一、 二次曲线系

1.1.代数定义

二次曲线顾名思义，次数为二次的曲线，但是这里的曲线不是我们常见的y=f(x)的形式，而是二元曲线的一般形式f(x,y)=0,然后f(x,y)是一个包含参数x,y且参数的最高次为二次的函数即

f(x,y)=Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0

如果曲线L:f(x,y)满足上式则称L输于二次曲线系。

我们平时常见的直线 L:ax+by+c=0 即二次项不存在的二次曲线系，同时方程(ax+by+c)(dx+ey+f)=0包括了这两条直线上的所有点，即二次曲线方程(ax+by+c)(dx+ey+f)=0 即表示$\boldsymbol{l_1}$: $\mathbf{ax+by+c}$，$\boldsymbol{l_2}$: $\mathbf{dx+ey+f}$这两条直线

从上面可以细究一下：

二次曲线 Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0

可以分为(1)可以分解为(ax+by+c)(dx+ey+f)=0

(2)不可以分解的

如果是第一种情况，那么这个二次曲线就是两条直线，通过五个点一定确定这个二次曲线，其中三点共线确定一条直线，剩下两点确定零一条直线。

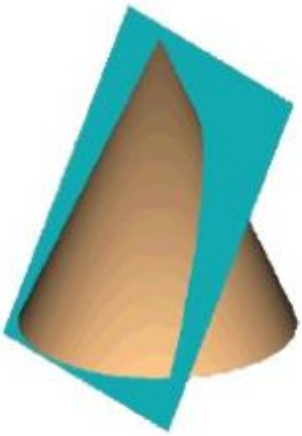
如果是第二种情况，那么这个二次曲线不能拆分为两条直线，通过五个点也能确定这个二次曲线(证明略)

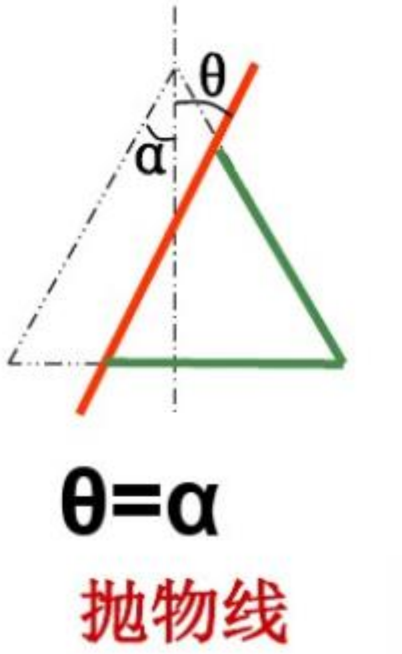
1.2.几何定义

很显然可以看得出，高中阶段学习过的所有的曲线都可以归类到二次曲线系中，在几何上，二次曲线的定义如下:

用一个平面去截一个二次锥面(理解为圆锥的表面即可)，得到的交线即为二次曲线(也叫圆锥曲线)

