



Universidad Nacional
de Mar del Plata

**Departamento de Ingeniería
Eléctrica**

Área Electrotecnia



Electrotecnia General

(para la Carrera Ingeniería Industrial)

METODOS DE ANALISIS DE CIRCUITOS ELECTRICOS EN C.C. Y C.A.

Profesor Adjunto: Ingeniero Electricista y Laboral Gustavo L. Ferro
Mail: gferro@fi.mdp.edu.ar
EDICION 2015

INDICE

Capítulo 6

MÉTODOS DE ANÁLISIS DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS EN CORRIENTE CONTINUA Y CORRIENTE ALTERNA.

- 6.1. LA RESOLUCIÓN DE CIRCUITOS ELÉCTRICOS, EN GENERAL
- 6.2. RESOLVER UN CIRCUITO
- 6.3. MÉTODO DE LAS CORRIENTES DE MALLA
- 6.4. MÉTODO DE LAS TENSIONES DE NODO
- 6.5. COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS DE LAS MALLAS Y LOS NODOS. CAMPO DE APLICACIÓN DE CADA UNO
- 6.6. TEOREMAS DE THÉVENIN
- 6.7. TEOREMA DE NORTON
- 6.8. TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN
- 6.9. TEOREMA DE MÁXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA
- 6.10. EJEMPLOS RESUELTOS

➤ BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA:

- Ingeniería de energía eléctrica. Libro 1. Circuitos
- Autor: Marcelo Sobrevila
- Capítulo 1.3

- Circuitos Eléctricos
- Autor: Edminister
- Capítulo 9 – 10 – 11 – 12

Archivo en la red

http://www3.fi.mdp.edu.ar/dtoelectrica/catedras_3e4.htm

6.1. La resolución de circuitos eléctricos, en general

Hasta aquí hemos enunciado y utilizado la Ley de Ohm y las Leyes de Kirchhoff manifestando que las mismas constituyen las leyes fundamentales para la resolución de los circuitos eléctricos.

A partir de las mencionadas leyes, desarrollaremos dos técnicas importantísimas para el análisis de los circuitos eléctricos como son: el análisis nodal, basado en la aplicación sistemática de la 1ª Ley de Kirchhoff, el análisis de mallas, basado en la aplicación sistemática de la 2ª Ley de Kirchhoff.

Estas dos técnicas nos permitirán analizar cualquier tipo de circuito a través de la obtención de un juego de ecuaciones cuya resolución permitirán encontrar los valores de las corrientes y tensiones impresas en el circuito.

6.1.1. Definición de circuito

Es un conjunto de elementos activos y pasivos, incluidos acoplamientos electromagnéticos, conectados en forma de constituir mallas o lazos cerrados.

6.2. Resolver un circuito

Significa, dado un cierto número de datos, obtener las incógnitas planteadas.

Por lo regular, dados los elementos activos y pasivos componentes, se trata de obtener las corrientes de las ramas o los potenciales de todos los nodos.

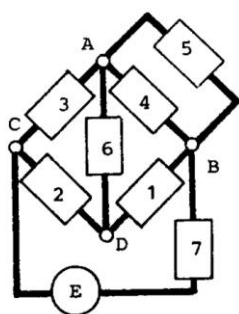
Otra manera de expresarlo es dadas las excitaciones se trata de obtener las respuestas. En la mayor parte de los casos se conoce el diagrama, la matriz de los elementos activos, la matriz de los elementos pasivos y se busca la matriz de las corrientes de rama (o de las tensiones) o se buscan los potenciales de nodo.

6.2.1. Resolución de circuitos simples

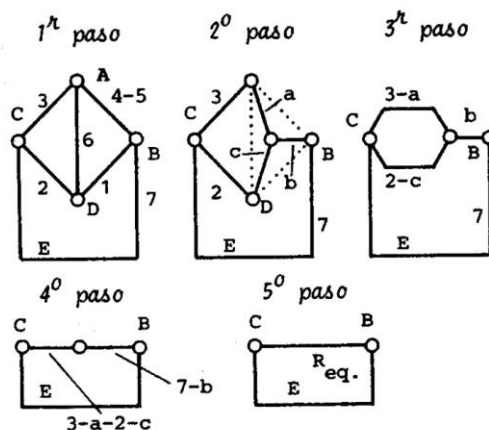
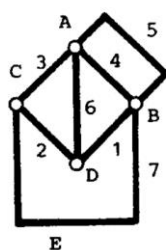
Existen circuitos simples, con **una sola fuerza electromotriz**, que pueden resolverse mediante el empleo de los agrupamientos en **SERIE, en PARALELO y en ESTRELLA – TRIÁNGULO**.

- **Ejemplo.**

CIRCUITO A SIMPLIFICAR



DIAGRAMA



Sin embargo, este método se puede emplear en casos muy simples, como el del ejemplo planteado.

Se han desarrollado otros métodos que permitan resolver problemas más complicados.

Los métodos de resolución se agrupan pueden agrupar de la siguiente manera:

- | | |
|--|--|
| <input type="checkbox"/> Cuando interesan todas las corrientes en las ramas | ✓ Método de las corrientes de malla
✓ Método de los potenciales de nodo |
| <input type="checkbox"/> Cuando interesan solo algunas corrientes en las ramas | ✓ Método aplicando el Teorema de Thevenin
✓ Método aplicando el Teorema de Norton
✓ Método aplicando el Teorema o Principio de Superposición |

6.2.2. Número de incógnitas de un circuito

Del circuito conocemos:

- Elementos activos (fuentes de tensión y/o corriente)
- Elementos pasivos (impedancias de rama)
- Esquema de conexiones

Las incógnitas serán:

- ☐ Corrientes en todas las ramas
- ☐ Las tensiones en todas las ramas
- ☐ Los potenciales en todos los nodos

Por lo tanto, dejamos establecido que:

$$\text{Número de incógnitas} = \text{Número de ramas de la red}$$

$$\text{Número de incógnitas} = \text{Número de nodos de la red}$$

Llamando R al número de ramas y N al número de nodos:

$$\text{Incógnitas} = R$$

$$\text{Incógnitas} = N - 1$$

Nótese que se ha tomado $N - 1$ en vez de N porque a uno cualquiera de los nodos es lícito asignarle un potencial arbitrario, por ejemplo cero.

Por lo anterior concluimos que:

- Si deseamos calcular las R incógnitas de una red \Rightarrow deberemos plantear R ecuaciones independientes.
- Si deseamos calcular los potenciales de los N nodos de la misma red \Rightarrow deberemos plantear $N - 1$ ecuaciones independientes.

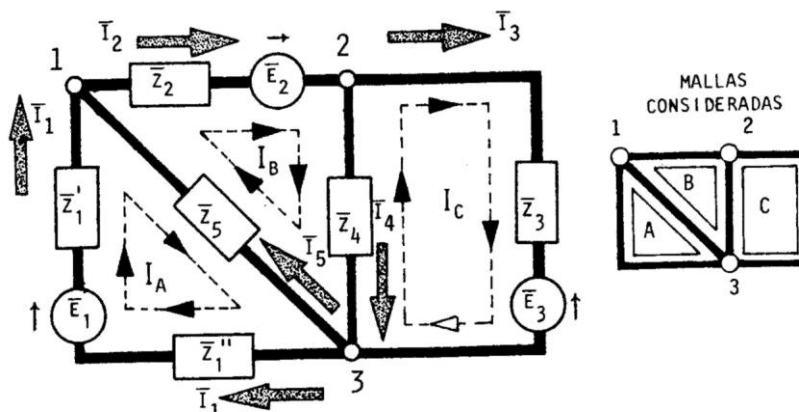
6.3. METODO DE LAS CORRIENTES DE MALLA

6.3.1. Introducción

El método de las mallas se basa en la utilización de circuitos cerrados, que comúnmente se llaman **mallas o lazos**.

