제1장 시계열 예측을 위한 평활 기법

1.3 지수평활법(Exponential Smoothing)

- 가용한 전체 데이터를 활용하여 평활값을 구하며 가중치를 시간에 따라 다르게 배정
- 과거로 갈수록 지수적으로 감소하는 가중치를 사용

➤ 종류
- 단순지수평활법
- 이중지수평활법
- Holt 모형 / Holt-Winters 모형

1.3.1 수평적 패턴과 단순지수평활법

- 시계열값 X_t가 수평적 패턴을 갖는다고 가정하면

$$X_t = c + a_t$$

여기서, c: 상수, $a_t \sim i.i.d.\left(0,\ \sigma_a^2\right)$: 오차항, 백색잡음(white noise)

- 만약 시점 T에서 모든 시계열 데이터를 사용하여 상수 c를 추정한다면

$$\min_c Q = \sum_{t=1}^{T} \lambda^{T-t}\left(X_t - c\right)^2 \quad \text{여기서, } \lambda\text{: 0과 1 사이의 가중치} \rightarrow \frac{\partial Q}{\partial c} = 0$$

$\Rightarrow \hat{c} = \dfrac{1-\lambda}{1-\lambda^T}\displaystyle\sum_{t=1}^{T}\lambda^{T-t}X_t$

⇨ T가 매우 크다면 아래와 같이 근사된다.

$\hat{c} = (1-\lambda)\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i X_{T-i}$: 시점 T에서 시계열 X_t에 대한 단순지수평활값[지수가중이동평균]

$$S_T = (1-\lambda)\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i X_{T-i}$$

$S_T = \alpha X_T + (1-\alpha)S_{T-1}$ ← 지수평활법의 갱신식, 여기서, α(평활상수)$=1-\lambda$

➤ 초기값 설정
- $S_1 = X_1$
- 처음 상당수 관측값의 평균값

■ 단순지수평활값 S_T의 평균과 분산

- 평균: $E(S_T)=\alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i E(X_{T-i})=c\alpha\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^i=c \rightarrow S_T$: 상수 c의 불편추정량

- 분산: $Var(S_T)=\alpha^2\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^{2i}Var(X_{T-i})=\alpha^2\sigma_a^2\sum_{i=0}^{\infty}(1-\alpha)^{2i}=\dfrac{\alpha}{2-\alpha}\sigma_a^2$

$$\rightarrow \alpha=\frac{2}{(N+1)} \text{일 때, } Var(M_T)=Var(S_T)$$

■ 시점 T에서 k-단계 이후 예측값: $\hat{f}_{T,k}=\hat{c}=S_T$, $k=1,\ 2,\ \cdots$

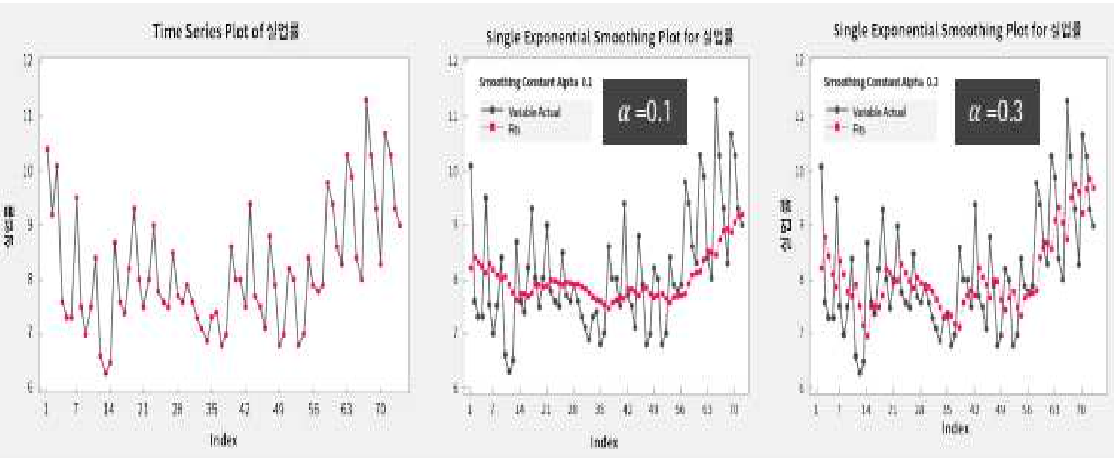
■ k-단계 이후 예측값에 대한 예측오차: $e_{T,k}=X_{T+k}-\hat{f}_{T,k}=X_{T+k}-S_T$

