最小乘积问题

九条可怜

杭州天水幼儿园

最小乘积生成树

给定一张无向图，每条边都有两个正边权 a 和 b。

一棵生成树的权值定义为所有边 a 的权值和乘上 b 的权值和。

求权值最小的生成树。

$n \leq 200, m \leq 10000$

最小乘积生成树

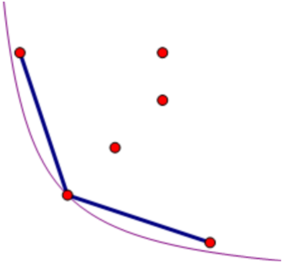
- $x = \sum a, y = \sum b$，用 (x, y) 表示一棵生成树。

最小乘积生成树

- $x = \sum a, y = \sum b$，用 (x, y) 表示一棵生成树。
- 把所有生成树标到二维平面上。

最小乘积生成树

- $x = \sum a, y = \sum b$，用 (x, y) 表示一棵生成树。
- 把所有生成树标到二维平面上。
- 答案一定在下凸壳上。



最小乘积生成树

- 考虑线段 $(a, b) - (a + c, b + d)(c > 0, d < 0)$。

最小乘积生成树

- 考虑线段 $(a,b)-(a+c,b+d)(c>0,d<0)$。
- 最小化 $(a+ct)(b+dt)=ab+(ad+bc)t+cdt^2(0\le t\le 1)$。

最小乘积生成树

- 考虑线段 $(a,b)-(a+c,b+d)(c>0,d<0)$。
- 最小化 $(a+ct)(b+dt)=ab+(ad+bc)t+cdt^2(0\le t\le 1)$。
- $ad+bc+cd\ge 0$ 时，$t=0$。

最小乘积生成树

- 考虑线段 $(a,b)-(a+c,b+d)(c>0,d<0)$。
- 最小化 $(a+ct)(b+dt)=ab+(ad+bc)t+cdt^2(0\le t\le 1)$。
- $ad+bc+cd\ge 0$ 时，$t=0$。
- $ad+bc+cd<0$ 时，$t=1$。

最小乘积生成树

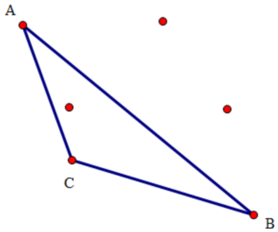
- 求出所有凸壳上的点即可。

最小乘积生成树

- 求出所有凸壳上的点即可。
- 找到 x 最小的点 A 和 y 最小的点 B。

最小乘积生成树

- 求出所有凸壳上的点即可。
- 找到 x 最小的点 A 和 y 最小的点 B。
- 找到 AB 靠原点一侧最远的点 C。



最小乘积生成树

- 最大化 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$。

最小乘积生成树

- 最大化 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$。
- $(B.x - A.x)(C.y - A.y) - (B.y - A.y)(C.x - A.x)$

最小乘积生成树

- 最大化 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$。
- $(B.x - A.x)(C.y - A.y) - (B.y - A.y)(C.x - A.x)$
- 给出 w_a, w_b，找出 $w_a \sum a + w_b \sum b$ 最小的生成树。

最小乘积生成树

- 最大化 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$。
- $(B.x - A.x)(C.y - A.y) - (B.y - A.y)(C.x - A.x)$
- 给出 w_a, w_b，找出 $w_a \sum a + w_b \sum b$ 最小的生成树。
- 递归 AC 与 CB，直到左下方没有点为止。

最小乘积生成树

- 总点数不超过 $\binom{m}{n-1}$。

最小乘积生成树

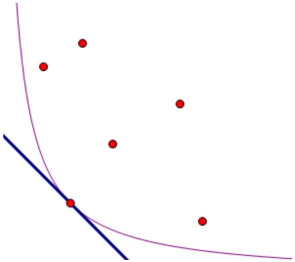
- 总点数不超过 $\binom{m}{n-1}$。
- 如果把点视为随机的话，凸包上的点数为 $O(n \log m)$。

最小乘积生成树

- 总点数不超过 $\binom{m}{n-1}$。
- 如果把点视为随机的话，凸包上的点数为 $O(n\log m)$。
- 时间复杂度 $O(n^3\log n)$。

