Cálculo Numérico

Métodos numéricos y errores

Victorio E. Sonzogni

CIMEC Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería

INTEC, CONICET-UNL, FICH, Santa Fe, Argentina

Errores numéricos

- provienen de la diferencia entre los valores calculados y los valores reales
- *error* no significa aquí *equivocación*
- en todos los cálculos con computadoras y en todos los métodos numéricos es necesario manejar el tema de *errores*

Fuentes de errores

en aproximaciones en ingeniería

- Errores en la formulación del problema matemático
- Errores en la aproximación de la geometría
- Errores en los datos físicos
- Errores del método numérico de aproximación
- Errores en la resolución del sistema de ecuaciones
- Errores de redondeo (truncamiento)

Aritmética de las computadoras

- Normalmente usamos una base **decimal** para escribir los números.
  Ej:

$$1563 = 1 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

- Un número *natural* se puede representar:

$$N = a_k \times 10^k + a_{k-1} \times 10^{k-1} + \ldots a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$$

con $a_i \in \{0, 1, 2, \ldots 9\}$ y se escribe:

$$N = a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 = (a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0)_{(10)}$$

Aritmética de las computadoras

- Un número *real* se puede representar:

$$X = s\ a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 . b_1 b_2 \ldots_{(10)}$$

$$X = s\ \left(\sum_{i=0}^{k} a_i 10^i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i 10^{-i} \right)_{(10)}$$

donde $s = \begin{cases} + \\ - \end{cases}$

- Def:
Dígitos significativos: cantidad de dígitos a_i y b_i. (Empezando por el primero no nulo)

Aritmética de las computadoras

- Def:
Representación normalizada:

$$X = s\ (0.a_1 a_2 \ldots)_{(10)} \times 10^m$$

donde

$$X = \underbrace{s}_{signo}\ \underbrace{(0.a_1 a_2 \ldots)_{(10)}}_{mantisa} \times \underbrace{10}_{base} \underbrace{{}^{m}}_{exp}$$

Ej:

$$1563 = 0.1563 \times 10^4$$

$$2100000 = 0.21 \times 10^7$$

$$0.00017 = 0.17 \times 10{-}3$$

La mantisa es ≥ 0.1 y < 1

Aritmética de las computadoras

- Base binaria

$$1563 = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 0 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5$$
$$+1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

Los a_i son ahora 0 o 1. La base es 2.

$$1563 = 1024 + 512 + 16 + 8 + 2 + 1$$

Como se hizo en base decimal, en base binaria se puede representar:

$$1563_{(10)} = 11000011011_{(2)}$$

Aritmética de las computadoras

- Representación binaria normalizada
  Ventajas:
  - un número $\rightarrow$ string de bits (no preciso el punto)
  - el dígito a_1 no preciso guardarlo (es siempre 1)
- Se denomina *floating point*
- Se destina una cant. de bits para la mantisa (que determina la precisión); y otra cantidad para el exponente (que determina el rango que puede representar)

Aritmética de las computadoras

Representación estándar IEEE

- Precisión simple (32 bits)
  - 1 bit para el signo; 8 bits p/exponente; y 23 p/ mantisa
  - El rango que puede representar va de 2^{-126} a 2^{128} o sea 2×10^{-39} a 1.7×10^{38}. Por debajo o encima da *underflow* o *overflow*.
  - El error es $2^{-24} \simeq 6 \times 10^{-8}$
- Precisión doble (64 bits)
  - 1 bit para el signo; 11 bits p/exponente; y 52 p/ mantisa
  - El rango que puede representar va de 2^{-1022} a 2^{1023} o sea 10^{-308} a 10^{308} aprox.
  - El error es $2^{-53} \simeq 10^{-16}$

Errores de redondeo

- Representación binaria normalizada

$$x = s\ (0.a_1 a_2 \dots a_k a_{k+1} \dots)_{(2)} \times 2^m \ = \ \pm q \times 2^m$$

  donde la mantisa q está entre $\frac{1}{2} \leq q < 1$

- El *número de máquina* más cercano, por defecto:

$$x' = s\ (0.a_1 a_2 \dots a_k)_{(2)} \times 2^m$$

  se retienen $k-1$ bits ($a_1 = 1$) y descarta el resto
  Se obtiene un número por defecto. $\rightarrow$ *truncamiento* o *poda* o *cancelación*

