

# Solución de Ecuaciones No Lineales de una variable

Victorio E. Sonzogni

1 / 73

- 1 Introduccion
- 2 Método de la Bisección
- 3 Iteración de Punto Fijo
- 4 Método de Newton-Raphson
- 5 Método de la Secante
- 6 Metodo de la Regula Falsi
- 7 Estrategias

2 / 73

## Sección 1

### Introduccion

3 / 73

## Ejemplos de ecuaciones no lineales

### a) Crecimiento de poblaciones

- Designaremos con  $N(t)$  número de individuos de una población (sean animales, plantas, bacterias, hombres, etc.). Ese número  $N(t)$  es función del tiempo  $t$ . La cantidad de individuos que nacen por unidad de tiempo (en un año, en una hora, etc.) es proporcional a  $N$ :

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t)$$

donde  $\lambda$  se conoce como tasa de natalidad.

- Si se tiene en cuenta, además el aporte por migraciones  $\mu$ , por unidad de tiempo, la ecuación queda:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \lambda N(t) + \mu \quad (1)$$

que es la ecuación que gobierna el crecimiento poblacional.

4 / 73

# Ejemplos de ecuaciones no lineales

- La solución exacta de esa ecuación diferencial es:

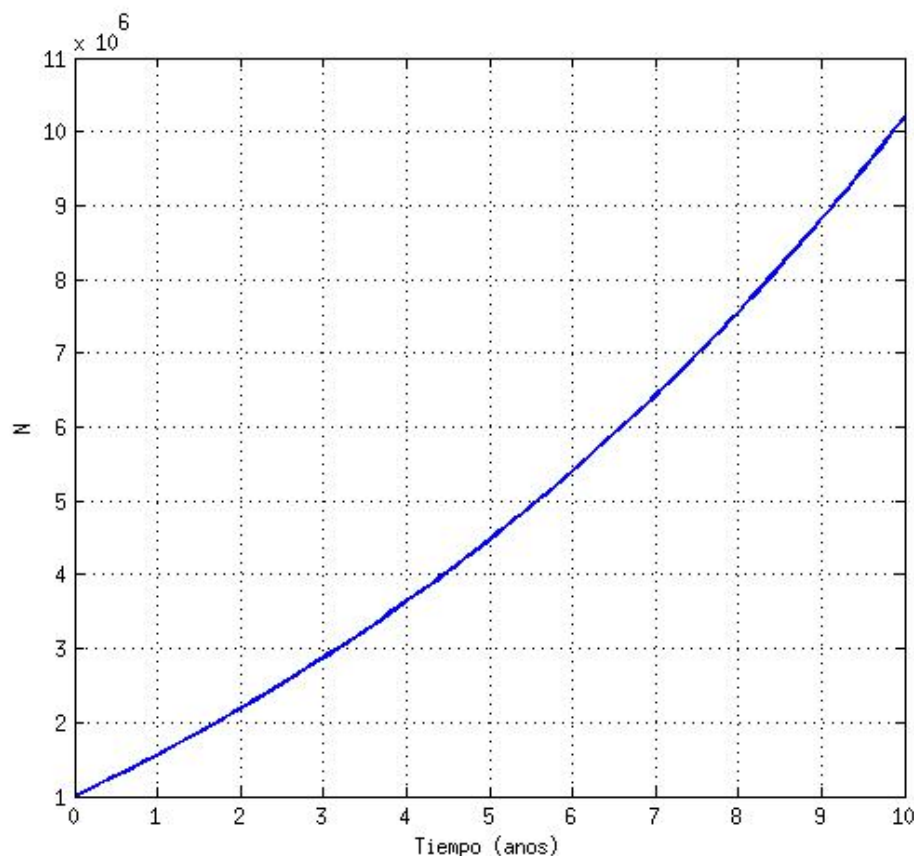
$$N(t) = N_0 e^{\lambda t} + \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t} - 1)$$

donde  $N_0$  es la población inicial (en  $t = 0$ )

- La curva de crecimiento de población para una tasa de crecimiento  $\lambda = 0,1$ , con una población inicial de un millón y un aporte migratorio de 435000 individuos por año se muestra en la figura siguiente.

5 / 73

# Ejemplos de ecuaciones no lineales



6 / 73

# Ejemplos de ecuaciones no lineales

- Si no se conoce la solución exacta, puede hallarse una *solución numérica*, a partir de la ecuación diferencial (1) y una condición inicial  $N_0$ , resolviendo un *Problema de Valor Inicial* (Tema 7 de la materia).
- Plantearemos aquí otro problema: Conocida la cantidad de individuos  $N_0$  y  $N(t_1)$ , en tiempos  $t_0$  y  $t_1$ , y la tasa de migraciones  $\mu$ , se desea conocer la tasa de natalidad  $\lambda$ .

Para ello hay calcular  $\lambda$  de la ec. de arriba, es decir resolver la ecuación no lineal

$$f(\lambda) = 0$$

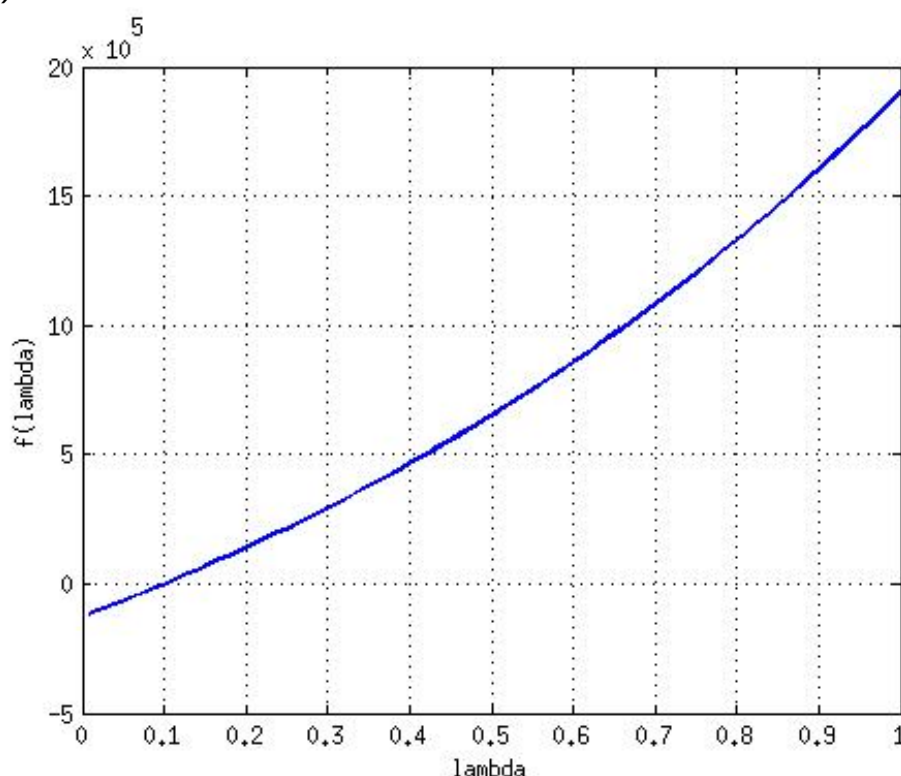
con

$$f(\lambda) = N(t_1) - N_0 e^{\lambda t_1} - \frac{\mu}{\lambda}(e^{\lambda t_1} - 1)$$

7 / 73

# Ejemplos de ecuaciones no lineales

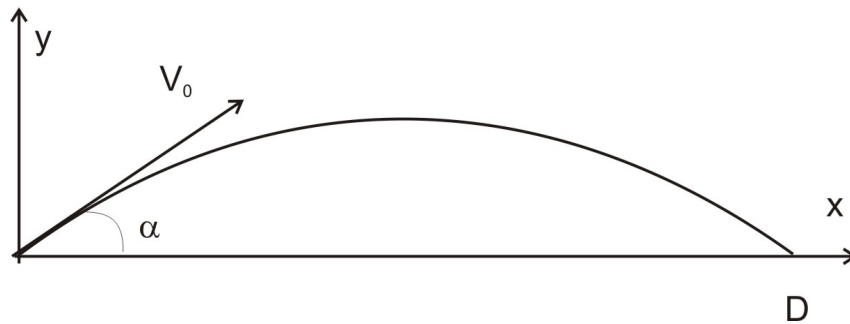
Función  $f(\lambda)$  en función de  $\lambda$



8 / 73

# Ejemplos de ecuaciones no lineales

## b) Tiro oblicuo



- Se desea conocer el ángulo  $\alpha$  para que un disparo que sale con velocidad  $V_0$  alcance un objetivo a una distancia  $D$ .
- Las ecuaciones:

	s/x	s/y
aceler.	$a_x = 0$	$a_y = -g$
veloc.	$v_x = V_0 \cos \alpha$	$v_y = -g t + V_0 \sin \alpha$
despl.	$d_x = V_0 \cos \alpha t$	$d_y = h = V_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2$

