一、 二次曲线系

1.1.代数定义

二次曲线顾名思义，次数为二次的曲线，但是这里的曲线不是我们常见的y=f(x)的形式，而是二元曲线的一般形式f(x,y)=0,然后f(x,y)是一个包含参数x,y且参数的最高次为二次的函数即

$f(x,y)=Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

如果曲线L:f(x,y)满足上式则称L输于二次曲线系。

我们平时常见的直线 L:ax+by+c=0 即二次项不存在的二次曲线系，同时方程(ax+by+c)(dx+ey+f)=0包括了这两条直线上的所有点，即二次曲线方程(ax+by+c)(dx+ey+f)=0 即表示$\boldsymbol{l_1}\mathbf{:ax+by+c}$，$\boldsymbol{l_2}\mathbf{:dx+ey+f}$这两条直线

从上面可以细究一下：

二次曲线 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$

可以分为(1)可以分解为(ax+by+c)(dx+ey+f)=0

(2)不可以分解的

如果是第一种情况，那么这个二次曲线就是两条直线，通过五个点一定确定这个二次曲线，其中三点共线确定一条直线，剩下两点确定零一条直线。

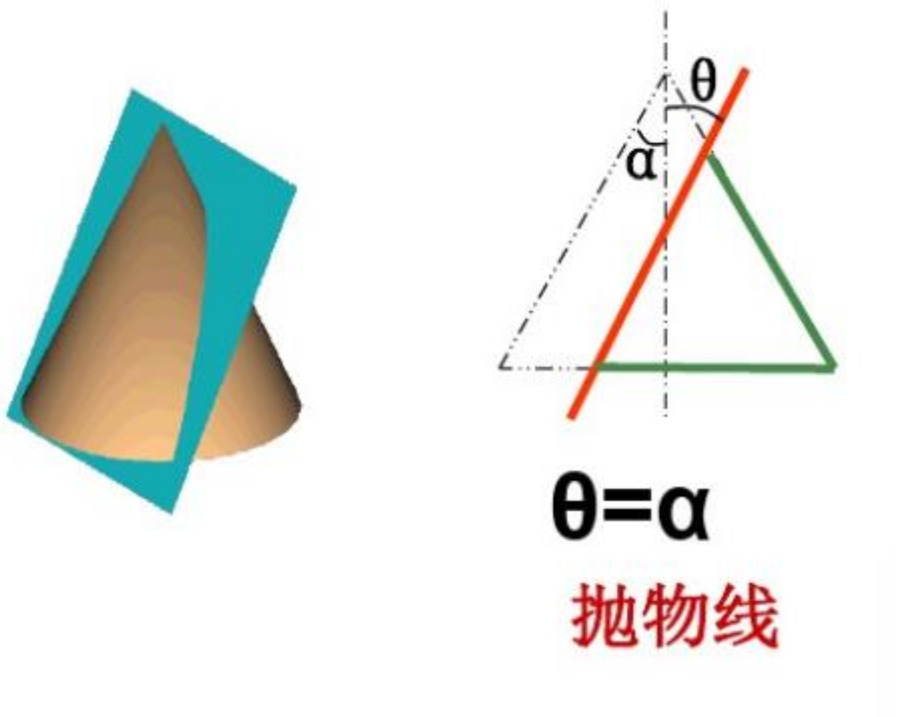
如果是第二种情况，那么这个二次曲线不能拆分为两条直线，通过五个点也能确定这个二次曲线(证明略)

1.2.几何定义

很显然可以看得出，高中阶段学习过的所有的曲线都可以归类到二次曲线系中，在几何上，二次曲线的定义如下:

