회귀분석(I) 중간 대체 과제

1. 계수(rank) : $m \times n$ 행렬 A에 대하여 m개의 행벡터들 중에서 선형독립을 이루는 벡터들의 최대갯수를 m'이라 하고 n개의 열벡터들 중에서 선형독립을 이루는 벡터들의 최대갯수를 n'이라하면 $m' = n'$ 이고 이때 m'을 계수라 한다.

2. 중심화 행렬 : 모든 원소가 1인 $n \times n$ 행렬을 $J_{n\times n} = J_n$ 이라 할때,

   $C = I - \frac{1}{n} J_n$을 만족하는 matrix C를 중심화 행렬이라 한다.

3. 대각합 : 정방행렬 A의 대각원소의 합을 $tr(A)$라하고 다음과 같이 표현한다.

   $tr(A) = \sum a_{ii}$, 그리고 n차 정방행렬 A, B에 대하여 다음 성질을 만족한다.

   $tr(A \pm B) = tr(A) \pm tr(B)$, $tr(kA) = k\,tr(A)$, $tr(AB) = tr(BA)$

4. 일반화 역행렬 : 행렬 A의 역행렬이 존재하려면, A는 정칙행렬 (정방행렬 이면서 $\det(A) \neq 0$) 이어야 한다. A가 정칙행렬이 아니면서 (A는 $m \times n$ 일때)

   $AGA = A$를 만족하는 행렬 G를 일반화 역행렬 이라 한다.

5. 하다마드 곱은 $M \odot N$으로 정의되며 $m \times n$의 동일 차수 끼리의 행렬 곱이다. <④>

6. 정칙행렬일때 A^{-1}이 존재한다. <②>

7. $(AB)^T = B^T A^T = BA$ <①>

8. 대칭행렬의 곱은 일반적으로 대칭행렬이 되지 않는다. <①>

9. 고유치의 곱은 행렬식과 같다. <③>

10.

    일반화 역행렬은 여러가지가 가능하다.

    대칭행렬의 양반정치는 한개이상의 0인 고유치를 가진다. <②, ④>

11.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - I = \begin{bmatrix} (a_{11}-1) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{nn}-1) \end{bmatrix}$$

$$|A - I| = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \quad \because |A^T| = |A|$$

$$|(A-I)^T| = \begin{vmatrix} a_{11}-1 & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix}$$

$\because R_i' = R_j + R_i$ (R_i = i번째 행)

let $R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-1 & & a_{n1} \\ \vdots & & \\ A_1 & \cdots & A_n \end{vmatrix}$$

$A_1 = a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} - 1$

$= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} - 1 = 0$

$\vdots$

$A_n = a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{nn} - 1$

$= \sum_{j=1}^{n} a_{nj} - 1 = 0$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}-1 & & a_{n1} \\ \vdots & & \\ 0 & \sim & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore \det(A - I) = 0$

12. $A^2 + 2A + I_n = 0$

1) $A^2 + 2A = -I$, $\det(A^2 + 2A) = \det(A(A+2)) = \det A \det(A+2I)$

$= \det(-I) = \pm 1$

$\because$ so. $\det A \neq 0$, and A is $n \times n$ matrix

$\therefore$ A는 정칙행렬이다.

2) A가 정칙행렬 일 경우, $AA^{-1} = I$ 이다.

$A^2 + 2A = -I$

$A(A+2) = -I$

$A(-A-2I) = I$

$\therefore A^{-1} = -A - 2I$

13.

$2x = 8$. $\quad x = 4$

$x - 2y = 5 \quad 4 - 2y = 5 \quad y = -\frac{1}{2}$

$x - 3z = 7. \quad 4 - 3z = 7 \quad z = -1$

$3y + \omega = 2. \quad 3y + \omega = 2 \quad \omega = \frac{7}{2}$ $\quad \therefore x = 4, y = -\frac{1}{2}, z = -1, \omega = \frac{7}{2}$

14. $\det A = \begin{vmatrix} y & 6 & 6 & 6 \\ 6 & y & 6 & 6 \\ 6 & 6 & y & 6 \\ 6 & 6 & 6 & y \end{vmatrix} \begin{matrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{matrix} \quad R_{1,2}(-1) \longrightarrow \begin{vmatrix} y-6 & 6-y & 0 & 0 \\ 6 & y & 6 & 6 \\ 6 & 6 & y & 6 \\ 6 & 6 & 6 & y \end{vmatrix}$

$$= (y-6)\begin{vmatrix} y & 6 & 6 \\ 6 & y & 6 \\ 6 & 6 & y \end{vmatrix} + (-1)^3(6-y)\begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 6 & y & 6 \\ 6 & 6 & y \end{vmatrix}$$

$$= (y-6)\begin{vmatrix} y-6 & 0 & 6-y \\ 6 & y & 6 \\ 6 & 6 & y \end{vmatrix} R_{13}(-1) + (y-6)\begin{vmatrix} 0 & 6-y & 0 \\ 6 & y & 6 \\ 6 & 6 & y \end{vmatrix} R_{1,2}(-1)$$

$$= (y-6)\left((y-6)\begin{vmatrix} y & 6 \\ 6 & y \end{vmatrix} + (y-6)\begin{vmatrix} 6 & y \\ 6 & 6 \end{vmatrix}\right) + (y-6)(-1)^3(6-y)\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & y \end{vmatrix}$$

$$= (y-6)\left((y-6)(y^2-36) + (y-6)(36-6y)\right) + (y-6)^2(6y-36)$$

$$= (y-6)\left((y-6)^2(y+6-6)\right) + (y-6)^3 \times 6$$

$$= (y-6)^3(y+6)$$

$\therefore y = \pm 6$

15 $\quad 5 + a + b = 5$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 6 & a-\lambda & 0 \\ 7 & 8 & b-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(a-\lambda)(b-\lambda) = 0$$

