MATHMEDIC

수학 문제와 해설 이젠 검색한다.

20, 21, 29, 30 킬러문제 모음 가형

1.

평가원 킬러 문제 모음

16~ 20학년도 20,21,29,30

1번

양수 t 에 대하여 $\log t$ 의 가수를 $f(t)$ 라 하자. 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 양수 t 의 개수를 a_n 이라 할 때, $a_4 + a_5$ 의 값은?

(가) $1 \le t < 100$
(나) $f(t^n) + 2f(t) = 1$

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

160620가 # 1413

2번

2 이상의 자연수 n 에 대하여 실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(x) = e^{x+1}\{x^2 + (n-2)x - n + 3\} + ax$$

가 역함수를 갖도록 하는 실수 a 의 최솟값을 $g(n)$ 이라 하자.
$1 \le g(n) \le 8$ 을 만족시키는 모든 n 의 값의 합은?

① 43 ② 46 ③ 49 ④ 52 ⑤ 55

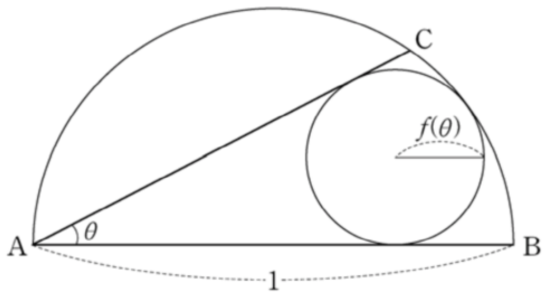
160621가 # 1414

3번

그림과 같이 길이가 1 인 선분 AB 를 지름으로 하는 반원 위에 점 C 를 잡고 $\angle\mathrm{BAC} = \theta$ 라 하자. 호 BC 와 두 선분 AB, AC 에 동시에 접하는 원의 반지름의 길이를 $f(\theta)$ 라 할 때,

$$\lim_{\theta \to +0} \frac{\tan\frac{\theta}{2} - f(\theta)}{\theta^2} = \alpha$$

이다. 100α 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



160629가 # 1422

4번

정의역이 $\{x | 0 \le x \le 8\}$ 이고 다음 조건을 만족시키는 모든 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 최댓값은 $p + \frac{q}{\ln 2}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오.

(단, p , q 는 자연수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.)

(가) $f(0) = 1$ 이고 $f(8) \le 100$ 이다.
(나) $0 \le k \le 7$ 인 각각의 정수 k 에 대하여
$f(k+t) = f(k)\ (0 < t \le 1)$
또는
$f(k+t) = 2^t \times f(k)\ (0 < t \le 1)$
이다.
(다) 열린 구간 $(0, 8)$ 에서 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점의 개수는 2 이다.

160630가 # 1423

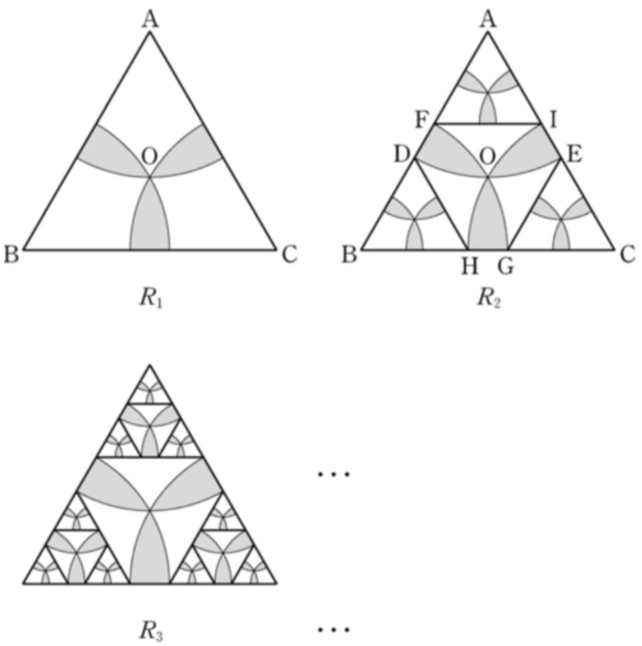
5번

그림과 같이 한 변의 길이가 6 인 정삼각형 ABC 가 있다. 정삼각형 ABC 의 외심을 O 라 할 때, 중심이 A 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{AO}}$ 인 원을 O_A , 중심이 B 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{BO}}$ 인 원을 O_B , 중심이 C 이고 반지름의 길이가 $\overline{\mathrm{CO}}$ 인 원을 O_C 라 하자. 원 O_A 와 원 O_B 의 내부의 공통부분, 원 O_A 와 원 O_C 의 내부의 공통부분, 원 O_B 와 원 O_C 의 내부의 공통부분 중 삼각형 ABC 내부에 있는  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_1 에 원 O_A 가 두 선분 AB, AC 와 만나는 점을 각각 D, E, 원 O_B 가 두 선분 AB, BC 와 만나는 점을 각각 F, G , 원 O_C 가 두 선분 BC, AC 와 만나는 점을 각각 H, I 라 하고, 세 정삼각형 AFI, $\mathrm{BHD}, \mathrm{CEG}$ 에서 R_1 을 얻는 과정과 같은 방법으로 각각 만들어지는  모양의 도형 3 개에 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

그림 R_2 에 새로 만들어진 세 개의 정삼각형에 각각 R_1 에서 R_2 를 얻는 과정과 같은 방법으로 만들어지는  모양의 도형 9 개에 색칠하여 얻은 그림을 R_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$ 의 값은?