9 / 73

# Ejemplos de ecuaciones no lineales

- El tiempo de impacto se obtiene de la ecuación para el desplazamiento vertical, cuando  $h = 0$ :

$$t_1 = \frac{2 V_0 \sin \alpha}{g}$$

- La distancia horizontal recorrida en  $t_1$ :

$$d = \frac{2 V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$$

e igualando a la distancia objetivo  $D$  se obtiene la ecuación:

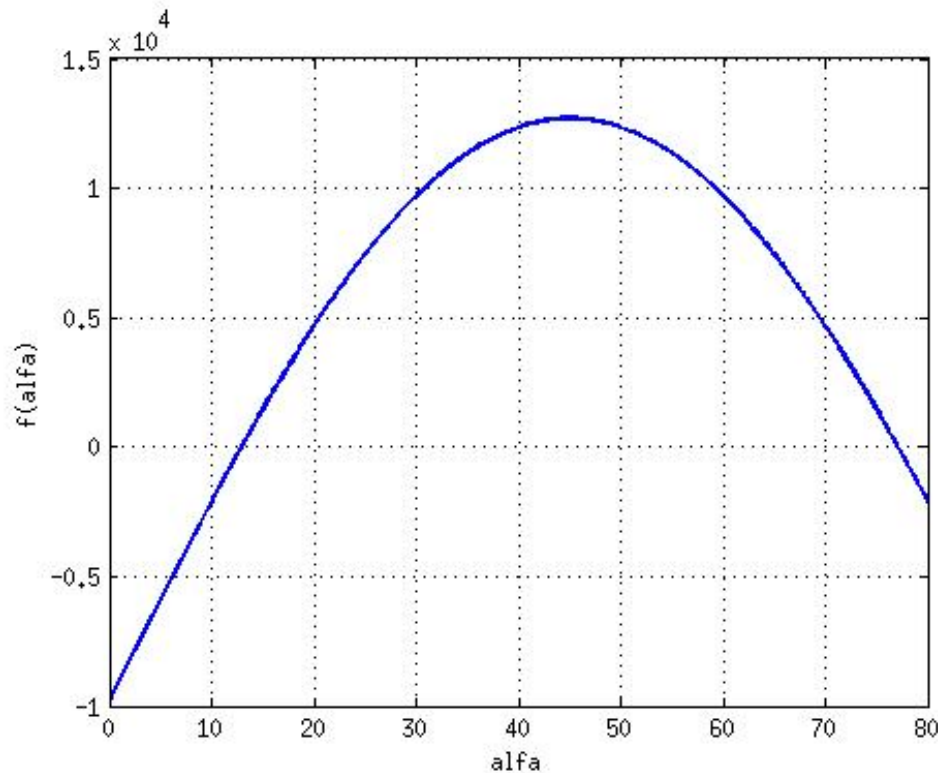
$$f(\alpha) = 2 V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha - D g = 0$$

de la cual queremos calcular  $\alpha$ .

10 / 73

## Ejemplos de ecuaciones no lineales

La función  $f(\alpha)$  en función de  $\alpha$ , para una velocidad inicial  $V_0 = 150m/s$  y una distancia del objetivo  $D = 1000m$  esta graficada a continuación.



11 / 73

## Ecuaciones no lineales

- Los ejemplos presentados son algunos de los innumerables problemas que se nos plantean donde queremos despejar, de una ecuación, una variable que no podemos escribir en forma explícita.
- Estos problemas pueden ser planteados como:

Encontrar  $x$   
tal que  $f(x) = 0$

El valor de  $x$  que satisface esa ecuación se llama *raíz* de la ecuación, o también *cero* de la función  $f$ .

- Hay muchos métodos numéricos para hallar raíces de ecuaciones. Veremos aquí:
  - Método de la bisección
  - Iteración de punto fijo
  - Método de Newton-Raphson
  - Método de la secante
  - Método Regula Falsi

12 / 73

## Sección 2

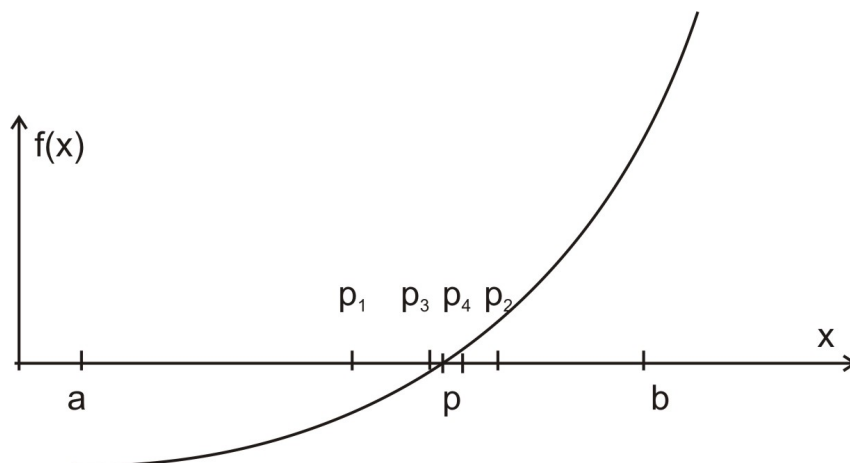
### Método de la Bisección

13 / 73

### Método de la Bisección

#### ó Método de la Búsqueda Binaria

- Sea  $f(x)$  continua en  $[a, b]$  y  $f(a)$  y  $f(b)$  de signos distintos. Entonces, por el teorema del valor medio, existe  $a < p < b$  tal que  $f(p) = 0$ .



- El Método de la Bisección procede buscando una raíz propuesta en la mitad del intervalo  $(a,b)$ . Y repitiendo iterativamente este procedimiento.

14 / 73

# Método de la Bisección

*Dados:*  $f(x)$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $Tol_1$ ,  $(Tol_2)$ ,  $K_{max}$

*Salida:*  $p$

1)  $i \leftarrow 1$

2) mientras  $i < K_{max}$

3)  $p \leftarrow a + \frac{(b-a)}{2}$

4) si  $f(p) < Tol_1$  , o bien  $\frac{b-a}{2} < Tol_2 \rightarrow$  Salida:  $p$  y Parar.

5)  $i \leftarrow i + 1$

6) si  $f(a)f(p) > 0$   $a \leftarrow p$   
sino  $b \leftarrow p$

7) va a 3.

8) Salida: 'No se halló la raíz en  $K_{max}$  iteraciones'

Parar.

15 / 73

## Formas de detener las iteraciones

- Hay distintas maneras de detener el proceso iterativo:

1)  $|p_i - p_{i-1}| \leq Tol_1$

2)  $\frac{|p_i - p_{i-1}|}{|p_i|} \leq Tol_2$

3)  $|f(p_i)| \leq Tol_3$

- El primer criterio considera el valor absoluto de la diferencia entre dos iteraciones. Y el segundo su valor relativo. En este último caso la tolerancia  $Tol_2$  es independiente de las unidades y significado físico de las variables. En cualquiera de estos casos puede ser que la diferencia sea pequeña pero aún se esté lejos de la solución.
- El tercer criterio examina el error en  $f(p)$ . También, dependiendo de la función, puede ser que este error sea pequeño pero aún no se haya llegado a la solución buscada. (Por ejemplo si la derivada de  $f$  en cercanías de  $p$  es muy pequeña).

16 / 73



# Convergencia

- Teorema:

Sea  $f \in C[a, b]$  y sea  $f(a)f(b) < 0$ . El algoritmo de Bisección genera una sucesión  $\{p_n\}$  que aproxima a  $p$  tal que

$$|p_n - p| \leq \frac{b - a}{2^n}$$

para  $n \geq 1$ .

Demostración:

Para  $n \geq 1$ ,

$$b_n - a_n = \frac{(b - a)}{2^{n-1}}$$

La raíz exacta  $p \in (a_n, b_n)$ .

Y  $p_n = (a_n + b_n)/2$

Luego

$$|p_n - p| \leq \frac{(b_n - a_n)}{2} = \frac{(b - a)}{2^n}$$

17 / 73

# Convergencia

- De allí se ve que posee convergencia lineal:

$$|p_{n+1} - p| \leq \frac{(b - a)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} |p_n - p|$$

- Si se desea  $p$  con una tolerancia  $\epsilon$ , se precisan:

$$n = \log_2 \frac{|b - a|}{\epsilon}$$

- El Método de la Bisección es lento: tiene convergencia *lineal*.
- Pero *siempre* converge. Es robusto. Por eso se usa muchas veces para poner en marcha otros métodos.

