2

Teoría de conjuntos

2.1 NOCIÓN DE CONJUNTO

Un conjunto es una colección de objetos diferenciables entre sí.
A cada objeto que lo compone se le llama elemento del conjunto.

En la Figura 1, se observa un ejemplo con las diferentes formas de representar un conjunto, (a) por extensión: enumerando todos y cada uno de sus elementos encerrados entre llaves; (b) por comprensión: resaltando la propiedad que los caracteriza y (c) por diagrama de Venn: colocando los elementos al interior de un círculo.

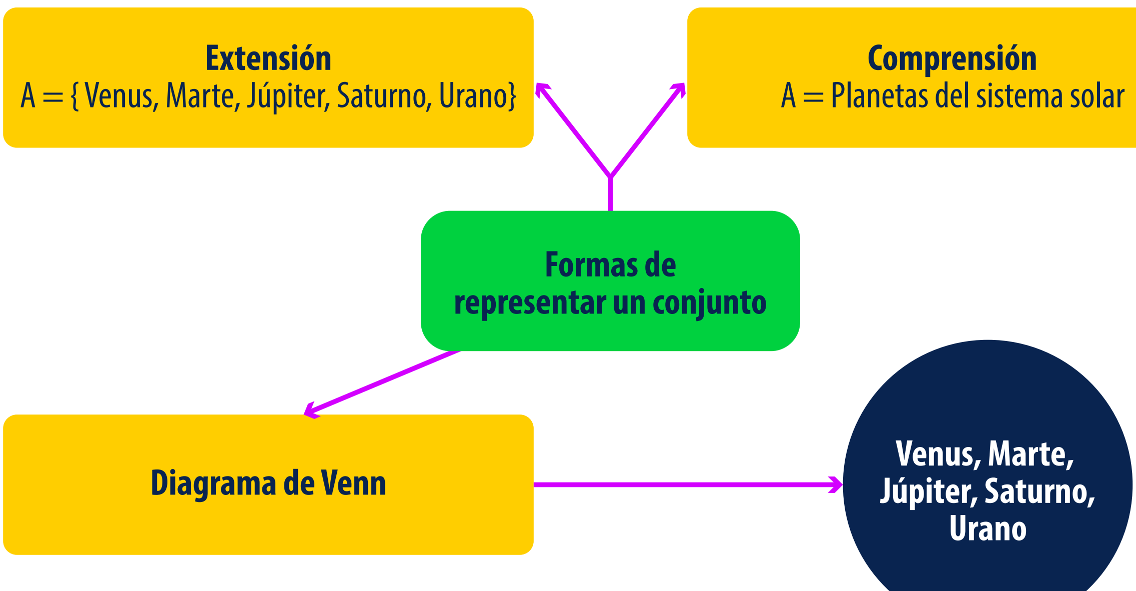

Figura 1. Representación de un conjunto

Ejemplos de conjuntos:

- **Φ** : conjunto vacio que carece de elementos.
- **N** : conjunto de los números naturales.
- **Z** : conjunto de los números enteros.
- **Q** : conjunto de los números racionales.
- **R** : conjunto de los números reales.
- **P** : conjunto de los números primos.

El conjunto de los números naturales expresado por extensión es:

N = {1,2,3,4,5, ……},

y el mismo conjunto expresado por comprensión se puede escribir:

A = { p € N | p es un número natural}.

2.2 SIMBOLOGÍA DE LOS CONJUNTOS

Los símbolos que frecuentemente son utilizados para relacionar conjuntos y hacer operaciones con ellos se indican en siguiente tabla, en la que se detalla el símbolo utilizado y su descripción.

