4장 이변량분포

1. 이변량 확률분포

[정의 4.1-1] 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수 (Joint pdf) $f(x,y)=P(X=x,\ Y=y)$는 다음의 성질을 갖는 함수이다.

(a) $0 \le f(x,y) \le 1$

(b) $\sum\sum_{(x,y)\in\mathbb{R}} f(x,y)=1$

(c) $P[(X,\ Y)\in A]=\sum\sum_{(x,y)\in A\subset\mathbb{R}} f(x,y)$

[정의 4.1-2] 두 확률변수 X와 Y의 결합누적분포함수 (Joint cumulative distribution function)는 다음과 같이 정의된다.

$$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,\ Y\le y)$$

- $F_{X,Y}(u,v)=\sum_{x\le u}\sum_{y\le v} f_{X,Y}(x,y)$
- $f_{X,Y}(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{X,Y}(x,y) \xrightarrow{f_{X,Y}(x,y)\text{는 적분가능한 함수}} F_{X,Y}(u,v)=\int_{-\infty}^{u}\int_{-\infty}^{v} f_{X,Y}(x,y)dydx.$

[정의 4.1-3] 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수를 $f(x,y)$라 하자. X만의 확률밀도 함수

$$f_1(x)=\sum_y f(x,y)$$

를 X의 주변확률밀도함수 (Marginal pdf)라 한다. 마찬가지로 Y의 주변확률밀도함수는

$$f_2(x)=\sum_x f(x,y)$$

로 정의된다.

두 확률변수 X와 Y가 연속일 경우 X와 Y의 주변확률밀도함수는 각각 다음과 같이 정의된다.

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

$$f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx$$

[정의 4.1-4] 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립일 필요충분조건은 $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ 이며 그렇지 않으면 종속이라고 한다.

■ 주변누적분포함수 (Marginal cumulative distribution function)

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P[X \le x] = P[X \le x,\ Y < \infty] \\ &= P[\lim_{y\to\infty}(X \le x,\ Y \le y)] \\ &= \lim_{y\to\infty} P[X \le x,\ Y \le y] \\ &= \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,\ y) = F_{X,Y}(x,\ \infty). \end{aligned}$$

■ 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립일 필요충분조건은

$$F_{X,Y}(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

$$\begin{aligned} P[X > a,\ Y > b] &= 1 - P[(X > a,\ Y > b)^c] \\ &= 1 - P[(X > a)^c \cup (Y > b)^c] \\ &= 1 - P[(X \le a) \cup (Y \le b)] \\ &= 1 - (P[X \le a] + P[Y \le b] - P[X \le a,\ Y \le b]) \\ &= 1 - F_X(a) - F_Y(b) + F_{X,Y}(a,\ b). \end{aligned}$$

$a_1 < a_2,\ b_1 < b_2$일 때는 다음 식이 성립함을 쉽게 알 수 있다.

$$\begin{aligned} & P[a_1 < X \le a_2,\ b_1 < Y \le b_2] \\ & \quad = F_{X,Y}(a_2,\ b_2) + F_{X,Y}(a_1,\ b_1) - F_{X,Y}(a_1,\ b_2) - F_{X,Y}(a_2,\ b_1). \end{aligned}$$

[예 4.1-1] 확률변수 X와 Y의 결합 pdf가 다음과 같다.

$$f(x,\ y) = \frac{x+y}{2!},\quad x=1,\ 2,\ 3,\quad y=1,\ 2.$$

X와 Y의 주변 pdf를 구하고 독립인지 아닌지를 확인하라.

풀이>

$$f_1(x) = \sum_y f(x,\ y) = \sum_{y=1}^{2} \frac{x+y}{21} = \frac{x+1}{21} + \frac{x+2}{21} = \frac{2x+3}{21}$$

$$f_2(y) = \sum_x f(x,\ y) = \sum_{x=1}^{3} \frac{x+y}{21} = \frac{3y+6}{21}$$

이므로 $f(x,\ y) \ne f_1(x)f_2(y)$이다. 따라서 X와 Y는 독립이 아니다.

[예 4.1-1] 두 확률변수 X와 Y의 결합 pdf $f(x, y)=2,\ 0 \le x \le y \le 1$을 갖는다.

$$P[0 \le X \le 1/2,\ 0 \le Y \le 1/2] = P[0 \le X \le Y,\ 0 \le Y \le 1/2]$$
$$= \int_0^{1/2}\int_0^y 2dxdy = \int_0^{1/2} 2ydy = 1/4$$

$$f_1(x) = \int_x^1 2dy = 2(1-x),\ 0 \le x \le 1,\ f_2(x) = \int_0^y 2dy = 2y,\ 0 \le y \le 1$$

이므로 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립이 아님을 알 수 있다.

