Chapter 12　Orthogonal Functions and Fourier Series

- 편미분방정식를 위한 준비학습
- 무한히 미분 가능한 함수의 경우 미분값을 이용한 무한급수 (Taylor Series) 표현이 가능함
- 함수를 삼각함수를 이용한 무한 급수로 전개하는 것이 가능함 (Fourier Series)
- Fourier Series 는 직교함수의 특별한 형태이며, 이에 따른 고유값/고유함수를 학습함

12.1 Orthogonal Functions (직교함수)

■ Introduction

- 함수는 벡터를 일반화 한 것으로 해석할 수 있음
- 내적 / 직교성 의 개념을 어떻게 함수에 확장할 수 있는지 고찰함.

■ Inner Product(내적)

$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ 일 때 두 벡터의 내적은

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = \sum_{k=1}^{3} u_k v_k$$

벡터의 내적은 다음 성질을 가진다.

$(i)\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{v},\mathbf{u})$

$(ii)\ (k\mathbf{u},\mathbf{v}) = k(\mathbf{u},\mathbf{v}),\ k$ a scalar

$(iii)\ (\mathbf{u},\mathbf{u}) = 0$ if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ and $(\mathbf{u},\mathbf{u}) > 0$ if $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$

$(iv)\ (\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{u},\mathbf{w}) + (\mathbf{v},\mathbf{w})$

$f_1,\ f_2$가 구간 $[a,b]$에서 정의될 때 두 함수의 곱 $f_1(x) f_2(x)$의 정적분은 위의 성질을 만족함.

Definition 12.1.1 Inner Product of Functions(함수의 내적)

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx$$

■ Orthogonal Functions(직교함수)

벡터의 내적 $(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=0$ 이면 직교하게 되므로 비슷한 방법으로 직교함수를 정의함

Definition 12.1.2 Orthogonal Functions(직교함수)

$(f_{1,}f_2)=\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx=0$ 이면 $f_{1,}$ f_2는 $[a,b]$에서 직교한다.

예) $f_1(x)=x^2,\ \ f_2(x)=x^3$은 구간 $[-1,1]$에서

$$(f_{1,}f_2)=\int_{-1}^{1}x^2\cdot x^3dx=\tfrac{1}{6}x^6\Big|_{-1}^{1}=0$$ 이므로 서로 직교함

Note: 벡터해석학에서는 Orthogonal (직교) 은 Perpendicular (수직)의 의미이지만

이 경우에는 아무런 기하학적 의미를 갖지 않음.

■ Orthogonal Sets

Definition 12.1.3 Orthogonal Set(직교집합)

실수함수의 집합 $\{\phi_0(x),\ \phi_1(x),\ \phi_2(x),\ \cdots\}$이 다음 식

$(\phi_m, \phi_n) = \int_a^b \phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0,\ \ m \neq n$ 을 만족하면

구간 $[a,b]$에서 **Orghogonal (직교)**이다.

■ Orthonormal Sets(정규직교집합)

벡터 $\mathbf{u}$의 Square Norm 은 내적으로 표현됨: $\|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u},\mathbf{u})$

마찬가지로 함수 ϕ_n의 Square Norm 은

$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b \phi_n^2(x)dx$ and $\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\int_a^b \phi_n^2(x)dx}.$

만일 $\{\phi_n(x)\}$가 $\|\phi_n(x)\|^2 = 1,\ \ n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$이면 **Orthonormal Set** 이라 부름

Example 1 Orthogonal Set of Functions

집합 $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots\}$이 구간 $[-\pi, \pi]$에서 Orthogonal Set 임을 보여라

Solution

$$(\phi_0, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_0(x)\phi_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n} \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sin n\pi - \sin(-n\pi)\right] = 0, \quad n \neq 0$$

$$(\phi_m, \phi_n) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x)\phi_n(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] dx \quad \leftarrow \text{trigonometric identity}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0, \quad m \neq n$$

Example 2 Norms

예제 1 에 주어진 직교집합에서 각 함수의 Norm 을 구하라.

Solution

$$\|\phi_0(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dx = 2\pi$$

$$\|\phi_0(x)\| = \sqrt{2\pi}.$$

$$\|\phi_n(x)\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} [1+\cos 2nx]\,dx = \pi$$

$$\|\phi_n(x)\| = \sqrt{\pi}.$$

집합의 각 요소를 자기자신의 Norm 으로 나누면 **Orthonormal Set** 을 구성할 수 있다.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ \cdots \right\}$$ → **Orthonormal Set**

■ Vector Analogy

$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \mathbf{v}_3$ 가 직교벡터이면 3 차원 공간의 Basis 가 되며, 임의의 벡터 $\mathbf{u}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3, \qquad c_1,\ c_2,\ c_3 : \text{벡터의 성분}$$

성분을 구하기 위해서 내적을 사용할 수 있다.

$$(\mathbf{u},\mathbf{v_1}) = c_1(\mathbf{v_1},\mathbf{v_1}) + c_2(\mathbf{v_2},\mathbf{v_1}) + c_3(\mathbf{v_3},\mathbf{v_1}) = c_1\|\mathbf{v_1}\|^2 + c_2\cdot 0 + c_3\cdot 0$$

$$\rightarrow \quad c_1 = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v_1})}{\|\mathbf{v_1}\|^2}$$

$$c_2 = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \quad \text{and} \quad c_3 = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}$$

$$\mathbf{u} = \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v_1})}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_2)}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_3)}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3 = \sum_{n=1}^{3}\frac{(\mathbf{u},\mathbf{v}_n)}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n$$

■ Orthogonal Series Expansion

$\{\phi_n(x)\}$: 구간 $[a,b]$에서 정의된 무한의 직교함수 집합일 때

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n(x)=c_0\phi_0(x)+c_1\phi_1(x)+\cdots+c_n\phi_n(x)+\cdots?$$

→ 계수 c_m 은 벡터의 경우와 같이 내적을 이용하여 구함.

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx=c_0\int_a^b \phi_0(x)\phi_m(x)dx+c_1\int_a^b \phi_1(x)\phi_m(x)dx+\cdots+c_n\int_a^b \phi_n(x)\phi_m(x)dx+\cdots$$
$$=c_0(\phi_0,\phi_m)+c_1(\phi_1,\phi_m)+\cdots+c_n(\phi_n,\phi_m)+\cdots.$$

직교성에 의하여 우변의 각 항들은 $m=n$ 경우를 제외하고 모두 0 이 됨.

$$\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx=c_n\int_a^b \phi_n^2(x)dx. \rightarrow c_n=\frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\int_a^b \phi_n^2(x)dx}=\frac{\int_a^b f(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2},\quad n=0,1,2,\ldots.$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\phi_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(f,\phi_n)}{\|\phi_n(x)\|^2}\phi_n(x)$$

Definition 12.1.4 Orthogonal Set / Weight Function

$\{\phi_n(x)\}\ \ (n = 0,1,2,\ldots.)$ 가 무게함수(weight function) $w(x)$ 에 관하여 직교이다.

$$\Leftrightarrow \int_a^b w(x)\phi_m(x)\phi_n(x)dx = 0, \quad m \neq n$$

(예) 예제-1 의 집합 $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots\}$ 은 상수 무게함수 $w(x) = 1$ 에 대하여 직교이다.

