8장 연습문제

8.1 1) $t_{0.05}(4)$ $\alpha=0.05$. $d.f=4$ $\therefore$ 2.132

2) $t_{0.025}(13)$ $\alpha=0.025$, $d.f=13$ $\therefore$ 2.160

3) $-t_{0.05}(4)$ $\alpha=0.05$, $d.f=4$ $\therefore$ -2.132

4) $-t_{0.05}(13)$ $\alpha=0.05$. $d.f=13$ $\therefore$ -1.771

8.4 $n=11$ $\alpha=0.01$

$\left(\overline{x}-t_{\alpha/2}(10)\frac{\delta}{\sqrt{n}},\ \overline{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)$

i) $\overline{x}-t_{0.005}(10)\frac{\delta}{\sqrt{11}}=62.5$

$\overline{x}+t_{0.005}(10)\frac{\delta}{\sqrt{11}}=86.9$

$2\overline{x}=149.4$ $\overline{x}=74.7$

$74.7-3.169\frac{\delta}{\sqrt{11}}=62.5$

$-3.169\frac{\delta}{\sqrt{11}}=-12.2$ $\delta=12.7683$

1) $\overline{x}=74.7$, $\alpha=0.05$ $t_{0.025}(10)\times\frac{\delta}{\sqrt{11}}=2.228\times3.84\cdots$

$=8.577$

$\therefore\ \overline{x}=74.7,\ 8.577)$

2) $\left(74.7-t_{0.05}(10)\frac{\delta}{\sqrt{11}},\ 74.7+t_{0.05}(10)\frac{\delta}{\sqrt{11}}\right)$

$=(74.7-1.812\times3.85,\ 74.7+1.812\times3.85)$

$=(67.7238,\ 81.6762)$ $\therefore\ (67.7238, 81.6762)$

8.6 $n=14$. $\mu=4.1$, $s=1.6$, $\alpha=0.05$

$H_0: \mu=3.5$

$H_1: \mu>3.5$

① 검정통계량 : $t=\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\frac{4.1-3.5}{1.6/\sqrt{18}}=\frac{0.6}{1.6}\times\sqrt{18}=1.591$

② 기각역 : $T\ge t_\alpha=t_{0.05}(17)=1.740$

$\therefore$ 기각역안에 존재하지 않으므로 H_0이 기각되지 않는다.

8.7 ① 검정통계량 : 1.591 (ex 8.6)

② 기각역 $T\le t_{\alpha/2}$, $T\ge t_{\alpha/2}$ $t_{\alpha/2}=t_{0.01}(17)=2.567$

$\therefore\ T\le-2.567,\ T\ge2.567$

$\therefore$ 기각되지 않는다.

8.10 $n=10$, $\bar{x}=73.2$, $s=2.74$.

$H_0: \mu_0=70$. $H_1: \mu_0>70$

① 검정통계량 $t=\dfrac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{73.2-70}{2.74/\sqrt{10}}=\dfrac{3.2}{2.74}\times\sqrt{10}=3.6931$

② 기각역 : $T>t_{0.05}(9)=1.833$

∴ 검정통계량이 기각역 안에 존재하므로 H_0은 기각되고 H_1에 대해 강력한 증거가 된다.

P-val $P(T>3.691)<0.05$

8.11 $n=25$. $\bar{x}=68.4$. $s=6.5$

1) $H_0: \mu_0=65$. $H_1: \mu_0\neq 65$

① 검정통계량 : $t=\dfrac{68.4-65}{6.5/\sqrt{25}}=\dfrac{3.4}{1.3}=2.6154$.

② 기각역 : $T<-t_{0.025}(24)$, $T>t_{0.025}(24)$

$=T<-2.064$, $T>2.064$

∴ 검정통계량이 기각역안에 존재하므로 H_0는 기각되고 H_1에 대한 강력한 증거가 된다.

