

제4장 ARMA모형의 식별 및 추정

(이 장의 학습목표)

정상적 ARMA모형의 성질인 ACF 및 PACF를 활용하여 실제 시계열이 어떤 ARMA 모형에 가장 근접한지를 식별하는 방법을 알아보고자 한다.

4.1 시계열 모형의 식별 과정

단계	수행작업
1	시계열 데이터를 그래프로 나타내어 시각적으로 관찰하고 정상성 여부를 검토한다. 비정상적인 경우에는 추세제거, 계절성제거, 분산안정화 등을 통하여 정상적 시계열로 변환한다.
2	시계열 데이터에 대한 표본 ACF 및 표본 PACF를 산출하고 정상성 여부를 확인한다. 비정상적인 경우 단계 1을 반복한다.
3	표본 ACF 및 표본 PACF를 다양한 ARMA모형들의 이론적 ACF 및 PACF와 비교하여 ARMA모형의 차수인 p 와 q 를 구한다.
4	단계 3에서 얻은 모형에 대한 계수들을 추정하고 잔차를 구한다.
5	잔차가 백색잡음을 따르는지 검정한다. 잔차가 백색잡음을 따르면 단계 3의 모형이 제대로 식별되었으며, 아니면 다른 차수 p 와 q 를 구한 후 과정을 반복한다.

표 4.1 ARMA모형의 이론적 ACF와 PACF의 패턴

모형	ACF	PACF
$AR(p)$	지수적으로 감소하거나 진폭이 감소하는 사인파 형태	시차 p 이후에 절단되는 형태
$MA(q)$	시차 q 이후에 절단되는 형태	지수적으로 감소하거나 진폭이 감소하는 사인파 형태
$ARMA(p, q)$	$p > q$ 인 경우: 처음부터 지수적으로 감소하거나 진폭이 감소하는 사인파 형태 (AR항이 MA항보다 많으므로 전체적으로 AR모형의 ACF형태를 갖는다) $p < q$ 인 경우: 처음 $q-p+1$ 개의 별도값을 갖고 그 이후 감소하는 형태(MA항이 AR항보다 많으므로 전체적으로 MA모형의 ACF형태를 갖는다)	$p > q$ 인 경우: 처음 $p-q+1$ 개의 별도값을 갖고 그 이후 감소하는 형태(AR항이 MA항보다 많으므로 전체적으로 AR모형의 PACF형태를 갖는다) $p < q$ 인 경우: 처음부터 지수적으로 감소하거나 진폭이 감소하는 사인파 형태(MA항이 AR항보다 많으므로 전체적으로 MA모형의 PACF형태를 갖는다)

■ 실제 시계열 데이터에 대한 표본 ACF와 표본 PACF 산출 방법

· 시계열 데이터 $\{Z_1, \dots, Z_n\}$ 에 대한 자기공분산함수

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2$$

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})$$

※ 표본 ACF

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z})^2}, \quad k = 1, 2, \dots$$

► 표본 ACF의 표준오차

· 표본 ACF에 대한 바틀렛 근사식(Bartlett, 1946)을 사용한다.

$\rho(k) = 0, k > m$ 를 가정할 때

$$Var[\hat{\rho}(k)] \simeq \frac{1}{n} [1 + 2\rho^2(1) + 2\rho^2(2) + \dots + 2\rho^2(m)]$$

· 표본 ACF의 표준오차

$$se[\hat{\rho}(k)] = \sqrt{\frac{1}{n} [1 + 2\hat{\rho}^2(1) + \dots + 2\hat{\rho}^2(m)]}$$

■ 표본 PACF 산출: Durbin(1960)이 제안한 반복적 기법을 사용

$$\hat{P}(1) = \hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}(1)$$

$$\hat{P}(k) = \hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}(k-j)}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}(j)}, \quad k = 2, 3, \dots$$

여기서, $\hat{\phi}_{k,j} = \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{k,k} \hat{\phi}_{k-1,k-j}, j = 1, \dots, k-1$

[예 4.1]

다음 15개의 시계열 데이터에 대한 표본 ACF와 표본 PACF를 구하라.