El método se funda en la suposición de que en cada malla o lazo, existe una corriente que le es propia y que se denomina **“corriente de malla”**

La adecuada composición de las diferentes corrientes de malla, permite conocer todas las corrientes de las ramas.



La **ventaja** del método consiste en que el número de **corrientes de malla**, es **inferior** al número de las **corrientes de rama**. Trataremos un ejemplo para efectuar algunas consideraciones:

6.3.2. Definiciones

- **Número de nodos independientes:** $N_i = N - 1$ siendo N el número de nodos.

Para nuestro ejemplo: $N_i = 3 - 1 = 2$

- **Número de mallas independientes:** $M = R - N_i = R - N + 1$, siendo R la cantidad de ramas.

Para nuestro ejemplo: $M = R - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$

Los nodos están indicados con los números 1, 2 y 3, mientras que las ramas son los trayectos entre cada par de nodos.

En la figura vemos que se pueden tomar 3 mallas indicadas como A, B y C y que encierran los recorridos 1231, 131 y 232.

En cada malla existirá una corriente de malla, que denominaremos I_A , I_B e I_C .

Ahora procedamos a aplicar las leyes de Kirchhoff a cada malla, y se tendrá:

$$\text{Malla 1231} \quad I_B Z_2 + (I_B - I_C) Z_4 + (I_B - I_A) Z_5 = E_2$$

$$\text{Malla 131} \quad (I_A - I_B) Z_5 + I_A (Z_1' + Z_1'') = E_1$$

$$\text{Malla 232} \quad I_C Z_3 + (I_C - I_B) Z_4 = -E_3$$

¿Cuál es el origen de estas expresiones?

Son las sumas de las tensiones y de las fuerzas electromotrices a lo largo de cada una de las mallas propuestas.

En cada impedancia, se tiene en cuenta las corrientes que circulan con su sentido relativo.

Para las FEM, se tiene en cuenta las flechas colocadas al costado del símbolo, que indican el sentido relativo correspondiente.

Reordenemos las ecuaciones planteadas:

$$\text{Malla 1231} \quad -I_A Z_5 + I_B (Z_2 + Z_4 + Z_5) - I_C Z_4 = E_2$$

$$\text{Malla 131} \quad I_A (Z_1' + Z_1'') - I_B Z_5 = E_1$$

$$\text{Malla 232} \quad -I_B Z_4 + I_C (Z_3 + Z_4) = -E_3$$

Donde definimos como $Z_1 = Z'_1 + Z''_1$

Convengamos en llamar:

$$Z_{AA} = Z_1 + Z_5$$

$$Z_{BB} = Z_2 + Z_4 + Z_5 \quad \text{Impedancias propias de malla}$$

$$Z_{CC} = Z_3 + Z_4$$

$$Z_{AB} = -Z_5$$

$$Z_{BA} = -Z_5$$

$$Z_{BC} = -Z_4$$

$$Z_{CB} = -Z_4$$

$$Z_{AC} = 0$$

$$Z_{CA} = 0$$

Impedancias mutuas o de vinculación de mallas

Podemos definir:

- **IMPEDANCIA DE MALLA:** es la suma de todas las impedancias que se encuentran recorriendo una malla.
- **IMPEDANCIA MUTUA:** es la impedancia común a dos mallas.

Reemplazando estos valores en el sistema de ecuaciones del ejemplo resulta:

$$\text{Malla 1231} \quad I_A Z_{AA} + I_B Z_{AB} + 0 = E_A$$

$$\text{Malla 131} \quad I_A Z_{BA} + I_B Z_{BB} + I_C Z_{BC} = E_B$$

$$\text{Malla 232} \quad 0 + I_B Z_{CB} + I_C Z_{CC} = E_C$$

Donde hemos cambiado la denominación de las FEM para encontrar expresiones más generales.

Resolviendo el sistema de ecuaciones encontramos las tres corrientes de malla I_A , I_B e I_C . A partir de las corrientes de malla encontramos las corrientes de rama incógnitas:

$$I_1 = I_A \quad I_2 = I_B \quad I_3 = I_C \quad I_4 = I_B - I_C \quad I_5 = I_A - I_B$$

6.3.3. Generalización del método.

Considérese el circuito arbitrario ilustrado en la figura. Se numeran las mallas y se asigna un mismo sentido de circulación para recorrer las mismas, con el objeto de obtener una ley de formación y poder sistematizar el método.

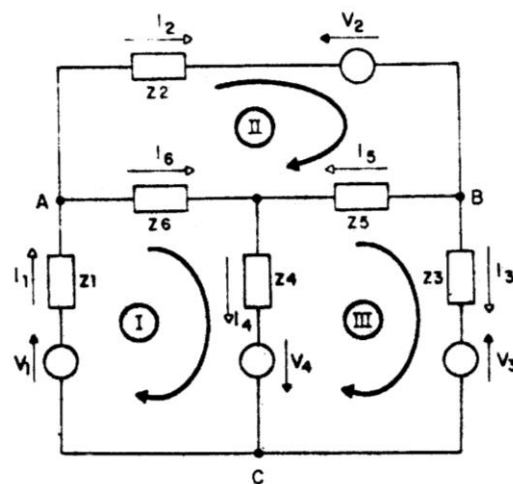
Con el mismo objeto el sentido de referencia para las corrientes de malla independiente I_1 , I_2 e I_3 se eligen todos coincidentes entre sí e iguales al sentido de circulación adoptado.

Por aplicación de la segunda Ley de Kirchhoff resulta:

$$\text{malla I} \quad V_1 + V_4 = Z_1 I_1 + Z_4 I_4 + Z_6 I_6$$

$$\text{malla II} \quad -V_2 = Z_2 I_2 + Z_5 I_5 - Z_6 I_6$$

$$\text{malla III} \quad -V_3 - V_4 = Z_3 I_3 - Z_4 I_4 - Z_5 I_5$$



En el grupo de ecuaciones anteriores se desean expresar ahora las corrientes compartidas entre dos mallas en función de las corrientes de malla independiente.

Con ese objeto conviene elegir para plantear la primera Ley de Kirchhoff a los nodos indicados como A, B y C y en consecuencia:

$$\text{nodo A: } -I_1 + I_2 + I_6 = 0; \text{ nodo B: } -I_2 + I_3 + I_5 = 0; \text{ nodo C: } I_1 - I_3 - I_4 = 0$$

De este conjunto de ecuaciones pueden despejarse las corrientes compartidas en función de las independientes:

$I_6 = I_1 - I_2$, $I_5 = I_2 - I_3$ e $I_4 = I_1 - I_3$, reemplazando adecuadamente las ecuaciones será:

$$\begin{array}{ll} \text{malla I} & V_1 + V_4 = Z_1 I_1 + Z_4 (I_1 - I_3) + Z_6 (I_1 - I_2) \\ \text{malla II} & -V_2 = Z_2 I_2 + Z_5 (I_2 - I_3) - Z_6 (I_1 - I_2) \\ \text{malla III} & -V_3 = Z_3 I_3 - Z_4 (I_1 - I_3) - Z_5 (I_2 - I_3) \end{array}$$

ordenando las ecuaciones anteriores en función de las corrientes de malla independiente:

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_4 + Z_6) I_1 - Z_6 I_2 - Z_4 I_3 &= V_1 + V_4 \\ -Z_6 I_1 + (Z_2 + Z_5 + Z_6) I_2 - Z_5 I_3 &= -V_2 \\ -Z_4 I_1 - Z_5 I_2 + (Z_3 + Z_4 + Z_5) I_3 &= -V_3 - V_4 \end{aligned}$$

Nótese que en las tres ecuaciones de malla planteadas, el coeficiente de la corriente independiente de las mismas está formado por la suma de las impedancias que se obtienen al recorrer la malla en cuestión.