$\{\phi_n(x)\}\ \ (n = 0,1,2,\cdots)$ 이 무게함수 $w(x)$ 에 대해 직교이면 계수 구하는 식은 다음과 같다.

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)w(x)\phi_n(x)dx}{\|\phi_n(x)\|^2}$$

여기서 $\|\phi_n(x)\|^2 = \int_a^b w(x)\phi_n^2(x)dx$

12.2 Fourier Series

■ Introduction

$\{\phi_0(x), \phi_1(x), \phi_2(x), \cdots\}$ 가 Orthogonal Set 이면 임의의 함수는

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \phi_n(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + \cdots + c_n\phi_n(x) + \cdots$$ 로 전개할 수 있다.

삼각함수로 이루어지는 Orthogonal Set 을 이용하여 함수를 전개하는 방법을 고려함.

■ Trigonometric Series

다음 Orthogonal Set 를 고려하자.

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \cos\frac{3\pi}{p}x, \ldots, \sin\frac{\pi}{p}x, \sin\frac{2\pi}{p}x, \sin\frac{3\pi}{p}x, \ldots\right\} \tag{1}$$

이제 구간 $[-p, p]$에서 정의된 함수 $f(x)$를 (1)을 이용하여 전개하면

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right). \tag{2}$$

함수를 적분하면 (함수 $f(x)$에 1을 곱한 후 적분, 즉 내적 $(f(x),1)$을 구하면

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{n\pi}{p}xdx + b_n\int_{-p}^{p}\sin\frac{n\pi}{p}xdx\right).$$

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p} dx = \frac{a_0}{2}x\Big|_{-p}^{p} = pa_0 \qquad \rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx.$$

양변에 $\cos(m\pi x/p)$를 곱한 후 적분하면; (내적 계산)

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{m\pi}{p}xdx = \frac{a_0}{2}\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}xdx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}xdx + b_n\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{p}xdx\right).$$

$$\int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}xdx = 0,\quad m>0,\quad \int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\sin\frac{n\pi}{p}xdx = 0 \quad \int_{-p}^{p}\cos\frac{m\pi}{p}x\cos\frac{n\pi}{p}xdx = \begin{cases}0, & m\neq n\\ p, & m=n.\end{cases}$$

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx = a_n p \qquad \rightarrow \quad a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx.$$

양변에 $\sin(m\pi x/p)$ 를 곱한 후 다음 식들을 이용하여 적분하면; (내적 계산)

$$\int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi}{p}x\,dx = 0, \quad m>0, \quad \int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi}{p}x \sin\frac{n\pi}{p}x\,dx = 0, \int_{-p}^{p} \sin\frac{m\pi}{p}x \sin\frac{n\pi}{p}x\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ p, & m = n, \end{cases}$$

$$\rightarrow \quad b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx.$$

※ **Note**

$$\int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)dx = \frac{p}{m\pi}\sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\Big|_{-p}^{p} = 0, m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left[\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{p}\right) - \sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-p}{(m+n)\pi}\left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{p}\right) + \frac{p}{(m-n)\pi}cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\right]\right]_{-p}^{p} = 0$$

$$\therefore \int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)dx = 0, m > 0, \int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = 0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos^2\left(\frac{m\pi x}{p}\right)dx = \int_{-p}^{p} \frac{1+\cos\left(\frac{2m\pi x}{p}\right)}{2}dx = p + \frac{p}{2m\pi}\sin\left(\frac{2m\pi x}{p}\right)\Big|_{-p}^{p} = p, m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{p}\right) + \cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p}{(m+n)\pi}\left[\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{p}\right) + \frac{p}{(m-n)\pi}sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\right]\right]_{-p}^{p} = 0$$

$$\therefore \int_{-p}^{p} \cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ p, m = n \end{cases}$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = \frac{-p}{m\pi}\cos\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\Big|_{-p}^{p} = 0, m > 0$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left[\sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{p}\right)+\sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-p}{(m+n)\pi}cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{p}\right) - \frac{p}{(m-n)\pi}cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\right]\Big|_{-p}^{p} = 0$$

$$\therefore \int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = 0, m > 0, \int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = 0$$

$$\int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = -\frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\left[\cos\left(\frac{(m+n)\pi x}{p}\right)-\cos\left(\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\right]dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{p}{(m+n)\pi}sin\left(\frac{(m+n)\pi x}{p}\right) - \frac{p}{(m-n)\pi}sin\left(\frac{(m-n)\pi x}{p}\right)\right]\Big|_{-p}^{p} = 0 \ (m \neq n)$$

$$\int_{-p}^{p} \sin^2\left(\frac{m\pi x}{p}\right) dx = \int_{-p}^{p} \frac{1-\cos\left(\frac{2m\pi x}{p}\right)}{2} dx = p - \frac{1}{2}\frac{p}{2m\pi}sin\left(\frac{2m\pi x}{p}\right)\Big|_{-p}^{p} = p$$

$$\therefore \int_{-p}^{p} \sin\left(\frac{m\pi x}{p}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right)dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ p, m = n \end{cases}$$

Definition 12.2.1 Fourier Series

구간 $(-p, p)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 의 **Fourier Series** 는

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) dx$$

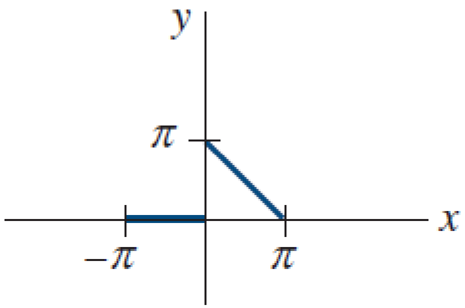
$$a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx$$

$$b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

Example 1 Expansion in a Fourier Series

다음 함수의 Fourier Series 를 구하라.

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases} \qquad (12)$$



Solution

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_0^{\pi}(\pi-x)dx\right]=\frac{1}{\pi}\left[\pi x-\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}0dx+\int_0^{\pi}(\pi-x)\cos nxdx\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[(\pi-x)\frac{\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nxdx\right]=-\frac{1}{n\pi}\frac{\cos nx}{n}\bigg|_0^{\pi}=\frac{-\cos n\pi+1}{n^2\pi} \qquad \leftarrow \cos n\pi=(-1)^n$$

$$=\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\sin nxdx=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-(-1)^n}{n^2 \pi} \cos nx + \frac{1}{n} \sin nx \right\}.$$

■ Convergence of a Fourier Series

다음 정리는 한 점에서 Fourier Series 가 수렴할 충분 조건이다.

Theorem 12.2.1 Conditions for Convergence

$f(x),\ f'(x)$ 가 구간 $(-p, p)$ 에서 Piecewise Continuous 이면

Fourier Series 는 연속인 점에서는 $f(x)$ 에 수렴

불연속인 점에서는 평균값 $\dfrac{f(x+) + f(x-)}{2}$ 에 수렴함.