[정리 4.1-1] 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립이라고 하면 $Z = g(X)$, $W = h(Y)$도 서로 독립이다.

증명> $A' = \{X : g(X) \in A\}$, $B' = \{Y : h(Y) \in B\}$라 하면, $\{g(X) \in A\} = \{X \in A'\}$, $\{h(Y) \in B\} = \{Y \in B'\}$이다. 따라서.

$$\begin{aligned} P[g(X) \in A,\ h(Y) \in B] &= P[X \in A',\ Y \in B'] \\ &= P[X \in A'] \cdot P[Y \in B'] \\ &= P[g(X) \in A] \cdot P[h(Y) \in B] \end{aligned}$$

이므로 $g(X)$와 $h(Y)$는 서로 독립이다.

좀 더 일반적으로 표현해 본다면 확률변수 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 서로 독립인 필요충분조건은

$$f_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \cdots \cdot f_{X_n}(x_n)$$ 이거나
$$F_{X_1, \cdots, X_n}(x_1, \cdots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \cdots \cdot F_{X_n}(x_n)$$ 이다.

2. 조건부 확률밀도함수

두 확률변수 X와 Y의 결합밀도함수가 $f(x, y)$이고 각각의 주변확률밀도함수가 $f_1(x)$, $f_2(y)$라고 하자. 사건 A와 B를 $A=\{X=x\}$, $B=\{Y=y\}$라 두면 $A\cap B=\{X=x, Y=y\}$이므로

$$P(A\cap B)=P(X=x, Y=y)=f(x, y)$$

이고 $P(B)=P(Y=y)=f_2(y)>0$이다. 따라서 사건 B가 주어졌을 때, 사건 A가 발생할 조건부 확률은

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

가 됨을 알 수 있다.

[정의 4.2-1] $Y=y$가 주어졌을 때, 확률변수 X의 조건부 확률밀도함수 (Conditional pdf)는

$$g(x|y)=\frac{f(x, y)}{f_2(y)},\ f_2(y)>0$$

으로 정의되며, $X=x$가 주어졌을 때, 확률변수 Y의 조건부 확률밀도함수는

$$h(y|x)=\frac{f(x, y)}{f_1(x)},\ f_{21}(x)>0$$ 으로 정의된다.

[예 4.2-1] [예 4.1-1]에서 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가

$$f(x, y)=\frac{x+y}{21},\ x=1, 2, 3,\ y=1, 2.$$

로 주어지면 각각의 주변밀도함수는 다음과 같고

$$f_1(x)=\frac{2x+3}{21},\ x=1, 2, 3,\ f_2(y)=\frac{3y+6}{2!},\quad y=1, 2.$$

$Y=y$가 주어졌을 때, X의 조건부 pdf는

$$g(x|y)=\frac{(x+y)/21}{(3y+6)/21}=\frac{x+y}{3y+6},\ x=1, 2, 3,\ y=1, 2$$

이며, $g(2|2)=P(X=2|Y=2)=4/12=1/3$임을 알 수 있다. 마찬가지로 $X=x$가 주어졌을 때, 확률변수 Y의 조건부 확률밀도함수pdf는

$$h(y|x)=\frac{fx+y}{2x+3},\ y=1, 2,\ x=1, 2, 3$$

임을 알 수 있다.

참고로 $\sum_x g(x|y)=\sum_x \frac{f(x, y)}{f_2(y)}=\frac{f_2(x)}{f_2(x)}=1$이므로 $g(x|y)$는 pdf의 조건을 만족하고 있고, $P(a<X<b|Y=y)=\sum_{\{x:a<x<b\}} g(x|y)$임을 알 수 있다.

[예 4.2-2] 두 확률변수 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같이 주어졌을 때

$$f_{X,Y}(x,y)=3x,\ 0 \le y \le x \le 1$$

$X=x$일 때, 확률변수 Y의 조건부 pdf를 구하라.

