PROCESO DE GESTIÓN DE FORMACIÓN PROFESIONAL INTEGRAL

ANEXO COMPONENTE FORMATIVO

MODELOS DE PROBABILIDAD DISCRETOS

MODELOS DE PROBABILIDAD DISCRETOS

❖ 1.1 Distribución binomial

1.1.1 Definición. Ejemplos

- Sea un experimento aleatorio en el que sólo puedan darse dos posibilidades: que ocurra un determinado suceso A, que llamaremos éxito, o que no ocurra dicho suceso, o sea que ocurra su complementario, que llamaremos fracaso, $\overline{\mathbf{A}}$.

- Se conoce la probabilidad de ocurrencia del suceso A, y por lo tanto la de su complementario:

$$P(A) = p\,; \quad P\left(\overline{A}\right) = 1 - p = q$$

- Se repite el experimento n veces en las mismas condiciones (independencia). Se define la variable aleatoria Binomial :
- X: "nº de veces que ocurre el suceso A (nº éxitos) en n realizaciones independientes del experimento"

✓ Por lo tanto, X: 0, 1, 2 , 3, ……n

$$\boxed{X \rightarrow B(n;\, p)}$$

❖ Función de probabilidad

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} p^r q^{n-r}$$

$$r : 0, 1, 2, \ldots, n$$

- Puede comprobarse que se verifica:

$$\sum_{r=0}^{n} P(X = r) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = 1$$

♦ Ejemplos

- Nº de caras al lanzar 20 veces una moneda
- Nº de aprobados si se presentan 80 alumnos a un examen
- Nº de familias con un solo hijo en una población de 120 familias
- Nº de reacciones negativas ante un fármaco administrado a 40 pacientes
- Nº de accidentes de tráfico si han circulado 1200 automóviles
- Nº de semillas que germinan de las 20 semillas que se han plantado en suelos de idéntica composición

1.1.2 La media y la varianza

❖ Media

$$\mu = E[X] = \sum_{r=0}^{n} rP(X = r) = np$$

❖ Varianza

$$Var[X] = \sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} (r - \mu)^2 P(X = r) = npq$$

♦ Ejemplo

Diez individuos, cada uno de ellos propenso a la tuberculosis, entran en contacto con un portador de la enfermedad. La probabilidad de que la enfermedad se contagie del portador a un sujeto cualquiera es de 0.1. ¿Cuántos se espera que contraigan la enfermedad?

Solución:

$$X \rightarrow B(10; 0.1) \Rightarrow E(X) = 10 \times 0.1 = 1$$

1.1.3 Uso de tablas

♦ Ejemplo

La probabilidad de que cierto antibiótico presente una reacción negativa al administrarse a un ave rapaz en recuperación es de 0.15. Si se les ha administrado dicho antibiótico a 10 aves, calcúlense las probabilidades de que haya reacción negativa:

a. En dos aves
b. En ningún ave
c. En menos de 4 aves
d. En más de 3 aves
e. Entre 2 y 5 aves

Solución:

$Suceso\ A\ :\ "A\ un\ ave\ se\ le\ presenta\ reacción\ negativa"$

$X\ :"n^{o}\ de\ aves\ a\ las\ que\ se\ les\ presenta\ tal\ reacción"$

$P(A) = 0.15\ ;\quad n = 10\ ;\quad X \rightarrow B(10\ ;\ 0.15)$

$a.\quad P(X = 2) = 0.2759$

$b.\quad P(X = 0) = 0.1969$

$$c.\quad P(X<4)=P(X\le 3)=P(X=0)+P(X=1)+$$
$$+P(X=2)+P(X=3)=0.1969+0.3474+$$
$$+0.2759+0.1298=0.95$$

$$d.\quad P(X>3)=1-P(X\le 3)=1-\big(P(X=0)+P(X=1)+$$
$$+P(X=2)+P(X=3)\big)=1-\big(0.1969+0.3474+0.2759+$$
$$+0.1298\big)=0.05$$

$$e.\quad P(2\le X\le 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+$$
$$+P(X=5)=0.2759+0.1298+0.0401+0.0085=$$
$$=0.4543$$

✧ Un hombre y una mujer, cada uno con un gen recesivo (Azul) y uno dominante (Marrón) para el color de los ojos, son padres de tres hijos. ¿Cuál es la distribución de probabilidades para X, número de hijos con ojos azules?

