Chapter 13 Boundary-Value Problems in Rectangular Coordinates

- 편미분 방정식에서 경계값 문제로 기술되는 선형 2 계 편미분 방정식

  → 상미분 방정식으로 축소하여 특수해를 구함

- 변수 분리법을 이용한 해법 / 고유값, 고유함수, 직교함수 급수로 전개하는 해법을 검토함.

13.1 Separable Partial Differential Equations

■ Linear Partial Differential Equation

u: 종속변수, x, y: 독립변수인 경우 선형 2 계 편미분 방정식의 일반형

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+E(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+F(x,y)u=G(x,y) \qquad (1)$$

$G(x,y)=0$: Homogeneous (동차): 예: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$

$G(x,y)\neq 0$: Nonhomogeneous (비동차): 예: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=xy$

Example 1 Linear Second-Order PDEs

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ → Homogeneous Linear second-order PDE

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = xy$$ → Nonomogeneous Linear second-order PDE

■ Solution of a PDE

- (1)에 대입하여 만족되는 $u(x, y)$: Solution (해)

■ Separation of Variables

해 $u(x, y)$가 x만의 함수 $X(x)$와 y만의 함수 $Y(y)$의 곱으로 표현된다고 가정함.

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = X'Y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = XY', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY'',$$

Example 2 Using Separation of Variables

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial u}{\partial y}$$ 을 푸시오.

Solution

$u(x, y) = X(x)Y(y)$ 로 가정하면,

$$X''Y = 4XY'$$

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y}$$ → 좌변은 x 만의 함수, 우변은 y 만의 함수이므로 → 상수이어야 함.

$$\frac{X''}{4X} = \frac{Y'}{Y} = -\lambda$$

→ $X'' + 4\lambda X = 0$ and $Y' + \lambda Y = 0.$

분리상수의 부호에 따라 다음 3 가지로 나누어 해석함

$\lambda = 0:$ $X'' = 0$ and $Y' = 0,$

$\lambda = -\alpha^2 < 0:$ $X'' - 4\alpha^2 X = 0$ and $Y' - \alpha^2 Y = 0,$

$\lambda = \alpha^2 > 0:$ $X'' + 4\alpha^2 X = 0$ and $Y' + \alpha^2 Y = 0.$

여기서 $\alpha > 0$ 인 상수임.

Case I: $\lambda = 0$ 인 경우

$X = c_1 + c_2 x$ and $Y = c_3$

$$u = XY = (c_1 + c_2 x)c_3 = A_1 + B_1 x,$$

Case II: $\lambda = -\alpha^2 < 0$: 인 경우

$$X'' - 4\alpha^2 X = 0 \text{ and } Y' - \alpha^2 Y = 0,$$

$$X = c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \sinh 2\alpha x \text{ and } Y = c_6 e^{\alpha^2 y},$$

$$u = XY = (c_4 \cosh 2\alpha x + c_5 \sinh 2\alpha x) c_6 e^{\alpha^2 y}$$

$$u = A_2 e^{\alpha^2 y} \cosh 2\alpha x + B_2 e^{\alpha^2 y} \sinh 2\alpha x,$$

Case III: $\lambda = \alpha^2 > 0$: 인 경우

$$X'' + 4\alpha^2 X = 0 \text{ and } Y' + \alpha^2 Y = 0.$$

$$X = c_7 \cos 2\alpha x + c_8 \sin 2\alpha x \text{ and } Y = c_9 e^{-\alpha^2 y},$$

$$u = A_3 e^{-\alpha^2 y} \cos 2\alpha x + B_3 e^{-\alpha^2 y} \sin 2\alpha x,$$

Note: 변수분리법은 일반적인 방법은 아님: $\partial^2 u / \partial x^2 - \partial u / \partial y = x$ 의 경우 $u = XY$ 로는 해가 없음.

■ Superposition Principle

Theorem 13.1.1 Superposition Principle

$u_1, u_2, \cdots, u_k$ 각각이 동차 선형 편미분 방정식(homogeneous linear PDE)의 해라면,

각각의 선형조합(linear combination)

$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_ku_k$ → 역시 해가 된다.

동차 선형 편미분 방정식의 해로 이루어진 무한 집합 $u_1, u_2, u_3, \cdots$ 이 구해지면

또 다른 해 $u = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k$ 을 항상 만들 수 있다.

■ Classification of Equations

상수계수를 가지는 선형 2 계 편미분 방정식은 상수에 따라 분류할 수 있다.

