{m \bmod p} \times C_{\lfloor \frac{n}{p} \rfloor}^{\lfloor \frac{m}{p} \rfloor} \pmod p$，其中$p$为质数（lucas定理）。

常见的求法

因为组合数增长的速度很快，我们在实际应用中往往要模某个数。

常见的求法

因为组合数增长的速度很快，我们在实际应用中往往要模某个数。

- 利用$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$递推。

常见的求法

因为组合数增长的速度很快，我们在实际应用中往往要模某个数。

- 利用$C_n^m = C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m$递推。
- 先预处理出阶乘之后再求。

一个经典模型

在网格图中，每次只能往上或往右走，求从$(0,0)$走到(n,m)的路径数。

一个经典模型

在网格图中，每次只能往上或往右走，求从$(0,0)$走到(n,m)的路径数。

答案显然是C_{n+m}^{n}。

变一变

在上题中，加上限制：路径不能与$y = x - 1$相交。

变一变

在上题中，加上限制：路径不能与$y = x - 1$相交。
考虑用总数扣掉相交的方案数。

变一变

在上题中，加上限制：路径不能与$y = x - 1$相交。

考虑用总数扣掉相交的方案数。

找到第一个与$y = x - 1$的交点，然后把这个交点之前的路径沿$y = x - 1$翻转。

变一变

在上题中，加上限制：路径不能与$y = x - 1$相交。

考虑用总数扣掉相交的方案数。

找到第一个与$y = x - 1$的交点，然后把这个交点之前的路径沿$y = x - 1$翻转。

每条相交的路径唯一对应了一条从$(1, -1)$到(n, m)的路径。

另一个经典模型

求方程$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$的正整数解个数。

另一个经典模型

求方程$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$的正整数解个数。

看成有n个球，插入$m-1$个板。

另一个经典模型

求方程$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$的正整数解个数。

看成有n个球，插入$m-1$个板。

如果是求非负整数解呢？

另一个经典模型

求方程$x_1 + x_2 + ... + x_m = n$的正整数解个数。

看成有n个球，插入$m - 1$个板。

如果是求非负整数解呢？

令$y_i = x_i + 1$。

一道题

从(0,0)出发，每次可以向上下左右任意一个方向走一步。
求经过k步后恰好到达(n, m)的方案数。
$n, m, k \leq 10^6$。

一道题

枚举横向走了几步，拿组合数乘一乘。

一道题

枚举横向走了几步，拿组合数乘一乘。

更简单的方法？

一道题

枚举横向走了几步，拿组合数乘一乘。

更简单的方法？

$(x, y) \to (x+y, x-y)$

SRM 573 div1 850pts

给定n个点，每个点每秒钟可以向上下左右任意一个方向走一步。求m秒之后所有点在同一个位置的方案数。

$n \leq 50, m \leq 10^5$

SRM 573 div1 850pts

仿照上题，即可把x, y分开讨论。

SRM 573 div1 850pts

仿照上题，即可把x, y分开讨论。
枚举x和y，算出总的方案数。

SRM 573 div1 850pts

仿照上题，即可把x, y分开讨论。

枚举x和y，算出总的方案数。

乘起来就是答案。

SRM 597 div1 900pts

你有一个$2 \times m$的棋盘。你可以给每个格子染成红黄蓝中的一种，但是有以下几点要求：

- 每个2×2的矩阵里每种颜色都要出现过
- 相邻两个格子的颜色不能相同
- 三种颜色的格子的数目分别是R, G, B 个，保证$R + G + B = 2m$

$2 \leq m \leq 10^6$

SRM 597 div1 900pts

