2022.04.13.
김은영

# 제10장 벡터자기회귀모형

■ 두 개 이상의 시계열을 동시에 고려하여 서로의 영향관계를 분석
하나의 시계열을 예측하는 데 다른 시계열의 정보를 활용

## 10.1 벡터ARMA모형

■ 시점 $t$에 $m$개의 시계열 벡터를 고려할 때

$$z_t = (Z_{1t},\ Z_{2t},\ \cdots,\ Z_{mt})^T$$

$\{z_t,\ t=1,2,\ \cdots\}$을 **벡터시계열**이라고 한다.

- 시점 $t$의 시계열벡터의 **평균벡터**

$$\mu_t = E[z_t] = (\mu_{1t},\ \mu_{2t},\ \cdots,\ \mu_{mt})^T$$

- 시점 $t$에서 시차 $k$의 시계열벡터의 **자기공분산행렬**

$$\Gamma(t,\ t-k) = E[\,(z_t-\mu_t)(z_{t-k}-\mu_{t-k})^T\,]$$

**[정의 10.1] 벡터시계열의 정상성(stationarity)**

벡터시계열 $\{z_t,\ t=1,2,\ \cdots\}$의 평균벡터가 시점에 무관하게 동일하고, 시차 $k$의 자기공분산행렬이 시점과 무관하며 시차 $k$의 함수일 때, 벡터시계열이 정상적(stationary)이라 한다.

■ 정상적 벡터시계열에 대하여

- 평균벡터

$$\mu_t = E[z_t] = (\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_m)^T$$

- 시차 $k$의 자기공분산행렬함수(autocovariance matrix function)

$$\Gamma(k) = E[\,(z_t-\mu)(z_{t-k}-\mu)^T\,] = \begin{bmatrix} \gamma_{11}(k) & \cdots & \gamma_{1m}(k) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{m1}(k) & \cdots & \gamma_{mm}(k) \end{bmatrix}$$

이 행렬의 $(i,\ j)$원소는

$$\gamma_{ij}(k) = E[\,(Z_{i,t}-\mu_i)(Z_{j,t}-\mu_j)\,]$$

■ 평균벡터 $\mu = 0$으로 가정 → $\Gamma(-k) = \Gamma^T(k)$

■ 벡터시계열에 대해서 ARMA모형 적용

**[표현_1]** 두 개의 시계열이 있는 경우, AR(1)모형은

$$\begin{pmatrix} Z_{1t} \\ Z_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{1,t-1} \\ Z_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$

여기서, $\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}$ : 모형 계수행렬(coefficient matrix)

$\begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$ : 백색잡음인 오차항 벡터

평균벡터 0, 분산공분산행렬 $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$인 다변량정규분포를 따른다.

**[표현_2]** 두 개의 시계열이 있는 경우, AR(1)모형은

$$Z_{1t} = \phi_{11} Z_{1,t-1} + \phi_{12} Z_{2,t-1} + a_{1t}$$

$$Z_{2t} = \phi_{21} Z_{1,t-1} + \phi_{22} Z_{2,t-1} + a_{2t}$$

여기서, $a_{1t} \sim N(0, \sigma_1^2)$, $a_{2t} \sim N(0, \sigma_2^2)$, $Cov(a_{1t},\ a_{2t}) = \sigma_{12}$

■ 벡터 시계열 모형에서는 추정해야 할 모수의 수가 급증한다.

**[예]** 하나의 시계열에 대한 AR(1)모형: 추정해야 할 모수의 수=2

두 개의 시계열에 대한 벡터AR(1)모형: 추정해야 할 모수의 수=7

■ 두 개의 시계열이 있는 AR(1)모형을 $m$개의 시계열로 구성된 **벡터AR(1)모형**으로 확장하면

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

여기서,

- $\phi_1$: 시차 1 벡터 관련 $(m \times m)$ 계수행렬
- $a_t$: 평균벡터 0, 분산공분산행렬 $\Sigma$를 갖는 독립적인 다변량정규분포를 따른다.

**[예 10.1]**

두 시계열 $\{x_t, t \ge 1\}$과 $\{y_t, t \ge 1\}$이 다음과 같은 모형을 따른다고 하자.

$$x_t = b_{12}y_t + c_{11}x_{t-1} + c_{12}y_{t-1} + \epsilon_{xt}$$

$$y_t = b_{21}x_t + c_{21}x_{t-1} + c_{22}y_{t-1} + \epsilon_{yt}$$

여기서, 오차항 $\epsilon_{xt}$는 평균 0, 분산 $\sigma_x^2$을 갖는 독립적인 정규분포를 따른다.