Símbolo	Descripción
{ }	Llaves que abren y cierran, usadas para delimitar un conjunto
$\in$	Indica si un elemento pertenece a un conjunto
$\notin$	Indica que un elemento no pertenece a un conjunto
$\mid$	Barra vertical en lugar de la palabra “tal que”
U	Conjunto universo
Φ	Conjunto vacío o sin ningún elemento
$\subseteq$	“Subconjunto de”
$\subset$	Subconjunto propio de
$\cap$	Intersección de conjuntos
$\cup$	Unión de conjuntos
‘	Indica complemento; B‘ (complemento del conjunto B)
….	Los elementos del conjunto continúan
$\Rightarrow$	Entonces
$\Leftrightarrow$	Si y solo si
~	Negación
$\wedge$	Y, conjunción
$\vee$	O, disyunción
a \ b	Si a “entonces” b

Tabla 8. Simbología de conjuntos

Los símbolos que se muestran en la tabla 8, sirven para vincular los conjuntos, denotando un tipo de relación entre ellos y sus elementos, por ejemplo, el símbolo subconjunto de “ ”, sirve para expresar que un conjunto está contenido en otro, es así como la expresión A B, indica que A es subconjunto de B o que A hace parte de B.

2.3 OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

Cuando tenemos dos o mas conjuntos estos se pueden combinar de diversas maneras para obtener nuevos conjuntos, realizando algunas operaciones, veamos a continuación cuales son:

Diferencia:

dados dos conjuntos A y B, se llama diferencia (A – B) a los elementos que pertenecen al conjunto A que no pertenecen al conjunto B; es decir:
$A - B = \{ a \in A \mid a \notin B\}$, ver figura 2.

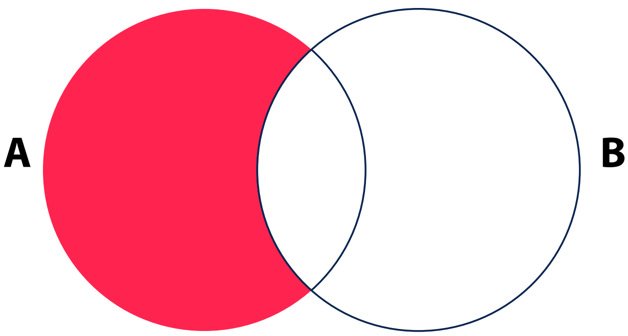

Figura 2. Diferencia entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar A - B y B – A, dados los conjuntos:

$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ y $B = \{a,e,i,o,u\}$,
entoces: $A - B = \{b,c,d,f,g\}$ y $B - A = \{i,o,u\}$

Unión:

dados dos conjuntos A y B se llama unión ($A \cup B$) al conjunto formado por objetos que son del conjunto A o son del conjunto B; es decir:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \quad x \in B\}$, como se observa en la figura 3.

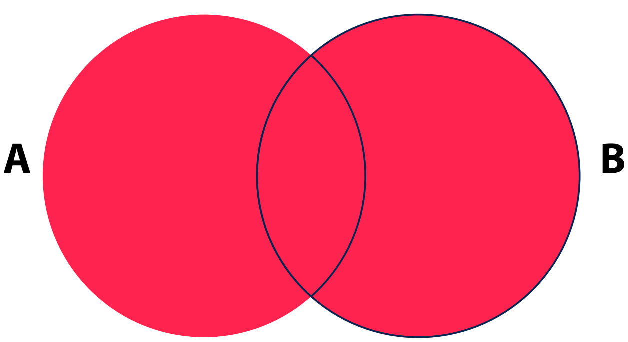

Figura 3. Unión entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar A U B dados los conjuntos:

$A = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ y $B = \{a,e,i,o,u\}$,
entoces: $A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,i,o,u\}$

Intersección:

dados dos conjuntos A y B se llama intersección (A ∩ B) al conjunto formado por objetos que son elementos del conjunto A y del conjunto B; es decir: $A \cap B = \{ x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$, ver Figura 4.