Definition 13.1.1 Classification of Equations

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=0,$$

$B^2-4AC>0,$: Hyperbolic (쌍곡선 형)

$B^2-4AC=0,$: Parabolic (포물선 형)

$B^2-4AC<0.$: Elliptic (타원형)

Example 3 Classifying Linear Second-Order PDEs

다음 각 방정식을 분류하시오

$$(a)\ 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (b)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \qquad (\mathrm{c})\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Solution

$$(a)\ 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0,\ \ A = 3,\ B = 0,\ C = 0,\quad B^2 - 4AC = 0$$ → Parabolic

$$(b)\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \ A = 1,\ B = 0,\ C = -1,\quad B^2 - 4AC = 4 > 0$$ → Hyperbolic

$$(\mathrm{c})\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ \ A = 1,\ B = 0,\ C = 1,\quad B^2 - 4AC = -4 < 0$$ → Elliptic

13.2 Classical Equations and Boundary-Value Problems

■ Introduction

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\quad k>0$$: 1-D Heat Equation (1 차원 열전달 방정식) Parabolic (1)

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$: 1-D Wave Equation (1 차원 파동방정식) Hyperbolic (2)

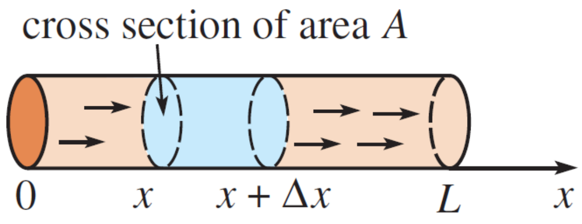
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\nabla^2 u=0$$: 2-D Laplace Equation (2 차원 Laplace 방정식) Elliptic (3)

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.=0$$ ← 3-D Laplace Equation (3 차원 Laplace 방정식)

■ Heat Equation

길이 L, 단면적 A인 원형 막대에 x축 방향으로 열전달이 일어나는 경우 고려; 다음을 가정함.

- 막대 내부의 열 흐름은 x축 방향으로만 일어난다.
- 막대의 옆면은 절연됨 (표면 열 손실 없음)
- 막대 내부에서 발생되는 열은 없음
- 막대는 균질, 즉 단위 체적당 질량 $\rho = \text{constant}$



- Specific Heat (비열) γ과 Thermal Conductivity (열전도율) K는 상수

온도 $u(x,t)$를 만족하는 편미분 방정식을 유도하기 위해 다음 실험식을 사용함

(i) 질량 m에서의 열량 Q는

$$Q = \gamma m u, \tag{4}$$

(ii) 단면적을 통한 열 흐름율 Q_t는 온도의 x에 관한 미분 값 및 단면적 A에 비례함

$$Q_t = -KAu_x \tag{5}$$

(여기서 온도가 감소하는 방향으로 열이 흐르기 때문에 음의 부호 사용함)

길이 Δx 인 미소요소에서의 질량은 $m = \rho A(\Delta x)$ 이므로

$$Q = \gamma \rho A \Delta x\, u \tag{6}$$

이식의 시간에 대한 미분 값은

$$Q_t = \gamma \rho A \Delta x\, u_t \tag{8}$$

한편 미소요소를 통한 열 흐름 량은

$$-KAu_x(x,t) - \left[-KAu_x(x+\Delta x,t)\right] = KA\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right] \tag{7}$$

(7),(8)이 같아야 하므로

$$\frac{K}{\gamma\rho}\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = u_t .$$

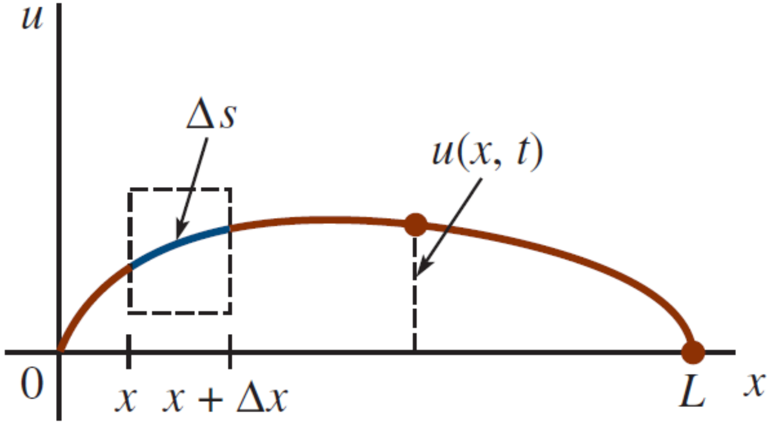
$\Delta x \to \infty$ 의 극한을 취하면

$\dfrac{K}{\gamma\rho}u_{xx} = u_t$ or $k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t},\ k > 0$ [※ 여기서 $k = \dfrac{K}{\gamma\rho}$; Thermal Diffusivity (열 확산 성)]

