Tank in Cascata

Aleandro Alushi, Emanuele Canfarini, Luciano Gargiulo

January 1, 2026

Il progetto riguarda il controllo del livello dall'acqua raggiunto da due serbatoi in cascata. La dinamica del sistema e descritta dalle seguenti equazioni differenziali:

$$\dot{a_1} = -k_1\sqrt{a_1} + k_4 V(t). \tag{1a}$$
$$\dot{a_2} = k_2\sqrt{a_1} - k_3\sqrt{a_2} \tag{1b}$$

1 Espressione del sistema in forma di stato e calcolo del sistema linearizzato intorno ad una coppia di equilibrio

Innanzitutto, esprimiamo il sistema (1) nella seguente forma di stato

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{2a}$$
$$y = h(x, u). \tag{2b}$$

Pertanto, andiamo individuare lo stato x, l'ingresso u e l'uscita y del sistema come segue

$$x := \dots, \quad u := \dots, \quad y := \dots.$$

Coerentemente con questa scelta, ricaviamo dal sistema (1) la seguente espressione per le funzioni f ed h

$$f(x, u) := \dots$$
$$h(x, u) := \dots.$$

Una volta calcolate f ed h esprimiamo (1) nella seguente forma di stato

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_1\sqrt{a_1} + k_4 V(t). \\ k_2\sqrt{a_1} - k_3\sqrt{a_2} \end{bmatrix} \tag{3a}$$
$$y = \dots. \tag{3b}$$

Per trovare la coppia di equilibrio (x_e, u_e) di (3), ci manca l'ingresso di equilibrio, che andiamo a calcolare tramite la sequente equazione

$$u_e = (\frac{k_1}{k_2})\sqrt{x_{e,1}} \tag{4}$$

dal quale otteniamo

$$x_e := \begin{bmatrix} 9.45 \\ 4.20 \end{bmatrix}, \quad u_e = 0. \tag{5}$$

Definiamo le variabili alle variazioni δx, δu e δy come

$$\begin{aligned}\delta x &= x(t) - x_e,\\ \delta u &= u(t) - u_e,\\ \delta y &= y(t) - y_e\end{aligned}$$

L'evoluzione del sistema espressa nelle variabili alle variazioni può essere approssimativamente descritta mediante il seguente sistema lineare

$$\delta \dot{x} = A\delta x + B\delta u \tag{6a}$$
$$\delta y = C\delta x + D\delta u, \tag{6b}$$

dove le matrici A, B, C e D vengono calcolate come

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a1,2 \\ a_{2,1} & a2,2 \end{bmatrix} \tag{7a}$$
$$B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b1,2 \\ b_{2,1} & b2,2 \end{bmatrix} \tag{7b}$$
$$C = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c1,2 \\ c_{2,1} & c2,2 \end{bmatrix} \tag{7c}$$
$$D = 0 \tag{7d}$$