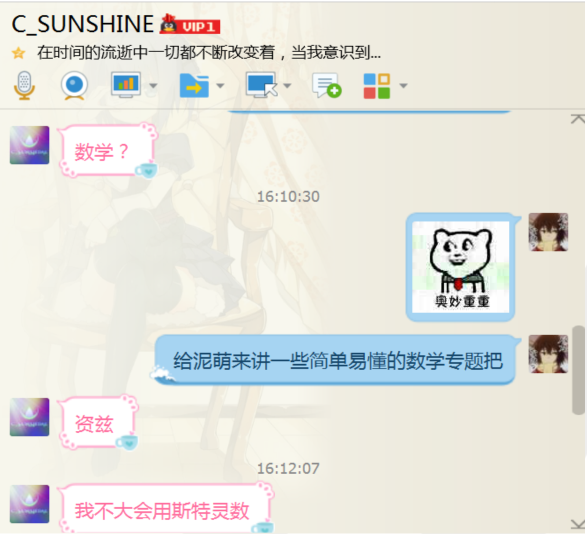
斯特林数相关

九条可怜

http://icpc-camp.org

前言



C_SUNSHINE VIP1
在时间的流逝中一切都不断改变着，当我意识到...
数学？
16:10:30
奥妙重重
给泥萌来讲一些简单易懂的数学专题把
资兹
16:12:07
我不大会用斯特灵数

前言

叉姐 13:05:50

我其实想提个建议啊。。。

你搞点这种。。。用一些。。。还不太普及的工具的数学专题。。这个听上去还挺有意思的。。。

叉姐 13:05:58

但是能不能搞得。。。看上去更系统一点呢。。。

Part1 斯特林数的定义及求法

第一类斯特林数

- 这儿只讨论无符号的第一类斯特林数。
- $s(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个圆排列的方案数。
- 等价于有 k 个循环的长度为 n 的置换个数。
- $s(n,k)=\sum_{i=1}^{n} s(n-i,k-1)\times(i-1)!\times\binom{n-1}{i-1}$
- $s(n,k)=s(n-1,k-1)+s(n-1,k)\times(n-1)$

第一类斯特林数

- 这儿只讨论无符号的第一类斯特林数。
- $s(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个圆排列的方案数。
- 等价于有 k 个循环的长度为 n 的置换个数。
- $s(n,k) = \sum_{i=1}^{n} s(n-i,k-1) \times (i-1)! \times \binom{n-1}{i-1}$
- $s(n,k) = s(n-1,k-1) + s(n-1,k) \times (n-1)$

第一类斯特林数

- 这儿只讨论无符号的第一类斯特林数。
- $s(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个圆排列的方案数。
- 等价于有 k 个循环的长度为 n 的置换个数。
- $s(n,k) = \sum_{i=1}^{n} s(n-i,k-1) \times (i-1)! \times \binom{n-1}{i-1}$
- $s(n,k) = s(n-1,k-1) + s(n-1,k) \times (n-1)$

第一类斯特林数

- 这儿只讨论无符号的第一类斯特林数。
- $s(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个圆排列的方案数。
- 等价于有 k 个循环的长度为 n 的置换个数。
- $s(n,k) = \sum_{i=1}^{n} s(n-i,k-1) \times (i-1)! \times \binom{n-1}{i-1}$
- $s(n,k) = s(n-1,k-1) + s(n-1,k) \times (n-1)$

第一类斯特林数

- 这儿只讨论无符号的第一类斯特林数。
- $s(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个圆排列的方案数。
- 等价于有 k 个循环的长度为 n 的置换个数。
- $s(n,k) = \sum_{i=1}^{n} s(n-i, k-1) \times (i-1)! \times \binom{n-1}{i-1}$
- $s(n,k) = s(n-1,k-1) + s(n-1,k) \times (n-1)$

毛爷题

问循环个数在区间 $[L, R]$ 内的长度为 n 的置换个数，对 998244353 取模。

$n \le 10^5$

毛爷题

- $\sum_{i=L}^{R} s(n, i)$
- $s(n, k) = s(n-1, k-1) + s(n-1, k) \times (n-1)$
- $x^{\overline{n}} = \prod_{i=1}^{n}(x+i-1) = \sum_{i=0}^{n} s(n, i) \times x^i$
- 分治 FFT，时间复杂度 $O(n \log^2 n)$

毛爷题

- $\sum_{i=L}^{R} s(n,i)$
- $s(n,k) = s(n-1,k-1) + s(n-1,k) \times (n-1)$
- $x^{\overline{n}} = \prod_{i=1}^{n}(x+i-1) = \sum_{i=0}^{n} s(n,i) \times x^i$
- 分治 FFT，时间复杂度 $O(n \log^2 n)$