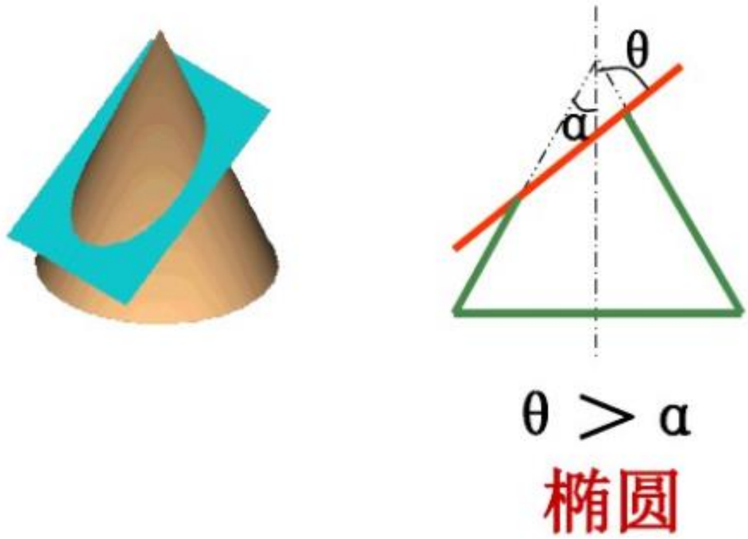
(1)当平面与二次锥面的母线平行，且不过圆锥顶点，结果为抛物线。



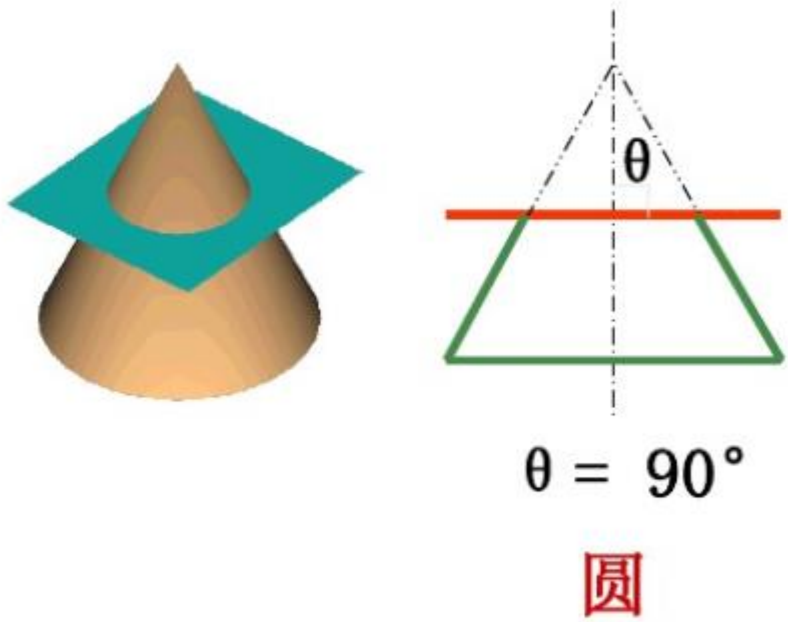


(2)当平面与二次锥面的母线平行，且过圆锥顶点，结果为一条直线

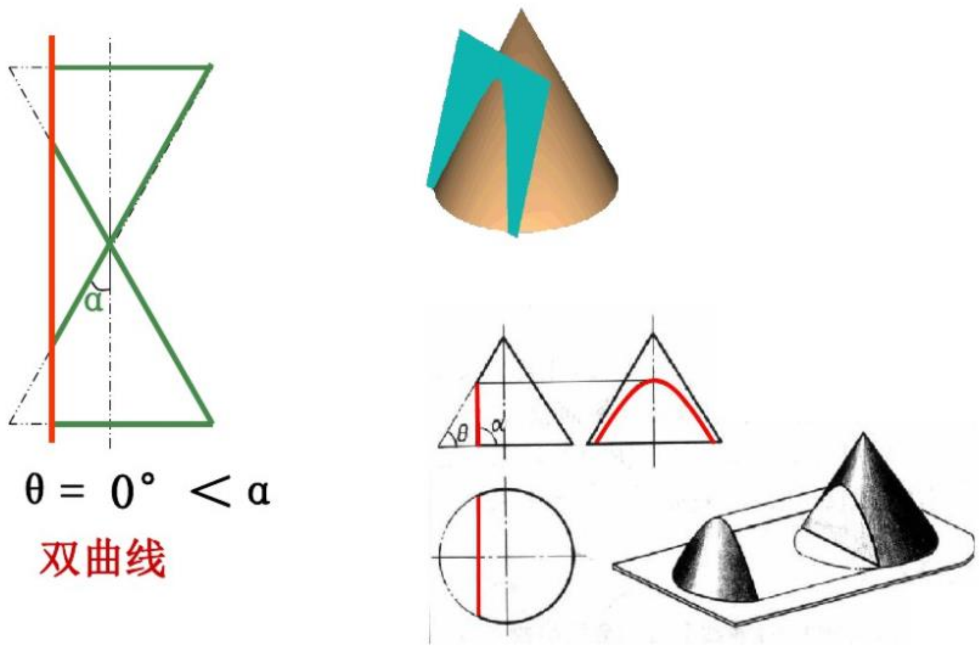
(3)当平面只与二次锥面的一侧相交，且不过圆锥顶点，结果为椭圆（或者说平面与圆锥对称轴夹角大于母线与对称轴夹角）