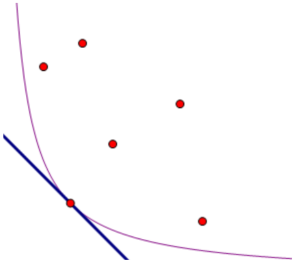
最小乘积生成树

- 假设已经知道了答案 t，那么所有点都在 $y = \frac{t}{x}$ 上方，其中答案点 A 正好落在函数上。



最小乘积生成树

- 假设已经知道了答案 t，那么所有点都在 $y=\frac{t}{x}$ 上方，其中答案点 A 正好落在函数上。



- 作函数的切线 $y=w_a x+w_b$，那么答案点 A 一定是 $-w_a x+y$ 最小的点。

最小乘积生成树

- 一定存在常数 k 使得答案同时也是 $\sum a + k \sum b$ 最小的点。

最小乘积生成树

- 一定存在常数 k 使得答案同时也是 $\sum a + k \sum b$ 最小的点。
- 如果已经知道了 k 的大小，排序贪心。

最小乘积生成树

- 一定存在常数 k 使得答案同时也是 $\sum a + k \sum b$ 最小的点。
- 如果已经知道了 k 的大小，排序贪心。
- 只需要知道这个 k 值时边的相对顺序。

最小乘积生成树

- 一定存在常数 k 使得答案同时也是 $\sum a + k \sum b$ 最小的点。
- 如果已经知道了 k 的大小，排序贪心。
- 只需要知道这个 k 值时边的相对顺序。
- 任意两条边 i 和 j 在 $k = f_{i,j}$ 时权值相同。

最小乘积生成树

- 一定存在常数 k 使得答案同时也是 $\sum a + k \sum b$ 最小的点。
- 如果已经知道了 k 的大小，排序贪心。
- 只需要知道这个 k 值时边的相对顺序。
- 任意两条边 i 和 j 在 $k = f_{i,j}$ 时权值相同。
- m^2 个 $f_{i,j}$ 将数轴划分成了 m^2 段，仅有 m^2 个相对顺序。

最小乘积生成树

- 一定存在常数 k 使得答案同时也是 $\sum a + k \sum b$ 最小的点。
- 如果已经知道了 k 的大小，排序贪心。
- 只需要知道这个 k 值时边的相对顺序。
- 任意两条边 i 和 j 在 $k = f_{i,j}$ 时权值相同。
- m^2 个 $f_{i,j}$ 将数轴划分成了 m^2 段，仅有 m^2 个相对顺序。
- 做 m^2 次最小生成树，$O(m^3)$，使用 LCT 优化，$O(m^2 \log n)$。

最小乘积生成树

- 对于凸包上的点，一定存在区间 $[l,r](l<r)$ 使得对于每一个 $k\in[l,r]$，这个点都是 $\sum a+k\sum b$ 最小的点。

最小乘积生成树

- 对于凸包上的点，一定存在区间 $[l, r](l < r)$ 使得对于每一个 $k \in [l, r]$，这个点都是 $\sum a + k \sum b$ 最小的点。
- 凸包上的点数不超过 $O(m^2)$。

最小乘积生成树

- 对于凸包上的点，一定存在区间 $[l,r](l<r)$ 使得对于每一个 $k\in[l,r]$，这个点都是 $\sum a+k\sum b$ 最小的点。
- 凸包上的点数不超过 $O(m^2)$。
- 对于一些特殊问题可以进一步证明点数是线性的。

有 n 个物品，每一个物品有三个权值 a_i, b_i, c_i。

选出一个物品集合 U 满足不存在一个非空子集 S 使得 S 中所有物品的 a_i 的异或和为 0。

你需要最大化 $|U|$，并在此基础上最小化 $\sum_{i\in U} b_i \times \sum_{i\in U} c_i$。

$n \le 50, 1 \le a_i \le 10^6, 1 \le b_i, c_i \le 10^4$。

SRM526.5 div1-hard MagicMatchesGame

- 求最小乘积线性基。

SRM526.5 div1-hard MagicMatchesGame

- 求最小乘积线性基。
- 线性基是拟阵，排序后贪心。

- 求最小乘积线性基。
- 线性基是拟阵，排序后贪心。
- 遗传性：S 是线性无关的，那么 S 的任意子集一定是线性无关的。

SRM526.5 div1-hard MagicMatchesGame

- 求最小乘积线性基。
- 线性基是拟阵，排序后贪心。
- 遗传性：S 是线性无关的，那么 S 的任意子集一定是线性无关的。
- 交换性：考虑线性无关的集合 $A, B(|A| < |B|)$，假设对于所有的 $x \in B - A$，x 都能被 A 线性表出，那么 B 的异或空间被 A 包含，矛盾。