2) $\alpha=0.05$ $\left(\bar{x}-t_{0.025}(24)\dfrac{6.5}{\sqrt{25}},\ \bar{x}+t_{0.025}(24)\dfrac{6.5}{\sqrt{25}}\right)$

$=(68.4-2.064\times1.3,\ 68.4+2.064\times1.3)$

$=(65.7168,\ 71.0832)$ ∴ $(65.7168,\ 71.0832)$

3) $\left(s\sqrt{\dfrac{(n-1)}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}},\ s\sqrt{\dfrac{(n-1)}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right)$

$=\left(6.5\sqrt{\dfrac{24}{\chi^2_{0.05}(24)}},\ 6.5\sqrt{\dfrac{24}{\chi^2_{0.95}(24)}}\right)=\left(6.5\sqrt{\dfrac{24}{36.42}},\ 6.5\sqrt{\dfrac{24}{13.85}}\right)$

$=(5.2765,\ 8.5565)$ ∴ $(5.2765,\ 8.5565)$

8.14 $n=10$. $\alpha=0.05$. $\bar{x}-t_{0.025}(9)\dfrac{s}{\sqrt{10}}=36.2$. $\bar{x}+t_{0.025}(9)\dfrac{s}{\sqrt{10}}=45.8$

$\bar{x}=41$ $\bar{x}-2.262\times\dfrac{s}{\sqrt{10}}=36.2$, $\dfrac{s}{\sqrt{10}}=2.1220$

1) ∴ 6.7104

$s=6.7104$

2) $\left(\bar{x}-t_{0.01}(9)\dfrac{s}{\sqrt{10}},\ \bar{x}+t_{0.01}(9)\dfrac{s}{\sqrt{10}}\right)=(41-2.821\times2.1220,\ 41+2.821\times2.1220)$

∴ $(35.0138,\ 46.9861)$

3) $\left(s\sqrt{\dfrac{9}{\chi^2_{0.01}(9)}},\ s\sqrt{\dfrac{9}{\chi^2_{0.99}(9)}}\right)=\left(6.7104\sqrt{\dfrac{9}{21.67}},\ 6.7104\sqrt{\dfrac{9}{2.09}}\right)$ ∴ $(4.3245,\ 13.9250)$

9장 연습문제)

9.3 $n_1 = 55$ $n_2 = 58$

$\bar{x} = 5.64$ $\bar{y} = 5.03$

$s_1 = 1.25$ $s_2 = 1.82$.

1) $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2 = \mu_1 - \mu_2 > 0$

2) $\alpha = 0.1$ 검정통계량 $n_1 n_2 \geq 20$ (대표본)

$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y} - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \frac{5.64 - 5.03}{\sqrt{\frac{1.25^2}{55} + \frac{1.82^2}{58}}} = \frac{0.61}{0.2924} = 2.0862$$

기각역 $\because \mu_1 - \mu_2 > 0$ $z \geq z_\alpha (= z_{0.1}) = 1.28$.

$\therefore$ 검정통계량 = 2.0862, 기각역 $R: z \geq 1.28$

3) $\therefore$ 귀무가설을 기각하므로 대립가설을 지지한다.

$P\text{-val} = P(z \geq 2.0862) = 0.0183$

4) $\alpha = 0.1$ $\left((\bar{x} - \bar{y}) - z_{0.05}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}},\ (\bar{x} - \bar{y}) + z_{0.05}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right)$

$((5.64 - 5.03) - 1.645 \times 2.0862,\ (5.64 - 5.03) + 1.645 \times 2.0862)$

$(-2.8218,\ 4.0418)$

$\therefore (-2.8218, 4.0418)$

5) $\left(\bar{x} \pm z_{0.025}\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}}\right)$

$5.64 \pm 1.96 \times \sqrt{\frac{1.25^2}{55}} = 5.64 \pm 0.3304$ $\therefore 5.64 \pm 0.3304$

