Solución numérica de problemas de valores de contorno

En ecuaciones diferenciales ordinarias

Victorio E. Sonzogni

Problema de Valor de Contorno

- En la sección anterior hemos visto PVI del tipo

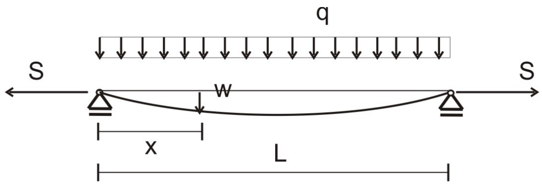
$$\begin{cases} y'' &= f(x, y, y') \quad \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \bar{y}_a \\ y'(a) &= \bar{y}'_a \end{cases}$$

- Hay veces en que el problema está planteado:

$$\begin{cases} y'' &= f(x, y, y') \quad \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \bar{y}_a \\ y(b) &= \bar{y}_b \end{cases}$$

Se denomina *Problema de Valor de Borde* ó *Problema de Valor de Frontera* ó *Problema de Valor de Contorno* (en inglés *Boundary Value Problem*)

Problema de Valor de Contorno



- Ejemplo: Sea una viga simplemente apoyada de longitud L sometida a una carga transversal q y a fuerzas de tracción S en los extremos. La ecuación de equilibrio de un segmento diferencial da:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{S}{EI}\,w + \frac{q}{2EI}\,x(x-L) = f(x,w)$$

donde $w(x)$: desplazamiento transversal; EI: rigidez seccional.

- El problema se escribe:

$$\begin{cases} w'' = f(x,w) & \text{para } 0 \leq x \leq L \\ w(0) = 0 \\ w(L) = 0 \end{cases}$$

- Las condiciones de contorno expresan que el desplazamiento transversal es nulo sobre los apoyos.

Existencia y unicidad de la solución

- No siempre un PVC tiene solución única.

Teorema:
Sea

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') & \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

donde f es *continua* en el conjunto
$D = \{(x,y,y') \mid x \in [a,b], y \in [-\infty,\infty], y' \in [-\infty,\infty],\}$
y además $\frac{\partial f}{\partial y}$ y $\frac{\partial f}{\partial y'}$ son *continuas* en D.

Si

i) $\frac{\partial f}{\partial y} > 0 \quad \forall (x,y,y') \in D$

ii) $\exists$ constante M tal que $|\frac{\partial f}{\partial y'}| \leq M \quad \forall (x,y,y') \in D$

entonces el PVC *tiene* una solución *única*.

Existencia y unicidad de la solución

Ejemplo::

Sea

$$\begin{cases} y'' & = & -e^{-xy} - \sin y' & \text{, para } 1 \le x \le 2 \\ y(1) & = & 0 \\ y(2) & = & 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} \;=\; x\ e^{-xy} \;> 0 \qquad \forall x \in [1,2]$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} \;=\; -\cos y'$$

$$|\frac{\partial f}{\partial y'}| \;\le\; 1 \qquad \forall x \in [1,2]$$

Verifica las condiciones del teorema anterior, entonces el PVC tiene *una solución* única*.*

PVC lineales

- Si la funcion $f(x, y, y')$ puede espresarse:

$$f(x,y,y') \;=\; p(x)\ y' \;+\; q(x)\ y \;+\; r(x)$$

  la ecuación diferencial $y'' = f$ se dice *lineal*.
- Corolario:
  Si el PVC

$$\begin{cases} y'' & = & p(x)\ y' + q(x)\ y + r(x), \quad \text{para } \; a \le x \le b \\ y(a) & = & \alpha \\ y(b) & = & \beta \end{cases}$$

  satisface:
  1) p, q, r son continuas en $[a, b]$
  2) $q > 0$ en $[a, b]$

  entonces tiene solución única.

