

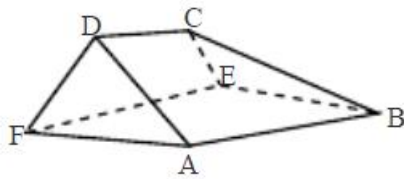
1、已知函数 $f(x) = \sin^2 \omega x + \sqrt{3} \sin \omega x \sin(\omega x + \frac{\pi}{2})$, $\omega > 0$ 的最小正周期为 π .

(1)求 ω 的值; (2)求函数 $f(x)$ 在区间 $[0, \frac{2}{3}\pi]$ 上的取值范围

2、如图,在以 A, B, C, D, E, F 为顶点的五面体中,面 $ABEF$ 为正方形, $AF = 2FD$, $\angle AFD = 90^\circ$, 且二面角 $D-AF-E$ 与二面角 $C-BE-F$ 都是 60°

(1)证明: 平面 $ABEF \perp$ 平面 $EFDC$

(2)求二面角 $E-BC-A$ 的余弦值



3、已知函数 $f(x) = x^2 - 2x + 2 + a \ln x$, ($a \in R$)

(1)若 $a = 1$, 求函数 $f(x)$ 在 $A(1,1)$ 处的切线方程

(2)若函数 $y = f(x)$ 有两个极值点 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$,

证明: $f(x_2) > \frac{5 - 2 \ln 2}{4}$

4、设 P 为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, ($a > b > 0$) 上的动点, F_1, F_2 为椭圆 C 的焦点, I 为 $\triangle PF_1F_2$ 的内心,

(1)若 P 在 y 轴上, 求直线 IF_1, IF_2 的斜率之积

(2)若 P 为任意动点, 求直线 IF_1, IF_2 的斜率之积

5、设数列 $\{a_n\}$ 定义为 $a_1 = 1, a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n, & \text{若 } a_n \leq n \\ a_n - n, & \text{若 } a_n > n \end{cases}, n \in N^*$

(1)求证: $0 < a_n \leq 1 + \frac{n(n-1)}{2}$

(2)(**)求满足 $a_r < r \leq 3^{2021}$ 的正整数 r 的个数