$\lambda = a, b, 5$

$a + b = 0 \quad a \cdot b = -5$

$\therefore$ if $a = -5$, $b = 5$

if $b = -5$, $a = 5$

이론 2.9 $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^*(\hat{X}_i - \overline{X})$

$$D = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1^*(\hat{x}_i - \overline{x}))^2$$

$$\frac{\delta D}{\delta \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{\beta}_0^* - \hat{\beta}_1(\hat{x}_i - \overline{x})) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = n\hat{\beta}_0^* + \hat{\beta}_1^* \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - \overline{x})$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \hat{\beta}_0^* \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1^* \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - \overline{x})^2$$

$$\hat{\beta}_0^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i + \frac{1}{n} \hat{\beta}_1^* \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - \overline{x})$$

$$= \overline{Y} \qquad \because \sum_{i=1}^{n} (\hat{x}_i - \overline{x}) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \overline{y}_i \sum_{i=1}^{n} x_i + \hat{\beta}_1^* \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

$$\hat{\beta}_1^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2} = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \hat{\beta}_1$$

$$\therefore \hat{\beta}_0^* = \overline{Y}, \ \hat{\beta}_1^* = \hat{\beta}_1$$

2.8

X	Y
71	250
82	280
111	301
85	325
89	328
110	390
111	410
121	420
129	450
132	475

$\Sigma x_i = 1041, \ \overline{x} = 104.1$

$\Sigma y_i = 3629, \ \overline{y} = 362.9$

$\Sigma x_i y_i = 390{,}918, \ S_{XY} = \Sigma x_i y_i - n\overline{x}\overline{y}$

$= 13139.1$

$\Sigma x_i^2 = 112{,}359, \ S_{XX} = \Sigma x_i^2 - n\overline{x}^2$

$= 3990.9$

$\Sigma y_i^2 = 1{,}367{,}435, \ S_{YY} = \Sigma y_i^2 - n\overline{y}^2$

$= 52470.9$

1) $\hat{\beta}_0 = \overline{y} - \hat{\beta}_1 \overline{x} = 362.9 - 3.2923 \times 104.1 = 20.17517$

$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = 3.2923$

$$\therefore \hat{\beta}_0 = 20.1757, \ \hat{\beta}_1 = 3.2923$$

2) 분산분석표 : $SST = S_{YY} = 52470.9$

$SSR = \hat{\beta}_1^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 = \beta_1^2 S_{xx} = (3.2923)^2 \times 3990.9 = 43258.3201$

$SSE = SST - SSR = 9212.5799$, $MSR = SSR$, $MSE = SSE/(n-2)$

요인	제곱합	자유도	평균제곱	F비
회귀	43258.3201	1	43258.3201	37.5646
오차	9212.5799	8	1151.5725	
전체	52470.9	9		

F-검정 : ① $H_0 : \beta_1 = 0$ 대 $H_1 : \beta_1 \neq 0$

$F_0 = 37.5646$.

$F_\alpha(1,8)$ if $\alpha = 0.025$ $F_{0.025}(1.8) = 10.4$.

$\because F_0 > F_\alpha$ 이므로 유의수준 0.025 하에서 H_0를 기각한다.

$\therefore \beta_1 \neq 0$ 이므로 선형관계가 존재한다.

3) $\hat{\beta}_1 \sim N(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{\sigma/\sqrt{S_{xx}}}$

$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{s/\sqrt{S_{xx}}}$ $s^2 = \frac{SSE}{n-2}$ 자유도, 8

귀무가설 $H_0 : \beta_1 = 0$ 대립가설 $H_1 : \beta_1 \neq 0$

기각역 : $t \geq t_{\alpha/2}$, $t \leq -t_{\alpha/2}$. $\alpha = 0.05$

$t \geq t_{0.025}$. $t \leq -t_{0.025}$ $\therefore t \geq 2.306$. $t \leq -2.306$

검정통계량 : $\frac{3.2923 - 0}{s/\sqrt{S_{xx}}} = \frac{3.2923}{\frac{\sqrt{1151.5725}}{\sqrt{3990.9}}} = 6.1290$

검정통계량이 기각역 안에 존재하므로 귀무가설을 기각할 수 있다.

4) $\therefore$ 두변수 X, Y는 상관관계가 존재하고

$\hat{Y}_i = 20.1757 + 3.2923X_i$ 의 관계를 가진다.

5) $\hat{\beta}_1 - \left(t_{0.025}(8) \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}} \right) < \beta_1 < \hat{\beta}_1 + \left(t_{0.025}(8) \frac{s}{\sqrt{S_{xx}}} \right)$

$$3.2923 - 2.306 \times \frac{\sqrt{1151.5725}}{\sqrt{3990.9}} < \beta_1 < 3.2923 + 2.306 \times \frac{\sqrt{1151.5725}}{\sqrt{3990.9}}$$

$$3.2923 - 1.2387 < \beta_1 < 3.2923 + 1.2387$$

$$2.0536 < \beta_1 < 4.531$$

$$\therefore \beta_1 : (2.0536, 4.531)$$

6)

X	ϵ_i
71	-3.9290
82	-10.1443
111	-84.6210
85	24.9788
89	14.8096
110	7.6713
111	24.3790
121	1.4560
129	5.1136
132	20.2407