2.4] (a) PMF는 Binomial R.V. $P_B(X=k) = \binom{1000}{k} 0.01^k (1-0.01)^{1000-k}$

(b) Poisson PMF에서 $\lambda = np = 1000 \times 0.01 = 10$

$$\therefore P_P(X=k) = \frac{10^k}{k!} e^{-10}$$

(c) Exact 값은

$$Pr(X>50) = 1 - \sum_{k=0}^{50} P_B(X=k) = 1 - \sum_{k=0}^{50} \binom{1000}{k} 0.01^k (1-0.01)^{1000-k}$$

Poisson Approximation

$$Pr(X>50) = 1 - \sum_{k=0}^{50} P_P(X=k) = 1 - \sum_{k=0}^{50} \frac{10^k}{k!} e^{-10}$$

2.14] (a) $Y = X \bmod 3 = \begin{cases} 0, & X=0,3,6,9 \\ 1 & X=1,4,7 \\ 2 & X=2,5,8 \end{cases}$

$$\therefore P_Y(k) = \begin{cases} \frac{2}{5}, & k=0 \\ \frac{3}{10}, & k=1,2 \end{cases}$$

(b) $Y = 5 \bmod (X+1) = \begin{cases} 0, & X=0,4, \\ 1, & X=1,3, \\ 2, & X=2, \\ 5, & X=5,6,7,8,9 \end{cases}$

$$\therefore P_Y(k) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & k=0,1 \\ \frac{1}{10}, & k=2 \\ \frac{1}{2}, & k=5 \end{cases}$$

2.21| n번째 시행에서 첫번째 뒷면이 발생할 확률

$P_X(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, 이때 상금의 기대값 : $E(X|n) = 2^n$

$$\therefore E(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P_X(n) \cdot E(X=n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty$$

유한한 금액을 ~~내라면~~ 지불한 항상 $E(X)$가 지불 금액보다 크기 때문에 이익임

2.23| (a) 최종 2번을 제외하면 모든 시행에서 앞/뒤를 반복해야 함

$$P_X(k) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}, & k \geq 2 \\ 0, & oth. \end{cases}$$

동일한 확률을 가지는 Geometric 분포를 따르는 확률 변수를 Y라 하면

$X = Y + 1$ 이므로

$$E(X) = E(Y) + 1 = \frac{1}{p} + 1 = 3$$

$$Var(X) = var(Y) = \frac{1-p}{p^2} = 2$$

(b) k번째에 종료된다면 아래와 같은 경우들이 가능

$$\left.\begin{array}{l} H, H, H, \cdots, H, H, T \\ T, H, H, \cdots, H, H, T \\ T, T, H, \cdots, H, H, T \\ T, T, T, \cdots, H, H, T \\ T, T, T, \cdots, T, H, T \end{array}\right\} \begin{array}{l} (k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = P(X=k) \\ \text{for } k \geq 2 \end{array}$$

$$E(X) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\left(\frac{1}{2}\right)^k - \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^k = 6 - 2 = 4$$

2.26

$$P(X_i = k) = \begin{cases} P(X_i > k-1) - P(X_i > k), & 101 \le k \le 110 \\ 0, & \text{oth.} \end{cases}$$

$$E(X_i) = 105.5$$

$$P(X > k) = P(X_1 > k,\ X_2 > k,\ X_3 > k)$$

$$= P(X_1 > k)\,P(X_2 > k)\,P(X_3 > k)$$

$$= \frac{(110-k)^3}{10^3}$$

$$\therefore P(X=k) = P(X > k-1) - P(X > k)$$

$$= \frac{1}{10^3}\left\{(111-k)^3 - (110-k)^3\right\} \quad 101 \le k \le 110$$

$$E(X) = \sum_{k=101}^{110} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=101}^{110} \frac{k}{10^3}\left\{(111-k)^3 - (110-k)^3\right\} = 103.025$$

약 2.475 타의 감소가 발생함

2.32 i 번째 couple 의 구성원 ~~[illegible]~~ 을 X_i, Y_i 로 두면

X_i, Y_i 는 Bernoulli 분포를 따른다.

$$\Pr(X_i = 1 \text{ and } Y_i = 1 \mid A = a) = \Pr(X_i = 1 \mid A = a) \cdot \Pr(Y_i = 1 \mid X_i = 1, A = a)$$

$$= \frac{a}{2m} \cdot \frac{a-1}{2m-1}$$

$$\therefore E[S \mid A = a] = m \Pr(X_i = 1 \text{ and } Y_i = 1 \mid A = a) = \frac{a(a-1)}{2(2m-1)}$$

2.40] ~~못받은 딱지의 수가 k 개라고 하면~~

~~$Pr(X=k)=$~~

리로로 제출

못받은 딱지의 수가 k 일 때 ~~제출~~ 횟수를 X_k 라 하면

전체 제출 수 $X = 1+\sum_{k=1}^{5} X_k$

못받은 딱지의 수가 k일 때 새 딱지를 받을 확률 $p_k = \frac{k}{6}$

$\therefore E(X_k) = \frac{6}{k}$

$\therefore E(X) = 1+\sum_{k=1}^{5} E(X_k) = 1+\sum_{k=1}^{5} \frac{6}{k}$

$= 1+6+3+2+\frac{3}{2}+\frac{6}{5}$

$= \frac{147}{10} = 14.7$