풀이> $f_{Y|X}(y)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_1(x)}=\dfrac{3x}{3x^2}=\dfrac{1}{x}$, $0 \le y \le x$, $0 \le x \le 1$이고, 참고로 조건부 누적함수는 다음과 같이 얻어진다.

$$F_{Y|X}(y)=\int_0^y f_{Y|x}(t)dt=\int_0^y\left(\frac{1}{x}\right)dt=\frac{y}{x},\ 0 \le y \le x.$$

아울러, $f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$

$$=\int_0^x 3xdy=[3xy]_0^x=3x^2,\ 0 \le x \le 1$$

임이 이용되어 있다.

[정의 4.2-2] $Y=y$가 주어졌을 때, 확률변수 X의 조건부 기댓값 (Conditional expectation)은

$$\mu_{X|y}=E(X|y)=\sum_x xg(x|y)$$

으로 정의되고, 조건부 분산(Conditional variance)은

$$\sigma^2_{X|y}=E\{[X-E(X|y)]^2|y\}=\sum_x[x-E(X|y)]^2g(x|y)$$

으로 정의된다.

조건부 분산은 $\sigma^2_{X|y}=E[X^2|y)-[E(X|y)]^2$으로도 계산된다. 조건부 기댓값 $\mu_{Y|x}$와 조건부 분산 $\sigma^2_{Y|x}$도 앞에서와 마찬가지로 쉽게 정의된다.

[예 4.2-3] [예 4.2-1]에서 $y=2$일 때, 조건부 기댓값 $\mu_{X|y}$와 조건부 분산 $\sigma^2_{X|y}$를 구하라.

풀이> $\mu_{X|2}=E(X|y=2)=\sum_{x=1}^{3}xg(x|2)=\sum_{x=1}^{3}x\dfrac{x+2}{12}=\dfrac{13}{6}$이고,

$$\sigma^2_{X|2}=E\{(X-13/6)^2|y=2\}=\sum_{x=1}^{3}(x-13/6)^2\cdot\frac{x+2}{12}$$

$$=\sum_{x=1}^{3}x^2\cdot\frac{x+2}{12}-\left(\frac{13}{6}\right)^2=\frac{64}{12}-\frac{169}{36}=\frac{23}{36}$$

임을 알 수 있다.

[예 4.2-4] [예 4.2-1]에서 두 확률변수 X와 Y의 결합 pdf가 $f_{X,Y}(x,y)=3x$, $0 \le y \le x \le 1$일 때, 조건부 pdf는

$$f_{Y|x}(y)=\frac{1}{x},\ 0 \le y \le x \le 1$$

임을 알았다. 이를 이용하여 조건부 기댓값을 구하면 다음과 같다.

$$E[Y|X=x]=\int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|x}(y)dy=\int_0^x y\left(\frac{1}{x}\right)dy=\left[\frac{1}{2}\frac{y^2}{x}\right]_0^x=\frac{1}{2}x,\ 0 \le x \le 1$$

이제 조건부 기댓값에 관한 중요한 정리인 이중 기댓값 정리 (Double expection theorem)를 설명해 보도록 한다.

[정리 4.2-1] 두 확률변수 X와 Y의 조건부 기댓값이 존재한다면 다음 식이 성립한다.

$$E[X]=E[E[X|Y]]$$

증명> $E[E[X|Y]]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_{X|y}(x)f_Y(y)dxdy$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot\left(\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy\right)dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f_X(x)dx=E[X].$$

[예 4.2-5] 두 확률변수 X와 Y의 결합 pdf가 다음과 같이 주어져 있을 때, $E[X]$를 구하라.

$$f_{X,Y}(x,y)=2,\ x+y \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$$

풀이>

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx=\int_0^{1-y} 2\,dx=2(1-y),\ \ 0 \le y \le 1$이므로

$f_{X|y}(x)=\dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{2}{2(1-y)}=\dfrac{1}{1-y},\ 0 \le x \le 1-y,\ 0 \le y < 1$이다.

또한 $E[X|Y=y]=\dfrac{1}{1-y}\int_0^{1-y} x\,dx=\dfrac{1-y}{2},\ 0 \le y < 1$이므로

$E[E[X|Y]]=\int_{-\infty}^{\infty} E[X|Y]f_Y(y)\,dy=\int_0^1\left(\dfrac{1-y}{2}\right)2(1-y)\,dy=\dfrac{1}{3}$이다.

3. 상관계수: 두 확률변수가 독립이 아닐 때 두 변수 사이의 관련성을 측정하는 측도

[정의 4.3-1] 두 확률변수 X와 Y의 공분산 (Covariance)은 다음과 같이 정의되며, $Cov(X,Y)$ 혹은 $\sigma_{X,Y}$로 표기한다.

$$Cov(X,Y)=E[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)].$$

위 식에서 $\mu_X=E[X]$, $\mu_Y=E[Y]$이다.