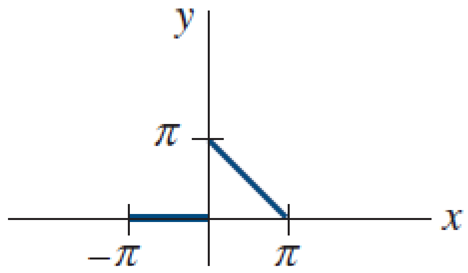
$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{p} x + b_n \sin \frac{n\pi}{p} x \right),$$

$$a_0 = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \cos \frac{n\pi}{p} x dx, \quad b_n = \frac{1}{p} \int_{-p}^{p} f(x) \sin \frac{n\pi}{p} x dx.$$

Example 2 Convergence of a Point of Discontinuity

예제-1 의 함수

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ \pi-x, & 0\le x<\pi\end{cases}$$



→ 정리 12.1 의 조건을 만족

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{p}x+b_n\sin\frac{n\pi}{p}x\right),$$

$$a_0=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx\ ,\quad a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx\ ,\quad b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx.$$

$$\therefore\ \frac{f(x+)+f(x-)}{2}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right\}.$$

Fourier Series는 $x\neq 0$ 인 점에서는 $f(x)$ 에 수렴

$x=0$ 인 점에서는 평균값 $\dfrac{f(0+)+f(0-)}{2}=\dfrac{\pi+0}{2}=\dfrac{\pi}{2}$ 에 수렴함.

Remark

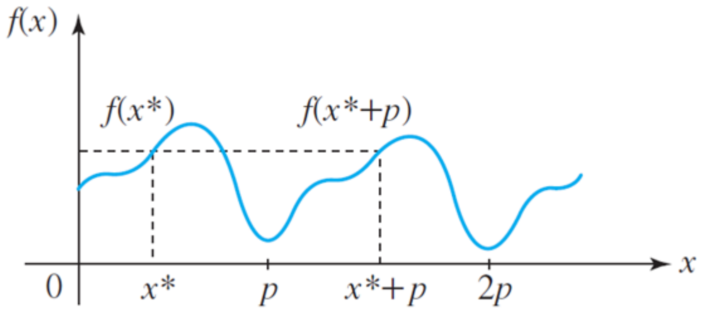
$$f(x) = f(x+p), \quad \forall x$$

p 기본주기 $\longrightarrow$ p가 주기이면 $2p$ $3p \cdots$도 모두 주기가 된다.

$$f(x+2p) = f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x)$$

$$f(x+3p) = f[(x+2p)+p] = f(x+2p) = f(x)$$

$$\therefore f(x+np) = f(x)$$



Example (Fundamental period)

$h(x) = \sin 3x + \cos 2x$ 의 기본주기 구하기

$\sin 3x \longrightarrow$ 주기가 $\frac{2}{3}\pi$인 주기함수

$\left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{6}{3}\pi, \frac{8}{3}\pi, \cdots\right\}$ $\leftarrow \sin(3(x+\frac{2\pi}{3})) = \sin(3x)$

$\cos 2x \longrightarrow$ 주기가 π인 주기함수

$\{\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, \cdots\}$ $\leftarrow \cos(2x) = \cos(2(x+\pi))$

두 집합의 교집합 중에서 가장 작은 값은 2π이므로

$$\begin{aligned} h(x+2\pi) &= \sin 3(x+2\pi) + \cos 2(x+2\pi) \\ &= \sin(3x+6\pi) + \cos(2x+4\pi) \\ &= \sin 3x + \cos 2x = h(x) \end{aligned}$$

$\therefore$ $h(x)$는 주기가 2π인 주기함수이다.

Periodic Extension

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \cos\frac{3\pi}{p}x, \dots, \sin\frac{\pi}{p}x, \sin\frac{2\pi}{p}x, \sin\frac{3\pi}{p}x, \dots\right\}$$

$\cos\frac{\pi}{p}x = \cos(\frac{\pi}{p}x + 2\pi) = \cos\frac{2\pi}{2p}(x+2p) \leftarrow \frac{2p}{1}$: fundamental period

$\cos\frac{2\pi}{p}x = \cos(\frac{2\pi}{p}x + 2\pi) = \cos\frac{2\pi}{p}(x+p) \leftarrow p = \frac{2p}{2}$: fundamental period

$\cos\frac{3\pi}{p}x = \cos(\frac{3\pi}{p}x + 2\pi) = \cos\frac{3\pi}{p}(x+\frac{2}{3}p) \leftarrow \frac{2p}{3}$: fundamental period

$\cos(\frac{n\pi x}{p}) \leftarrow \frac{2p}{n}$: fundamental period n≥ 1

$\leftarrow$ 2p : common period

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right) \leftarrow$ T=2p : fundamental period

Remark

f, f' : piecewise continuous and $f(x+T) = f(x)$, T=2p

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{n\pi x}{p}) + b_n \sin(\frac{n\pi x}{p}) = \frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{f((x+T)+) + f((x+T)-)}{2}$$

■ Periodic Extension

$$\left\{1, \cos\frac{\pi}{p}x, \cos\frac{2\pi}{p}x, \cos\frac{3\pi}{p}x, \ldots, \sin\frac{\pi}{p}x, \sin\frac{2\pi}{p}x, \sin\frac{3\pi}{p}x, \ldots\right\} \qquad (1)$$

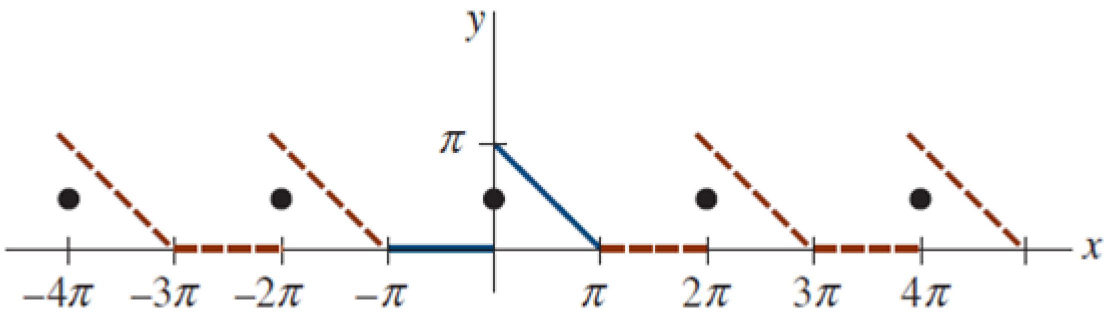
의 요소함수들은 주기가 $2p/n$이다. → 공통주기 $2p$

→ Fourier Series 는 주기적 확장도 표현함.

즉 주어진 함수가 $f(x+T)=f(x)$로 생각해도 무방함.