Método del disparo

- Sea el PVC

$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') & \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) = \alpha \\ y(b) = \beta \end{cases}$$

- Se puede resolver el PVI:

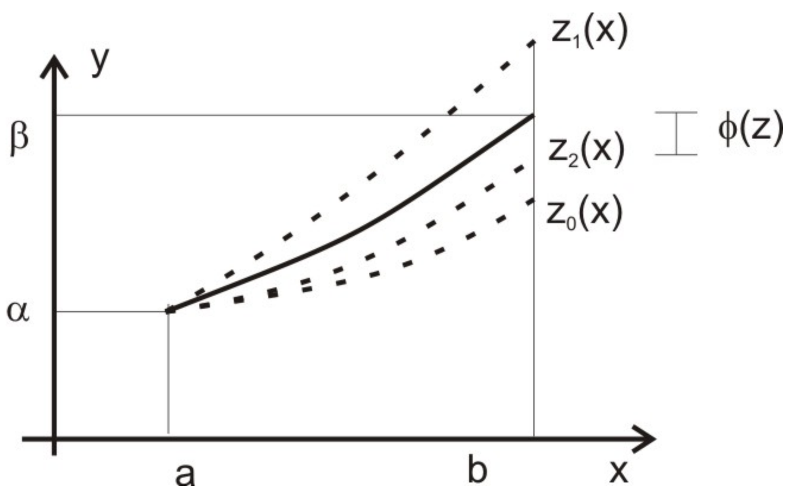
$$\begin{cases} y'' = f(x,y,y') & \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) = \alpha \\ y'(a) = z \end{cases}$$

  donde se ha colocado una condición $y'(a) = z$. A la solución la designamos $y_z(x)$
- Se evalúa $y_z(b)$ y

$$\phi(z) = y_z(b) - \beta$$

- Se busca el valor de z tal que $\phi(z) = 0$. La solución $y_z(b)$ será la solución del PVC buscada.

Método del disparo



Método del disparo

- La ecuación $\phi(z) = 0$ es no lineal. Se puede resolver por alguno de los métodos estudiados (bisección, secante, etc.)
- Si se usa (por ej.) el método de la secante, suponiendo calculado $\phi(z_1)$ y $\phi(z_2)$ para dos puntos z_1 y z_2
  Se busca z_3 que haga $\phi = 0$:

$$z_3 \;=\; z_2 \;-\; \frac{\phi(z_2)}{\phi(z_1) - \phi(z_2)}(z_1 - z_2)$$

Algoritmo del Método del disparo (+ M. Secante)

Para resolver:

$$\begin{cases} y'' &= f(x, y, y') \quad \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{cases}$$

Entrada: $a, b, \alpha, \beta, N, Tol, Kmax$
Salida: y_i, $(i = 0, 1, 2 \ldots)$

1) $h \leftarrow (b - a)/N$; $k \leftarrow 2$; $z \leftarrow (\beta - \alpha)/(b - a)$; $y_0 \leftarrow \alpha$; $y'_0 \leftarrow z$
2) Para $i = 1, 2, \ldots N$ resolver el PVI (con M. Euler, M. R-Kutta, etc.) con $y'_0 = 0 \quad \Rightarrow y_N$
3) $\phi \leftarrow (y_N - \beta)$; $z_a \leftarrow z$; $z \leftarrow (y_N - \alpha)/(b - a)$; $\Delta z \leftarrow z - z_a$
4) Mientras $k < Kmax$ hacer:
   - 4.1) Para $i = 1, 2, \ldots N$ resolver el PVI (Euler,R-Kutta, etc.) con $y'_0 = z \quad \Rightarrow y_N$
   - 4.2) Si $|y_N - \beta| < Tol \quad \rightarrow$ SALIR
   - 4.3) $z \leftarrow z_a - \frac{(y_N - \beta)\Delta z}{(\phi - (y_N - \beta))}$; $\phi \leftarrow y_N - \beta$; $\Delta z \leftarrow z - z_a$; $z_a \leftarrow z$
   - 4.4) $k \leftarrow k + 1$, va a (4).
5) Mensaje de error.

Método del disparo para PVC Lineales

- Sea el PVC

$$\begin{cases} y'' &= py' + qy + r \quad \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{cases} \tag{1}$$

- Supóngase los 2 PVI:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' &= py' + qy + r \quad \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) &= \alpha \\ y'(a) &= z_1 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y'' &= py' + qy + r \quad \text{, para } a \le x \le b \\ y(a) &= \alpha \\ y'(a) &= z_2 \end{cases}$$

cuyas soluciones son, respectivamente, $y_1(x)$ e $y_2(x)$.