<u>**두 오차항의 공분산은 0이다.**</u>

위의 모형을 <u>**벡터AR(1)모형**</u>으로 변환하라.

(풀이)

$$\begin{pmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \epsilon_{xt} \\ \epsilon_{yt} \end{pmatrix} \text{ , 여기서, } B = \begin{pmatrix} 1 & -b_{12} \\ -b_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1}B\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + B^{-1}\begin{pmatrix} \epsilon_{xt} \\ \epsilon_{yt} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + B^{-1}\begin{pmatrix} \epsilon_{xt} \\ \epsilon_{yt} \end{pmatrix} \text{ , 여기서, } B^{-1} = \frac{1}{1-b_{12}b_{21}}\begin{pmatrix} 1 & b_{12} \\ b_{21} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$$

$$\text{여기서, } a_{1t} = \frac{1}{1-b_{12}b_{21}}(\epsilon_{xt} + b_{12}\epsilon_{yt})$$

$$a_{2t} = \frac{1}{1-b_{12}b_{21}}(b_{21}\epsilon_{xt} + \epsilon_{yt})$$

■ **표준형태 [축소형태(reduced form)]**

- **[예 10.1]**의 벡터AR(1)모형을 벡터AR(p)모형으로 확장하면

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

여기서, $\phi_1, \cdots, \phi_p$ : 각 시차에 해당하는 $(m \times m)$ 계수행렬

- 이를 벡터ARMA(p,q)모형으로 확장하면

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

여기서, $\theta_1, \cdots, \theta_q$ : 각 시차별 오차항에 해당하는 $(m \times m)$ 계수행렬

**[일반화]**

$$\Phi(B)z_t = \Theta(B)a_t$$

$$\text{여기서, } \Phi(z) = I - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$$

$$\Theta(z) = I - \theta_1 z - \cdots - \theta_q z^q$$

## 10.2 벡터자기회귀모형

■ 실제 경제 및 금융 데이터 분석에 자주 사용되고 있다.

### 10.2.1 VAR(1)모형

■ VAR(1)모형

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

→ VAR(1)모형이 정상적이려면,

계수행렬 $\phi_1$의 고유값들의 절댓값이 모두 1보다 작아야 한다.

■ 분산행렬 유도

$$\Gamma(0) = \phi_1 \Gamma(0) \phi_1^T + \Sigma$$

■ 시차별 공분산행렬 유도

$$E(z_t z_{t-k}^T) = \phi_1 E(z_{t-1} z_{t-k}^T) + E(a_t z_{t-k}^T)$$

$$\Gamma(k) = \phi_1 \Gamma(k-1), \quad k = 1, 2, \cdots$$

→ 공분산행렬의 형태: 지수적으로 감소한다.

■ 상관계수행렬 유도

$$R(k) = D^{-1}\Gamma(k)D^{-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

여기서, $D$ : 각 시계열의 표준편차를 대각원소로 갖는 대각행렬

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma_{11}(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\gamma_{mm}(0)} \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\gamma_{11}(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sqrt{\gamma_{mm}(0)} \end{bmatrix}$$

$$\text{상관계수행렬 } (i,\ j)\text{원소: } \rho_{ij}(k) = \frac{\gamma_{ij}(k)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)}\sqrt{\gamma_{jj}(0)}}, \quad i, j = 1, 2, \cdots, m$$

■ 시차 $k$의 편상관계수행렬 = 다변량회귀모형의 계수 $\phi_{kk}$

$$z_t = \phi_{k1} z_{t-1} + \phi_{k2} z_{t-2} + \cdots + \phi_{kk} z_{t-k} + a_t$$

→ VAR(1)모형의 편자기회귀행렬: $P(k) = \begin{cases} \phi_1, & k=1 \\ 0\ , & k>1 \end{cases}$

■ VAR(1)모형

- $z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$ ← 각 시계열의 평균이 0임을 가정한 VAR(1)모형
- $z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + a_t$ ← 상수항이 있는 보다 일반적인 VAR(1)모형

■ VAR(1)모형: $z_t = c + \phi_1 z_{t-1} + a_t$

- 시계열이 정상적이라면, $\mu = E[z_t] = E[z_{t-1}] = (1-\phi_1)^{-1} c$

### 10.2.2 구조VAR모형

■ **[예 10.1]**: 구조VAR모형의 적용 (∵ 경제 현상의 실제 구조를 나타내기 때문)
- 해석 상의 장점

$$Bx_t = Cx_{t-1} + \epsilon_t$$

■ 구조VAR(p)모형으로 확장

$$Bx_t = C_1 x_{t-1} + C_2 x_{t-2} + \cdots + C_p x_{t-p} + \epsilon_t$$

여기서, $\epsilon_t$ : 구조적 오차벡터[충격]. 변수별로 서로 독립.