Además, por ejemplo en la ecuación correspondiente a la malla I, el coeficiente de la corriente independiente de la malla II es la impedancia de la rama compartida entre las mallas I y II.

Estas impedancias compartidas aparecen precedidas por un signo negativo. Procesos similares ocurren para las ecuaciones correspondientes a las mallas II y III.

Finalmente, se observa que cada ecuación de malla tiene como término independiente a la suma de las tensiones de los generadores hallados al recorrer la malla correspondiente, computadas con signo positivo cuando su sentido de referencia es coincidente con el de circulación adoptado, y con signo negativo en caso contrario.

A través del análisis se advierte que existe una ley de formación que permite escribir las ecuaciones en forma sistemática, y que pueden tomar el siguiente aspecto:

$$Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 + \dots + Z_{1mi} I_{mi} = \Sigma V \quad (1)$$

$$Z_{21} I_1 + Z_{22} I_2 + \dots + Z_{2mi} I_{mi} = \Sigma V \quad (2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$Z_{mi1} I_1 + Z_{mi2} I_2 + \dots + Z_{mimi} I_{mi} = \Sigma V \quad (mi)$$

en forma condensada y matricialmente puede escribirse: $[\Sigma V] = [Z] [I]$ y dice que la matriz columna de tensiones de excitación es igual a la matriz impedancia de malla o matriz impedancia del método de las mallas multiplicada por la matriz columna de corrientes de malla independiente.

En la ecuación se observa, principalmente, que aparecen dos tipos de impedancia, una con subíndices repetidos y otras con distintos subíndice, y se denominan:

- $Z_{\alpha\alpha}$ = IMPEDANCIAS PROPIAS DE LA MALLA
- $Z_{\alpha\beta}$ = IMPEDANCIAS MUTUAS O COMPARTIDAS

Es de aclarar que $Z_{\alpha\beta} = Z_{\beta\alpha}$ para circuitos constituidos por elementos que se componen en forma eléctricamente simétrica, es decir que la transferencia de energía puede realizarse con igual facilidad en ambos sentidos.

Los elementos pasivos cumplen con esta condición y se denominan BILATERALES.

- **Regla práctica para escribir las ecuaciones del método de las mallas por simple inspección.**

1. Se determina el número de mallas independientes, se enumeran las mismas asignando un mismo sentido para todas las corrientes en las mismas, en coincidencia con el sentido de circulación adoptado.
2. En el primer miembro se forma una matriz columna con tantos elementos como mallas independientes tenga el circuito, cada uno de los elementos es igual a la sumatoria, para la malla correspondiente a la fila en que se encuentran, de las tensiones excitadoras halladas al recorrerlas íntegramente. Se considerarán positivas aquellas tensiones de los generadores cuyo sentido de referencia sea coincidente con el de circulación, y negativas en caso contrario. El segundo miembro está constituido por el producto de dos matrices.
3. La matriz cuadrada de impedancia de malla se construye formando un cuadro con tantas filas y columnas como mallas independientes tenga el circuito. Se coloca en cada uno de los elementos definidos una impedancia caracterizada con las letras Z con doble subíndice. El primer subíndice corresponde a la malla a la cual pertenece la ecuación, o lo que es lo mismo, al número de fila. El segundo subíndice corresponde a la corriente de la cual es coeficiente, o lo que es igual, a la columna correspondiente. Las impedancias con subíndices repetidos resultan de las sumas de las impedancias encontradas al recorrer la malla identificada por dicho doble subíndice, siendo siempre positivas. Las impedancias con subíndices distintos son iguales a la impedancia de la rama compartida entre las dos mallas identificadas por dichos subíndices, **cambiada de signo**.
4. La matriz columna de corrientes incógnitas está constituida por tantos elementos como mallas independientes tenga el circuito.

NOTA: En el ejemplo de la figura de la cual se derivó el método incluye generadores de tensión. En el caso de que existan en la configuración a resolver generadores de corriente, con el objeto de aplicar la regla anterior, debe convertírselos en generadores de tensión aplicando la transformación de fuentes ya vista.

6.4. MÉTODO DE LAS TENSIONES DE NODO

El análisis nodal o método de tensiones de nodo proporciona un procedimiento general para analizar circuitos usando los voltajes de los nodos como variables del circuito.

Considérese el circuito arbitrario ilustrado en la figura.

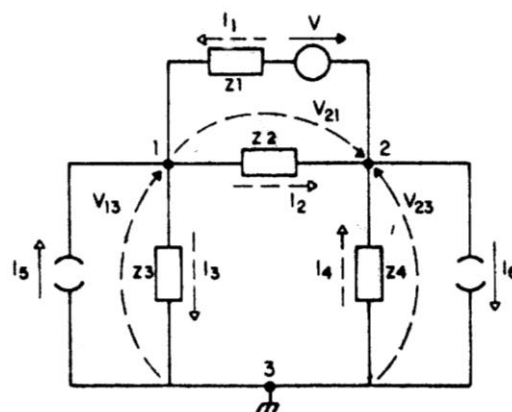
Se numeran los números independientes y el nodo 3 se elige como referencia, computando respecto de él, los potenciales de los demás nodos.

Los generadores de corriente proveen I_5 e I_6 , obviamente conocidas; los sentidos de referencia para las demás corrientes se han tomado en forma arbitraria.

De la aplicación de la 1ª Ley de Kirchhoff resulta:

nodo 1: $-I_1 + I_2 + I_3 - I_5 = 0$

nodo 2: $I_1 - I_2 - I_4 + I_6 = 0$



En las ecuaciones anteriores I_5 e I_6 son las corrientes independientes impuestas por los generadores. Las demás pueden expresarse en función de los potenciales y las admitancias aplicando la Ley de Ohm en las ramas del circuito de la figura, y en consecuencia:

$$V_{21} = V_2 - V_1 = V + Z_1 I_1 \Rightarrow I_1 = (V_2 - V_1 - V) Y_1$$

$$V_{21} = V_2 - V_1 = -I_2 Z_2 \quad \Rightarrow \quad I_2 = (V_1 - V_2) Y_2$$

$$\mathbf{V}_{13} = \mathbf{V}_1 - \mathbf{0} = \mathbf{I}_3 \mathbf{Z}_3 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{V}_1 \mathbf{Y}_3$$

$$\mathbf{V}_{23} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{0} = - \mathbf{I}_4 \mathbf{Z}_4 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{I}_4 = - \mathbf{V}_2 \mathbf{Y}_4$$

reemplazando adecuadamente las últimas ecuaciones en las de nodos resulta:

nodo 1: $-(V_2 - V_1 - V)Y_1 + (V_1 - V_2)Y_2 + V_1Y_3 - I_5 = 0$

nodo 2: $(V_2 - V_1 - V) Y_1 - (V_1 - V_2) Y_2 + V_2 Y_4 + I_6 = 0$

operando las ecuaciones anteriores en función de los potenciales de nodo independiente:

nodo 1: $(Y_1 + Y_2 + Y_3) V_1 - (Y_1 + Y_2) V_2 = I_5 - V Y_1$

nodo 2: $-(Y_1 + Y_2) V_1 + (Y_1 + Y_2 + Y_4) V_2 = -I_6 + V Y_1$

Nótese que en las dos ecuaciones de nodo planteadas, los potenciales de nodo independiente tienen como coeficiente a la suma de las admitancias que concurren a los respectivos nodos.