-1.01	-0.81	-0.33	-0.40	-0.95	-1.33	0.72	0.63
1.30	1.08	-0.33	0.31	0.10	-0.41	-0.22	

(풀이)

• 표본평균: $\bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Z_t = -0.11$ 여기서, $n = 15$

• 표본분산: $\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2 = \frac{8.6382}{15} = 0.5759$

• 표본 ACF: $\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+k} - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^n (Z_t - \bar{Z})^2}, \quad k = 1, 2, \dots$

$$\hat{\rho}(1) = \frac{\hat{\gamma}(1)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{14} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+1} - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{15} (Z_t - \bar{Z})^2} = \frac{4.1431}{8.6382} = 0.4796$$

$$\hat{\rho}(2) = \frac{\hat{\gamma}(2)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{13} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+2} - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{15} (Z_t - \bar{Z})^2} = \frac{1.3848}{8.6382} = 0.1603$$

$$\hat{\rho}(3) = \frac{\hat{\gamma}(3)}{\hat{\gamma}(0)} = \frac{\sum_{t=1}^{12} (Z_t - \bar{Z})(Z_{t+3} - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{15} (Z_t - \bar{Z})^2} = \frac{0.2217}{8.6382} = 0.0257$$

• 표본 PACF: Durbin(1960)이 제안한 반복적 기법을 사용

$$\begin{aligned} \hat{P}(1) &= \hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}(1) \\ \hat{P}(k) &= \hat{\phi}_{kk} = \frac{\hat{\rho}(k) - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}(k-j)}{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \hat{\phi}_{k-1,j} \hat{\rho}(j)}, \quad k = 2, 3, \dots \\ \text{여기서, } \hat{\phi}_{k,j} &= \hat{\phi}_{k-1,j} - \hat{\phi}_{k,k} \hat{\phi}_{k-1,k-j}, \quad j = 1, \dots, k-1 \end{aligned}$$

$$\hat{P}(1) = \hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}(1) = 0.4796$$

$$\hat{P}(2) = -0.0906$$

$$\hat{P}(3) = -0.0193$$

[예 4.2]

