Cálculo Numérico 2015
Trabajo Práctico 6

Diferenciación e integración numérica

Ejercicio 1:

(a) Mediante el polinomio de interpolación de Lagrange derive la fórmula de derivación progresiva de dos puntos.

(b) Estime el orden del error al aproximar la derivada primera de una función mediante la fórmula de dos puntos del ejercicio $1a$.

Ejercicio 2:

(a) Mediante el polinomio de interpolación de Lagrange derive la fórmula de derivación centrada de tres puntos, donde $x_0 = x_1 - h$, x_1 y $x_2 = x_1 + h$, siendo h el tamaño del paso.

(b) Estime el orden del error al aproximar la derivada mediante la fórmula de tres puntos del ejercicio $2a$.

(c) Utilice la expresión del segundo polinomio de Taylor para obtener la fórmula de derivación centrada de tres puntos. Notar que se obtiene la misma fórmula que en el ejercicio $2a$.

(d) Compare los resultados obtenidos en los ejercicios $1b$ y $2b$.

Ejercicio 3: El objetivo de este ejercicio es estimar numéricamente la derivada de la función $f(x) = \exp(x) - 2x^2 + 3x - 1$ en el punto $x_0 = 0.0$.

(a) Utilice primero la fórmula de dos puntos progresiva barriendo un rango de tamaños para h y observando como varía el error absoluto en la estimación de la derivada primera de la función. Grafique la curva del error para $h = [10^{-11}, 10^{-1}]$ y saque conclusiones.

(b) Tomando $h = 0.1$ compruebe que se verifica la cota del error teórico para esta fórmula

$$|f'(x_0) - P_1'(x_0)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} h$$

(c) Repita el ejercicio $3a$ utilizando ahora la fórmula de diferenciación centrada de tres puntos. Saque conclusiones comparando los resultados obtenidos con aquellos del inciso $3a$.

Ejercicio 4: Mediante los polinomios de Taylor de tercer grado, derive la fórmula para la derivada segunda centrada de $f(x)$ con $\xi \in (x - h, x + h)$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$$

Ejercicio 5:

(a) Derive la regla del trapecio o fórmula de Newton Cotes para $n = 1$, con nodos $x_0 = a$ y $x_1 = b$ y obtenga su término del error.

(b) Derive la fórmula de Newton Cotes para $n = 2$ y $[a, b] = [0, 1]$. Luego, obtenga la misma fórmula mediante el método de los coeficientes indeterminados.

(c) Dado que a partir de la fórmula de integración en un intervalo se puede deducir la expresión correspondiente para cualquier otro intervalo mediante un cambio de variables lineal, entonces tendremos la misma exactitud en ambas fórmulas. Dada la fórmula

$$\int_c^d f(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(t_i)$$

calcule la nueva fórmula

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

mediante el cambio de variable $x = \lambda(t)$, donde t recorre el $[c, d]$ y $\lambda(t)$ recorre el $[a, b]$.

(d) Con la información de los ejercicios 5b y 5c derive la regla de Simpson. Esta es la fórmula de Newton Cotes obtenida en el ejercicio 5b pero aplicada en un intervalo genérico $[a, b]$.

Ejercicio 6: Implemente una función de Scilab / Octave: `[s] = simp_comp(f,a,b,M)` que lleve a cabo la aproximación a la integral mediante la regla de Simpson compuesta

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + f(b)] + \frac{2h}{3}\sum_{k=1}^{M-1} f(x_{2k}) + \frac{4h}{3}\sum_{k=1}^{M} f(x_{2k-1})$$

En esta fórmula, $f(x)$ se evalua en los $2M + 1$ nodos equiespaciados $x_k = a + kh$, para $k = 0, 1, \cdots, 2M$. Notar que $x_0 = a$ y $x_{2M} = b$.

Cuadratura de Gauss: en las fórmulas de Newton-Cotes los nodos se eligen a priori e igualmente espaciados. Luego, se calculan los coeficientes de la cuadratura utilizando los polinomios de Lagrange o el método de coeficientes indeterminados. En cambio, para las fórmulas de cuadratura Gaussiana se calculan no sólo los coeficientes de la cuadratura sino también las coordenadas de los nodos de forma tal de reducir el error al aproximar

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i)$$

Con esta generalización el grado de la clase de polinomios para la cuál la aproximación será exacta es mayor.

Ejercicio 7:

(a) Obtenga el grado de precisión de la fórmula de cuadratura de Gauss:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\sqrt{3}/3) + f(\sqrt{3}/3)$$

(b) La siguiente fórmula de cuadratura es exacta para todo polinomio de grado menor o igual que 2. Determine las constantes c_0, c_1 y c_2

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = c_0 f(-1) + c_1 f(0) + c_2 f(1)$$

Ejercicio 8: Aproxime el valor de la siguiente integral usando cuadratura de Gauss con n=2 (número de puntos de integración). Compare este resultado con el valor exacto de la integral y con aquél obtenido mediante la regla de Newton-Cotes que utiliza igual cantidad de puntos de integración.

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

Repita el ejercicio con n=3.

Ejercicio 9: (Entregar) Realice el ejercicio 20 de la sección 4.1, página 178, del libro de Burden y Faires 7ma Edición.

Ejercicio 10: (Entregar) Repita el ejercicio 8 de esta guía pero con la integral del ejercicio 1.e) de la sección 4.7, página 226, del libro de Burden y Faires 7ma Edición y **sólo para n=3**. Luego, resuelva la integral utilizando la función `[s] = simp_comp(f,a,b,M)` implementada en el ejercicio 6, utilizando 5 pares de subintervalos. Realice los comentarios pertinentes acerca de la precisión de cada uno de los métodos utilizados.

Ejercicios sugeridos: S.4.1:1-7,13,14,19; **S.4.3**:1-4,7,9,10,11,13,15 (sólo para trapecio y Simpson), 16; **S.4.4**:1,2,4a,4b,5,7a,7b,8,9a,9b,17-19, 21,22; **S.4.7**:1-3,5.