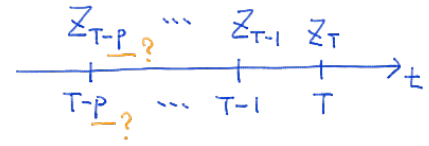


제10장 벡터자기회귀모형

10.2.4 VAR(p)모형의 식별 및 추정



- VAR(p) 모형의 시차 p 결정
- 정보기준(Information Criteria)을 사용

AIC(p)	$\ln \hat{\Sigma} + \frac{2m^2 p}{N}$
BIC(p)	$\ln \hat{\Sigma} + \frac{m^2 p \ln N}{N}$
HQ(p)	$\ln \hat{\Sigma} + \frac{2m^2 p \ln N}{N}$

※ 충분한 관측값이 있을 때 다음 관계가 성립한다.

$$\hat{p}^{BIC} \leq \hat{p}^{HQ} \leq \hat{p}^{AIC}$$

- 우도비 검정을 사용

$H_0 : \Phi_{k+1} = \dots = \Phi_p = 0$	$LR = N(\ln \Sigma_k - \ln \Sigma_p)$
$\Phi_j = 0 \ (j = k+2, \dots, p)$ 의 조건에서 $H_0 : \Phi_{k+1} = 0$	$LR(k) = (N-m)(\ln \Sigma_k - \ln \Sigma_{k+1})$

- 잔차검정 [포트맨토(portmanteau) 검정]-VAR모형의 잔차가 백색잡음을 따르는지

- 귀무가설 $H_0 : R_1 = \dots = R_k = 0$

여기서, $R_h = (r_{ij}(h))$: 잔차시계열의 시차 $h(=0, 1, \dots)$ 의 표본자기상관행렬

- 검정통계량(Lutkepohl, 1993)

$$\text{잔차 } \hat{e} = y - \hat{y}$$

$$Q(k) = T \sum_{h=1}^k \text{tr}(R_h^T R_0^{-1} R_h R_0^{-1})$$

- 수정 검정통계량

$$Q_*(k) = T^2 \sum_{h=1}^k \frac{1}{T-h} \text{tr}(R_h^T R_0^{-1} R_h R_0^{-1}) \sim \chi^2[m^2(k-p)]$$

10.3 그랜저 인과관계

- 한 시계열이 다른 시계열에 영향을 미치는지 여부를 판단하는 검정
- C.W.J. Granger(1969)

[정의 10.2] 그랜저 인과관계(Granger Causality)

시계열 $\{X_t, t \geq 1\}$ 이 시계열 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 의 미래값을 예측하는 데 도움이 될 때, $\{X_t, t \geq 1\}$ 이 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 준다고(Granger-cause) 말한다. 그렇지 않은 경우 $\{X_t, t \geq 1\}$ 이 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 주지 못한다(fail to Granger cause)고 말한다.

- 비제한모형: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + \beta_1 X_{t-1} + \dots + \beta_q X_{t-q} + a_t$

$\begin{bmatrix} Y_t \\ X_t \end{bmatrix}$

$H_0: \beta_1 = \dots = \beta_p = 0$

- 귀무가설 $H_0: \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$

$H_1: \text{not } H_0$

→ 귀무가설을 기각할 때, 시계열 $\{X_t, t \geq 1\}$ 이 시계열 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 준다

(X Granger-causes Y)고 한다.

$\beta_i (i=1, \dots, p)$ 들 중 적어도 하나는 0이 아니다

※ 만약 두 모형의 설명력이 유사하면 가설을 기각하지 못한다.

- 제한[축소]모형: 귀무가설이 맞는 경우의 모형

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \dots + \alpha_p Y_{t-p} + a_t$$

- 검정통계량

$$F = \frac{(SSE_r - SSE_{ur})/q}{SSE_{ur}/(N-p-q-1)} \sim F(v_1, v_2; \lambda)$$

$\Rightarrow \sim F(q, N-p-q-1)$

여기서, $v_1 = q, v_2 = N-p-q-1$
 귀무가설 $H_0: \beta_1 = \dots = \beta_q = 0$
 $\Rightarrow \lambda = 0$

여기서, SSE_r : 제한모형의 잔차제곱합, SSE_{ur} : 비제한모형의 잔차제곱합

- 두 시계열 $\{X_t, t \geq 1\}$ 와 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 에 대하여 다음 4가지 경우가 발생할 수 있다.

① $\{X_t, t \geq 1\}$ 가 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 주나, $\{Y_t, t \geq 1\}$ 는 $\{X_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 주지 않는다.

② $\{X_t, t \geq 1\}$ 가 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 주지 않으나, $\{Y_t, t \geq 1\}$ 는 $\{X_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 준다.

★ ③ $\{X_t, t \geq 1\}$ 가 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 주고, $\{Y_t, t \geq 1\}$ 도 $\{X_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 준다. → feedback

④ $\{X_t, t \geq 1\}$ 가 $\{Y_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 주지 않고, $\{Y_t, t \geq 1\}$ 도 $\{X_t, t \geq 1\}$ 에 영향을 주지 않는다. X

→ ③의 경우가 가장 VAR모형에 적합하다.

