1장 확률

1. 확률변수

[정의 1.1-1]

표본공간(Sample space: notation S): 모든 가능한 실험 결과들의 모임

[예제 1.1-1] 한 개의 균일한 동전을 던지는 실험(앞면(H), 뒷면(T))의 표본공간

$$S=\{H, T\}.$$

[예제 1.1-2] 균일한 동전을 세 번 던져서 앞면과 뒷면이 나오는 경우 표본공간

$$S=\{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

[예제 1.1-3] 붉은 공(R) 3개, 흰 공(W) 3개, 푸른 공(B) 5개가 들어있는 항아리로부터 랜덤하게 한 개를 꺼내어 공의 색을 확인해 볼 경우, 표본공간

$$S=\{R, W, B\}.$$

[예제 1.1-4] 전구가 계속 켜져 있다. 이 전구가 수명이 다할 때까지의 시간 t의 표본공간

$$S=\{t: 0\le t\}$$

[정의 1.1-2]

사건(Event: A): 표본공간 S의 부분집합

• 사건 A의 도수(Frequency): n번의 실험을 수행하여 사건 A가 일어나는 횟수, $N(A)$

• 사건 A의 상대 도수(Relative frequency): $N(A)/n$

⇨ 실험의 시행회수 n의 값이 매우 크게 되면 사건 A에 대한 상대 도수는 어떤 값 p에 거의 같게 된다. ⇨ p: 사건 A의 확률, $P(A)$

[예제 1.1-5]
두 개의 균일한 주사위를 던져서 나타난 눈의 합을 구해본다. 표본공간은 다음과 같다.

$$S=\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

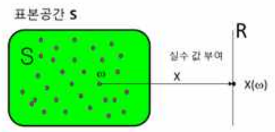
사건 A를 두 눈의 합이 7이 되는 사건 즉, A={7}이라 하자. 두 주사위를 던져서 두 눈의 합이 이 되는 실험을 수행하여 다음의 결과를 얻었다.

$$n=50,\ N(A)=10;\ n=100,\ N(A)=17;$$
$$n=500,\ N(A)=81;\ n=1{,}000,\ N(A)=175;$$

각각의 상대도수를 계산해 보면 0.200, 0.170, 0.162, 0.175.
A에 대한 수학적 확률: P(A)=1/6=0.167(상대도수 0.175에 상당히 가까운 값)

[예제 1.1-6] [예제 1.1-1]에서 표본공간 $S=\{H,T\}$
X (확률변수; Random variable): $X(H)=0$, $X(T)=1$로 정의되는 함수, 표본공간 S를 정의역으로하고 실수 공간 $\{x:x=0,1\}$을 치역으로 하는 실가함수(Real-valued function).

[정의 1.1-3]
표본공간 S의 각 원소 s에 단 하나의 실수 x에 대응하는 함수 $X(s)=x$인 X를 확률변수라 한다.



• 항등함수(Identity function): $X(s)=s$

• X의 공간은 실수들의 집합
$\{x:\ X(s)=x,\ s\in S\}$

[예제 1.1-7] 한 개의 주사위를 던지는 실험을 수행할 때, 표본공간은 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$이 되며, $s\in S$의 각각에 대하여 $Y(s)=s$로 주어지는 경우 확률변수 Y의 공간은 $\{1,2,3,4,5,6\}$이다.

- **Notation**

$P[\{s:s\in S, X(s)=a\}]\Rightarrow P[X=a]$,
$P[\{s:s\in S, a<X(s)<b\}]\Rightarrow P[a<X<b]$.

[예제 1.1-8] [예제 1.1-7]의 각각의 결과에 대해서 확률 1/6을 부여하면
$P[X=5]=1/6$
$P[2<X<5]=4/6$
$P[X\le 2]=2/6$

2. 집합

[예제 1.2-1] $S=\{1,2,3,4,5,6\}$이라고 하자. 집합 A가 짝수로 이루어진 S의 부분집합이라고 하면 $A=\{2,4,6\}=\{x:x\text{는 짝수}\}$로 표현되며 x가 S에 속한다는 것을 강조하려면 $A=\{x:x\text{는 }S\text{에 속하고 짝수이다.}\}$

• a가 집합 A의 원소다 a∈A
• a가 집합 A의 원소가 아니다 a∉A
• 집합A의 모든 원소가 집합B의 원소이면 A는 B의 부분집합이다. (A⊂B)
• 두 집합 A와 B가 A⊂B, B⊂A, 두 집합 A와 B가 같다. A=B
• S가 전체집합일 때 A⊂A, A⊂S는 항상 성립한다.
• 공집합 (Empty set: ∅)원소를 갖지 않는 집합; 모든 집합 A에서 ∅⊂A가 항상 성립
• A와 B의 합집합 (Union set; A∪B): A에 속하거나 B에 속하는 원소들의 집합
• A와 B의 교집합 (Intersection set; A∩B): A에 속하고 B에 속하는 원소들의 집합
• A의 여집합 (Complementary set; A^c): A에 속하지 않고 전체집합 S에 속하는 원소들의 집합
A∩B=∅; A와 B는 서로 배반적 (mutually exclusive)

• 확장(A_k, $k=1,2,\cdots,n$)

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{k=1}^{n}A_k,\quad A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{k=1}^{n}A_k$$

• 확장(A_k, $k=1,2,\cdots$)

$$A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k,\quad A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k$$

[예제 1.2-2] S를 6보다 작거나 같은 양의 실수들의 집합 즉, $S=\{x:0<x\leq 6\}$이라 하고, $A=\{x:1\leq x\leq 3\}$, $B=\{x:2\leq x\leq 6\}$, $C=\{x:3\leq x\leq 5\}$, $D=\{x:0<x<2\}$라 하면 다음을 쉽게 얻을 수 있다.

$A\cup B=\{x:1\leq x\leq 6\}$, $A\cap B=\{x:2\leq x\leq 3\}$,
$B\cup C=B$, $B\cap C=C$,
$B\cup D=S$, $B\cap D=\varnothing$,
$A^c=\{x:0<x<1$또는$3<x\leq 6\}$, $D^c=\{x:0<x<2\}=D$,
$A\cup C\cup D=\{x:0<x\leq 5\}$, $A\cap B\cap C=\{x:x=3\}$.

[예제 1.2-3] $A_k=\left\{x:\dfrac{10}{k+1}\leq x\leq 10\right\}$, $k=1,2,3,\cdots$이라고 하면
$\bigcup_{k=1}^{0}A_k=\{x:0<x\leq 10\}$, $\bigcap_{k=1}^{0}A_k=\{x:5\leq x\leq 10\}=A_1$.

- 집합연산의 법칙

교환법칙: $A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$
결합법칙: $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
배분법칙: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,
De Morgan 법칙: $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$, $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$
$A-B=A\cap B^c$, $(A^c)^c=A$, $A\cap S=A$, $A\cup S=S$, $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cup\varnothing=A$
$A\cap A=A$, $A\cup A=A$
$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c=\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k^c$, $\left(\bigcap_{k=1}^{\infty}E_k\right)^c=\bigcup_{k=1}^{\infty}E_k^c$