- Si escribimos una combinación lineal de ambas:

$$y(x) = \lambda\ y_1(x) + (1 - \lambda)\ y_2(x) \tag{2}$$

se puede verificar que $y(x)$ satisface la ecuación diferencial y la primera condición de contorno del PVC (1).

- Para hacer cumplir la segunda condición hacemos:

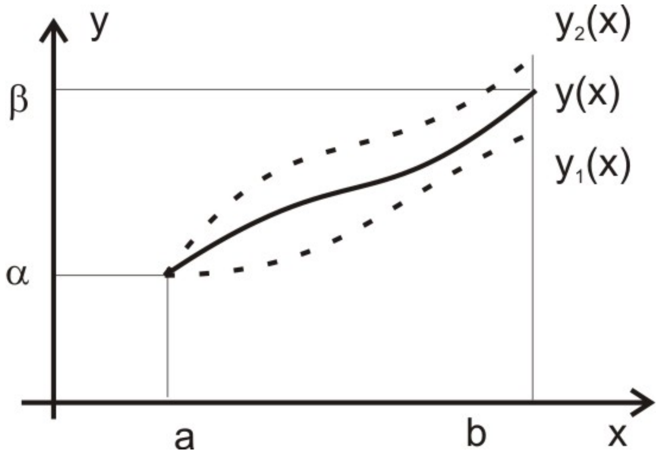
$$y(b) = \beta$$

$$\lambda\ y_1(b) + (1 - \lambda)\ y_2(b) = \beta$$

de alli:

$$\lambda = \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}$$

- Con ese lambda, la función $y(x)$, ec. (2) es la solución de (1).



- Para programarlo:

$$(a) \quad \begin{cases} y'' = f(x,y,y') & ,\text{para } a \le x \le b \\ y(a) = \alpha & \\ y'(a) = 0 & \end{cases} \quad \Rightarrow y_1$$

$$(b) \quad \begin{cases} y'' = f(x,y,y') & ,\text{para } a \le x \le b \\ y(a) = \alpha & \\ y'(a) = 1 & \end{cases} \quad \Rightarrow y_2$$

- Si llamamos: $y_0 = x$; $\quad y_3 = y_1'$; $\quad y_4 = y_2'$
  nos queda un PVI con un sistema de EDO:

$$\begin{cases} y_0' = 1 & y_0(a) = a \\ y_1' = y_3 & y_1(a) = \alpha \\ y_2' = y_4 & y_2(a) = \alpha \\ y_3' = f(y_0, y_1, y_3) & y_3(a) = 0 \\ y_4' = f(y_0, y_2, y_4) & y_4(a) = 1 \end{cases}$$

- Luego se calcula λ y se usa la ec. (2)

Método de diferencias finitas para PVC Lineales

- Sea el PVC

$$\begin{cases} y'' &= py' + qy + r \quad \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \alpha \\ y(b) &= \beta \end{cases}$$

- Este problema puede resolverse por el *Método de las Diferencias Finitas*. Este método sirve también para problemas no lineales, pero se presentará aquí para un problema lineal por sencillez.
- Se divide el intervalo $[a, b]$ en $N + 1$ subintervalos igualmente espaciados, con un paso: $h = \frac{b-a}{N+1}$.
Se define $x_0 = a$; $x_{n+1} = b$, y N *puntos* o *nodos* interiores $x_i = x_0 + i\ h$.
- De la ecuación diferencial, en cada uno de los nodos

$$y''(x_i) \ = \ p(x_i)y'(x_i) \ + \ q(x_i)y(x_i) \ + \ r(x_i) \tag{1}$$

- El Método de las Diferencias Finitas se basa en sustituir las derivadas por fórmulas en diferencias.
- Fórmula en diferencias finitas centradas para la derivada primera:

$$y'(x_i) \ = \ \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Fórmula en diferencias finitas centradas para la derivada segunda:

$$y''(x_i) \ = \ \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Así se eliminan las derivadas y el problema se transforma en un sistema de ecuaciones algebraicas lineales (un sistema de N ecuaciones con N incógnitas).

