

Cálculo Numérico 2015

Trabajo Práctico 2

Métodos directos para sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1: Dado el sistema

$$\begin{array}{rrrrrr} x & - & y & + & \alpha z & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & \alpha z & = & 3 \\ \alpha x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

- Obtenga los valores de α para los cuales el sistema no tiene solución.
- Encuentre los valores de α para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones.
- Considerando que existe una solución única para un valor dado de α , encuentre la solución.

Ejercicio 2: Demuestre que si una matriz A es estrictamente diagonal dominante (e.d.d), es decir que sus elementos a_{ij} verifican

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

entonces resulta ser no singular. *Ayuda:* pruebe por contradicción que $Ax = 0$ implica $x = 0$.

Ejercicio 3: *i)* - Defina matriz simétrica definida positiva (s.d.p), *ii)* - Demuestre que si la matriz A es de orden n y s.d.p, entonces es no singular. *Ayuda:* pruebe por contradicción que $Ax = 0$ implica $x = 0$.

Ejercicio 4: Determine si la siguiente matriz es e.d.d y s.d.p. Justifique su respuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminación de Gauss y factorización de Doolittle: La eliminación de Gauss, en cualquiera de los ordenamientos kij , kji y jki (donde los índices k, i, j designan las posiciones de pivote, fila y columna respectivamente) permite reproducir la factorización de Doolittle $A = L_1 U$ (donde L_1 una matriz triangular inferior con unos en su diagonal y U es triangular superior). En el algoritmo, se opta por escribir los elementos de las matrices L_1 y U sobre los de la matriz del sistema original, con lo cual se pierde dicha matriz pero se ahorra memoria RAM. Cuando se realiza intercambio de filas durante la eliminación, lo que se obtiene es la factorización $L_1 U$ de la matriz PA , donde P es la matriz de permutación.

Ejercicio 5

- Para la siguiente matriz, encuentre la factorización $(P^T L_1)U$, realizando la eliminación de Gauss con intercambio de filas según lo indica la estrategia de *pivoteo parcial*. Luego verifique que se cumple que $PA = L_1 U$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

- (b) En qué casos una matriz A se puede factorizar en la forma LU ?

Ejercicio 6:

- (a) Escriba funciones de Octave que implementen los algoritmos para resolver un sistema triangular *superior* por sustitución hacia atrás y un sistema triangular *inferior* por sustitución hacia adelante.
- (b) Póngalas a prueba sobre los siguientes sistemas:

- Sustitución hacia atrás

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Sustitución hacia adelante: utilice la traspuesta de la matriz del sistema anterior y el mismo vector de términos independientes.
- (c) Realice el conteo analítico de operaciones involucradas tanto en la sustitución hacia adelante como en la sustitución hacia atrás y responda cuál es la complejidad de los algoritmos.
- (d) Modifique la función de sustitución hacia atrás de forma que permita resolver un sistema $\tilde{U}x = \tilde{b}$, donde \tilde{U} y \tilde{b} son obtenidos, correspondientemente, por permutaciones de las filas de la matriz triangular superior U y de los elementos del vector de términos independientes b . Las permutaciones son almacenadas en un vector `indx`.

Ejercicio 7:

- (a) Escriba funciones de Octave que permitan resolver el sistema lineal $Ax = b$ mediante la eliminación de Gauss siguiendo el orden *kij*. La primera de ellas *no* utilizará pivoteo mientras que la segunda aplicará pivoteo *parcial* y devolverá, además de la solución, la matriz de permutación P y las matrices de la factorización (L_1 y U).
(Nota: *deberá utilizar la función de sustitución hacia atrás implementada en el ejercicio 6(d)*).
- (b) Pruebe *ambas* funciones sobre los sistemas lineales formados por las siguientes matrices, asumiendo que el vector de términos independientes es el mismo para todos ellos ($b = [1 \ 2 \ 3]^T$). Calcule el residuo y saque conclusiones en cada caso.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5.00e-02 & 5.57e+02 & -4.00e-02 \\ 1.98e+00 & 1.94e+02 & -3.00e-03 \\ 2.74e+02 & 3.11e+00 & 7.50e-02 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8

- (a) Encuentre las factorizaciones de Doolittle, Crout y Cholesky en lápiz y papel de la siguiente matriz y verifique en todos los casos que efectivamente se recupera la matriz A .