★ 주기함수는 Fourier Series 로 표현가능

Example



$$f(x)=\begin{cases}0, & -\pi < x < 0\\ \pi - x, & 0 \le x < \pi\end{cases}$$

$f(x+T)=f(x)$, $T=2\pi$, $p=\pi$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right\}.$$

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{\pi}{2}, \quad \frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2}=0,$$

NOTE

※ $x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots:$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) nx$$
$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx)$$
$$= \frac{f(0+)+f(0-)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

※ $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi \ldots:$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{p}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{p}\right) nx$$
$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx)$$
$$= \frac{f(\pi+)+f(\pi-)}{2} = 0$$

※

$$x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} \cos(nx) + \frac{1}{n}\sin(nx) = \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} = \frac{\pi}{2}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2}{1^2\pi}+\frac{2}{3^2\pi}+\frac{2}{5^2\pi}+\ldots=\frac{\pi}{4}$$

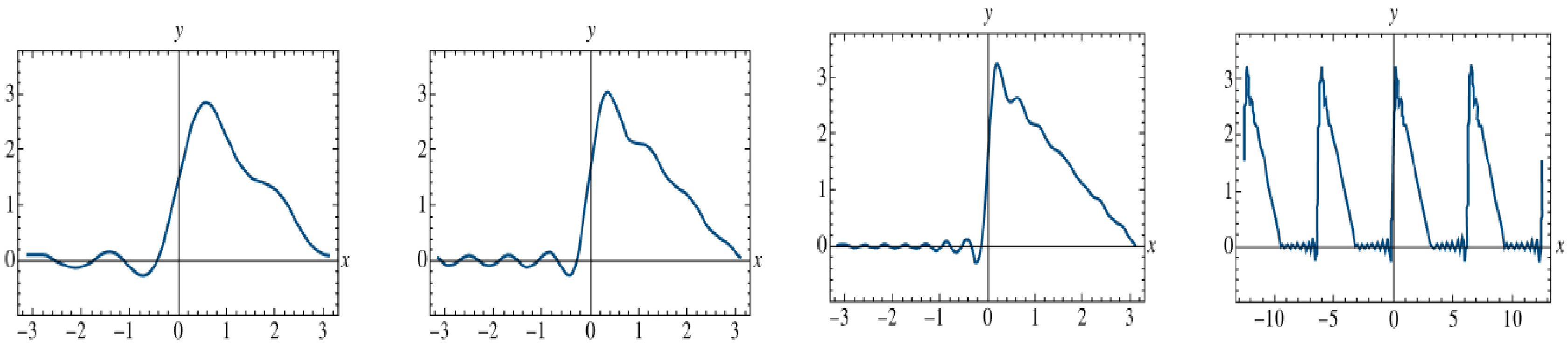
$$\therefore\ \frac{1}{1^2\pi}+\frac{1}{3^2\pi}+\frac{1}{5^2\pi}+\ldots=\frac{\pi}{8}$$

■ Sequence of Partial Sums

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx+\frac{1}{n}\sin nx\right\}.$$

Fourier Series 의 부분합 $\{S_N(x)\}$로 이루어진 수열의 수렴 정도를 그림으로 검토

$$S_1(x)=\frac{\pi}{4} \qquad S_2(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x \qquad S_3(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\cos x+\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x$$



(a) $S_5(x)$ on $(-\pi, \pi)$ (b) $S_8(x)$ on $(-\pi, \pi)$ (c) $S_{15}(x)$ on $(-\pi, \pi)$ (d) $S_{15}(x)$ on $(-4\pi, 4\pi)$

12.3 Fourier Cosine and Sine Series

Review

함수가 짝함수 (우함수) 혹은 홀함수 (기함수)일 경우

$f(x)$ 를 Fourier Series 로 전개할 때 a_0, a_n, b_n 의 계산이 간단해짐

짝함수 (우함수) (Even Function): $f(-x) = f(x)$ ← y 축 대칭

홀함수 (기함수) (Odd Function): $f(-x) = -f(x)$ ← 원점 대칭

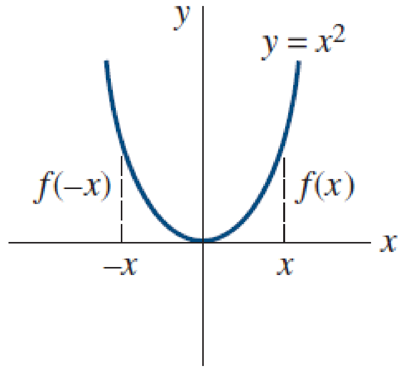
Even and Odd Functions

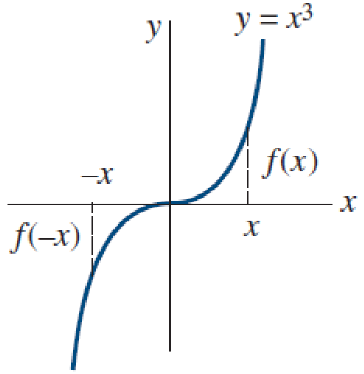
$f(x) = x^{\overset{\downarrow \text{ even integer}}{2}}$: 짝함수 $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

$f(x) = x^{\overset{\downarrow \text{ odd integer}}{3}}$: 홀함수 $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x).$

$\cos(-x) = \cos x$: 짝함수

$\sin(-x) = -\sin x$: 홀함수





■ Properties

Theorem 12.3.1 Properties of Even/Odd Functions

(a) 두 우함수의 곱은 우함수

(b) 두 기함수의 곱은 우함수

(c) 우함수와 기함수의 곱은 기함수

(d) 두 우함수의 합 (차)은 우함수

(e) 두 기함수의 합 (차)은 기함수

(f) $f(x)$가 우함수이면; $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$

(g) $f(x)$가 기함수이면; $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

Proof of (b)

$f(x),\ g(x)$가 각각 기함수 이면 $f(-x) = -f(x),\ g(-x) = -g(x)$이고 $F(x) \equiv f(x)g(x)$로 하면

$$F(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = F(x).$$

Cosine and Sine Series

$f(x)$가 $(-p, p)$에서 우함수 이면

$$a_0 = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)dx = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x}_{\text{even}}\,dx = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} \underbrace{f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x}_{\text{odd}}\,dx = 0$$

$f(x)$가 $(-p, p)$에서 기함수 이면

$$a_n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx.$$

Definition 12.3.1 Fourier Cosine and Sine Series

구간 $(-p, p)$ 에서 우함수의 Fourier Series 는 **Fourier Cosine Series**

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{p}x,$$

$$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx.$$

구간 $(-p, p)$ 에서 기함수의 Fourier Series 는 **Fourier Sine Series**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{p}x,$$

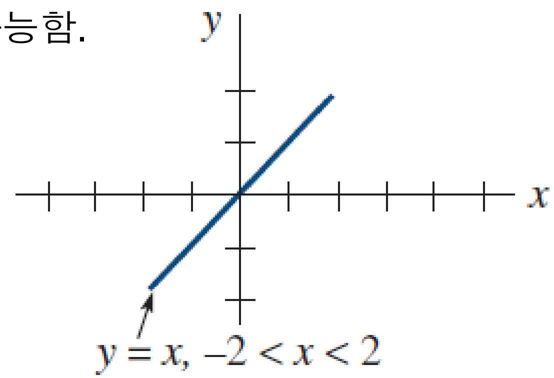
$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx.$$

Example 1 Expansion in a Sine Series

$f(x) = x, \ -2 < x < 2$ 을 Fourier Series 로 전개하시오.

