1、设集合$A=\{x\mid x\ge 1\},B=\{x\mid -1<x<2\}$,则$A\cap B=(D)$

A、$\{x\mid x>-1\}$;B、$\{x\mid x\ge 1\}$;C、$\{x\mid -1<x<1\}$;D、$\{x\mid 1\le x<2\}$

2、已知$a\in R,(1+ai)i=3+i$,则$a=(C)$

A、-1;B、1;C、-3;D、3

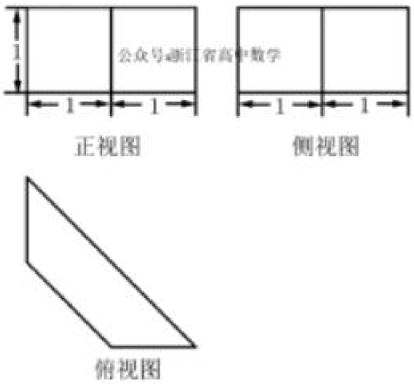
3、已知非零向量a,b,c,则"$a\cdot c=b\cdot c$"是"$a=b$"的(B)

A、充分不必要条件;B、必要不充分条件

C、充分必要条件;D、既不充分也不必要条件

4、某几何体的三视图如图所示,则该几何体的体积为(A)

A、$\frac{3}{2}$;B、3;C、$\frac{3\sqrt{2}}{2}$;D、$3\sqrt{2}$



（第4题图）

5、若实数x,y满足约束条件$\begin{cases}x+1\ge 0\\ x-y\le 0\\ 2x+3y-1\le 0\end{cases}$,则$z=x-\frac{1}{2}y$的最小值为$(B)$

A、-2;B、$-\frac{3}{2}$;C、$-\frac{1}{2}$;D、$\frac{1}{10}$

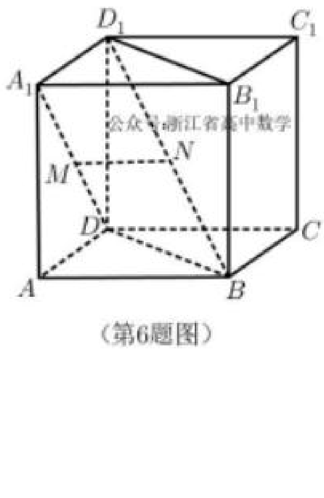
6、如图，已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$,M,N分别A_1D,D_1B的中点,则(A)

A、直线A_1D与直线D_1B垂直，直线MN // 平面$ABCD$

B、直线A_1D与直线D_1B平行，直线$MN\perp$平面BDD_1B_1

C、直线A_1D与直线D_1B相交，直线MN // 平面$ABCD$

D、直线A_1D与直线D_1B异面，直线$MN\perp$平面BDD_1B_1



（第6题图）

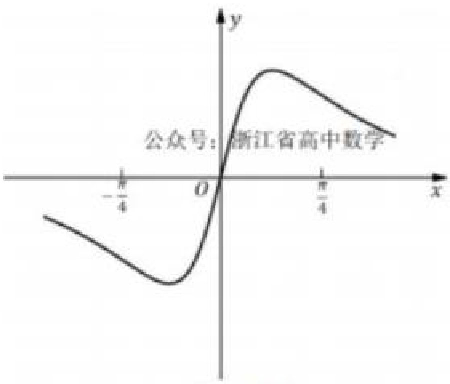
7、已知函数$f(x)=x^2+\frac{1}{4},g(x)=\sin x$,则图象为右图的函数可能是$(D)$

A、$y=f(x)+g(x)-\frac{1}{4}$

B、$y=f(x)-g(x)-\frac{1}{4}$

C、$y=f(x)g(x)$

D、$y=\frac{g(x)}{f(x)}$



（第7题图）

8、已知α,β,γ是互不相同的锐角,则在$\sin\alpha\cos\beta,\sin\beta\cos\gamma,\sin\gamma\cos\alpha$三个值中,

大于$\frac{1}{2}$的个数的最大值为(C)

A、0; B、1; C、2; D、3

解析:

要考虑大于$\frac{1}{2}$的个数的最大值，那么先看如果这三个都大于$\frac{1}{2}$是不是会有矛盾

三个数都大于$\frac{1}{2}$，没有什么其他的条件，那么就是$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha>\frac{3}{2}$

所以尝试用不等式去验证$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\le\frac{3}{2}$

不妨设$\alpha>\beta>\gamma$,那么$\sin\alpha>\sin\beta>\sin\gamma,\cos\alpha<\cos\beta<\cos\gamma$

