김은영

제7장 시계열의 스펙트럼 분석

■ 시계열 분석모형

① 시간영역분석(time domain analysis)

② 스펙트럼 분석(spectral analysis)[주파수영역분석(frequency domain analysis)]

7.1 스펙트럼 밀도함수

■ 시계열모형의 특성

① 시간영역분석(time domain analysis): 자기상관계수함수

② 스펙트럼 분석(spectral analysis): **스펙트럼 밀도함수**

■ **스펙트럼 밀도함수 [스펙트럼]**

- **각 주파수(angular frequency)**의 함수로 표현된다.
  ↳ $360^\circ\ (2\pi)$를 회전할 때의 각속도
    [예] 만약 2π를 회전하는 주기가 2(시간) → 단위 시간당 π를 회전
      ⇒ 각 주파수: π

■ 각 주파수 ω와 주기(period) T와의 관계: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

[정의 7.1] 스펙트럼 밀도함수 (spectral density)

> 기댓값이 0인 정상적 시계열 $\{Z_t,\ t=1,2,\cdots\}$의 자기공분산함수 $\gamma(h)$의 절댓값 합이 유한(absolutely summable)할 때, 즉, $\sum_{h=-\infty}^{\infty} |\gamma(h)| < \infty$를 만족할 때, 시계열 $\{Z_t,\ t=1,2,\cdots\}$의 **스펙트럴 밀도함수**는 다음과 같다.
>
> $$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty} e^{-ihw}\gamma(h), \quad -\infty < \omega < \infty$$

- 자기공분산함수에 대한 푸리에 변환(Fourier transform)
- $e^{-ihw} = \cos(h\omega) - i\ \sin(h\omega)$
  $\cos(\omega) = \cos(-\omega)$, $\gamma(h) = \gamma(-h)$
    ↳ 코사인 함수: 주기가 2π, $\omega \in [0,\ \pi]$의 주파수 영역에서 정의하면 된다.
- 스펙트럼은 원점에 대해 대칭이다.

$$
\begin{aligned}
f(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}[\cos(h\omega)-i\sin(h\omega)]\gamma(h) \\
&= \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{-1}[\cos(h\omega)-i\sin(h\omega)]\gamma(h)+\frac{1}{2\pi}\gamma(0) \\
&\quad +\frac{1}{2\pi}\sum_{h=1}^{\infty}[\cos(h\omega)-i\sin(h\omega)]\gamma(h) \\
&= \frac{1}{2\pi}\gamma(0)+\frac{1}{2\pi}\sum_{h=1}^{\infty}2\cos(h\omega)\gamma(h) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\gamma(0)+2\sum_{h=1}^{\infty}\gamma(h)\cos(h\omega)\right]
\end{aligned}
$$

[정리 7.1]

기댓값이 0인 정상적 시계열 $\{Z_t,\ t=1,2,\cdots\}$의 자기공분산함수 $\gamma(h)$의 절댓값 합이 유한(absolutely summable)할 때, 즉, $\sum_{h=-\infty}^{\infty}|\gamma(h)|<\infty$를 만족할 때, 시계열 $\{Z_t,\ t=1,2,\cdots\}$의 **스펙트럴 밀도함수**는 다음과 같다.

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\gamma(0)+2\sum_{h=1}^{\infty}\gamma(h)\cos(h\omega)\right],\quad \omega\in[0,\ \pi]$$

[예 7.1] 백색잡음 시계열 $Z_t=a_t$의 스펙트럼을 구하라.

【풀이】

· $Var(a_t)=\sigma_a^2$일 때 이 시계열의 공분산함수

$$\gamma(0)=\sigma_a^2$$
$$\gamma(h)=0,\quad h\neq 0$$

· 이 시계열의 스펙트럼: $f(\omega)=\dfrac{\sigma_a^2}{2\pi},\quad \omega\in[0,\ \pi]$

→ 주파수에 관계없이 일정한 값을 갖는다.

■ 어떤 시계열의 자기공분산함수를 알면 이에 대응하는 스펙트럼 밀도함수를 구할 수 있다.
↔ 스펙트럼 밀도함수를 통해 자기공분산함수를 구할 수 있다.(역 푸리에변환을 사용)

$$\gamma(h)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{ihw}f(\omega)d\omega$$

여기서, $h=0$일 때의 값, 즉 시계열의 분산: $\gamma(0)=Var(X_t)=\int_{-\pi}^{\pi}f(\omega)d\omega$

→ 스펙트럼을 $(-\pi,\ \pi)$ 영역에 대해 적분하면 그 값이 바로 **시계열의 분산**이 된다.