毛爷题

- $\sum_{i=L}^{R} s(n,i)$
- $s(n,k) = s(n-1,k-1) + s(n-1,k) \times (n-1)$
- $x^{\overline{n}} = \prod_{i=1}^{n}(x+i-1) = \sum_{i=0}^{n} s(n,i) \times x^i$
- 分治 FFT，时间复杂度 $O(n \log^2 n)$

毛爷题

- $\sum_{i=L}^{R} s(n,i)$
- $s(n,k) = s(n-1,k-1) + s(n-1,k) \times (n-1)$
- $x^{\overline{n}} = \prod_{i=1}^{n}(x+i-1) = \sum_{i=0}^{n} s(n,i) \times x^i$
- 分治 FFT，时间复杂度 $O(n \log^2 n)$

毛爷题

- 考虑倍增，令 $f_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x + i - 1)$。
- $f_{2n}(x) = f_n(x) \times f_n(x + n)$。
- 令 $f_n(x + n) = \sum_{i=0}^{n} B_i x^i$，$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$
- $B_i = \sum_{j=i}^{n} A_j \times \binom{j}{i} \times n^{j-i}$
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

毛爷题

- 考虑倍增，令 $f_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x + i - 1)$。
- $f_{2n}(x) = f_n(x) \times f_n(x + n)$。
- 令 $f_n(x + n) = \sum_{i=0}^{n} B_i x^i$，$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$
- $B_i = \sum_{j=i}^{n} A_j \times \binom{j}{i} \times n^{j-i}$
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

毛爷题

- 考虑倍增，令 $f_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x+i-1)$。
- $f_{2n}(x) = f_n(x) \times f_n(x+n)$。
- 令 $f_n(x+n) = \sum_{i=0}^{n} B_i x^i$，$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$
- $B_i = \sum_{j=i}^{n} A_j \times \binom{j}{i} \times n^{j-i}$
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

毛爷题

- 考虑倍增，令 $f_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x+i-1)$。
- $f_{2n}(x) = f_n(x) \times f_n(x+n)$。
- 令 $f_n(x+n) = \sum_{i=0}^{n} B_i x^i$，$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$
- $B_i = \sum_{j=i}^{n} A_j \times \binom{j}{i} \times n^{j-i}$
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

毛爷题

- 考虑倍增，令 $f_n(x) = \prod_{i=1}^{n}(x + i - 1)$。
- $f_{2n}(x) = f_n(x) \times f_n(x + n)$。
- 令 $f_n(x + n) = \sum_{i=0}^{n} B_i x^i$，$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} A_i x^i$
- $B_i = \sum_{j=i}^{n} A_j \times \binom{j}{i} \times n^{j-i}$
- 时间复杂度 $O(n \log n)$。

第二类斯特林数

- $S(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个集合的方案数。
- $\sum_{i=0}^{n} S(n,i) = B_n$
- $S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i,k-1) \times \binom{n-1}{i-1}$
- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + S(n-1,k) \times k$

第二类斯特林数

- $S(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个集合的方案数。
- $\sum_{i=0}^{n} S(n,i) = B_n$
- $S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i,k-1) \times \binom{n-1}{i-1}$
- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + S(n-1,k) \times k$

第二类斯特林数

- $S(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个集合的方案数。
- $\sum_{i=0}^{n} S(n,i) = B_n$
- $S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i,k-1) \times \binom{n-1}{i-1}$
- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + S(n-1,k) \times k$

第二类斯特林数

- $S(n,k)$ 表示将 n 个数划分成 k 个集合的方案数。
- $\sum_{i=0}^{n} S(n,i) = B_n$
- $S(n,k) = \sum_{i=1}^{n} S(n-i,k-1) \times \binom{n-1}{i-1}$
- $S(n,k) = S(n-1,k-1) + S(n-1,k) \times k$

第二类斯特林数

- $S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$
- FFT，时间复杂度 $O(n \log n)$

第二类斯特林数

- $S(n, m) = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^n$
- FFT，时间复杂度 $O(n \log n)$