其实是求长度为m的数组，给定R, G, B的个数，问相邻格子颜色不同的方案数。

SRM 597 div1 900pts

其实是求长度为m的数组，给定R, G, B的个数，问相邻格子颜色不同的方案数。

其中R将整个序列分成若干段。（$R-1, R, R+1$）

SRM 597 div1 900pts

其实是求长度为m的数组，给定R, G, B的个数，问相邻格子颜色不同的方案数。

其中R将整个序列分成若干段。（$R-1, R, R+1$）

每一段内部只能是G和B交替。

SRM 597 div1 900pts

其实是求长度为m的数组，给定R, G, B的个数，问相邻格子颜色不同的方案数。

其中R将整个序列分成若干段。（$R-1, R, R+1$）

每一段内部只能是G和B交替。

枚举G开头的个数。

用DP求解

很多时候，DP是求解这类问题的高效做法。

用DP求解

很多时候，DP是求解这类问题的高效做法。

主要难点在于如何设计状态以及不重不漏地计数。

用DP求解

很多时候，DP是求解这类问题的高效做法。
主要难点在于如何设计状态以及不重不漏地计数。
光说不练是不行的，我们来看几道题。

整数拆分

求n的整数划分个数。

$n \leq 10^5$

整数拆分

设$f_{i,j}$表示前i个数和为j的方案数。

整数拆分

设$f_{i,j}$表示前i个数和为j的方案数。

$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-i}$

整数拆分

设$f_{i,j}$表示前i个数和为j的方案数。

$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-i}$

设$g_{i,j}$表示选i个数和为j的方案数。

整数拆分

设$f_{i,j}$表示前i个数和为j的方案数。

$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-i}$

设$g_{i,j}$表示选i个数和为j的方案数。

$g_{i,j} = g_{i,j-i} + g_{i-1,j-1}$。

整数拆分

设$f_{i,j}$表示前i个数和为j的方案数。

$f_{i,j} = f_{i-1,j} + f_{i,j-i}$

设$g_{i,j}$表示选i个数和为j的方案数。

$g_{i,j} = g_{i,j-i} + g_{i-1,j-1}$。

以$\sqrt{n}$为界，分别跑两个DP。

连通图

求n个点的连通图个数。

$n \leq 10^5$

连通图

用总数扣去不连通的方案数。

连通图

用总数扣去不连通的方案数。

分治FFT or 多项式求逆。

排列方案

给定两个正整数n和k，问n的全排列中，有多少排列满足如下条件：对于$i \in [1, n]$，满足它所在的位置的编号和它自身的数字i相差不超过k。

$0 \leq k \leq 3, 1 \leq n \leq 10^9$

排列方案

状压DP。

排列方案

状压DP。

矩阵乘法优化。

SRM 554 div1 1000pts

用C种颜色的积木搭一个$2 \times 2 \times X$的塔，每种颜色的积木有无穷多个。

要求相邻两个块为同种颜色的对数不超过K。求高度不超过H的方案数。

$1 \leq C \leq 4747, 0 \leq K \leq 7, 1 \leq H \leq 474747474747474747$

SRM 554 div1 1000pts

最小表示法。

SRM 554 div1 1000pts

最小表示法。

转移矩阵可以通过dfs得到。

SRM 554 div1 1000pts

最小表示法。

转移矩阵可以通过dfs得到。

这样已经可以通过，当然还能再优化：去掉对称的状态。

SRM 550 div1 850pts

给定两个单词$word1$和$word2$，只包含a, b, c三种字符，需要按如下规则将$word1$变成$word2$：

- a变成b，代价$cost_0$
- b变成c，代价$cost_1$
- c变成a，代价$cost_2$

求总花费不超过$maxCost$的方案数。(单词长度不超过11，$cost_i, maxCost \leq 10^9$)