18 / 73

## Sección 3

### Iteración de Punto Fijo

19 / 73

### Punto Fijo

- Se ha definido *cero* de  $f(x)$  al valor de  $x$  tal que

$$f(x) = 0$$

- En forma similar se define *punto fijo* de  $g(x)$  al  $x$  tal que

$$g(x) = x$$

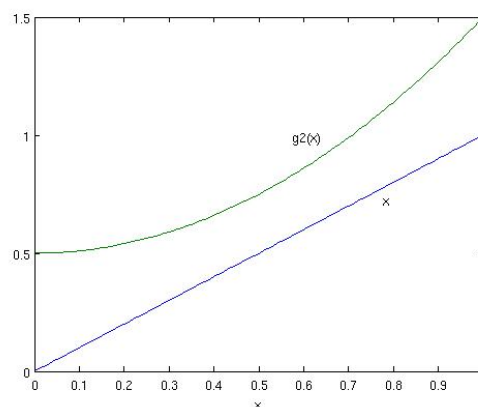
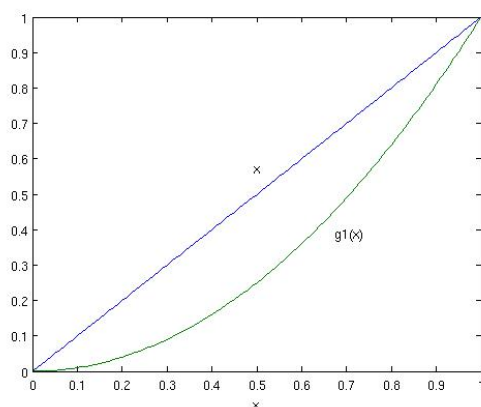
- Un problema de hallar un cero de  $f(x)$  se puede transformar en uno de hallar el punto fijo de  $g(x)$ . Por ejemplo: a partir de la ecuación  $f(x) = 0$  se puede escribir  $g(x) = x$  definiendo  $g(x) = x + f(x)$ . Así el valor de  $x$  que verifica la primera ecuación, también verifica la segunda: el cero de  $f(x)$  es el punto fijo de  $g(x)$ .

20 / 73

# Punto Fijo

## Ejemplos:

- La función  $g_1(x) = x^2$ , en el intervalo  $[0, 1]$  tiene dos puntos fijos:  $x = 0$  y  $x = 1$
- La misma función en el intervalo  $[2, 3]$  no tiene puntos fijos.
- La función  $g_2(x) = \frac{1}{2} + x^2$ , en el intervalo  $[0, 1]$  no tiene puntos fijos. No los tiene en todo el eje real.
- La función identidad  $g(x) = x$  en  $[0, 1]$  tiene  $\infty$  puntos fijos.

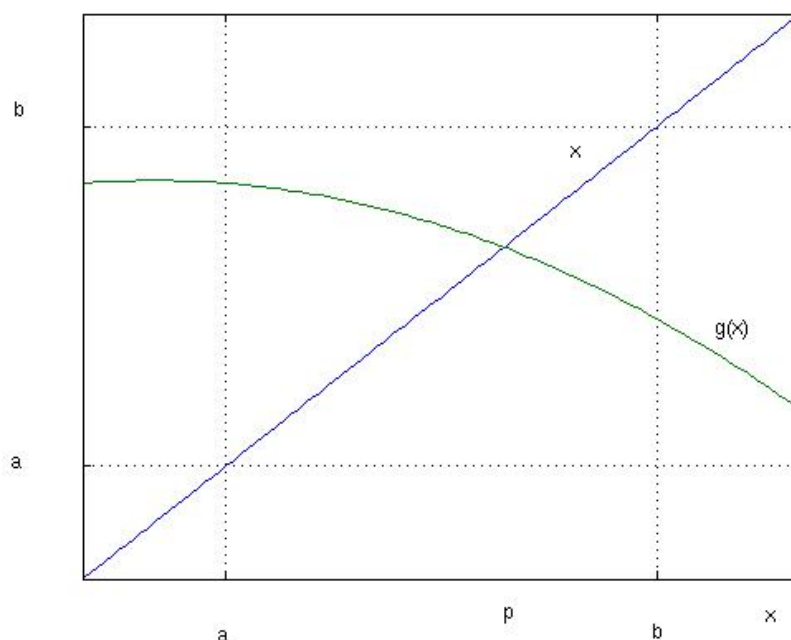


21 / 73

# Punto Fijo

Teorema 1: Si  $g \in C[a, b]$  y  $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$  entonces  $g$  tiene un punto fijo en  $[a, b]$ .

Si además,  $g'(x)$  existe en  $(a, b)$  y  $|g'(x)| \leq k < 1 \forall x \in [a, b]$  entonces  $g$  tiene un punto fijo *único* ( $p$ ) en  $[a, b]$ .



22 / 73

# Punto Fijo

## Demostración:

### Primera parte:

- Si  $g(a) = a$  o  $g(b) = b$ , entonces  $\exists p$
- Si no; debe ser  $g(a) > a$  y  $g(b) < b$ ,
- Sea  $h(x) = g(x) - x$ .
- $h(x)$  es continua en  $[a, b]$  y  $h(a) = g(a) - a > 0$ ,  
 $h(b) = g(b) - b < 0$ .
- Por teorema del valor medio,  $\exists p \mid h(p) = 0$  y por tanto  
 $g(p) = p$ .  
O sea: existe un Punto Fijo en  $[a, b]$

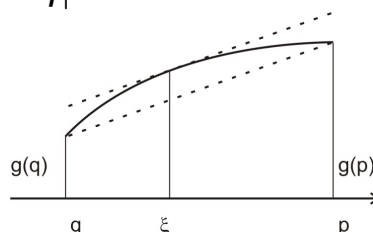
23 / 73

# Punto Fijo

### Segunda parte:



- Supóngase que  $|g'(a)| \leq k < 1$  y que  $p$  y  $q$  sean Puntos Fijos de  $g$ . ( $p \neq q$ )
- Por Teorema del Valor Medio,  $\exists \xi$  entre  $q$  y  $p$  tal que  
 $|g(p) - g(q)| = |g'(\xi)| |p - q|$



- Por ser  $p$  y  $q$  puntos fijos, y por ser  $|g'(\xi)| < 1$ :

$$|p - q| < |p - q|$$

- A esta contradicción se ha llegado al suponer que  $p \neq q$ .  
Luego el punto fijo es único.

24 / 73

# Iteración funcional

- Para encontrar el punto fijo de una función se usa una *técnica iterativa de punto fijo* o *iteración funcional*.
- Se propone un valor de partida  $p_0$ .
- Se construye una sucesión  $\{p_n\}$  con la fórmula:

$$p_n = g(p_{n-1})$$

para  $n = 1, 2, \dots$

- Si  $\{p_n\} \rightarrow p$  y  $g$  es continua, entonces:

$$p = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g(p_{n-1}) = g(\lim_{n \rightarrow \infty} p_{n-1}) = g(p)$$

Es decir que  $p$  es el punto fijo de  $g$ .

25 / 73

## Algoritmo de Punto Fijo

*Dados:*  $g(x)$ ,  $p_0$ ,  $Tol$ ,  $K_{max}$

*Salida:*  $p$

1)  $i \leftarrow 1$

2) mientras  $i < K_{max}$

3)  $p \leftarrow g(p_0)$

4) si  $|p - p_0| < Tol \rightarrow$  Salida:  $p$  y Parar.

5)  $i \leftarrow i + 1$

6)  $p_0 \leftarrow p$

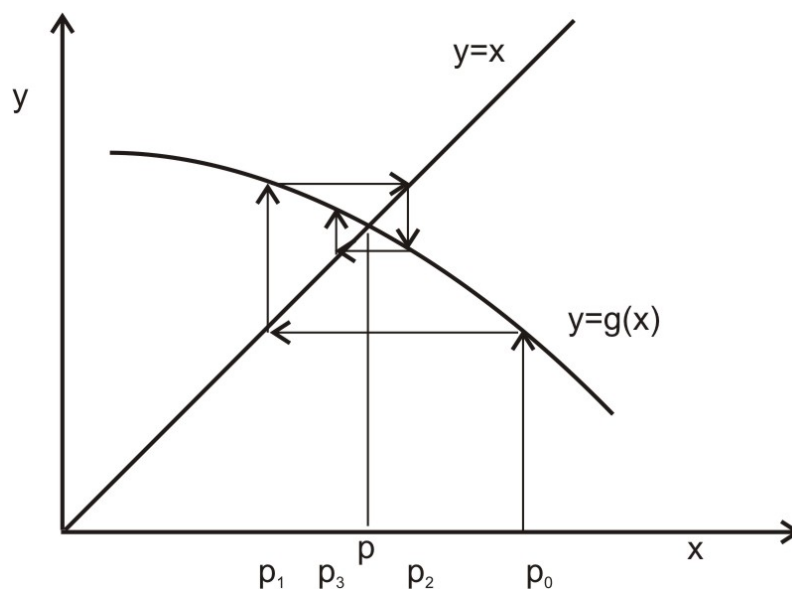
7) va a 3.