① $\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+3\right)$ ② $\left(\pi - \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+3\right)$

③ $\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)$ ④ $\left(\pi - \sqrt{3}\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)$

⑤ $\left(2\pi - 2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}+3\right)$

160920가 # 1443

6번

함수 $f(x)$ 를

$$f(x)=\begin{cases} |\sin x|-\sin x & \left(-\dfrac{7}{2}\pi \le x < 0\right) \\ \sin x - |\sin x| & \left(0 \le x \le \dfrac{7}{2}\pi\right)\end{cases}$$

라 하자. 닫힌 구간 $\left[-\dfrac{7}{2}\pi, \dfrac{7}{2}\pi\right]$ 에 속하는 모든 실수 x 에 대하여 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt \ge 0$ 이 되도록 하는 실수 a 의 최솟값을 α , 최댓값을 β 라 할 때, $\beta-\alpha$ 의 값은? (단, $-\dfrac{7}{2}\pi \le a \le \dfrac{7}{2}\pi$)

① $\dfrac{\pi}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}\pi$ ③ $\dfrac{5}{2}\pi$ ④ $\dfrac{7}{2}\pi$ ⑤ $\dfrac{9}{2}\pi$

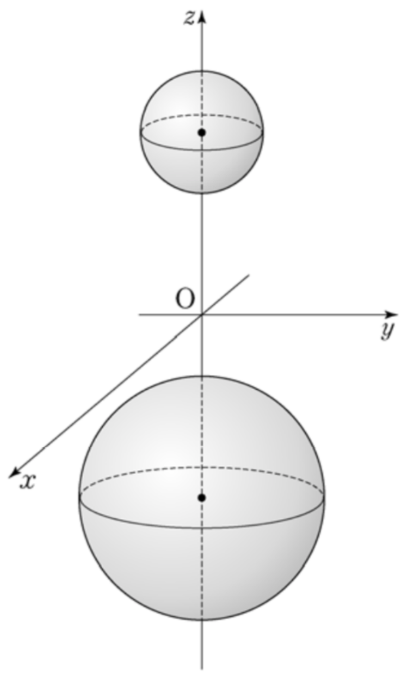
160921가 # 1444

7번

좌표공간에 두 개의 구

$$S_1 : x^2+y^2+(z-3)^2=1,$$
$$S_2 : x^2+y^2+(z+3)^2=4$$

가 있다. 점 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{6}, 0\right)$ 을 포함하고 S_1 과 S_2 에 동시에 접하는 평면을 α 라 하자. 점 $\mathrm{Q}\left(k, -\sqrt{3}, 2\right)$ 가 평면 α 위의 점일 때 $120k$ 의 값을 구하시오.



160929가 # 1452

8번

양수 a 와 두 실수 b , c 에 대하여 함수 $f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)e^x$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)$ 는 $x=-\sqrt{3}$ 과 $x=\sqrt{3}$ 에서 극값을 갖는다.
(나) $0 \le x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1 , x_2 에 대하여
$f(x_2)-f(x_1)+x_2-x_1 \ge 0$ 이다.

세 수 a , b , c 의 곱 abc 의 최댓값을 $\dfrac{k}{e^3}$ 라 할 때, $60k$ 의 값을 구하시오.

160930가 # 1453

9번

양수 x 에 대하여 $\log x$ 의 지표를 $f(x)$ 라 하자.

$$f(n+10)=f(n)+1$$

을 만족시키는 100 이하의 자연수 n의 개수는?

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

161120가 # 1473

10번

$0<t<41$ 인 실수 t 에 대하여 곡선 $y=x^3+2x^2-15x+5$ 와 직선 $y=t$ 가 만나는 세 점 중에서 x 좌표가 가장 큰 점의 좌표를 $(f(t),t)$, x 좌표가 가장 작은 점의 좌표를 $(g(t),t)$ 라 하자.
$h(t)=t\times\{f(t)-g(t)\}$ 라 할 때, $h'(5)$ 의 값은?

① $\dfrac{79}{12}$ ② $\dfrac{85}{12}$ ③ $\dfrac{91}{12}$ ④ $\dfrac{97}{12}$ ⑤ $\dfrac{103}{12}$

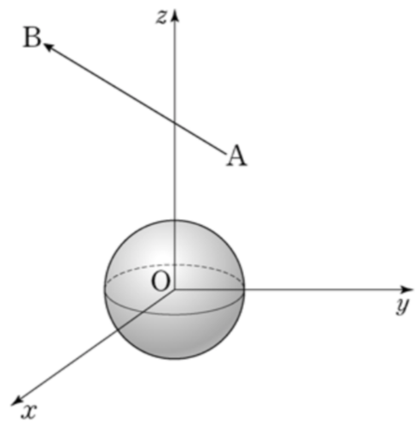
161121가 # 1474

11번

좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,\sqrt{2},\sqrt{3})$, $\mathrm{B}(1,-\sqrt{2},\ 2\sqrt{3})$ 에 대하여 점 P 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=1$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ 가 이루는 각의 크기는 $\dfrac{\pi}{6}$ 이다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ 의 최댓값이 $a+b\sqrt{33}$ 이다. $16(a^2+b^2)$ 의 값을 구하시오. (단 a, b 는 유리수이다.)



161129가 # 1482

12번

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x \le b$ 일 때, $f(x) = a(x-b)^2 + c$ 이다. (단, a, b, c 는 상수이다.)

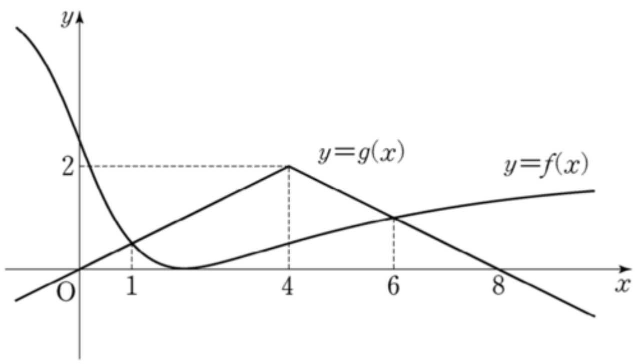
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_0^x \sqrt{4-2f(t)}dt$ 이다.