由排序不等式(顺序和$>$乱序和$>$逆序和)

$$\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\gamma+\sin\gamma\cos\alpha\le\sin\alpha\cos\gamma+\sin\beta\cos\beta+\sin\gamma\cos\alpha=\sin(\alpha+\gamma)+\frac{1}{2}\sin 2\beta\le\frac{3}{2}$$

推出矛盾所以不可能3个都大于$\frac{1}{2}$

然后来凑2个可不可能，令$\alpha=\frac{\pi}{2},\beta=\frac{\pi}{4},\gamma=0$则$\sin\alpha\cos\beta=\sin\beta\cos\gamma=\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{1}{2}$

9、已知$a,b\in R,ab>0$,函数$f(x)=ax^2+b(x\in R)$.若$f(s-t),f(s),f(s+t)$成等比数列，则平面上点(s,t)的轨迹是(C)

A、直线和圆;B、直线和椭圆；C、直线和双曲线;D、直线和抛物线

解析:$f(s-t)=a(s-t)^2+b,f(s)=as^2+b,f(s+t)=a(s+t)^2+b$

$\therefore (as^2+b)^2=(a(s-t)^2+b)(a(s+t)^2+b)=(as^2+at^2+b-2ast)(as^2+at^2+b+2ast)$

$=(as^2+b+at^2)^2-4a^2s^2t^2$

$\therefore at^2(2as^2+2b+at^2)=4a^2s^2t^2$

若$t=0$，则轨迹为直线

若$t\neq 0$，则$2as^2+2b+at^2=4as^2$即$2as^2-2b-at^2=0$

$\therefore s^2-\frac{1}{2}t^2=\frac{b}{a}$，轨迹为双曲线

10、已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{1+\sqrt{a_n}},n\in N^*$,记数列$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$,则

A、$2<S_{100}<3$;B、$3<S_{100}<4$;C、$4<S_{100}<\frac{9}{2}$;D、$\frac{9}{2}<S_{100}<5$

解析:

首先是标准答案的解法，和我做的最后的解法很像但是它的数据更好

后面会给出我的解法历程

$$f(x)=\frac{x}{1+\sqrt{x}},x>0,f'(x)=\frac{\frac{\sqrt{x}}{2}+1}{(1+\sqrt{x})^2}>0$$

$\therefore f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增

由数学归纳法得$n\geq 3$时,$a_n<\frac{6}{(k+1)(k+2)}$(具体过程略和我的方法差不多)

$\therefore S_{100}<1+\frac{1}{2}+6(\frac{1}{4}-\frac{1}{102})=3-\frac{1}{17}<3$

左侧的不等式见我的方法

10、$a_1=1,a_n=\dfrac{a_{n-1}}{1+\sqrt{a_{n-1}}},n\ge 2$

求S_{100}的取值范围

解:显然$a_n>0,n\in N^*,a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}<\dfrac{a_n}{1}=a_n$

$\therefore\{a_n\}$单调递减即$0<a_{n+1}<a_n\le 1\therefore 0<\sqrt{a_n}\le 1$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{1+\sqrt{a_n}}\ge\dfrac{1}{2}\therefore a_n\ge(\dfrac{1}{2})^{n-1}\cdot 1=(\dfrac{1}{2})^{n-1},n\in N^*$

$\therefore S_n\ge\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{1}{2})^{i-1}=\dfrac{1\cdot(1-(\dfrac{1}{2})^n)}{1-\dfrac{1}{2}}=2-\dfrac{1}{2^{n-1}}\therefore S_{100}\ge 2-\dfrac{1}{2^{99}}$

$\because a_1=1\therefore a_2=\dfrac{1}{2}\therefore a_3=\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}}=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$

$\because a_3-(\dfrac{1}{2})^{3-1}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4}>\dfrac{1}{2^{99}}\therefore S_{100}>\sum\limits_{i=1}^{n}(\dfrac{1}{2})^{i-1}+\dfrac{1}{2^{99}}=2$

(这里给出我做这道题时各种精度的放缩提供参考)

/* $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{1+\sqrt{a_{n-1}}}\because 0<a_n<1\therefore\sqrt{a_n}>a_n\therefore a_n=\dfrac{a_{n-1}}{1+\sqrt{a_{n-1}}}<\dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$

考虑递推式$a_n=\dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$得$\dfrac{1}{a_n}=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}$得$a_n=\dfrac{1}{n}$