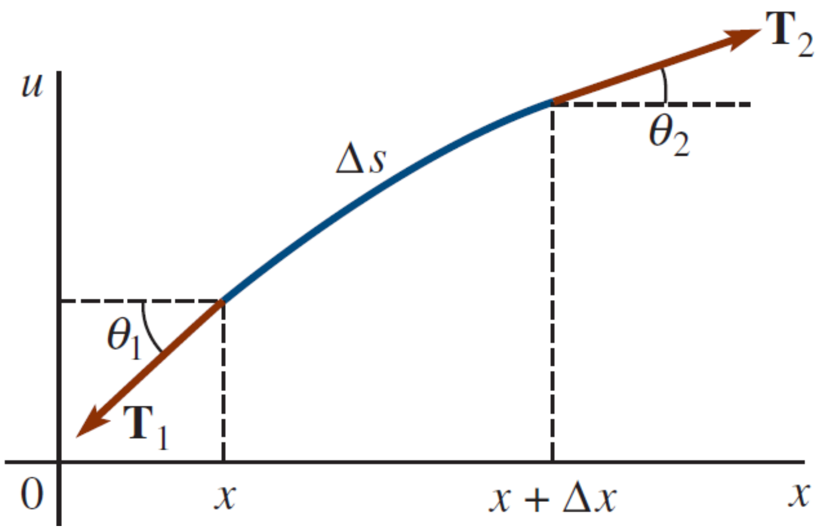
Wave Equation

$x=0$ 과 $x=L$ 에 기타 줄처럼 팽팽히 연결된 길이 L 의 현의 변위 $u(x,t)$ 를 구하기 위한 가정:

- 현의 움직임은 xu 평면에서만 발생함
- 현은 완전히 Flexible (유연) 하다
- 현은 균질이다. 즉 $\rho = \text{constant}$
- 변위 $u(x,t)$ 는 현의 길이에 비해 작다
- 커브의 기울기는 작다
- 장력 T 는 접선 방향이며 모든 점에서 같다.
- 장력은 중력에 비해 아주 크다
- 현에 가해지는 다른 외력은 없다.



(a) Segment of string



미소요소에 작용하는 장력에 의한 힘의 수직방향 힘의 크기는

$$T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 \approx T\tan\theta_2 - T\tan\theta_1 = T\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right]$$

여기서 가정에 의해 $\|\mathbf{T}_1\| \approx \|\mathbf{T}_2\| = T$ [※ $\tan\theta_2 = u_x(x+\Delta x,t),\ \tan\theta_1 = u_x(x,t)$는 기울기에 대한 동일한 표현]

미소 현의 질량은 $\rho\Delta s \approx \rho\Delta x$ 이므로, 뉴턴의 제 2 법칙에 의해

$$T\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right] = \rho\Delta x u_{tt}$$

$$\frac{u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)}{\Delta x} = \frac{\rho}{T}u_{tt}.$$

$\Delta x \to \infty$의 극한을 취하면

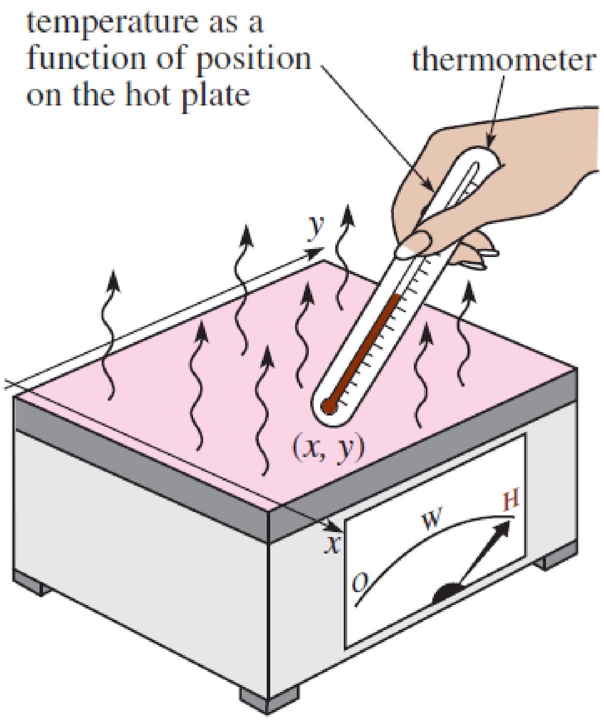
$$\frac{T}{\rho}u_{xx} = u_{tt} \quad \text{or} \quad a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

여기서 $\dfrac{T}{\rho} \equiv a^2$

Laplace's Equation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nabla^2 u = 0$$

- 정전계, 중력계, 유체역학의 속도 포텐셜등의 표현에 사용
- 해 $u(x, y)$ 시간이 아닌 위치에 따라 변하는 Steady-State (정상상태)의 표현에 사용



■ Initial Conditions

Heat Equation 의 경우 $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial t},\ k>0$ 를 풀기 위해

$t=0$ 에서 막대 전체의 온도분포를 초기조건으로 주어야 한다.

$$u(x,0)=f(x),\ 0<x<L.$$

Wave Equation 의 경우 $a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 을 풀기 위해

$t=0$ 에서 현의 초기속도 및 현의 초기 모양을 지정할 수 있다..