→ 예측오차의 분산

$$Var(e_{T,k})=Var(X_{T+k}-S_T)=Var(X_{T+k})+Var(S_T)=\frac{2}{2-\alpha}\sigma_a^2$$

■ 예: 2000년~2017년 분기별 청년(15~29세) 실업률

$\alpha=0.1$과 $\alpha=0.3$일 때의 단순지수평활치



1.3.2 선형추세와 이중지수평활법 → Brown 이중지수평활법

■ 시계열값 X_t가 다음과 같은 선형추세(linear trend)를 갖는다고 가정하면

$$X_t=c+bt+a_t$$

여기서, $c,\ b$: 상수, $a_t \sim i.i.d.(0,\ \sigma_a^2)$: 오차항, 백색잡음(white noise)

■ 상수 c, b를 추정하기 위해 단순지수평활값 이외에 이중지수평활값을 활용한다.

$$S_T^{(2)} = \alpha \sum_{i=0}^{\infty} (1-\alpha)^i S_{T-i} \qquad S_T^{(2)} = \alpha S_T + (1-\alpha) S_{T-1}^{(2)}$$

$$E[S_T] = c + bT - \frac{1-\alpha}{\alpha} b = E[X_T] - \frac{1-\alpha}{\alpha} b$$

$$E[S_T^{(2)}] = E[S_T] - \frac{1-\alpha}{\alpha} b$$

$$b = \frac{\alpha}{1-\alpha} (E[S_T] - E[S_T^{(2)}])$$

$$2E[S_T] - E[S_T^{(2)}] = c + bT$$

$$\hat{b} = \frac{\alpha}{1-\alpha} (S_T - S_T^{(2)})$$

$$\hat{c} = 2S_T - S_T^{(2)} - \hat{b}\, T$$

■ 시점 T에서 다음 시점의 예측값과 일반적인 k-단계 이후의 예측값

$$= 2S_T - S_T^{(2)} + \hat{b}$$

$$\hat{f}_{T,1} = \hat{c} + \hat{b}(T+1) = (2 + \frac{\alpha}{1-\alpha}) S_T - (1 + \frac{\alpha}{1-\alpha}) S_T^{(2)}$$

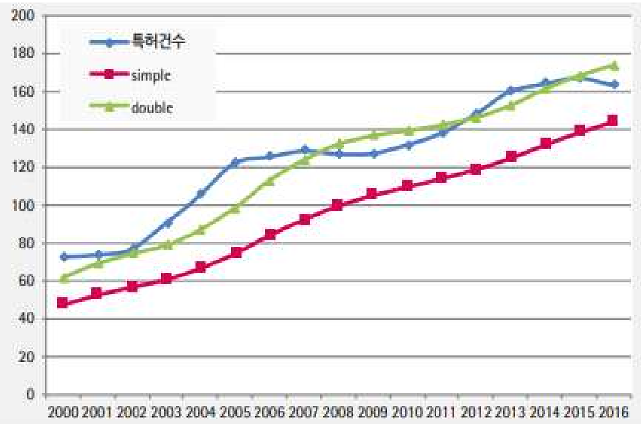
$$\hat{f}_{T,k} = \hat{c} + \hat{b}(T+k) = 2S_T - S_T^{(2)} + k\hat{b}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

■ 예: 1993년~2016년 특허건수

이중지수평활을 적용하여 한 단계 이후의 예측치를 계산($\alpha = 0.2$)

- 한단계 예측치 비교 (2000-2016)

	단순지수 평활 사용	이중지수 평활 사용
MSE	938.83	102.27
RMSE	30.64	10.11
MAD	29.59	8.19
MAPE	24.99	7.24