通过数学归纳法易得$a_n\le\dfrac{1}{n}$于是有$S_n\le\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i}$

由不等式$\dfrac{x}{x+1}<\ln(1+x),x>0$得$\dfrac{1}{n}=\dfrac{\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n-1}}<\ln(1+\dfrac{1}{n-1})=\ln n-\ln(n-1),n\ge 2$

累加得$S_{100}\le\sum\limits_{i=1}^{100}\dfrac{1}{i}<1+\sum\limits_{i=2}^{100}\ln i-\ln(i-1)=1+\ln 100<6$ */

/* $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}}\therefore\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\therefore\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$累加得$\dfrac{1}{a_{n+1}}-1=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{a_i}}$

$\therefore\dfrac{1}{a_n}=1+\sum\limits_{i=1}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{a_i}}=2+\sum\limits_{i=2}^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{a_i}},n\ge 2$

当$n\ge 2$时$,a_n\le\dfrac{1}{2}\therefore\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}\ge\sqrt{2}\therefore\dfrac{1}{a_n}\ge 2+\sqrt{2}(n-2)>\sqrt{2}(n-2)$即

$a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{n-2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\ln(n-2)-\ln(n-3)),n\ge 4$

$\therefore S_{100}<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln 98<\dfrac{3}{2}+1+\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=\dfrac{5+4\sqrt{2}}{2}$ */

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+\sqrt{a_n}},a_1=1$

对$a_n\le\dfrac{5}{n(n+1)},n\ge 4$且$n\in N^*$归纳证明如下：

(1)$a_n\le\dfrac{1}{n}$,于是有$a_4\le\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{4(4+1)}$,即命题对$n=4$成立

(2)假设当$n=k,k\ge 4$且$k\in N^*$时命题成立

即$a_k\le\dfrac{5}{k(k+1)}$成立

则令$f(x)=\dfrac{x^2}{1+x},0<x<1$

$f'(x)=\dfrac{2x(1+x)-x^2}{(1+x)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}>0$即$f(x)$单调递增

$\therefore a_{k+1}=\dfrac{a_k}{1+\sqrt{a_k}}\le\dfrac{\dfrac{5}{k(k+1)}}{1+\sqrt{\dfrac{5}{k(k+1)}}}=\dfrac{5}{k(k+1)+\sqrt{5k(k+1)}}$

当$k\ge 4$时,$5k\ge 4(k+1)$即$5k(k+1)\ge 4(k+1)^2=(2k+2)^2$

$\therefore\sqrt{5k(k+1)}\ge 2k+2=(k+1)(k+2)-k(k+1)$

$\therefore k(k+1)+\sqrt{5k(k+1)}\ge(k+1)(k+2)$

$\therefore a_{k+1}=\dfrac{5}{k(k+1)+\sqrt{5k(k+1)}}\le\dfrac{5}{(k+1)(k+2)}$即命题对$n=k+1$也成立

由(1)(2)得命题对$n\ge 4$且$n\in N^*$成立

$\therefore a_n\le\dfrac{5}{n(n+1)}=5(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}),n\ge 4$

$\therefore S_{100}=a_1+a_2+a_3+\sum_{i=4}^{100}a_i\le a_1+a_2+a_3+5(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{101})=\dfrac{3}{2}+\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}+\dfrac{5}{4}-\dfrac{5}{101}=\dfrac{1495-202\sqrt{2}}{404}<3$

综上所述,$2<S_{100}<3$

11、略(题目太长懒得打)

12、已知$a\in R$,函数$f(x)=\begin{cases} x^2-4,x>2 \\ |x-3|+a,x\le 2 \end{cases}$,若$f(f(\sqrt{6}))=3$，则$a=$____

解析:2

13、已知多项式$(x-1)^3+(x+1)^4=x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4$,则$a_1=$___,$a_2+a_3+a_4=$_____

解析:5,10

14、在ΔABC中,$\angle B=60^{\circ}$，$AB=2$,M是BC的中点,$AM=2\sqrt{3}$,则$AC=$_____,$\cos\angle MAC=$____

解析:$2\sqrt{13},\dfrac{2\sqrt{39}}{13}$

15、袋中有4个红球，m个黄球，n个绿球，现从中任取两个球，记取出的红球数为ξ,

若取出的两个球都是红球的概率为$\dfrac{1}{6}$，一红一黄的概率为$\dfrac{1}{3}$,则$m-n=$____,$E(\xi)=$____

解析:1,$\dfrac{8}{9}$

16、已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,(a>b>0)$,焦点$F_1(-c,0),F_2(c,0)(c>0)$.