위의 정의에서 $Cov(X,Y)=E[XY]-\mu_X\mu_Y$로 간단히 계산할 수 있다.

[정의 4.3-2] 두 확률변수 X와 Y의 상관계수 (Correlation coefficient)는 각 확률변수의 표준편차 σ_X와 σ_Y가 0이 아닐 때, $\rho_{X,Y}$로 표기하며 다음과 같이 정의된다.

$$\rho_{X,Y}=\frac{cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}.$$

[예 4.3-1] 두 확률변수 X와 Y의 결합 pdf가 다음과 같다.

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{x+2y}{18},\quad x=1,\ 2,\quad y=1,\ 2.$$

X와 Y의 공분산과 상관계수를 구하라.

풀이> 먼저 X와 Y의 주변 pdf를 구하면 다음과 같다.

$$f_X(x)=\sum_{y=1}^{2}\frac{x+2y}{18}=\frac{2x+6}{18},\quad x=1,2,\qquad f_Y(y)=\sum_{x=1}^{2}\frac{x+2y}{18}=\frac{3+4y}{18},\quad y=1,2$$

$f_{X,Y}(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$이므로 X와 Y는 독립이 아님을 알 수 있다.

• X와 Y의 평균과 분산을 구해보자.

$$\mu_X=\sum_{x=1}^{2}x\cdot f_X(x)=1\cdot\frac{8}{18}+2\cdot\frac{10}{18}=\frac{14}{9},$$

$$\mu_Y=\sum_{x=1}^{2}y\cdot f_Y(y)=1\cdot\frac{7}{18}+2\cdot\frac{11}{18}=\frac{29}{18},$$

$$\sigma_X^2=\sum_{x=1}^{2}x^2\cdot f_X(x)-\mu_X^2=1^2\cdot\frac{8}{18}+2^2\cdot\frac{10}{18}-\left(\frac{14}{9}\right)^2=\frac{20}{81}.$$

$$\sigma_Y^2=\sum_{y=1}^{2}y^2\cdot f_Y(y)-\mu_Y^2=1^2\cdot\frac{7}{18}+2^2\cdot\frac{11}{18}-\left(\frac{29}{18}\right)^2=\frac{77}{324}.$$

• X와 Y의 공분산의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\sigma_{X,Y}&=E[XY]-\mu_X\mu_Y=\sum_{x=1}^{2}\sum_{y=1}^{2}x\cdot y\cdot f_{X,Y}(x,y)-\mu_X\mu_Y\\&=1\cdot1\cdot\frac{3}{18}+1\cdot2\cdot\frac{5}{18}+2\cdot1\cdot\frac{4}{18}+2\cdot2\cdot\frac{6}{18}-\left(\frac{14}{9}\right)\left(\frac{29}{18}\right)\\&=-\frac{1}{162}.\end{aligned}$$

• X와 Y의 상관계수는 [정의 4.3-2]에 의하여 다음과 같다.

$$\rho_{X,Y}=\frac{-\frac{1}{162}}{\sqrt{\frac{20}{81}\cdot\frac{77}{324}}}=-0.025.$$

[예 4.3-2] 확률변수 X와 Y의 결합 pdf $f(x,y)=2,\ 0\le x\le y\le 1$을 갖는다.

$$P\left(0\le X\le \frac{1}{2},\ 0\le Y\le \frac{1}{2}\right)=P\left(0\le X\le Y,\ 0\le Y\le \frac{1}{2}\right)$$
$$=\int_0^{1/2}\int_0^y 2\,dxdy=\int_0^{1/2}2\,ydy=\frac{1}{4}.$$

주변 pdf

$$f_X(x)=\int_x^1 2\,dy=2(1-x),\quad 0\le x\le 1,$$

$$f_Y(y)=\int_0^y 2\,dx=2y,\quad 0\le y\le 1.$$

X와 Y의 기댓값

$$E[X]=\int_0^1\int_x^1 2x\,dydx=\int_0^1 2x(1-x)dx=\frac{1}{3},$$

$$E[Y]=\int_0^1\int_0^y 2y\,dxdy=\int_0^1 2y^2\,dy=\frac{2}{3}.$$

X와 Y의 공분산

$$Cov(X,Y)=E[XY]-\mu_X\mu_Y=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xy\cdot f(x,y)dxdy-\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$=\int_0^1\int_0^y 2xy\,dxdy-\frac{2}{9}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{36}.$$