9.4 1) $n_1 = 5$, $n_2 = 4$

$\bar{x} = 8.4$ $\bar{y} = 5$

$$s_1 = \frac{\Sigma(x - \bar{x})^2}{n_1 - 1} = \frac{(0.4)^2 + (1.6)^2 + (1.4)^2 + (0.6)^2 + (0.4)^2}{4} = \frac{5.2}{4} = \sqrt{1.3} = 1.1402$$

$$s_2 = \frac{\Sigma(y - \bar{y})^2}{n_2 - 1} = \frac{1 + 9 + 1 + 9}{3} = \sqrt{\frac{20}{3}} = 2.5820$$

$$S^2_{pooled} = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2} = \frac{5.2 + 20}{7} = 3.6$$ $\therefore 3.6$

2) $$t = \frac{\bar{x} - \bar{y} - \delta_0}{S_{pooled}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \frac{3.4 - 2}{3.6\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{1}{4}}} = \frac{1.4}{3.6\sqrt{\frac{9}{20}}} = 1.1$$

자유도 : $n_1 + n_2 - 2 = 7$

$\therefore 1.1, 7$

9.7. 1) $n_1 = 12$, $n_2 = 15$

$\bar{x} = 249$ $\bar{y} = 233$

$s_1 = 19$ $s_2 = 45$

$\frac{s_1}{s_2} = \frac{19}{45} = 0.422 < \frac{1}{2}$ ∴ 공통분산 합동추정치 적용불가능

$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1 : \mu_1 > \mu_2 = \mu_1 - \mu_2 > 0$

검정통계량 : $\dfrac{\bar{x} - \bar{y} - 0}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} = \dfrac{249 - 233}{\sqrt{\frac{19^2}{12} + \frac{45^2}{15}}} = 1.2453$

기각역 : $t \geq t_{0.05}(11) = t \geq 1.796$

$n_1 - 1 = 11$, $n_2 - 1 = 14$ ∴ 자유도 (11)

∴ H_0를 기각하지 못하므로 입증이 불가능하다.

2) $\alpha = 0.05$

$(\bar{x} - \bar{y} \pm t_{0.025}(11)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}})$

$= 16 \pm 2.201 \times 12.8485$

$= 16 \pm 28.28$

3) $\alpha = 0.1$

$\bar{x} \pm t_{0.05}(11)\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}} = 249 \pm 1.796 \times \sqrt{\frac{19^2}{12}}$

$\bar{y} \pm t_{0.05}(14)\sqrt{\frac{s_2^2}{n_2}} = 233 \pm 1.761 \times \sqrt{\frac{45^2}{15}}$

∴ 249 ± 9.8508 (신약)

233 ± 20.4610 (구약)

9.8 1) $\bar{d} = \frac{\Sigma d}{9} = \frac{10.79}{9} = 1.2$

$s_d = \sqrt{\frac{\Sigma(d - \bar{d})^2}{8}} = \sqrt{\frac{0.9604 + 0.1156 + 3.0625 + 0.36 + 19.5364 + 3.8416 + 1.2544 + 4.0804 + 6.0516}{8}}$

$= 2.2154$

$H_0 : \delta = 0$

$H_1 : \delta \neq 0$

검정통계량 : $\dfrac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}} = \dfrac{1.2}{2.2154/\sqrt{9}} = 1.625$

기각역 : $|t| \geq t_{\alpha/2} = t_{0.01}(8) = 2.896$ ∴ H_0를 기각하지 못한다.

2) $\alpha = 0.1$

$\bar{d} \pm t_{\alpha/2}\frac{s_d}{\sqrt{n}} = 1.2 \pm 1.397 \times \frac{2.2154}{8}$ ∴ 1.2 ± 1.0316

9.10 $n_1 = 100,\ n_2 = 100.$

$\hat{p}_1 = 0.38 \quad \hat{p}_2 = 0.21$

1) $H_0 : p_1 - p_2 = 0$

$H_1 : p_1 - p_2 < 0$

검정통계량 $Z = \dfrac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\hat{p}\hat{q}}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = \dfrac{0.17}{\sqrt{0.295 \times 0.705}\sqrt{\frac{1}{50}}} = 2.6359$

$\hat{p} = \dfrac{59}{200} = 0.295$

기각역 : $Z \le Z_\alpha \quad \alpha = 0.05$

$\therefore Z \le 1.96$ $\quad \therefore \alpha = 0.05$ 에 대하여 H_0을

기각하지 못한다.