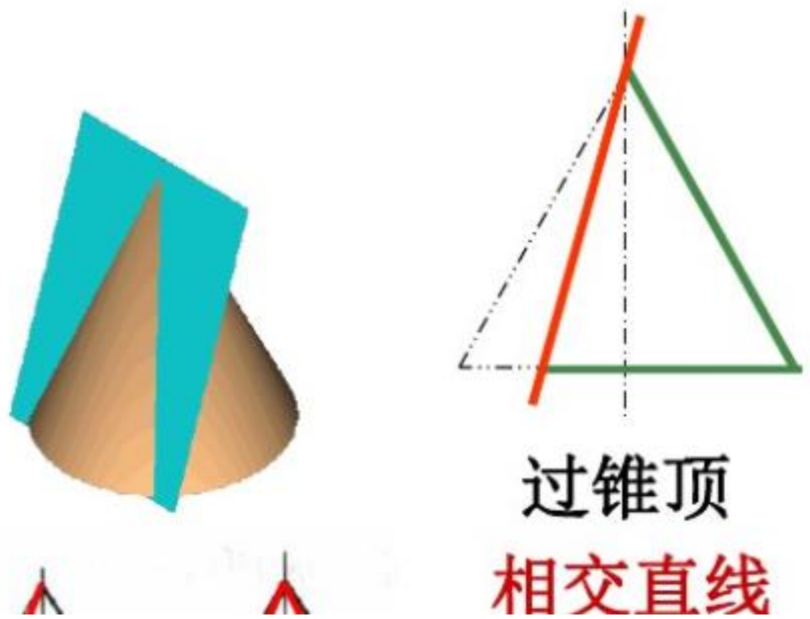
(4)当平面与圆锥的对称轴垂直且不过圆锥顶点，结果为圆



（5）当平面与二次锥面两侧都相交，且不过圆锥顶点，结果为双曲线（每一支为此二次锥面中的一个圆锥面与平面的交线）



（6）当平面与二次锥面两侧都相交，且过圆锥顶点，结果为两条相交直线



1.3. 传统的焦点-准线统一定义

给定一点 P，一直线 l 以及一常数 e>0，则到 P 的距离与 l 距离之比为 e 的点的轨迹是圆锥曲线。

根据 e 的范围不同，曲线也各不相同。具体如下：

(1)e=1（即到 P 与到 l 距离相同），轨迹为抛物线；

(2)0

(3)e>1，轨迹为双曲线。

(4)e<1，轨迹为椭圆

> 焦点
>
> 定义中提到的定点，称为圆锥曲线的**焦点**。
>
> 准线
>
> 定义中提到的定直线称为圆锥曲线的**准线**。
>
> 离心率
>
> 固定的常数（即圆锥曲线上一点到焦点与对应准线的距离比值）称为圆锥曲线的**离心率**。
>
> 焦准距
>
> 焦点到对应准线的距离称为**焦准距**。
>
> 焦半径
>
> 焦点到曲线上一点的线段称为**焦半径**。

Pappus定理：圆锥曲线上一点的焦半径长度等于该点到相应准线的距离乘以离心率。

我们常见的椭圆、双曲线的准线均为 $x=\pm\frac{a^2}{c}$