$\int_0^6 f(x)dx = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오.
(단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

161130가 # 1483

13번

함수 $f(x) = \frac{5}{2} - \frac{10x}{x^2+4}$ 와 함수 $g(x) = \frac{4-|x-4|}{2}$ 의 그래프가 그림과 같다.



$0 \le a \le 8$ 인 a 에 대하여 $\int_0^a f(x)dx + \int_a^8 g(x)dx$의 최솟값은?

① $14 - 5\ln 5$ ② $15 - 5\ln 10$ ③ $15 - 5\ln 5$
④ $16 - 5\ln 10$ ⑤ $16 - 5\ln 5$

170620가 # 1683

14번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \neq 1$
(나) $f(x) + f(-x) = 0$
(다) $f'(x) = \{1+f(x)\}\{1+f(-x)\}$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \neq -1$ 이다.
ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 어떤 열린 구간에서 감소한다.
ㄷ. 곡선 $y = f(x)$ 는 세 개의 변곡점을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

170621가 # 1684

15번

양의 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖는 함수 $f(t)$ 에 대하여 좌표평면 위를 움직이는 점 P 의 시각 $t(t \ge 1)$에서의 위치 (x, y) 가

$$\begin{cases} x = 2\ln t \\ y = f(t) \end{cases}$$

이다. 점 P 가 점 $(1, f(1))$ 로부터 움직인 거리가 s 가 될 때 시각 t 는 $t = \frac{s+\sqrt{s^2+4}}{2}$ 이고, $t=2$ 일 때 점 P 의 속도는 $\left(1, \frac{3}{4}\right)$ 이다. 시각 $t=2$ 일 때 점 P 의 가속도를 $\left(-\frac{1}{2}, a\right)$ 라 할 때, $60a$ 의 값을 구하시오.

170629가 # 1692

16번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 상수 $a\ (0 < a < 2\pi)$ 와 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) = f(-x)$

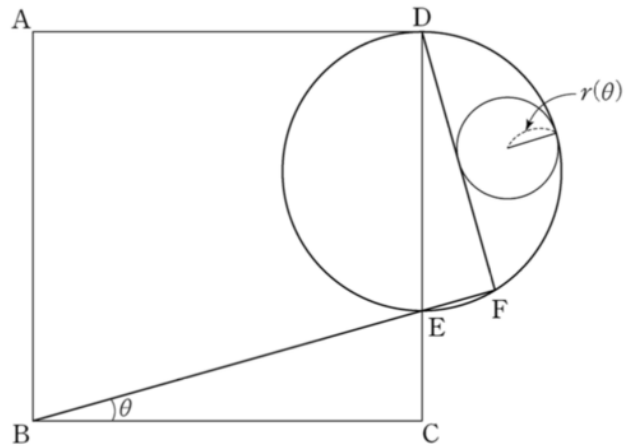
(나) $\int_{x}^{x+a} f(t)dt = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

닫힌 구간 $\left[0, \frac{a}{2}\right]$ 에서 두 실수 b , c 에 대하여 $f(x) = b\cos(3x) + c\cos(5x)$ 일 때 $abc = -\frac{q}{p}\pi$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)

170630가 # 1693

17번

그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정사각형 ABCD 가 있다. 변 CD 위의 점 E 에 대하여 선분 DE 를 지름으로 하는 원과 직선 BE 가 만나는 점 중 E 가 아닌 점을 F 라 하자.
$\angle\mathrm{EBC} = \theta$ 라 할 때, 점 E 를 포함하지 않는 호 DF 를 이등분하는 점과 선분 DF 의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$ 라 하자. $\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4} - \theta}$ 의 값은?(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$
④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

170920가 # 2193

18번

양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$ 와 $g(x)$ 가 모든 양의 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \frac{4}{e^4}\int_{1}^{x} e^{t^2} f(t)dt$

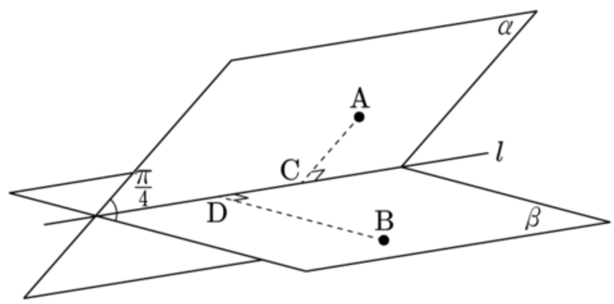
$f(1) = \frac{1}{e}$ 일 때, $f(2) - g(2)$ 의 값은?

① $\frac{16}{3e^4}$ ② $\frac{6}{e^4}$ ③ $\frac{20}{3e^4}$
④ $\frac{22}{3e^4}$ ⑤ $\frac{8}{e^4}$

170921가 # 2194

19번

그림과 같이 직선 l 을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 인 두 평면 α 와 β 가 있고, 평면 α 위의 점 A 와 평면 β 위의 점 B 가 있다. 두 점 A, B 에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 각각 C, D 라 하자. $\overline{\mathrm{AB}} = 2$, $\overline{\mathrm{AD}} = \sqrt{3}$ 이고 직선 AB 와 평면 β 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 일 때, 사면체 ABCD 의 부피는 $a + b\sqrt{2}$ 이다. $36(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a , b 는 유리수이다.)



170929가 # 2202

20번

최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 와 함수

$$g(x)=|2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x)=f(g(x))$ 는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$ 를 갖고, $h''(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$ 의 값을 구하시오.