※ 구조VAR모형은 식별의 문제와 추정 상의 문제가 있다.
**[예 10.1]** 추정해야 하는 모수의 수=8 (6개의 회귀계수, 2개의 분산)

$cf$) **<u>VAR(1)모형</u>**의 추정해야 하는 모수의 수=7

↳ $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{t-1} \\ y_{t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{1t} \\ a_{2t} \end{pmatrix}$

→ 구조모형에서는 하나의 파라미터 값을 임의로 정해주어야 하는 제약조건이 필요
⇒ 구조VAR모형 대신 아래 형태의 VAR모형으로 변환하여 사용하고 있다.

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

### 10.2.3 VAR(p)모형

**[표현_1]**

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

$$\text{여기서, } a_t \sim WN(0,\ \Sigma)$$

**[표현_2]**

$$\Phi(B) z_t = a_t$$

$$\text{여기서, } \Phi(z) = I - \phi_1 z - \cdots - \phi_p z^p$$

**[정리 10.1] VAR(p)모형의 정상성**

> VAR(1)모형의 경우 $\det \Phi(z) = 0$[여기서, $\Phi(z) = I - \phi_1 z$]의 근의 역수가 행렬 $\phi_1$의 고유값이 되므로 VAR(1)모형이 정상적이려면 행렬 $\phi_1$의 고유값들의 크기(modulus)가 모두 1보다 작아야 한다.

- VAR(p)모형은 VAR(1)모형으로도 표현된다.

$$Y_t = \begin{bmatrix} z_t \\ z_{t-1} \\ \vdots \\ z_{t-p+1} \end{bmatrix},\ F = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_p \\ I & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & I & 0 \end{bmatrix},\ \upsilon_t = \begin{bmatrix} a_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_t = F Y_{t-1} + \upsilon_t$$

**[정리 10.2]**

> VAR(p)모형이 정상적이려면 $Y_t = FY_{t-1} + \upsilon_t$로 표현된 모형에서 행렬 $F$의 고유값들의 크기가 모두 1보다 작아야 한다.

- 공분산행렬 유도

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t$$

$$z_t^T z_t = z_t^T (\phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + a_t)$$

$$E(z_t^T z_t) = \phi_1 E(z_t^T z_{t-1}) + \phi_2 E(z_t^T z_{t-2}) + \cdots + \phi_p E(z_t^T z_{t-p}) + E(z_t^T a_t)$$

$$\Gamma(0) = \phi_1 \Gamma(1) + \phi_2 \Gamma(2) + \cdots + \phi_p \Gamma(p) + \Sigma$$

■ 유사한 방법으로 VAR(p)모형에 대하여 다음과 같은 Yule-Walker 행렬방정식을 유도할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \Gamma(0) & \Gamma^T(1) & \cdots & \Gamma^T(p-1) \\ \Gamma(1) & \Gamma(0) & \cdots & \Gamma^T(p-2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \Gamma(p-1) & \Gamma(p-2) & \cdots & \Gamma(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^T \\ \phi_2^T \\ \vdots \\ \phi_p^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma(1) \\ \Gamma(2) \\ \vdots \\ \Gamma(p) \end{bmatrix}$$

- 위 식으로부터 공분산행렬을 구할 수 있다.
- 다음 식을 이용하면 상관계수행렬도 구할 수 있다.

$R(k) = D^{-1}\Gamma(k)D^{-1}, \quad k = 1, 2, \cdots$

여기서, $D$ : 각 시계열의 표준편차를 대각원소로 갖는 대각행렬

$$D = \begin{bmatrix} \sqrt{\gamma_{11}(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\gamma_{mm}(0)} \end{bmatrix}, \quad D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{\gamma_{11}(0)} & & \\ & \ddots & \\ & & 1/\sqrt{\gamma_{mm}(0)} \end{bmatrix}$$

상관계수행렬 $(i,\ j)$원소: $\rho_{ij}(k) = \dfrac{\gamma_{ij}(k)}{\sqrt{\gamma_{ii}(0)}\sqrt{\gamma_{jj}(0)}}, \ i, j = 1, 2, \cdots, m$

※ VAR(p)모형의 시차별 편상관계수행렬은 시차 p에서 절단되는 성질을 가지고 있다.