SRM 550 div1 850pts

其实是走若干个环。

SRM 550 div1 850pts

其实是走若干个环。

共有$\sum_{i=0}^{11} 12 - i = 78$种状态。

SRM 550 div1 850pts

其实是走若干个环。

共有$\sum_{i=0}^{11} 12 - i = 78$种状态。

注意题目问的是不超过，新建一个点搞一搞。

DP套DP

就是用DP来计算满足另一个DP最终结果等于某个值的输入数。

DP套DP

就是用DP来计算满足另一个DP最终结果等于某个值的输入数。

做法就是在外层DP的状态中中记录内层DP的每个状态对应的值。

DP套DP

就是用DP来计算满足另一个DP最终结果等于某个值的输入数。

做法就是在外层DP的状态中中记录内层DP的每个状态对应的值。

相信大家都知道是怎么回事了，我们来看几个例子。

SRM 591 div1 900pts

给定n, m以及两个长度为$n+m-1$的字符串A和B。

求有多少个$n \times m$的矩阵满足存在从左上角到右下角的两条路径使得上面的字母依次连接起来分别为A和B。

$n, m \leq 8$

SRM 591 div1 900pts

假设已给定矩阵，可以用一个DP来判断是否存在路径。

SRM 591 div1 900pts

假设已给定矩阵，可以用一个DP来判断是否存在路径。

外层DP按照对角线的顺序进行，只需要记录对角线上的所有位置。

lcs

给定长度为n字符串A和字符集大小m,求有多少个B满足A和B长度相等且它们的最长公共子序列长度为$n-1$。

$n \leq 10^5, m \leq 26$

lcs

内层DP可以$O(n)$完成。

lcs

内层DP可以$O(n)$完成。

不需要记录DP的值。

数位DP

有这样一类问题，让你求$[L,R]$之间有多少个数满足某种跟数的各个位上的数有关的性质。

数位DP

有这样一类问题，让你求$[L, R]$之间有多少个数满足某种跟数的各个位上的数有关的性质。

这种题一般来说都是数位DP。

数位DP

有这样一类问题，让你求$[L, R]$之间有多少个数满足某种跟数的各个位上的数有关的性质。

这种题一般来说都是数位DP。

先把区间拆成$[1, L-1]$和$[1, R]$，然后从高位往低位DP。

数位DP

有这样一类问题，让你求$[L, R]$之间有多少个数满足某种跟数的各个位上的数有关的性质。

这种题一般来说都是数位DP。

先把区间拆成$[1, L-1]$和$[1, R]$，然后从高位往低位DP。

要分高位是否和原数相等来记录状态。

windy数

不含前导零且相邻两个数字之差至少为2的正整数被称为windy数。

求$[A, B]$中有多少个windy数。

$A, B \leq 2000000000$

windy数

需要多记录一下当前位的数字。

组合数问题

求有多少对(i,j)满足：

- $1 \le i \le n$
- $1 \le j \le m$
- $i \le j$
- $C_i^j \equiv 0 \pmod p$

$n,m \le 10^{18}$，$p \le 100$是质数

组合数问题

根据lucas定理，把数字变成p进制。

组合数问题

根据lucas定理，把数字变成p进制。
数位DP。

容斥原理

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

容斥原理

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1 \le i \le n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

证明：考虑一个元素对右边的贡献。

另外一些公式

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = |U| - |\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}|$$

另外一些公式

$$|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n| = |U| - |\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup \ldots \cup \overline{A_n}|$$

$$\max(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{1 \le i \le n} x_i - \sum_{1 \le i < j \le n} \min(x_i, x_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} \min(x_i, x_j, x_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \min(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

一道题

求方程$x_1 + x_2 + ... + x_n = m$的非负整数解。

同时需要满足n个限制条件$a_i \le x_i \le b_i$。

$n \le 20$ $m, a_i, b_i \le 10^5$

一道题

下界容易去掉。

一道题

下界容易去掉。

把上界转换成下界，使用容斥原理。

SDOI2016 排列计数

求有多少个n的全排列A，使得满足$A_i = i$的位置恰好有m个。

5×10^5组询问，$n, m \leq 10^6$

SDOI2016 排列计数

用容斥原理求出全部错排的方案数。

数学期望

我把期望也归类到这类问题里。

数学期望

我把期望也归类到这类问题里。

期望的定义：

- 连续型随机变量：$E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$
- 离散型随机变量：$E[X] = \sum_i p_i x_i$