若过F_1的直线和圆$(x-\dfrac{1}{2}c)^2+y^2=c^2$相切,与椭圆的第一象限交于点$P$，且$PF_2\perp x$轴，

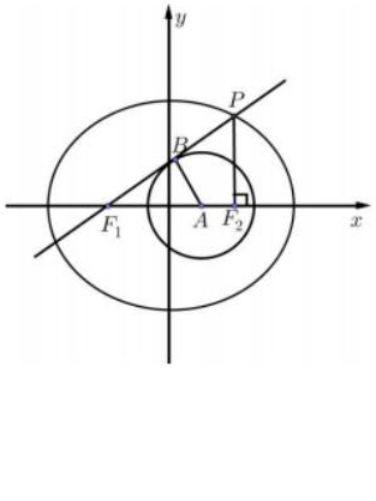
则该直线的斜率为 ___,椭圆的离心率为 ___

解析:求直线斜率不一定要设$y=kx+b$来算，直接通过$\tan\angle PF_1F_2$的大小即可

$$k=\tan\angle PF_1F_2=\frac{AB}{BF_1}=\frac{c}{\frac{\sqrt{5}}{2}c}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$\dfrac{PF_2}{F_1F_2}=\tan\angle PF_1F_2=\dfrac{AB}{BF_1}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,$PF_2$即$P$的纵坐标

$\therefore\dfrac{\frac{b^2}{a}}{2c}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，将$b^2=a^2-c^2$得到$a,c$的方程最后解出$e=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$



17、已知平面向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},(\vec{c}\neq\vec{0})$满足$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=2,\vec{a}\cdot\vec{b}=0,$
$(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0.$记平面向量$\vec{d}$在$\vec{a},\vec{b}$方向上的头像分别为$\vec{x},\vec{y},$
$\vec{d}-\vec{a}$在$\vec{c}$方向上的投影为$\vec{z}$,则$x^2+y^2+z^2$的最小值为 ____

解析:
常规的一般化:令$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=(2,0),\vec{c}=(m,n)$
$\because(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=0\therefore m-2n=0\therefore\vec{c}=(2n,n)$
$\because\vec{d}$在$\vec{a},\vec{b}$方向上的投影为$x,y\therefore\vec{d}=(x,y)$
$\because\vec{d}-\vec{a}$在$\vec{c}$方向上的投影为$z=\dfrac{(\vec{d}-\vec{a})\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}=\dfrac{2x+y-2}{\sqrt{5}}$
$\therefore 2x+y-\sqrt{5}z=2$
$\therefore x^2+y^2+z^2=x^2+y^2+\dfrac{(2x+y-2)^2}{5}=\dfrac{1}{5}(6y^2-(4-4x)y+9x^2-8x+4)$
$\because 6y^2-(4-4x)y\geq 6(\dfrac{1-x}{3})^2$
$\therefore x^2+y^2+z^2\geq\dfrac{1}{5}(6(\dfrac{1-x}{3})^2+9x^2-8x+4)=\dfrac{5x^2-4x+2}{3}\geq\dfrac{2}{5}$
上面几个等号成立条件为$x=\dfrac{2}{5},y=\dfrac{1-x}{3}=\dfrac{1}{5},z=\dfrac{2x+y-2}{\sqrt{5}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$时取等号

18、三角函数略
19、解析几何略
网上解答如下：

18.（本题满分 14 分）（公众号：浙江省高中数学）设函数 $f(x)=\sin x+\cos x(x\in\boldsymbol{R})$.

（Ⅰ）求函数 $y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2}$ 的最小正周期；

（Ⅱ）求函数 $y=f(x)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值.

微信扫一扫
关注该公众号

公众号：（浙江省高中数学）

【解析】（嘉兴陆放翁）

（Ⅰ）$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

$y=\left[f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2}=\left[\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{2}=2\sin^{2}\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{4}\right)=1-\cos\left(2x+\frac{3\pi}{2}\right)=1-\sin 2x$

所以 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

（Ⅱ）$y=f(x)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sqrt{2}\sin x$

$=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\sin x=2\sin x\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)=\sqrt{2}\sin^{2}x+\sqrt{2}\sin x\cos x$

