Cálculo Numérico 2015
Trabajo Práctico 5

Interpolación y aproximación de funciones

Ejercicio 1:

(a) Enuncie y demuestre el Teorema que presenta el método de Horner (ver Teorema 2.18 del libro de Burden y Faires).

(b) Encuentre una aproximación a uno de los ceros de $P(x) = 2x^4 - 3x^2 + 3x - 4$ usando el método de Newton y la división sintética (método de Horner) para evaluar $P(x_n)$ y $P'(x_n)$ en cada iteración x_n. Use $x_0 = -2$ y calcule hasta x_3.

(c) Implemente en Octave la función `function [p,q] = horner(x,coef)` para el método de Horner donde p $= P(x_0)$, q $= P'(x_0)$, `coef` es un vector con los coeficientes del polinomio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0)Q(x) + b_0$, ordenados en la forma $[a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0]$ y `x` es el punto en el cual se desea evaluar el polinomio. Aplique dicha función para resolver el ejercicio anterior.

Ejercicio 2:

(a) Enuncie y demuestre el teorema de existencia y unicidad del polinomio interpolante (ver Teorema 1, sección 6.1 del libro de Kincaid y Cheney).

(b) Escriba la forma de Newton del polinomio interpolante.

(c) Escriba la forma de Lagrange del polinomio interpolante.

(d) Escriba el método de coeficientes indeterminados para el polinomio interpolante.

(e) Analice las ventajas y desventajas entre las distintas formas de representación del polinomio interpolante.

Ejercicio 3:

(a) Para los datos de la siguiente tabla, encuentre el polinomio de interpolación en su forma de Lagrange $P_L(x)$, en su forma de Newton $P_N(x)$, y mediante el método de los coeficientes indeterminados $P_{CI}(x)$. Luego, reduzca los tres polinomios encontrados a la forma $P(x) = dx^3 + cx^2 + bx + a$ con el fin de demostrar que son idénticos ya que las abcisas son distintas entre sí.

x	3	5	7	9
y	1.2	1.7	2.0	2.1

(b) Si se aproxima la función $f(x) = \sin(x)$ mediante un polinomio interpolante de grado nueve que interpola a $f(x)$ en diez puntos del intervalo $[0, 1]$, utilice el resultado sobre el error en interpolación polinomial para predecir una cota del error en dicho intervalo.

Ejercicio 4:

(a) Encuentre el polinomio de interpolación de Newton para los siguientes datos utilizando diferencias divididas

x	0	1	3/2	2
$f(x)$	3	3	13/4	5/3

(b) Implemente en Octave una función `function [c] = dif_div(x,y)` para el método de diferencias divididas donde `c` es un vector con los coeficientes del polinomio interpolante en la forma de Newton

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$$

`x` es un vector con las abcisas de interpolación y `f` tiene los valores de la función en dichas abcisas. Pruebe el algoritmo con el problema anterior.

Ejercicio 5: Utilice el método de diferencias divididas de Newton para resolver el siguiente problema de interpolación de Hermite. Buscamos el polinomio que ajusta los siguientes valores: $p(1) = 2$, $p'(1) = 3$, $p(2) = 6$, $p'(2) = 7$, $p''(2) = 8$.

Ejercicio 6:

(a) Defina interpolante trazador cúbico y explique las diferencias entre trazador natural y trazador sujeto.

(b) Implemente en Octave la función `[a,b,c,d]=cubic_spline_natural(x,f)` para el trazador cúbico natural, donde `a,b,c,d` son vectores que en la j-ésima componente tienen los coeficientes correspondientes al polinomio del tramo-j

$$S(x) = S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - xj)^2 + d_j(x - x_j)^3, \quad x_j \leq x \leq x_{j+1}$$

`x` es el vector con las coordenadas de los nodos y `f` es el vector con los valores de la función f en los correspondientes nodos.