170930가 # 2203

21번

함수 $f(x)=e^{-x}\int_0^x \sin(t^2)dt$ 에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $f(\sqrt{\pi})>0$

ㄴ. $f'(a)>0$ 을 만족시키는 a 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

ㄷ. $f'(b)=0$ 을 만족시키는 b 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

171120가 # 1653

22번

닫힌 구간 $[0,1]$ 에서 증가하는 연속함수 $f(x)$ 가

$$\int_0^1 f(x)dx=2,\ \int_0^1 |f(x)|dx=2\sqrt{2}$$

를 만족시킨다. 함수 $F(x)$ 가

$$F(x)=\int_0^x |f(t)|dt\ (0\le x\le 1)$$

일 때, $\int_0^1 f(x)F(x)dx$ 의 값은?

① $4-\sqrt{2}$ ② $2+\sqrt{2}$ ③ $5-\sqrt{2}$ ④ $1+2\sqrt{2}$ ⑤ $2+2\sqrt{2}$

171121가 # 1654

23번

한 모서리의 길이가 4인 정사면체 ABCD 에서 삼각형 ABC의 무게중심을 O , 선분 AD 의 중점을 P 라 하자. 정사면체 ABCD의 한 면 BCD 위의 점 Q에 대하여 두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 가 서로 수직일 때, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|$ 의 최댓값은 $\frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.)

171129가 # 1662

24번

$x > a$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 와 최고차항의 계수가 -1인 사차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다. (단, a 는 상수이다.)

(가) $x > a$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $(x-a)f(x) = g(x)$ 이다.
(나) 서로 다른 두 실수 α, β 에 대하여 함수 $f(x)$ 는 $x=\alpha$ 와 $x=\beta$에서 동일한 극댓값 M을 갖는다. (단, $M>0$)
(다) 함수 $f(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수는 함수 $g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 개수보다 많다.

$\beta - \alpha = 6\sqrt{3}$ 일 때, M 의 최솟값을 구하시오.

171130가 # 1663

25번

양수 a 와 실수 b 에 대하여 함수 $f(x) = ae^{3x} + be^{x}$ 이 다음 조건을 만족시킬 때, $f(0)$ 의 값은?

(가) $x_1 < \ln\frac{2}{3} < x_2$ 를 만족시키는 모든 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f''(x_1)f''(x_2) < 0$ 이다.
(나) 구간 $[k, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$ 의 역함수가 존재하도록 하는 실수 k 의 최솟값을 m 이라 할 때, $f(2m) = -\frac{80}{9}$ 이다.

① -15 ② -12 ③ -9 ④ -6 ⑤ -3

180620가 # 1593

26번

최고차항의 계수가 1 인 사차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$F(x) = \ln|f(x)|$$

라 하고, 최고차항의 계수가 1 인 삼차함수 $g(x)$ 에 대하여

$$G(x) = \ln|g(x)\sin x|$$

라 하자.

$$\lim_{x\to1}(x-1)F'(x) = 3, \lim_{x\to0}\frac{F'(x)}{G'(x)} = \frac{1}{4}$$

일 때, $f(3)+g(3)$ 의 값은?

① 57 ② 55 ③ 53 ④ 51 ⑤ 49

180621가 # 1594

27번

좌표평면에서 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1 인 원 위의 한 점을 A, 중심이 O 이고 반지름의 길이가 3 인 원 위의 한 점을 B 라 할 때, 점 P 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 3\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}}$
(나) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2 = 20$

$\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ 의 최솟값은 m 이고 이때 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = k$ 이다. $m + k^2$ 의 값을 구하시오.

180629가 # 1602

28번

실수 a 와 함수 $f(x)=\ln(x^4+1)-c$ ($c>0$ 인 상수)에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt$$

라 하자. 함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 x 축과 만나는 서로 다른 점의 개수가 2 가 되도록 하는 모든 a 의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m 은 자연수)이다. $a=\alpha_1$ 일 때, 함수 $g(x)$ 와 상수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 극솟값을 갖는다.
(나) $\int_{\alpha_1}^{\alpha_m} g(x)\,dx = k\alpha_m \int_0^1 |f(x)|\,dx$

$mk\times e^c$ 의 값을 구하시오.

180630가 # 1603

29번

다음은 n 명의 사람이 각자 세 상자 A, B, C 중 2 개의 상자를 선택하여 각 상자에 공을 하나씩 넣을 때, 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수를 구하는 과정이다.
(단, n 은 6 의 배수인 자연수이고 공은 구별하지 않는다.)

세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우는
'(i) 세 상자에 공이 들어가는 모든 경우'에서
'(ii) 세 상자에 모두 같은 개수의 공이 들어가는 경우'와
'(iii) 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우'를 제외하면 된다.

(i)의 경우:
n 명의 사람이 각자 세 상자 중 공을 넣을 두 상자를 선택하는 경우의 수는 n 명의 사람이 각자 공을 넣지 않을 한 상자를 선택하는 경우의 수와 같다. 따라서 세 상자에서 중복을 허락하여 n 개의 상자를 선택하는 경우의 수인 $\boxed{(가)}$ 이다.

(ii)의 경우:
각 상자에 $\frac{2n}{3}$ 개의 공이 들어가는 경우뿐이므로 경우의 수는 1 이다.

(iii)의 경우:
두 상자 A, B 에 같은 개수의 공이 들어가면 상자 C 에는 최대 n 개의 공을 넣을 수 있으므로 두 상자 A, B 에 각각 $\frac{n}{2}$ 개보다 작은 개수의 공이 들어갈 수 없다. 따라서 두 상자 A, B 에 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$ 이다.
그러므로 세 상자 중 두 상자에만 같은 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2\times\left(\boxed{(나)}-1\right)$ 이다.