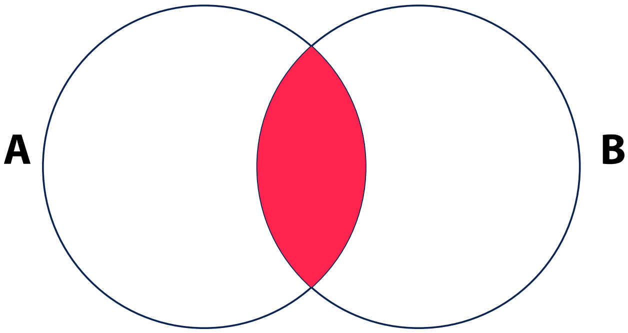

Figura 4. Intersección entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar A ∩ B dados los conjuntos:

A = {a,b,c,d,e,f,g} y B = {a,e,i,o,u},
entoces: A ∩ B = {a, e}

Diferencia simétrica:

dados dos conjuntos A y B se llama diferencia simétrica (A Δ B) al conjunto formado por objetos que son elementos del conjunto A, objetos que son elementos del conjunto B, pero que no hacen parte de la intersección entre los dos conjuntos; es decir: $A \Delta B = \{(A - B) \cup (B - A)\}$, ver Figura 5.

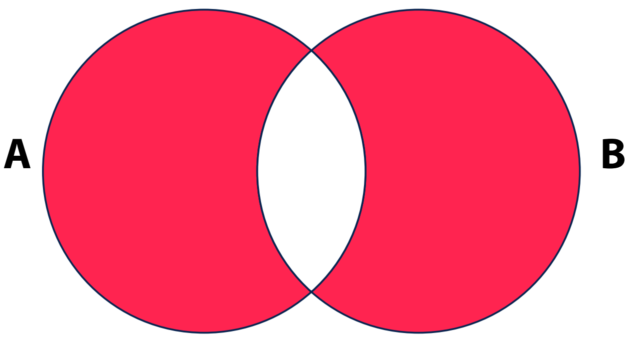

Figura 5. Diferencia simétrica entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar A Δ B dados los conjuntos:

A = {a,b,c,d,e,f,g} y B = {a,e,i,o,u},
entoces: A Δ B = { b,c,d,f,g,i,o,u }

Producto cartesiano:

dados dos conjuntos A y B se llama producto cartesiano (A X B) al conjunto formado por pares de elementos (x, y), donde x pertenece al conjunto A, y pertenece al conjunto B, que pueden identificarse y representarse como los puntos del plano cartesiano; es decir: $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \wedge y \in B\}$, ver Figura 6.

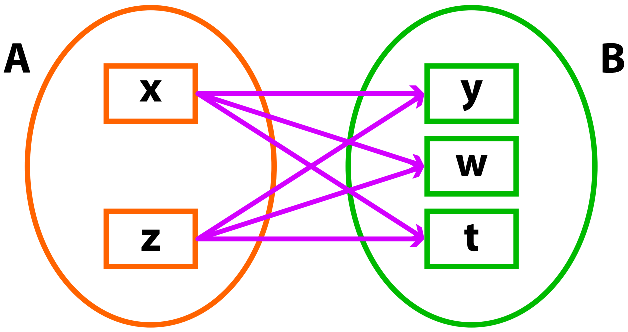

Figura 6. Producto cartesiano entre conjuntos

EJEMPLO:

hallar A X B dados los conjuntos:

A = {a,b,c} y B = {a,e,i},
entoces: A X B =
{(a,a),(a,e),(a,i),(b,a),(b,e),(b,i),(c,a),(c,e),(c,i)}

Complemento de un conjunto:

dado el conjunto A se llama el complemento de A (A´) a los elementos que pertenecen al conjunto universal y no pertenecen al conjunto A, es decir: $A' = \{ x \mid x \in \bigcup \wedge x \notin A\}$, ver figura 7.