Part2 斯特林数与数的幂

数的幂

- $x^n = \sum_{k=0}^{n} x^{\underline{k}} \times S(n,k)$

2013 多校联合训练 JZPTREE

给出一棵 n 个节点边权为 1 的树，对每一个节点 i，输出 $\sum_{j=1}^{n} \mathrm{dist}(i,j)^m$。

$n \le 5 \times 10^4, m \le 500$

2013 多校联合训练 JZPTREE

- $m = 1$ 时，直接树形 DP，$O(n)$。
- 相当于维护一个数集，操作有合并两个数集，给数集中的所有数加一，询问数集中所有数 m 次方和。

2013 多校联合训练 JZPTREE

- $m = 1$ 时，直接树形 DP，$O(n)$。
- 相当于维护一个数集，操作有合并两个数集，给数集中的所有数加一，询问数集中所有数 m 次方和。

2013 多校联合训练 JZPTREE

- 对 $i \in [0, m]$ 维护 i 次方和。
- $(x+1)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j$
- $O(nm^2)$

2013 多校联合训练 JZPTREE

- 对 $i \in [0, m]$ 维护 i 次方和。
- $(x+1)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j$
- $O(nm^2)$

2013 多校联合训练 JZPTREE

- 对 $i \in [0, m]$ 维护 i 次方和。
- $(x+1)^i = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} x^j$
- $O(nm^2)$

2013 多校联合训练 JZPTREE

- 对 $i \in [0, m]$ 维护 $\sum x^{\underline{i}}$。
- $(x+1)^{\underline{i}} = (x+1)x^{\underline{i-1}} = x^{\underline{i}} + i \times x^{\underline{i-1}}$
- 最后利用 $x^n = \sum_{k=0}^{m} x^{\underline{k}} \times S(n, k)$ 求得答案。
- $O(nm)$

2013 多校联合训练 JZPTREE

- 对 $i \in [0, m]$ 维护 $\sum x^{\underline{i}}$。
- $(x+1)^{\underline{i}} = (x+1)x^{\underline{i-1}} = x^{\underline{i}} + i \times x^{\underline{i-1}}$
- 最后利用 $x^n = \sum_{k=0}^{m} x^{\underline{k}} \times S(n, k)$ 求得答案。
- $O(nm)$

2013 多校联合训练 JZPTREE

- 对 $i \in [0, m]$ 维护 $\sum x^{\underline{i}}$。
- $(x+1)^{\underline{i}} = (x+1)x^{\underline{i-1}} = x^{\underline{i}} + i \times x^{\underline{i-1}}$
- 最后利用 $x^n = \sum_{k=0}^{m} x^{\underline{k}} \times S(n,k)$ 求得答案。
- $O(nm)$

2013 多校联合训练 JZPTREE

- 对 $i \in [0, m]$ 维护 $\sum x^{\underline{i}}$。
- $(x+1)^{\underline{i}} = (x+1)x^{\underline{i-1}} = x^{\underline{i}} + i \times x^{\underline{i-1}}$
- 最后利用 $x^n = \sum_{k=0}^{m} x^{\underline{k}} \times S(n, k)$ 求得答案。
- $O(nm)$

HackerRank Costly Graphs

对于一张无向图，它的权值为所有节点的权值和，一个节点的权值为它的度数的 m 次方。

问所有 N 个点带标号的简单无向图的权值和。

答案对 1005060097 取模。

$N \le 10^9, m \le 2 \times 10^5$

HackerRank Costly Graphs

- 令 $n = N - 1$。
- 每一个节点是等价的，贡献为 $2^{\binom{n}{2}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$
- 考虑化简 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$

HackerRank Costly Graphs

- 令 $n = N - 1$。
- 每一个节点是等价的，贡献为 $2^{\binom{n}{2}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$
- 考虑化简 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$

HackerRank Costly Graphs

- 令 $n = N - 1$。
- 每一个节点是等价的，贡献为 $2^{\binom{n}{2}} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$
- 考虑化简 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$

HackerRank Costly Graphs

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{m} S(m,j) i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) n^{\underline{j}} \times 2^{n-j}$

HackerRank Costly Graphs

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^{m}$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{m} S(m,j) i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) n^{\underline{j}} \times 2^{n-j}$

HackerRank Costly Graphs

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{m} S(m,j) i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) n^{\underline{j}} \times 2^{n-j}$

HackerRank Costly Graphs

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^{m}$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{m} S(m,j) i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) n^{\underline{j}} \times 2^{n-j}$

HackerRank Costly Graphs

- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$
- $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{m} S(m,j) i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}}$
- $\sum_{j=0}^{m} S(m,j) n^{\underline{j}} \times 2^{n-j}$