Además, en la ecuación correspondiente al nodo 1, el potencial del nodo 2 tiene como coeficiente la suma de las admitancias tendidas entre los nodos 1 y 2, precedidos de un signo negativo.

Proceso análogo ocurre en la ecuación del nodo 2, respecto al potencial del nodo 1.

Finalmente, se observa que cada ecuación de nodo tiene como término independiente a la suma de las corrientes independientes, provistas por los generadores, que convergen al nodo al cual corresponde la ecuación, computadas con signo positivo si son entrantes en el nodo, y negativo en caso contrario. Adviértase que en el circuito en estudio, además de los generadores de corriente, se ha incluido uno de tensión, y que en las ecuaciones aparece transformado en uno de corriente. Al respecto se insistirá sobre esto en la regla práctica.

A través del análisis se advierte que existe una Ley de formación que permite escribir las ecuaciones en forma sistemática, y que pueden tomar el siguiente aspecto:

$$Y_{11} V_1 + Y_{12} V_2 + \dots + Y_{1n_i} V_{n_i} = \Sigma I \quad (1)$$

$$Y_{21} V_1 + Y_{22} V_2 + \dots + Y_{2ni} V_{ni} = \Sigma I \quad (2)$$

$$Y_{ni} V_1 + Y_{ni2} V_2 + \dots + Y_{nini} V_{ni} = \Sigma I \quad (ni)$$

que en forma matricial y condensada puede escribirse : $[\Sigma] = [Y][V]$ y dice que la matriz columna de corrientes de excitación es igual a la matriz admitancia de nodo o matriz admitancia del método de los nodos, multiplicada por la matriz columna de tensiones de nodo independiente.

En las ecuaciones se observa, principalmente, que existen dos tipos de admitancias, unas con subíndices repetidos y otras con distintos subíndices, y se denominan:

- $Y_{\alpha\alpha}$ = admitancias propias de nodos.
- $Y_{\alpha\beta}$ = admitancias mutuas.

respecto de las admitancias mutuas $Y_{\alpha\alpha}$ e $Y_{\alpha\beta}$ valen las mismas consideraciones realizadas en el método de las mallas para $Z_{\alpha\alpha}$ e $Z_{\alpha\beta}$. Esto es $Y_{\alpha\beta} = Y_{\beta\alpha}$ para circuitos constituidos por elementos bilaterales.

- **Regla práctica para escribir las ecuaciones del método de los nodos por simple inspección.**

1. Se determina el número de nodos independientes, eligiendo la referencia y numerándolos.
2. En el primer miembro se forma una matriz columna con tantos elementos como nodos independientes tenga el circuito. Cada uno de los elementos es igual a la sumatoria, para el nodo correspondiente a la fila en que se encuentra, de las corrientes excitadoras que convergen al nodo en cuestión. Se considerarán positivas aquellas corrientes de los generadores cuyo sentido de referencia es entrante al nodo, y negativo en caso contrario. El segundo miembro está constituido por el producto de dos matrices.
3. La matriz cuadrada de admitancia de nodo se construye formando un cuadro con tantas filas y columnas como nodos independientes tenga el circuito. En cada uno de los elementos definidos se coloca una admitancia caracterizada con la letra Y con doble subíndice. El primer subíndice corresponde al nodo al cual pertenece la ecuación, o lo que es lo mismo, al número de fila. El segundo subíndice corresponde a la tensión de la cual será coeficiente, o lo que es igual, a la columna correspondiente. Las admitancias con subíndices repetidos resultan de la suma de las admitancias de las ramas que concurren al nodo identificado por el doble subíndice, siendo siempre positivas. Las admitancias con distintos subíndices resultan de la suma de las admitancias de las ramas tendidas entre los dos nodos identificados por los subíndices cambiada de signo.
4. La matriz columna de tensiones incógnitas está constituida por tantos elementos como nodos independientes tenga el circuito.

NOTA: En el caso de que existan en la configuración a resolver generadores de tensión, con el objeto de aplicar la regla anterior, debe convertírselos en generadores de corriente aplicando el concepto de transformación de fuentes.

6.5. Comparación de los métodos de las mallas y los nodos. Campo de aplicación de cada uno.

El método de las mallas permite la determinación de las corrientes de malla independiente, y conociendo éstas pueden determinarse todas las demás incógnitas. Deben plantearse:

m_i = número de corrientes de malla independientes = $r - (n - 1)$ ecuaciones.

Donde: (r) es el número total de ramas, (n) es el número total de nodos.

El método de los nodos permite la determinación de las tensiones de nodo independiente, y de allí se pueden determinar las demás incógnitas.

Deben plantearse:

n_i = número de tensiones de rama independiente = $n - 1$ ecuaciones.

Donde: (n) es el número total de nodos.

En el caso de querer determinar una configuración, una primera selección del método a emplear puede hacerse teniendo en cuenta a aquél que provee el menor número de ecuaciones. Es evidente que si $m_i < n_i$ conviene emplear el método de las mallas, y en cambio si $m_i > n_i$ es recomendable emplear el método de los nodos.

6.6. TEOREMA DE THÉVENIN

Este teorema se emplea cuando se requiere conocer **una sola de las incógnitas** de un circuito.

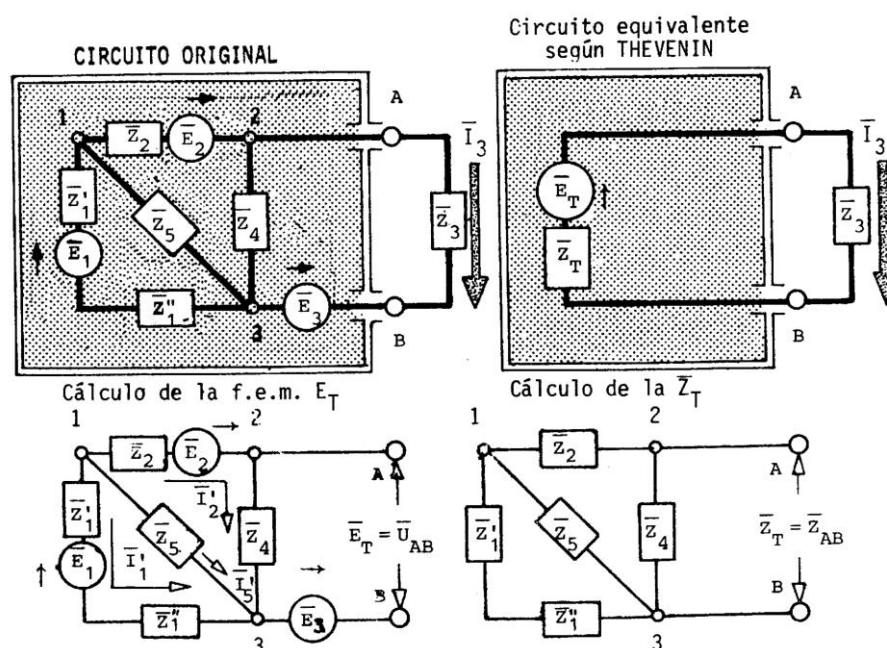
Ventaja: Menor trabajo material para conocer una incógnita determinada.
Permite simplificar los circuitos para su estudio y medición.

Inconveniente: No permitir conocer todas las incógnitas.
Impide controlar el resultado.

6.6.1. Enunciado:

Una red compleja (circuito) que tenga elementos activos y pasivos lineales, puede ser reemplazada por un generador equivalente, compuesto por una impedancia interior, y una fuerza electromotriz.