Obtención de fórmulas en diferencias

- Expandiendo en serie de Taylor:

$$y(x_{i+1}) = y(x_i + h) = y(x_i) + h\ y'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) + \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i - h) = y(x_i) - h\ y'(x_i) + \frac{h^2}{2}y''(x_i) - \frac{h^3}{3!}y'''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi)$$

- Sumando:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi)$$

- De alli la fórmula en diferencias finitas para derivada segunda:

$$y''(x_i) \;=\; \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Análogamente, restando las dos expansiones arriba, se obtiene la fórmula en diferencias finitas para la derivada primera:

$$y'(x_i) \;=\; \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Sustituyendo las fórmulas en diferencias en (1) (y llamando $y_i = y(x_i)$, etc.):

$$\frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = \frac{p_i}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) + q_i y_i + r_i \qquad (i = 1, 2, \ldots N)$$

que puede escribirse:

$$(-1 - \frac{h}{2}p_i)\ y_{i-1} + (2 + h^2 q_i)\ y_i + (-1 + \frac{h}{2}p_i)\ y_{i+1} = -h^2\ r_i \quad (i = 1, \ldots N)$$

Esto es un sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\mathbf{Ay} = \mathbf{f}$$

- Siendo la matriz tridiagonal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2+h^2\ q_1 & -1+\frac{h}{2}p_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1-\frac{h}{2}p_2 & 2+h^2\ q_2 & -1+\frac{h}{2}p_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1-\frac{h}{2}p_3 & 2+h^2\ q_3 & -1+\frac{h}{2}p_3 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & \dots & 0 & -1-\frac{h}{2}p_{N-1} & 2+h^2\ q_{N-1} & -1+\frac{h}{2}p_{N-1} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -1-\frac{h}{2}p_N & 2+h^2\ q_N \end{bmatrix}$$

y el vector de incógnitas y términos independientes:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_N \end{bmatrix} \qquad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} -h^2\ r_1 + (1+\frac{h}{2}p_1)\ \alpha \\ -h^2\ r_2 \\ -h^2\ r_3 \\ \dots \\ -h^2\ r_N + (1+\frac{h}{2}p_N)\ \beta \end{bmatrix}$$

- Las condiciones de contorno, que aparecen en la primera y última ecuación han sido pasadas al miembro izquierdo.

Teorema:

Sean p, q y r continuas en $[a, b]$. Si $q \geq 0\ \forall x \in [a, b]$ entonces el sistema $\mathbf{Ay} = \mathbf{f}$ indicado arriba tiene solución única, siempre que:

$$h < \frac{2}{L}$$

donde

$$L = \max_{x \in [a,b]} |p(x)|$$

- El Método de Diferencias Finitas suele ser preferido frente al Método del Disparo, pues es más estable.
- Requiere resolver un sistema de N ecuaciones con N incógnitas.
- La matriz es fácil de construir y es tridiagonal.

Método de los Residuos Ponderados

- Sea el PVC:

$$\begin{cases} y'' &= f(x,y,y') \quad \text{, para } a \leq x \leq b \\ y(a) &= \bar{y}_a \\ y(b) &= \bar{y}_b \end{cases}$$

El mismo puede escribirse:

$$\begin{cases} L\ y &= p \quad \text{en } \Omega \\ B\ y &= \bar{q} \quad \text{en } \Gamma \end{cases}$$

donde L es un operador diferencial (lineal) aplicado a y; del mismo modo B es un operador que da forma a las condiciones de contorno en el borde Γ del dominio Ω.

- Se construye una *aproximación* a la solución buscada:

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i\ \phi_i(x)$$

donde las funciones $\phi_i(x)$ son conocidas, y los coeficientes a_i son incógnitas.