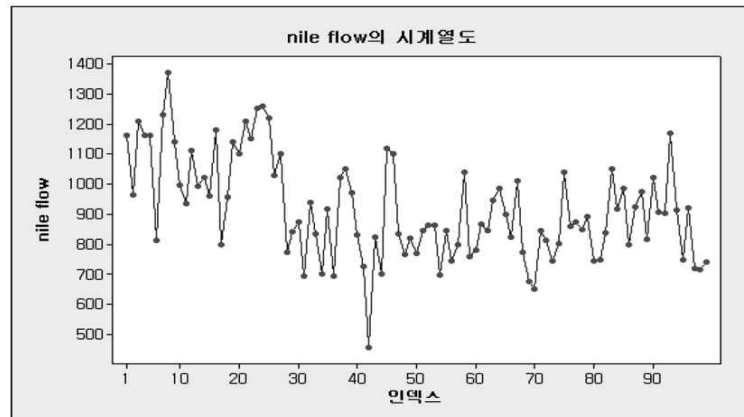


그림 4.1 나일강 유량에 대한 시계열도

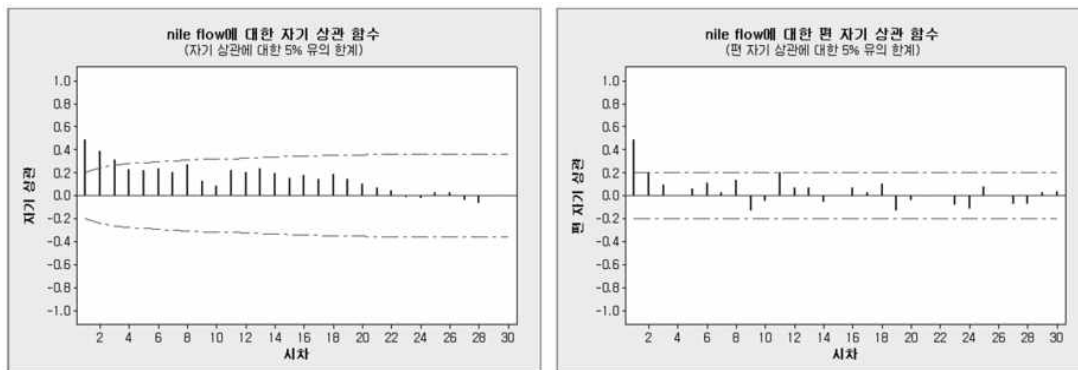


그림 4.2 나일강 유량에 대한 ACF(왼쪽)과 PACF(오른쪽)

- ACF의 패턴: 지수적으로 감소하는 패턴
 - PACF: 시차 1 또는 2 이후에 절단되는 양상
- 이 시계열은 AR(1) 또는 AR(2)모형을 따른다.

[예 4.3]