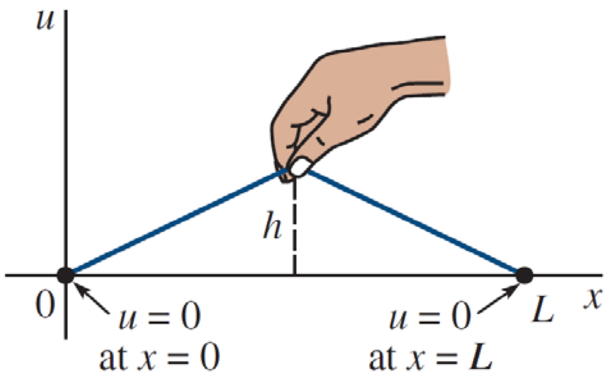
$$u(x,0)=f(x),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x),\quad 0<x<L.$$

■ Boundary Conditions

Wave Equation 의 경우 $a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 을 풀기 위해서

기하학적인 조건 $x = 0,\ x = L$ 에서 x 가 고정됨이 필요함.

즉 $u(0,t) = 0, \quad u(L,t) = 0, \quad t > 0.$



경계조건으로 다음의 3 가지 유형의 값을 지정할 수 있다

$(i)\ u,$: Dirichlet Condition

$(ii)\ \dfrac{\partial u}{\partial n},$: Neumann Condition

$(iii)\ \dfrac{\partial u}{\partial n} + hu, \quad h$ a constant. : Robin Condition

예를 들면 열전도 문제의 경우 다음과 같은 조건이 가능하다.

$(i)'\ u(L,t) = u_0, \quad u_0$ a constant, : 일정한 온도 유지

$(ii)'\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = 0,$ or : 단열조건

$(iii)'\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = -h(u(L,t) - u_m), \quad h > 0$ and u_m constants. : 대류조건

막대의 좌/우 를 다른 조건으로 혼합하여 사용하는 것도 가능

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \quad \text{and} \quad u(L,t) = u_0, \quad t > 0.$$

Boundary-Value Problems

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0$$

$$(BC) \;\; u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0$$

$$(IC) \;\; u(x,0) = f(x), \;\; \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \;\; 0 < x < L$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad 0 < x < a, \qquad 0 < y < b$$

$$(BC) \;\; \begin{cases} \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, & \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = 0, & 0 < y < b \\ u(x,0) = 0, & u(x,b) = f(x), & 0 < x < a \end{cases}$$

13.3 Heat Equation

Introduction

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0$$ (1) 1-D Heat Equation

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0$$ (2) 전 시간에 걸쳐 양 끝이 온도 0 을 유지

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L.$$ (3) 막대 전체에 걸쳐 초기온도 $f(x)$

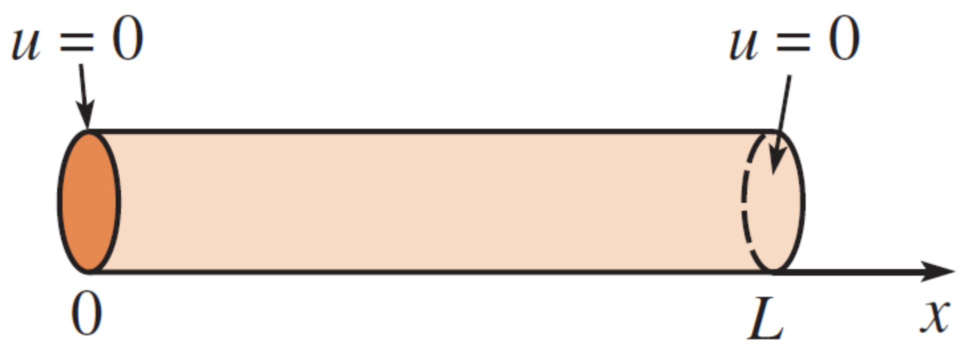
Solution of the BVP

$u(x,t) = X(x)T(t)$ 을 가정하면

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda \tag{4}$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{5}$$

$$T' + k\lambda X = 0. \tag{6}$$



(2) → $u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0$

모든 t에 대해 성립하여야 하므로 $X(0) = 0,\ X(L) = 0$

(5)와 경계조건을 동시에 풀어야 함.: Regular Sturm-Liouville Problem

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0. \tag{7}$$

(7)은 분리상수 λ의 부호에 따라 다음 3가지 풀이가 가능함

$$X(x) = c_1 + c_2 x, \qquad \lambda = 0 \tag{8}$$

$$X(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x, \qquad \lambda = -\alpha^2 < 0 \tag{9}$$