- Estos métodos difieren en cómo hallar los a_i de modo de que la aproximación $\tilde{y}$ sea lo más parecida posible a la solución y.
- La ecuación diferencial puede escribirse:

$$L\ y(x) - p(x) = 0$$

- Si se reemplaza por la aproximación:

$$L\ \tilde{y}(x) - p(x) = r(x)$$

- La función $r(x)$ es el *residuo* de la ecuación, y nos interesaría que $r(x) = 0$

- Los métodos de residuos ponderados buscan que el promedio del error sea cero:

$$\int_a^b r(x)\ dx \ = \ 0$$

- O mejor, un promedio ponderado:

$$\int_a^b r(x)\ w_j(x)\ dx \ = \ 0 \quad j = 0, \ldots n$$

- Esto último conduce a un sistema de $n+1$ ecuaciones de donde pueden despejarse las $n+1$ incógnitas a_j
- Hay varias posibilidades para elegir las funciones de peso $w(x)$ y cada una da lugar a un método diferente

1) Método de colocación por puntos:

$$w_j(x) = \delta(x - x_j)$$

donde $\delta(x)$ es la función de Dirac (es cero en todo el eje excepto en x_j donde toma valor infinito, pero su integral es finita).
Esta elección de w equivale a hacer:

$$r(x_j) \ = \ 0 \qquad j = 0, 1, \ldots n$$

o sea se anula el residuo en los $n+1$ puntos x_j.

2) Método de los Momentos:

$$w_j(x) \ = \ x^j$$

Las ecuaciones son:

$$\int_a^b r(x)\ dx \ = \ 0$$

$$\int_a^b r(x)\ x\ dx \ = \ 0$$

$$\int_a^b r(x)\ x^2\ dx \ = \ 0$$

3) Método de mínimos cuadrados:

$$w_j(x) = \frac{\partial r(x)}{\partial a_j}$$

y esto equivale a:

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \int_a^b [r(x)]^2 \, dx \;=\; 0$$

Si L es lineal, esto lleva a una matriz simétrica, pero del mismo orden de diferenciación que L.

3) Método de Galerkin:

$$w_j(x) \;=\; \phi_j(x)$$

$$\int_a^b [\phi_j(x)(\sum_{i=0}^{n} a_i \; L \; \phi_i(x)) \;-\; \phi_j(x) \; p(x)] \; dx \;=\; 0 \quad j = 0, 1 \ldots n$$

en este caso la matriz resulta simétrica.

- En la aproximación $\tilde{y}$ las funciones $\phi_j(x)$ deben cumplir las condiciones de contorno.
- Esto puede hacer más dificil la construcción de $\tilde{y}$.
- Otra forma es la de agregar al residuo las ecuaciones sobre el contorno. En este caso las $\phi_j(x)$ no precisan cumplir las condiciones de contorno, sino que estas son aproximadas, al igual que la ecuación diferencial.

- Son ecuaciones en las que la función depende de varias variables
- Hay ecuaciones de distintos órdenes de derivación y de distintos tipos
- Veremos ecuaciones *Lineales*.
- Una ecuación lineal de segundo orden, donde la función incógnita depende de 2 variables es:

$$a_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)$$

donde $phi = \phi(x, y)$, $\phi_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, etc.

- Estas ecuaciones aparecen en numerosos problemas físicos.

- Se suelen clasificar en:
  - Elípticas, si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$
  - Parabólicas, si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$
  - Hiperbólicas, si $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$
- Ejemplo de ecuación elíptica: Conducción del Calor (estacionario)

$$\Delta\theta = f$$

donde $\theta = \theta(x, y)$, $\Delta\theta = \nabla^2\theta = \theta_{xx} + \theta_{yy}$

- Ejemplo de ecuación parabólica: Conducción del Calor (transitorio)

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + f(x, t)$$

donde $\theta = \theta(x, t)$, $a^2 = \frac{k}{c\rho}$ siendo k la conductividad térmica del medio, c su calor específico, y ρ su densidad.

- Ejemplo de ecuación hiperbólica: Cuerda vibrante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

donde $u = u(x,t)$, $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ siendo T la tensión en la cuerda, y ρ la densidad del material.