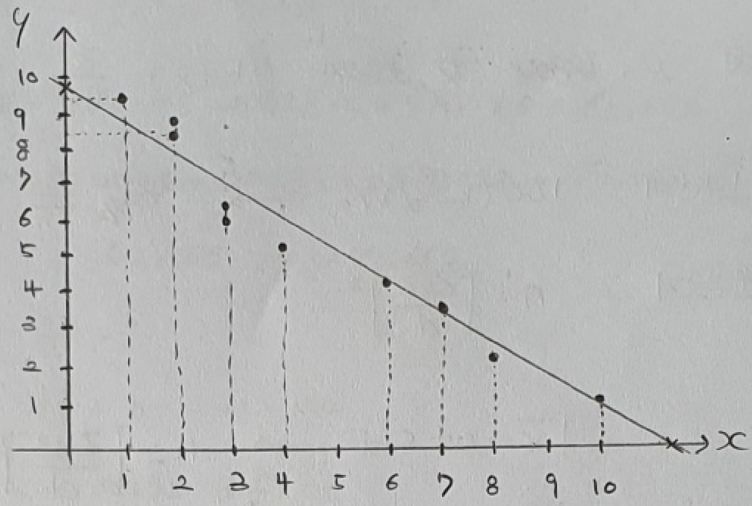
2) $\left((\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \pm Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}_1\hat{q}_1}{n_1} + \frac{\hat{p}_2\hat{q}_2}{n_2}}\right)$

$\left(0.17 \pm 1.96\sqrt{\frac{0.38 \times 0.62 + 0.21 \times 0.79}{100}}\right) = 0.17 \pm 0.1251$

$\therefore 0.17 \pm 0.1251$

10장, 연습문제

10.3 1) 산점도를 그려라.



2) 최소제곱회귀직선을 구하고 산점도에 직선을 그려라.

$\bar{x} = 4.6$, $\bar{y} = 5.816$

$S = \sqrt{\frac{SSE}{n-2}}$, $SSE = S_{yy} - \frac{S_{xy}^2}{S_{xx}} = 2.039$

$= 0.505$

$S_{xx} = \Sigma x_i^2 - n\bar{x}^2 = 292 - 4.6^2 \times 10 = 80.4$

$S_{xy} = \Sigma xy - n\bar{x}\bar{y} = 197.78 - 26.7536 \times 10 = -69.756$

$S_{yy} = \Sigma y_i^2 - n\bar{y}^2 = 400.818 - 5.816^2 \times 10 = 62.56$

$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{-69.756}{80.4} = -0.8676$

$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x} = 5.816 + 0.8676 \times 4.6 = 9.807$

$\therefore \hat{y} = -0.8676x + 9.807$

3) ∴ $x=20$은 실험범위를 많이 벗어나므로 적합된 회귀선을 사용해서 예측하는 것은 타당하다.

10.4 1) 5년된 자동차의 평균가격에 대한 예측치를 구하고 95% 신뢰구간을 구하여라

$x=5$, $\hat{y} = -0.8676 \times 5 + 9.807 = 5.469$, $\alpha = 0.05$, $n=10$

신뢰구간 : $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot x^* \pm t_{\alpha/2}(n-1) \cdot S\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x^* - \bar{x})^2}{S_{xx}}}$

$= 5.469 \pm t_{0.025}(9) \cdot 0.505\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(5.469-4.6)^2}{80.4}} = 5.469 \pm 0.3778$

$\therefore x_5^* = 5.469$, (5.469 ± 0.3778)

2) 90% 신뢰구간 : $\alpha = 0.1$

신뢰구간 $= 5.469 \pm t_{0.05}(9) \cdot 0.505\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{(5.469-4.6)^2}{80.4}} = 5.469 \pm 0.3061$

$\therefore x_5^* = 5.469$, (5.469 ± 0.30611)

10.8

$\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{i1} + \hat{\beta}_2 x_{i2} + \hat{\beta}_3 x_{i3} + \hat{\beta}_4 x_{i4}$

