Informe IV: Trabajo Práctico 6

Edgardo Cipolatti
edgardocipolatti@hotmail.com

I. EJERCICIO 9

En un circuito con un voltaje impreso $\varepsilon(t)$ y una inductacia L, la primera ley de Kirchhoff nos da la siguiente relación

$$\varepsilon(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$$

donde R es la resistencia del circuito e i es la corriente. Suponga que medimos la corriente con varios valores de t y obtenemos:

t	1.00	1.01	1.02	1.03	1.04
i	3.10	3.12	3.14	3.18	3.24

donde t se mide en segundos, i se da en amperes, la inductancia L es una constante de $0{,}98$ Henries y la resistencia es de $0{,}142$ ohms. Aproxime el voltaje $\varepsilon(t)$ en los valores $t = 1{,}00$, $1{,}01$, $1{,}02$, $1{,}03$ y $1{,}04$

Para poder estimar el valor del voltaje $\varepsilon(t)$ en los distintos instantes de tiempo, usando la fórmula diferencial de la Ley de Kirchoff, se requiere conocer la variación de la corriente i en función del tiempo. Como no conocemos esta función ni su derivada primero tenemos que utilizar un método numérico para hallar una aproximación a la derivada; y, posteriormente usar la fórmula para hallar el valor de $\varepsilon(t)$.

Utilizando la ecuación de segundo orden de Taylor

$$i(t) = i(t_0) + i'(t_0)(t-t_0) + i''(t_0)\frac{(t-t_0)^2}{2} + i'''(\xi)\frac{(t-t_0)^3}{6} \tag{1}$$

con $t = t_0 + h$ nos queda:

$$i(t_0+h) = i(t_0) + i'(t_0)h + i''(t_0)\frac{h^2}{2} + i'''(\xi)\frac{h^3}{6} \tag{2}$$

con $t = t_0 + 2h$ nos queda:

$$i(t_0+2h) = i(t_0) + i'(t_0)2h + i''(t_0)2h^2 + i'''(\xi)\frac{4h^3}{3} \tag{3}$$

entonces si multiplico por 4 la ecuación 2, le resto la ecuación 3y opero algebraicamente obtengo

$$i'(t_0) = \frac{1}{2h}[4i(t_0+h) - i(t_0+2h) - 3i(t_0)] + i'''(\xi)\frac{h^2}{3} \tag{4}$$

Esta última, la ecuacion 4, es la fórmula progresiva de 3 puntos y aproxima a la derivada de la función.
Si reemplazamos en 1 a t_0 por $t_0 - h$ obtengo

$$i(t_0-h) = i(t_0) + i'(t_0)(-h) + i''(t_0)\frac{h^2}{2} + i'''(\xi_1)\frac{-h^3}{6} \tag{5}$$

Si ahora resto a 2 la ecuación 5 tengo como resultado la fórmula de aproximación a la derivada en el punto medio con tres puntos.

$$i'(t_0) = \frac{1}{2h}[i(t_0+h) - i(t_0-h)] + i'''(\xi)\frac{h^2}{3} \tag{6}$$

Para conseguir la formula de aproximación a la derivada de forma regresiva con tres puntos reemplazo en 1 a t_0 por $t_0 - 2h$ y tengo

$$i(t_0-2h) = i(t_0) + i'(t_0)(-2h) + i''(t_0)2h^2 + i'''(\xi)\frac{-4h^3}{3} \tag{7}$$

y a esta ecuación le tengo que restar 4 veces la ecuación 5 y la fórmula regresiva me queda

$$i'(t_0) = \frac{1}{2h}[i(t_0-2h) - 4i(t_0-h) + 3i(t_0)] - i'''(\xi)\frac{h^2}{3} \tag{8}$$

Para la resolución del ejercicio se utilizo la formula de aproximación progresiva para el extremo izquierdo del intervalo y la fórmula regresiva para el extremo derecho. En los puntos intermedios se utilizo la aproximación de la derivada centrada

t	i	$\frac{di}{dt}$	$\varepsilon(t)$
1.00	3.10	2	2.40020
1.01	3.12	2	2.40304
1.02	3.14	3	3.38588
1.03	3.18	5	5.35156
1.04	3.24	7	7.32008

TABLA 1
RESULTADOS DEL EJERCICIO 9

en el punto medio. Se utilizó siempre tres puntos para el cálculo de la aproximación de la derivada para mantener la precisión de los valores de voltaje, siendo el orden del término de error h^3.

En la tabla I se muestras los resultados obtenidos de las derivadas y los valores de voltaje en los tiempos del ejercicio.

II. EJERCICIO 10

Aproxime el valor de la siguiente integral usando cuadratura de Gauss con $n = 3$ (número de puntos de integración). Compare este resultado con el valor exacto de la integral y con aquél obtenido mediante la regla de Newton-Cotes que utiliza igual cantidad de puntos de integración.

$$\int_0^{\pi/4} e^{3x} sen(2x)dx$$

Luego, resuelva la integral utilizando la función $[s] = simp\_comp(f, a, b, M)$ utilizando 5 pares de subintervalos. Realice los comentarios pertinentes acerca de la precisión de cada uno de los métodos utilizados.

