김은영

제10장 벡터자기회귀모형

10.5 예측오차 분산 분해

■ 어떤 특정 시계열의 미래 불확실성에 다른 여러 시계열의 충격이 영향을 줄 수 있으므로 여러 시계열의 상대적인 중요도를 산출할 필요가 있다. 이를 위해 여러 단계의 미래값을 예측하고, 예측오차의 분산에 대한 상대적 기여도를 평가한다.

■ 직교오차항 MA 형태의 VAR(p)모형

$$z_t = v_t + \Psi_1^* v_{t-1} + \Psi_2^* v_{t-2} + \cdots \quad \text{여기서, } v_t \sim WN(0, I)$$

$$z_{t+k} = v_{t+k} + \Psi_1^* v_{t+k-1} + \Psi_2^* v_{t+k-2} + \cdots + \Psi_k^* v_t + \Psi_{k+1}^* v_{t-1} + \cdots$$

■ k단계 예측값: $f_{t,k} = E[z_{t+k} | z_t, \cdots] = \Psi_k^* v_t + \Psi_{k+1}^* v_{t-1} + \cdots$

■ k단계 예측오차

$$e_{t,k} = v_{t+k} + \Psi_1^* v_{t+k-1} + \Psi_2^* v_{t+k-2} + \cdots + \Psi_{k-1}^* v_{t+1} = \sum_{s=0}^{k-1} \Psi_s^* v_{t+k-s} \qquad \text{여기서, } \Psi_0^* = I$$

• i번째 변수에 대한 k단계 예측오차: $\quad e_{t,k}^{(i)} = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} \psi_{ij,s}^* v_{j,t+k-s}$

• i번째 변수에 대한 k단계 예측오차 분산: $\quad Var[e_{t,k}^{(i)}] = \sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,s}^*)^2$

■ i번째 예측오차 분산 중 j번째 변수 충격의 기여율: 분산분해

$$R_{ij,k} = 100 \times \frac{\sum_{s=0}^{k-1} (\psi_{ij,s}^*)^2}{\sum_{s=0}^{k-1} \sum_{j=1}^{m} (\psi_{ij,s}^*)^2} \quad (\%)$$

• i번째 시계열의 미래 불확실성을 j번째 시계열의 충격이 얼마나 설명하고 있는지 상대적인 비중을 알 수 있다.

※ 임의의 i에 대해 다음이 성립한다: $\sum_{j=1}^{m} R_{ij,k} = 100, \qquad k = 1, 2, \cdots$

10.6 공적분 및 오차수정모형

■ 공적분(cointegration): 비정상적인 여러 시계열 간의 관계를 모형화

- Granger(1981) 제안 → Engle and Granger(1987) 발전

[정의 10.3] 차수 d의 누적시계열

(a) 단일 시계열 $\{X_t\}$에 대하여 $\{(1-B)^{d-1}X_t\}$는 비정상적이나 $\{(1-B)^{d}X_t\}$가 정상적이 될 때, 차수 d의 누적(integrated of order d) 시계열이라 하며, $\{X_t\} \sim I(d)$라 표기한다.

(b) 벡터 시계열 $\{x_t\}$에 대하여 $\{(1-B)^{d-1}x_t\}$는 비정상적이나 $\{(1-B)^{d}x_t\}$이 정상적이 될 때, 차수 d의 누적(integrated of order d) 벡터 시계열이라 하며, $\{x_t\} \sim I(d)$라 표기한다.

[정의 10.4] 공적분(cointegration)

(a) 각 원소가 $I(d)$인 벡터 시계열 $\{x_t\}$에 대하여, 선형결합 $\alpha^T x_t$이 차수 d 미만의 누적 시계열이 될 때, 공적분벡터 α를 갖는 공적분 관계에 있다고 한다.

(b) 각 원소가 $I(d)$인 벡터 시계열 $\{x_t\}$에 대하여, 선형결합 $\gamma^T x_t$이 차수 $d-b$의 누적 시계열이 될 때, 공적분벡터 γ를 갖는 공적분 관계에 있다고 하고 $x_t \sim CI(d,\, b)$라 기술한다.

※ 유의사항

- 시계열이 공적분 관계에 있으려면, 벡터 시계열의 각 원소가 동일한 차수의 누적 시계열이어야 한다.
- 총 m개의 시계열이 있을 때 최대 $m-1$개의 공적분 벡터가 존재할 수 있다.

~ **공적분 랭크(cointegration rank)**

[정의 10.5] 공적분 랭크(cointegration rank)

총 m개의 원소로 구성된 벡터 시계열에 존재하는 공적분 벡터의 최대수를 공적분 랭크라 한다.

※ 경제/금융 관련 시계열에는 비정상적이지만 장기적으로 서로 연관성이 있는 경우가 있는데 이런 경우 공적분 관계가 있을 수 있다. 국부적으로는 차이가 있을 수 있지만 장기적 또는 균형적 관계를 갖고 함께 움직이기 때문이다. [예] 소득과 소비

10.6.1 **허위회귀분석**: Granger and Newbold(1974)

■ 시계열 $\{X_t\}$와 $\{Y_t\}$: 단위근을 갖는 비정상적 시계열

$$Y_t = \alpha + \beta X_t + \epsilon_t$$

• 비록 결정계수가 높은 값을 갖고 $\beta \neq 0$이라 하더라도 잔차가 단위근을 갖는다면 분석 결과는 무의미하다.

※ 두 시계열이 공적분 관계를 가질 때 회귀분석을 하면 잔차가 단위근을 갖지 않게 된다.
→ 두 시계열이 공적분 관계를 갖지 않을 때는 이런 회귀모형을 고려하지 않아야 한다.

10.6.2 **공적분 검정**: Engel and Granger(1987)

■ H_0: 공적분 관계가 없다.

[단계 1] m개의 시계열에 대해 다음 회귀분석을 실시한다.

$$X_{1t} = \beta_0 + \beta_2 X_{2t} + \cdots + \beta_m X_{mt} + \epsilon_t$$

[단계 2] 위의 회귀분석 결과로부터 잔차 시계열을 얻은 다음, 단위근 검정을 위한 ADF 검정을 실시한다. 잔차 시계열에 단위근이 없다면 정상적이라고 볼 수 있으므로 귀무가설을 기각하여 공적분 관계가 있다고 결론짓는다.

※ Engle-Granger **공적분 검정**에서는 공적분 랭크를 알 수 없기 때문에 통상 Johansen **공적분 검정**을 많이 사용한다.