- El número por exceso:

$$x'' = s\ \left((0.a_1 a_2 \dots a_k)_{(2)} + 2^{-k}\right) \times 2^m$$

Errores de redondeo

- El número de máquina más próximo a x lo llamamos $fl(x)$
- En el *redondeo*
  - si el bit $a_{k+1} = 0 \rightarrow fl(x) = x'$
  - si el bit $a_{k+1} = 1 \rightarrow fl(x) = x''$
- El error al usar $fl(x)$ en vez de x se llama *error de redondeo* (ya sea que esté podado o redondeado).
- Error absoluto

$$|x - fl(x)|$$

- Error relativo

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|}$$

siempre que $|x| \neq 0$

Errores de redondeo

Epsilon de máquina ϵ

- La diferencia entre las representaciones por exceso y por defecto:

$$x'' - x' = 2^{m-k}$$

- La representación en punto flotante es de ellas la más cercana a x, de donde, el error absoluto:

$$|x - fl(x)| \leq \frac{1}{2}(x'' - x') = \frac{1}{2}2^{m-k} = 2^{m-k-1}$$

- Error relativo

$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \frac{2^{m-k-1}}{q\ 2^m} = \frac{2^{-k-1}}{q} \leq \frac{2^{-k-1}}{\frac{1}{2}} = 2^{-k}$$

donde q es la mantisa cuyo valor esta entre $\frac{1}{2}$ y 1.
(recordar que $(0.1)_2 = (0.5)_{10}$)

Errores de redondeo

- Puede ponerse:
$$fl(x) = x(1+\delta)$$
con $|\delta| \leq \epsilon$
- Donde $\epsilon = 2^{-k}$
- El ϵ de máquina varía según la computadora.
- Para computadoras con palabras de 32 bits
  - simple precisión: $\epsilon \simeq 10^{-7}$
  - doble precisión: $\epsilon \simeq 10^{-15}$
- Para computadoras con palabras de 64 bits
  - simple precisión: $\epsilon \simeq 10^{-14}$
  - doble precisión: $\epsilon \simeq 10^{-28}$
- Luego
$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq \epsilon$$

Errores de redondeo

- Cifras significativas
Se dice que x^* aproxima a x con t cifras (o dígitos) significativas, si t es el entero, no negativo, más grande para el cual
$$\frac{|x - fl(x)|}{|x|} \leq 0.5 \times 10^{-t}$$

Ejemplos:

- Sea la aproximación para $\pi = 3.141592$. El número 3.1416 aproxima al anterior con 5 cifras significativas, ya que $\frac{|x-fl(x)|}{|x|} \simeq 2.5 \times 10^{-6} \leq 0.5 \times 10^{-5}$
- Una medición con error relativo $1‰$ contiene 2 cifras significativas, ya que $0.001 \leq 0.5 \times 10^{-2}$

Propagación de errores

- Los errores de redondeo, por la aritmética de la máquina, se pueden propagar con las operaciones, acumulándose.

Propagación de errores

En operación suma o resta

- Sea la suma de dos número x e y, cuyas representaciones en punto flotante son $fl(x)$ y $fl(y)$, y los errores de redondeo η_x y η_y:

$$x = fl(x) + \eta_x$$

$$y = fl(y) + \eta_y$$

- El error absoluto de la suma:

$$|(x + y) - (fl(x) + fl(y))| = |\eta_x| + |\eta_y|$$

- El error absoluto de la suma (o resta), es la suma de los errores absolutos de cada sumando.

Propagación de errores

En operación producto

- Sea el producto de dos número x e y, cuyas representaciones en punto flotante son $fl(x)$ y $fl(y)$, y los errores de redondeo η_x y η_y:
- El error absoluto del producto:

$$|(xy) - (fl(x)fl(y))| = |(xy) - (x - \eta_x)(y - \eta_y)| = |x\eta_y + y\eta_x - \eta_x\eta_y|$$

- El error relativo (despreciando el término de orden superior):

$$\frac{|(xy) - (fl(x)fl(y))|}{|xy|} = \frac{\eta_x}{x} + \frac{\eta_y}{y}$$

- El error relativo del producto, es la suma de los errores relativos de cada factor.

