제9장 ARCH모형 및 GARCH모형

9.3 GARCH모형

9.3.1 모형의 성질

■ GARCH(Generalized AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity)모형

- Bollerslev(1986): ARCH모형을 확장하여 제안
- 분산 방정식

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p \sigma_{t-p}^2 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

여기서, 평균 방정식의 오차항 $u_t \sim GARCH(p,q)$: $E(u_t) = 0$, $Var(u_t) = \sigma_u^2$

[예 9.5]

GARCH(1,1) 모형이 제곱오차항에 대한 ARMA(1,1) 모형과 동일함을 보여라.

(풀이)

GARCH(1,1) 모형에 대한 조건부 분산

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

$$[u_t^2 = \sigma_t^2 + w_t \rightarrow \sigma_t^2 = u_t^2 - w_t] \Rightarrow u_t^2 - w_t = \alpha_0 + \beta_1 (u_{t-1}^2 - w_{t-1}) + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

$$\underline{u_t^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + \beta_1) u_{t-1}^2 + w_t - \beta_1 w_{t-1}}$$

↳ ARMA(1,1)

[정리 9.2] [예 9.5]에 대한 일반화

GARCH(p,q) 모형의 제곱오차항은 ARMA(r,p) 모형을 따르게 된다.
여기서, r=max(p,q)
(증명)

$$[u_t^2 = \sigma_t^2 + w_t \rightarrow \sigma_t^2 = u_t^2 - w_t\,] \rightarrow$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + \cdots + \beta_p\sigma_{t-p}^2 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

$$\Rightarrow\ u_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j u_{t-j}^2 + w_t - \sum_{i=1}^{p}\beta_i w_{t-i}$$

r=max(p,q)로 정의하면, 위 식은 다음 식과 같아진다.

$$u_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r}(\beta_i + \alpha_i)u_{t-i}^2 + w_t - \sum_{i=1}^{p}\beta_i w_{t-i}$$

단, 다음 조건이 필요하다.

$$\beta_i = 0,\ i > p$$

$$\alpha_i = 0,\ i > q$$

∴ 제곱오차항은 ARMA(r,p) 모형을 따르게 된다.

[예_1] GARCH(1,2) 모형의 제곱오차항은 ARMA(2,1) 모형을 따른다.
[예_2] GARCH(2,1) 모형의 제곱오차항은 ARMA(2,2) 모형을 따른다.

■ GARCH(p,q) 모형은 ARCH(∞) 모형으로 표현할 수 있다.

$$\sigma_t^2 = \left(1 - \sum_{i=1}^{p}\beta_i B^i\right)^{-1}\left[\alpha_0 + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j u_{t-j}^2\right] = w^* + \sum_{k=1}^{\infty}\phi_k u_{t-k}^2$$

여기서, $\sigma_t^2 \geq 0$이 되려면 $w^* \geq 0,\ \phi_k \geq 0$이어야 한다.

[정리 9.3] GARCH 모형의 정상성 조건

비음의 계수를 갖는 GARCH(p,q) 모형이 (약)정상적일 필요충분조건은 다음과 같다.

$$\sum_{i=1}^{q}\alpha_i + \sum_{j=1}^{p}\beta_j < 1$$

■ 최대우도법을 사용한 GARCH 모형의 추정

[정리 9.4]

정상적 GARCH(p,q) 모형에 대하여 오차항 제곱의 기댓값[조건 없는 분산]

$$Var(u_t) = E(u_t^2) = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1 - \cdots - \alpha_q - \beta_1 - \cdots - \beta_p}$$

9.3.2 GARCH모형의 예측

■ 관측값의 평균 방정식은 다음과 같이 수평적이라고 하자.

$$Y_t = c + u_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_1 u_{t-1}^2$$

■ 시점 T에서 일단계 이후 예측값

$$f_{T,1} = E(Y_{T+1} | Y_T, \cdots) = c$$

• 예측오차분산

$$\nu_{T,1} = Var(Y_{T+1} | Y_T, \cdots) = Var(u_{T+1} | Y_T, \cdots) = E(\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \cdots)$$

→ 예측오차의 분산이 변동성과 관련이 있음을 알 수 있다.