SRM526.5 div1-hard MagicMatchesGame

- 求最小乘积线性基。
- 线性基是拟阵，排序后贪心。
- 遗传性：S 是线性无关的，那么 S 的任意子集一定是线性无关的。
- 交换性：考虑线性无关的集合 $A, B(|A| < |B|)$，假设对于所有的 $x \in B - A$，x 都能被 A 线性表出，那么 B 的异或空间被 A 包含，矛盾。
- $O(n^4)$。

给出一个三角形 ABC 和 n 个操作。第 i 个操作有两个参数 x_i, y_i，使用这个操作可以使 A 的横坐标增加 x_i，纵坐标增加 y_i。

你最多可以使用 K 个操作，这些操作的影响叠加，同一个操作不能重复使用。ABC 三点允许共线或重叠。

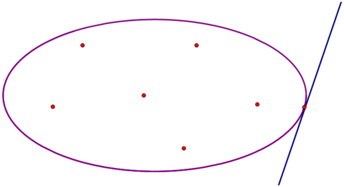
最大化三角形 ABC 的周长。

$n \leq 500$

Codechef OCT12 MAXCIR

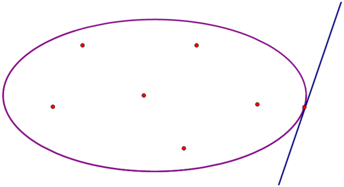
- 要最小化 $|AB| + |AC|$。

- 要最小化 $|AB| + |AC|$。
- 设已经知道了答案为 t，那么所有方案中的 C 一定坐落在以 BC 为焦点，长轴长度为 $\frac{t}{2}$ 的椭圆内部。



Codechef OCT12 MAXCIR

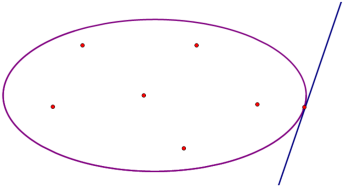
- 要最小化 $|AB| + |AC|$。
- 设已经知道了答案为 t，那么所有方案中的 C 一定坐落在以 BC 为焦点，长轴长度为 $\frac{t}{2}$ 的椭圆内部。



- 过最优点 C 作切线 $ax + by + c = 0$，那么这个点一定是所有点中 $ax + by$ 的最大值或最小值。

Codechef OCT12 MAXCIR

- 要最小化 $|AB| + |AC|$。
- 设已经知道了答案为 t，那么所有方案中的 C 一定坐落在以 BC 为焦点，长轴长度为 $\frac{t}{2}$ 的椭圆内部。



- 过最优点 C 作切线 $ax + by + c = 0$，那么这个点一定是所有点中 $ax + by$ 的最大值或最小值。
- 一定存在常数 θ 使得最优解同时是 $\sin\theta x + \cos\theta y$ 最小的点。

Codechef OCT12 MAXCIR

- 临界点：两个操作贡献相同，某一个操作贡献为 0。

- 临界点：两个操作贡献相同，某一个操作贡献为 0。
- θ 的取值范围被分成了 $O(n^2)$ 段，相邻两段区间中顺序只有相邻两项发生了交换，贡献为正的操作数只有 $O(1)$ 的变化。

Codechef OCT12 MAXCIR

- 临界点：两个操作贡献相同，某一个操作贡献为 0。
- θ 的取值范围被分成了 $O(n^2)$ 段，相邻两段区间中顺序只有相邻两项发生了交换，贡献为正的操作数只有 $O(1)$ 的变化。
- 从小到大枚举 θ，维护相对顺序、前缀和贡献为正的操作数。

- 临界点：两个操作贡献相同，某一个操作贡献为 0。
- θ 的取值范围被分成了 $O(n^2)$ 段，相邻两段区间中顺序只有相邻两项发生了交换，贡献为正的操作数只有 $O(1)$ 的变化。
- 从小到大枚举 θ，维护相对顺序、前缀和贡献为正的操作数。
- 时间复杂度 $O(n^2 \log n)$。