Solution

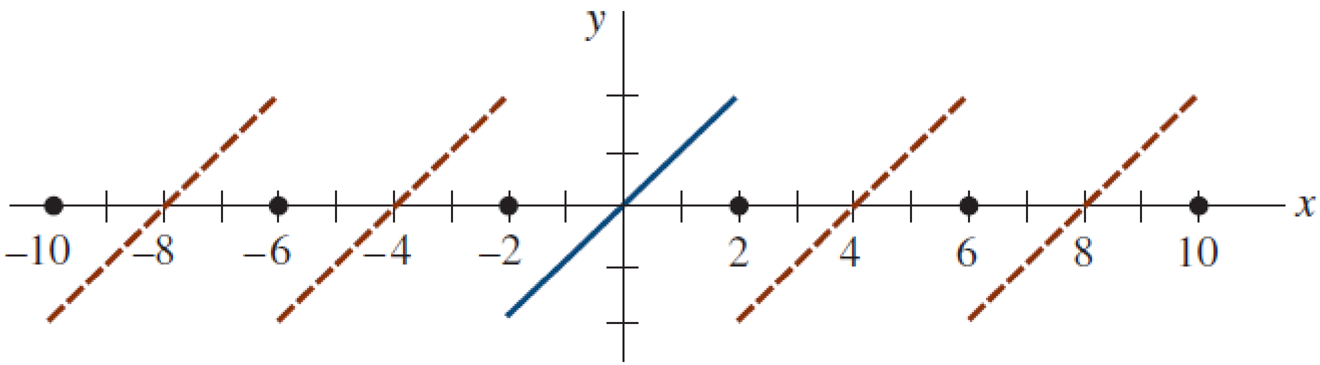
기함수 이므로 Fourier Sine Series 로 전개가능함.



$$b_n = \int_0^2 x \sin\frac{n\pi}{2} x dx = \frac{4(-1)^{n+1}}{n\pi}.$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin\frac{n\pi}{2}x.$$

주기적 확장도 가능함



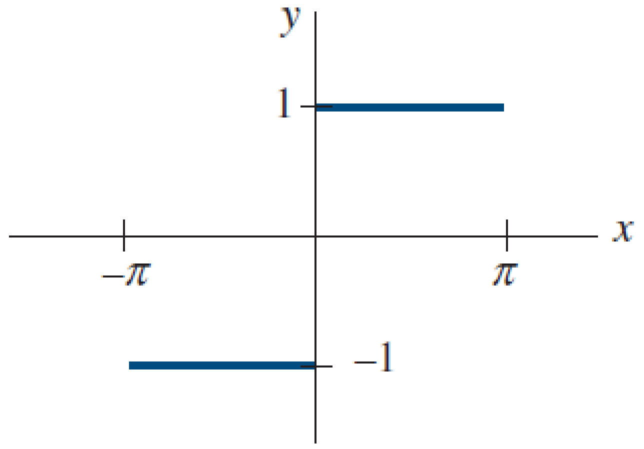
Example 2 Expansion in a Fourier Sine Series

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

위 함수는 $(-\pi,\pi)$ 에서 기함수 이므로 Fourier Sine Series 로 전개함

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n},$$

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n}\sin nx. \qquad (7)$$

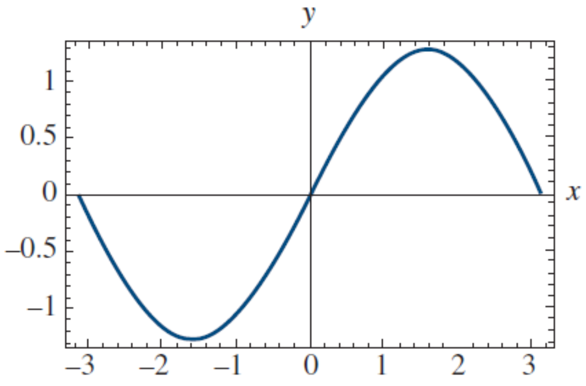


■ Gibbs Phenomenon

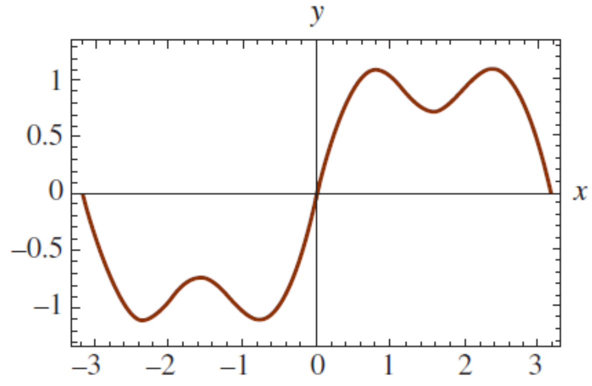
- (7)의 부분합 $S_1(x), S_2(x), S_3(x), S_{15}(x)$ 의 그래프를 통해 수렴성을 검토함

- $S_{15}(x)$ 에서조차 불연속 점 $x = -\pi, 0, \pi$ 에서 Overshooting 이 발생함

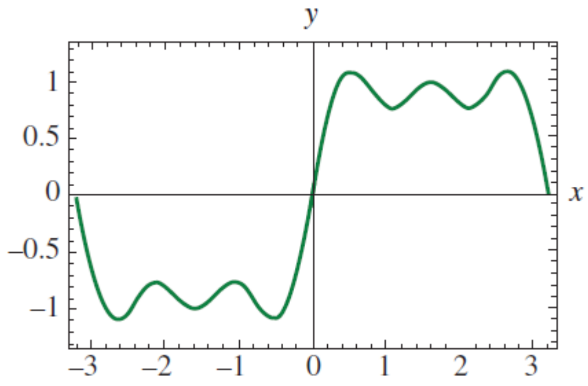
- Overshooting 현상은 $S_N(x)$ 에서 $N \to \infty$ 에서도 개선되지 않음 → **Gibbs Phenomenon**