Sustracción de números próximos

- Sean x e y números próximos:

$$fl(x) = (0.a_1a_2\ldots a_pa_{p+1}\ldots a_k)10^n$$

$$fl(y) = (0.a_1a_2\ldots a_pb_{p+1}\ldots b_k)10^n$$

- Restando:

$$fl(x) - fl(y) = (0.00\ldots 0c_{p+1}\ldots c_k)10^n$$

$$fl(x) - fl(y) = (0.c_{p+1}\ldots c_k)10^{n-p}$$

donde se designa $c_{p+1} = a_{p+1} - b_{p+1}$, etc.

- El resultado tiene a lo sumo $k - p$ cifras significativas.

Sustracción de números próximos

Ejemplo:

$$x = 0.3721478693$$

$$y = 0.3720230572$$

$$x - y = 0.0001248121$$

En una computadora de 5 dígitos:

$$fl(x) = 0.37215$$

$$fl(y) = 0.37202$$

$$fl(x - y) = 0.00013$$

El error relativo es grande ($\simeq 4\,\%$)
El resultado se expresa 0.13000×10^{-3}, pero los tres últimos dígitos (ceros) carecen de valor.

Evaluación de funciones

- Sea evaluar

$$f(x) = x^3 \; - \; 6.1\, x^2 \; + \; 3.2\, x \; + \; 1.5$$

  en $x = 4.71$ usando aritmética de 3 dígitos
- El valor exacto:

$$f(4.71) = 104.487111 \; - \; 135.32301 \; + \; 15.072 \; + \; 1.5 \; = \; -14.263899$$

- El valor con tres dígitos (truncado):

$$f(4.71) = 104. \; - \; 135. \; + \; 15.0 \; + \; 1.5 \; = \; -13.5$$

- El error relativo:

$$\left| \frac{-14.263899 + 13.5}{-14.263899} \right| \simeq 0.05$$

Evaluación de funciones

- La misma función puede reescribirse en forma anidada:

$$f(x) = x^3 \; - \; 6.1\,x^2 \; + \; 3.2\,x \; + \; 1.5 \; = \; ((x - 6.1)\,x \; + \; 3.2)\,x \; + \; 1.5$$

- Evaluando esta expresión con tres dígitos (truncado):

$$f(4.71) = \; ((4.71 - 6.1)\,4.71 \; + \; 3.2)\,4.71 \; + \; 1.5 = \; -14.2$$

- El error relativo:

$$\left| \frac{-14.263899 + 14.2}{-14.263899} \right| \simeq 0.0045$$

diez veces menor que en el caso anterior.

Evaluación de funciones

- las funciones deberían escribirse siempre en forma anidada antes de evaluarlas numéricamente
- en este caso hemos visto como se ha disminuido el error de truncamiento
- tambien disminuye la cantidad de operaciones: en el primer caso se precisan 4 multiplicaciones y 3 adiciones; en el segundo 2 multiplicaciones y tres adiciones.

Problema matématico

- Un problema matemático puede escribirse:

  hallar x *tal que*
  $$F(x, d) = 0 \qquad (1)$$
  donde
  - F : relación funcional entre x y d;
  - x : incógnita (escalar, vector, funciones, etc.)
  - d : datos (escalar, vector, funciones, etc.)

Problema matématico

Ejemplos:

hallar el vector $\mathbf{x}$ *tal que*
$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 24 \\ 30 \\ -24 \end{bmatrix}$$

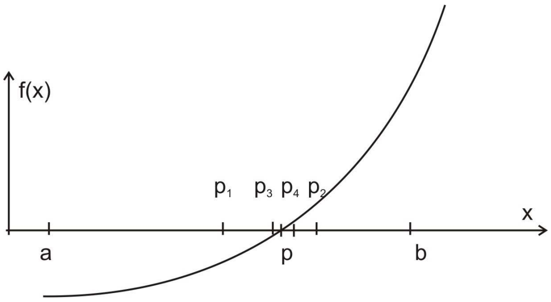
Este es un problema de resolver un sistema de ecuaciones algebraicas lineales.
Será tratado en otro capítulo.

Problema matématico

Ejemplos:

hallar x *tal que*

$$f(x) = 0$$



Este es un problema de hallar el cero o raiz de una función.
Será tratado en otro capítulo.

