제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 점 A$(3, 0, -2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 하자. 점 C$(0, 4, 2)$에 대하여 선분 BC의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

B$(3, 0, 2)$

$\overline{BC} = \sqrt{9+16+0} = \boxed{5}$

24. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{16} = 1$의 점근선 중 하나의 기울기가 3일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

점근선 $y = \pm \frac{4}{a}x$

$\frac{4}{a} = 3$, $\boxed{a = \frac{4}{3} \ (a>0)}$

25. 좌표평면에서 세 벡터

$$\vec{a}=(3,\ 0),\quad \vec{b}=(1,\ 2),\quad \vec{c}=(4,\ 2)$$

에 대하여 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$가

① $\vec{p}\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{b}$, ② $|\vec{q}-\vec{c}|=1$

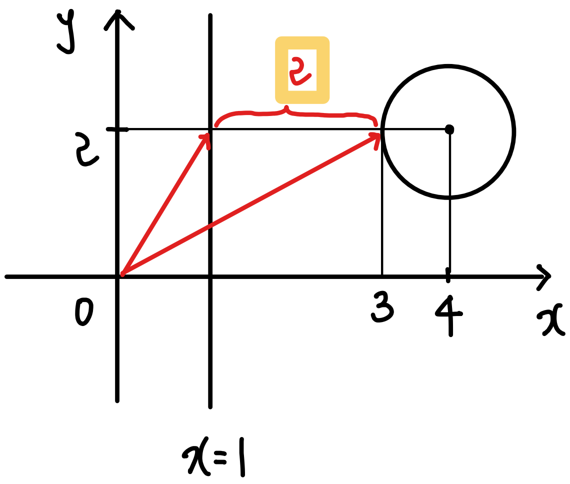
을 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{q}|$의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

① $\vec{p}=(x, y)$ 라 하면

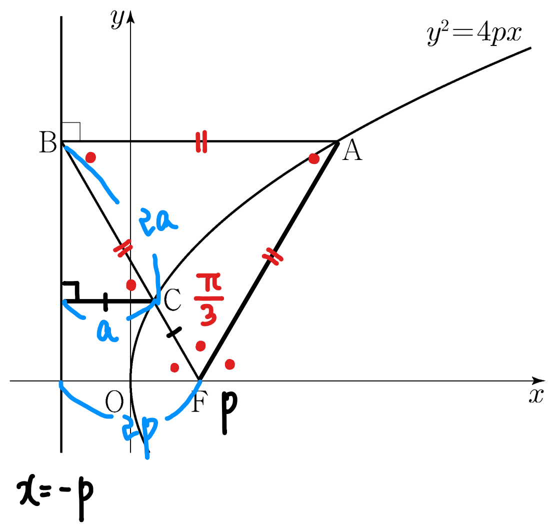
$3x=3$, $x=1$

② 중심이 $(4, 2)$ 이고 반지름 1 인 원



26. 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$ 위의 한 점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 B라 하고, 선분 BF와 포물선이 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=\overline{BF}$이고 $\overline{BC}+3\overline{CF}=6$일 때, 양수 p의 값은? [3점]

① $\frac{7}{8}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{9}{10}$ ④ $\frac{10}{11}$ ⑤ $\frac{11}{12}$



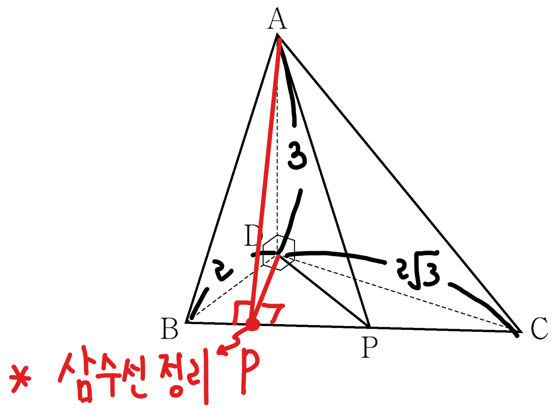
$\overline{BC}+3\overline{CF}=5a=6$, $a=\frac{6}{5}$

$\frac{2p}{3a}=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{4}\times3\times\frac{6}{5}=\boxed{\frac{9}{10}}$

27. 그림과 같이 $\overline{AD}=3$, $\overline{DB}=2$, $\overline{DC}=2\sqrt{3}$ 이고

$\angle ADB = \angle ADC = \angle BDC = \frac{\pi}{2}$ 인 사면체 ABCD가 있다.