$Y=y$가 주어졌을 때, X의 조건부 pdf

$$g(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{2}{2y},\quad 0\le x\le y,\quad 0\le y\le 1$$

조건부 기댓값

$$E[X|y]=\int_0^y x\cdot\frac{1}{y}dx=\left[\frac{x^2}{2y}\right]_0^y=\frac{y}{2},\ 0\le y\le 1$$

조건부 분산

$$E[[X-E(X\mid y)]^2\mid y]=\int_0^y\left(x-\frac{y}{2}\right)^2\frac{1}{y}\,dx=\frac{y^2}{12}$$

조건부 확률 $P\left(\frac{1}{8}\le X\le\frac{1}{4}\mid Y=\frac{3}{4}\right)=\int_{1/8}^{1/4}g\left(x\mid\frac{3}{4}\right)dx=\int_{1/8}^{1/4}\frac{1}{3/4}\,dx=\frac{1}{6}.$

[정리 4.3-1] 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립이면 $Cov(x,y)=0$이다. 하지만 역은 참이 아니다.

증명> 두 확률변수 X와 Y가 서로 독립이면 $f_{X,Y}(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$이므로

$$E[XY]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\cdot f_{X,Y}(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_X(x)f_Y(y)dxdy=E[X]E[Y]$$

이다. 따라서 $Cov(x,y)=0$임을 알 수 있다. 하지만 역은 참이 아니다.

[예 4.3-2] 확률변수 X와 Y의 결합 pdf가 아래의 표에 주어져 있다.

Y \ X	6	8	10
1	0.2	0	0.2
2	0	0.2	0
3	0.2	0	0.2

$E[X]=\mu_X=8$, $E[Y]=\mu_Y=2$

$$E[XY]=\sum_x\sum_y xy\cdot f_{X,Y}(x,y)$$
$$=6\cdot 1\cdot 0.2+6\cdot 3\cdot 0.2+8\cdot 2\cdot 0.2+10\cdot 1\cdot 0.2+10\cdot 3\cdot 0.2=16.$$

따라서 $Cov(X,Y)=E[XY]-\mu_X\mu_Y=16-8\cdot 2=0$이다. 그러나,

$f_{X,Y}(6,1)=0.2$, $f_X(6)=0.4$, $f_Y(1)=0.4$이므로

$$f_{X,Y}(6,1)\neq f_X(6)\cdot f_Y(1)$$

이다. 즉, 독립이 아니다.

[정리 4.3-2] (코쉬-쉬바르츠의 부등식 (Cauchy-Schwarz inequality)

두 확률변수 X와 Y에 대하여 부등식

$$(E[XY])^2\le E[X^2]E[Y^2]$$

이 성립하며 등호는 $Y=cX$ (c는 상수)일 때 성립한다.

증명> t에 대한 2차 함수 $g(t)$를 아래와 같이 정의한다.

$$g(t)=E[(tX-Y)^2]=E[X^2]t^2-2E[XY]t+E[Y^2]$$

함수 $g(t)$는 $(tX-Y)^2$의 기댓값이므로 항상 0보다 크거나 같다. 그러므로 t에 대한 판별식이 0보다 작거나 같아야 하므로 위 부등식을 얻을 수 있다.

[정리 4.3-3] 피어슨의 표본상관계수 (Pearson's sample correlation coefficient)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2}}.$$

[예 4.3-4] 5개의 2변량 데이터 (3,2), (6,0), (5,2), (1,6), (3,5)를 얻었다. 표본상관계수를 구하라.
풀이>

$$\overline{X} = 3.6, \quad \overline{Y} = 3,$$

$$\sum_{i=1}^{5}(X_i - \overline{X})^2 = 3.04, \quad \sum_{i=1}^{5}(Y_i - \overline{Y})^2 = 4.8$$

$$\sum_{i=1}^{5}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = -3.4$$

이므로 위의 정의에 따라서 표본상관계수는 $r = -0.9$이다.

■ **이변량 정규분포**

[정의] 두 확률변수 X와 Y의 결합 pdf $f(x,y)$가 아래와 같을 때

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)\left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right\}\right]$$

(X, Y)는 이변량 정규분포를 갖는다고 한다.
[참고] 두 확률변수 X와 Y가 이변량 정규분포를 따를 때, X와 Y가 서로 독립일 필요충분조건은 $\rho = 0$이다.