Veamos el ejemplo utilizado en el método de las mallas:



El método que desarrollamos, busca precisamente obtener el valor de la fuerza electromotriz \bar{E}_T y la impedancia equivalente \bar{Z}_T , elementos ambos que constituyen el generador equivalente de Thevenin.

Por aplicación de la Ley de Ohm podemos calcular $\bar{I}_3 = \bar{E}_T / (\bar{Z}_T + \bar{Z}_3)$

Para encontrar \bar{E}_T y \bar{Z}_T procedemos de la siguiente manera:

- “ \bar{E}_T ”

El valor de la fuerza electromotriz \bar{E}_T se obtiene retirando la impedancia \bar{Z}_3 por la cual circula la incógnita propuesta, en nuestro ejemplo, retirando la impedancia \bar{Z}_3 y determinando que tensión queda entre sus terminales.

En el ejemplo, para conocer la tensión a circuito abierto \bar{U}_{AB} habrá que calcular \bar{I}'_2 , sea por el método de las mallas o por simple aplicación repetitiva del mismo método de Thevenin.

Se observa así que este procedimiento implica muchas veces recurrir a otros métodos. Para nuestro ejemplo, determinada esa corriente auxiliar, se podrá escribir:

$$\bar{U}_{AB} = \bar{E}_T = \bar{I}'_2 \bar{Z}_4 + \bar{E}_3$$

- “ Z_T ”

La determinación de la impedancia interna del generador equivalente según Thevenin, se procede a quitar todas las fuentes activas, y el circuito nos queda como enseña la figura.

La determinación de la impedancia es sencilla, para este ejemplo, acudiendo a las combinaciones de impedancias en serie y paralelo:

$$Z_T = \frac{\left| \frac{(Z'_1 + Z''_1) Z_5}{Z'_1 + Z''_1 + Z_5} + Z_2 \right| (Z_4)}{\frac{(Z'_1 + Z''_1) (Z_5)}{Z'_1 + Z''_1 + Z_5} + Z_2 + Z_4}$$

En síntesis:

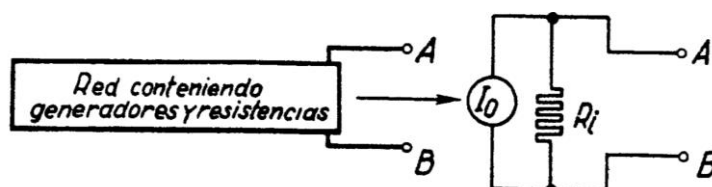
- ***Para determinar una incógnita de Thevenin, se retira la impedancia por la que circula dicha incógnita, y se considera al resto del circuito como un generador equivalente. La fuerza electromotriz de este generador equivalente es la tensión a circuito abierto, que se ve desde la incógnita, mirando al resto del circuito.***
- ***La impedancia interna de ese generador equivalente es la impedancia que se ve desde la incógnita, si se consideran nulas todas las fuerzas electromotrices actuantes.***

Esto nos permite mejorar el ENUNCIADO dado al principio:

- **Una red compleja, que contenga elementos activos y pasivos lineales, puede ser reemplazada por una fuente real de tensión, llamada generador equivalente de Thevenin, cuya fuerza electromotriz sea la tensión que se mide en la red cuando se retira la impedancia por la que circula la incógnita que se quiere determinar y cuya impedancia interna es la impedancia que tiene la misma red considerando nulas todas las fuerzas electromotrices.**
- **El método de Thevenin es sumamente útil para operar en forma experimental ya que la determinación de los valores de E_T y Z_T se pueden hacer por métodos experimentales de laboratorio.**

6.7. TEOREMA DE NORTON

El Teorema de Thevenin enunciado anteriormente establecía que todo circuito lineal podía ser reemplazado por el denominado equivalente de Thevenin que estaba compuesto por un generador real, es decir por un generador ideal de tensión E_T y una impedancia Z_{Th} .



El Teorema de Norton es similar pero difiere en el tipo de generador seleccionado para hacer la equivalencia.

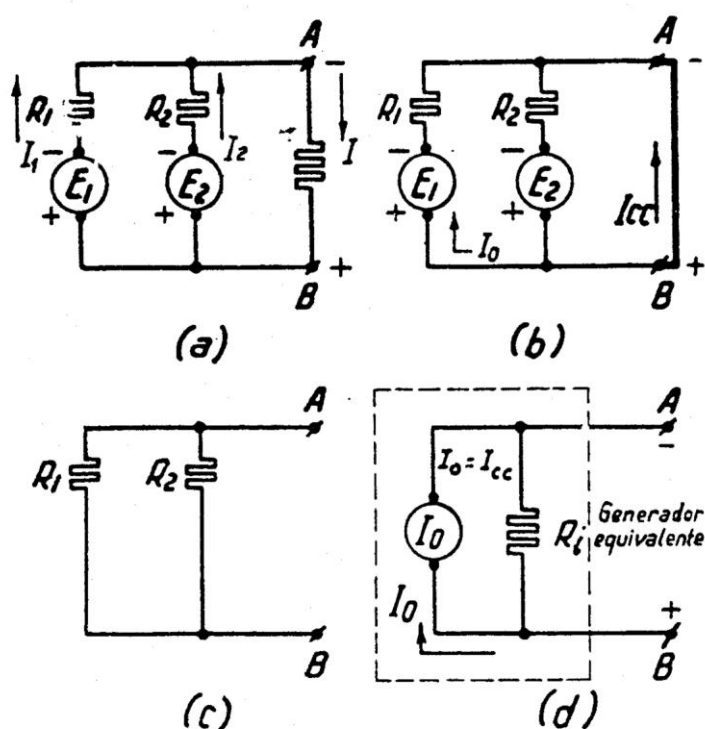
Utiliza una fuente que proporciona una corriente (que puede ser continua o alterna) y que tiene acoplada en paralelo una impedancia.

El enunciado es el siguiente:

“La corriente que circula por un receptor de energía conectado a los terminales de una red es igual a la corriente que circularía por ese mismo receptor, conectado a un generador elemental consistente en una fuente de corriente, igual a la que produciría si ponemos la red en cortocircuito, y una impedancia interior en paralelo igual a la que presentan los terminales si las fuerzas electromotrices no se consideran”.

Esto se ilustra en principio en la figura anterior.

Veamos un ejemplo.



En la figura vemos que:

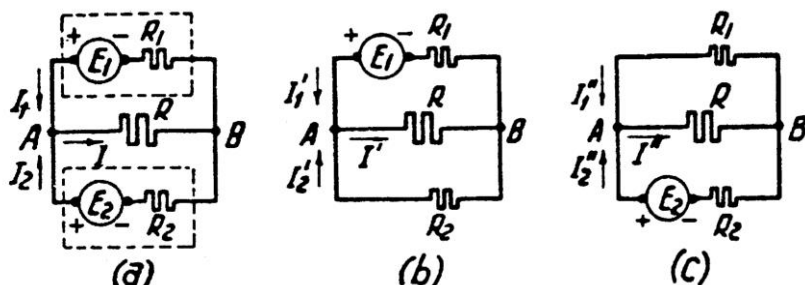
- (a) representa el circuito de resolver;
- (b) se ha quitado la resistencia de carga y se han corto circuitado los bornes, obteniéndose así la corriente I_{cc} .
- (c) Se han pasivado las fuentes de tensión (es decir se cortocircuitan) y se puede calcular la impedancia equivalente (en el ejemplo resistencia equivalente).
- (d) Vemos el generador equivalente con una fuente de corriente $I = I_{cc}$ acoplada en paralelo con una resistencia interior R_i .