E = {(AA), (AM), (MA), (MM)}

A = "Ojos Azules"; P (A) = p =1/4; n = 3

X = {Nº de hijos con ojos azules de 3 hijos}

$$X \rightarrow B(n;\, p) = B(3;\, 0.25)$$

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r q^{n-r} = \binom{3}{r}\left(\frac{1}{4}\right)^r \left(\frac{3}{4}\right)^{n-r};\quad r = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X = 0) = \binom{3}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0 \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 0.4219$$

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^1 \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0.4219$$

$$P(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{\ }\right)^1 = 0.1406$$

$$P(X = 3) = \binom{3}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0.0156$$

1.1.4 Aditividad

- Sean *k* variables aleatorias, $X_1, X_2, \ldots, X_K$, que verifican:
  - Independientes entre sí
  - $X_i \rightarrow B(n_i ; p), i = 1, 2, \ldots k$
- Definimos la variable aleatoria X como:

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_k$$

$$\Updownarrow$$

✓ En estas condiciones se verifica que la variable aleatoria X sigue una distribución Binomial:

$$\boxed{X \rightarrow B(n_1 + \ldots + n_k ;\ p)}$$

❖ 1.2. Distribución de Poisson

1.2.1 Definición. Ejemplos

➢ Se define la variable aleatoria X como el número de sucesos que ocurren en un intervalo continuo de tiempo, longitud o espacio, de un tamaño determinado.

➢ Sea λ el número medio de sucesos que ocurren en estos intervalos.

➢ La variable aleatoria así definida sigue una distribución de Poisson de parámetro λ

$$\boxed{X \rightarrow P(\lambda)}$$

♦ Ejemplos

❑ Nº de leucocitos en una gota de sangre

❑ Nº de veces que una planta de energía nuclear emite gases radiactivos en un periodo de tres meses

❖ Función de probabilidad

$$P(X = r) = \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} \quad ; \quad r = 0,1,2,3,\ldots; \quad \lambda > 0$$

- Puede comprobarse que se verifica:

$$\sum_{r=o}^{\infty} P(X = r) = \sum_{r=o}^{\infty} \frac{\lambda^r}{r!} e^{-\lambda} = 1$$

1.2.2 La media y la varianza

❖ La media

$$\mu = E[X] = \lambda$$

❖ Varianza

$$Var[X] = \sigma^2 = \lambda$$

♦ Ejemplos

- Número de bacterias nocivas por cada cm^3 de agua.

- Número de partículas radiactivas emitidas cada hora por una cierta sustancia.

- La probabilidad de reacción negativa ante un fármaco de un individuo es 0.05. Si hay 100 individuos, X: "nº individuos con reacción negativa"

- La probabilidad de que un individuo tenga un accidente es 0.01. Si hay 3500 individuos, X: "nº de accidentados"

- Se estima que sólo uno de cada 50 loros capturados en la cuenca del Amazonas, para su utilización como animales domésticos, sobrevive al cambio. Se capturan 700 pájaros en un día, X: "nº de loros que sobreviven"

1.2.3 Uso de tablas

✧En una gasolinera la llegada de vehículos sigue la distribución de Poisson de parámetro 1.6. Calcúlese la probabilidad de que:

a. El nº de vehículos que lleguen sea superior a tres
b. Esté comprendido entre dos y cinco
c. Llegue algún vehículo

$a.\quad P(X>3)=1-P(X\leq 3)=1-P(X=0)-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)=0.0789$

b. $P(2\leq X\leq 5)=P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=0.4689$

c. $P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)=0.7981$

1.2.4 Aditividad

- Sean *k* variables aleatorias, $X_1, X_2,...,X_K$, que verifican:
  - Independientes entre sí
  - $X_i \longrightarrow \mathbf{P}(\lambda_i)$, i = 1, 2,…k
- Definimos la variable aleatoria *X* como:

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_k$$

$$\Updownarrow$$

✓ En estas condiciones se verifica que la variable aleatoria X sigue una distribución de Poisson:

$$\boxed{X \rightarrow P(\lambda = \lambda_1 + ... + \lambda_k)}$$

1.2.5 Aproximación de una Binomial a una Poisson

- Sea X una v.a. con distribución Binomial

$$\boxed{X \to B(n; p)}$$

- Si se verifica que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n > 30 \ y \ p < 0.1} \\ \quad \text{o bien} \\ \mathbf{n\,p \leq 5} \end{array} \right. \Longrightarrow$$

✓ La distribución binomial se aproxima a una distribución de Poisson de parámetro λ= np

$$\boxed{X \to P(\lambda = np)}$$

♦ Ejemplo

La probabilidad de que al administrársele un antibiótico a un ave rapaz en recuperación se le presente una reacción negativa es 0.05. Si se le va a administrar el antibiótico a 80 de estas aves, calcúlese la probabilidad de que:

1. No haya reacción negativa en ningún ave
2. Al menos haya reacción negativa en dos de ellas
3. Como mucho la haya en 5

Solución:

$Suceso\ A$: "*A un ave se le presenta reacción negativa*"

X :"n^o *de aves a las que se les presenta tal reacción*"

$$P(A) = 0.05; \quad n = 80; \quad X \to B\ (80\ ;\ 0.05)$$

$$\mathbf{n > 30 \text{ y } p < 0.1}$$

$$\Rightarrow X \to P\ (\lambda = np) = P\ (\lambda = 80 \times 0.05) = P\ (\lambda = 4)$$

1. $P(X = 0) = 0.0183$

2. $P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$
$= 0.9084$

3. $P(X \leq 5) = P(X = 0) + ... + P(X = 5) = 0.7851$