(1) $\hat{y}_1 = -8.51 + 2.37 \cdot 16 + 20.2 \cdot 0.5 - 0.828 \cdot 5 + 5.91 \cdot 4.6 = 62.556$

$\hat{y}_2 = -8.51 + 2.37 \cdot 25 + 20.2 \cdot 0.8 - 0.828 \cdot 1 + 5.91 \cdot 2.3 = 79.665$

$\therefore y_{i)} = 62.556 \ , \ y_{ii)} = 79.665$

(2) $SSE = 82.56 \quad n = 27$

$S = \sqrt{\frac{SCE}{n-4-1}} \quad d.f = n - 4 - 1 = 22.$

$\therefore S = 1.9372, \ d.f = 22.$

(3) y의 변동 비율 : $\frac{\text{선형회귀변동}}{\text{전체 } y\text{변동}} = \frac{925.5}{925.5 + 82.56} = 0.9181$

$\therefore 0.9181$

10.9 $S.E(\hat{\beta}_1) = 0.062, \quad S.E(\hat{\beta}_0) = 2.51.$

(1) $\hat{\beta}_1$ 90% 신뢰구간 : $\alpha = 0.1$

$2.37 \pm t_{0.05}(22) \cdot S.E(\hat{\beta}_1) = 2.37 \pm 1.717 \cdot 0.062 = 2.37 \pm 0.1065$

$\therefore (2.37 \pm 0.1065)$

(2) $H_0 : \beta_2 = 25.$

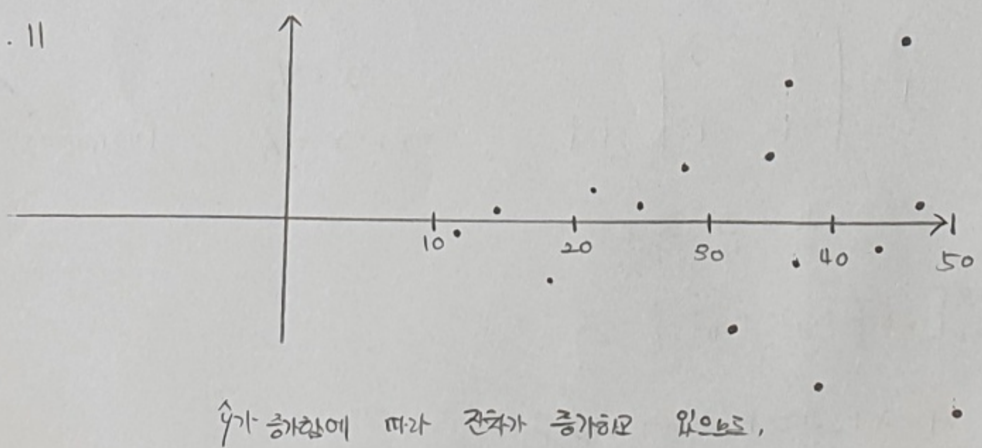
$H_1 : \beta_2 < 25$

검정통계량 $= \frac{\hat{\beta}_2 - \beta_{20}}{S.E(\hat{\beta}_2)} = \frac{-4.8}{S.E(\hat{\beta}_2)}$

기각역 $= T < -t_{0.05}(22) = T < -1.717$

$\therefore S.E(\hat{\beta}_2)$에 대한 정보가 없다..