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x, \qquad \lambda = \alpha^2 > 0. \tag{10}$$

(7)의 경계조건을 (8), (9)에 적용하면

$X(t) = 0$ → $u(t) = 0$ ← Trivial Solution

(7)의 경계 조건 중 $X(0) = 0$을 (10)에 적용하면,

$c_1 = 0$ → $X(x) = c_2 \sin \alpha x$ ← 여기에 (7)의 경계 조건 중 $X(L) = 0$을 적용하면

$X(L) = c_2 \sin \alpha L = 0.$ (11)

$c_2 = 0$ 이면 $X(t) = 0 \rightarrow u(t) = 0 \leftarrow$ Trivial Solution

따라서 $\sin \alpha L = 0$ 이어야 함. $\rightarrow \alpha L = n\pi \rightarrow \alpha = n\pi / L$

$(\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2 / L^2,\ n = 1, 2, 3, \cdots)$

$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{L} x, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \leftarrow$ Eigenvalues / Eigenfunctions (12)

한편 (6)의 일반 해는 $T(t) = c_3 e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t}$ 이므로

$u_n = X(x)T(t) = A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \sin \frac{n\pi}{L} x,$ (13)

(13)은 식 (1)과 경계조건 (2)를 만족함.

(13)은 초기조건 (3)을 만족하여야 하므로

$$u_n(x,0) = f(x) = A_n \sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{14}$$

각각의 $u_n(x,t)$이 (14)를 만족할 수는 없음

중첩의 원리에 의해 일반 해를 다음과 같이 정의함.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \sin\frac{n\pi}{L}x \tag{15}$$

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}x.$$ ← Sine Series

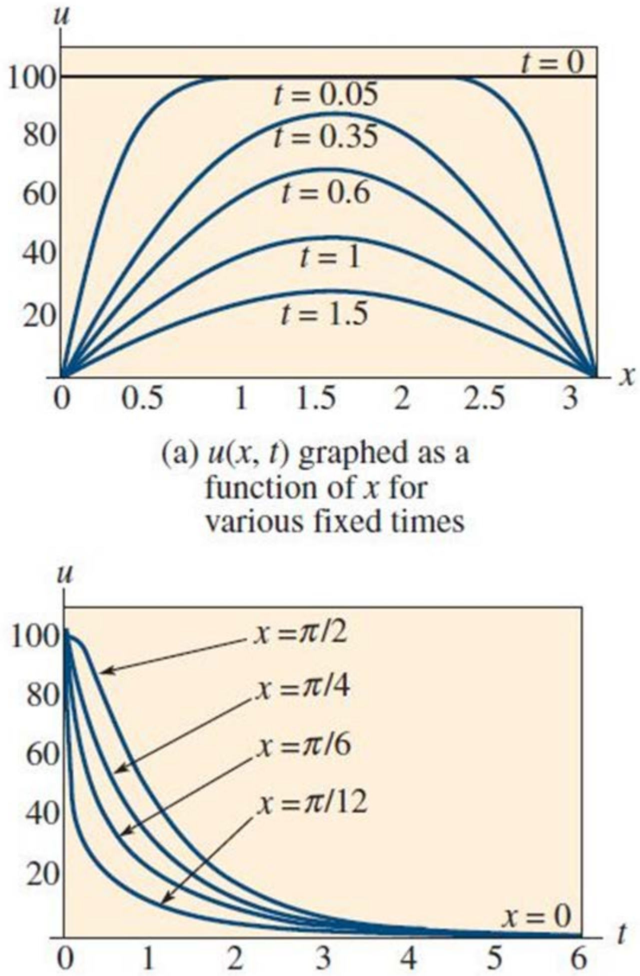
$$A_n = b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx. \tag{16}$$

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx\right) e^{-k(n^2\pi^2/L^2)t} \sin\frac{n\pi}{L}x. \tag{17}$$

$u(x,0)=100,\ L=\pi,\ k=1$인 경우

$$A_n=\frac{200}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right],$$

$$u(x,t)=\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]e^{-n^2 t}\sin nx. \qquad (18)$$



(a) $u(x, t)$ graphed as a function of x for various fixed times

(b) $u(x, t)$ graphed as a function of t for various fixed positions

13.4 Wave Equation

Introduction

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad u(L,t) = 0, \qquad t > 0 \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x), \qquad 0 < x < L. \tag{3}$$

Solution of the BVP

$u(x,t) = X(x)T(t)$ 을 가정하면

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda$$

$$X'' + \lambda X = 0 \tag{4}$$

$$T'' + a^2 \lambda T = 0. \tag{5}$$

(2) → $u(0,t) = X(0)T(t) = 0,\ u(L,t) = X(L)T(t) = 0$

모든 t에 대해 성립하여야 하므로 $X(0) = 0,\ X(L) = 0$

(4)와 경계조건을 동시에 풀어야 함.

