

2

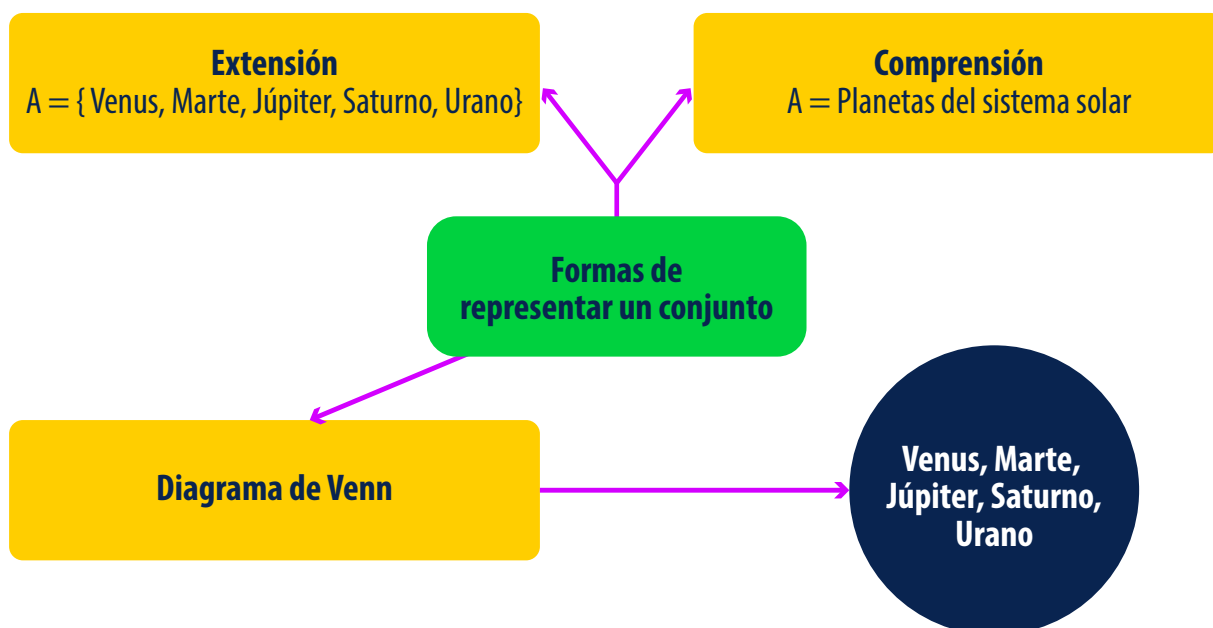
Teoría de conjuntos

2.1

NOCIÓN DE CONJUNTO

Un conjunto es una colección de objetos diferenciables entre sí.
A cada objeto que lo compone se le llama elemento del conjunto.

En la Figura 1, se observa un ejemplo con las diferentes formas de representar un conjunto, (a) por extensión: enumerando todos y cada uno de sus elementos encerrados entre llaves; (b) por comprensión: resaltando la propiedad que los caracteriza y (c) por diagrama de Venn: colocando los elementos al interior de un círculo.



Ejemplos de conjuntos:

- Φ : conjunto vacío que carece de elementos.
- \mathbf{N} : conjunto de los números naturales.
- \mathbf{Z} : conjunto de los números enteros.
- \mathbf{Q} : conjunto de los números racionales.
- \mathbf{R} : conjunto de los números reales.
- \mathbf{P} : conjunto de los números primos.

El conjunto de los números naturales expresado por extensión es:

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\},$$

y el mismo conjunto expresado por comprensión se puede escribir:

$$\mathbf{A} = \{ p \in \mathbf{N} \mid p \text{ es un número natural} \}.$$

2.2

SIMBOLOGÍA DE LOS CONJUNTOS

Los símbolos que frecuentemente son utilizados para relacionar conjuntos y hacer operaciones con ellos se indican en siguiente tabla, en la que se detalla el símbolo utilizado y su descripción.

