Cálculo Numérico 2014
Trabajo Práctico 2

Métodos directos para sistemas de ecuaciones lineales

Ejercicio 1: Dado el sistema

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & \alpha z & = & -2 \\ -x & + & 2y & - & \alpha z & = & 3 \\ \alpha x & + & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

(a) Obtenga los valores de α para los cuales el sistema no tiene solución.

(b) Encuentre los valores de α para los cuales el sistema tiene infinitas soluciones.

(c) Considerando que existe una solución única para un valor dado de α, encuentre la solución.

Ejercicio 2: Demuestre que si una matriz A es estrictamente diagonal dominante (e.d.d), es decir que sus elementos a_{ij} verifican

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

entonces resulta ser no singular. *Ayuda:* pruebe por contradicción que $Ax = 0$ implica $x = 0$.

Ejercicio 3: *i)* - Defina matriz simétrica definida positiva (s.d.p), *ii)* - Demuestre que si la matriz A es de orden n y s.d.p, entonces es no singular. *Ayuda:* pruebe por contradicción que $Ax = 0$ implica $x = 0$.

Ejercicio 4: Determine si la siguiente matriz es e.d.d y s.d.p. Justifique su respuesta.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Eliminación de Gauss y factorización de Doolittle: La eliminación de Gauss, en cualquiera de los ordenamientos kij, kji y jki (donde los índices k, i, j designan las posiciones de pivote, fila y columna respectivamente) permite reproducir la factorización de Doolittle $A = L_1U$ (donde L_1 una matriz triangular inferior con unos en su diagonal y U es triangular superior). En el algoritmo, se opta por escribir los elementos de las matrices L_1 y U sobre los de la matriz del sistema original, con lo cual se pierde dicha matriz pero se ahorra memoria RAM. Cuando se realiza intercambio de filas durante la eliminación, lo que se obtiene es la factorización L_1U de la matriz PA, donde P es la matriz de permutación.

Ejercicio 5

(a) Para la siguiente matriz, encuentre la factorización $(P^T L_1)U$, realizando la eliminación de Gauss con intercambio de filas según lo indica la estrategia de *pivoteo parcial.* Luego verifique que se cumple que $PA = L_1U$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 9 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

(b) En qué casos una matriz A se puede factorizar en la forma LU?

Ejercicio 6:

(a) Escriba funciones de Scilab u Octave que implementen los algoritmos para resolver un sistema triangular *superior* por sustitución hacia atrás y un sistema triangular *inferior* por sustitución hacia adelante.

(b) Póngalas a prueba sobre los siguientes sistemas:

- Sustitución hacia atrás

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- Sustitución hacia adelante: utilice la traspuesta de la matriz del sistema anterior y el mismo vector de términos independientes.

(c) Realice el conteo analítico de operaciones involucradas tanto en la sustitución hacia adelante como en la sustitución hacia atrás y responda cuál es la complejidad de los algoritmos.

(d) Modifique la función de sustitución hacia atrás de forma que permita resolver un sistema $\tilde{U}x = \tilde{b}$, donde $\tilde{U}$ y $\tilde{b}$ son obtenidos, correspondientemente, por permutaciones de las filas de la matriz triangular superior U y de los elementos del vector de términos independientes b. Las permutaciones son almacenadas en un vector `indx`.

Ejercicio 7:

(a) Escriba funciones de Scilab / Octave que permitan resolver el sistema lineal $Ax = b$ mediante la eliminación de Gauss siguiendo el orden kij. La primera de ellas *no* utizará pivoteo mientras que la segunda aplicará pivoteo *parcial* y devolverá, además de la solución, la matriz de permutación P y las matrices de la factorización (L_1 y U).
(Nota: *deberá utilizar la función de sustitución hacia atrás implementada en el ejercicio 6(d))*.

(b) Pruebe *ambas* funciones sobre los sistemas lineales formados por las siguientes matrices, asumiendo que el vector de términos independientes es el mismo para todos ellos ($b = [1 \quad 2 \quad 3]^T$). Calcule el residuo y saque conclusiones en cada caso.

$$A_1 = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 5.00e-02 & 5.57e+02 & -4.00e-02 \\ 1.98e+00 & 1.94e+02 & -3.00e-03 \\ 2.74e+02 & 3.11e+00 & 7.50e-02 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 8

(a) Encuentre las factorizaciones de Doolittle, Crout y Cholesky en lápiz y papel de la siguiente matriz y verifique en todos los casos que efectivamente se recupera la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 60 & 30 & 20 \\ 30 & 20 & 15 \\ 20 & 15 & 12 \end{bmatrix}$$

(b) Escriba una función de Scilab / Octave que implemente el algoritmo correspondiente a la factorización de Crout sin pivoteo y compruebe las cuentas realizadas en el item (a). La función recibe la matriz A y devuelve las matrices L y U_1.

(c) Escriba una función de Scilab / Octave que implemente el algoritmo correspondiente a la factorización de Cholesky y compruebe las cuentas realizadas en el item (a). La función recibe la matriz A y devuelve la matriz L (factor de Cholesky).

(d) Comente las condiciones que debe presentar la matriz A para tener factorización de Cholesky. Qué tipo de condiciones son?

Ejercicio 9 (Entregar) Considere un circuito eléctrico como el que se muestra en la figura (1). Se pide aplicar la primera Ley de Kirchhoff para calcular las corrientes $i1$, $i2$, $i3$ e $i4$.

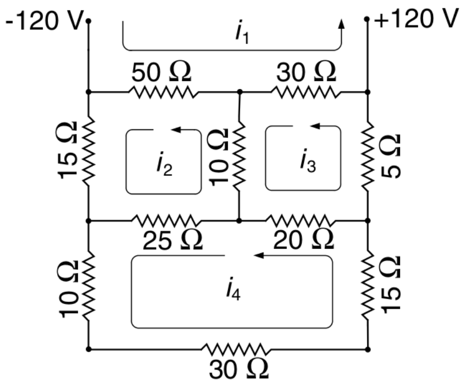

Figura 1: Circuito ejercicio 9.

Ejercicio 10 (Entregar) Realice la factorización LU de la siguiente matriz siguiendo el orden de Doolittle, con y sin pivoteo parcial (con lo cual, si P es distinta de la identidad, en realidad se tiene $PA = LU$). Luego, calcule las matrices residuales $A-LU$ y $PA-LU$ y **justifique las diferencias que ocurren**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+0.5e-15 & 3 \\ 2 & 2 & 20 \\ 3 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejercicios propuestos: S.6.1: 2, 3, 5, 15. **S.6.2:** 2, 5, 6, 7, 8. **S.6.3:** 1, 4, 5, 11, 12. **S.6.4:** 5, 7, 8, 9. **S.6.5:** 2, 3, 5, 7 (a y b). **S.6.6:** 1, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 17, 25.