Para utilizar cuadratura gaussiana se debe hacer un cambio de variables ya que necesitamos que el intervalo de integración sea de -1 a 1. Para esto definimos $a = 0$ y $b = \frac{\pi}{4}$ y definimos la variable t como

$$t = \frac{2x - a - b}{b - a}$$

y por ende reemplazando a y b por sus valores y operando, tenemos que:

$$x = \frac{(t + 1)\pi}{8}$$

al realizar el cambio de variables en la integral que queremos aproximar nos queda

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{3\pi(t+1)}{8}} sen(\frac{(t + 1)\pi}{4})\frac{\pi}{8}dx$$

Si procedemos a aplicar el método de cuadratura gaussiana utilizando los coeficientes y los puntos en donde evaluar al función obtenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{3\pi(t+1)}{8}} sen(\frac{(t + 1)\pi}{4})\frac{\pi}{8}dx \approx 0,5555555556 * f(0,77459) + 0,8888888889 * f(0) + 0,5555555556 * f(-0,77459)$$

$$\approx 0,5555555556 * (3,127341238) + 0,8888888889 * (0,9019573886) + 0,5555555556 * (0,09019134533)$$

$$\approx 2,589258003$$

Utilizando Newton-Cotes para $n = 2$ y 3 puntos tenemos que obtener un tercer punto en el intervalo 0, $\pi/4$ pero como los subintervalos deben ser de igual tamaño este punto es el intermedio ($\pi/8$), entonces

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} sen(2x)dx \approx \frac{\pi}{3 * 8}[f(0) + f(\pi/8) + f(\pi/4)] \approx 2,593696403$$

Utilizando el algoritmo 1 (Simpson Compuesto) el cual recibe como parámetros los extremos de integración y el número de subintervalos que se deben crear, obtenemos como resultado que

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} sen(2x)dx \approx 2,588599828$$

En este caso particular se puede calcular la integral de manera exacta utilizando integrales por parte dos veces y despejando la integral de interés para obtener el resultado.

Método	Resultado	Error absoluto
Cuadratura de Gauss	2,589258003	0,00062937
Newton-Cotes	2,593696403	0,00506777
Simpson Compuesto	2,588599828	0,000028805
Analitico con Integrales por partes	2,588628633	0

TABLA 2
RESULTADOS DEL EJERCICIO 10

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} sen(2x)dx = -\frac{e^{3x}}{2}cos(2x) + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} cos(2x)dx$$

que sale de hacer

$$u = e^{3x} \qquad du = 3e^{3x}dx \qquad dv = sen(2x) \qquad v = -\frac{1}{2}cos(2x)$$

seguimos operando y hacemos de nuevo integral por partes

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} sen(2x)dx = -\frac{e^{3x}}{2}cos(2x) + \frac{3}{2}\left[\frac{e^{3x}}{2}sen(2x) - \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} sen(2x)dx\right]$$

que sale de hacer

$$u = e^{3x} \qquad du = 3e^{3x}dx \qquad dv = cos(2x) \qquad v = \frac{1}{2}sen(2x)$$

ahora despejando la integral que queremos evaluar tenemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{3x} sen(2x)dx = \frac{4}{13}\left[-\frac{e^{3x}}{2}cos(2x) + 3sen(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{13}e^{\frac{3\pi}{4}} + \frac{2}{13} = 2,588628633$$

En la tabla II se muestran los resultados obtenidos con cada método.

Como conclusión podemos decir que siempre que se pueda resolver la integral de forma analítica vamos a obtener el resultado exacto, pero muchas veces llegar al resultado resulta costo. Cuando es así, se debe recurrir a los métodos numéricos los cuales aproximan el resultado y como se puede ver en la tabla II el error es pequeño. El peor caso es de Newton-Cotes con un error de orden $O(h^5)$ mientras que Simpson Compuesto es el mejor con un error de orden $O(h^4)$

REFERENCIAS

[1] R. L. Burden, *Análisis Numérico*, 7th ed. Thomson Learning, 2002.
[2] V. Sonzogni, "Cálculo numérico - apuntes de cátedra," 2015.

ANEXO

A. APÉNDICE

A continuación se muestran los códigos utilizados para el desarrollo de este trabajo práctico:

```
function s = simpcomp(a,b,M)
   npts = 2*M + 1;
   x = linspace(a,b,npts);
   h = (b-a) / (2*M);
   s0 = feval(@f,x(1)) + feval(@f,x(npts));
   s1 = 0;
   for i = 1 : M - 1
      s1 = s1 + feval(@f,x(2*i+1));
   end
   s2 = 0;
   for i = 1 : M
      s2 = s2 + feval(@f,x(2*i));
   end
   s = h/3 * (s0 + 2*s1 + 4*s2);
end
```

Algoritmo 1: Simpson Compuesto

```
 function [y]=f(x)
   y=(exp(x*3))*sin(2*x);
end
```

Algoritmo 2: Función a evaluar