⇒ 스펙트럼 밀도함수

: 분산을 각 주파수별로 분해하여 어떤 주파수가 분산에 얼마나 기여하는지를 보여주는 것

[예 7.1]의 백색잡음의 스펙트럼이 주파수에 대해 일정하다

: 특정 주파수에 관계없이 일정하게 분산에 기여한다.

7.2 ARMA모형의 스펙트럼

■ MA 과정으로 표현된 시계열

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} = \psi(B) a_t$$

$$\text{여기서, } \psi_0 = 1,\ \psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^j$$

이에 대해 다음 **[정리 7.2]**가 성립한다.

[정리 7.2]

시계열 $\{Z_t,\ t \geq 1\}$이 다음과 같이 표현되고

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j a_{t-j} = \psi(B) a_t$$

$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j B^j| < \infty$일 때, 시계열의 스펙트럼 밀도함수는 백색잡음 스펙트럼 $f_a(\omega)$와 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$f(\omega) = \left|\psi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2 f_a(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left|\psi\left(e^{-i\omega}\right)\right|^2$$

■ ARMA(p,q)모형에 대하여 **[정리 7.2]**를 적용하면 **[정리 7.3]**을 얻을 수 있다.

[정리 7.3]

ARMA(p,q)모형이 다음과 같이 주어졌을 때,

$$\Phi_p(B) Z_t = \Theta_q(B) a_t$$

스펙트럼은 다음과 같다.

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left|\frac{\Theta_q(e^{-i\omega})}{\Phi_p(e^{-i\omega})}\right|^2$$

여기서, 두 다항식은 다음과 같다.

$$\Phi_p(x) = 1 - \phi_1 x - \cdots - \phi_p x^p$$

$$\Theta_q(x) = 1 - \theta_1 x - \cdots - \phi_q x^q$$

7.3 계절성 ARMA모형의 스펙트럼

■ 계절성 ARMA모형도 정상성을 만족하면 **[정리 7.2]**를 적용하여 스펙트럼을 구할 수 있다.

· 단순한 계절성 모형을 고려해 보자.

$$Z_t - \Phi Z_{t-12} = a_t$$

· **[정리 7.2]**를 적용하여 스펙트럼을 구하면

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\Phi e^{-i12\omega})(1-\Phi e^{i12\omega})} = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{1+\Phi^2-2\Phi cos12\omega}$$

→ $\Phi > 0$인 경우, $\cos 12\omega = 1$일 때 피크를 보인다.

→ $\omega = 0,\ \omega = \dfrac{2\pi k}{12},\ \ (k=1,2,\cdots,6)$ 두 경우에 피크를 보인다.

⇒ 피크값$= \dfrac{\sigma_a^2}{2\pi(1-\Phi)^2}$

■ 차분을 취한 후의 시계열에 대한 스펙트럼도 유사하게 유도된다.

· 1차 차분을 취한 시계열: $W_t = (1-B)Z_t$

· 이때 시계열 $\{W_t\}$에 대한 스펙트럼

$$f_W(\omega) = |1-e^{-i\omega}|^2 f_Z(\omega) = 2(1-\cos\omega) f_Z(\omega)$$

→ $(1-\cos\omega)$의 값은 $\omega = 0$일 때는 0에서, $\omega = \pi$일 때는 2까지 단순증가한다.

⇒ 차분을 취하면 작은 주파수 스펙트럼은 값이 작아지고

높은 주파수 스펙트럼은 값이 유지된다.

7.4 스펙트럼의 추정

■ 시계열의 자기공분산함수의 절대값 합이 유한할 때, [정리 7.1]에서 스펙트럼은

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\gamma(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty}\gamma(h)\cos(h\omega)\right], \quad \omega \in [0,\ \pi]$$

■ 시계열 데이터 $(z_1, \cdots, z_n)$이 주어질 때, 자기공분산함수 대신 **표본**자기공분산함수를 대입함으로써 스펙트럼을 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left[\hat{\gamma}(0) + 2\sum_{h=1}^{\infty}\hat{\gamma}(h)\cos(h\omega)\right], \quad \omega \in [0,\ \pi] \leftarrow \textbf{표본 스펙트럼}$$

7.4.1 주기도에 의한 스펙트럼 추정

■ 스펙트럼을 추정하는 또 다른 방법: **주기도(periodogram)**를 사용하는 기법
↳ **이산 푸리에 변환**을 통해 정의된다.
(discrete Fourier transform; **DFT**)

[정의 7.2] 이산 푸리에 변환(DFT)

시계열 데이터 $(z_1, \cdots, z_n)$의 푸리에 주파수 $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{n}$, $(k=0, 1, \cdots, n-1)$에 대하여 다음을 이산 푸리에 변환이라 한다.