■ k단계 이후 예측오차에 대한 분산

$$\nu_{T,k} = Var(Y_{T+k} | Y_T, \cdots) = Var(u_{T+k} | Y_T, \cdots) = E(\sigma_{T+k}^2 | Y_T, \cdots),\ k = 1, 2, \cdots$$

■ 미래의 변동성에 대한 예측

• 시점 T에서 일단계 이후 변동성의 예측값

$$\begin{aligned} h_{T,1} &= E(\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \cdots) \\ &= E(\alpha_0 + \beta_1 \sigma_T^2 + \alpha_1 u_T^2 | Y_T, \cdots) \\ &= \alpha_0 + \beta_1 \sigma_T^2 + \alpha_1 u_T^2 \end{aligned}$$

• 시점 T에서 이단계 이후 변동성의 예측값

$$\begin{aligned} h_{T,2} &= E(\sigma_{T+2}^2 | Y_T, \cdots) \\ &= E(\alpha_0 + \beta_1 \sigma_{T+1}^2 + \alpha_1 u_{T+1}^2 | Y_T, \cdots) \\ &= \alpha_0 + \beta_1 E(\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \cdots) + \alpha_1 E(u_{T+1}^2 | Y_T, \cdots) \\ &= \alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1) E(\sigma_{T+1}^2 | Y_T, \cdots) \\ &= \alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1) h_{T,1} \end{aligned}$$

• 시점 T에서 k단계 이후 변동성의 예측값

$$
\begin{aligned}
h_{T,k} &= E(\sigma^2_{T+k} \mid Y_T,\ \cdots) \\
&= E(\alpha_0 + \beta_1 \sigma^2_{T+k-1} + \alpha_1 u^2_{T+k-1} \mid Y_T,\ \cdots) \\
&= \alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1) E(\sigma^2_{T+k-1} \mid Y_T,\ \cdots) \\
&= \alpha_0 + (\beta_1 + \alpha_1) h_{T,k-1} \quad (k = 2, 3,\ \cdots)
\end{aligned}
$$

※ 시점 T에서 k단계 이후 변동성의 예측값

$$h_{T,k} = \alpha_0 \sum_{i=1}^{k-2} (\beta_1 + \alpha_1)^i + (\beta_1 + \alpha_1)^{k-1} h_{T,1} \quad (k = 2, 3,\ \cdots)$$

• $k \to \infty$일 때 다음 식이 성립한다.

$$h_{T,\infty} = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} = E(\sigma^2_T) = Var(u_T)$$

9.4 GARCH모형의 변형

9.4.1 GARCH-M(GARCH-in-mean) 모형 (Engle et al., 1987)

■ 평균 방정식에 GARCH모형의 조건부 분산을 포함시킨 모형

$$Y_t = x_t^T \beta + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1 \sigma^2_{t-1} + \cdots + \beta_p \sigma^2_{t-p} + \alpha_1 u^2_{t-1} + \cdots + \alpha_q u^2_{t-q}$$

※ $g(\bullet)$: 조건부 분산의 함수. [예] $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$, $g(\sigma_t^2) = \sqrt{\sigma_t^2}$, $g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$

9.4.2 E-GARCH(Exponential GARCH) 모형 (Nelson, 1991)

■ 로그 변동성을 모형화한 것

$$h_t = \log \sigma_t^2$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \frac{\alpha_i \left| u_{t-1} \right| + \gamma_i u_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j h_{t-j}$$

• u_{t-i}의 부호에 따라 효과가 다르다.

→ 나쁜 뉴스가 변동성에 더 큰 충격을 줄 수 있다.

9.4.3 T-GARCH(Threshold GARCH) 모형 (Glosten et al., 1993)

■ Glosten et al.(1993): u_{t-i}의 부호에 따라 효과를 다르게 평가하는 모형

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \gamma_i I_{t-i} u_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

$$\text{여기서, } I_{t-i} = \begin{cases} 1, & u_{t-i} < 0 \\ 0, & u_{t-i} \geq 0 \end{cases}$$

- $u_{t-i} \geq 0$ (좋은 소식의 경우): 조건부 분산에 미치는 영향이 $\alpha_i u_{t-i}^2$
  $u_{t-i} < 0$ (나쁜 소식의 경우): 조건부 분산에 미치는 영향이 $(\alpha_i + \gamma_i) u_{t-i}^2$로 커진다.

■ Engle and Ng(1993): 약간 다른 형태의 비대칭(asymmetry) 모형을 제안

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha(u_{t-1} - \gamma)^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$$

9.4.4 I-GARCH(Integrated GARCH) 모형 (Engle and Bollerslev, 1986)

■ GARCH(1,1) 모형을 실제 많이 사용하는데, $\alpha_1 + \beta_1$의 값이 1에 아주 가까운 경우를 흔히 볼 수 있다.

■ 이 경우 오차항의 조건 없는 분산이 무한대가 되어 해석이 어려울 수 있으나, $\alpha_0 > 0$인 경우 적절한 조건 하에서 I-GARCH는 강정상성을 갖는 것으로 알려져 있다.

■ I-GARCH 모형은 어느 시점에서 충격이 발생하는 경우 분산이 상당히 지속되는 현상을 반영할 때 사용할 수 있다.