선분 BC 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overline{AP}+\overline{DP}$ 의 최솟값은? [3점]

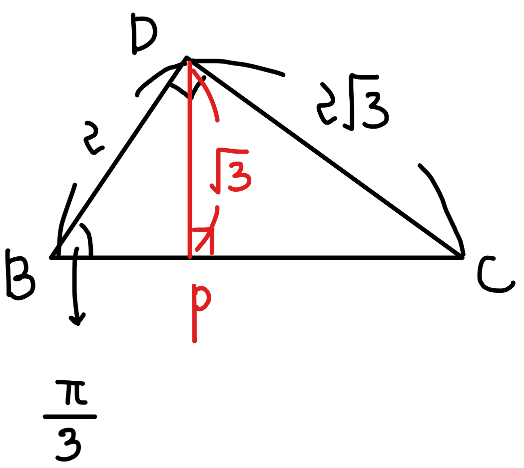


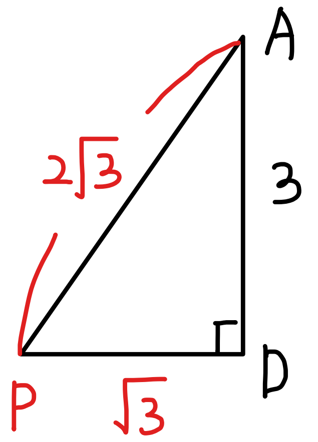
① $3\sqrt{3}$ ② $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{11\sqrt{3}}{3}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{13\sqrt{3}}{3}$

점 A에서 선분 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발이 P 일 때,

$\overline{AP}$ 가 최소가 된다.

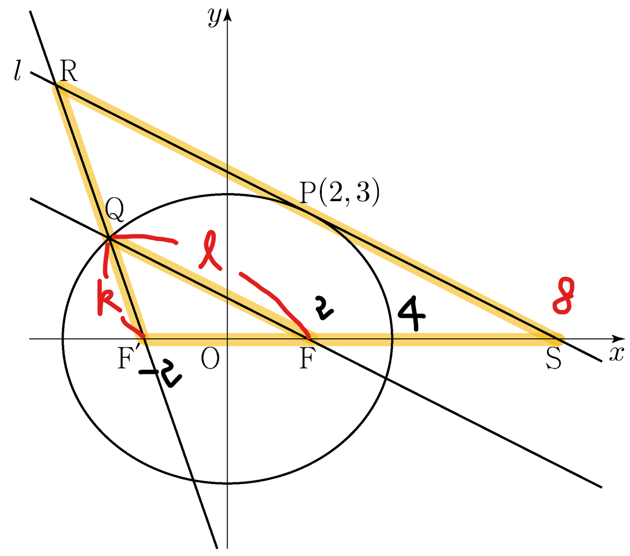
$\overline{AP}$ 가 최소가 될 때 $\overline{DP}$ 도 최소가 된다





$\overline{AP}+\overline{DP} = \boxed{3\sqrt{3}}$

28. 그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F'}(-c, 0)\,(c>0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(2, 3)$에서 타원에 접하는 직선을 l이라 하자. 점 F를 지나고 l과 평행한 직선이 타원과 만나는 점 중 제2사분면 위에 있는 점을 Q라 하자.
두 직선 F′Q와 l이 만나는 점을 R, l과 x축이 만나는 점을 S라 할 때, 삼각형 SRF′의 둘레의 길이는? [4점]