6.8. TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN

En una red cualquiera compuesta por generadores e impedancias, la corriente que circula por un punto de la misma, es la suma de las que circularían por ese mismo punto si cada generador actuase solo e independientemente y los otros presentasen únicamente su impedancia interior.

“El principio de superposición establece que el voltaje (o una corriente) a través de un elemento lineal es la suma algebraica de los voltajes (o corrientes) a través del elemento debido a cada fuente independiente actuando sola”.

La figura que sigue nos da una idea del Teorema.



En (a) vemos el circuito a resolver y en (b) y (c) el mismo circuito en la que actúan independientemente los generadores, reemplazándose los eliminados por sus respectivas resistencias internas.

Cuando en (b) actúa solamente E_1 provoca en la red tres corrientes que son muy fáciles de calcular, lo mismo cuando actúa sólo E_2 en (c).

La corriente real que circulará por cada rama cuando actúen ambos generadores simultáneamente debe ser:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_1' + I_1'' \\ I_2 &= I_2' + I_2'' \\ I &= I' + I'' \end{aligned}$$

Las seis corrientes parciales son muy fáciles de calcular y solo debe tenerse la precaución de considerar correctamente sus sentidos.

6.9. TRANSFERENCIA DE ENERGÍA DE UN CIRCUITO A OTRO

La transferencia de energía desde un generador a un receptor puede hacerse de dos formas:

- ☐ Directamente.
- ☐ A través de un circuito de acoplamiento.

En el circuito de la figura podemos expresar a:

$$Z_i = R_i + j X_i = Z_i \angle \theta_i \quad \quad Z_e = R_e + j X_e = Z_e \angle \theta_e$$

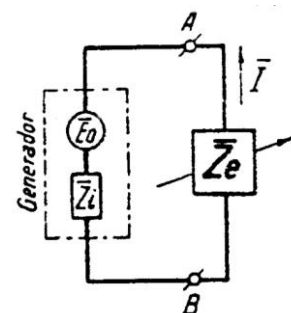
La corriente circulante, en valor absoluto vale:

$$I = \frac{E_0}{\sqrt{(R_i + R_e)^2 + (X_i + X_e)^2}}$$

La potencia desarrollada en la carga resulta:

$$P_e = I^2 R_e = \frac{E_0^2 R_e}{(R_i + R_e)^2 + (X_i + X_e)^2}$$

Si variamos la reactancia X_e manteniendo todos los elementos constantes, la potencia transferida por el generador a la carga es MAXIMA cuando se cumple: $X_i = -X_e$



Para esta condición se cumple que: $P_e = \frac{E_0^2 R_e}{(R_i + R_e)^2}$

Si variamos R_e , obtendremos derivando la expresión de la potencia P_e que la condición de MÁXIMO es: $R_i = R_e$

Reuniendo las dos condiciones vemos que se transfiere máxima potencia cuando se cumple que: $Z_i = Z_e^*$ (donde Z_e^* es la impedancia conjugada de Z_e)

Este desarrollo se conoce con el nombre de “**Teorema de la máxima transferencia de potencia**”

Veamos dos casos particulares:

a) Carga: Resistencia variable R_L

b) Carga: Impedancia Z_L con resistencia variable y reactancia fija

a) Carga: Resistencia variable R_L :

La corriente en el circuito es (en módulo): $I = \frac{E_0}{\sqrt{(R_i + R_e)^2 + (X_i)^2}}$

La potencia suministrada a R_L es entonces: $P_e = I^2 R_e = \frac{E_0^2 R_e}{(R_i + R_e)^2 + (X_i)^2}$

Para determinar el valor de R_e para que la potencia transferida a la carga sea máxima, se hace la primera derivada dP/dR_e igual a cero, resultando: $R_e = \sqrt{R_i^2 + X_i^2} = |Z_e|$

En el caso de una resistencia pura variable se transmite la potencia máxima entre los terminales de un circuito activo cuando la resistencia de carga es igual al valor absoluto de la impedancia del circuito.

Si la componente reactiva de la impedancia en serie con la fuente es cero, o sea $X_i = 0$, se transfiere la máxima potencia cuando la resistencia de carga es igual a la resistencia de la fuente, esto es: $R_i = R_e$

b) Carga: Impedancia Z_e con resistencia variable y reactancia fija.

Con la condición X_e constante se obtienen las mismas ecuaciones para la corriente I y para la potencia P que en el caso general.

Igualando a cero la primera derivada de P respecto de R_e se deduce:

$$R_e^2 = R_i^2 + (X_i + X_e)^2 \Rightarrow R_e = |Z_i + jX_e|$$

Como Z_i y X_e son magnitudes fijas se pueden combinar en una única impedancia. Entonces, con R_e variable, este caso se reduce al caso a) y la potencia máxima se obtiene cuando R_e es igual al valor absoluto de la impedancia del circuito.

6.10. EJEMPLOS RESUELTOS.

6.10.1. APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LAS MALLAS.

Escribir el sistema de ecuaciones en las corrientes de malla del circuito representado en la Figura 9-5.

En el esquema del propio circuito se han señalado las corrientes de malla a considerar. Como en la malla uno no existen fuentes de tensión, el término independiente de la primera ecuación del sistema es cero

$$I_1(-j8) + (I_1 - I_2)10 + (I_1 - I_3)5 = 0$$

La fuente $5/30^\circ$ de la malla dos hace circular una corriente de sentido contrario a la cíclica de su malla, razón por la cual se ha de considerar con signo menos.

$$I_2(j4) + (I_2 - I_3)8 + (I_2 - I_1)10 = -(5/30^\circ)$$

Aplicando la segunda ley de Kirchhoff a la tercera malla se deduce

$$I_3(3 + j4) + (I_3 - I_1)5 + (I_3 - I_2)8 = -(10/0^\circ)$$

Agrupando términos resulta el sistema de ecuaciones siguiente:

$$(15 - j8)I_1 - 10I_2 - 5I_3 = 0$$

$$-10I_1 + (18 + j4)I_2 - 8I_3 = -(5/30^\circ)$$

$$-5I_1 - 8I_2 + (16 + j4)I_3 = -(10/0^\circ)$$

Comparemos este sistema de ecuaciones del circuito dado con el del circuito de tres mallas general. La impedancia de la malla uno es $Z_{11} = (5 + 10 - j8) = 15 - j8$. La copedancia de las mallas uno y dos es $Z_{12} = Z_{21} = 10$; ahora bien, como I_2 e I_1 son de sentido contrario circulando por la misma impedancia, Z_{12} lleva signo menos. Análogamente, la copedancia $Z_{13} = -5$. Obsérvese que $Z_{12} = Z_{21}$, $Z_{13} = Z_{31}$ y $Z_{23} = Z_{32}$.

La fuente de tensión de la malla dos es $5/30^\circ$ y lleva un signo menos porque hace circular una corriente de sentido opuesto a la de malla correspondiente, como ya indicamos. Cada término del sistema de ecuaciones obtenido tiene su imagen en el sistema más general.

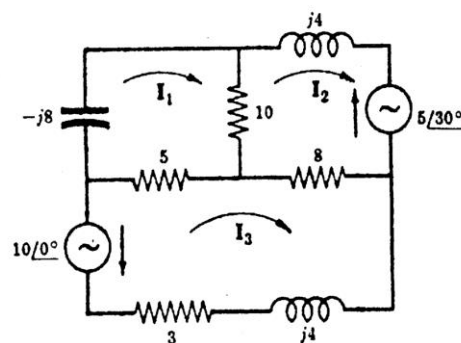


Fig. 9-5

6.10.2. APLICACIÓN DEL METODO DE LOS NODOS

Escribir las ecuaciones de las tensiones en los nudos del circuito de la Fig. 10-4 y expresarlas en forma matricial.