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad X(0) = 0, \qquad X(L) = 0. \tag{6}$$

(6)은 분리상수 λ의 부호에 따라 다음 3 가지 풀이가 가능함

$$X(x) = c_1 + c_2 x, \qquad \lambda = 0$$

$$X(x) = c_1 \cosh \alpha x + c_2 \sinh \alpha x, \qquad \lambda = -\alpha^2 < 0$$

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x, \qquad \lambda = \alpha^2 > 0.$$

(6)의 경계조건을 처음 두 경우에 적용하면

$X(x) = 0$ → $u(x,t) = 0$ ← Trivial Solution

따라서 가능한 해는

$$X(x) = c_1 \cos \alpha x + c_2 \sin \alpha x, \qquad \lambda = \alpha^2 > 0.$$

(6)의 경계조건중 $X(0)=0$ 을 마지막 식에 적용하면,

$c_1=0 \rightarrow X(x)=c_2 \sin \alpha x \leftarrow$ 여기에 (6)의 경계 조건 중 $X(L)=0$ 을 적용하면

$$X(L)=c_2 \sin \alpha L=0.$$

$c_2=0$ 이면 $X(t)=0 \rightarrow u(t)=0 \leftarrow$ Trivial Solution

따라서 $\sin \alpha L=0$ 이어야 함. $\rightarrow \alpha L=n\pi \rightarrow \alpha=n\pi/L$

$(\lambda_n=\alpha_n^2=n^2\pi^2/L^2,\ \ n=1,2,3,\cdots)$

$$X(x)=c_2 \sin\frac{n\pi}{L}x, \qquad n=1,2,3,\cdots$$ $\leftarrow$ Eigenvalues / Eigenfunctions

한편 (5)의 일반 해는

$$T(t)=c_3\cos\frac{n\pi a}{L}t+c_4\sin\frac{n\pi a}{L}t.$$

따라서 구하는 해는

$$u_n = \left(A_n \cos\frac{n\pi a}{L} t + B_n \sin\frac{n\pi a}{L} t \right) \sin\frac{n\pi}{L} x \tag{7}$$

중첩의 원리에 의해

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi a}{L} t + B_n \sin\frac{n\pi a}{L} t \right) \sin\frac{n\pi}{L} x. \tag{8}$$

초기조건 (3)의 $u(x,0) = f(x)$ 를 적용하면,

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L} x.$$ ← Sine Series

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi}{L} x dx.$$

(8)을 시간 t에 대하여 미분하면;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \frac{n\pi a}{L} \sin\frac{n\pi a}{L} t + B_n \frac{n\pi a}{L} \cos\frac{n\pi a}{L} t \right) \sin\frac{n\pi}{L} x \tag{9}$$

초기조건 (3)의 $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x)$ 를 적용하면,

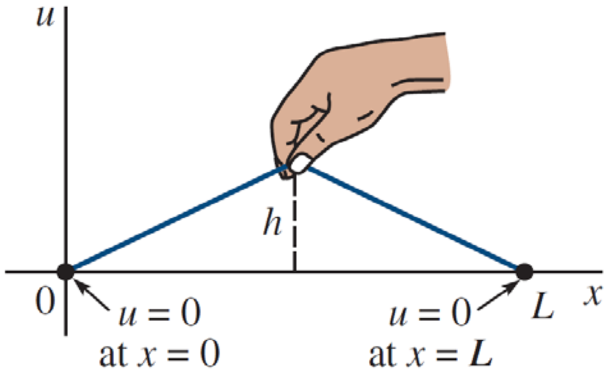
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n \frac{n\pi a}{L}\right)\sin\frac{n\pi}{L}x. \leftarrow \text{Sine Series}$$

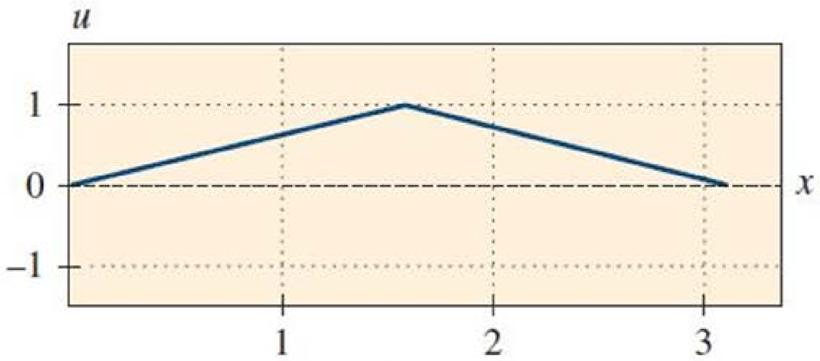
$$B_n \frac{n\pi a}{L} = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi}{L}x\,dx. \tag{10}$$