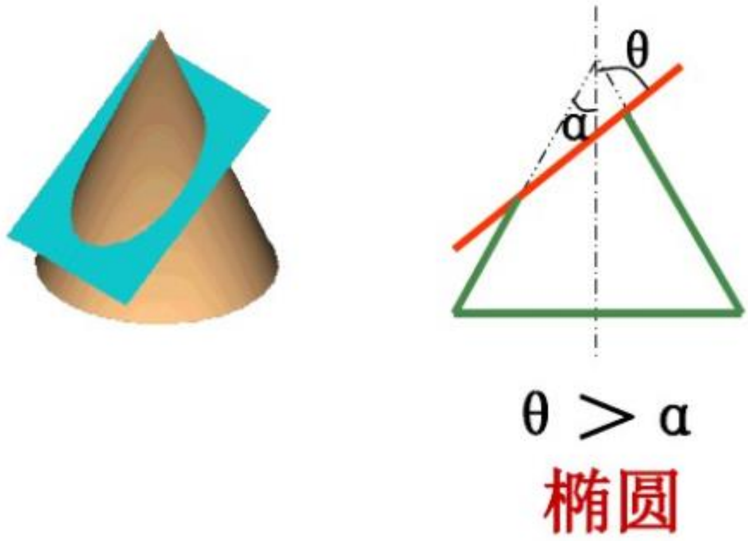
用一个平面去截一个二次锥面(理解为圆锥的表面即可)，得到的交线即为二次曲线(也叫圆锥曲线)

(1)当平面与二次锥面的母线平行，且不过圆锥顶点，结果为抛物线。

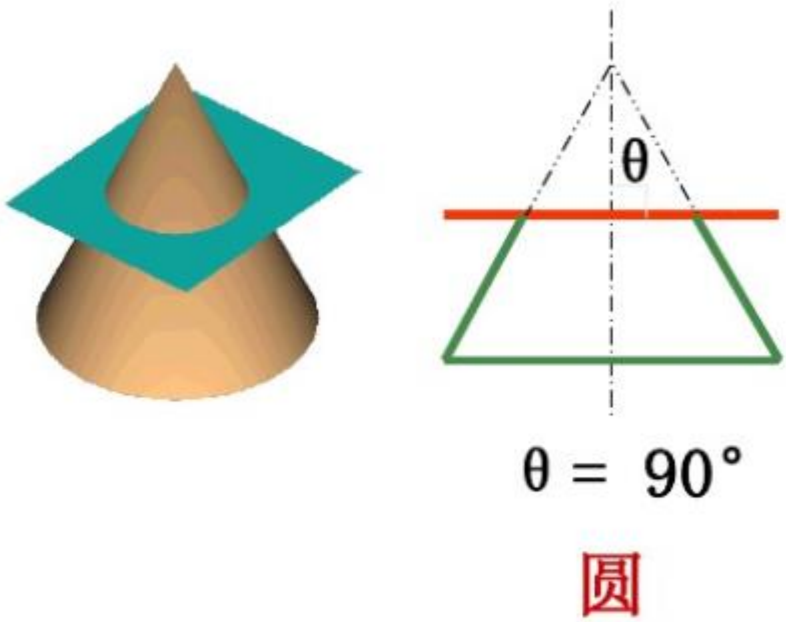


(2)当平面与二次锥面的母线平行，且过圆锥顶点，结果为一条直线

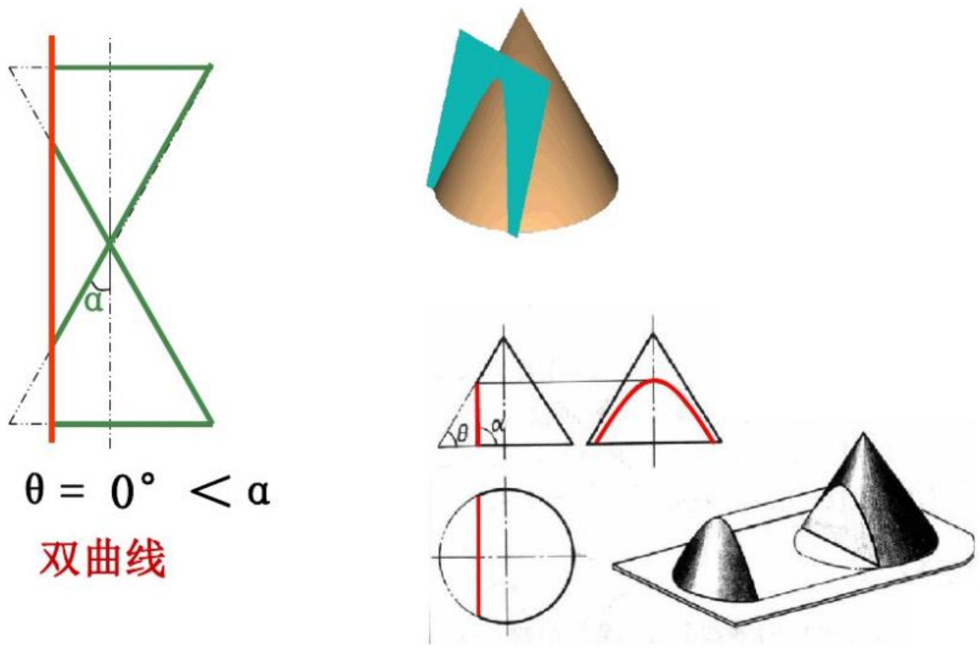
(3)当平面只与二次锥面的一侧相交，且不过圆锥顶点，结果为椭圆（或者说平面与圆锥对称轴夹角大于母线与对称轴夹角）