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

- (b) Escriba una función de Octave que implemente el algoritmo correspondiente a la factorización de Crout sin pivoteo y compruebe las cuentas realizadas en el ítem (a). La función recibe la matriz A y devuelve las matrices L y U_1 .
- (c) Escriba una función de Octave que implemente el algoritmo correspondiente a la factorización de Cholesky y compruebe las cuentas realizadas en el ítem (a). La función recibe la matriz A y devuelve la matriz L (factor de Cholesky).

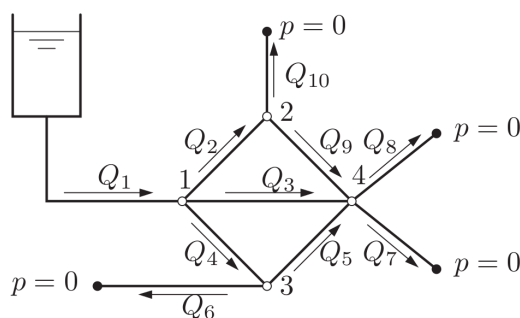


Figura 1: Circuito hidráulico ejercicio 9.

- (d) Comente las condiciones que debe presentar la matriz A para tener factorización de Cholesky. Qué tipo de condiciones son?

Ejercicio 9 (Entregar) Considere una red hidráulica como la representada en la figura 1, la cual es alimentada por un reservorio de agua que se encuentra a la presión constante $p_r = 10\text{bar}$.

Para la j -ésima cañería, es válida la siguiente relación entre el caudal volumétrico Q_j , expresado en $[\text{m}^3/\text{s}]$, y la diferencia de presión Δp_j , dada en $[\text{bar}]$, entre los extremos de la cañería

$$Q_j = kL\Delta p_j \quad (1)$$

donde k es la resistencia hidráulica en $[\text{m}^2/(\text{bar s})]$ y L es la longitud del conducto expresada en $[\text{m}]$. El agua fluye hacia los extremos abiertos de los conductos que se encuentran a la presión atmosférica (indicados con puntos negros en la figura). Se pide determinar los valores de la presión en cada uno de los nodos internos del sistema de cañerías (indicados como 1, 2, 3 y 4) si se tienen los siguientes datos del mismo

Conducto	k	L	Conducto	k	L	Conducto	k	L
1	0.01	20	5	0.005	10	9	0.005	10
2	0.005	10	6	0.002	8	10	0.002	8
3	0.005	14	7	0.002	8			
4	0.005	10	8	0.002	8			

Nota 1: tenga en cuenta que los valores de presión se refieren a la diferencia entre la presión real y la presión atmosférica.

Nota 2: tenga en cuenta que la suma algebraica de los caudales en los conductos que se encuentran en el nodo- j es cero.

Ejercicio 10 (Entregar) Realice la factorización LU de la siguiente matriz siguiendo el orden de Doolittle, con y sin pivoteo parcial (con lo cual, si P es distinta de la identidad, en realidad se tiene $PA = LU$). Luego, calcule las matrices residuales $A - LU$ y $PA - LU$ y **justifique las diferencias que ocurren**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 + 0.5e - 15 & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicios propuestos: S.6.1: 2, 3, 5, 15. S.6.2: 2, 5, 6, 7, 8. S.6.3: 1, 4, 5, 11, 12. S.6.4: 5, 7, 8, 9. S.6.5: 2, 3, 5, 7 (a y b). S.6.6: 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 17, 25.