HackerRank Costly Graphs

- 用 FFT 求第二类斯特林数。
- 时间复杂度 $O(m \log m)$。

HackerRank Costly Graphs

- 用 FFT 求第二类斯特林数。
- 时间复杂度 $O(m \log m)$。

多项式的幂

- $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$
- 项 $\prod x_{a_i}^{t_i}$ 的系数为 $\frac{m!}{\prod t_i!}$，其中 $\sum t_i = m$
- 考虑所有由 x_{a_1} 至 x_{a_k} 组成的项的系数和
- $\sum_{\sum t_i = m} \frac{m!}{\prod t_i!} = S(m,k) \times k!$
- 把 m 个不同的物品放入 k 个不同的盒子

多项式的幂

- $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$
- 项 $\prod x_{a_i}^{t_i}$ 的系数为 $\frac{m!}{\prod t_i!}$，其中 $\sum t_i = m$
- 考虑所有由 x_{a_1} 至 x_{a_k} 组成的项的系数和
- $\sum_{\sum t_i = m} \frac{m!}{\prod t_i!} = S(m, k) \times k!$
- 把 m 个不同的物品放入 k 个不同的盒子

多项式的幂

- $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^m$
- 项 $\prod x_{a_i}^{t_i}$ 的系数为 $\frac{m!}{\prod t_i!}$，其中 $\sum t_i = m$
- 考虑所有由 x_{a_1} 至 x_{a_k} 组成的项的系数和
- $\sum_{\sum t_i = m} \frac{m!}{\prod t_i!} = S(m,k) \times k!$
- 把 m 个不同的物品放入 k 个不同的盒子

多项式的幂

- $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^m$
- 项 $\prod x_{a_i}^{t_i}$ 的系数为 $\frac{m!}{\prod t_i!}$，其中 $\sum t_i = m$
- 考虑所有由 x_{a_1} 至 x_{a_k} 组成的项的系数和
- $\sum_{\sum t_i = m} \frac{m!}{\prod t_i!} = S(m,k) \times k!$
- 把 m 个不同的物品放入 k 个不同的盒子

多项式的幂

- $(\sum_{i=1}^{n} x_i)^m$
- 项 $\prod x_{a_i}^{t_i}$ 的系数为 $\frac{m!}{\prod t_i!}$，其中 $\sum t_i = m$
- 考虑所有由 x_{a_1} 至 x_{a_k} 组成的项的系数和
- $\sum_{\sum t_i = m} \frac{m!}{\prod t_i!} = S(m, k) \times k!$
- 把 m 个不同的物品放入 k 个不同的盒子

火车题

一张无向图的权值为联通块个数的 m 次方，问所有 n 个点的带标号的无向图的权值和。

答案对 998244353 取模。

$T \le 1000, n \le 30000, m \le 15$。

火车题

- 令 x_i 表示联通块 i 是否存在，图的权值为 $(\sum x_i)^m$
- 对于某 k 个联通块，如果它们在图中同时出现，那么贡献为 $S(m,k) \times k!$

火车题

- 令 x_i 表示联通块 i 是否存在，图的权值为 $(\sum x_i)^m$
- 对于某 k 个联通块，如果它们在图中同时出现，那么贡献为 $S(m,k) \times k!$

火车题

- 令 f_i 为 i 个点的无向联通图个数。
- 令 $g_{i,j}$ 为 i 个点 j 个联通块的无向图个数。
- $f_i = 2^{\binom{i}{2}} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} f_j \times 2^{\binom{i-j}{2}}$
- $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} f_k \times g_{i-k,j-1}$
- 答案为 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \binom{n}{i} g_{i,j} \times 2^{\binom{n-i}{2}} \times j! \times S(m,j)$

火车题

- 令 f_i 为 i 个点的无向联通图个数。
- 令 $g_{i,j}$ 为 i 个点 j 个联通块的无向图个数。
- $f_i = 2^{\binom{i}{2}} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} f_j \times 2^{\binom{i-j}{2}}$
- $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} f_k \times g_{i-k,j-1}$
- 答案为 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \binom{n}{i} g_{i,j} \times 2^{\binom{n-i}{2}} \times j! \times S(m,j)$

火车题

- 令 f_i 为 i 个点的无向联通图个数。
- 令 $g_{i,j}$ 为 i 个点 j 个联通块的无向图个数。
- $f_i = 2^{\binom{i}{2}} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} f_j \times 2^{\binom{i-j}{2}}$
- $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} f_k \times g_{i-k,j-1}$
- 答案为 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \binom{n}{i} g_{i,j} \times 2^{\binom{n-i}{2}} \times j! \times S(m,j)$

火车题

- 令 f_i 为 i 个点的无向联通图个数。
- 令 $g_{i,j}$ 为 i 个点 j 个联通块的无向图个数。
- $f_i = 2^{\binom{i}{2}} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} f_j \times 2^{\binom{i-j}{2}}$
- $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} f_k \times g_{i-k,j-1}$
- 答案为 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \binom{n}{i} g_{i,j} \times 2^{\binom{n-i}{2}} \times j! \times S(m,j)$