1.3.3 Holt의 선형추세 지수평활법

■ Holt(1957): 수준(L_t)과 추세(b_t)를 각각 갱신하는 모형 제안

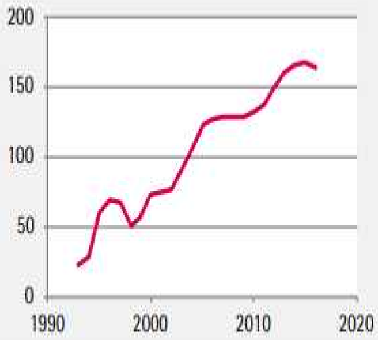
$$L_t = \alpha X_t + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$$ 수준에 대한 평활상수 $0 < \alpha < 1$

$$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$ 추세에 대한 평활상수 $0 < \beta < 1$

- 초기값: $L_1 = X_1$, $b_1 = X_1 - X_0$
- 시점 T에서 k-단계 이후 예측값: $\hat{f}_{T,k} = L_T + kb_T$ $\quad k = 1,\ 2,\ \cdots$

■ 예: 1993년~2016년 특허건수

Holt 모형을 적용하여 한 단계 이후의 예측치를 계산($\alpha = \beta = 0.2$)



년도	건수	L_t	b_t	예측치
1999	56.0	71.68	7.46	
2000	72.8	77.87	7.20	79.14
2001	73.7	82.80	6.75	85.08
2002	76.6	86.96	6.23	89.55
2015	167.3	168.83	5.80	169.21
2016	163.4	172.38	5.35	174.63

MSE=77.7
RMS=8.82
MAD=7.63
MAPE=6.89

1.3.4 계절성을 고려한 윈터스 모형: Holt-Winters 모형

■ Winters(1960): Holt 모형에 계절성(seasonality)을 추가 반영하도록 확장

- 가법적 모형(additive model)
- **<u>승법적 모형(multiplicative model)</u>**

$$L_t = \alpha \frac{X_t}{s_{t-m}} + (1-\alpha)(L_{t-1} + b_{t-1})$$

$$b_t = \beta(L_t - L_{t-1}) + (1-\beta)b_{t-1}$$

$$s_t = \gamma \frac{X_t}{L_t} + (1-\gamma)s_{t-m}$$

s_t : 계절성 지수

m : 계절성 주기

γ : 평활 상수

■ 시점 T에서의 k-단계 이후 예측식

$$\hat{f}_{T,k} = (L_T + kb_T)s_{T-m+k}, \quad k = 1, 2, \cdots$$

■ 시점 t를 i번째 연도의 j번째 계절로 표시하면

$$t=(i-1)m+j \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots;\ j=1,\ \cdots,\ m)$$

■ 추세에 대한 초기값 결정: 처음 r개년도 관측값을 사용

→ 각 계절별로 전년대비 증가량을 구한 후, 이들의 평균값을 추세의 초기값으로

$$b_0=\frac{1}{(r-1)m}\sum_{i=2}^{r}\sum_{j=1}^{m}\left(X_{(i,j)}-X_{(i-1,j)}\right)/m$$

■ 계절성 지수에 대한 초기값 결정: 처음 r개년도 관측값을 사용

$$s_j=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\frac{X_{(i,j)}}{\overline{X}_{(i,.)}},\quad j=1,2,\cdots,m$$

여기서, $\overline{X}_{(i,\ .)}=\dfrac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}X_{(i,\ j)}$: i번째 연도의 계절당 평균값

→ $b_0=\dfrac{1}{(r-1)m}\left(\overline{X}_{(r,.)}-\overline{X}_{(1,.)}\right)$

cf) Holt-Winters 모형의 가법적 모형(additive model)

$$L_t=\alpha(X_t-s_{t-m})+(1-\alpha)(L_{t-1}+b_{t-1})$$

$$b_t=\beta(L_t-L_{t-1})+(1-\beta)b_{t-1}$$

$$s_t=\gamma(X_t-L_t)+(1-\gamma)s_{t-m}$$

$$\hat{f}_{T,k}=L_T+kb_T+s_{T-m+k},\quad k=1,2,\cdots$$

1.5 예측성능척도

$$MSE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}e_{t,1}^2$$

$$\mathrm{RMSE}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}e_{t,1}^2}$$

$$MAD=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|e_{t,1}|$$

$$MAPE=\frac{100}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{e_{t,1}}{X_{t+1}}\right|$$