Problemas bien planteados

- El problema (1) se dice **bien planteado** si
  - *tiene* una solución
  - la solución es *única*
  - la solución *depende con continuidad de los datos*.
- Si no, el problema se dice que es **mal planteado**

Problema mal planteado

Ejemplo:

- El problema de hallar la raiz de

$$p(x) \;=\; x^4 - x^2(2a-1) + a(a-1)$$

es mal planteado.

- En efecto:
  - Si $a \geq 1$ tiene 4 raices reales
  - Si $a \in [0,1)$ tiene 2 raices reales
  - Si $a < 0$ no tiene raices reales
- La solución varía en forma discontinua con el dato a.

Condicionamiento

- Si con δd se indica una variación en los datos de entrada, y con δx la variación acorde de la solución, se puede definir un *numero de condición*:

$$\kappa \;=\; \sup_{\delta d} \frac{\|\delta x\|/\|x\|}{\|\delta d\|/\|d\|}$$

donde $\|.\|$ es una *norma* (medida escalar).

- Si $\kappa >> 1$ el problema está *mal condicionado*.
- Si $\kappa \sim 1$ el problema está *bien condicionado*.
- Ejemplo:

  Para el problema de resolver un sistema de ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se puede definir un número de condición para la matriz: $\kappa = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\|$

Condicionamiento

Ejemplo:
Se desa hallar un polinomio cúbico $y = c_1\, x^3 + c_2\, x^2 + c_3\, x + c_4$ que pase por los 4 puntos: (2,8), (3,27), (4,64). (5,125). (evidentemente este polinomio es $y = x^3$).
La técnica para hallarlo se vera más adelante, pero conduce a resolver el SEAL:

$$\begin{bmatrix} 20514 & 4424 & 978 & 224 \\ 4424 & 978 & 224 & 54 \\ 978 & 224 & 54 & 14 \\ 224 & 54 & 14 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20514 \\ 4424 \\ 978 \\ 224 \end{bmatrix}$$

cuya solución exacta es $[1\ \ 0\ \ 0\ \ 0]$. Una computadora con 9 cifras da:
$[1.000004\ \ -0.000038\ \ 0.000126\ \ -0.000131]$ cercano a la solución.
Pero si el numero a_{11} de la matriz, en lugar de ser 20514 fuese 20515, la misma computadora da: $[0.642857\ \ 3.75000\ \ -12.3928\ \ 12.7500]$
El resultado es muy sensible a los datos, y no es confiable.
Esto se dió porque el número de condición es muy alto. El número de condición de la matriz en este caso es $\kappa = 3.1875e+07$

Solución numérica

- Sea el problema (1) bien planteado. Hay métodos numéricos que se basan en construir una secuencia de problemas aproximados:

$$F_n(x_n, d_n) = 0 \qquad n \geq 1 \qquad (2)$$

con la expectativa que $x_n \to x^*$ para $n \to \infty$, donde x^* es la solución exacta de (1).

- Para que se dé esto debe ser $d_n \to d$ y $F_n \to F$ cuando $n \to \infty$.

Solución numérica

Ejemplo:
El metodo de Newton-Raphson para hallar cero de una función, resuelve una sucesión de problemas aproximados del tipo:

$$f_n(x_n) \;=\; x_n - x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \;=\; 0$$

Consistencia

- Si $F_n(x^*, d) \to F(x^*, d)$ para $n \to \infty$, el problema aproximado (2) se dice **consistente**.

Solución numérica

Estabilidad

- Un método numérico se dice que es **estable**, si para cada iteración n existe una solución unica x_n para los datos d_n; y si esa solución depende continuamente de los datos.
  Es decir que para pequeños cambios δd_n en los datos se porducen pequeños cambios en los resultados δx_n
- Este es un concepto análogo al de problema *bien planteado*
- Puede evaluarse un *número de condición* para el método numérico
- Los conceptos de *bien planteado*, *bien condicionado*, y *estable*, se usan como sinónimos.