8) Salida: 'No converge en  $K_{max}$  iteraciones'

Parar.

26 / 73

# Interpretación gráfica de la Iteración Funcional



27 / 73

## Ejemplo

- Sea obtener la raíz de

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

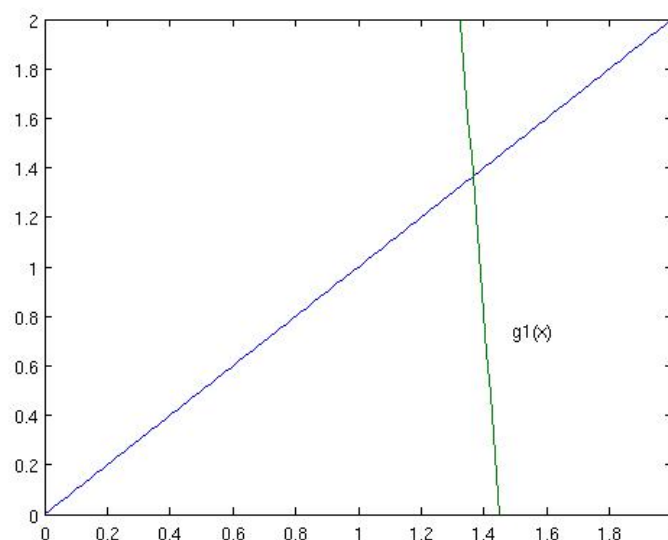
Esta función tiene una sola raíz en  $[1, 2]$ :  $p = 1,365230013$

- Hay muchas maneras de obtener la función  $g(x)$  para un problema de punto fijo  $g(x) = x$ :

1) De la ecuación original:  $f(x) = 0$

$$x - f(x) = x$$

$$\text{con } g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$$



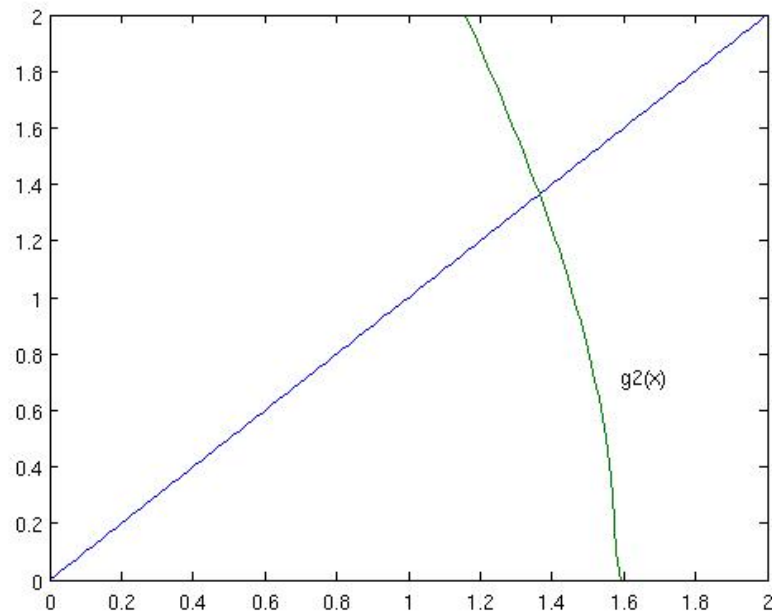
28 / 73

# Ejemplo

2) De la ecuación original:  $x^3 = 10 - 4x^2$

$$x = \pm \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$$

de donde:  $g_2(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$



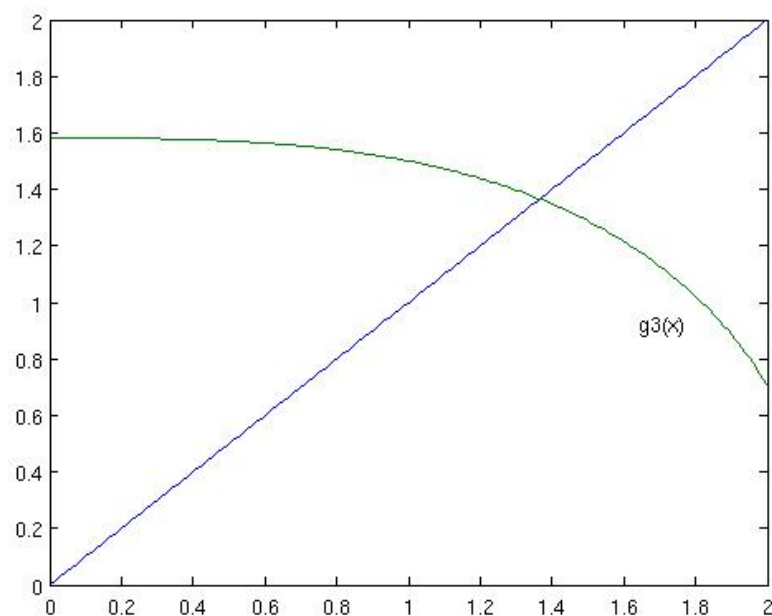
29 / 73

# Ejemplo

3) De la ecuación original:  $4x^2 = 10 - x^3$

$$x = \pm \frac{1}{2} \sqrt{10 - x^3}$$

de donde:  $g_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{10 - x^3}$



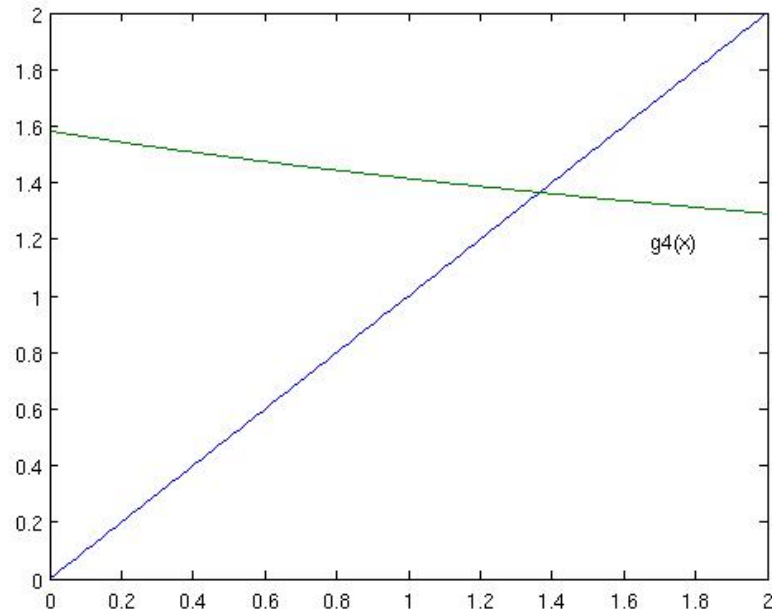
30 / 73

# Ejemplo

4) De la ecuación original:  $x^2(x + 4) = 10$

$$x = \pm \sqrt{\frac{10}{x+4}}$$

de donde:  $g_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x+4}}$

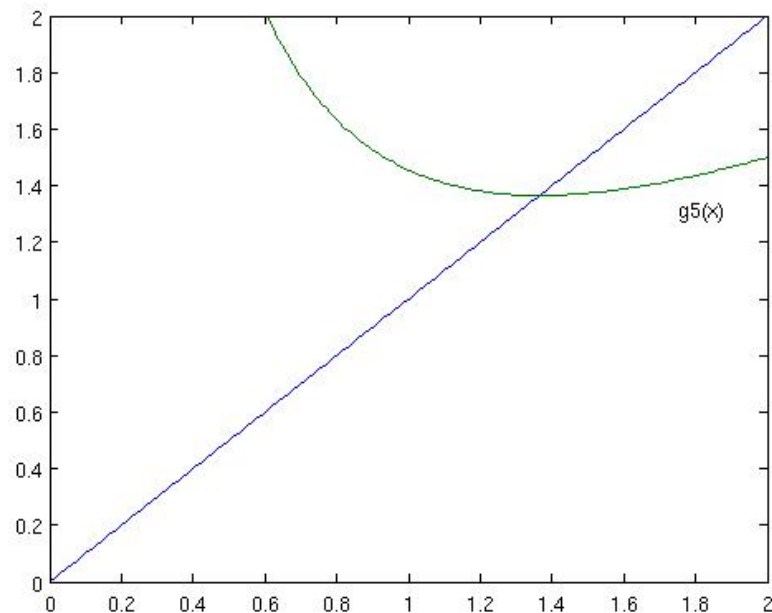


31 / 73

# Ejemplo

5) Dividiendo la ecuación original por  $3x^2 + 8x$  y operando:

$$g_5(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$



32 / 73



# Ejemplo

- Resolviendo el problema por Iteración Funcional, partiendo del valor inicial  $p_0 = 1,5$ , y obteniendo los resultados con 9 dígitos después de la coma, se llegó a:
- Con  $g_1(x)$  no se obtuvo convergencia.
- Con  $g_2(x)$  no se obtuvo convergencia.
- Con  $g_3(x)$  se requirieron 30 iteraciones.
- Con  $g_4(x)$  se requirieron 15 iteraciones.
- Con  $g_5(x)$  se requirieron 4 iteraciones.
- Con el método de la Bisección se requirieron 27 iteraciones.