따라서 세 상자에 서로 다른 개수의 공이 들어가는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$ 이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$ 이라 할 때, $\frac{f(30)}{g(30)}+h(30)$ 의 값은?

① 481 ② 491 ③ 501 ④ 511 ⑤ 521

180920가 # 1623

30번

수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = -1, a_n = 2 - \frac{1}{2^{n-2}} \ (n \geq 2)$$

이다. 구간 $[-1, 2)$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 모든 자연수 n 에 대하여

$$f(x) = \sin(2^n \pi x) \ (a_n \leq x \leq a_{n+1})$$

이다. $-1 < \alpha < 0$ 인 실수 α 에 대하여 $\int_{\alpha}^{t} f(x) dx = 0$ 을 만족시키는 $t \ (0 < t < 2)$ 의 값의 개수가 103 일 때, $\log_2(1 - \cos(2\pi\alpha))$ 의 값은?

① -48 ② -50 ③ -52 ④ -54 ⑤ -56

180921가 # 1624

31번

좌표공간에 세 점 $\mathrm{O}(0,0,0), \mathrm{A}(1,0,0), \mathrm{B}(0,0,2)$ 가 있다. 점 P 가 $\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| \le 4$ 를 만족시키며 움직일 때,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 1, \quad \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}} \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$$

을 만족시키는 점 Q 에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 하자. $M + m = a + b\sqrt{5}$ 일 때, $6(a+b)$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 유리수이다.)

180929가 # 1632

32번

함수 $f(x) = \ln(e^x + 1) + 2e^x$ 에 대하여 이차함수 $g(x)$ 와 실수 k 는 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $h(x) = |g(x) - f(x-k)|$ 는 $x = k$ 에서 최솟값 $g(k)$ 를 갖고, 닫힌 구간 $[k-1, k+1]$ 에서 최댓값 $2e + \ln\left(\frac{1+e}{\sqrt{2}}\right)$ 를 갖는다.

$g'\left(k - \frac{1}{2}\right)$ 의 값을 구하시오. (단, $\frac{5}{2} < e < 3$ 이다.)

180930가 # 1633

33번

좌표공간에 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A,B,C가 있다. 다음 조건을 만족시키는 평면α에 대하여 각 점 A,B,C와 평면 α 사이의 거리 중에서 가장 작은 값을 $d(\alpha)$라 하자.

> (가) 평면 α는 선분 AC와 만나고, 선분 BC와도 만난다.
> (나) 평면 α는 선분 AB와 만나지 않는다.

위의 조건을 만족시키는 평면 α중에서 $d(\alpha)$가 최대가 되는 평면을 β라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. 평면 β는 세 점 A,B,C를 지나는 평면과 수직이다.
ㄴ. 평면 β는 선분 AC의 중점 또는 선분 BC의 중점을 지난다.
ㄷ. 세 점이 $\mathrm{A}(2,3,0), \mathrm{B}(0,1,0), \mathrm{C}(2,-1,0)$일 때, $d(\beta)$는 점 B와 평면 β 사이의 거리와 같다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ
④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

181120가 # 2283

34번

양수 t에 대하여 구간 $[1, \infty)$에서 정의된 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} \ln x & (1 \le x < e) \\ -t + \ln x & (x \ge e) \end{cases}$$

일 때, 다음 조건을 만족시키는 일차함수 $g(x)$ 중에서 직선 $y = g(x)$의 기울기의 최솟값을 $h(t)$라 하자.

> 1 이상의 모든 실수 x에 대하여 $(x-e)\{g(x) - f(x)\} \ge 0$이다.

미분가능한 함수 $h(t)$에 대하여 양수 a가 $h(a) = \frac{1}{e+2}$을 만족시킨다. $h'\left(\frac{1}{2e}\right) \times h'(a)$의 값은?

① $\frac{1}{(e+1)^2}$ ② $\frac{1}{e(e+1)}$
③ $\frac{1}{e^2}$ ④ $\frac{1}{(e-1)(e+1)}$
⑤ $\frac{1}{e(e-1)}$

181121가 # 2284

35번

좌표공간에 구 $x^2+y^2+z^2=6$이 평면 $x+2z-5=0$과 만나서 생기는 원 C가 있다. 원 C 위의 점 중 y좌표가 최소인 점을 P라 하고, 점 P에서 xy평면에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PX}}+\overrightarrow{\mathrm{QX}}|^2$의 최댓값은 $a+b\sqrt{30}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.)

181129가 # 2292

36번

실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}1-|x-t| & (|x-t|\le 1)\\ 0 & (|x-t|>1)\end{cases}$$

이라 할 때, 어떤 홀수 k에 대하여 함수

$$g(t)=\int_k^{k+8} f(x)\cos(\pi x)dx$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 극소이고 $g(\alpha)<0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ (m은 자연수)라 할 때, $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=45$ 이다.

$k-\pi^2\sum_{i=1}^{m} g(\alpha_i)$의 값을 구하시오.

181130가 # 2293

37번

자연수 n에 대하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 a_n이라 하자. 다음은 $\sum_{n=1}^{8} a_n$의 값을 구하는 과정이다.

> 음이 아닌 정수 a, b, c, d가 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키려면 음이 아닌 정수 k에 대하여 $c+d=2k$이어야 한다.
> $c+d=2k$인 경우는 (1)음이 아닌 정수 k_1, k_2에 대하여 $c=2k_1, d=2k_2$인 경우이거나 (2)음이 아닌 정수 k_3, k_4에 대하여 $c=2k_3+1, d=2k_4+1$ 인 경우이다.
>
> (1) $c=2k_1, d=2k_2$인 경우 :
> $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $\boxed{(가)}$이다.
>
> (2) $c=2k_3+1, d=2k_4+1$인 경우 :
> $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $\boxed{(나)}$이다.
>
> $(1), (2)$에 의하여 $2a+2b+c+d=2n$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수 a_n은
> $a_n=\boxed{(가)}+\boxed{(나)}$
> 이다. 자연수 m에 대하여
> $\sum_{n=1}^{m}\boxed{(나)}={}_{m+3}\mathrm{C}_4$
> 이므로
> $\sum_{n=1}^{8} a_n=\boxed{(다)}$
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 r라 할 때, $f(6)+g(5)+r$의 값은 ?