Condiciones de Contorno

- Necesarias para resolver el problema
- La cantidad debe ser igual al orden de derivación
- Hay de distintos tipos:
  - Sobre las variables primales del problema:

    $\phi|_\Gamma = \bar{\phi}$ $\rightarrow$ Condiciones de Dirichlet
  - Sobre las derivadas de las variables primales del problema:

    $\left.\frac{\partial \phi}{\partial n}\right|_\Gamma = \bar{q}$ $\rightarrow$ Condiciones de Neumann
  - Una combinación de las anteriores:

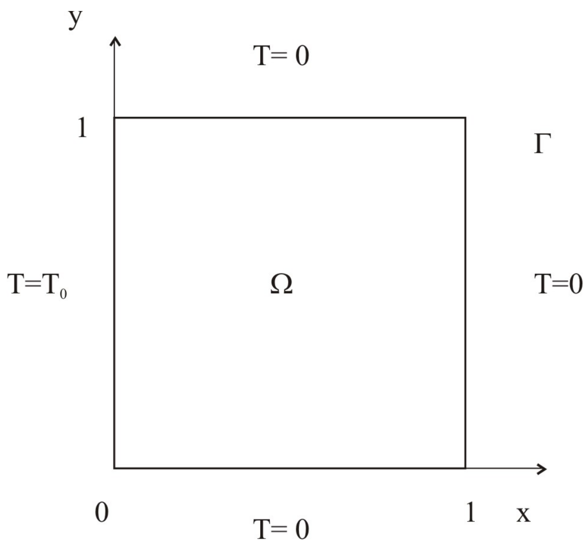
    $\left.(a\,\phi + b\,\frac{\partial \phi}{\partial n})\right|_\Gamma = \bar{g}$ $\rightarrow$ Condiciones de Robin

Ecuaciones Elípticas Lineales

- Ejemplo: Conducción del calor estacionaria.

  Se desea encontrar la temperatura $T(x, y)$ en un dominio cuadrado.

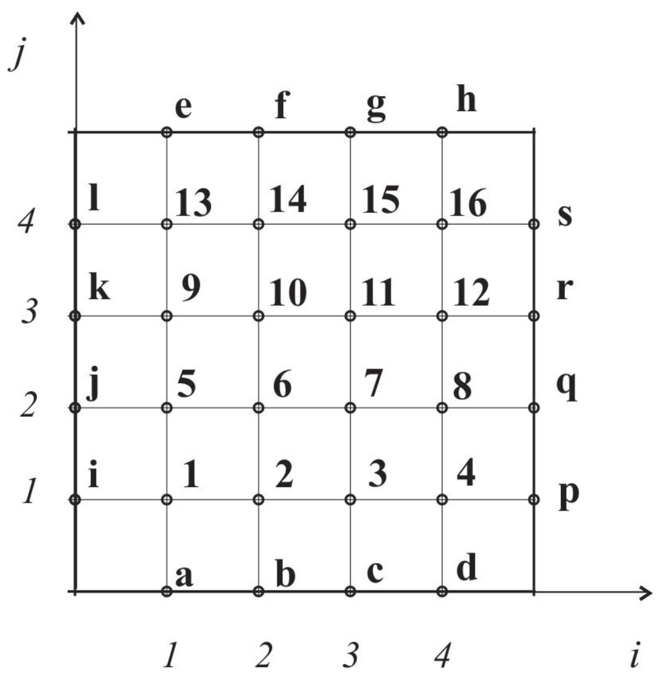
  El problema está gobernado por la ecuación de Laplace:



$$\begin{cases} \nabla^2 T = 0 & en\ \Omega \\ T(0,y) = T_0 & \\ T(1,y) = 0 & \\ T(x,0) = 0 & en\ \Gamma \\ T(x,1) = 0 & \end{cases}$$

Método de Diferencias Finitas

- El problema continuo se reemplaza por uno discreto.
- Se traza una grilla que define puntos nodales ($n \times m$ nodos)



- Para aplicar diferencias finitas en un problema en una dimensión, se divide el dominio (un intervalos $[a, b]$) en $N+1$ subintervalos igualmente espaciados, con un paso: $h = \frac{b-a}{N+1}$.
- Se define $x_0 = a$; $x_{n+1} = b$, y N *puntos* o *nodos* interiores $x_i = x_0 + i\ h$.
- Se utiliza la notación y_i para referirse a la función $y(x)$ evaluada en el punto x_i.

$$
\begin{aligned}
y_i &= y(x_i) \\
y_{i+1} &= y(x_{i+1}) = y(x_i + h)
\end{aligned}
$$

etc.