$=\sqrt{2}\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}$

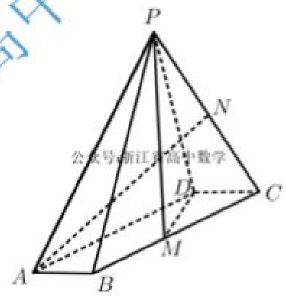
令 $2x-\frac{\pi}{4}=t$，$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$，所以 $t\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$，所以 $\sin t\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$，故 $y\in\left[0,1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

所以函数 $y=f(x)f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

19.（本题满分 15 分）（公众号：浙江省高中数学）如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形，$\angle ABC=120^{\circ}$，$AB=1$，$BC=4$，$PA=\sqrt{15}$，M,N 分别为 BC、PC 的中点，$PD\perp DC$，$PM\perp MD$．

（Ⅰ）证明：$AB\perp PM$；

（Ⅱ）求直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值．



（第19题图）

公众号：（浙江省高中数学）

【解析】（宁波刘慧敏老师）

（Ⅰ）证明：在 ΔDCM 中，$DC=1$，$CM=2$，$\angle DCM=60^{\circ}$，

$\therefore \Delta DCM$ 为直角三角形，$\angle MDC=90^{\circ}$，即 $DM\perp DC$

由题意 $DC\perp PD$ 且 $PD\cap PM=D$，$PD,DM\subset$ 面 PDM

$\therefore DC\perp$ 面 PDM，又 $AB\parallel DC$，$\therefore AB\perp$ 面 PDM

$\because PM\subset$ 面 PDM　$\therefore AB\perp PM$

（Ⅱ）由 $PM\perp MD$，$PM\perp AB$ 得 $PM\perp$ 面 $ABCD$　$\therefore PM\perp MA$

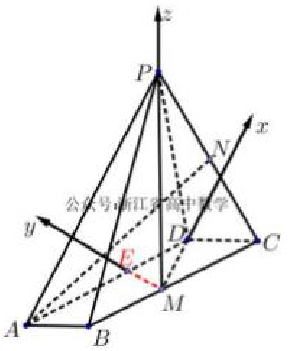
$MA=\sqrt{AB^2+BM^2-2AB\cdot BM\cos\angle ABC}=\sqrt{3}$，$PM^2=\sqrt{PA^2-MA^2}=\sqrt{15-3}=2\sqrt{3}$

作 AD 中点 E，连接 ME，则 ME、DM、PM 两两垂直

以 M 为坐标原点，DM 为 x 轴，EM 为 y 轴，PM 为 z 轴，建立空间直角坐标系，则 $A\left(-\sqrt{3},2,0\right)$，$P\left(0,0,2\sqrt{2}\right)$，$D\left(\sqrt{3},0,0\right)$，

$M(0,0,0)$，$C\left(\sqrt{3},-1,0\right)$

又 N 为 PC 中点，所以 $N\left(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2},\sqrt{2}\right)$，$\overrightarrow{AN}=\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},-\frac{5}{2},\sqrt{2}\right)$．



由（Ⅰ）得 $CD\perp$ 面 PDM，所以面 PDM 的法向量 $\vec{n}=(0,1,0)$

更多资料请扫码关注微信公众号：浙江省高中数学　　QQ 资料群：497543534（浙江新高考数学）

从而直线 AN 与平面 PDM 所成角的正弦值为 $\sin\theta=\frac{\left|\overrightarrow{AN}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{AN}\right|\left|\vec{n}\right|}=\frac{\frac{5}{2}}{\sqrt{\frac{27}{4}+\frac{25}{4}+2}}=\frac{\sqrt{15}}{6}$

20、已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n, a_1=-\frac{9}{4}$,且$4S_{n+1}=3S_n-9, n\in N^*$

(1)求数列$\{a_n\}$通项公式

(2)设数列$\{b_n\}$满足$3b_n+(n-4)a_n=0, n\in N^*$,记$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$.