Solución numérica

Convergencia

- El metodo numérico (2) se dice **convergente** si

  $\forall \epsilon > 0 \; \exists \; n_0(\epsilon), \; \exists \; \delta(n_0, \epsilon) \text{ tal que}$

  $\forall n > n_0(\epsilon), \; \forall \|\delta d_n\| < \delta(n_0, \epsilon) \quad \Rightarrow \|x(d) - x_n(d + \delta d_n)\| \leq \epsilon$

- Si un método numérico es *consistente* y *estable*, entonces es *convergente*

Orden de convergencia

- En procedimientos iterativos se construye una sucesión $[x_n]$ que se espera tienda a la solución x^*.
- Para referirse a la rapidez con que $[x_n]$ tiende a x^*. se habla de *tasa*, o *razón*, o *velocidad* de convergencia.
- Se dice que la convergencia es **lineal** si:

$$\exists \; c < 1 \text{ y } N \in \mathbb{Z} \;\; \text{tal que}$$

$$|x_{n+1} - x^*| \;\leq\; c \, |x_n - x^*| \qquad \text{para} \;\; n \geq N$$

- Se dice que la convergencia es **superlineal** si:

$$\exists \; [\epsilon_n] \to 0 \text{ y } N \in \mathbb{Z} \;\; \text{tal que}$$

$$|x_{n+1} - x^*| \;\leq\; \epsilon_n \, |x_n - x^*| \qquad \text{para} \;\; n \geq N$$

Orden de convergencia

- Se dice que la convergencia es **cuadrática** si:

$$\exists\, C(\text{no necesariamente} < 1) \text{ y } N \in \mathbb{Z} \;\; \text{tal que}$$

$$|x_{n+1} - x^*| \;\leq\; C\,|x_n - x^*|^2 \qquad \text{para } \; n \geq N$$

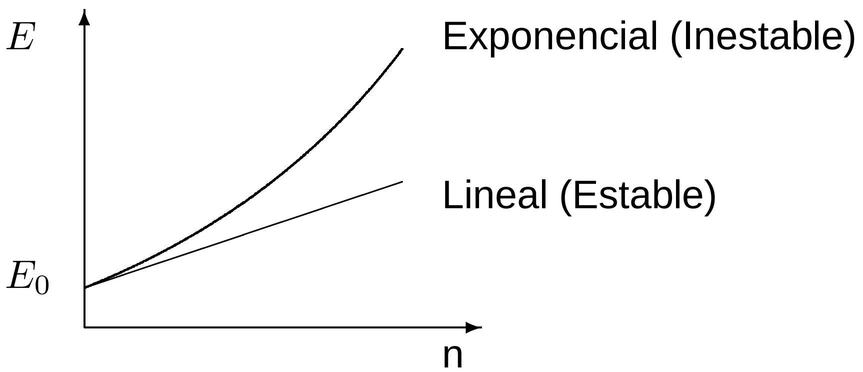
- Se dice que la convergencia es de **orden** α si:

$$\exists\, C \text{ y } \alpha \text{ constantes y } N \in \mathbb{Z} \;\; \text{tal que}$$

$$|x_{n+1} - x^*| \;\leq\; C\,|x_n - x^*|^\alpha \qquad \text{para } \; n \geq N$$

Estabilidad

- Un método numérico se dice estable si pequeños cambios en los datos de entrada producen pequeños cambios en los resultados.
- En algoritmos donde se evalúa una solución en varios instantes en el tiempo (historia), hay una acumulación de errores de cada paso. Si se introduce un error o perturbación E_0 en alguna etapa del cálculo, y se designa con E_n el error luego de n pasos (iteraciones), se dice que:
  - El error crece *linealmente* si $E_n \;=\; n\,C\,E_0$
  - El error crece *exponencialmente* si $E_n \;=\; C^n\,E_0 \;\;,\;\; C > 1$



Algoritmos

- Los métodos numéricos se describen a través de *algoritmos*
- Un algoritmo es un procedimiento que describe una serie finita de pasos, en un orden determinado, que hay que realizar para resolver un problema dado.
- El algoritmo se puede describir con un seudocódigo. Este especifica la forma de entrada de datos; de salida de resultados; y los pasos a realizar.

Algunos desastres

o inesperados resultados debido a errores numéricos

- Falla del misil Patriot
- Explosión del Ariane 5
- Hundimiento de la plataforma Sleipner A
- Elecciones parlamentarias alemanas
- Bolsa de valores de Vancouver

Falla del misil Patriot

Falla del misil Patriot

- El 25/2/1991, durante la Guerra del Golfo, un misil Patriot no pudo interceptar a un misil Scud iraquí que alcanzó su objetivo produciendo 28 muertes.
- Para seguir su objetivo, el sistema debía determinar el intervalo de tiempo, restando dos valores de tiempo medidos.
- Los tiempos, en 1/10 de segundos estaban en registros de enteros
- Para calcular el incremento de tiempo, los valores del registro (entero) eran convertidos a valores de punto flotante multiplicándolos por 0.1