① 893 ② 918 ③ 943 ④ 968 ⑤ 993

190620가 외 1회 # 6510

38번

열린 구간 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\dfrac{\pi}{4}\le x<\dfrac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\dfrac{\pi}{2}<k<\dfrac{3\pi}{2}$
(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다.
$g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=a, g(0)=b, g(-1)=c$라 할 때,
$h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은?

① 96 ② 97 ③ 98 ④ 99 ⑤ 100

190621가 # 6487

39번

좌표평면 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=5$인 두 점 $\mathrm{A,B}$를 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 5인 두 원을 각각 $\mathrm{O_1, O_2}$라 하자. 원 $\mathrm{O_1}$ 위의 점 C와 원 $\mathrm{O_2}$ 위의 점 D가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos(\angle\mathrm{CAB})=\dfrac{3}{5}$
(나) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=30$이고 $|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|<9$이다.

선분 CD를 지름으로 하는 원 위의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{74}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.
(단, a, b는 유리수이다.)

190629가 # 6518

40번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 모든 실수 t에 대하여

$$(1+t^2)\{g(t+1)-g(t)\}=2t$$

이고, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=-\frac{\ln 10}{4}, f(1)=4+\frac{\ln 17}{8}$ 일 때,
$2\{f(4)+f(-4)\}-\displaystyle\int_{-4}^{4} f(x)dx$의 값을 구하시오.

190630가 # 6488

41번

열린 구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x) = \cos x + 2x\sin x$가 $x = \alpha$와 $x = \beta$에서 극값을 가진다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha < \beta$)

<보기>

ㄱ. $\tan(\alpha + \pi) = -2\alpha$

ㄴ. $g(x) = \tan x$라 할 때, $g'(\alpha + \pi) < g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\dfrac{2(\beta - \alpha)}{\alpha + \pi - \beta} < \sec^2 \alpha$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ,ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

190920가 # 8289

42번

0이 아닌 세 정수 l, m, n이

$$|l| + |m| + |n| \le 10$$

을 만족시킨다. $0 \le x \le \frac{3}{2}\pi$에서 정의된 연속함수 $f(x)$가 $f(0) = 0, f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1$이고

$$f'(x) = \begin{cases} l\cos x & \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ m\cos x & \left(\frac{\pi}{2} < x < \pi\right) \\ n\cos x & \left(\pi < x < \frac{3}{2}\pi\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $\int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(x)dx$의 값이 최대가 되도록 하는 l, m, n에 대하여 $l + 2m + 3n$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

190921가 # 8290

43번

좌표공간에서 점 $\mathrm{A}\left(3, \frac{1}{2}, 2\right)$와 평면 $z = 1$ 위의 세 점 $\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}, \mathrm{P_3}$이

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_1}} = \frac{11}{3}, \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} = 1, \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OP_3}} = -\frac{7}{4}$$

을 만족시킨다. 점 $(0, k, 0)$을 지나고 방향벡터가 $(1, -6, 0)$인 직선을 l이라 하고, 직선 l에 의해 나누어지는 xy평면의 두 영역을 각각 α, β라 하자.

세 점 $\mathrm{P_1}, \mathrm{P_2}, \mathrm{P_3}$에서 xy 평면에 내린 수선의 발이 모두 α에만 포함되거나 모두 β에만 포함되도록 하는 양의 정수 k의 최솟값을 m, 음의 정수 k의 최댓값을 M이라 할 때, $m - M$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이다.)

190929가 # 8296

44번

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이고 최솟값이 0인 사차함수 $f(x)$와 함수 $g(x) = 2x^4 e^{-x}$에 대하여 합성함수 $h(x) = (f \circ g)(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 방정식 $h(x) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.
(나) 함수 $h(x)$는 $x = 0$에서 극소이다.
(다) 방정식 $h(x) = 8$의 서로 다른 실근의 개수는 6이다.

$f'(5)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$)

190930가 # 8297

45번

점 $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$에서 곡선 $y = \sin x(x > 0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$
ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$
ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

191120가 # 8552

46번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(-1)$의 값은?

(가) 모든 실수 x에 대하여
$2\{f(x)\}^2 f'(x) = \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1)$이다.
(나) $f\left(-\frac{1}{8}\right) = 1, f(6) = 2$

① $\frac{\sqrt[3]{3}}{6}$ ② $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ $\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ ④ $\frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$ ⑤ $\frac{5\sqrt[3]{3}}{6}$

191121가 # 8553

47번

좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{\mathrm{AX}} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

191129가 # 8561

48번

최고차항의 계수가 6π인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수
$g(x) = \frac{1}{2+\sin(f(x))}$이 $x=\alpha$에서 극대 또는 극소이고, $\alpha \geq 0$인 모든 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \cdots$라 할 때, $g(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\alpha_1 = 0$이고 $g(\alpha_1) = \frac{2}{5}$이다.
(나) $\frac{1}{g(\alpha_5)} = \frac{1}{g(\alpha_2)} + \frac{1}{2}$

$g'\left(-\frac{1}{2}\right) = a\pi$라 할 때, a^2의 값을 구하시오. (단, $0 < f(0) < \frac{\pi}{2}$)

191130가 # 8562

49번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) > 0$

(나) $\ln f(x) + 2\int_0^x (x-t)f(t)dt = 0$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

<보기>

ㄱ. $x > 0$에서 함수 $f(x)$는 감소한다.