10.11

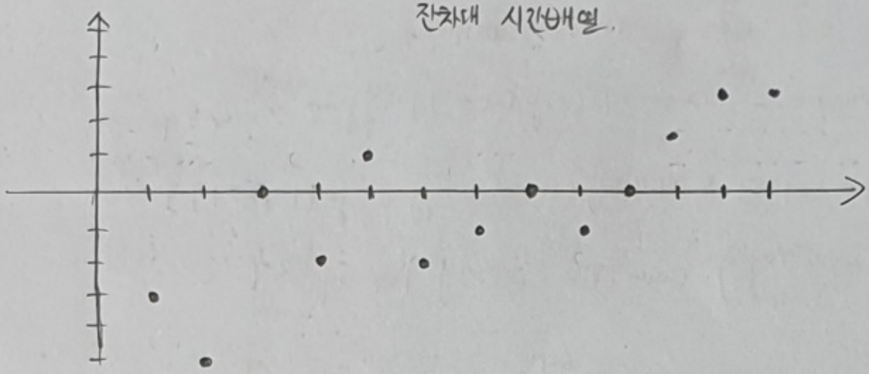


$\hat{y}$가 증가함에 따라 잔차가 증가하고 있으므로,

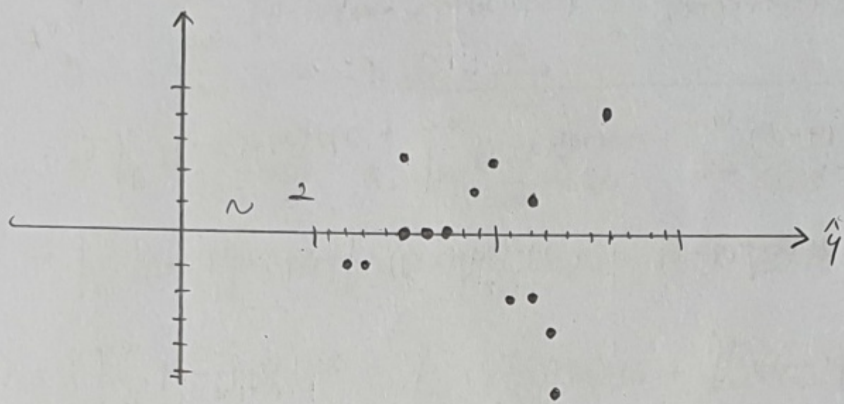
등분산 가정이 틀렸음을 알 수 있다.

10.12.

잔차대 시간배열.



잔차대 예측값.



∴ $\hat{y}$가 증가함에 따라 잔차가 증가하므로 등분산 가정에 모순이 있다.

t가 증가함에 따라 양의 상관관계를 보이므로 독립성을 의심해야 한다.

11장 연습문제

11.2.

$\hat{p}_1 = \frac{4}{104}$ $\hat{p}_2 = \frac{14}{104}$ $\hat{p}_3 = \frac{63}{104}$ $\hat{p}_4 = \frac{23}{104}$

	매우불만	불만	만족	매우만족	
여성(1)	3	9	40	12	64
남성(2)	1	5	23	11	40

총계 = 104.

$\alpha = 0.05$, 자유도 = 3,

$H_0 : P_{11} = P_{21}, P_{12} = P_{22}, P_{13} = P_{23}, P_{14} = P_{24}$

$n_1\hat{p}_1 = \frac{4}{104} \times 64$ $n_2\hat{p}_1 = \frac{4}{104} \times 40$ 2.5, 1.5

$n_1\hat{p}_2 = \frac{14}{104} \times 64$ $n_2\hat{p}_2 = \frac{14}{104} \times 40$ 8.6, 5.4

$n_1\hat{p}_3 = \frac{63}{104} \times 64$ $n_2\hat{p}_3 = \frac{63}{104} \times 40$ 38.8, 24.2

$n_1\hat{p}_4 = \frac{23}{104} \times 64$ $n_2\hat{p}_4 = \frac{23}{104} \times 40$ 14.2, 8.8.

$\frac{(3-2.5)^2}{2.5}$ $\frac{(9-8.6)^2}{8.6}$ $\frac{(40-38.8)^2}{38.8}$ $\frac{(12-14.2)^2}{14.2}$ 0.1 0.0186 0.0371 0.3408

$\frac{(1-1.5)^2}{1.5}$ $\frac{(5-5.4)^2}{5.4}$ $\frac{(23-24.2)^2}{24.2}$ $\frac{(11-8.8)^2}{8.8}$ 0.1666 0.0296 0.0595 0.55

검정통계량 : 1.3022

기각역 : $\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(3)$ $\chi^2 \geq 7.81$

∴ H_0를 기각하지 못하므로 여성과 남성간의 만족도 차이가 없음을 지지한다..