若$T_n\le \lambda b_n$对任意$n\in N^*$恒成立,求实数λ的取值范围

解析:

(1)

解法一:$4S_{n+1}=3S_n-9$

用待定系数法，设$4(S_{n+1}-\lambda)=3(S_n-\lambda)$

解得$\lambda=-9$

$\therefore 4(S_{n+1}+9)=3(S_n+9)$即$S_n=(S_1+9)(\frac{3}{4})^{n-1}-9=\frac{27}{4}(\frac{3}{4})^{n-1}-9$

$\therefore a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{27}{4}(\frac{3}{4})^{n-1}-\frac{27}{4}(\frac{3}{4})^{n-2}=(\frac{3}{4})^{n-2}(\frac{81}{16}-\frac{27}{4})=-\frac{27}{16}(\frac{3}{4})^{n-2}=-3(\frac{3}{4})^n, n\ge 2$

经检验,a_1符合上式$\therefore a_n=-3(\frac{3}{4})^n, n\in N^*$

解法二:

$4S_{n+1}=3S_n-9$

$\therefore 4S_n=3S_{n-1}-9, n\ge 2 \therefore 4a_{n+1}=3a_n, n\ge 2$

$\therefore a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n, n\ge 2$而$a_2=-\frac{27}{16}=\frac{3}{4}a_1 \therefore a_{n+1}=\frac{3}{4}a_n, n\in N^*$

$\therefore a_n=-\frac{9}{4}(\frac{3}{4})^{n-1}=-3(\frac{3}{4})^n, n\in N^*$

(2)$3b_n+(n-4)a_n=0 \therefore b_n=-\frac{1}{3}(n-4)a_n=(n-4)(\frac{3}{4})^n$

由阿贝尔变换或错位相减法得,$T_n=-4n(\frac{3}{4})^{n+1}, n\in N^*$

$T_n\le \lambda b_n \therefore -4n(\frac{3}{4})^{n+1}\le \lambda(n-4)(\frac{3}{4})^n$

当$n<4$时$\lambda\le \frac{4n}{4-n}\cdot\frac{3}{4}=(\frac{3n}{4-n})_{\min}$

将$n=1,2,3$代入可得$\lambda\le 1(n=1$时$)$

当$n>4$时,$\lambda\ge\frac{3n}{4-n}$

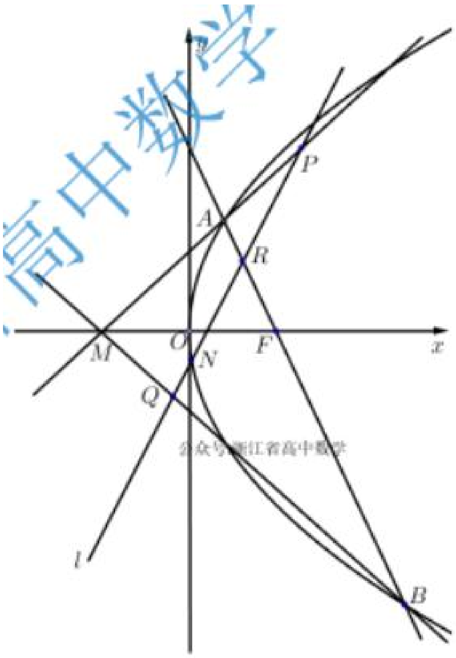
$\because \frac{3n}{4-n}=-3-\frac{12}{n-4}<-3-\frac{12}{(n+1)-4}$而$\lim_{n\to+\infty}\frac{3n}{4-n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\frac{4}{n}-1}=-3$

$\therefore \lambda>-3 \therefore -3<\lambda\le 1$

21、如图已知F是抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点,M是抛物线的准线与x轴的交点,且$|MF|=2$

(1)求抛物线的方程

(2)设过点F的直线交抛物线于A,B两点,若斜率为2的直线l与直线MA,MB,AB,x轴依次交于点P,Q,R,N,且满足$|RN|^2=|PN|\cdot|QN|$,求直线l在x轴上截距的取值范围



（第21题图）

解析:

(1) $|MF|=p=2\therefore$ 抛物线方程为 $y^2=4x$

(2) $F(1,0),M(-1,0)$, 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

显然直线 AB 斜率不为 0, 设 $l_{AB}:x=my+1$

$\because R,N$ 不重合 $\therefore l$ 不过点 $F\therefore$ 设 $l:y=2x+n,n\neq-2$

$\begin{cases} y^2=4x \\ x=my+1 \end{cases}\therefore y^2-4my-4=0$

由韦达定理得, $\begin{cases} y_1+y_2=4m \\ y_1y_2=-4 \end{cases}\therefore {y_1}^2+{y_2}^2=(y_1+y_2)^2-2y_1y_2=16m^2+8$

$l_{AM}:y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(y-x_1)+y_1$

$\begin{cases} y=2x+n \\ y=\dfrac{y_1}{x_1+1}(y-x_1)+y_1 \end{cases}\therefore P(\dfrac{n(x_1+1)}{y_1-2x_1-2},\dfrac{(n-2)y_1}{y_1-2x_1-2})$, 同理 $Q(\dfrac{n(x_2+1)}{y_2-2x_2-2},\dfrac{(n-2)y_2}{y_2-2x_2-2})$

