김은영

제2장 정상적 시계열

2.1 정상성(Stationarity)

■ **정상적 시계열(Stationary Time Series)**

- 실제 시계열은 비정상적인 것이 많다.
- 비정상적 시계열은 적절한 변환을 통해 정상적 시계열로 바꾼 후 분석할 수 있다.

[정의 2.1] 강정상성(Strong Stationarity)

시계열 $\{Z_t,\ t \geq 1\}$에 대해 $(Z_1,\ \cdots, Z_m)$과 $(Z_{1+k},\ \cdots, Z_{m+k})(k \geq 1)$이 동일한 결합확률분포를 가질 때 강정상(strong stationary) 시계열이라 한다.

■ 강정상성이 성립하고 1차 및 2차 모멘트가 유한한 경우 다음 성질을 갖는다.

· 시계열의 기댓값이 일정하다. → $E(Z_t) = \mu,\ t \geq 1$

· 시계열의 분산이 일정하다. → $Var(Z_t) = \sigma_Z^2,\ t \geq 1$

· 자기공분산 및 자기상관계수가 시간 간격(time lag)에만 의존한다.

$$Cov(Z_t,\ Z_{t-k}) = Cov(Z_{t+k},\ Z_t) = \gamma(k),\ t \geq 1$$

$$Corr(Z_t,\ Z_{t-k}) = Corr(Z_{t+k},\ Z_t) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \rho(k),\ t \geq 1$$

- 시계열 $(Z_1,\ \cdots, Z_m)$에 대한 자기공분산행렬(autocovariance matrix)

$$\Gamma = \begin{bmatrix} Var[Z_1] & Cov[Z_1, Z_2] \cdots & Cov[Z_1, Z_m] \\ Cov[Z_1, Z_2] & Var[Z_2] \cdots & Cov[Z_2, Z_m] \\ \vdots & \vdots \ \ddots & \vdots \\ Cov[Z_1, Z_m] & Cov[Z_2, Z_m] \cdots & Var[Z_m] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) & \cdots & \gamma(m-1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) & \cdots & \gamma(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(m-1) & \gamma(m-2) & \cdots & \gamma(0) \end{bmatrix}$$

- 시계열 $(Z_1,\ \cdots, Z_m)$에 대한 자기상관행렬(autocorrelation matrix)

$$R = \begin{bmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(m-1) \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(m-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho(m-1) & \rho(m-2) & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

[정리 2.1]

정상적 시계열 $(Z_1, \cdots, Z_m)$의 모든 m값에 대하여 자기공분산행렬과 자기상관행렬이 양정치(positive definite)이다. 즉, 모든 주마이너(principal minor)의 행렬식이 양이다.

[정의 2.2] 약정상성(Weak Stationarity)

시계열 $\{Z_t,\ t \ge 1\}$에 대하여 기댓값이 시간에 대해 일정하고, 임의의 두 시점의 공분산이 두 시점 간격에만 의존하고 유한(finite)할 때 약정상적(weak stationary) 또는 공분산 정상적(covariance stationary) 시계열이라 한다.

■ 강정상성이 성립하면 약정상성이 성립하지만, 역은 성립하지 않는다.

※ 결합확률분포가 다변량정규분포를 따르는 경우, 강정상성과 약정상성이 일치한다.

➤ 본 교재에서는 약정상적 시계열을 다룬다.
편의상, 시계열의 기댓값은 0으로 가정한다.

2.2 자기상관함수

➤ 시계열 표현방식

- 자기회귀과정(autoregressive process)
- 이동평균과정(moving average process)

■ 이들의 형태를 구분하는 수단: 자기상관함수, 편자기상관함수

■ 자기공분산함수(autocovariance function)

정상적 시계열 $\{Z_t,\ t \ge 0\}$에 대하여 시차 k에 대한 자기공분산

$$\gamma(k) = Cov[Z_t, Z_{t-k}] = E[Z_t Z_{t-k}], \quad (k = 1, 2, \cdots) \tag{2.1}$$

$$\gamma(0) = Var[Z_t] = E[Z_t^2] \tag{2.2}$$

여기서, $E(Z_t) = E(Z_{t-k}) = 0$

$\gamma(k) = \gamma(-k)$

[정의 2.3] 자기상관함수(AutoCorrelation Function; ACF)

정상적 시계열 $\{Z_t,\ t \geq 0\}$에 대하여 시차 k에 대한 자기상관계수는 다음과 같이 정의된다. 이때, k의 함수를 자기상관함수라 한다.

$$\rho(k) = Corr[Z_t, Z_{t-k}] = \frac{Cov[Z_t, Z_{t-k}]}{\sqrt{Var[Z_t]\, Var[Z_{t-k}]}} = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)},\quad k=1,2,\cdots \quad (2.3)$$

[예 2.1]

정상적 시계열 $\{Z_t,\ t \geq 0\}$이 아래와 같은 관계를 갖는다고 하자.

$$Z_t = \phi Z_{t-1} + a_t$$

여기서, ϕ: 절대치가 1보다 작은 상수, $a_t \sim i.i.d.(0,\ \sigma_a^2)$: 오차항, 백색잡음

$\{Z_t,\ t \geq 0\}$의 자기상관함수를 구하라.