33 / 73

# Punto Fijo

## Teorema 2:

Sea  $g \in C[a, b]$  y que  $g(x) \in [a, b] \forall x \in [a, b]$ . Además supóngase que  $\exists g'(x)$  en  $(a, b)$  con

$$|g'(x)| \leq k < 1 \quad \forall x \in [a, b] \quad (*)$$

Si  $p_0$  es cualquier número en  $[a, b]$ , entonces la sucesión  $\{p_n\}$  definida por

$$p_n = g(p_{n-1}) \quad n \geq 1 \quad (**)$$

converge al único Punto Fijo en  $[a, b]$ .

34 / 73

## Punto Fijo

### Demostración:

- Por Teorema 1, existe un P.F.  $p \in [a, b]$ .
- Como  $g(x) \in [a, b]$  entonces  $p_n \in [a, b] \quad \forall n$ .

$$|p_n - p| = |g(p_{n-1}) - g(p)| = |g'(\xi)| |p_{n-1} - p| \leq k |p_{n-1} - p|$$

- la primera igualdad es por ser P.F y por (\*\*); la segunda por el T. del Valor Medio (con  $\xi \in [a, b]$ ); y la desigualdad es por (\*).

$$|p_n - p| \leq k |p_{n-1} - p| \leq k^2 |p_{n-2} - p| \dots \leq k^n |p_0 - p|$$

- Como  $k < 1$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |p_n - p| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} k^n |p_0 - p| = 0$$

Es decir  $\{p_n\}$  converge a  $p$ .

35 / 73

## Punto Fijo

### Corolario 1:

Si  $g$  satisface las hipótesis del Teorema 2

$$|p_n - p| \leq k^n \max\{p_0 - a, b - p_0\} \quad \forall n \geq 1$$

### Corolario 2:

Si  $g$  satisface las hipótesis del Teorema 2

$$|p_n - p| \leq \frac{k^n}{1 - k} |p_0 - p_1| \quad \forall n \geq 1$$

- La velocidad de convergencia depende de  $\frac{k^n}{1-k}$
- Cuanto menor sea  $k$ , más rápido converge.
- Si  $k \sim 1$  la convergencia es lenta.
- Si  $|g'(p)| \neq 0$  la convergencia es lineal.
- Si  $|g'(p)| = 0$  puede tener convergencia cuadrática.

36 / 73

# Ejemplo

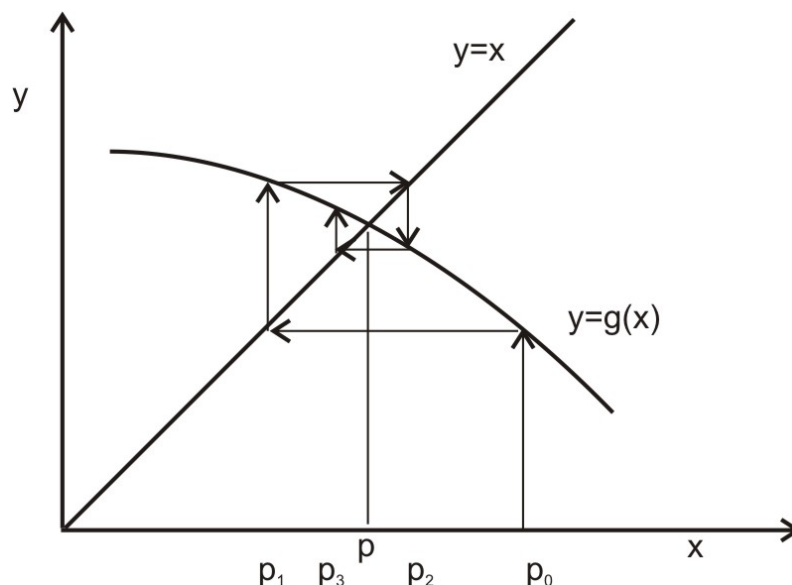
Del ejemplo anterior se ve que:

- No hay ningún intervalo conteniendo a  $p = 1,365230013$  tal que  $|g'_1(x)| < 1$ . Por eso diverge.
- La función  $g_2(x)$  no manda  $[1, 2]$  a  $[1, 2]$ . Y no hay ningún intervalo conteniendo a  $p$  tal que  $|g'_1(x)| < 1$ . Por eso diverge.
- La derivada  $g'_3(2) \simeq 2,12$ . No satisface que sea menor que 1. Pero en el intervalo  $[1, 1,5]$   $g'_3(x) \leq g'_3(1,5) \simeq 0,66$ . Por eso ha convergido.
- La derivada  $g'_4(x) \leq 0,15 \quad \forall x \in [1, 2]$ . Converge más rápido que  $g_3$
- Cosa similar sucede con  $g_5$  para la cual  $k$  es menor aún.

37 / 73

## Iteración Funcional

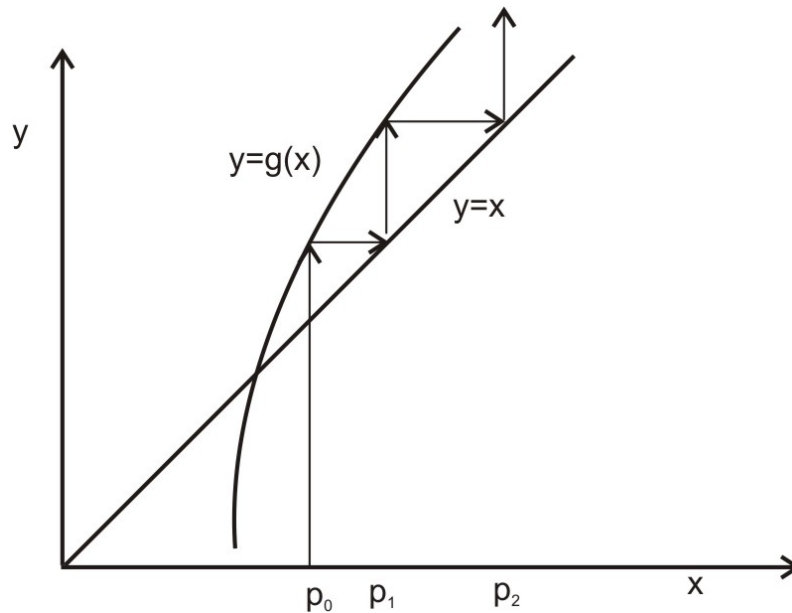
Caso en que  $|g'(x)| < 1$



38 / 73

# Iteración Funcional

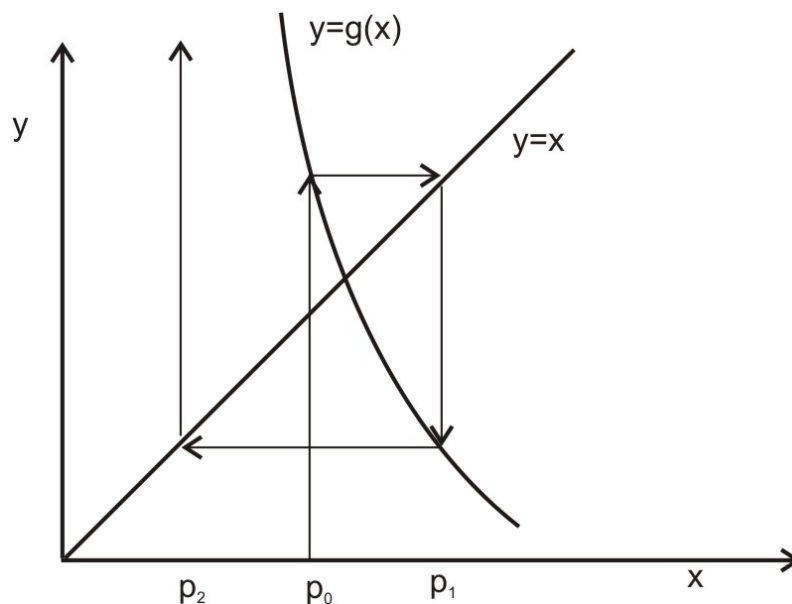
Caso en que  $|g'(x)| > 1$



39 / 73

# Iteración Funcional

Caso en que  $g'(x) < -1$



40 / 73

## Sección 4

## Método de Newton-Raphson

41 / 73

## Método de Newton-Raphson

- Sea  $f(x) \in C^2[a, b]$  (continuamente diferenciable 2 veces), y se desea hallar  $p$  tal que  $f(p) = 0$ .
- Sea  $\bar{x}$  una aproximación a  $p$  ( $|\bar{x} - p|$  pequeño), y  $f'(\bar{x}) \neq 0$
- El desarrollo en serie de Taylor alrededor de  $\bar{x}$ :

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\bar{x}) + \dots$$

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(x - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(x))$$

donde  $\xi(x)$  está entre  $x$  y  $\bar{x}$ .