SRM678 div1-hard ReturnOfTheJedi

给出 n 个物品，每一个物品有两个权值 a_i, b_i。

给出一个 K，选出恰好 K 个物品，最小化 $\sum a_i \times \prod b_i$。

对每一个 $K \in [1, n]$ 都求出答案。

$n \le 500, 1 \le a_i \le 10^9, 0 < b_i \le 1$

SRM678 div1-hard ReturnOfTheJedi

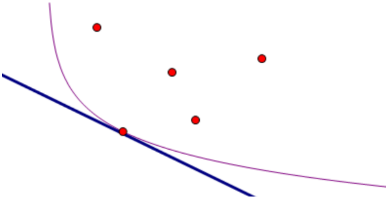
- 取对数，最小化 $\ln \sum a_i + \sum \ln b_i$.

SRM678 div1-hard ReturnOfTheJedi

- 取对数，最小化 $\ln \sum a_i + \sum \ln b_i$.
- 每一个方案都用二维点 (x, y) 表示，$x = \sum a_i, y = \sum \ln b_i$。

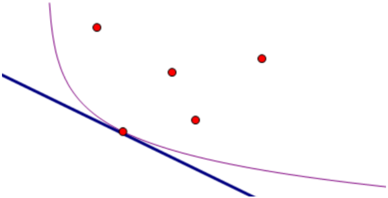
SRM678 div1-hard ReturnOfTheJedi

- 取对数，最小化 $\ln\sum a_i + \sum \ln b_i$.
- 每一个方案都用二维点 (x, y) 表示，$x = \sum a_i, y = \sum \ln b_i$。
- 假设已经知道了答案 t，那么所有点一定坐落在函数 $y = t - \ln x$ 的上方。



SRM678 div1-hard ReturnOfTheJedi

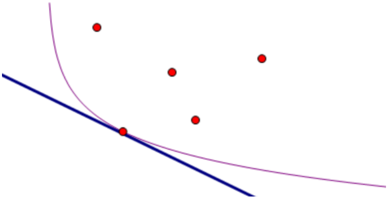
- 取对数，最小化 $\ln\sum a_i + \sum \ln b_i$.
- 每一个方案都用二维点 (x, y) 表示，$x = \sum a_i, y = \sum \ln b_i$。
- 假设已经知道了答案 t，那么所有点一定坐落在函数 $y = t - \ln x$ 的上方。



- 一定存在常数 k 使得最优解同时是 $\sum a + k\sum \ln b$ 最小的。

SRM678 div1-hard ReturnOfTheJedi

- 取对数，最小化 $\ln \sum a_i + \sum \ln b_i$.
- 每一个方案都用二维点 (x, y) 表示，$x = \sum a_i, y = \sum \ln b_i$。
- 假设已经知道了答案 t，那么所有点一定坐落在函数 $y = t - \ln x$ 的上方。



- 一定存在常数 k 使得最优解同时是 $\sum a + k \sum \ln b$ 最小的。
- 时间复杂度 $O(n^3)$。

最大乘积生成树

给定一张无向图，每条边都有两个边权 a 和 b。

一棵生成树的权值定义为所有边 a 的权值和乘上 b 的权值和。

求权值最大的生成树。

$n \le 200, m \le 10000$

最大乘积生成树

- 假设有 n 个 $(0,1)$ 的实数 A_i。

最大乘积生成树

- 假设有 n 个 $(0,1)$ 的实数 A_i。
- 构造一张 $n+1$ 个点 $2n$ 条边的图，i 与 $i+1$ 之间连 $(0,1)$ 与 $(A_i, 1-A_i)$。

最大乘积生成树

- 假设有 n 个 $(0,1)$ 的实数 A_i。
- 构造一张 $n+1$ 个点 $2n$ 条边的图，i 与 $i+1$ 之间连 $(0,1)$ 与 $(A_i, 1-A_i)$。
- 最大乘积生成树相当于选出一个集合使和尽可能的接近 $\frac{n}{2}$。

最大乘积生成树

- 假设有 n 个 $(0,1)$ 的实数 A_i。
- 构造一张 $n+1$ 个点 $2n$ 条边的图，i 与 $i+1$ 之间连 $(0,1)$ 与 $(A_i, 1-A_i)$。
- 最大乘积生成树相当于选出一个集合使和尽可能的接近 $\frac{n}{2}$。
- 所以是 NPC 的。