火车题

- 令 f_i 为 i 个点的无向联通图个数。
- 令 $g_{i,j}$ 为 i 个点 j 个联通块的无向图个数。
- $f_i = 2^{\binom{i}{2}} - \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j-1} f_j \times 2^{\binom{i-j}{2}}$
- $g_{i,j} = \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} f_k \times g_{i-k,j-1}$
- 答案为 $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \binom{n}{i} g_{i,j} \times 2^{\binom{n-i}{2}} \times j! \times S(m,j)$

Part3 斯特林数与容斥

TCO2014 Wildcard CountTables

满足任意两行或者任意两列都不相同的 $n \times m$ 的数字矩阵有多少个，每一个格子内的数必须是 $[1, C]$ 内的整数。对一个大质数取模。

$n, m, C \leq 4000$

TCO2014 Wildcard CountTables

- 有 C^m 种不同的行，任意两行不相同的方案数有 $\binom{C^m}{n}$
- 若列有 k 个等价类，那么此时的方案数是 $\binom{C^k}{n}$

TCO2014 Wildcard CountTables

- 有 C^m 种不同的行，任意两行不相同的方案数有 $\binom{C^m}{n}$
- 若列有 k 个等价类，那么此时的方案数是 $\binom{C^k}{n}$

TCO2014 Wildcard CountTables

- 令 f_i 和 g_i 分别为至少和恰好有 i 个等价类的方案数
- $f_i = S(m,i) \times \binom{C^i}{n}$
- $g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} g_j \times S(i,j)$
- 答案就是 g_m，时间复杂度 $O(m^2)$。

TCO2014 Wildcard CountTables

- 令 f_i 和 g_i 分别为至少和恰好有 i 个等价类的方案数
- $f_i = S(m, i) \times \binom{C^i}{n}$
- $g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} g_j \times S(i, j)$
- 答案就是 g_m，时间复杂度 $O(m^2)$。

TCO2014 Wildcard CountTables

- 令 f_i 和 g_i 分别为至少和恰好有 i 个等价类的方案数
- $f_i = S(m, i) \times \binom{C^i}{n}$
- $g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} g_j \times S(i, j)$
- 答案就是 g_m，时间复杂度 $O(m^2)$。

TCO2014 Wildcard CountTables

- 令 f_i 和 g_i 分别为至少和恰好有 i 个等价类的方案数
- $f_i = S(m, i) \times \binom{C^i}{n}$
- $g_i = f_i - \sum_{j=1}^{i-1} g_j \times S(i, j)$
- 答案就是 g_m，时间复杂度 $O(m^2)$。

杜爷题

一张 n 个点没有边的无向图，每次随机加一条边，问联通的期望步数，对一个大质数取模。

数据范围 $n \leq 100$。

杜爷题

- 令 f_i 为第 i 时刻图不连通的概率，$\sum_{t=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举图的联通块，只能连联通块内部的边，$\left(\frac{m}{n^2}\right)^t$。

杜爷题

- 令 f_i 为第 i 时刻图不连通的概率，$\sum_{t=0}^{\infty} f_t$。
- 枚举图的联通块，只能连联通块内部的边，$(\frac{m}{n^2})^t$。

杜爷题

- $f[i][j][k]$ 表示当前考虑了 i 个点，有 j 个联通块，一共有 k 条内部的边。
- 枚举编号最小点所在联通块 DP，转移 $O(n)$。
- 实际 i 个联通块的方案在 j 个中统计了 $S(i,j)$ 次。
- 容斥，总复杂度 $O(n^5)$

杜爷题

- $f[i][j][k]$ 表示当前考虑了 i 个点，有 j 个联通块，一共有 k 条内部的边。
- 枚举编号最小点所在联通块 DP，转移 $O(n)$。
- 实际 i 个联通块的方案在 j 个中统计了 $S(i,j)$ 次。
- 容斥，总复杂度 $O(n^5)$

杜爷题

- $f[i][j][k]$ 表示当前考虑了 i 个点，有 j 个联通块，一共有 k 条内部的边。
- 枚举编号最小点所在联通块 DP，转移 $O(n)$。
- 实际 i 个联通块的方案在 j 个中统计了 $S(i,j)$ 次。
- 容斥，总复杂度 $O(n^5)$