① 30 ② 31 ③ 32 ④ 33 ⑤ 34

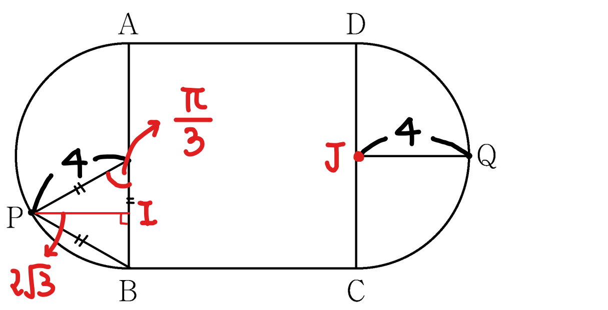
$l: \frac{2x}{16}+\frac{3y}{12}=1 \Rightarrow x+2y-8=0$

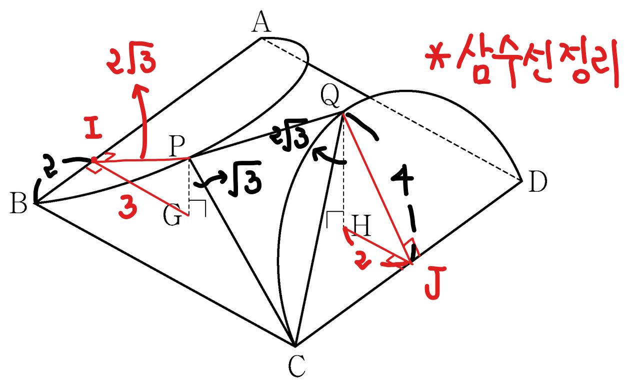
$\triangle QF'F$ 는 $\triangle RF'S$ 와 $2:5$ 닮음

$k+l+4=12$ 이므로 $12\times\frac{5}{2}=\boxed{30}$

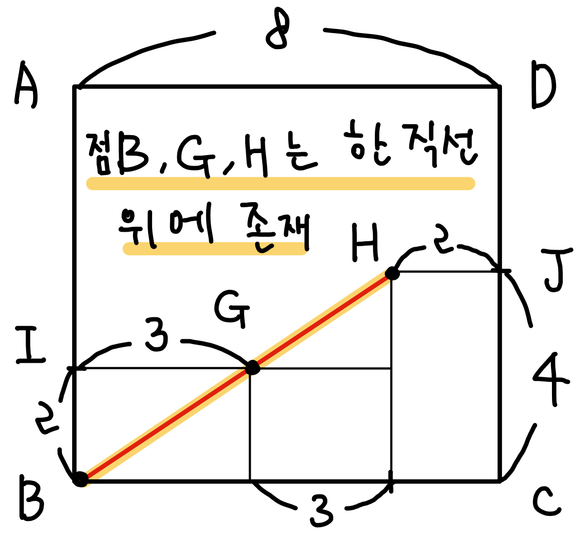
단답형

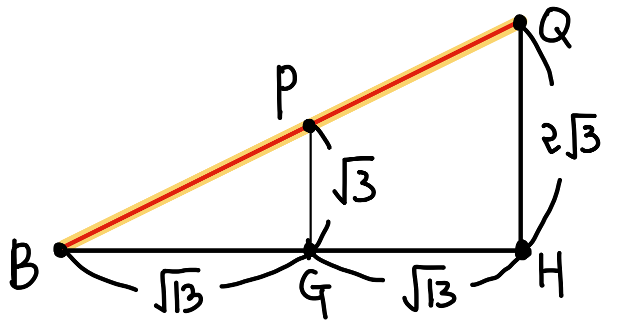
29. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자.
이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오.
(단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]





Sol1)