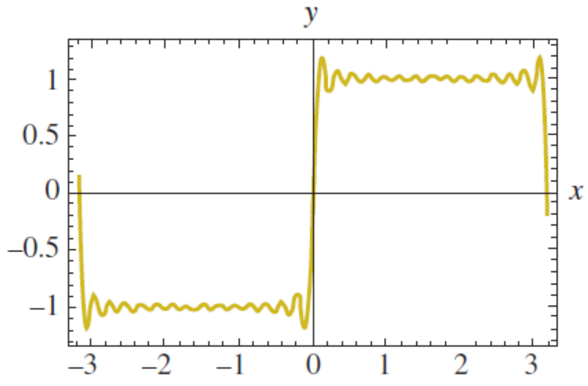
(a) $S_1(x)$



(b) $S_2(x)$



(c) $S_3(x)$



(d) $S_{15}(x)$

■ Half-Range Expansions

함수가 $0 < x < L$ 에서 정의된 경우 $-L < x < 0$ 부분은 임의로 가정하여 Fourier 전개할 수 있음

(i) y 축 대칭으로 가정

→ 우함수가 됨: Cosine Series 로 전개함, 주기 $2L$

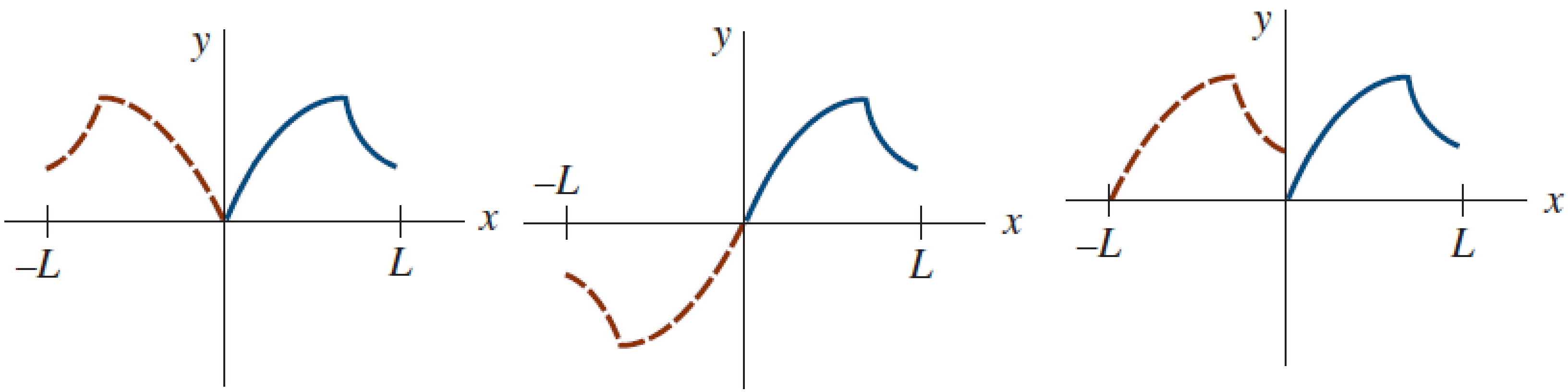
(ii) 원점 대칭으로 가정

→ 기함수가 됨: Sine Series 로 전개함, 주기 $2L$

(iii) 주기함수 $f(x) = f(x+L),\ -L < x < 0$ 로 함수를 가정함

→ 주기 L 을 갖는 $f(x)$ 의 주기적 확장이 됨, 이 경우 $2p = L$ 을 사용하여

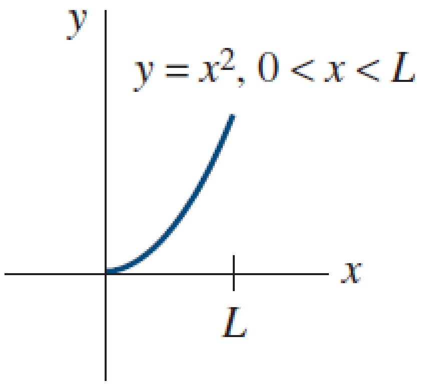
Fourier 계수를 구함



$f(x) = f(x+L)$

Example 3 Expansion in Three Series

$f(x) = x^2,\ 0 < x < L$ 을 (a) Fourier Cosine Series, (b) Fourier Sine Series, (c) Fourier Series 로 전개하기



Solution

(a) Fourier Cosine Series

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{2}{3}L^2, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{n\pi}{L}x dx = \frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2},$$

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{4L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x.$$

(b) Fourier Sine Series

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \sin\frac{n\pi}{L}x dx = \frac{2L^2(-1)^{n+1}}{n\pi} + \frac{4L^2}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right].$$

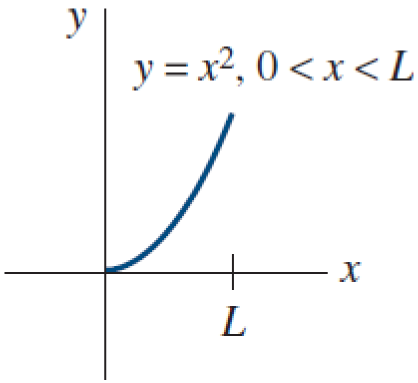
$$f(x) = \frac{2L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n^3\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]\right\}\sin\frac{n\pi}{L}x.$$

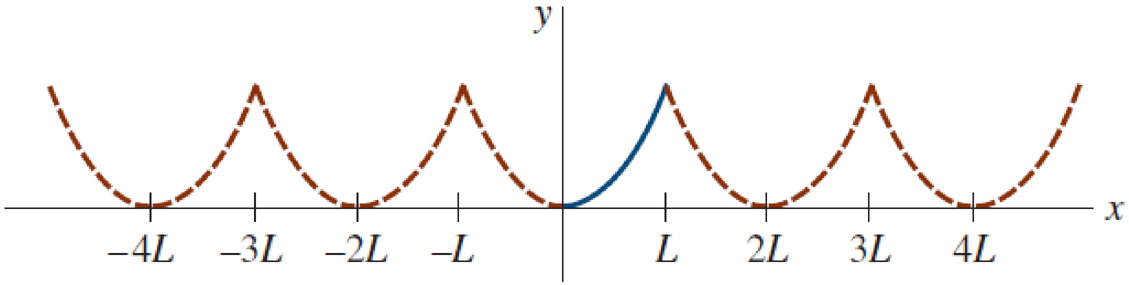
(c) Fourier Series

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{2}{3}L^2, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 \cos\frac{2n\pi}{L}xdx = \frac{L^2}{n^2\pi^2}$$

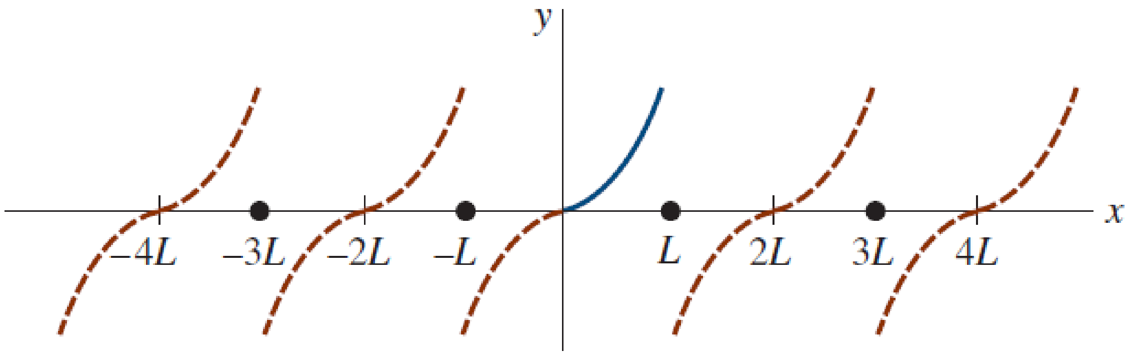
$$b_n = \frac{2}{L}\int_o^L x^2 \sin\frac{2n\pi}{L}xdx = -\frac{L^2}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{L^2}{3} + \frac{L^2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n^2\pi}\cos\frac{2n\pi}{L}x - \frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi}{L}x\right\}.$$