Falla del misil Patriot

- Pero 0.1 en expansión binaria no es representado exáctamente con un numero finito de dígitos.

$$0.1_{(10)} = 0.0001100110011..._{(2)}$$

Hay un error de redondeo (truncamiento). Los registros tenían 24 bits. El error introducido entre la representación (en 24 bits) y el número 0.1 es 0.95E-07

- Después de 100 hs el error acumulado es:

$$0.95E\text{-}07 \times 100 \times 3600 \times 10 = 0.34seg$$

- La velocidad del misil Scud es aprox. 1676 m/s. En 0.34 seg. recorre mas de $\frac{1}{2}$ km.. Quedó fuera del alcance del Patriot.

Explosión del Ariane 5

Explosión del Ariane 5

- El 4/6/1996 el cohete Ariane 5 , de la Agencia Espacial Europea fue lanzado desde la base de Kourou. Durante 36 segundos voló normalmente. Al segundo 37 salió de su curso y se autodestruyó.

  explosion

- Era el primer viaje del Ariane 5 , luego de una década de desarrollo, a un costo de 7 mil millones de U$S. El cohete y su carga estaban valuados en 500 millones de U$S.
- El problema estuvo en un error de software en el Sistema de Referencia Inercial (SRI)

Explosión del Ariane 5

- Un número de punto flotante de 64 bits, que relacionaba la velocidad horizontal con respecto a la plataforma, fue tratado de convertir a un entero de 16 bits.
- Este número llegó a ser mayor que 32768: no entraba en 16 bits! El sistema devolvió un mensaje de error, que fue interpretado como un dato....
- La ironía es que el programa que produjo la falla había sido heredado del Ariane 4, y que no se precisaba en el Ariane 5 !

Hundimiento de la plataforma Sleipner A

- La plataforma marina para extracción de petróleo Sleipner A está apoyada en una base de hormigón consistente en 24 celdas. Cuatro celdas se prolongan hacia arriba y sotienen la plataforma. Funciona en el Mar del Norte.
- La primera plataforma Sleipner A tuvo filtraciones de agua por fisuraciones y se hundió en Noruega el 23/8/1991. La pérdida económica resultante fue del orden de $700 millones.

Hundimiento de la plataforma Sleipner A

Hundimiento de la plataforma Sleipner A

- Las investigaciones posteriores atribuyen el accidente a errores en la aproximación numérica (por el método de elementos finitos), que subestimaron las tensiones tangenciales en un 47 %.
- Eso condujo a que los espesores de las paredes de hormigón fuesen insuficientes. Lo mismo que las armaduras de refuerzo.

Elecciones parlamentarias alemanas

- En el sistema electoral alemán un partido con menos de 5 % de los votos no puede tener representantes en el parlamento.
- En las elecciones de Schleswig-Holstein, los resultados impresos mostraban que el Partido Verde consiguió el 5.0 % de los votos.
- Se dice que el Partido Social Demócrata consiguió un representante extra y obtuvo una mayoría en el Parlamento.
- Más tarde se comprobó que el porcentaje de votos del Partido Verde había sido 4.97 % : la impresión se había hecho redondeando a dos cifras significativas lo cual arrojó 5.0 %.

Bolsa de valores de Vancouver

- En 1982 la Bolsa de Valores de Vancouver (Canadá) introdujo un índice con un valor nominal de 1000.000
- Luego de cada transacción se recalculaba el índice, truncándose al tercer decimal después de la coma.
- Después de 22 meses el índice fue 524.881
- El valor real debía haber sido 1098.811

Resumen

En este capítulo hemos visto:

- Cómo se producen los *errores de redondeo*, al trabajar en máquinas de aritmética finita.

  En otros capítulos veremos otro tipo de errores: los errores de *truncamiento* o *algorítmicos*.
- Hemos visto cómo estos errores se propagan.
- Finalmente hemos definido problemas *bien y mal planteados* y los métodos numéricos para resolverlos, introduciendo los conceptos de *consistencia, estabilidad y convergencia* y los órdenes de convergencia.
- Hemos terminado mostrando algunos casos en que la no observación de estos errores (que hubiese sido muy sencillo evitar) ha derivado en importantes daños materiales y pérdida de vidas.