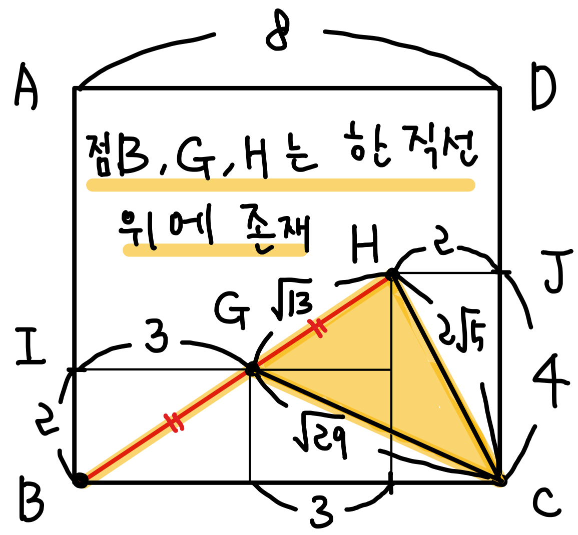




점 B, P, Q는 한 직선위에 존재

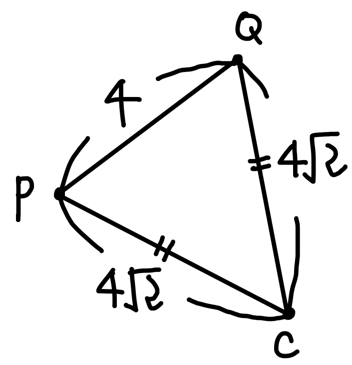
⇒ 점 B는 평면 PCQ 위의 점이므로
평면 PCQ = 평면 BCQ

Sol2)



△PCQ의 평면 ABCD에 대한 정사영은
△GCH 이다. (△PCQ × Cosθ = △GCH)

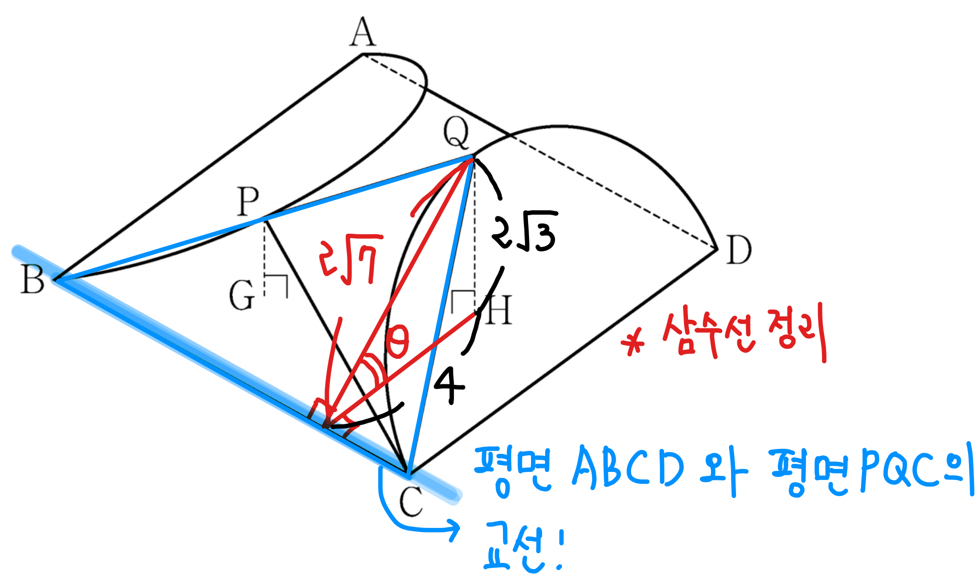
$\triangle GCH = \frac{1}{2}\times 8\times 4 - \frac{1}{2}\times 8\times 2 = 8$



$\triangle PCQ = \frac{1}{2}\times 4\times 2\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$