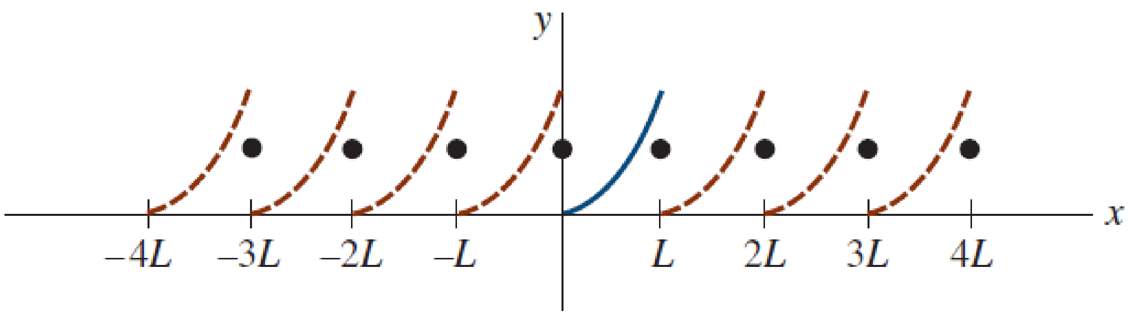




(a) Cosine series



(b) Sine series



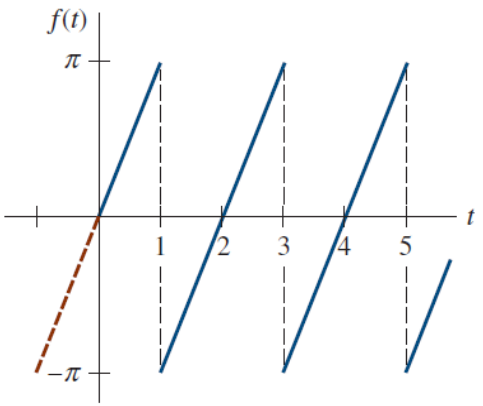
(c) Fourier series

■ Periodic Driving Force

비감쇠 스프링/질량 시스템(undamped spring/mass system):

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+kx=f(t) \tag{11}$$

구동력(external force, input, driving force) $f(t)$가 주기함수이면;



특수해(particular solution)의 형태를 다음과 같은 Fourier Sine Series 형태로 가정할 수 있음.

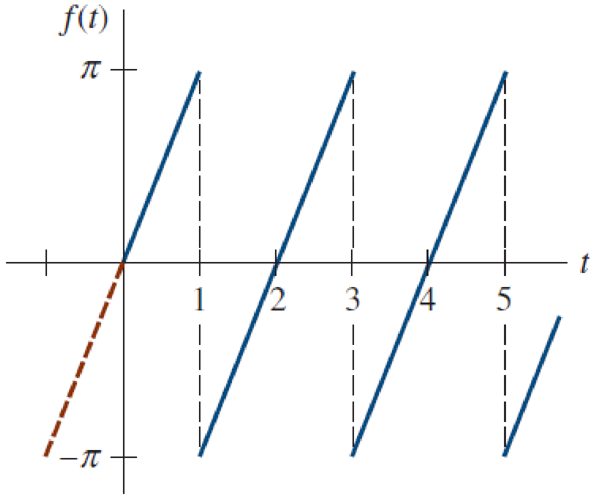
$$x_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{p}t. \tag{12}$$

Example 4 Particular Solution of a DE

질량(mass) $m = 1/16$ slug, 탄성상수(spring constant) $k = 4$ lg / ft 인

비감쇠 스프링/질량 시스템(undamped spring/mass system)이

그림에 주어진 주기 $2p = 2$ 인 구동력(driving force)을 받을 때;



원점 대칭을 가정하여 Fourier Sine Series 로 전개한다.

$$b_n = \frac{2}{p}\int_0^p f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x\,dx. = 2\int_0^1 \pi t\sin n\pi t\,dt = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

시스템 방정식은

$$\frac{1}{16}\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi t$$

이 식의 특수해를 구하기 위해 $x_p(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{p}t.$ 를 대입하여 계수 B_n 을 구하면

$$\left(-\frac{1}{16}n^2\pi^2+4\right)B_n=\frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad \text{or} \quad B_n=\frac{32(-1)^{n+1}}{n(64-n^2\pi^2)}.$$

이 시스템의 특수해는 다음과 같다.

$$x_p(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{32(-1)^{n+1}}{n(64-n^2\pi^2)}\sin n\pi t.$$

- B_n 의 분모 $64-n^2\pi^2=0$ 인 $n\geq 1$ 인 정수가 존재하지 않음

- $\omega=\sqrt{k/m}$ 일 때 $N\pi/p=\omega$ 가 되는 N 이 존재하면 시스템은 공진상태 (Resonance)가 됨

- 즉 구동력 $f(t)$ 의 Fourier Series 전개가 자유진동주파수와 같은 주파수를 갖는

  $\sin(N\pi/p)t$ (또는 $\cos(N\pi/p)t$)항을 포함하면 순공진 (Pure Resonance)가 생김

- 구동력을 y 축 대칭으로 가정하여 Fourier Cosine Series 로 전개하여도 무방함.

12.4 Complex Fourier Series and Frequency Spectrum

■ Introduction

- Fourier Series, Fourier Cosine Series, Fourier Sine Series 의 개념은

  편미분 방정식 풀이에 응용됨

- 전자기해석 등의 분야에서는 복소함수로 표현하는 것이 편리한 경우가 있음.

- 오일러 공식 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$ 을 이용하여 (1)

  복소함수 형태의 Fourier Series 를 구성할 수 있음.