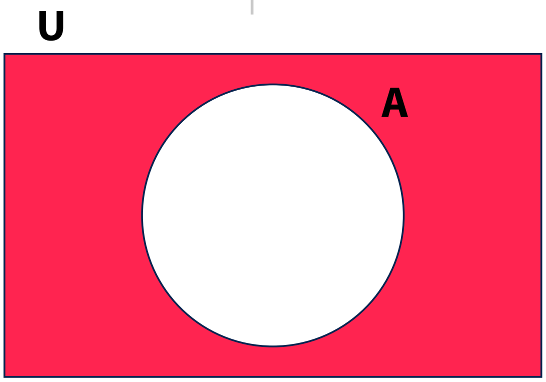

Figura 7. Complemento del conjunto A

EJEMPLO:

hallar A´ dados los conjuntos:

U = {a,b,c,d,e,f,g} y A = {a,e,i,o,u}, entoces:
A´ = { b,c,d,f,g }

2.4

SUBCONJUNTOS

Dados dos conjuntos A y B se llama subconjunto ($A \subseteq B$) cuando todo elemento del conjunto A, lo es también del conjunto B o el conjunto A es parte de B; es decir: $\{ x \mid x \in A \Rightarrow x \in B\}$, ver Figura 8.

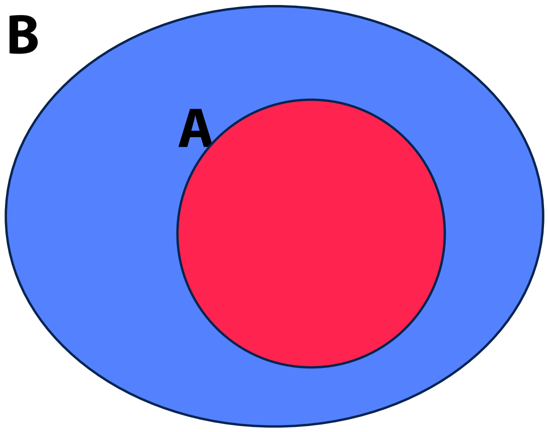

Figura 8. A subconjunto de B

Se llama subconjunto ($B \subseteq A$), cuando todo elemento del conjunto B, lo es también del conjunto A o el conjunto B es parte del conjunto A; es decir: $\{ x \mid x \in B \Rightarrow x \in A\}$, ver Figura 9.

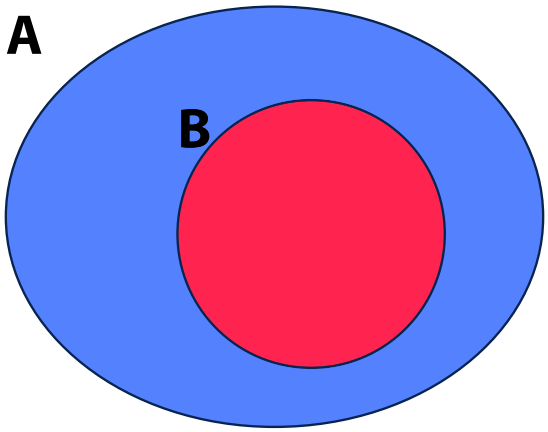

Figura 9. B subconjunto de A

2.5 USO DE LOS CONECTORES LÓGICOS

Existe una relación estrecha entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional observa: denotemos el conjuntos A con el elemento a y el conjunto B con el elemento b, entonces se tiene la siguiente correspondencia:

Conjuntos	$A \subseteq B$	$A = B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$A´$	$A - B$	$A \Delta B$
Proposiciones	$a \Rightarrow b$	$a \Leftrightarrow b$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$a´$	$a \wedge b´$	$a \vee b$

Tabla 9. Relación entre conjuntos y proposiciones

De acuerdo con lo anterior las operaciones con conjuntos se pueden expresar en términos de lógica proposicional y viceversa, miremos algunos ejemplos:

$A \cup (A \cap B) = A$		$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow a$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	expresado en lógica proposicional	$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$(A \cup B)´ = A´ \cap B´$		$(a \vee b)´ \leftrightarrow a´ \wedge b´$

2.6 APLICACIÓN DE LAS OPERACIONES DE CONJUNTOS

En la vida cotidiana todo el tiempo estamos aplicando conjuntos; cuando se forman grupos, se clasifican y también cuando se realizan operaciones con ellos; veamos un claro ejemplo de cómo utilizamos los conjuntos en nuestra vida cotidiana en el siguiente video:

https://www.youtube.com/watch?v=SFneXe_3AFA&feature=youtu.be