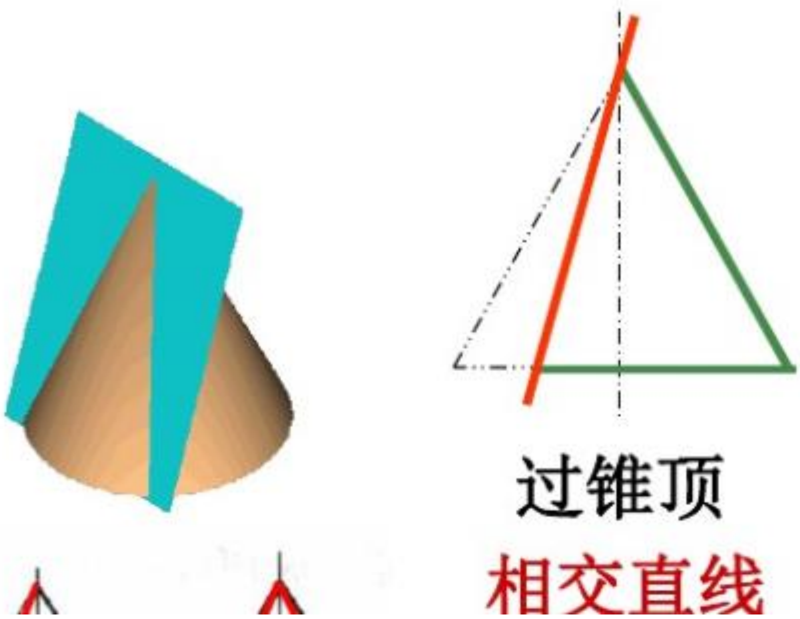
(4)当平面与圆锥的对称轴垂直且不过圆锥顶点，结果为圆



（5）当平面与二次锥面两侧都相交，且不过圆锥顶点，结果为双曲线（每一支为此二次锥面中的一个圆锥面与平面的交线）



（6）当平面与二次锥面两侧都相交，且过圆锥顶点，结果为两条相交直线



1.3. 传统的焦点-准线统一定义

给定一点 P，一直线 l 以及一常数 e>0，则到 P 的距离与 l 距离之比为 e 的点的轨迹是圆锥曲线。

根据 e 的范围不同，曲线也各不相同。具体如下：

(1)e=1（即到 P 与到 l 距离相同），轨迹为抛物线；

(2)0

(3)e>1，轨迹为双曲线。

(4)e<1，轨迹为椭圆

焦点

定义中提到的定点，称为圆锥曲线的**焦点**。

准线

定义中提到的定直线称为圆锥曲线的**准线**。

离心率

固定的常数（即圆锥曲线上一点到焦点与对应准线的距离比值）称为圆锥曲线的**离心率**。

焦准距

焦点到对应准线的距离称为**焦准距**。

焦半径

焦点到曲线上一点的线段称为**焦半径**。

Pappus定理：圆锥曲线上一点的焦半径长度等于该点到相应准线的距离乘以离心率。

我们常见的椭圆、双曲线的准线均为 $x=\pm\frac{a^2}{c}$

1.4.利用二次曲线系解决定值定点问题

之前在解析几何的大纲中，给出过圆系方程的概念：

§7. 解析几何

7. 1. 特殊性质

7.1.1圆系方程

圆1 : $x^2+y^2-ax-by+c=0$

圆2 : $x^2+y^2-mx-ny+t=0$

则经过圆1,圆2交点的圆的方程可设为 :

$$x^2+y^2-ax-by+c+\lambda(x^2+y^2-mx-ny+t)=0,\lambda\neq-1$$

证明比较简单,(x_1,y_1)是两圆交点,则满足上述两方程,

线性组合相加依然为0

只需满足二次项存在，即为所求圆的一般方程

其实这个结论凭空想挺好想到，因为两个圆的交点同时满足两个圆的方程，也就是交点(x,y)满足第一个圆方程 f(x,y)=0 同时也满足第二个圆方程 g(x,y)=0 那么 f(x,y)+ag(x,y)=0,然后再将 a 通过代入几个值的方法求出来即可。