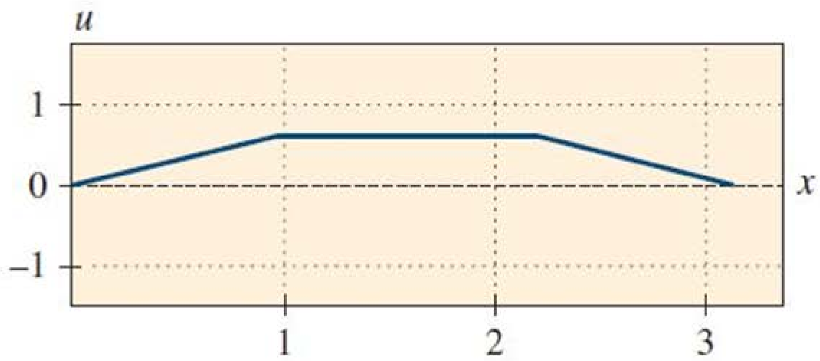
■ Plucked String

잡아당긴 현의 거동의 모양을 그래프로 기술하였다.

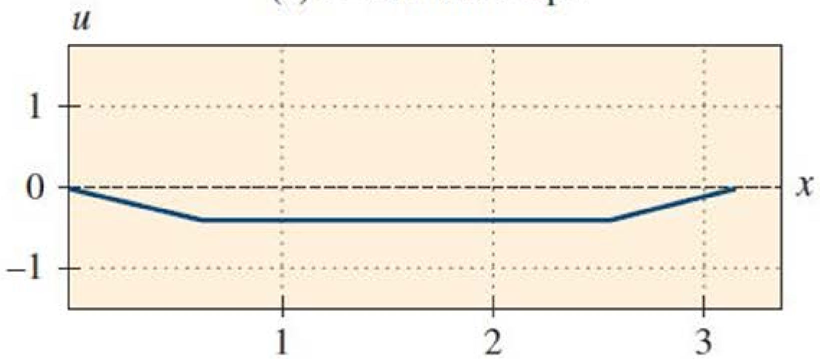




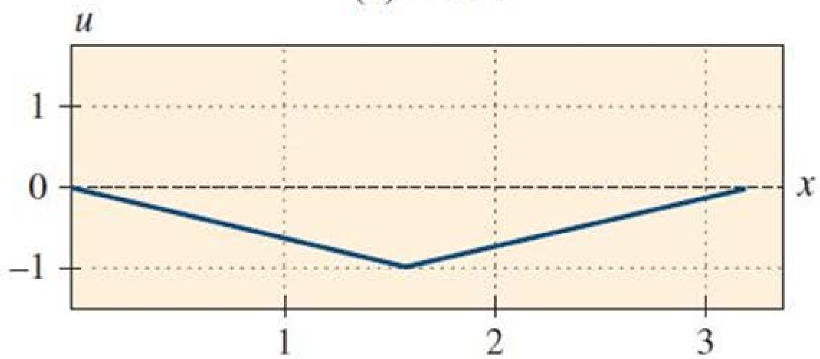
(a) $t = 0$ initial shape



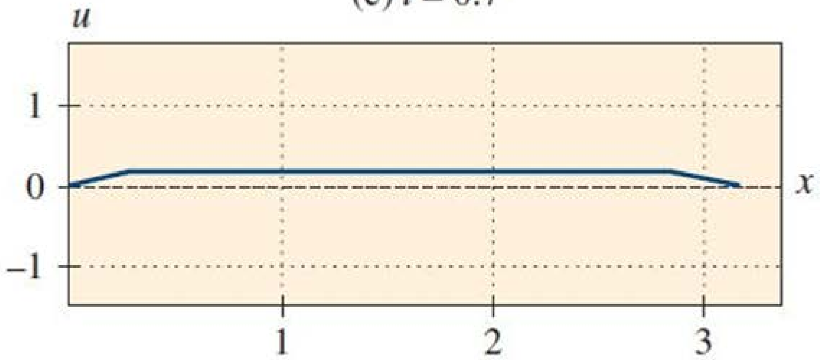
(b) $t = 0.2$



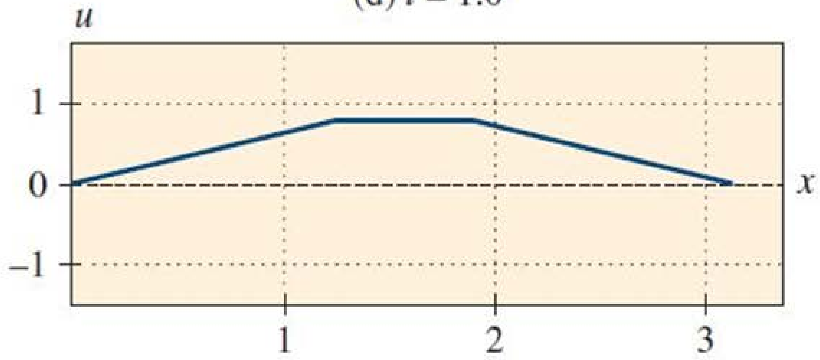
(c) $t = 0.7$



(d) $t = 1.0$



(e) $t = 1.6$



(f) $t = 1.9$

13.5 Laplace's Equation

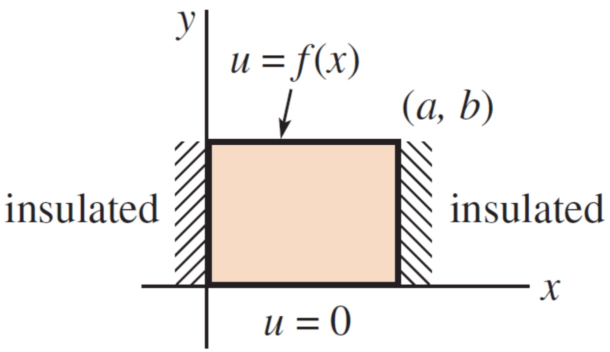
Introduction

수직 벽의 경계가 절연된 사각 판의 Steady-State (정상상태) 온도분포 구하기

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \qquad 0<x<a, \qquad 0<y<b \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a}=0, \qquad 0<y<b \tag{2}$$

$$u(x,0)=0, \qquad u(x,b)=f(x), \quad 0<x<a. \tag{3}$$



Solution of the BVP

$u(x,y)=X(x)Y(y)$ 을 가정하면

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda$$

$$X''+\lambda X=0 \tag{4}$$

$$Y''-\lambda Y=0. \tag{5}$$

처음의 세 경계조건은 → $X'(0)=0,\ X'(a)=0,\ Y(0)=0$

식 (4)와 경계조건은

$$X''+\lambda X=0,\ X'(0)=0,\ X'(a)=0. \qquad (6)$$

$\lambda=0$ 인 경우는;

$$X''=0,\ X'(0)=0,\ X'(a)=0.$$

$$X(x)=c_1$$

$\lambda=-\alpha^2<0$ 인 경우는;

Trivial Solution

$\lambda=\alpha^2>0$ 인 경우는;

$$X''+\alpha^2 X=0,\ X'(0)=0,\ X'(a)=0$$

$$X=c_1\cos\frac{n\pi}{a}x,\quad n=1,2,\ldots,\quad \lambda_n=\alpha_n^2=\frac{n^2\pi^2}{a^2}$$