杜爷题

- $f[i][j][k]$ 表示当前考虑了 i 个点，有 j 个联通块，一共有 k 条内部的边。
- 枚举编号最小点所在联通块 DP，转移 $O(n)$。
- 实际 i 个联通块的方案在 j 个中统计了 $S(i, j)$ 次。
- 容斥，总复杂度 $O(n^5)$

杜爷题

- n 个联通块的容斥系数 g_n 是 $(-1)^n(n-1)!$
- 归纳法，$n=2$ 显然成立。

杜爷题

- n 个联通块的容斥系数 g_n 是 $(-1)^n(n-1)!$
- 归纳法，$n=2$ 显然成立。

杜爷题

- $g_n = 1 - \sum_{i=2}^{n-1} g_i \times S(n,i)$
- $1 - \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (i-1)! \times S(n,i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! \times S(n,i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! [S(n-1,i-1) + iS(n-1,i)]$
- $(-1)^n (n-1)!$

杜爷题

- $g_n = 1 - \sum_{i=2}^{n-1} g_i \times S(n, i)$
- $1 - \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (i-1)! \times S(n, i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! \times S(n, i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! [S(n-1, i-1) + iS(n-1, i)]$
- $(-1)^n (n-1)!$

杜爷题

- $g_n = 1 - \sum_{i=2}^{n-1} g_i \times S(n, i)$
- $1 - \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (i-1)! \times S(n, i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! \times S(n, i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! [S(n-1, i-1) + iS(n-1, i)]$
- $(-1)^n (n-1)!$

杜爷题

- $g_n = 1 - \sum_{i=2}^{n-1} g_i \times S(n,i)$
- $1 - \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (i-1)! \times S(n,i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! \times S(n,i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! [S(n-1,i-1) + iS(n-1,i)]$
- $(-1)^n (n-1)!$

杜爷题

- $g_n = 1 - \sum_{i=2}^{n-1} g_i \times S(n,i)$
- $1 - \sum_{i=2}^{n-1} (-1)^i (i-1)! \times S(n,i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! \times S(n,i)$
- $(-1)^n \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{n-1-i} (i-1)! [S(n-1,i-1) + iS(n-1,i)]$
- $(-1)^n (n-1)!$

杜爷题

- $f[i][j][k]$ 的贡献是 $(-1)^j(j-1)!$。
- 让 j 个联通块的状态被统计 $(j-1)!$ 次。
- 保证第一个联通块包含最小的点，其余乱序枚举。
- 时间复杂度 $O(n^4)$。

杜爷题

- $f[i][j][k]$ 的贡献是 $(-1)^j(j-1)!$。
- 让 j 个联通块的状态被统计 $(j-1)!$ 次。
- 保证第一个联通块包含最小的点，其余乱序枚举。
- 时间复杂度 $O(n^4)$。

杜爷题

- $f[i][j][k]$ 的贡献是 $(-1)^j(j-1)!$。
- 让 j 个联通块的状态被统计 $(j-1)!$ 次。
- 保证第一个联通块包含最小的点，其余乱序枚举。
- 时间复杂度 $O(n^4)$。

杜爷题

- $f[i][j][k]$ 的贡献是 $(-1)^j(j-1)!$。
- 让 j 个联通块的状态被统计 $(j-1)!$ 次。
- 保证第一个联通块包含最小的点，其余乱序枚举。
- 时间复杂度 $O(n^4)$。

Part4 一些与斯特林数定义相关的题

HDU 4372 Count the Buildings

n 幢楼高度分别为 1 到 n，你需要排列这些楼的相对位置使得从左看去恰好有 x 幢楼，从右看去恰好有 y 幢楼，问方案数。

答案对一个大质数取模。

数据范围 $T \leq 10^5, n \leq 2000$。

HDU 4372 Count the Buildings

- $s(n-1, x+y-2) \times \binom{x+y-2}{x-1}$
- $O(n^2 + T)$

HDU 4372 Count the Buildings

- $s(n-1, x+y-2) \times \binom{x+y-2}{x-1}$
- $O(n^2 + T)$

TJOI2016 求和

$f_n = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} S(i,j) \times 2^j \times j!$

求 f_n 对 998244353 取模后的值。

数据范围 $n \leq 10^5$。

TJOI2016 求和

- 令 $g_n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i) \times 2^i \times i!$
- g_n 的意义为把 n 个不同的数放入若干个不同集合中，且每一个集合有两种状态的方案数。
- $g_n = \sum_{i=1}^{n} 2\binom{n}{i} g_{n-i}$
- 多项式求逆或分治 FFT

TJOI2016 求和

- 令 $g_n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i) \times 2^i \times i!$
- g_n 的意义为把 n 个不同的数放入若干个不同集合中，且每一个集合有两种状态的方案数。
- $g_n = \sum_{i=1}^{n} 2\binom{n}{i} g_{n-i}$
- 多项式求逆或分治 FFT

