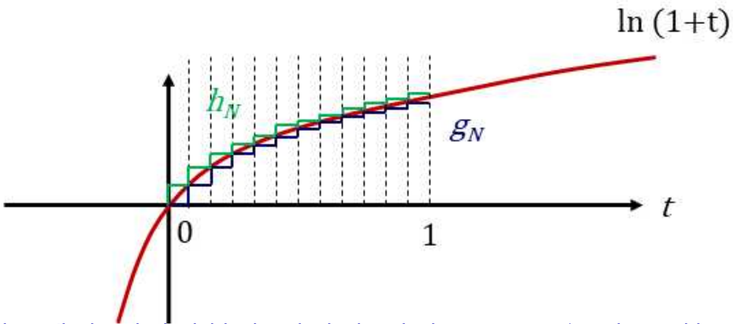
신호 및 시스템 중간고사

2018년 04월 28일 09:30 - 12:00

1. 구간 $t \in [0,1]$에서 정의된 함수 $f(t) = \ln(1+t)$의 적분을 직사각형의 합으로 근사하고자 한다. 아래의 질문에 답하여라. (15 점)

(a) [0, 1] 구간을 N 등분한 직사각형 면적들의 합을 각각 g_N과 h_N라고 할 때, $g_N < \int_0^1 \ln(1+t)\,dt < h_N$ 이고, $\lim_{N\to\infty} g_N = \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \lim_{N\to\infty} h_N$인 g_N과 h_N을 구하고, 그래프로 나타내어라. (10 점)



> 위의 그래프에서 직사각형의 밑변의 길이는 $\Delta = 1/N$이고, 함수 $\ln(1+t)$에 접하는 두 직사각형들의 면적의 합을 각각 g_N과 h_N이라 하면 이들을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_N = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta \ln(1+k\Delta) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{N}\right)}{N}$$

$$h_N = \sum_{k=1}^{N} \Delta \ln(1+k\Delta) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\ln\left(1+\frac{k}{N}\right)}{N}$$

이 때, $N \to \infty$이면, 두 직사각형들의 밑변의 길이가 0에 수렴하므로 적분값과 위의 합의 동일하게 된다.

(b) 유한한 N 에 대하여 g_N과 h_N의 오차를 각각 계산하라. (5 점)

> 오차를 계산하기 위해서 적분 $\int_0^1 \ln(1+t)\,dt$를 계산해야 한다. $1+t=u$로 치환하면

$$\int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \int_1^2 \ln u\,du = [u\ln u]_1^2 - \int_1^2 u\frac{1}{u}\,du = 2\ln 2 - 1.$$

따라서 g_N과 h_N의 Error는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$g_N - \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\ln(1+\frac{k}{N})}{N} - 2\ln 2 + 1$$

$$h_N - \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \sum_{k=1}^{N} \frac{\ln(1+\frac{k}{N})}{N} - 2\ln 2 + 1$$

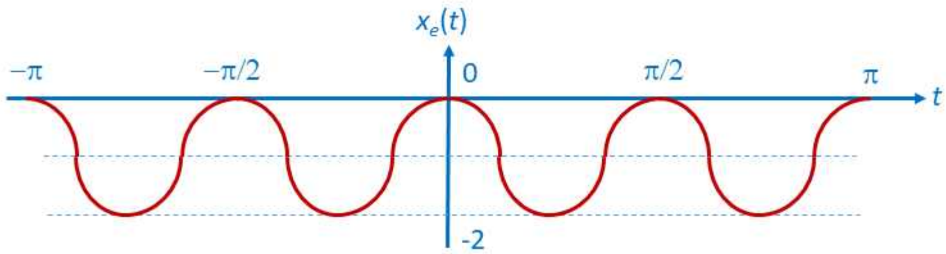
2. 신호 $x(t) = \begin{cases} 2\cos(4t) - 2, & t > 0 \\ 0, & otherwise \end{cases}$에 대한 아래의 질문들에 답하여라. (15 점)

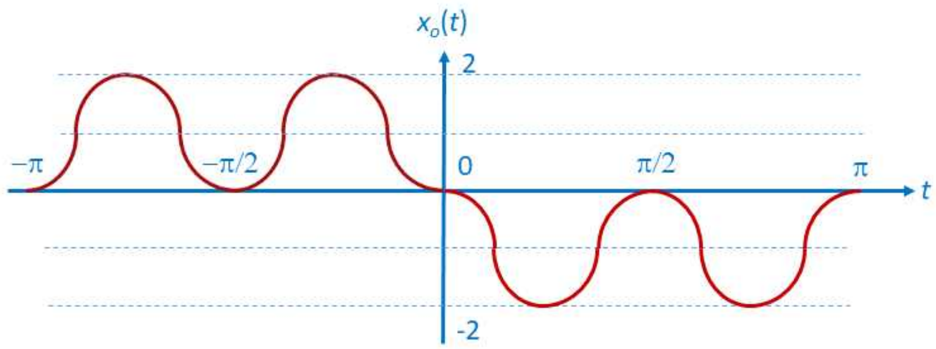
(a) 신호 $x(t)$의 Even/Odd Component인 $x_e(t)/x_o(t)$를 각각 계산하고 그래프를 그려라. (10 점)