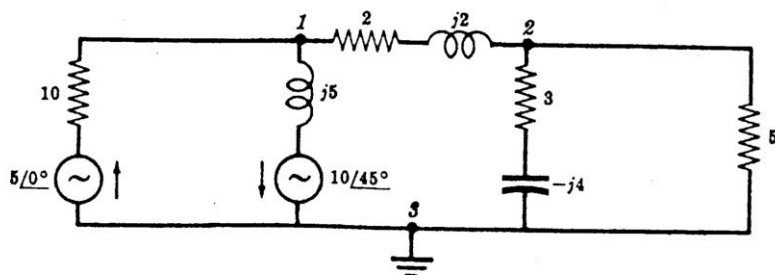


Fig. 10-4

Elegir el nudo 3 como referencia y numerar los nudos en la forma en que se ha hecho en la figura. Suponer que las corrientes en las ramas se alejan de los nudos 1 y 2. Aplicando la primera ley de Kirchhoff a cada nudo, se obtiene:

$$\text{En el nudo 1: } \frac{V_1 - 5/0^\circ}{10} + \frac{V_1 + 10/45^\circ}{j5} + \frac{V_1 - V_2}{2 + j2} = 0 \quad (10)$$

$$\text{En el nudo 2: } \frac{V_2 - V_1}{2 + j2} + \frac{V_2}{3 - j4} + \frac{V_2}{5} = 0 \quad (11)$$

Agrupando términos,

$$\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2 + j2} \right) V_1 - \left(\frac{1}{2 + j2} \right) V_2 = \frac{5/0^\circ}{10} - \frac{10/45^\circ}{j5} \quad (12)$$

$$-\left(\frac{1}{2 + j2} \right) V_1 + \left(\frac{1}{2 + j2} + \frac{1}{3 - j4} + \frac{1}{5} \right) V_2 = 0 \quad (13)$$

En la matriz cuadrada que contiene las admitancias, $Y_{11} = 1/10 + 1/j5 + 1/(2 + j2)$ por comparación con (6). Esto está de acuerdo con la definición de Y_{11} como admitancia propia del nudo 1. También $Y_{12} = Y_{21} = -1/(2 + j2)$ en concordancia con la definición de coadmitancia.

I_1 en la notación general se definió como la suma de las corrientes en el nudo 1. De acuerdo con el convenio del signo, la corriente de la fuente de la rama izquierda tiene signo positivo y la de la fuente de la segunda rama, que se aleja de 1, tiene signo negativo. Por tanto, $I_1 = (5/0^\circ)/10 - (10/45^\circ)/j5$. La corriente I_2 en el nudo 2 es cero, ya que no hay fuente alguna en las ramas conectadas con el nudo 2.

6.10.3. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE THEVENIN

Dado el circuito de la Fig. 11-3 determinar el circuito equivalente de Thevenin con respecto a los terminales AB . Utilizar el resultado para hallar la corriente en las dos impedancias, $Z_1 = 5 - j5$ y $Z_2 = 10/0^\circ$, conectadas sucesivamente a los terminales AB y determinar la potencia a ellas suministrada.

En la Fig. 11-3 la corriente

$$I = 50/0^\circ / (5 + j5 - j5) = 10/0^\circ$$

La tensión V' equivalente de Thevenin es entonces la caída de tensión en la impedancia $5 + j5$. Por tanto,

$$V' = V_{AB} = I(5 + j5) = 70,7/45^\circ$$

La impedancia de entrada en los terminales AB es $Z' = \frac{(5 + j5)(-j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5$.

El circuito equivalente de Thevenin es el representado en la Fig. 11-4(a) con la fuente V' dirigida al terminal A .

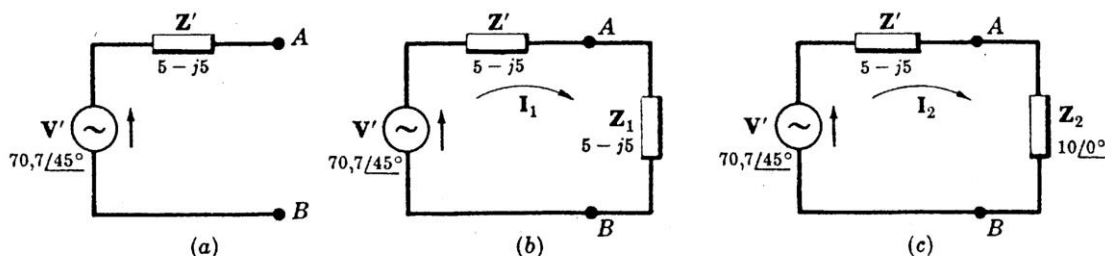


Fig. 11-4

Si se une la impedancia Z_1 a los terminales del circuito equivalente de Thevenin, se tiene la Fig. 11-4(b). En este circuito,

$$I_1 = (70,7/45^\circ) / (5 - j5 + 5 - j5) = 5/90^\circ \quad \text{y} \quad P_1 = 5(I_1)^2 = 125 \text{ W}$$

Con la impedancia Z_2 en lugar de la Z_1 , Fig. 11-4(c), se tiene

$$I_2 = (70,7/45^\circ) / (5 - j5 + 10) = 4,47/63,43^\circ \quad \text{y} \quad P_2 = 10(I_2)^2 = 200 \text{ W}$$

6.10.4. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE NORTON

Dado el circuito de la Fig. 11-6, determinar el circuito equivalente de Norton respecto de los terminales AB . Utilizar el resultado para hallar la corriente en dos impedancias $Z_1 = 5 - j5$ y $Z_2 = 10 \angle 0^\circ$, unidas sucesivamente a los terminales AB y determinar las potencias a ellas suministradas.

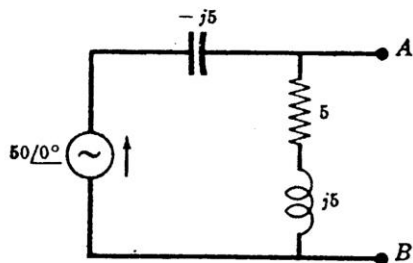


Fig. 11-6

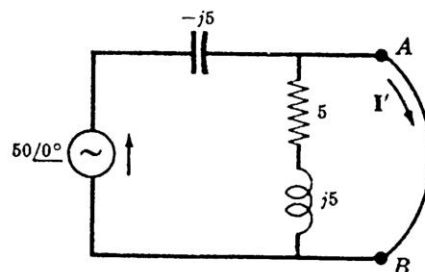


Fig. 11-7

En la Fig. 11-7, cuando se cortocircuita AB , $I' = 50 \angle 0^\circ / (-j5) = 10 \angle 90^\circ$. Al hacer la fuente igual a cero,

$$Z' = \frac{-j5(5 + j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5.$$

El circuito equivalente de Norton es el de la Fig. 11-8(a). Obsérvese que la corriente va hacia el terminal A .

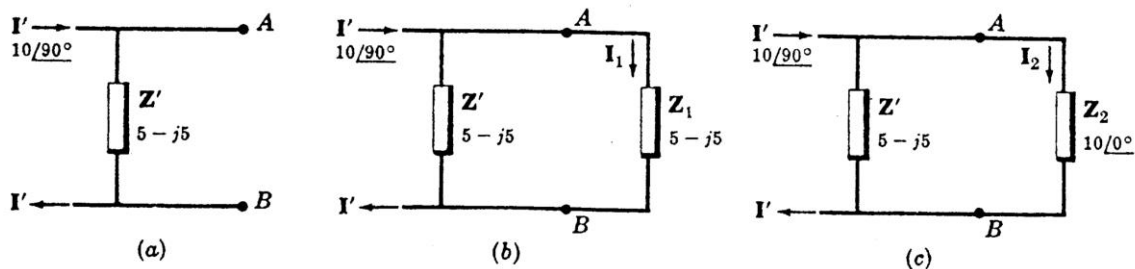


Fig. 11-8

Si se conecta la impedancia Z_1 a los terminales del circuito equivalente de Norton, se tiene la Fig. 11-8(b).