那么可以类比一下，如果将上面的圆扩展到上述二次曲线，那么可以得到下面这个结论：

如果有两个二次曲线 F(x,y)=0 和 G(x,y)=0 那么经过这两个曲线交点的二次曲线系可以设为 F(x,y)+aG(x,y)=0 (*)

其实道理和圆系方程是一样的。

然后还有几个推广的结论：

结论 1：

如果一个四边形的四条边的方程依次为$\boldsymbol{f_i = 0}$, i=1,2,3,4，那么过四边形四个顶点的二次曲线系为$\boldsymbol{f_1 f_3}$+a$\boldsymbol{f_2 f_4}$=0

（首先要注意的是，这里的结论是二次曲线系为…而不是二次曲线为…,这里的结论中的 a 是一个未知数。）

证明：

记四边形的边上右下左依次为$\boldsymbol{l_1}$，l_2，l_3，l_4，其方程分别为$\mathbf{f_i = 0}$.i=1,2,3,4

记四边形的四个顶点由左上顺时针方向依次为 A,B,C,D

则$\boldsymbol{l_1 \cap l_4 = A, l_1 \cap l_2 = B, l_2 \cap l_3 = C, l_3 \cap l_4 = D}$

二次曲线 f(x,y)=$\boldsymbol{f_1 f_3}$表示$\boldsymbol{l_1, l_3}$所组成的二次曲线

同理，二次曲线 g(x,y)= $\boldsymbol{f_2 f_4}$表示$\boldsymbol{l_2, l_4}$所组成的二次曲线

那么由(*)得经过二次曲线 f,g 交点的二次曲线系可表示为 f(x,y)+ag(x,y)=0

而交点即四边形的四个顶点

证毕

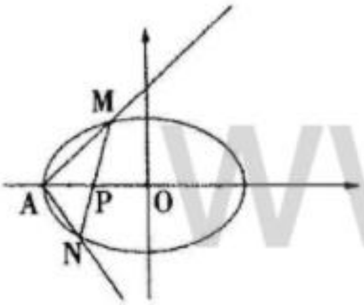
(这里我们再返回来看前面的一个结论，五点必能确定一个二次曲线，想想看怎么证)

结论 2：

过直线$\boldsymbol{f_1} = 0$，$\boldsymbol{f}_2 = 0$与二次曲线 **F(x,y)=0** 的交点的二次曲线系为$\mathrm{F(x,y)} + \mathrm{a}\boldsymbol{f_1}\boldsymbol{f}_2 = 0$

证明与结论 1 类似。

例1：已知椭圆$\frac{x^2}{4}+y^2=1$的左顶点为A，过点A作两条互相垂直的弦AM，AN交椭圆于M，N两点，当直线AM的斜率变化时，直线MN是否过x轴上的一定点，若过定点，请给出证明，并求出该定点？若不过定点，请说明理由。



解：设直线MN与x轴的交点为P(m,0)，则设直线MN方程为$x-ny-m=0$，又点A处的切线方程为$x+2=0$，

由结论2，设过交点A，M，N的二次曲线系方程为：$(x+2)(x-ny-m)+\lambda(x^2+4y^2-4)=0$（＊）

设直线AM方程为$y=k(x+2)$即$kx-y+2k=0$，则直线AN方程为$y=-\frac{1}{k}(x+2)$即$x+ky+2=0$，得$(kx-y+2k)(x+ky+2)=0$（＊＊）

（＊）（＊＊）应有相同特征，比较系数得x^2，y^2系数相反，x系数和常数项相同，则$\begin{cases}5\lambda+1=0\\2-m=-4\lambda-2m\end{cases}$，

则$\begin{cases}\lambda=-\frac{1}{5}\\m=-\frac{6}{5}\end{cases}$.

所以，直线MN方程为$x-ny+\frac{6}{5}=0$，恒过定点$(-\frac{6}{5},0)$.