> $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$이고, $x(-t) = x_e(t) - x_o(t)$이므로

$$x_e(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} = \cos 4t - 1$$

$$x_o(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} = \begin{cases} \cos 4t - 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1 - \cos 4t, & t < 0 \end{cases}$$





(b) 신호 $x(t)$의 Energy와 Power를 계산하라. (5 점)

> $x(t)$는 $t > 0$인 구간에서 무한하게 반복되므로

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \infty$$

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_{0}^{T} (\cos 4t - 1)^2 \, dt$$

$$= \lim_{T\to\infty} \frac{2}{T}\int_{0}^{T} (\cos^2 4t - 2\cos 4t + 1) \, dt \quad (T = \pi/2)$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} (\frac{1+\cos 8t}{2} + 1) \, dt = 3$$

3. 신호 $x(t) = 1 + \dfrac{\cos t}{\sin 3t}$와 $y(t) = 1 + \dfrac{\cos t}{\sin 2t}$가 주기신호인지 각각 판단하고, 주기신호인 경우 Fundamental Period를 계산하라. (15점)

> 일반적으로 신호 $z(t)$가 주기신호이기 위해서는 $z(t) = z(t+T)$인 $T > 0$가 존재해야 한다.

$$x(t) = x(t+T) \to \frac{\cos t}{\sin 3t} = \frac{\cos t \cos T - \sin t \sin T}{\sin 3t \cos 3T + \cos 3t \sin 3T}$$

$$\to \cos t \sin 3t\,(\cos 3T - \cos T) + \cos t \cos 3t \sin 3T + \sin t \sin 3t \sin T = 0$$

위의 항등식을 만족하기 위해서는 $3T = 2k\pi \pm T, 3T = m\pi,\ T = n\pi$를 만족해야 한다. $T = k\pi$일 때, 위의 조건들을 동시에 만족하며, Fundamental Period $T = \pi$이다.

$$y(t) = y(t+T) \to \frac{\cos t}{\sin 2t} = \frac{\cos t \cos T - \sin t \sin T}{\sin 2t \cos 2T + \cos 2t \sin 2T}$$

$$\to \cos t \sin 2t\,(\cos 2T - \cos T) + \cos t \cos 2t \sin 2T + \sin t \sin 2t \sin T = 0$$

위의 항등식을 만족하기 위해서는 $2T = 2k\pi \pm T, 2T = m\pi,\ T = n\pi$를 만족해야 한다. $T = 2k\pi$일 때, 위의 조건들을 동시에 만족하며, Fundamental Period $T = 2\pi$이다.

4. LTI 시스템에 관한 아래의 이론들을 증명하라. (25 점)

(a) LTI 시스템에서 출력신호 $y(t)$가 입력신호 $x(t)$와 Impulse Response $h(t)$의 Convolution으로 나타낼 수 있음을 증명하라. (10 점)

> Sifting Property에 의해 입력신호 $x(t)$를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau$$

한편, Impulse response $h(t)$는 입력신호가 $x(t) = \delta(t)$일 때 출력을 의미한다. 따라서, 입력신호 $x(t)$에 대한 출력신호 $y(t)$를 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$y(t) = S[x(t)] = S\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\, d\tau\right] = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) S[\delta(t-\tau)]\, d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau)\, d\tau = x(t) * h(t)$$

(b) 출력신호의 라플라스 변환 $Y(s)$가 입력신호의 라플라스 변환 $X(s)$와 Transfer Function $H(s)$의 곱(Multiplication)으로 나타낼 수 있음을 보여라. (15 점)

