김은영

제10장 벡터자기회귀모형

10.6.3 오차수정모형(Error Correction Model; ECM)

■ 두 시계열 $\{X_t\}$와 $\{Y_t\}$가 각각 $I(1)$이며 공적분 관계가 있다.

$$Y_t = \beta X_t + \epsilon_t$$
$$Y_t - (Y_{t-1} - Y_{t-1}) = \beta X_t + \beta(X_{t-1} - X_{t-1}) + \epsilon_t$$
$$Y_t - Y_{t-1} = -Y_{t-1} + \beta X_{t-1} + \beta X_t - \beta X_{t-1} + \epsilon_t$$
$$(Y_t - Y_{t-1}) = -(Y_{t-1} - \beta X_{t-1}) + \beta(X_t - X_{t-1}) + \epsilon_t$$
$$\Delta Y_t = -e_{t-1} + \beta \Delta X_t + \epsilon_t$$

■ 오차수정모형(Error Correction Model; ECM): 기본적 형태

$$\Delta Y_t = \lambda e_{t-1} + \beta \Delta X_t + \epsilon_t$$

- 상수 $\lambda(<0)$: 이전 시점에서 예측오차가 양수이면 시점 t에서의 Y값을 증가시킨다.
- 오차수정항 λe_{t-1}: 단기적 움직임 $cf)$ 공적분 관계: 장기적 관계

■ 오차수정모형(Error Correction Model; ECM): 확장된 형태

$$\Delta Y_t = \lambda e_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{1j} \Delta X_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{1j} \Delta Y_{t-j} + \epsilon_{1t}$$

$$\Delta X_t = \lambda e_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{2j} \Delta X_{t-j} + \sum_{j=1}^{p} \gamma_{2j} \Delta Y_{t-j} + \epsilon_{2t}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda e_{t-1} \\ \lambda e_{t-1} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} \beta_{2j} & \gamma_{2j} \\ \beta_{1j} & \gamma_{1j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_{t-j} \\ \Delta Y_{t-j} \end{bmatrix}$$

여기서, $e_t = Y_t - \beta X_t$일 때, $e_{t-1} = [-\beta \quad 1] \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda e_{t-1} \\ \lambda e_{t-1} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} \beta_{2j} & \gamma_{2j} \\ \beta_{1j} & \gamma_{1j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_{t-j} \\ \Delta Y_{t-j} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta X_t \\ \Delta Y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda\beta & \lambda \\ -\lambda\beta & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{t-1} \\ Y_{t-1} \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \begin{bmatrix} \beta_{2j} & \gamma_{2j} \\ \beta_{1j} & \gamma_{1j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X_{t-j} \\ \Delta Y_{t-j} \end{bmatrix}$$

■ 그랜저 표현정리(Granger Representation Theorem)

• Engel and Granger(1987)은 공적분 관계가 ECM 표현의 필요충분조건임을 증명

• 각 원소가 $I(1)$인 벡터 시계열 VAR(p)모형으로 확장하면

다음과 같은 벡터 오차수정모형(Vector Error Correction Model; VECM)이 된다.

[정리 10.5]

벡터 시계열 $\{z_t\}$이 VAR(p)모형을 따른다고 하자. 즉,

$$z_t = \Phi_1 z_{t-1} + \Phi_2 z_{t-2} + \cdots + \Phi_p z_{t-p} + a_t \qquad \text{여기서, } a_t \sim WN(0, \Sigma)$$

이 모형은 다음과 같은 VECM으로 표현된다.

$$\Delta z_t = \Pi z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta z_{t-j} + a_t$$

$$\text{여기서, } \Pi = \Phi_1 + \Phi_2 + \cdots + \Phi_p - I, \quad \Gamma_k = -\sum_{j=k+1}^{p} \Phi_j$$

※ $\{z_t\}$이 $I(1)$이면 VECM은 $I(0)$이다.

■ VECM의 각 항은 모두 정상적이어야 한다.