ㄴ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 1이다.

ㄷ. 함수 $F(x)$를 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$라 할 때, $f(1) + \{F(1)\}^2 = 1$이다.

① ㄱ ② ㄱ,ㄴ ③ ㄱ,ㄷ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

200620가 # 9584

50번

함수 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$와 양의 실수 t에 대하여 기울기가 t인 직선이 곡선 $y = f(x)$에 접할 때 접점의 x좌표를 $g(t)$라 하자. 원점에서 곡선 $y = f(x)$에 그은 접선의 기울기가 a일 때, 미분가능한 함수 $g(t)$에 대하여 $a \times g'(a)$의 값은?

① $-\dfrac{\sqrt{e}}{3}$ ② $-\dfrac{\sqrt{e}}{4}$ ③ $-\dfrac{\sqrt{e}}{5}$ ④ $-\dfrac{\sqrt{e}}{6}$ ⑤ $-\dfrac{\sqrt{e}}{7}$

200621가 # 9585

51번

좌표평면에서 곡선 $C : y = \sqrt{8-x^2}\ (2 \le x \le 2\sqrt{2})$ 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{OQ}} = 2, \angle\mathrm{POQ} = \dfrac{\pi}{4}$를 만족시키고 직선 OP의 아랫부분에 있는 점을 Q라 하자.

점 P가 곡선 C 위를 움직일 때, 선분 OP 위를 움직이는 점 X와 선분 OQ 위를 움직이는 점 Y에 대하여

$$\overrightarrow{\mathrm{OZ}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OX}} + \overrightarrow{\mathrm{OY}}$$

를 만족시키는 점 Z가 나타내는 영역을 D라 하자.

영역 D에 속하는 점 중에서 y축과의 거리가 최소인 점을 R라 할 때, 영역 D에 속하는 점 Z에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OZ}}$의 최댓값과 최솟값의 합이 $a + b\sqrt{2}$이다. $a+b$의 값을 구하시오.(단, O는 원점이고, a와 b는 유리수이다.)

200629가 # 9593

52번

상수 a, b에 대하여 함수 $f(x) = a\sin^3 x + b\sin x$가

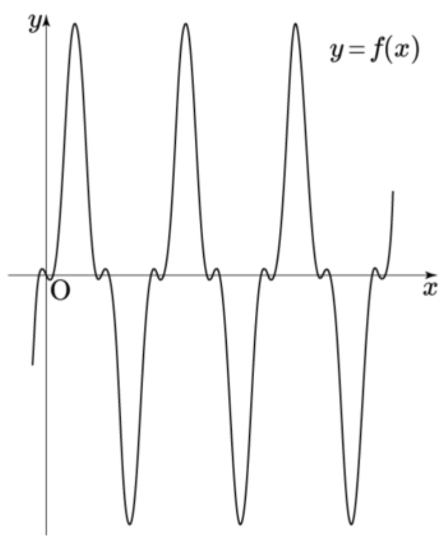
$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\sqrt{2},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

을 만족시킨다. 실수 $t\ (1 < t < 14)$에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = t$가 만나는 점의 x좌표 중 양수인 것을 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 x_n이라 하고

$$c_n = \int_{3\sqrt{2}}^{5\sqrt{3}} \frac{t}{f'(x_n)}dt$$

라 하자. $\sum_{n=1}^{101} c_n = p + q\sqrt{2}$일 때, $q - p$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 유리수이다.)



200630가 # 9594

빠른 정답표

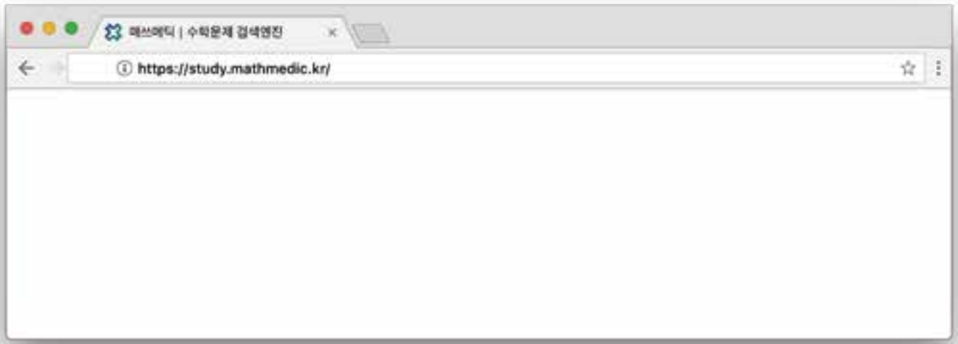
1번. ③	2번. ④	3번. 25	4번. 128	5번. ③
6번. ①	7번. 40	8번. 15	9번. ⑤	10번. ④
11번. 50	12번. 35	13번. ④	14번. ①	15번. 15
16번. 83	17번. ④	18번. ③	19번. 12	20번. 48
21번. ⑤	22번. ④	23번. 19	24번. 216	25번. ③
26번. ④	27번. 7	28번. 16	29번. ①	30번. ②