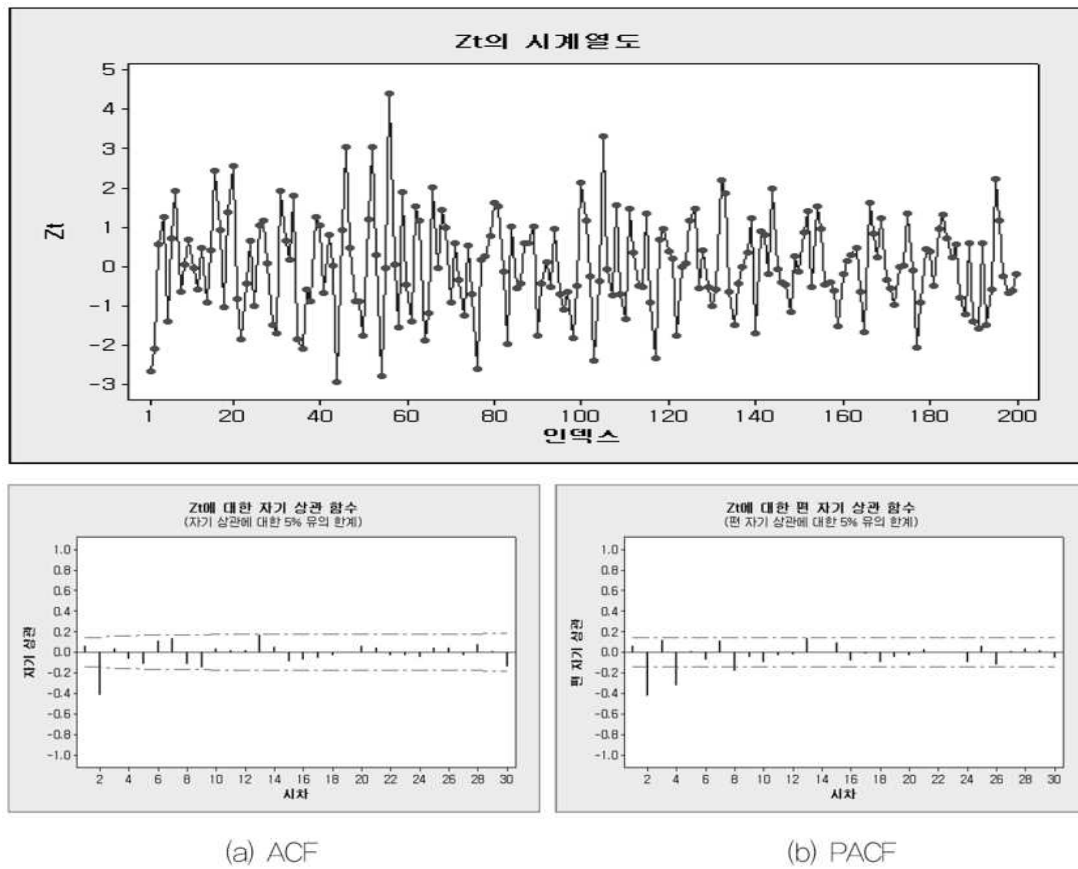


그림 4.3 가공데이터의 ACF 및 PACF

- ACF: 시차 2 이후에 절단되는 양상
 - PACF: 지수적으로 감소하는 형태
- 이 시계열은 MA(2)모형을 따른다.

[예 4.4]

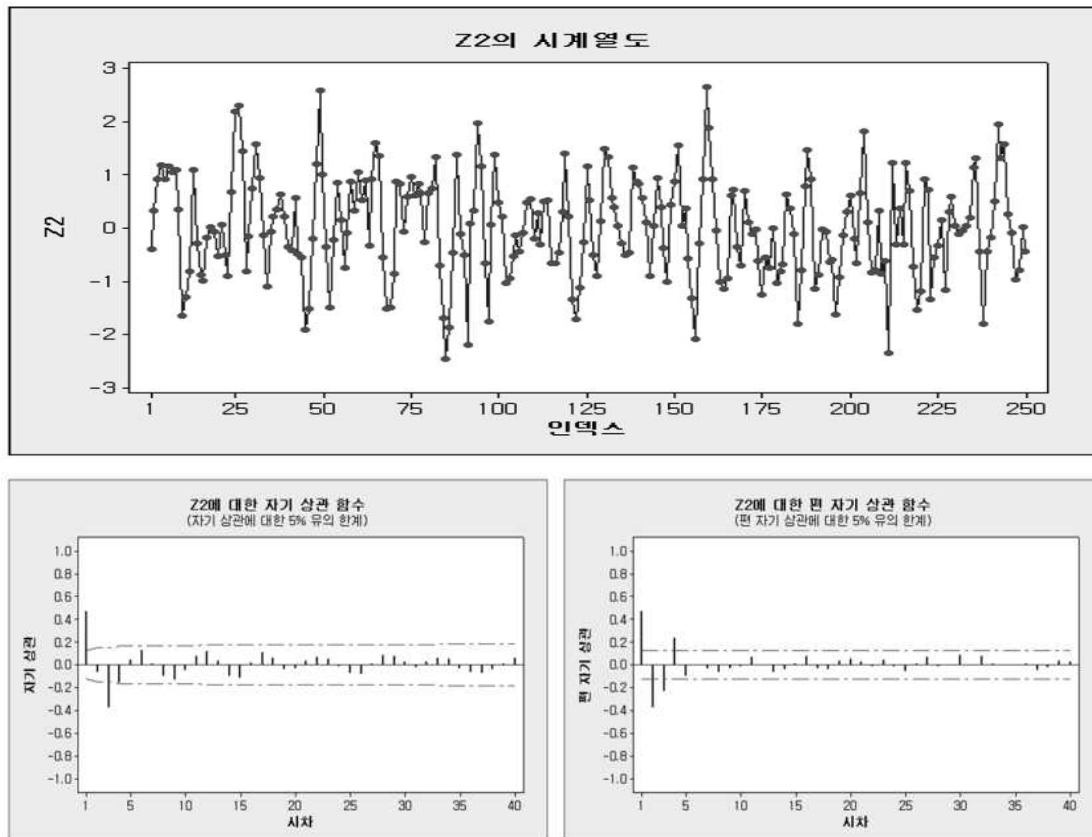


그림 4.4 ACF(왼쪽), PACF(오른쪽)

- ACF: AR모형과 유사하게 전체적으로 지수적으로 감소하는 패턴
 - PACF: 절단되는 형태
- AR(4)모형 또는
ARMA모형: $p > q$ 인 경우