$\therefore|y_py_Q|=|\dfrac{(n-2)^2y_1y_2}{(y_1-2x_1-2)(y_2-2x_2-2)}|=|\dfrac{4(n-2)^2y_1y_2}{(2y_1-{y_1}^2-4)(2y_2-{y_2}^2-4)}|$

$=|\dfrac{16(n-2)^2}{4y_1y_2-(2y_1y_2+8)(y_1+y_2)+{y_1}^2{y_2}^2+4({y_1}^2+{y_2}^2)+16}|=\dfrac{(n-2)^2}{4m^2+3}$

$\begin{cases} x=my+1 \\ y=2x+n \end{cases}\therefore y_R=\dfrac{n+2}{1-2m}$

$\because|RN|^2=|PN||QN|\therefore(\dfrac{n+2}{1-2m})^2=\dfrac{(n-2)^2}{4m^2+3}$

$\therefore\dfrac{(n-2)^2}{(n+2)^2}=\dfrac{4m^2+3}{(2m-1)^2}=1+\dfrac{2}{2m-1}+\dfrac{4}{(2m-1)^2}=(\dfrac{2}{2m-1}+\dfrac{1}{2})^2+\dfrac{3}{4}\geq\dfrac{3}{4}$

$\therefore\dfrac{(n-2)^2}{(n+2)^2}\geq\dfrac{3}{4}$ 解得 $n\in(-\infty,-2]\cup(-2,14-8\sqrt{3}]\cup[14+8\sqrt{3},+\infty)$

$\therefore-\dfrac{n}{2}\in(-\infty,-7-4\sqrt{3}]\cup[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,+\infty)$

$\therefore$ 直线 l 在 x 轴上截距的取值范围为 $(-\infty,-7-4\sqrt{3}]\cup[7-4\sqrt{3},1)\cup(1,+\infty)$

22、设a,b为实数,且$a>1$,函数$f(x)=a^x-bx+e^2,x\in R$

(1)求函数$f(x)$的单调区间

(2)若对任意$b>2e^2$,函数$f(x)$有两个不同的零点,求a的取值范围

(3)当$a=e$时,证明:对任意$b>e^4$,函数$f(x)$有两个不同的零点x_1,x_2,满足$x_2>\frac{b\ln b}{2e^2}x_1+\frac{e^2}{b}$

解析:

(1)$f'(x)=a^x\ln a-b$

(i)若$b\le 0$,则$f'(x)=a^x\ln a-b\ge 0$,即$f(x)$在R上单调递增

(ii)若$b>0$,令$f'(x)>0$则$x>\log_a\frac{b}{\ln a}$,即$f(x)$在$(-\infty,\log_a\frac{b}{\ln a})$单调递减,$(\log_a\frac{b}{\ln a},+\infty)$单调递增

(2)令$t=x\ln a$,则$e^t-\frac{b}{\ln a}t+e^2=0,\frac{b}{\ln a}=\frac{e^t+e^2}{t}$,令$g(t)=\frac{e^t+e^2}{t}$

则$g'(t)=\frac{e^t\cdot t-(e^t+e^2)}{t^2}=\frac{e^t(t-1)-e^2}{t^2}$

令$h(t)=e^t(t-1)-e^2,h'(t)=te^t,h'(0)=0\therefore h(t)$在$(-\infty,0)$上单调递减,$(0,+\infty)$上单调递增

而$h(2)=0\therefore$当$t<2$时,$g'(t)<0$;当$t>2$时,$g'(t)>0\therefore g(t)$在$(-\infty,2)$上单调递减,$(2,+\infty)$上单调递增

且$g(2)=e^2$,当$t<0$时,$g(t)<0,\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{e^t+e^2}{t}=+\infty,\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t+e^2}{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{1}=+\infty$

$\therefore\frac{b}{\ln a}\ge g(2)=e^2\therefore\ln a\le(\frac{b}{e^2})_{\min},b>2e^2\therefore\ln a\le 2\therefore 1<a\le e^2$

(3)证明:当$a=e$时,$f(x)=e^x-bx+e^2$,由(2)知$x_1,x_2>0$,不妨设$0<x_1<\ln b<x_2$

$f(x_1)=f(x_2)=0$即$e^{x_1}-bx_1+e^2=e^{x_2}-bx_2+e^2=0,\frac{e^{x_2}-e^{x_1}}{x_2-x_1}=b$令$x_2=\ln t_2,x_1=\ln t_1$