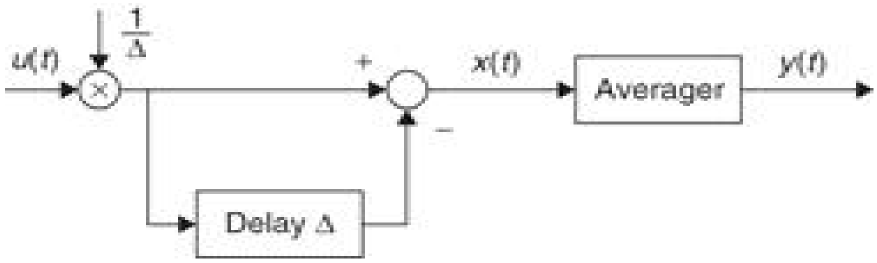
> (a)에서 출력신호 $y(t) = x(t)*h(t)$이므로

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \int_0^\infty \int_0^\infty x(\tau)h(t-\tau)d\tau\ e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty x(\tau)\int_0^\infty h(t-\tau)\,e^{-st}dt\ \ d\tau \\
&= \int_0^\infty x(\tau)\int_0^\infty h(t-\tau)\,e^{-s(t-\tau)}dt\,e^{-s\tau}\,d\tau \\
&= H(s)\int_0^\infty x(\tau)\,e^{-s\tau}\,d\tau = X(s)\,H(s)
\end{aligned}
$$

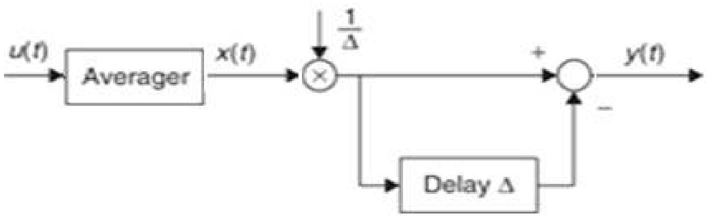
5. 아래의 그림의 LTI 시스템에서 Unit-Step 입력신호 $u(t)$가 인가된다. Averager의 입력신호$x(t)$에 대한 출력신호 $y(t)$는 아래와 같이 주어진다.

$$y(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} x(\tau)\ d\tau$$

$\Delta \to 0$일 때 시스템의 출력 $y(t)$를 구하여라. (15 점)



> LTI 시스템이므로 아래의 그림과 같이 Cascade 된 두 sub-system의 순서를 바꾸어도 동일한 결과를 얻을 수 있다. (교환법칙 성립)



Averager의 출력 $x(t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} u(\tau)\,d\tau$이고, Block Diagram에서

$$y(t) = \lim_{\Delta \to 0}\frac{1}{\Delta}[x(t) - x(t-\Delta)] = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{T}[u(t) - u(t-T)] = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{T}, & 0<t<T \\ 0, & t > T \end{cases}$$

6. 라플라스 변환에 관한 아래의 질문들에 답하여라. (25 점)

(a) 이차미분방정식을 가지는 시스템에서 출력신호 $y(t)$의 라플라스 변환 $Y(s)$가 아래와 같이 주어진다.

$$Y(s) = \frac{-s^2 - s + 1}{s(s^2 + 3s + 2)}$$

입력신호 $x(t) = u(t)$일 때, 이차미분방정식을 도출하고, 초기조건 $y(0)$와 $dy(0)/dt$를 구하여라. (15 점)

> LTI 시스템 출력의 라플라스 변환 $Y(s)$는 아래와 같이 입력신호에 의한 출력과 초기조건에 의한 출력의 합으로 나타낼 수 있다.

$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s) + \frac{I(s)}{A(s)}$

$x(t) = u(t)$이므로 $X(s) = 1/s$가 되어야 한다. 이를 위해 $Y(s)$의 분자를 1과 $-s(s+1)$로 구분하면

$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} X(s) + \frac{I(s)}{A(s)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2} \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + 3s + 2}$

입력신호에 대한 출력만을 고려할 경우, $(s^2 + 3s + 2) Y(s) = X(s)$를 라플라스 역변환하면 아래의 미분방정식을 유도할 수 있다.

$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3 \frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$

이를 다시 라플라스 변환하면 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$(s^2 + 3s + 2) Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3y(0) = X(s)$

따라서, 초기조건과 이를 연립하면 $y(0) = -1, y'(0) = 2$이다.

(b) 출력신호 $y(t)$의 라플라스 변환이 아래와 같이 주어진다.

$$Y(s) = \frac{1}{s((s+1)^2 + 4)}$$

이 때, $y(t)$의 Steady-State 응답 $y_{ss}(t)$와 Transient 응답 $y_t(t)$를 계산하라. (10 점)

> 라플라스 변환에서 pole이 Left Half Plane (LHP)에 있는 항목이 Transient 응답이 되고 $\sigma = 0$ 축에 있는 pole이 Steady-State 응답이 된다. 주어진 문제에서 $Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{b(s+1) + 2c}{(s+1)^2 + 2^2}$로 두면, $a = 1/5, b = -1/5, c = -1/10$이다. 따라서,

$y_{ss}(t) = \frac{1}{5} u(t)$

$y_t(t) = -e^{-t} \left[\frac{1}{5} \cos 2t + \frac{1}{10} \sin 2t \right] u(t)$