# Cálculo Numérico 2015
# Trabajo Práctico 4

## Raíces de ecuaciones

**Ejercicio 1:**

(a) Realice cuatro iteraciones con el método de la bisección para obtener una aproximación a una de las raíces de la ecuación $f(x) = 3(x+1)(x-.5)(x-1)$ en el intervalo $[-2, 1.5]$. A cuál de las raíces converge el método? Luego estime una cota para la precisión del resultado obtenido.

(b) Implemente una función de Octave `function [x,h] = biseccion(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero $x$ de la ecuación no lineal homogénea $f(x) = 0$ y la convergencia `h` usando el método de la bisección, para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax` y los extremos del intervalo inicial de búsqueda `xmin, xmax`, con `xmin` $\neq$ `xmax`. Justifique si la bisección es o no un método globalmente convergente.

(c) Obtenga una cota para el número de iteraciones que se requieren para alcanzar una aproximación con una exactitud de $10^{-3}$ a la solución de $x^3 + x - 4 = 0$ que se encuentra en el intervalo [1,4]. Obtenga una aproximación de la raíz con esta exactitud mediante el método de la bisección.

(d) Utilice la definición 2.6 del libro de Burden para demostrar que el método de la bisección tiene convergencia lineal ($\alpha = 1$) y constante de error asintótica $\lambda = 1/2$.

**Ejercicio 2:**

(a) Implemente una función de Octave `function [x,h] = puntofijo(g,x0,kmax,tol)` que devuelva un cero o raíz de $f(x) = 0$ y la convergencia `h`, resolviendo el problema de punto fijo asociado,

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)}) \quad k \geq 0$$

hasta que $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| < tol$, para una tolerancia `tol` dada, un número máximo de iteraciones `kmax`, y una abscisa inicial `x0`. Notar que previamente debe transformarse la ecuación $f(x) = 0$ a la forma $g(x) = x$, lo cual puede hacerse de diversas maneras. Luego, la función $g(x)$ hallada será uno de los argumentos de entrada para la función `puntofijo()` pedida. Responda si este método es o no globalmente convergente.

(b) La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una raíz única en intervalo $[1, 2]$. Dadas las siguientes funciones $g_1$ y $g_2$, proporcione los resultados del método de iteración de punto fijo programado en el item (a) para ambas funciones, considerando $p_0 = 1.5$, $tol = 1e-3$ y como criterio de convergencia $|p_n - p_{n-1}| < tol$. Analice los resultados según el teorema correspondiente.

$$(i) \;\; x = g_1(x) = \frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2}, \qquad (ii) \;\; x = g_2(x) = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$$

(c) Indique si las cotas de error dadas por el Corolario 2.4 del libro de Burden son válidas para las funciones $g_1$ y $g_2$ propuestas en el item (b). Si lo fueran, aplíquelas para verificar los resultados obtenidos numéricamente.

**Ejercicio 3:**

(a) Sea $f(x) = x^2 - 6$. Con $p_0 = 3$ y $p_1 = 2$ encuentre $p_3$. Aplique primero el método de la secante, luego el de la posición falsa y saque conclusiones sobre los resultados obtenidos con ambos procedimientos.

(b) Implemente una función en Octave `function [x,h] = secante(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero de $f(x) = 0$ y la convergencia `h` usando dicho método para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y dos abscisas iniciales `xmin, xmax`, con `xmin` $\neq$ `xmax`.

(c) Implemente una función en Octave `function [x,h] = posicionfalsa(f,xmin,xmax,kmax,tol)` que devuelva un cero de $f(x) = 0$ y la convergencia `h` usando dicho método para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y dos abscisas iniciales `xmin, xmax`, con `xmin` $\neq$ `xmax`.

**Ejercicio 4:**

(a) Implemente una función de Octave `function [x,h] = newton(f,x0,kmax,tol)` que devuelva un cero $x$ de $f(x) = 0$ y la convergencia `h` usando dicho método para una tolerancia `tol`, un número máximo de iteraciones `kmax`, y una abscisa inicial `x0`.

(b) Use el método de Newton para aproximar, con una exactitud de $10^{-4}$, el valor de $x$ que en la gráfica de $y = x^2$ produce el punto más cercano a $(1, 0)$. *Ayuda:* Reduzca al mínimo $[d(x)]^2$ donde $d$ es la función distancia de la gráfica al punto.

(c) Demuestre que la función $f(x) = e^x - x - 1$ tiene un cero de multiplicidad dos en $p = 0$. Aplique el método de Newton a dicha función con $p_0 = 1$ y saque conclusiones sobre la convergencia.

**Ejercicio 5:** La ecuación de estado de un gas (la cual relaciona la presión $p$, el volumen $V$ y la temperatura $T$) está dada por

$$[p + a(N/V)^2](V - Nb) = kNT$$

donde $a$ y $b$ son dos coeficientes que dependen del gas en particular que hayamos considerado, $N$ es el número de moléculas que se encuentran en el volumen $V$ y $k$ es la constante de Boltzmann.

Asumiendo que el gas es dióxido de carbono ($CO_2$), los coeficientes $a$ y $b$ toman los siguiente valores: $a = 0.401\,\mathrm{Pa}\cdot\mathrm{m}^6$ y $b = 42.7e - 6\,\mathrm{m}^3$. Encuentre el volumen que ocupan 1000 moléculas de dicho gas a una temperatura $T = 300\,\mathrm{K}$ y presión $p = 3.5e + 7\,\mathrm{Pa}$ mediante el método de bisección y el método de Newton, con una tolerancia de $1e - 12$ (la constante de Boltzmann vale $k = 1.3806503e - 23\,\mathrm{J/K}$).

**Ejercicios sugeridos:** **S.2.1**:1-14,17,18; **S.2.2**:1-15,19,20,23; **S.2.3**: 1-10,12-16,19-24,27,30; **S.2.4**:1-6,8,9.