Símbolo	Descripción
{ }	Llaves que abren y cierran, usadas para delimitar un conjunto
\in	Indica si un elemento pertenece a un conjunto
\notin	Indica que un elemento no pertenece a un conjunto
	Barra vertical en lugar de la palabra “tal que”
U	Conjunto universo
\emptyset	Conjunto vacío o sin ningún elemento
\subseteq	“Subconjunto de”
\subset	Subconjunto propio de
\cap	Intersección de conjuntos
\cup	Unión de conjuntos
'	Indica complemento; B' (complemento del conjunto B)
....	Los elementos del conjunto continúan
\Rightarrow	Entonces
\Leftrightarrow	Si y solo si
\sim	Negación
\wedge	Y, conjunción
\vee	O, disyunción
$a \setminus b$	Si a “entonces” b

Tabla 8. Simbología de conjuntos

Los símbolos que se muestran en la tabla 8, sirven para vincular los conjuntos, denotando un tipo de relación entre ellos y sus elementos, por ejemplo, el símbolo subconjunto de “ \subseteq ”, sirve para expresar que un conjunto está contenido en otro, es así como la expresión $A \subseteq B$, indica que A es subconjunto de B o que A hace parte de B.

2.3

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Cuando tenemos dos o mas conjuntos estos se pueden combinar de diversas maneras para obtener nuevos conjuntos, realizando algunas operaciones, veamos a continuación cuales son:

Diferencia:

dados dos conjuntos A y B, se llama diferencia ($A - B$) a los elementos que pertenecen al conjunto A que no pertenecen al conjunto B; es decir:
 $A - B = \{a \in A \mid a \notin B\}$, ver figura 2.

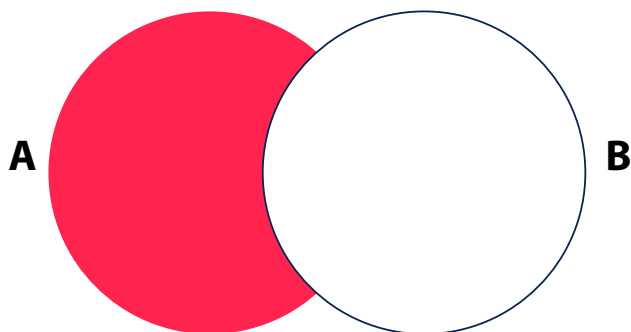


Figura 2. Diferencia entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar $A - B$ y $B - A$, dados los conjuntos:

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$,
entonces: $A - B = \{b, c, d, f, g\}$ y $B - A = \{i, o, u\}$

Unión:

dados dos conjuntos A y B se llama unión ($A \cup B$) al conjunto formado por objetos que son del conjunto A o son del conjunto B; es decir:
 $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, como se observa en la figura 3.

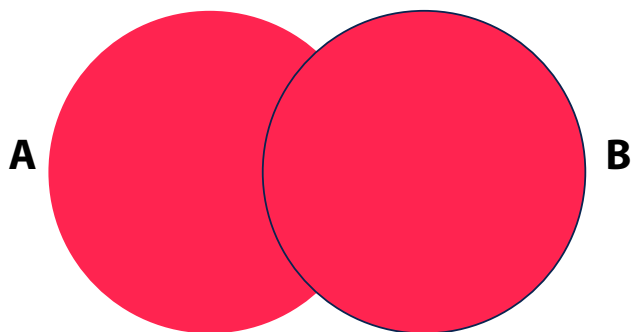


Figura 3. Unión entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar $A \cup B$ dados los conjuntos:

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$,
entonces: $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, i, o, u\}$

Intersección:

dados dos conjuntos A y B se llama intersección ($A \cap B$) al conjunto formado por objetos que son elementos del conjunto A y del conjunto B; es decir: $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, ver Figura 4.