- Particularizando en  $x = p$ :

$$0 = f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x}) + \frac{(p - \bar{x})^2}{2}f''(\xi(p))$$

42 / 73

# Método de Newton-Raphson

- Al ser  $(p - \bar{x})$  pequeño podemos despreciar el término cuadrático frente al lineal:

$$0 \simeq f(\bar{x}) + (p - \bar{x})f'(\bar{x})$$

- De allí:

$$p \simeq \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}$$

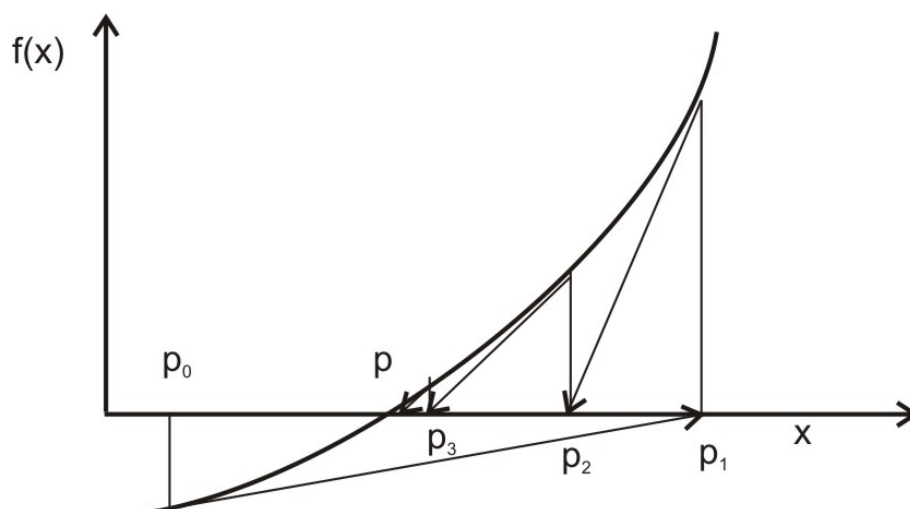
- El Método de Newton-Raphson construye una sucesión  $\{p_n\}$  con la fórmula de recurrencia:

$$p_n \simeq p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad n \geq 1$$

- Observación: El Método de Newton-Raphson puede ser mirado como un caso de iteración funcional, con  $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

43 / 73

## Interpretación gráfica Método de Newton-Raphson



44 / 73

# Algoritmo del Método de Newton-Raphson

Dados:  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $p_0$ ,  $Tol$ ,  $K_{max}$

Salida:  $p$

1)  $i \leftarrow 1$

2) mientras  $i < K_{max}$

3)  $p \leftarrow p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$

4) si  $|p - p_0| < Tol \rightarrow$  Salida:  $p$  y Parar.

5)  $i \leftarrow i + 1$

6)  $p_0 \leftarrow p$

7) va a 3.

8) Salida: 'No converge en  $K_{max}$  iteraciones'

Parar.

45 / 73

## Formas de detener las iteraciones

- Hay distintas maneras de detener el proceso iterativo:

1)  $|p_n - p_{n-1}| \leq Tol_1$

2)  $\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} \leq Tol_2$

3)  $|f(p_n)| \leq Tol_3$

- La tolerancia  $Tol_1$  es en valor absoluto, mientras que la tolerancia  $Tol_2$  es independiente de las unidades y significado físico de las variables.
- Según la función puede ser que algún criterio sea mejor que los otros.

46 / 73

# Convergencia

- El error en la iteración  $n$ :

$$e_n = p_n - p$$

- En  $p$ ,  $f(p) = 0$  y  $f'(p) \neq 0$
- Se puede escribir:

$$e_{n+1} = p_{n+1} - p = p_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} - p = e_n - \frac{f(p_n)}{f'(p_n)} = \frac{e_n f'(p_n) - f(p_n)}{f'(p_n)}$$

- Por el Teorema de Taylor:

$$f(p) = 0 = f(p_n - e_n) = f(p_n) - e_n f'(p_n) + \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

con  $\xi_n$  entre  $p_n$  y  $p$ . De allí:

$$e_n f'(p_n) - f(p_n) = \frac{e_n^2}{2} f''(\xi_n)$$

47 / 73

# Convergencia

- Sustituyendo en la expresión de  $e_{n+1}$ :

$$e_{n+1} = e_n^2 \frac{f''(\xi_n)}{2f'(p_n)}$$

- Si  $p_n$  es cercano a  $p$  se puede escribir:

$$e_{n+1} \simeq e_n^2 \frac{f''(p)}{2f'(p)} = C e_n^2$$

- El Método NR posee convergencia *cuadrática*.
- Al obtener la fórmula del error, hemos supuesto que  $f'(p) \neq 0$ , y buscamos que  $f(p) = 0$ . Pero puede haber problemas si simultáneamente con  $f(p)$  también  $f'(p)$  tiende a cero.

48 / 73



# Convergencia

- Definición: Una solución  $p$  de  $f(x) = 0$  es un *cero de multiplicidad  $m$*  de la función  $f$  si para  $x \neq p$  se puede escribir  $f(x) = (x - p)^m q(x)$  siendo  $q(p) \neq 0$ .
- Las raíces de ecuaciones pueden ser *simples* o *múltiples*. Las raíces simples son las que tienen multiplicidad  $m = 1$ .
- Teorema:  $f \in C^1[a, b]$  tiene un cero simple  $p$  en  $(a, b)$  si y solo si  $f(p) = 0$  y  $f'(p) \neq 0$ .
- Teorema: Si el método de Newton-Raphson genera una sucesión  $\{p_n\}$  que converge a un cero  $p$  de  $f(x)$ , entonces:
  - Si  $p$  es raíz simple, la convergencia es **cuadrática**:

$$e_{n+1} \simeq \frac{f''(p)}{2f'(p)} e_n^2$$

- Si  $p$  es raíz múltiple, la convergencia es **lineal**

$$e_{n+1} \simeq \frac{m-1}{m} e_n$$

49 / 73

# Convergencia

- Teorema: Sea  $f \in C^2[a, b]$ . Si  $p \in [a, b]$  es un cero de  $f$  y  $f'(p) \neq 0$ , entonces existe  $\delta > 0$  tal que para cualquier aproximación inicial  $p_0 \in [p - \delta, p + \delta]$  el método de Newton-Raphson genera una sucesión  $\{p_n\}$  que converge a  $p$ .
- Este teorema, asegura que el M. N-R converge para cualquier  $p_0$  dentro de ese intervalo  $[p - \delta, p + \delta]$ .
- La convergencia se dice que es *local*, pues precisa que el punto inicial este suficientemente cerca del cero buscado.
- El método de la bisección, en contraposición con éste, tiene convergencia *global* ya que para cualquier  $p_0 \in [a, b]$  converge.