一些性质

$$E[C] = C$$

一些性质

$$
\begin{aligned}
E[X+Y] &= \sum_i \sum_j (x_i + y_j) p_{i,j} \\
&= \sum_i \sum_j x_i p_{i,j} + \sum_j \sum_i y_j p_{i,j} \\
&= \sum_i x_i \sum_j p_{i,j} + \sum_j y_j \sum_i p_{i,j} \\
&= \sum_i x_i p_{1i} + \sum_j y_j p_{2j} \\
&= E[X] + E[Y]
\end{aligned}
$$

一些性质

当X和Y相互独立时

$$
\begin{aligned}
E[XY] &= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{i,j} \\
&= \sum_i \sum_j x_i y_j p_{1i} p_{2j} \\
&= (\sum_i x_i p_{1i})(\sum_j y_j p_{2j}) \\
&= E[X]E[Y]
\end{aligned}
$$

SRM 581 div1 500pts

给出两棵大小为n的树。

随机生成一个排列P,从第一棵树的i号点向第二棵树的P_i号点连边。

求大小为K的环的个数的期望。

$n \leq 300, K \leq 7$

SRM 581 div1 500pts

环一定恰好经过两条非树边。

SRM 581 div1 500pts

环一定恰好经过两条非树边。

直接统计答案。

SRM 575 div1 500pts

给定一个长度为n的序列a,对这个序列进行k次操作，每次操作随机交换两个数。

最后随机选择两个数l, r，求$\sum_{i=l}^{r} a_i$的期望。

$n \leq 2209$ $k \leq 10^9$

SRM 575 div1 500pts

对每个数的贡献分开考虑。

SRM 575 div1 500pts

对每个数的贡献分开考虑。

只需求出每个数最终在某个位置的概率。

SRM 583 div1 950pts

给定一个$n \times m$的棋盘，每个位置有一个$0 \sim 9$的数字，设数字之和为S。

每轮选择一个格子染成黑色（可以重复染色），选择一个格子的概率是$\frac{x}{S}$

如果某一轮之后每行每列都至少有一个黑色格子，游戏结束。

求期望的回合数。

$n, m \leq 21, n \times m \leq 150$，保证游戏可以结束。

SRM 583 div1 950pts

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} P(X = j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} P(X = j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} jP(X = j) \\ &= E[X]\end{aligned}$$

SRM 583 div1 950pts

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} P(X = j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} P(X = j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} jP(X = j) \\ &= E[X]\end{aligned}$$

计算还未结束的概率，可以容斥，每一项是一个无穷级数的和。

SRM 583 div1 950pts

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty} P(X \geq i) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=i}^{\infty} P(X = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{j} P(X = j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} jP(X = j) \\
&= E[X]
\end{aligned}
$$

计算还未结束的概率，可以容斥，每一项是一个无穷级数的和。

$n \times m \leq 150 \Rightarrow \min(n, m) \leq 12$，枚举小的那维，另一维DP。

地震后的幻想乡

给定n个点的无向简单图，每条边的边权在$[0,1]$内随机，求最小生成树上最大边的期望。

$n \leq 10$

地震后的幻想乡

小于x的边不能使整个图连通的概率为一个多项式$f(x)$。我们要求的实际上是$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

地震后的幻想乡

小于x的边不能使整个图连通的概率为一个多项式$f(x)$。我们要求的实际上是$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$。

状压DP即可。

环形计数

有这样一类问题，要求在环上染色，统计满足某些条件的方案数。

环形计数

有这样一类问题，要求在环上染色，统计满足某些条件的方案数。翻转或者旋转视为同一种方案。

环形计数

有这样一类问题，要求在环上染色，统计满足某些条件的方案数。
翻转或者旋转视为同一种方案。
之前介绍的方法难以应用，需要引入新的工具。

运算

指从S^n到S的映射。

运算

指从S^n到S的映射。

特别的，当$n=2$时，$\circ : S\times S\to S$称为S上的二元运算。

群

设G是一个具有二元运算的非空集合。满足：

群

设G是一个具有二元运算的非空集合。满足：

- 封闭性，即$\forall f,g \in G$，$f \circ g \in G$

群

设G是一个具有二元运算的非空集合。满足：

- 封闭性，即$\forall f,g \in G$，$f \circ g \in G$
- 结合律，即$\forall f,g,h \in G$，$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$