- Las derivadas se reemplazan por fórmulas en diferencias.
- Por ejemplo, usando una fórmula de tres puntos, la derivada segunda puede escribirse:

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$$

- Pueden usarse fórmulas con más puntos, que aproximan con menor error la derivada segunda.
- La obtención de esta fórmula de 3 puntos se muestra a continuación.

Obtención de fórmulas en diferencias, para derivadas ordinarias.

- Expandiendo en serie de Taylor:
  $y(x_{i+1}) = y(x_i+h) = y(x_i)+h\,y'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)+\frac{h^3}{3!}y'''(x_i)+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi)$
  $y(x_{i-1}) = y(x_i-h) = y(x_i)-h\,y'(x_i)+\frac{h^2}{2}y''(x_i)-\frac{h^3}{3!}y'''(x_i)+\frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi)$
- Sumando:

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + h^2 y''(x_i) + \frac{h^4}{4!}y^{(4)}(\xi)$$

- De alli la fórmula en diferencias finitas para derivada segunda:

$$y''(x_i) \;=\; \frac{1}{h^2}[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- Análogamente, restando las dos expansiones arriba, se obtiene la fórmula en diferencias finitas para la derivada primera:

$$y'(x_i) \;=\; \frac{1}{2h}[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})] + O(h^2)$$

- En el caso de funciones de 2 variables se procede de forma análoga.
- Se designará T_i, j a la temperatura del nodo de la grilla de diferencias finitas, donde i y j son las numeraciones según x e y de los nodos (ver figura anterior). El tamaño de paso h es el mismo para los intervalos horizontales y verticales de la malla.
- Así las derivadas parciales pueden escribirse:

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right|_{(i,j)} = \frac{T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}}{h^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right|_{(i,j)} = \frac{T_{i,j-1} - 2T_{i,j} + T_{i,j+1}}{h^2}$$

Solución por el método de diferencias finitas

- La ecuación diferencial

$$\Delta T \;=\; \nabla^2 T \;=\; \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \;=\; 0$$

- Sustituyendo las derivadas por fórmulas en diferencias queda:

$$4T_{i,j} - T_{i,j-1} - T_{i,j+1} - T_{i-1,j} - T_{i+1,j} = 0 \quad \text{para } (i = 1, n)\ (j = 1, m)$$

- Y las condiciones de contorno:

$$\left\{\begin{array}{rcl} T(0,j) & = & T_0 \\ T(n+1,j) & = & 0 \\ T(i,0) & = & 0 \\ T(i,m+1) & = & 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{ para } (j = 1, m) \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{ para } (i = 1, n) \end{array}$$

- Queda así un sistema de $n \times m$ ecuaciones

$$\mathbf{AT} = \mathbf{b}$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & \dots & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -1 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & & & & \\ \dots & & & & & & & & \\ 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

- El vector de incógnitas tiene $n \times m$ incógnitas. En el caso del ejemplo, corresponde a 16 nodos numerados de 1 a 16.
- Los nodos designados con letras, en el dibujo, son los que tienen impuestas las condiciones de contorno.
- La matriz, en ese ejemplo, tiene 16×16 elementos.

- El vector de incógnitas nodales, en este ejemplo tiene la temperaturas:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{1,1} \\ T_{2,1} \\ T_{3,1} \\ \dots \\ T_{4,4} \end{bmatrix}$$

- Y el de términos independientes:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -T_{0,1} - T_{1,0} \\ -T_{2,0} \\ -T_{3,0} \\ \dots \\ -T_{4,5} - T_{5,4} \end{bmatrix}$$

- La solución de ese sistema proporciona el vector $\mathbf{T}$ con los valores nodales de la temperatura, que es la solución discreta del problema planteado.
- Esta solución es aproximada, ya que la fórmula para las derivadas utilizada es una aproximación a la derivada real.
- El error de aproximación puede disminuirse achicando el tamaño del paso h, con lo cual crece el tamaño del sistema a resolver.
- Puede demostrarse que el sistema de ecuaciones algebraicas puede resolverse y tiene solución única, siempre que el tamaño de paso h esté por debajo de un valor crítico dictado por condiciones de establilidad.