50 / 73

# Convergencia

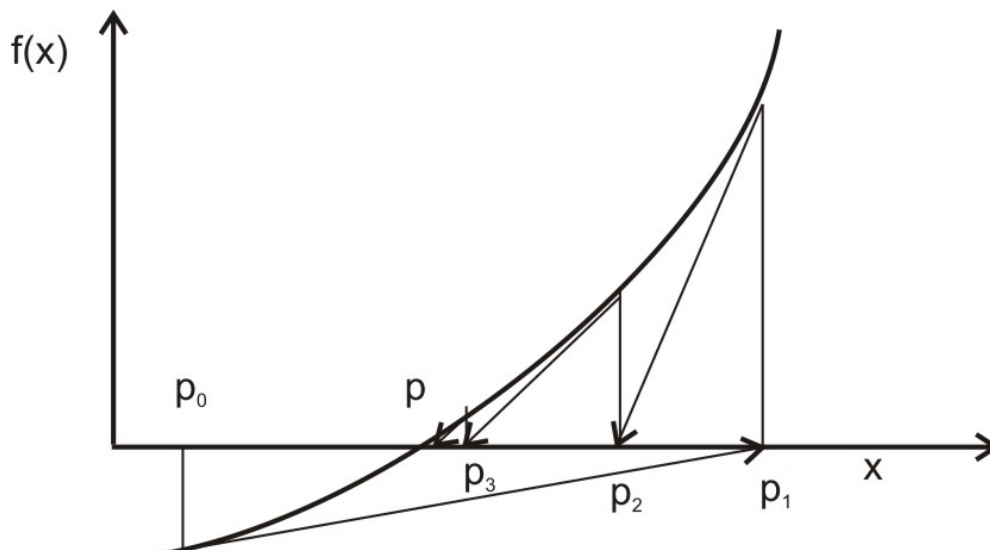
Resumiendo:

- El método de Newton-Raphson, para raíces simples, tiene convergencia cuadrática. Esto es bueno.
- Para raíces múltiples, la convergencia es lineal.
- Su convergencia es local. Hay casos en que este método no converge.
- Se precisa cierta regularidad en la derivada de la función, y comenzar con una estimación inicial cercana a  $p$
- Otro inconveniente es que se precisa evaluar la derivada de la función.

51 / 73

## Convergencia del M. Newton-Raphson

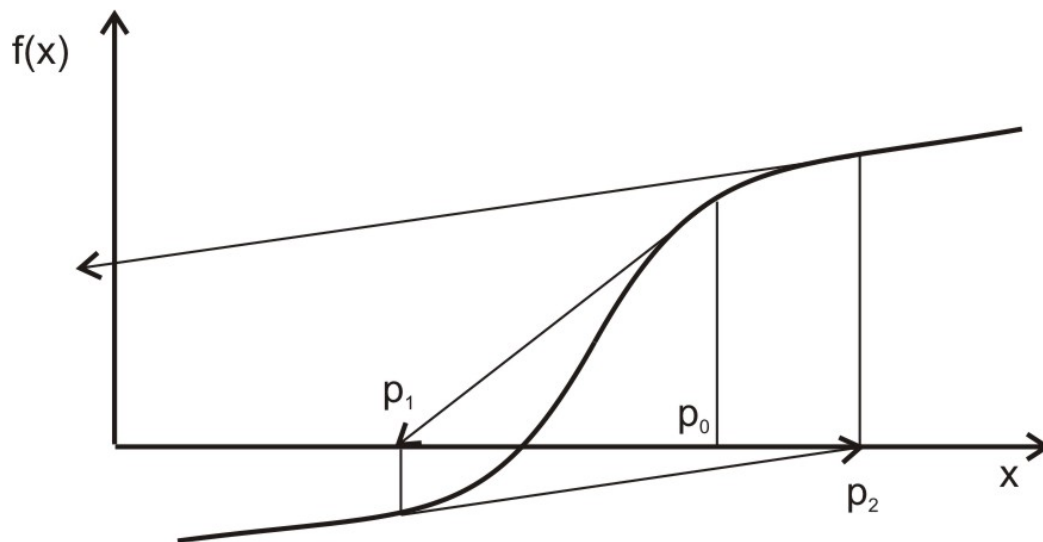
Caso en que el M. Newton-Raphson converge



52 / 73

# Convergencia del M. Newton-Raphson

Caso en que el M. Newton-Raphson no converge



53 / 73

## Sección 5

### Método de la Secante

54 / 73

# Método de la Secante

- Un problema del M. Newton-Raphson es que se debe calcular la derivada de la función, y a veces no se dispone de ella.
- Esto se puede remediar recordando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Se puede aproximar a la derivada, en la iteración  $n$ ,

$$f'(p_n) \simeq \frac{f(p_n) - f(p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}}$$

- Y la fórmula de recurrencia del M. Newton-Raphson, con este cambio:

$$p_{n+1} = p_n - \frac{(p_n - p_{n-1}) f(p_n)}{f(p_n) - f(p_{n-1})}$$

- Esta es la fórmula del *Método de la Secante*

55 / 73

## Algoritmo del Método de la Secante

Dados:  $f(x)$ ,  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $Tol$ ,  $K_{max}$

Salida:  $p$

1)  $i \leftarrow 2$  ;  $q_0 \leftarrow f(p_0)$  ;  $q_1 \leftarrow f(p_1)$

2) mientras  $i < K_{max}$

3)  $p \leftarrow p_1 - \frac{q_1(p_1 - p_0)}{(q_1 - q_0)}$

4) si  $|p - p_1| < Tol \rightarrow$  Salida:  $p$  y Parar.

5)  $i \leftarrow i + 1$

6)  $p_0 \leftarrow p_1$  ;  $q_0 \leftarrow q_1$  ;  $p_1 \leftarrow p$  ;  $q_1 \leftarrow f(p)$

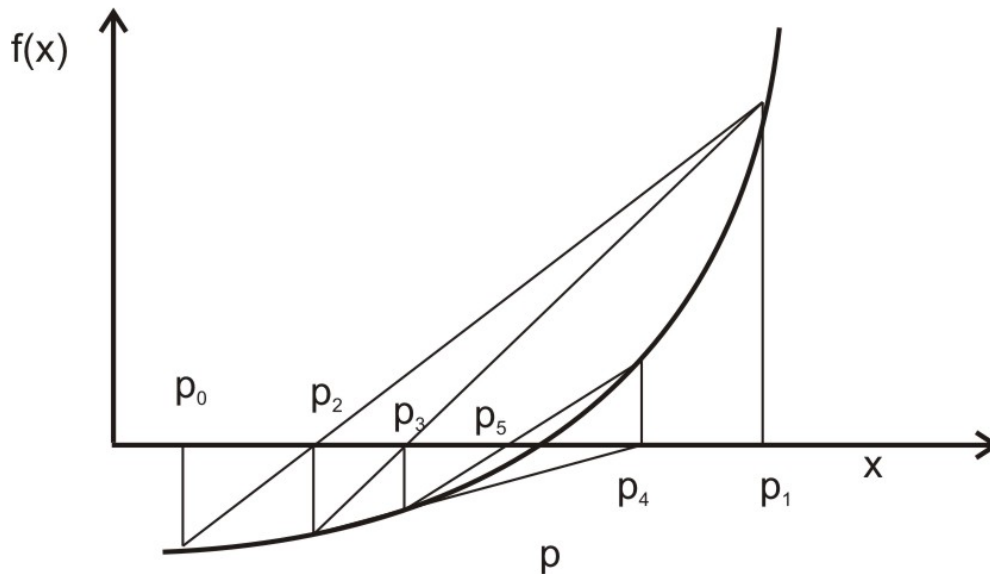
7) va a 3.

8) Salida: 'No converge en  $K_{max}$  iteraciones'

Parar.

56 / 73

# Método de la Secante



57 / 73

# Método de la Secante

- El método de la secante evita tener que evaluar derivadas.
- La convergencia es más lenta que la del M. Newton-Raphson, pero más rápida que el M. Bisección.
- Posee una convergencia *superlineal*, para el caso de raíces simples:

$$e_{n+1} \simeq \left[ \frac{f''(p)}{2f'(p)} \right]^{1-\phi} e_n^\phi = C e_n^\phi$$

donde  $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2} = 1,618\dots$

- Precisa 2 estimaciones iniciales:  $p_0$  y  $p_1$ .

58 / 73

## Sección 6

### Metodo de la Regula Falsi

59 / 73

### Método Regula Falsi

- El Método llamado *Regula Falsi* o de la Falsa Posición, es similar al Metodo de la Secante, pero en cada iteración toma -para trazar la secante- los dos últimos puntos que acotan la raíz buscada. Como lo hacía el metodo de la Bisección.
- La fórmula de recurrencia es similar a la del M. Secante

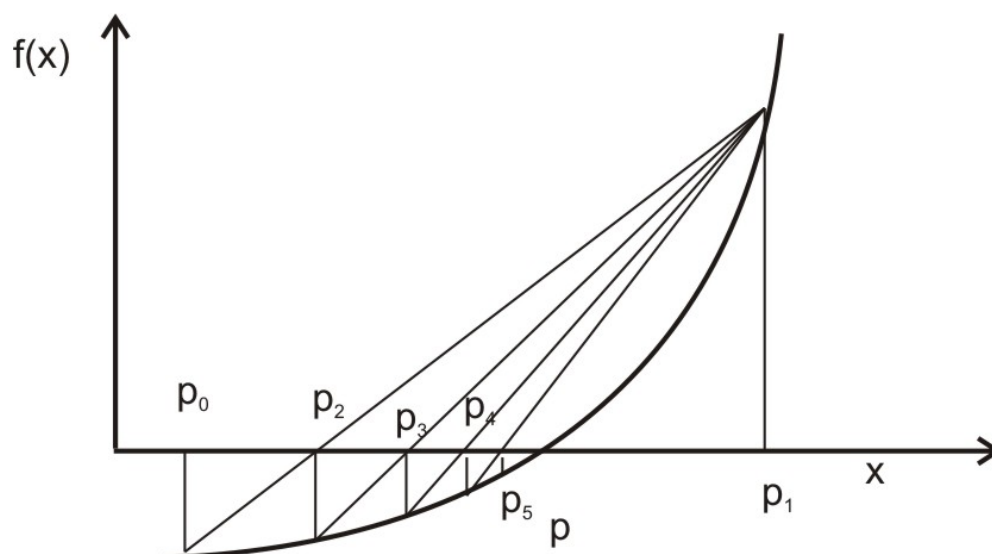
$$p_n = b_n - \frac{(b_n - a_n) f(b_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$$

pero los puntos  $a_n$  y  $b_n$  se eligen de modo de encerrar la raíz.