$\frac{1}{2}e^{x_1}+\frac{1}{2}e^{x_2}=\frac{t_1+t_2}{2}>\frac{t_2-t_1}{\ln t_2-\ln t_1}=b\therefore e^{x_2}>-e^{x_1}+2b\therefore x_2>\ln(2b-e^{x_1})$

令$a(x)=\ln(2b-x)-\frac{b\ln b}{2e^2}\ln x+\frac{e^2}{b},1<x<b$

$$a'(x)=\frac{1}{x-2b}+\frac{b\ln b}{2e^2x}=\frac{2e^2x+b\ln bx-2b^2\ln b}{2e^2x(x-2b)}=\frac{(2e^2+b\ln b)(x-\frac{2b^2\ln b}{2e^2+b\ln b})}{2e^2x(x-2b)}$$

令$u(b)=\frac{2b^2\ln b}{2e^2+b\ln b},u'(b)=\frac{8e^2b\ln b+4be^2+2b^2(\ln b)^2}{(2e^2+b\ln b)^2}>0$

$\therefore\frac{2b^2\ln b}{2e^2+b\ln b}-b=\frac{b^2\ln b-2e^2b}{2e^2+b\ln b}=\frac{(b\ln b-2e^2)b}{2e^2+b\ln b}>0$即$\frac{2b^2\ln b}{2e^2+b\ln b}>b\therefore a'(x)>0$

$\therefore a(x)>\ln(2b-1)+\frac{e^2}{b}>\ln(2e^4-1)>\ln e^4=4>0\therefore\ln(2b-x)-\frac{b\ln b}{2e^2}\ln x+\frac{e^2}{b}>0$

即$\ln(2b-x)>\frac{b\ln b}{2e^2}\ln x-\frac{e^2}{b},1<x<b\therefore\ln(2b-e^x)>\frac{b\ln b}{2e^2}x-\frac{e^2}{b},0<x<\ln b$

$\therefore\ln(2b-e^{x_1})>\frac{b\ln b}{2e^2}x_1-\frac{e^2}{b}\therefore x_2>\ln(2b-e^{x_1})>\frac{b\ln b}{2e^2}x_1-\frac{e^2}{b}$,(这是我的做法，思路比较流畅)

（III）$a=e$，$f(x)=e^{x}-bx+e^{2}$ 有 2 个不同零点 $\Rightarrow e^{x}+e^{2}=bx \Rightarrow x>0$

由（II）可知有 2 个不同零点，记较大者为 x_2，较小者为 x_1

$b=\dfrac{e^{x_1}+e^{2}}{x_1}=\dfrac{e^{x_2}+e^{2}}{x_2}>e^{4}$，易知 $x_1<2<x_2$，又由 $\dfrac{e^{5}+e^{2}}{5}<e^{4}$ 知 $x_2>5$

$b=\dfrac{e^{x_1}+e^{2}}{x_1}<\dfrac{2e^{2}}{x_1} \Rightarrow x_1<\dfrac{2e^{2}}{b}$，要证 $x_2>\dfrac{b\ln bx_1}{2e^{2}}+\dfrac{e^{2}}{b}$，只需 $x_2>\ln b+\dfrac{e^{2}}{b}$

$b=\dfrac{e^{x_2}+e^{2}}{x_2}<\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}$ 且 $\ln b+\dfrac{e^{2}}{b}$ 在 $b>e^{4}$ 上单调递增，所以只需证 $x_2>\ln\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}+\dfrac{e^{2}x_2}{2e^{x_2}}\left(x_2>5\right)$

只需证 $\ln e^{x_2}-\ln\dfrac{2e^{x_2}}{x_2}-\dfrac{e^{2}x_2}{2e^{x_2}}>0$，只需证 $\ln x-\dfrac{e^{2}x}{2e^{x}}-\ln 2>0$

$\because \dfrac{e^{2}}{2}<4$，只需证 $h(x)=\ln x-\dfrac{4x}{e^{x}}-\ln 2$ 在 $x>5$ 时为正

$\because h(5)=\ln 5-\dfrac{4.5}{e^{5}}\ln 2=\ln\dfrac{5}{2}-\dfrac{20}{e^{5}}>0$，$h'(x)=\dfrac{1}{x}+4xe^{-x}-4e^{-x}>0$，故得证！

公众号：浙江省高中数学