La corriente que pasa por Z_1 es $I_1 = I' \left(\frac{Z'}{Z' + Z_1} \right) = 10 \angle 90^\circ \left(\frac{5 - j5}{10 - j10} \right) = 5 \angle 90^\circ$. La potencia suministrada a Z_1 vale $P_1 = 5(I_1)^2 = 125$ W.

Con la impedancia Z_2 unida a los terminales AB se tiene [Fig. 11-8(c)]

$$I_2 = I'(5 - j5)/(15 - j5) = 4,47 \angle 63,43^\circ \quad \text{y} \quad P_2 = 10(I_2)^2 = 200 \text{ W}$$

6.10.5. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE SUPERPOSICIÓN

Aplicar el teorema de superposición al circuito de la Fig. 12-17 y obtener la intensidad por la impedancia de $3 + j4$ ohmios.

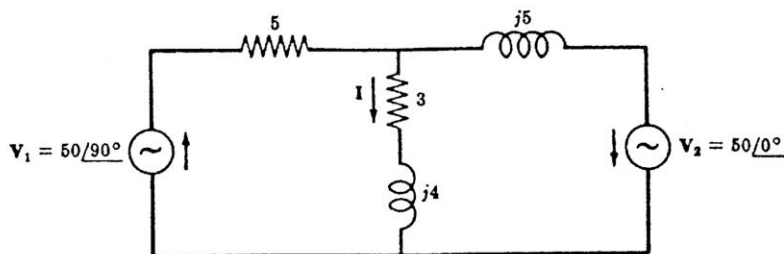


Fig. 12-17

Sea $V_2 = 0$ y V_1 la única fuente que hay en el circuito. Entonces,

$$Z_{T_1} = 5 + \frac{(3 + j4)j5}{3 + j9} = 5,83 + j2,5 = 6,35/23,2^\circ$$

$$I_{T_1} = \frac{V_1}{Z_{T_1}} = \frac{50/90^\circ}{6,35/23,2^\circ} = 7,87/66,8^\circ$$

La corriente en la rama de $3 + j4 \Omega$ debida a V_1 solamente es

$$I_1 = I_{T_1} \left(\frac{j5}{3 + j9} \right) = 7,87/66,8^\circ \left(\frac{j5}{3 + j9} \right) = 4,15/85,3^\circ$$

Haciendo ahora $V_1 = 0$ y dejando como única fuente a V_2 ,

$$Z_{T_2} = j5 + \frac{5(3 + j4)}{8 + j4} = 2,5 + j6,25 = 6,74/68,2^\circ$$

$$I_{T_2} = \frac{V_2}{Z_{T_2}} = \frac{50/0^\circ}{6,74/68,2^\circ} = 7,42/-68,2^\circ$$

La corriente en la rama de $3 + j4 \Omega$ debida solamente a V_2 es

$$I_2 = -(7,42/-68,2^\circ) \left(\frac{5}{8 + j4} \right) = 4,15/85,3^\circ$$

en la que el signo menos da a I_2 el mismo sentido que la corriente I del diagrama.

La corriente total en la rama de $3 + j4 \Omega$ es

$$I = I_1 + I_2 = 4,15/85,3^\circ + 4,15/85,3^\circ = 8,30/85,3^\circ$$

6.10.6. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE MAXIMA TRANSFERENCIA DE POTENCIA

6.10.6.1. Ejemplo 1:

En el circuito de la Fig. 12-26 la carga Z está formada por una resistencia pura R_L . Hallar el valor de R_L para el cual la fuente suministra la potencia máxima a la carga. Calcular la potencia máxima P

La transferencia máxima de potencia tiene lugar cuando

$$R_L = |Z_g| = |10 + j20| = 22,4 \, \Omega$$

Ahora bien, $I = V/(Z_g + R) = (50\angle 0^\circ)/(10 + j20 + 22,4) = 1,31\angle -31,7^\circ$ y la potencia máxima suministrada a la carga es $P = R_L I^2 = (1,31)^2 22,4 = 38,5 \, \text{W}$.

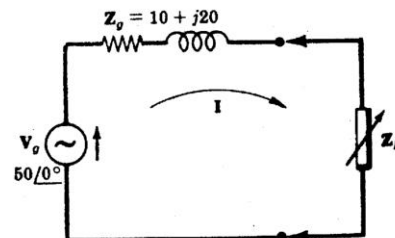


Fig. 12-26

6.10.6.2. Ejemplo 2:

Si la carga en el circuito de la Fig. 12-26 es una impedancia compleja Z_L , que es variable en R_L y X_L , determinar el valor de Z_L que da lugar a la máxima transferencia de potencia. Calcular valor de la potencia máxima.

La máxima transferencia tiene lugar cuando $Z_L = Z_g^*$. Como $Z_g = 10 + j20$, resulta $Z_L = 10 - j20$

La impedancia total del circuito es $Z_T = (10 + j20) + (10 - j20) = 20$. Por tanto, $I = V/Z_T = (50\angle 0^\circ)/20 = 2,5\angle 0^\circ$ y $P = R_L I^2 = 10(2,5)^2 = 62,5 \, \text{W}$.

6.10.6.3. Ejemplo 3:

En el circuito de la Fig. 12-27 la carga conectada entre los terminales AB está formada por una resistencia variable R_L y una reactancia capacitiva X_C que varía entre 2 y 8 ohmios. Determinar los valores de R_L y X_C que dan lugar a la transferencia de la potencia máxima. Calcular la potencia máxima suministrada a la carga.

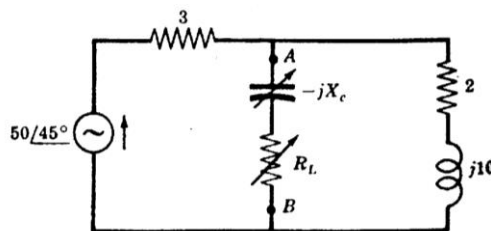


Fig. 12-27

La tensión equivalente de Thevenin, en los terminales AB , es $V' = \frac{50\angle 45^\circ}{5 + j10} (2 + j10) = 45,6\angle 60,3^\circ$

La impedancia del circuito activo conectado a los terminales AB es $Z' = 3(2 + j10)/(5 + j10) = 2,64 + j0,72$

En el circuito dado, la transferencia de potencia máxima se produce con una impedancia $Z_L = Z'^* = 2,64 - j0,72$. En las condiciones del problema, X_C es ajustable entre 2 y 8 Ω . En consecuencia, el valor más próximo de X_C es 2 Ω y

$$R_L = |Z_g - jX_C| = |2,64 + j0,72 - j2| = |2,64 - j1,28| = 2,93 \, \Omega$$

Ahora bien, $Z_T = Z' + Z_L = (2,64 + 2,93) + j(0,72 - 2) = 5,57 - j1,28 = 5,70\angle -13^\circ$, con lo cual

$$I = \frac{V'}{Z_T} = \frac{45,6\angle 60,3^\circ}{5,70\angle -13^\circ} = 8,0\angle 73,3^\circ \quad \text{y} \quad P = R_L I^2 = 2,93(8,0)^2 = 187,5 \, \text{W}$$