群

设G是一个具有二元运算的非空集合。满足：

- 封闭性，即$\forall f,g\in G$，$f\circ g\in G$
- 结合律，即$\forall f,g,h\in G$，$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$
- 存在单位元，即$\exists\iota$，$\forall f\in G$，$\iota\circ f=f\circ\iota=f$

群

设G是一个具有二元运算的非空集合。满足:

- 封闭性，即$\forall f,g \in G$，$f \circ g \in G$
- 结合律，即$\forall f,g,h \in G$，$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$
- 存在单位元，即$\exists \iota$，$\forall f \in G$，$\iota \circ f = f \circ \iota = f$
- 对于任意元素均存在逆元，即$\forall f \in G$，$f^{-1} \in G$

群

设G是一个具有二元运算的非空集合。满足：

- 封闭性，即$\forall f,g\in G$，$f\circ g\in G$
- 结合律，即$\forall f,g,h\in G$，$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h)$
- 存在单位元，即$\exists\iota$，$\forall f\in G$，$\iota\circ f=f\circ\iota=f$
- 对于任意元素均存在逆元，即$\forall f\in G$，$f^{-1}\in G$

则称G为群，$|G|$表示G中元素个数，称为群的阶。

等价类

假设$c \in C$表示一种染色的方案。

等价类

假设$c \in C$表示一种染色的方案。

对于$c_1, c_2 \in C$，c_1, c_2等价，当且仅当存在$f \in G$满足$f * c_1 = c_2$，记做$c_1 \sim c_2$。

等价类

假设$c \in C$表示一种染色的方案。

对于$c_1, c_2 \in C$，c_1, c_2等价，当且仅当存在$f \in G$满足$f * c_1 = c_2$，记做$c_1 \sim c_2$。

容易证明这样的定义具有：

等价类

假设$c \in C$表示一种染色的方案。

对于$c_1, c_2 \in C$，c_1, c_2等价，当且仅当存在$f \in G$满足$f * c_1 = c_2$，记做$c_1 \sim c_2$。

容易证明这样的定义具有：

- 自反性，$\forall c \in C$，$c \sim c$

等价类

假设$c \in C$表示一种染色的方案。

对于$c_1, c_2 \in C$，c_1, c_2等价，当且仅当存在$f \in G$满足$f * c_1 = c_2$，记做$c_1 \sim c_2$。

容易证明这样的定义具有：

- 自反性，$\forall c \in C$，$c \sim c$
- 对称性，$\forall c_1, c_2 \in C$，如果$c_1 \sim c_2$，则$c_2 \sim c_1$

等价类

假设$c \in C$表示一种染色的方案。

对于$c_1, c_2 \in C$，c_1, c_2等价，当且仅当存在$f \in G$满足$f * c_1 = c_2$，记做$c_1 \sim c_2$。

容易证明这样的定义具有：

- 自反性，$\forall c \in C$，$c \sim c$
- 对称性，$\forall c_1, c_2 \in C$，如果$c_1 \sim c_2$，则$c_2 \sim c_1$
- 传递性，$\forall c_1, c_2, c_3 \in C$，如果$c_1 \sim c_2, c_2 \sim c_3$，则$c_1 \sim c_3$

burnside引理

对于$g \in G$，令$X_g = \{c|g * c = c\}$，则等价类的个数等于$\frac{\sum |X_g|}{|G|}$

burnside引理

对于$g \in G$，令$X_g = \{c|g * c = c\}$，则等价类的个数等于$\frac{\sum |X_g|}{|G|}$
利用这个引理，我们可以将计算等价类转换成计算不动点的个数。

burnside引理

对于$g \in G$，令$X_g = \{c|g * c = c\}$，则等价类的个数等于$\frac{\sum |X_g|}{|G|}$

利用这个引理，我们可以将计算等价类转换成计算不动点的个数。

证明？

burnside引理

设$c \in C$，$H_c = \{g|g * c = c\}$，$G_c = \{g * c\}$，对于$t = g_0 * c$，构造集合$T_t = \{g_0 \circ g|g \in H_c\}$

burnside引理

设$c \in C$，$H_c = \{g|g * c = c\}$，$G_c = \{g * c\}$，对于$t = g_0 * c$，构造集合$T_t = \{g_0 \circ g|g \in H_c\}$