11.6 1) 표 i)

사형판결.

	예	아니요
백인	0.11	0.89
흑인	0.23	0.77

$d.f = 1$, $\alpha = 0.05$

$H_0 : P_{11} = P_{21}$, $P_{12} = P_{22}$

$\hat{P}_1 = \frac{64}{515}$ $\hat{P}_2 = \frac{451}{515}$

$n_1\hat{P}_1 = \frac{64}{515} \times 467$ $n_2\hat{P}_1 = \frac{64}{515} \times 48$ 58.03 408.97

$n_1\hat{P}_2 = \frac{451}{515} \times 467$ $n_2\hat{P}_2 = \frac{451}{515} \times 48$ 5.97 42.03

검정통계량 $\Sigma \frac{(O-E)^2}{E} = \frac{(64-58.03)^2}{58.03} + \frac{(451-408.97)^2}{408.97} + \frac{(11-5.97)^2}{5.97} + \frac{(37-42.03)^2}{42.03}$

$= 0.6142 + 4.3194 + 4.23 + 0.602 = 9.7656$

기각역 : $\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(1) = \chi^2 \geq 3.84$

∴ 귀무가설을 기각하므로 인종간 판결 차이가 있다.

표 ii)

사형판결.

	예	아니요.
백인	0	1
흑인	0.027	0.973

$d.f = 1$. $\alpha = 0.05$. $H_0 : P_{11} = P_{21}$. $P_{12} = P_{22}$.

$\hat{P}_1 = \frac{4}{159}$ $\hat{P}_2 = \frac{155}{159}$

$n_1\hat{P}_1 = \frac{4}{159} \times 16$ $n_2\hat{P}_1 = \frac{4}{159} \times 143$ 0.4 15.6

$n_1\hat{P}_2 = \frac{155}{159} \times 16$ $n_2\hat{P}_2 = \frac{155}{159} \times 143$ 3.6 139.4

검정통계량 $\Sigma \frac{(O-E)^2}{E} = 0 + \frac{0.4^2}{3.6} + \frac{0.4^2}{15.6} + \frac{0.4^2}{139.4} = 0.004 + 0.01 + 0.001$

$= 0.4105$

기각역 $\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(1) = \chi^2 \geq 3.84$

∴ 귀무가설을 기각하지 못하므로 판결차이가 없다.

2)

	예	아니오	
백인	53 (0.11)	430 (0.89)	483
흑인	15 (0.079)	176 (0.921)	191

(시험판결)

$H_0: \quad P_{11} = P_{1.}P_{.1} \quad, P_{12} = P_{1.}P_{.2} \quad, P_{21} = P_{2.}P_{.1} \quad, P_{22} = P_{2.}P_{.2}$

$$\frac{483 \times 68}{(483+191)} \qquad \frac{483 \times 606}{483+191} \qquad 48.73 \qquad 434.27$$

$$\frac{191 \times 68}{483+191} \qquad \frac{191 \times 606}{483+191} \qquad 19.27 \qquad 171.73$$

$$\chi^2 = \frac{(53-48.73)^2}{48.73} + \frac{(430-434.27)^2}{434.27} + \frac{(15-19.27)^2}{19.27} + \frac{(176-171.73)^2}{171.73}$$

$$= 0.374 + 0.042 + 0.946 + 0.106 = 1.471$$

기각역 : $\chi^2 \geq \chi^2_{0.05}(1) = \chi^2 \geq 3.84$

∴ 귀무가설을 기각하지 못하므로 판결차이가 없다.

3) ∴ 표 (1)의 경우 성별에 따라 차이가 있으나 (2)의 경우 차이가 없었다.

합친 표에 대해서는 판결차이가 없었고, 비율의 경우에도 (1)과 (2)의 경우는 흑인의 시험판결 비율이 높다나 합친표는 반대의 비율을 보였다.

분할표의 분석과 통합표의 분석이 일치하지 않음을 알 수 있다.