

# 一些本人出的有意思的题目选讲

陆宇暄

## pro1.tower

题目大意:

维护一个字符集比较大的字符串,支持 `push_back()`,`pop_back()`,询问当前最长回文子串和撤销修改操作,要求复杂度  $O(n)$ .

题目解法:

首先回文树的时间空间复杂度都是  $O(n \cdot \log \Sigma)$  的,无法通过.

考虑哈希,添加一个字符的时候,注意到最长回文子串的长度最长增加 2,直接使用哈希判断长度为  $len+2$  和  $len+1$  的后(前)缀是否是回文的即可.

## Pro2.median

题目大意:

定义一个数组进行一次操作是把这个数组每组相邻的三个数的中位数拿出来做成一个新的数组.

定义一个数组的值是不断对这个数组进行操作之后最后剩下的一个数.

问长度为  $2k+1$  的排列中值为  $x$  的有多少个,要求  $O(n)$ .

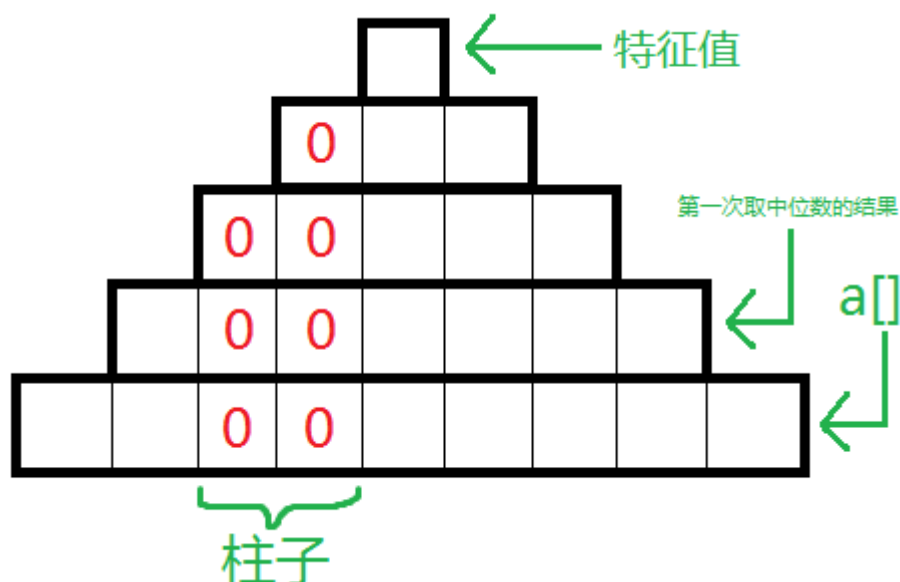
题目解法:

一个套路的想法就是由于值为  $x$  不好直接做,转化为计算值  $\leq x$  的方案数.

发现所有  $\leq x$  的数都是等价的,所有  $> x$  的数也是等价的.把  $\leq x$  的数当做 0,  $> x$  的数当做 1.

考虑如果知道这个数组,如何快速计算特征值.

两个及以上的连续的 0(或 1),这两个 0(或 1)只要没有成为边界会一直存在,如下图.



定义这种结构叫做"柱子".定义一个"柱子"是"极大的"当且仅当它无法向左或右扩展,下文所提到的"柱子"都是"极大的",即所有不是"柱子"的部分都是 0 和 1 交替出现.任何一个柱子两侧的数组的演变都是互不影响的.

考虑两个柱子中间的数组的演变.容易发现,两个 0(或 1)组成的柱子的中间部分都会变成 0(或 1),一个 0 组成的柱子和一个 1 组成的柱子的中间部分靠近 0 的一半会变成 0,另一半变成 1.至此,能够快速计算一个 0 和 1 组成的数组的特征值.

考虑一个 0 和 1 组成的数组的特征值是 0 的充分必要条件:

- 1.在正中间有一个 0 组成的柱子.
- 2.在正中间的左边和右边各有一个 0 组成的柱子,且这两个柱子中间没有其他柱子.
- 3.在正中间的左边有一个 0 组成的柱子,右边有一个 1 组成的柱子,且这两个柱子中间没有其他柱子,且左边的柱子到正中间的距离小于右边的柱子到正中间的距离.(这里贡献要\*2,因为 0 组成的柱子也可以在右边)
- 4.在正中间的左边有一个 0 组成的柱子,且这个柱子的右边没有其他柱子.(这里贡献要\*,因为 0 组成的柱子也可以在右边)
- 5.没有柱子.(当且仅当 0 的个数比 1 的个数多一个)

上面所写的几种情况就是所有的情况,都能直接枚举柱子到正中间的位置使用组合数来计算.发现组合数的式子只和两个柱子的距离之和有关,可以直接枚举两个柱子的距离之和快速计算.

## Pro3.nimgame

题目大意:

有一个  $n$  堆石子的 nim 游戏,可以取的石子个数是  $p^k$  ( $p$  是一个输入的数,  $k$  是任意的非负整数).

这  $n$  堆石子可以看做一个数组,支持区间加减,询问区间的石子拿出来玩是先手是否必胜. 要求复杂度  $O(n * (n \log n)^{0.5})$

题目解法:

sg 函数是这样的:

对于  $p$  是奇数有  $sg(x) = x \text{ and } 1$

对于  $p$  是偶数有

$$sg(x) = \begin{cases} 2 & x \bmod (p+1) = p \\ (x \bmod (p+1)) \text{ and } 1 & \text{other} \end{cases}$$

可以通过简单的数学归纳法证明上式.

当  $p$  是奇数的时候比较简单,略过.

对这个序列分块,不妨设块大小为  $T$ .

每个块维护这个块权值为奇数的有序数组和这个块权值为偶数的有序数组.

在修改操作时,暴力重构首尾两块,对中间的其余块打上 add 的懒标记.这一步的复杂度是  $O(n/T + T \log n)$  如果重构时使用归并可以做到  $O(n/T + T)$ .

在询问操作时,对于首尾两块直接统计 1 和 2 的个数,对中间的其余块做奇偶分类讨论后可以使用 2 次 `lower_bound()` 和 1 次 `equal_range()` 统计答案.这一步的复杂度是  $O(n \log n / T + T)$

取  $T = O((n \log n)^{0.5})$  且重构时使用归并可以使达到要求的复杂度.