빠른 정답표

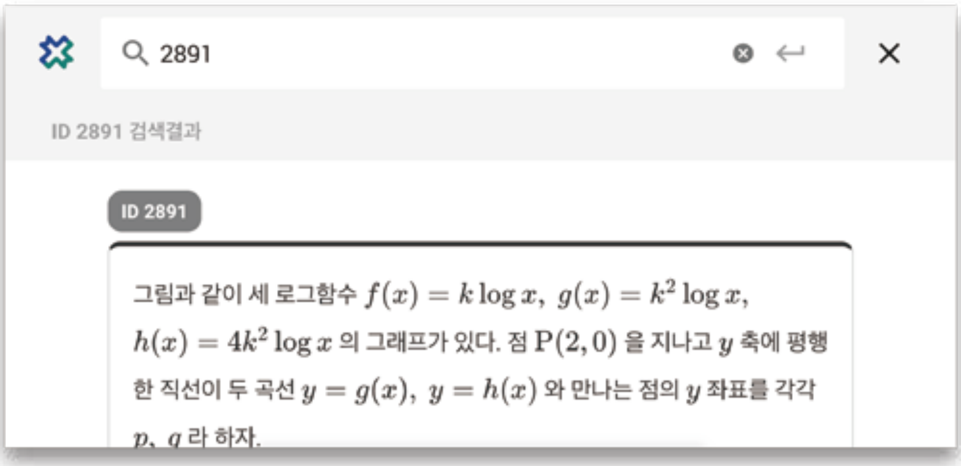
31번. 27	32번. 6	33번. ⑤	34번. ④	35번. 136
36번. 21	37번. ③	38번. ④	39번. 31	40번. 16
41번. ③	42번. ⑤	43번. 12	44번. 30	45번. ⑤
46번. ④	47번. 53	48번. 27	49번. ⑤	50번. ②
51번. 24	52번. 12			

해설확인방법

1. 매쓰메디에 접속한다. (https://study.mathmedic.kr/)



2. 문제하단에 있는 일련번호를 검색창에 입력한다. 그리고 엔터!



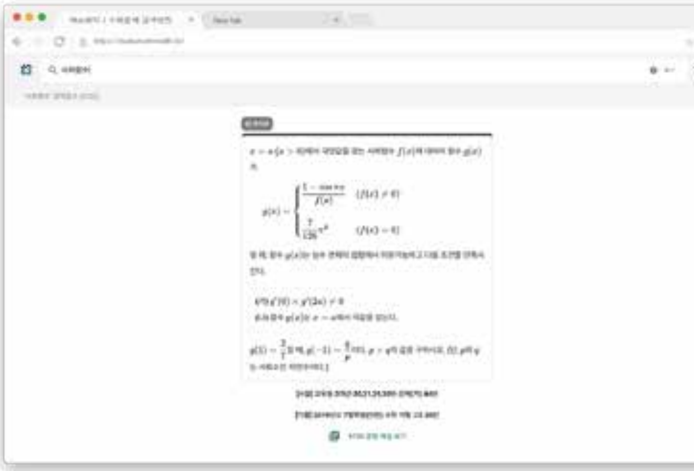
3. 문제를 확인하고 해설을 확인한다.

1.
문제 검색 기능

① study.mathmedic.kr 에 접속 후, 내가 원하는 문제 수식, 단어로 검색

② 기출문제 번호로 바로 검색
ex) 190621, 19학년도 6평 21번

③ 문제별 매쓰메딕 문항 ID 로 바로 검색

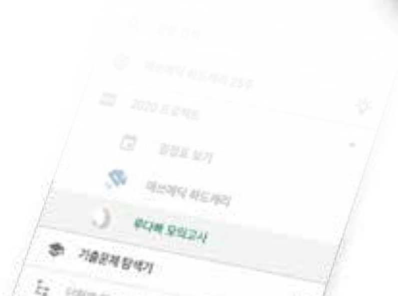


2.
문제 필터 기능

- 단원, 출제자, 출제년도, 키워드 별로 문제 필터

3.
고퀄리티 무료 수능 문제 확인

- 킬러문제
- 평가원 변형문제
- 루다빠 모의고사



좋은 질문입니다. 그 **질문에 답하기** 위해서는 이 **이야기**를 빼놓을 수가 없는데요. 마침 수학 문제 하니까 생각이 나네요. **04년 제가 처음 고3**이 되었을 때 그때 모든 수학 문제 하나하나가 참 힘들었습니다. 하지만 **포기하지 않았습니다**. 소위 눈물 젖은 빵이라고 그러죠. 그걸 먹으면서 꿋꿋이 **이겨냈습니다**. 그리고 **04년 11월 17일** 수능 수리영역 에서 만점을 처음으로 따냈는데 그게 **제 수학 첫 만점**이었습니다. 그리고 그로부터 **약 15년**이 지난 **19년 6월 1일** 처음으로 **매쓰메딕** 서비스를 **런칭**했습니다. 스타트업으로 이 세상에 빛과 소금이 되는 서비스를 만든다는 건 정말 하나하나가 참 힘들었습니다. **저는 경험도 없고 기술도 부족**하고 이게 과연 이 세상에 필요한 것인지마저 의심스러웠죠. 하지만 저는 **15년 전 그 날들**처럼 **포기하지 않고** 눈물 젖은 빵을 먹으면서 꿋꿋이 이겨냈습니다. 정말 **제가 수능을 준비하는 그런 마음**으로 만들었죠. 그런데 뭘 만든건지 말씀을 안 드린 생각이 나네요. 그건 바로 **수학문제 검색엔진**. 아직도 **수학 문제, 해설 찾기**가 어려우시죠? 아직도 참고서, 해설지 들고 다니느라 **무거운 책가방**을 들고 다니는 여러분을 위해 만들었습니다. 이제는 **수식으로 바로 검색**하세요. **원하는대로 필터**를 걸어 문제를 찾아볼 수 있습니다. **역대 모든 기출**문제 뿐 아니라 여러가지 **고퀄 변형 문항**들도 많이 수록되어 있습니다. **심지어 무료**입니다. 아무튼 여러분의 수능 대박을 기원합니다. **수학**만큼은 **백분위 99%** 찍을 수 있습니다. #수학문제검색엔진 **#투머치수학** #매쓰메딕