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} z_t e^{-itw_k}$$

$$\rightarrow \; c_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} z_t \cos(tw_k) - i \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} z_t \sin(tw_k)$$

[정의 7.3]

시계열 데이터 $(z_1, \cdots, z_n)$에 대하여 코사인 변환(cosine transform) a_k 및 사인 변환(sine transform) b_k을 다음과 같이 정의한다.

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} z_t \cos(tw_k)$$

$$b_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{t=1}^{n} z_t \sin(tw_k)$$

■ DFT: $c_k = a_k - ib_k$

■ DFT이 주어지면 아래와 같이 원래 시계열을 얻을 수 있다.
→ 역DFT(inverse discrete Fourier transform)

$$z_t = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n-1} c_k e^{it\omega_k}, \quad t = 1, \cdots, n$$

[정의 7.4] 주기도(periodogram)

시계열 데이터 $(z_1, \cdots, z_n)$의 푸리에 주파수 $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{n}$, $(k=0, 1, \cdots, n-1)$에 대하여 이산 푸리에 변환 c_k가 주어질 때 주기도는 다음과 같다.

$$I(\omega_k) = |c_k|^2 = a_k^2 + b_k^2 \qquad \text{여기서, } I(\omega_0) = I(0) = n(\bar{z})^2$$

· n: 홀수 → 주기도: $m = \dfrac{n-1}{2}$을 중심으로 서로 대칭

→ $I(\omega_1) = I(\omega_{n-1})$, $I(\omega_2) = I(\omega_{n-2})$, $\cdots$, $I(\omega_m) = I(\omega_{m+1})$

⇒ 실제로 주기도는 주파수 $\omega_k = \dfrac{2\pi k}{n}$, $(k = 0, 1, \cdots, m)$까지 구하면 된다.

■ 주기도를 스펙트럼에 대한 추정치로 사용할 수 있다.

[정리 7.4]

주기도는 표본 스펙트럼과 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$I(\omega_k) = 2\pi \hat{f}(\omega_k) = \hat{\gamma}(0) + 2\sum_{h=1}^{n-1} \hat{\gamma}(h)\cos(h\omega_k)$$

■ 주파수별 주기도를 모두 합하면 시계열 데이터의 제곱합이 된다.

[정리 7.5]

시계열 데이터 $(z_1, \cdots, z_n)$에 대하여 n이 홀수일 때 다음이 성립한다.

$$\sum_{t=1}^{n}\left(z_t - \bar{z}\right)^2 = 2\sum_{k=1}^{m} I(\omega_k), \quad m = \frac{n-1}{2}$$

→ **제곱합**을 각 주파수별 주기도로 분해할 수 있다.

⇒ **분산분석**을 하여 어떤 주파수가 제곱합에 크게 기여하는지 알 수 있다.

[예 7.9] [예 7.7]에 대한 주기도의 분산분석표를 작성하라.

【풀이】

주파수	자유도	제곱합	평균제곱합
$w_1 = 2\pi(1/7)$	2	7.2833	3.6417
$w_2 = 2\pi(2/7)$	2	0.0271	0.0136
$w_3 = 2\pi(3/7)$	2	0.1182	0.0591
전체	6	7.4296	

→ 전체 제곱합의 대부분(98%)을 주파수 $\omega_1 = 2\pi(1/7)$의 주기도가 설명하고 있다.

7.4.2 주기도의 평활화

■ 실제 시계열 데이터에 대한 주파수별 주기도는 부드러운 곡선을 띠고 있지 않다.

→ (개선) 해당 주파수 전후의 주기도 평균을 취하여 추정하는 평활화 기법 사용

■ Daniell(1946)가 제안한 평활화 기법

· 주파수 ω_k에 대하여 $L=2l+1$의 평균을 취할 경우 평활화된 주기도는

$$\tilde{I}(\omega_k)=\sum_{j=-l}^{l}\frac{1}{2l+1}I\left(\omega_k+\frac{2\pi j}{n}\right)$$

↳ $L=2l+1$개의 주기도 값에 동일한 가중치를 부여

cf) Welch(1967), Bartlett(1948)

■ 일반화된 평활화 기법

· 서로 다르나 중심에 대하여 대칭인 가중치 함수 $W(j)$를 사용

$$\tilde{I}(\omega_k)=\sum_{j\in B}W(j)I\left(\omega_k+\frac{2\pi j}{n}\right)$$ 여기서, B: 띠너비(bandwidth)

· 가중치 함수 $W(j)$가 갖는 성질

$$\sum_{j\in B}W(j)=1,\quad W(j)=W(-j),\quad \sum_{j\in B}W^2(j)\to 0\,(n\to\infty)$$

[예 7.10]

[예 7.11]