■ Complex Fourier Series

식 (1)을 $\cos x$, $\sin x$ 에 대하여 풀면

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

이 식을 Fourier Series 의 전개식 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right)$ 에 대입하면;

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{e^{in\pi x/p}+e^{-in\pi x/p}}{2}+b_n\frac{e^{in\pi x/p}-e^{-in\pi x/p}}{2i}\right]\\
&\quad=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(a_n-ib_n)e^{in\pi x/p}+\frac{1}{2}(a_n+ib_n)e^{-in\pi x/p}\right]\\
&\quad=c_0+\sum_{n=1}^{\infty}c_ne^{in\pi x/p}+\sum_{n=1}^{\infty}c_{-n}e^{-in\pi x/p},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
c_0=\frac{a_0}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)dx,
\tag{4}
$$

$$
\begin{aligned}
c_n&=\overline{c}_{-n}=\frac{1}{2}(a_n-ib_n)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos\frac{n\pi}{p}xdx-i\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin\frac{n\pi}{p}xdx\right)\\
&=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)\left[\cos\frac{n\pi}{p}x-i\sin\frac{n\pi}{p}x\right]dx\\
&=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)e^{-in\pi x/p}dx,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
c_{-n} = \overline{c}_n &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos\frac{n\pi}{p}x dx + i\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin\frac{n\pi}{p}x dx \right) \\
&= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\left[\cos\frac{n\pi}{p}x + i\sin\frac{n\pi}{p}x\right] dx \\
&= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{in\pi x/p} dx.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

(3), (5), (6)의 계수와 지수의 번호 n 이 모든 자연수를 포함하므로 하나의 식으로 표현 가능함

Definition 12.4.1 Complex Fourier Series

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p}, \tag{7}$$

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-in\pi x/p}dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{8}$$

$f(x)$, $f'(x)$가 구간 $(-p, p)$에서 Piecewise Continuous 이면

Complex Fourier Series 는 연속인 점에서는 $f(x)$에 수렴

불연속인 점에서는 평균값 $\dfrac{f(x+)+f(x-)}{2}$에 수렴함.

Example 1 Complex Fourier Series

$f(x) = e^{-x}, \ -\pi < x < \pi$ 를 Complex Fourier Series 로 전개하기

Solution

$p = \pi$ 이므로, (8)로부터

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-(in+1)x}dx$$
$$= -\frac{1}{2\pi(in+1)}\left[e^{-(in+1)\pi} - e^{(in+1)\pi}\right].$$

$\cos n\pi = (-1)^n, \ \sin n\pi = 0$ 이므로

$$e^{-(in+1)\pi} = e^{-\pi}(\cos n\pi - i\sin n\pi) = (-1)^n e^{-\pi}$$
$$e^{(in+1)\pi} = e^{\pi}(\cos n\pi + i\sin n\pi) = (-1)^n e^{\pi},$$

$$c_n = (-1)^n \frac{\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{2(in+1)\pi} = (-1)^n \frac{\sinh \pi}{\pi}\frac{1-in}{n^2+1}. \tag{9}$$

$$f(x) = \frac{\sinh \pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n \frac{1-in}{n^2+1}e^{inx} \tag{10}$$

■ Fundamental Frequency

Fourier Series 에서 Fundamental Period (기본주기) $T = 2p$ 이므로

Fundamental Frequency $\omega \equiv 2\pi / T = \pi / p$ 로 놓으면

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{p}x + b_n \sin\frac{n\pi}{p}x\right), \rightarrow \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/p} \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-in\omega x},$$

■ Frequency Spectrum

함수 f 기본주기(fundamental period) T 를 가진 주기함수이고,

기본각도수(fundamental angular frequency) $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ 에 대하여

점 $(n\omega, |c_n|)$ 들의 모임을 f 의 **Frequency Spectrum** (도수 스펙트럼)이라 정의함

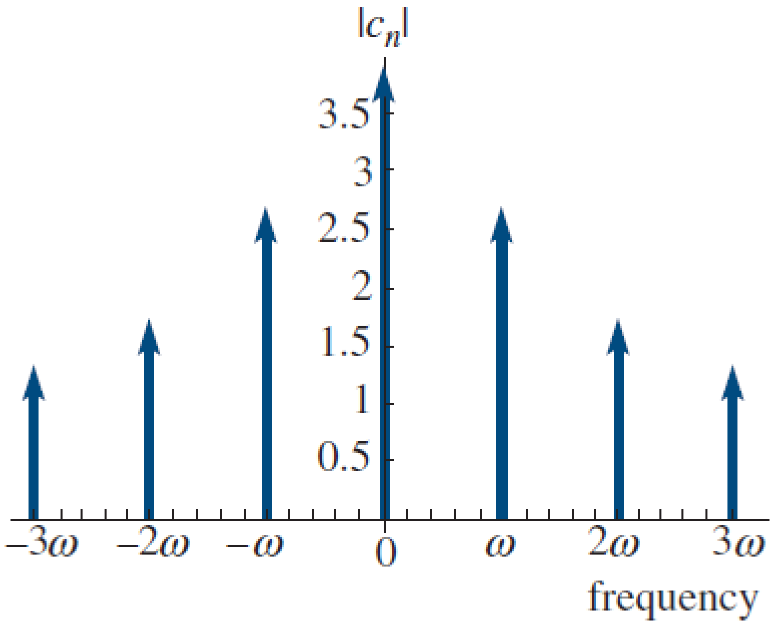
Example 2   Frequency Spectrum

예제-1 의 경우 $f(x)=\dfrac{\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1-in}{n^2+1}e^{inx}$ 에서 $\omega=1 \rightarrow n\pi=0, \pm1, \pm2, \cdots$

또한 $|\alpha+i\beta|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ 이므로

$$c_n=(-1)^n\frac{\left(e^{\pi}-e^{-\pi}\right)}{2(in+1)\pi}=(-1)^n\frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{1-in}{n^2+1}$$ 으로부터

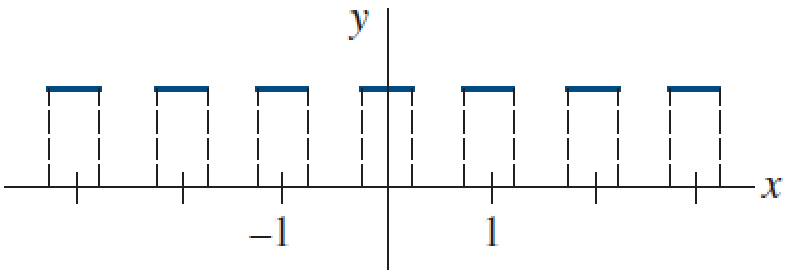
$$|c_n|=\frac{\sinh\pi}{\pi}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}.$$



Example 3　Frequency Spectrum

다음과 같은 Square Wave (Pulse Wave)의 Frequency Spectrum 구하기

$$f(x)=\begin{cases}0, & -\frac{1}{2}<x<-\frac{1}{4}\\ 1, & -\frac{1}{4}<x<\frac{1}{4}\\ 0, & \frac{1}{4}<x<\frac{1}{2}\end{cases}.$$



Solution

주기 $T=1=2p$ 이므로

$$c_n=\int_{-1/2}^{1/2} f(x)e^{2in\pi x}dx=\int_{-1/4}^{1/4}1\cdot e^{2in\pi x}dx=\left.\frac{e^{2in\pi x}}{2in\pi}\right|_{-1/4}^{1/4}$$

$$=\frac{1}{n\pi}\frac{e^{in\pi/2}-e^{-in\pi/2}}{2i}.$$

$c_n=\dfrac{1}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2}$ 이식은 $n=0$ 에서 성립하지 않으므로,

$$c_0=\int_{-1/4}^{1/4}dx=\frac{1}{2}$$