易证T_t是唯一的且$|\cup T_t| = \sum |T_t| = |H_c| \times |G_c|$

burnside引理

设$c \in C$，$H_c = \{g|g * c = c\}$，$G_c = \{g * c\}$，对于$t = g_0 * c$，构造集合$T_t = \{g_0 \circ g|g \in H_c\}$

易证T_t是唯一的且$|\cup T_t| = \sum |T_t| = |H_c| \times |G_c|$

又因为对于$g \in G$有$g \circ \iota \in T_{g*c}$

burnside引理

设$c \in C$，$H_c = \{g|g * c = c\}$，$G_c = \{g * c\}$，对于$t = g_0 * c$，构造集合$T_t = \{g_0 \circ g|g \in H_c\}$

易证T_t是唯一的且$|\cup T_t| = \sum |T_t| = |H_c| \times |G_c|$

又因为对于$g \in G$有$g \circ \iota \in T_{g*c}$

于是$|G| = |H_c| \times |G_c|$

burnside引理

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G}|X_g| &= \sum_{g\in G}\sum_{c\in C}[g*c=c] \\ &= \sum_{c\in C}\sum_{g\in G}[g*c=c] \\ &= \sum_{c\in C}\frac{|G|}{|G_c|} \\ &= |G|\sum_{G_c}1\end{aligned}$$

burnside引理

于是有

$$\begin{aligned}\sum_{g\in G}|X_g| &= \sum_{g\in G}\sum_{c\in C}[g*c=c]\\ &= \sum_{c\in C}\sum_{g\in G}[g*c=c]\\ &= \sum_{c\in C}\frac{|G|}{|G_c|}\\ &= |G|\sum_{G_c}1\end{aligned}$$

即$\sum_{G_c}1=\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X_g|$

置换

置换是一个从集合$\{1, 2, 3, ..., n\}$到自身的一一映射，如

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

其中a是一个1到n的排列，其中的每一项$\begin{pmatrix} i \\ a_i \end{pmatrix}$都是一个映射。

pólya定理

设G为置换群，每个对象可用m种颜色染，则染色的方案数为：

$$l = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} m^{c(g)}$$

其中$c(g)$表示g的循环节个数。

一个经典模型

一个大小为n的环，每个位置可以染m种颜色，求不同的染色方案数。

环可以旋转。

一个经典模型

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m^{(n,i)} = \frac{1}{n}\sum_{d|n} m^{d} \times \varphi(\frac{n}{d})$$

一道题

n个人坐在圆桌上，其中至少有一个人是男生，求存在多少种方案使得至多连续k个女生，循环同构算一种方案。

$k \le n \le 10^5$

一道题

只需要考虑环形的情况。

一道题

只需要考虑环形的情况。

再变成线性，令f_i表示i个人且i是男生的方案数。

另一题

大小为n的环，染上黑白两种颜色。

旋转同构，翻转同构，反色同构。

200组数据，$n \leq 10^{12}$

另一题

翻转+旋转可以看成沿某条对称轴轴对称。

另一题

翻转+旋转可以看成沿某条对称轴轴对称。

$$\frac{\sum_{d|n} \varphi(2d) \times 2^{\frac{n}{d}} + n \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{4n}$$

另一题

翻转+旋转可以看成沿某条对称轴轴对称。

$$\frac{\sum_{d|n} \varphi(2d) \times 2^{\frac{n}{d}} + n \times 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}}{4n}$$

在dfs枚举因数的时候顺便维护φ，对于2的次幂分块计算。

谢谢大家

谢谢大家。