- Para la iteración siguiente  $p_n$  reemplaza, ya sea a  $a_n$  o a  $b_n$ , según quienes encierran la raíz buscada, tal como se hace en el método de la Bisección.
- Este método tiene convergencia lineal. Pero, siempre converge (convergencia global), cosa que no siempre ocurre con el método de la secante.

60 / 73

# Método Regula Falsi



61 / 73

## Sección 7

### Estrategias

62 / 73

## Estrategias de análisis

- Lo primero a realizar es una gráfica de la función a la cual se quiere hallar el cero. Nada reemplaza la inspeccion visual que permite observar:
  - Si la funcion tiene ceros en el intervalo deseado.
  - Si hay un cero o más de uno.
  - Si cada cero es simple o tiene multiplicidad mayor a uno.
  - Cuál es el intervalo en que debe buscarse el cero.
  - Cuál puede ser un buen valor inicial.
  - Cómo es la curva en proximidades del cero (esto tiene influencia en la forma de determinar el error para detener las iteraciones).

63 / 73

## Estrategias de análisis

- Si hay varios ceros en el intervalo elegido conviene definir un intervalo que encierre exclusivamente el cero de interés para el problema.
- El método de Newton-Raphson tiene convergencia cuadrática, pero precisa una estimación inicial cercana al cero pues no es seguro que converja de otro modo. Posee *convergencia local*.
- El método de la Bisección, por otro lado asegura convergencia pero ésta es lenta. Se dice que tiene *convergencia global*.
- A veces se usa un esquema híbrido: se inicia con algunas iteraciones de Bisección y luego se cambia a Newton-Raphson para acelerar el proceso.

64 / 73



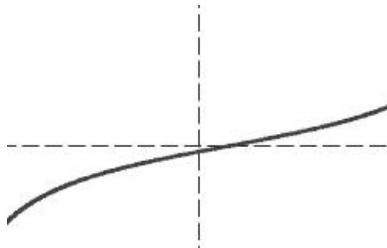
## Estrategias de análisis

- El examen del gráfico puede detectar raíces múltiples. Si en el lugar donde  $f(x) = 0$  también es  $f'(x) = 0$ , esto indica raíces múltiples.
- Con raíces de multiplicidad mayor que uno, el método de Newton-Raphson pierde su convergencia cuadrática.
- Hay métodos de *aceleración* (Aitken, Steffensen, Muller) que no serán discutidos aquí, que permiten acelerar la convergencia de algoritmos de convergencia lineal.

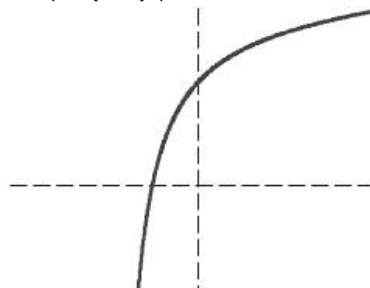
65 / 73

## Estrategias de análisis

- Si la función tiene derivadas pequeñas en proximidades del cero, un criterio de parada basado en  $|f(p_i)| < Tol$  no es adecuado pues esto puede satisfacerse aún cuando  $|p_i - p_{i-1}|$  sea grande. Un criterio basado en  $|p_i - p_{i-1}| < Tol$  sería mejor.



- Si la función tiene derivadas grandes en proximidades del cero, un criterio de parada basado en  $|p_i - p_{i-1}| < Tol$  no sería adecuado, sino más bien uno basado en  $|f(p_i)| < Tol$ .



66 / 73

# Resumen

En este capítulo hemos visto:

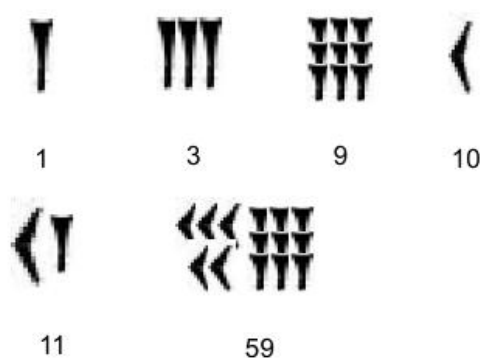
- Problemas de hallar el cero de una función, o bien la raíz de una ecuación.
- Métodos para hallar ceros de funciones:
  - Método de la búsqueda binaria, o de la bisección.
  - Iteración funcional, o iteración de punto fijo
  - Método Newton-Raphson
  - Método de la secante
  - Método de la Regula Falsi
- Condiciones de convergencia y algoritmos de cada uno.
- Estrategias para analizar el problema y elegir el método a usar.

67 / 73

## Apendice: Ejemplos

### Calculo de la raíz cuadrada por el método de la bisección

- Este problema era resuelto en Babilonia ( $\sim 1800$  años antes de la era cristiana, por el método de la bisección.
- Su sistema de numeración era en base 60 (sistema sexagesimal) y la escritura del mismo se denomina *cuneiforme*. pues se basaba en cuñas talladas en tablillas de arcilla.



68 / 73

## Apendice: Ejemplos

- El procedimiento para hallar la raíz cuadrada de  $A$  era el siguiente:

- Se eligen dos números  $a_1$  y  $b_1$  tal que  $a_1^2 < A$  y  $b_1^2 > A$
- Se calcula

$$c = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$$

y se calcula su cuadrado.

- Si  $c_1^2 < A$  se reemplaza  $a_1$  por  $c_1$ , y si  $c_1^2 > A$  se reemplaza  $b_1$  por  $c_1$
- Se repite el proceso hasta lograr una aproximación satisfactoria.
- Como se ve el proceso es precisamente una técnica de bisección.

69 / 73

## Apendice: Ejemplos

### Calculo de la raíz cuadrada por el método de Newton-Raphson

- Se desea calcular la raíz cuadrada de un número real  $A$ . Se quiere hallar el número real  $x$  tal que  $x^2 = A$ , o bien

$$x^2 - A = 0$$

- La función  $f(x) = x^2 - A$  es a la cual queremos hallar un cero.
- El método de Newton-Raphson itera con la fórmula

$$p_{k+1} = p_k - \frac{f(p_k)}{f'(p_k)}$$

- La derivada

$$f'(x) = 2x$$

70 / 73

## Apendice: Ejemplos

- Sustituyendo

$$p_{k+1} = p_k - \frac{(p_k^2 - A)}{2p_k}$$

Que puede escribirse:

$$p_{k+1} = \frac{1}{2} \left( p_k + \frac{A}{p_k} \right)$$

- Esta fórmula brinda también una interpretación geométrica. Si  $A$  es el área de un cuadrado cuyo lado buscamos, en una iteración cualquiera es el área de un rectángulo de lados  $p_k$  y  $\frac{A}{p_k}$ . Si estos no coinciden se hace un promedio de ambos para la próxima iteración.

71 / 73

## Apendice: Ejemplos

Cálculo de la raíz cuadrada de 39 por bisección

it.	a	b	c	$c^2$
1	4	8	6	36
2	6	8	7	49
3	6	7	6.5	42.25
4	6	6.5	6.25	39.0625
5	6	6.25	6.125	37.515625
6	6.125	6.25	6.1875	38.28515625
7	6.1875	6.25	6.21875	38.67285156
8	6.21875	6.25	6.230938	38.82458836
9	6.230938	6.25	6.240469	38.94345334

72 / 73

# Apendice: Ejemplos

Cálculo de la raíz cuadrada de 39 por Newton-Raphson

it.	$p_{k-1}$	$p_k$	$p_k^2$
1	7	6,2857142857	39.510204
2	6,2857142857	6,2451298701	39.001647
3	6,2451298701	6,2449979998	39