〈 **풀이** 〉

■ $k=1$에 대한 자기공분산함수

$E(Z_t Z_{t-1}) = \phi E(Z_{t-1}^2) + E(a_t Z_{t-1})$

$E(Z_t Z_{t-1}) = \phi E(Z_{t-1}^2)$

$\rightarrow \gamma(1) = \phi\gamma(0)$

$\Rightarrow$ 시차 $k=1$에 대한 자기상관계수: $\rho(1) = \dfrac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \dfrac{\phi\gamma(0)}{\gamma(0)} = \phi$

■ $k=2$에 대한 자기공분산함수

$E(Z_t Z_{t-2}) = \phi E(Z_{t-1} Z_{t-2}) + E(a_t Z_{t-2})$

$E(Z_t Z_{t-2}) = \phi E(Z_{t-1} Z_{t-2})$

$\rightarrow \gamma(2) = \phi\gamma(1) = \phi\phi\gamma(0) = \phi^2\gamma(0)$

$\Rightarrow$ 시차 $k=2$에 대한 자기상관계수: $\rho(2) = \dfrac{\gamma(2)}{\gamma(0)} = \dfrac{\phi^2\gamma(0)}{\gamma(0)} = \phi^2$

■ $k=k$에 대한 자기공분산함수

$E(Z_t Z_{t-k}) = \phi E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k})$

$E(Z_t Z_{t-k}) = \phi E(Z_{t-1} Z_{t-k})$

$\rightarrow \gamma(k) = \phi\gamma(k-1) = \phi^k\gamma(0)$

$\Rightarrow$ 시차 $k=k$에 대한 자기상관계수: $\rho(k) = \dfrac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \dfrac{\phi^k\gamma(0)}{\gamma(0)} = \phi^k,\ k=1,\ 2,\ \cdots$

■ 관측된 시계열 데이터 $(Z_1, \cdots, Z_n)$이 있을 때 표본자기상관함수(sample autocorrelation function)은 다음과 같이 추정된다.

$$\hat{\rho}(k) = \frac{\hat{\gamma}(k)}{\hat{\gamma}(0)}, \quad k = 1, 2, \cdots \qquad (2.5)$$

$$\hat{\gamma}(0) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (z_i - \bar{z})^2 \qquad (2.6)$$

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n-k-1} \sum_{i=k+1}^{n} (z_i - \bar{z})(z_{i-k} - \bar{z}), \quad k = 1, 2, \cdots \qquad (2.7)$$

2.3 편자기상관함수

$$P(k) = Corr[Z_t, Z_{t-k} | Z_{t-1}, \cdots, Z_{t-k+1}], \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (2.8)$$

$$P(1) = \rho(1) \qquad (2.9)$$

[정리 2.2]

시차 k의 편자기상관계수는 다음의 회귀모형의 계수 ϕ_{kk}와 동일하다.

$$Z_t = \phi_{k1} Z_{t-1} + \ldots + \phi_{kk} Z_{t-k} + b_t, \quad k = 1, 2, \cdots \qquad (2.10)$$

여기서, b_t: 오차항

[예 2.3]

[정리 2.3]

시차 $k(k \geq 2)$의 편자기상관계수 $P(k)$는 다음 방정식의 미지수값 ϕ_{kk}와 동일하다.

$$\begin{pmatrix} \rho(1) \\ \rho(2) \\ \cdots \\ \rho(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(k-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{k1} \\ \phi_{k2} \\ \cdots \\ \phi_{kk} \end{pmatrix} \qquad (2.12)$$

$$P(k) = \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) & \rho(1) \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(k-3) & \rho(2) \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \rho(1) & \rho(k) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & \rho(1) & \cdots & \rho(k-2) & \rho(k-1) \\ \rho(1) & 1 & \cdots & \rho(k-3) & \rho(k-2) \\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots \\ \rho(k-1) & \rho(k-2) & \cdots & \rho(1) & 1 \end{vmatrix}$$

$$(2.13)$$

■ Levinson-Durbin 알고리즘

표본자기상관계수로부터 표본편자기상관계수를 구하는 반복적 알고리즘

$$\hat{P}(1) = \hat{\phi}_{11} = \hat{\rho}(1)$$

$$\hat{P}(s) = \hat{\phi}_{ss} = \frac{\hat{\rho}(s) - \sum_{j=1}^{s-1} \hat{\phi}_{s-1,j}\hat{\rho}(s-j)}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} \hat{\phi}_{s-1,j}\hat{\rho}(j)}, \quad s = 2,3,\cdots$$

여기서

$$\hat{\phi}_{s,j} = \hat{\phi}_{s-1,j} - \hat{\phi}_{ss}\hat{\phi}_{s-1,s-j}, \qquad j = 1,2,\cdots,s-1$$

2.4 시계열 표현방식

2.4.1 자기회귀과정(AR 표현방식)

■ 후향 연산자 B

$$Z_t = \pi_1 Z_{t-1} + \pi_2 Z_{t-2} + \ldots + a_t \tag{2.15}$$

$$(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \ldots) Z_t = a_t \tag{2.16}$$

2.4.2 이동평균과정(MA 표현방식)

$$Z_t = a_t - \psi_1 a_{t-1} - \psi_2 a_{t-2} - \cdots \tag{2.17a}$$

$$Z_t = (1 - \psi_1 B - \psi_2 B^2 - \cdots) a_t \tag{2.17b}$$