$\lambda = 0$, $\lambda = \alpha^2 > 0$ 인 경우를 종합하여

$$X = c_1, \ n = 0, \quad \text{and} \quad X = c_1 \cos\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

이제 식 (5)와 경계조건은

$$Y'' - \lambda Y = 0, \ Y(0) = 0$$

$\lambda_0 = 0$ 이면 → $Y(y) = c_4 y$

$\lambda_n = \alpha_n^2 = n^2\pi^2 / a^2$ 이면 → $Y = c_3 \cosh(n\pi y / a) + c_4 \sinh(n\pi y / a).$

경계조건에 의해 $Y = c_4 \sinh(n\pi y / a).$

종합하면, (1)을 만족하며 처음의 세 경계조건을 만족하는 $u_n = X(x)Y(y)$ 형태의 해는

$$A_0 y, \quad n = 0, \qquad \text{and} \qquad A_n \sinh\frac{n\pi}{a}y \cos\frac{n\pi}{a}x, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

중첩의 원리에 의하여

$$u(x,y) = A_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh\frac{n\pi}{a} y \cos\frac{n\pi}{a} x. \tag{7}$$

네 번째 경계조건을 대입하면

$$u(x,b) = f(x) = A_0 b + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sinh\frac{n\pi}{a} b\right)\cos\frac{n\pi}{a} x,$$ ← Fourier cosine Series

$A_0 b = a_0/2,\ A_n \sinh(n\pi b/a) = a_n$ 에 해당하므로

$$2A_0 b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)dx, \rightarrow A_0 = \frac{1}{ab}\int_0^a f(x)dx \tag{8}$$

$$A_n \sinh\frac{n\pi}{a} b = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a} x dx$$

$$A_n = \frac{2}{a\sinh\frac{n\pi}{a} b}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi}{a} x dx. \tag{9}$$

최종해는 (7)이며 필요한 상수는 (8), (9)에 정의된다.