(c) Un trazador cúbico natural $S(x)$ en $[0, 2]$ está definido por

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = 1 + 2x - x^3, & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ S_1(x) = 2 + b(x - 1) + c(x - 1)^2 + d(x - 1)^3, & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Obtenga b, c y d.

Ejercicio 7:(Entregar)

(a) Explique detalladamente cómo introduce las condiciones de borde de frontera sujeta en el sistema de ecuaciones lineales que permite encontrar los coeficientes del trazador cúbico sujeto. (**Observación: los pasos en la demostración del teorema 3.12 del libro de Burden no están completos, por lo que la transcripción directa de dicho teorema no bastarán para aprobar el práctico.**)

(b) Modifique, en base a las ecuaciones desarrolladas en el inciso anterior, la función presentada en el ejercicio 6.b) de manera que permita computar los coeficientes del trazador cúbico sujeto. Se debe preveer el ingreso de los valores de la derivada de la función en los extremos del intervalo de interpolación.

(c) (No entregar - Utilizar sólo para probar la función desarrollada en el inciso anterior). Encuentre el trazador cúbico sujeto $S(x)$ definido en el intervalo $[1, 3]$ tal que

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0 + b_0(x - 1) + c_0(x - 1)^2 + d_0(x - 1)^3, & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ S_1(x) = a_1 + b_1(x - 2) + c_1(x - 2)^2 + d_1(x - 2)^3, & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

siendo que $f(1) = 0$, $f(2) = 4$, $f(3) = 22/3$ y asumiendo que $f'(1) = f'(3) = 3$. Utilice la función `[a,b,c,d]=cubic_spline_clamped(x,f,df)` desarrollada en el inciso anterior.

i	1	2	3	4	5
x_i	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
y_i	1.0000	1.2840	1.6487	2.1170	2.7183
x_i^2					
$x_i y_i$					
$P(x_i) = a_1 x_i + a_0$					

Table 1: Tabla de datos ej8.

Tensión [MPa]	34.5	69.0	103.5	138.0
Deformación [mm] - Test 1	0.46	0.95	1.48	1.93
Deformación [mm] - Test 2	0.34	1.02	1.51	2.09
Deformación [mm] - Test 3	0.73	1.10	1.62	2.12

Table 2: Tabla de datos ej9 - Ensayos de tracción.

(d) Se quiere determinar la trayectoria plana seguida por un brazo robot industrial (idealizado por un punto material) durante un ciclo de trabajo. El brazo robot debe satisfacer las siguientes restricciones: se debe encontrar en reposo en el punto $(0, 0)$ en el instantes inicial. Luego de $1s$ se debe encontrar en el punto $(1.5, 3)$, $1s$ después debe alcanzar el punto $(4, 5)$ y detenerse allí, para recomenzar inmediatamente su movimiento y alcanzar, luego de otro segundo más el punto $(3, 1)$ para finalmente retornar al origen luego de otro segundo más, donde quedará detenido para repetir el ciclo de trabajo.
Encuentre el trazador cúbico sujeto correspondiente utilizando el código desarrollado en el primer inciso y luego grafique en el plano la trayectoria encontrada.

Ejercicio 8: (Sección 8.1 del libro de Burden.) Derive el método de mínimos cuadrados para ajustar la recta que mejor aproxima a una colección de datos, (x_i, y_i), con $i = 1, 2, \cdots, m$. Luego, use los datos de la tabla 1 para obtener la aproximación y complétela.

Ejercicio 9:(Entregar) Se realizaron tres ensayos de tracción sobre una barra de aluminio. En cada ensayo, se midieron cuatro valores de la deformación, para los mismos valores de la tensión aplicada entre ensayo y ensayo. Los resultados se muestran en la tabla (2). Utilizar regresión lineal para estimar el módulo de elasticidad de la barra.

Ejercicios sugeridos: S.3.1:1-3,7-9,15,16,24,25; **S.3.2**:1,4,12-15; **S.3.3**:1,3a,3c,4,7; **S.3.4**:1-6,8-10,24-29; **S.8.1**:1-4,5a-d,6,7,9-12.