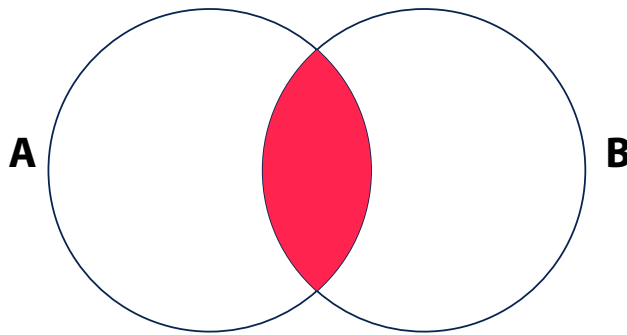


Figura 4. Intersección entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar $A \cap B$ dados los conjuntos:

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$,
entonces: $A \cap B = \{a, e\}$

Diferencia simétrica:

dados dos conjuntos A y B se llama diferencia simétrica ($A \Delta B$) al conjunto formado por objetos que son elementos del conjunto A, objetos que son elementos del conjunto B, pero que no hacen parte de la intersección entre los dos conjuntos; es decir: $A \Delta B = \{(A - B) \cup (B - A)\}$, ver Figura 5.

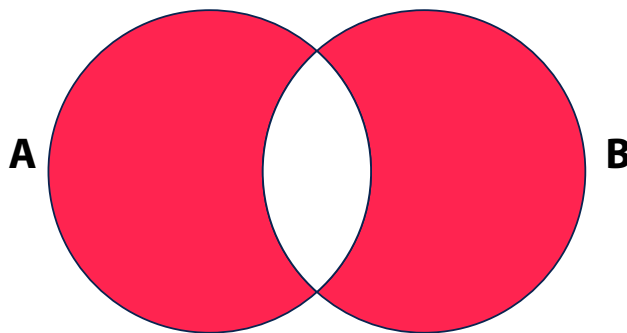


Figura 5. Diferencia simétrica entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar $A \Delta B$ dados los conjuntos:

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $B = \{a, e, i, o, u\}$,
entonces: $A \Delta B = \{b, c, d, f, g, i, o, u\}$

Producto cartesiano:

dados dos conjuntos A y B se llama producto cartesiano ($A \times B$) al conjunto formado por pares de elementos (x, y) , donde x pertenece al conjunto A, y pertenece al conjunto B, que pueden identificarse y representarse como los puntos del plano cartesiano; es decir: $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$, ver Figura 6.

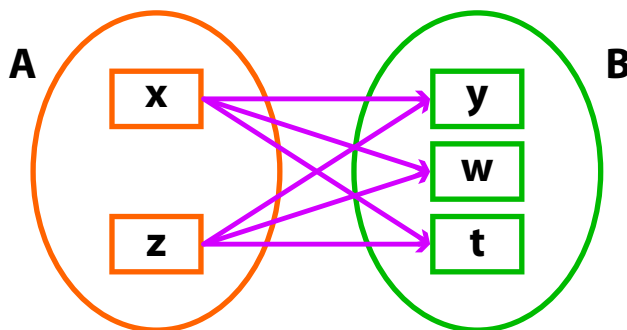


Figura 6. Producto cartesiano entre conjuntos

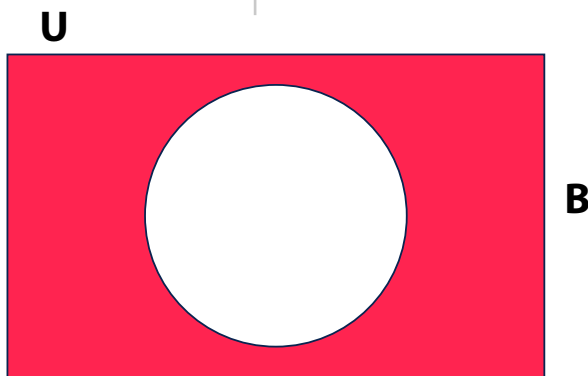
EJEMPLO:

hallar $A \times B$ dados los conjuntos:

$A = \{a, b, c\}$ y $B = \{a, e, i\}$,
entonces: $A \times B =$
 $\{(a, a), (a, e), (a, i), (b, a), (b, e), (b, i), (c, a), (c, e), (c, i)\}$

**Complemento de
un conjunto:**

dado el conjunto A se llama el complemento de A (A') a los elementos que pertenecen al conjunto universal y no pertenecen al conjunto A, es decir: $A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$, ver figura 7.



EJEMPLO:

hallar A' dados los conjuntos:

$U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ y $A = \{a, e, i, o, u\}$, entonces:

$A' = \{b, c, d, f, g\}$

Figura 7. Complemento del conjunto A

2.4

SUBCONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B se llama subconjunto ($A \subseteq B$) cuando todo elemento del conjunto A, lo es también del conjunto B o el conjunto A es parte de B; es decir: $\{x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$, ver Figura 8.

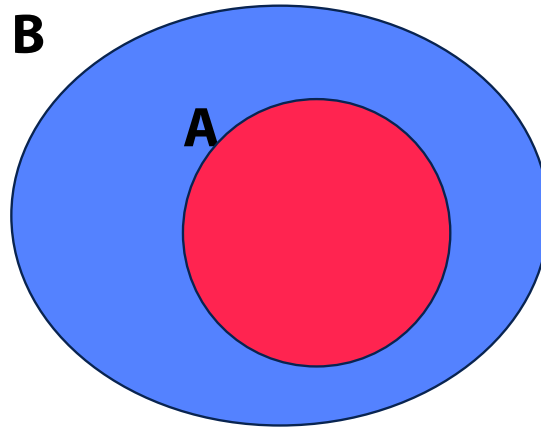


Figura 8. A subconjunto de B

Se llama subconjunto ($B \subseteq A$), cuando todo elemento del conjunto B, lo es también del conjunto A o el conjunto B es parte del conjunto A; es decir: $\{x \mid x \in B \Rightarrow x \in A\}$, ver Figura 9.

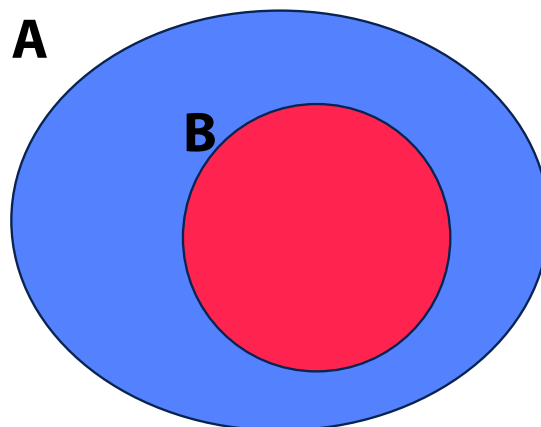


Figura 9. B subconjunto de A

2.5

USO DE LOS CONECTORES LÓGICOS

Existe una relación estrecha entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional observa: denotemos el conjuntos A con el elemento a y el conjunto B con el elemento b, entonces se tiene la siguiente correspondencia:

Conjuntos	$A \subseteq B$	$A = B$	$A \cup B$	$A \cap B$	A'	$A - B$	$A \Delta B$
Proposiciones	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$	$a \vee b$	$a \wedge b$	a'	$a \wedge b'$	$a \vee b$

Tabla 9. Relación entre conjuntos y proposiciones

De acuerdo con lo anterior las operaciones con conjuntos se pueden expresar en términos de lógica proposicional y viceversa, miremos algunos ejemplos:

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

expresado en lógica proposicional

$$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow a$$

$$a \vee (b \wedge c) \Leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$(a \vee b)' \Leftrightarrow a' \wedge b'$$