TJOI2016 求和

- 令 $g_n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i) \times 2^i \times i!$
- g_n 的意义为把 n 个不同的数放入若干个不同集合中，且每一个集合有两种状态的方案数。
- $g_n = \sum_{i=1}^{n} 2\binom{n}{i} g_{n-i}$
- 多项式求逆或分治 FFT

TJOI2016 求和

- 令 $g_n = \sum_{i=0}^{n} S(n,i) \times 2^i \times i!$
- g_n 的意义为把 n 个不同的数放入若干个不同集合中，且每一个集合有两种状态的方案数。
- $g_n = \sum_{i=1}^{n} 2\binom{n}{i} g_{n-i}$
- 多项式求逆或分治 FFT

Part5 一题流的总结

SRM 686 CyclesNumber

求所有长度为 n 的置换的循环个数的 m 次方和，对一个大质数取模。

$n \leq 10^5, m, t \leq 500$

SRM 686 CyclesNumber

- 令 x_i 为循环 i 是否出现，置换的权值为 $(\sum x_i)^m$
- 对于某 k 个循环，如果它们在置换同时出现，那么贡献为 $S(m,k) \times k!$
- k 相同的所有组合的贡献是相同的，接下来就只需要考虑每一个 k 的出现次数。

SRM 686 CyclesNumber

- 令 x_i 为循环 i 是否出现，置换的权值为 $(\sum x_i)^m$
- 对于某 k 个循环，如果它们在置换同时出现，那么贡献为 $S(m, k) \times k!$
- k 相同的所有组合的贡献是相同的，接下来就只需要考虑每一个 k 的出现次数。

SRM 686 CyclesNumber

- 令 x_i 为循环 i 是否出现，置换的权值为 $(\sum x_i)^m$
- 对于某 k 个循环，如果它们在置换同时出现，那么贡献为 $S(m,k) \times k!$
- k 相同的所有组合的贡献是相同的，接下来就只需要考虑每一个 k 的出现次数。

SRM 686 CyclesNumber

- $|s(n+1, k+1)|$
- 需要构造一个长度为 n 的置换中选出 k 个循环到有 $k+1$ 个循环的长度为 $n+1$ 的置换的双射。

SRM 686 CyclesNumber

- $|s(n+1,k+1)|$
- 需要构造一个长度为 n 的置换中选出 k 个循环到有 $k+1$ 个循环的长度为 $n+1$ 的置换的双射。

SRM 686 CyclesNumber

- 对于一个长度为 n 的排列，我们新增加一个元素 $n+1$ 把没有被选中的循环拼接起来。
- 如果没有被选取的元素从小到大为 $a_1, \dots, a_n$，它们对应的元素是 $x_1, \dots, x_n$，增加循环 $n+1 \to x_1 \to x_2 \to \dots \to n+1$。

SRM 686 CyclesNumber

- 对于一个长度为 n 的排列，我们新增加一个元素 $n+1$ 把没有被选中的循环拼接起来。
- 如果没有被选取的元素从小到大为 $a_1, ..., a_n$，它们对应的元素是 $x_1, ..., x_n$，增加循环 $n+1 \to x_1 \to x_2 \to ... \to n+1$。

SRM 686 CyclesNumber

- $\sum_{k=1}^{m} |s(n+1, k+1)| \times k! \times S(m, k)$
- 时间复杂度 $O(nm + tm)$

SRM 686 CyclesNumber

- $\sum_{k=1}^{m} |s(n+1, k+1)| \times k! \times S(m, k)$
- 时间复杂度 $O(nm + tm)$

SRM 686 CyclesNumber

- 需要求 $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k^m$
- $\sum_{k=0}^{m} S(m,k) x(x-1)(x-2)\ldots(x-k+1) = x^m$
- 考虑对每一个 l 求 $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k(k-1)\ldots(k-l+1)$

SRM 686 CyclesNumber

- 需要求 $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k^m$
- $\sum_{k=0}^{m} S(m,k) x(x-1)(x-2)...(x-k+1) = x^m$
- 考虑对每一个 l 求 $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k(k-1)...(k-l+1)$

SRM 686 CyclesNumber

- 需要求 $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k^m$
- $\sum_{k=0}^{m} S(m,k) x(x-1)(x-2)...(x-k+1) = x^m$
- 考虑对每一个 l 求 $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k(k-1)...(k-l+1)$