10.4 충격-반응 함수(Impulse Response Function: IRF)

■ VAR모형에서는 한 시계열에서 특정 시점의 충격(shock)에 의한 변화가 발생했을 때 다른 시계열에 어떤 영향을 주는지에 관심을 가진다. 또는 innovation

■ 한 시계열의 충격에 대한 다른 시계열의 반응을 시간의 함수로 분석

→ 충격반응함수(Impulse Response Function)

※ 충격: 통상 해당 오차항의 표준편차만큼의 변화량

■ 충격반응함수를 구하기 위해, 오차항 간의 상관관계가 없는 MA 형태 모형이 필요

$$Z_{1t} = u_{1t} + \psi_{11}^{(1)} u_{1,t-1} + \psi_{12}^{(1)} u_{2,t-1} + \psi_{11}^{(2)} u_{1,t-2} + \psi_{12}^{(2)} u_{2,t-2} + \dots \quad () \text{ 안의 숫자 } = \text{time lag}$$

$$Z_{2t} = u_{2t} + \psi_{21}^{(1)} u_{1,t-1} + \psi_{22}^{(1)} u_{2,t-1} + \psi_{21}^{(2)} u_{1,t-2} + \psi_{22}^{(2)} u_{2,t-2} + \dots$$

여기서, $Cov(u_{1,t}, u_{2,t}) = 0$

← 관심 시계열 → 충격이 발생한 시계열

- $\psi_{21}^{(1)}$: 첫 번째 시계열의 충격에 대한 두 번째 시계열의 다음 시점에 대한 반응

• $IRF(i, j, s)$: j 번째 시계열의 충격에 대한 i 번째 시계열의 시간 s 이후의 반응

$$\rightarrow IRF(i, j, s) = \psi_{ij}^{(s)}$$

■ VAR(p)모형을 오차항의 상관관계수행렬이 대각행렬이 되도록 바꾸는 방법

$$z_t = a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \dots$$

여기서, $a_t \sim WN(0, \Sigma)$, Σ [분산공분산행렬]: 대칭, positive definite 행렬

$$\rightarrow \Psi_1 = \Phi_1, \Psi_2 = \Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2, \dots, \Psi_s = \Phi_1 \Psi_{s-1} + \Phi_2 \Psi_{s-2} + \dots + \Phi_p \Psi_{s-p}$$

[정리 10.3] LDL 분해

임의의 대칭인 positive definite 행렬 A 는 다음과 같이 분해된다.

$$A = LDL^T$$

여기서, L : 대각원소가 1인 하삼각행렬, D : 양의 원소를 갖는 대각행렬

$|L|=1 \Rightarrow$ 가역행렬

[정리 10.4] Cholesky 분해

임의의 대칭인 positive definite 행렬 A 는 양의 대각원소를 갖는 하삼각행렬 P 로 다음과 같이 분해된다.

$$A = PP^T \quad \text{여기서, } P = LD^{1/2}$$

■ 공분산행렬 Σ 를 우선 LDL 분해한 다음 원래의 오차벡터 a_t 대신 직교 오차벡터 $u_t = L^{-1}a_t$ 를 사용하면 공분산행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Var}[u_t] &= E[u_t u_t^T] = E[L^{-1}a_t (L^{-1}a_t)^T] = E[L^{-1}a_t a_t^T (L^{-1})^T] \\ &= L^{-1}E[a_t a_t^T](L^{-1})^T = L^{-1}\text{Var}[a_t](L^{-1})^T = L^{-1}\Sigma(L^{-1})^T = \boxed{D} \end{aligned}$$

■ 오차벡터 $v_t = P^{-1}a_t$ 를 사용하면 공분산행렬은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{Var}[v_t] &= E[v_t v_t^T] = E[P^{-1}a_t (P^{-1}a_t)^T] = E[P^{-1}a_t a_t^T (P^{-1})^T] \\ &= P^{-1}E[a_t a_t^T](P^{-1})^T = P^{-1}\text{Var}[a_t](P^{-1})^T = P^{-1}PP^T(P^{-1})^T = \boxed{I} \end{aligned}$$

→ 오차벡터 v_t 는 크기가 1인 서로 직교하는 오차항들의 벡터

⇒ 이를 모형에 사용하면 IRF 산출이 용이하다.

• 실제 사용하는 모형

$$z_t = \underline{v_t} + \underline{\psi_1^* v_{t-1}} + \underline{\psi_2^* v_{t-2}} + \dots$$

여기서, $\boxed{v_t} \sim \underline{WN(0, I)}$

• 이때 j 번째 시계열의 충격에 대한 i 번째 시계열의 충격반응함수는

$$IRF(i, j, s) = \psi_{ij}^{*(s)}, \quad s = 1, 2, \dots$$

여기서, $\psi_{ij}^{*(s)}$: 계수행렬 ψ_s^* 의 (i, j) 원소