$4\sqrt{7}\,\mathrm{Cos}\theta = 8$ 이므로

$7\mathrm{Cos}^2\theta = \boxed{40}$

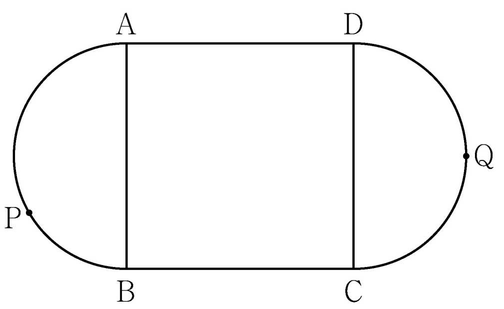


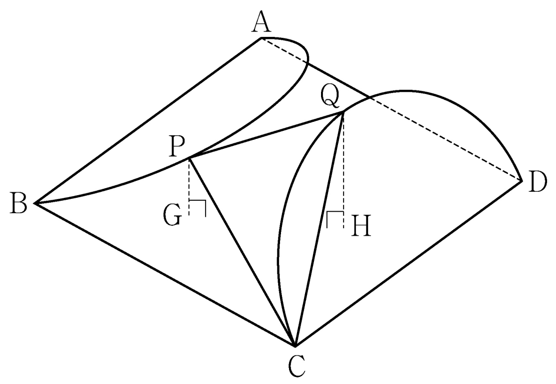
$\mathrm{Cos}\theta = \frac{2}{\sqrt{7}}$

$\therefore\ 70\mathrm{Cos}^2\theta = \boxed{40}$

단답형

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 8인 정사각형 ABCD에 두 선분 AB, CD를 각각 지름으로 하는 두 반원이 붙어 있는 모양의 종이가 있다. 반원의 호 AB의 삼등분점 중 점 B에 가까운 점을 P라 하고, 반원의 호 CD를 이등분하는 점을 Q라 하자. 이 종이에서 두 선분 AB와 CD를 접는 선으로 하여 두 반원을 접어 올렸을 때 두 점 P, Q에서 평면 ABCD에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하면 두 점 G, H는 정사각형 ABCD의 내부에 놓여 있고, $\overline{PG}=\sqrt{3}$, $\overline{QH}=2\sqrt{3}$이다. 두 평면 PCQ와 ABCD가 이루는 각의 크기가 θ일 때, $70\times\cos^2\theta$의 값을 구하시오. (단, 종이의 두께는 고려하지 않는다.) [4점]



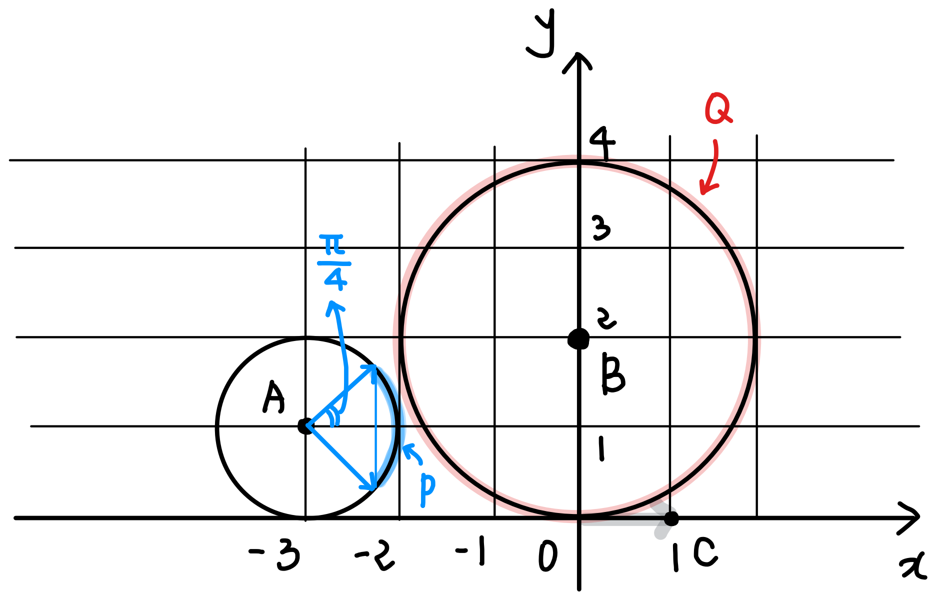


30. 좌표평면에서 세 점 A$(-3, 1)$, B$(0, 2)$, C$(1, 0)$에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{AP}|=1,\quad |\overrightarrow{BQ}|=2,\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AQ}$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q를 각각 P_0, Q_0이라 하자.
선분 AP_0 위의 점 X에 대하여 $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\ge1$일 때, $|\overrightarrow{Q_0X}|^2$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, O는 원점이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① $|\overrightarrow{OC}|=1$, $|\overrightarrow{AP}|=1$ 이므로 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OC}\ge\frac{\sqrt{2}}{2}$ 가 되려면
$\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{OC}$가 이루는 각 θ는 $-\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{\pi}{4}$