→ 오른쪽 첫 번째 항(오차수정항)이 정상적이어야 한다.

$(m \times m)$ 행렬 Π의 랭크의 크기에 따라 세 가지 경우로 나뉜다.

① $\Pi = 0$인 경우: 공적분 관계가 없다. $I(1)$인 VAR(p)모형은 차분을 통해 정상적 VAR(p-1)모형이 된다.

② Π의 랭크가 m(즉, full rank)인 경우: $|\Pi| \neq 0$이므로 벡터 시계열이 $I(1)$이 아닌 이미 정상적 모형이다.

③ Π의 랭크가 0보다 크고 m보다 작은 경우: 랭크를 r이라 할 때, $0 < r < m$인 경우를 말하는데, Π의 랭크와 공적분 수가 일치한다. 즉, 행렬 Π의 랭크가 r일 때, 이는 두 개의 $(m \times r)$ 행렬 A와 행렬 B의 곱으로 표현된다.

$$\Pi = AB^T$$

이때 행렬 B의 열들이 공적분 벡터들이 된다. 그러나. 행렬 A와 B가 유일하지는 않다. 통상적으로 공적분 벡터의 첫 번째 원소를 1로 둔다. 참고로 Π는 VAR모형의 다항식과 관련하여 다음이 성립한다.

$$\Pi = -\Phi(1)$$

10.6.4 Johansen 공적분 검정: Johansen(1988, 1991)

1. 트레이스 검정(trace test)

■ 가설설정: $H_0 : r = r_0$, $H_1 : r > r_0$

• r_0값을 0, 1, ⋯ 등으로 변화시키면서 순차적으로 가설검정을 진행한다.

→ $r_0 = 0$에서 귀무가설이 기각되면 공적분 벡터가 1개 이상 있다.

→ $r_0 = 1$에서 귀무가설이 기각되면 공적분 벡터 수가 2개 이상 있다.

⋮

→ 어느 단계에서도 귀무가설을 기각하지 못하면 그 단계의 r_0값이 공적분 랭크가 된다.

■ 검정통계량: 우도비에 바탕을 두고 행렬 Π의 추정 고유값으로 산출된다.

$$LR_{trace}(r_0) = -T \sum_{i=r_0+1}^{m} \ln(1-\hat{\lambda}_i)$$

여기서, $\hat{\lambda}_1 > \cdots > \hat{\lambda}_m$: 행렬 Π의 추정 고유값

• 행렬 Π의 실제 랭크가 r_0라면, $\hat{\lambda}_{r_0+1} > \cdots > \hat{\lambda}_m$이 거의 0에 가깝기 때문에 위의 통계량 값이 매우 작아지게 된다.

• 행렬 Π의 실제 랭크가 r_0보다 크다면, $\hat{\lambda}_{r_0+1} > \cdots > \hat{\lambda}_m$ 중 0이 아닌 값이(1보다 작은) 있으므로 위의 통계량 값이 커지게 된다.

※ 이 통계량의 분포는 Dickey-Fuller 단위근 분포의 다변량 버전을 따른다.

2. 최대고유값 검정(maximum eigenvalue test)

■ 가설설정: $H_0 : r = r_0$, $H_1 : r = r_0 + 1$

• r_0값을 0, 1, ⋯ 등으로 변화시키면서 순차적으로 가설검정을 진행한다.

→ $r_0 = 0$에서 귀무가설이 기각되면 공적분 벡터가 1개 이상 있다.

→ $r_0 = 1$에서 귀무가설이 기각되면 공적분 벡터 수가 2개 이상 있다.

⋮

→ 어느 단계에서도 귀무가설을 기각하지 못하면 그 단계의 r_0값이 공적분 랭크가 된다.

■ 검정통계량: 최대고유값 통계량(maximum eigenvalue statistic)

$$LR_{\max}(r_0) = -T \ln(1-\hat{\lambda}_{r_0+1})$$

※ 이 통계량은 브라운 운동의 복잡한 함수형태의 분포를 따른다.