SRM 686 CyclesNumber

- $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k = \prod_{i=1}^{n} (x + i - 1)$
- $(x^a)^{(b)} = \prod_{i=1}^{b} (a - i + 1) x^{a-b}$
- 所以我们要求的是 $(x(x+1)(x+2)...(x+n-1))^{(l)}|_{x=1}$
- 令 $f(x) = (u+1)(u+2)...(u+n)$，求 $f^{(l)}(0)$

SRM 686 CyclesNumber

- $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k = \prod_{i=1}^{n} (x+i-1)$
- $(x^a)^{(b)} = \prod_{i=1}^{b} (a-i+1) x^{a-b}$
- 所以我们要求的是 $(x(x+1)(x+2)\dots(x+n-1))^{(l)}|_{x=1}$
- 令 $f(x) = (u+1)(u+2)\dots(u+n)$，求 $f^{(l)}(0)$

SRM 686 CyclesNumber

- $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k = \prod_{i=1}^{n} (x+i-1)$
- $(x^a)^{(b)} = \prod_{i=1}^{b} (a-i+1) x^{a-b}$
- 所以我们要求的是 $(x(x+1)(x+2)...(x+n-1))^{(l)}|_{x=1}$
- 令 $f(x) = (u+1)(u+2)...(u+n)$，求 $f^{(l)}(0)$

SRM 686 CyclesNumber

- $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k = \prod_{i=1}^{n}(x+i-1)$
- $(x^a)^{(b)} = \prod_{i=1}^{b}(a-i+1)x^{a-b}$
- 所以我们要求的是 $(x(x+1)(x+2)...(x+n-1))^{(l)}|_{x=1}$
- 令 $f(x) = (u+1)(u+2)...(u+n)$，求 $f^{(l)}(0)$

SRM 686 CyclesNumber

- 将 $f(x)$ 泰勒展开，$f(x) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$
- 所以 $f(x)$ 的 k 次项系数等于 $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$。
- $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k(k-1)...(k-l+1) = |s(n+1,l+1)| \times l!$
- 整理得 $\sum_{k=1}^{m} |s(n+1,k+1)| \times k! \times S(m,k)$

SRM 686 CyclesNumber

- 将 $f(x)$ 泰勒展开，$f(x) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$
- 所以 $f(x)$ 的 k 次项系数等于 $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$。
- $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k(k-1)...(k-l+1) = |s(n+1, l+1)| \times l!$
- 整理得 $\sum_{k=1}^{m} |s(n+1, k+1)| \times k! \times S(m,k)$

SRM 686 CyclesNumber

- 将 $f(x)$ 泰勒展开，$f(x) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$
- 所以 $f(x)$ 的 k 次项系数等于 $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$。
- $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k(k-1)\ldots(k-l+1) = |s(n+1,l+1)| \times l!$
- 整理得 $\sum_{k=1}^{m} |s(n+1,k+1)| \times k! \times S(m,k)$

SRM 686 CyclesNumber

- 将 $f(x)$ 泰勒展开，$f(x) = \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$
- 所以 $f(x)$ 的 k 次项系数等于 $\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$。
- $\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| k(k-1)...(k-l+1) = |s(n+1,l+1)| \times l!$
- 整理得 $\sum_{k=1}^{m} |s(n+1,k+1)| \times k! \times S(m,k)$

SRM 686 CyclesNumber

- 令变量 x 初始为 0，循环 1 到 n，每次有 $\frac{1}{i}$ 的概率给 x 加一。
- $E[x^m] \times n!$
- 对每一个 i 维护 $E[x^i]$，用第二类斯特林数求答案
- 时间复杂度 $O(nm + tm)$。

SRM 686 CyclesNumber

- 令变量 x 初始为 0，循环 1 到 n，每次有 $\frac{1}{i}$ 的概率给 x 加一。
- $E[x^m] \times n!$
- 对每一个 i 维护 $E[x^i]$，用第二类斯特林数求答案
- 时间复杂度 $O(nm + tm)$。

SRM 686 CyclesNumber

- 令变量 x 初始为 0，循环 1 到 n，每次有 $\frac{1}{i}$ 的概率给 x 加一。
- $E[x^m] \times n!$
- 对每一个 i 维护 $E[x^i]$，用第二类斯特林数求答案
- 时间复杂度 $O(nm + tm)$。

SRM 686 CyclesNumber

- 令变量 x 初始为 0，循环 1 到 n，每次有 $\frac{1}{i}$ 的概率给 x 加一。
- $E[x^m] \times n!$
- 对每一个 i 维护 $E[x^i]$，用第二类斯特林数求答案
- 时间复杂度 $O(nm + tm)$。

Part6 提问环节

谢谢大家!