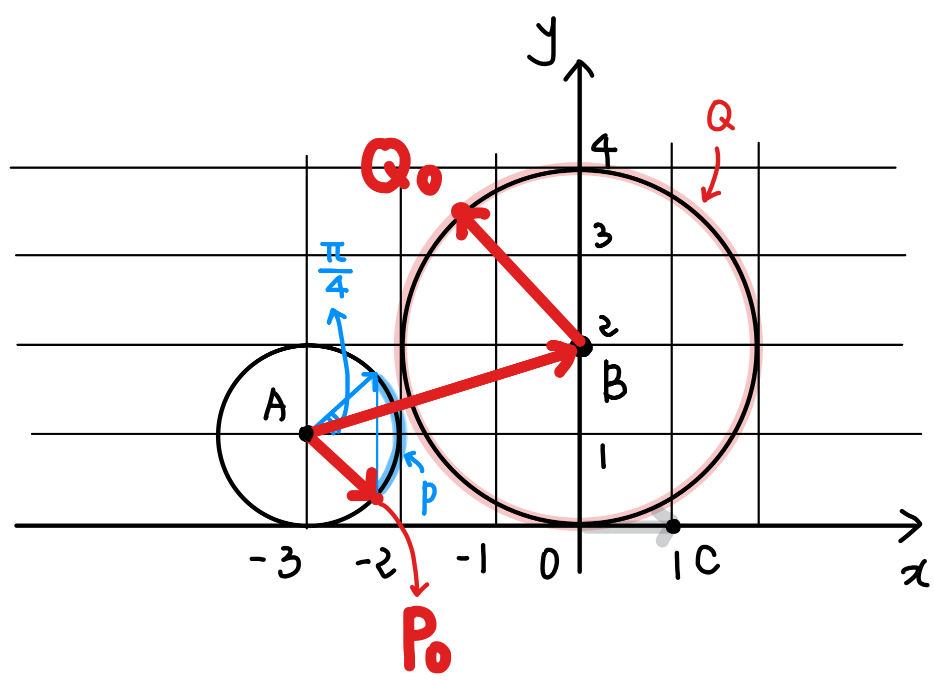


② $\underbrace{\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ})}_{(*)} = \overrightarrow{AP}\cdot\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\text{fix}} + \overrightarrow{AP}\cdot\underbrace{\overrightarrow{BQ}}_{\text{크기 fix}}$

모든 방향 가능

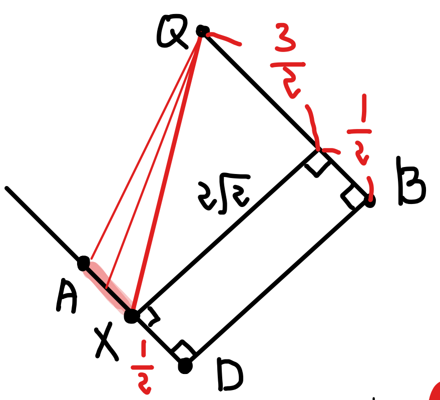
(*)가 최소가 되려면

$\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기가 최대이고,
$\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{BQ}$가 반대 방향 이다.



③ $\overrightarrow{BX}\cdot\overrightarrow{BQ_0}\ge1$ 이려면 $\overline{DX}\ge\frac{1}{2}$
($=2\overline{DX}$, 점 D는 $(-2,0)$)

따라서 $|\overrightarrow{QX}|^2$의 최댓값은 $\overline{DX}=\frac{1}{2}$ 일때 이므로



$|\overrightarrow{QX}|^2=\frac{9}{4}+8=\frac{41}{4}$

$\boxed{\therefore p+q=45}$