2022.03.14.
김은영

제3장 ARMA 모형

3.1 AR모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \qquad (3.1)$$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \qquad (3.2)$$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \dots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \qquad (3.3)$$

여기서, $\phi_i' s$: 정상성 조건을 만족시키는 모형의 계수들

$a_t \sim i.i.d.(0,\ \sigma_a^2)$: 오차항, 백색잡음(white noise)

3.1.1 AR(1)모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t \qquad (3.1)$$

■ 자기공분산함수

$$Var(Z_t) = Var(\phi_1 Z_{t-1} + a_t) = \phi_1^2 Var(Z_{t-1}) + Var(a_t) + 2\phi_1 Cov(Z_{t-1}, a_t)$$

$$\gamma(0) = \phi_1^2 \gamma(0) + \sigma_a^2 \quad \rightarrow \quad \gamma(0) = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2}$$

$$\gamma(k) = Cov(Z_t,\ Z_{t-k}) = E(Z_t Z_{t-k}) = \phi E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k}) = \phi E(Z_{t-1} Z_{t-k})$$

$$\gamma(k) = \phi\gamma(k-1) = \phi^k \gamma(0) \quad k = 1,\ 2,\ \cdots$$

· **정상성 조건**

① **[정의 2.2: 약정상성(Weak Stationarity)]** → ACF: 유한 ⇒ $|\phi_1| < \infty$

② $\gamma(0) = \dfrac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} > 0$

$\therefore \ |\phi_1| < 1$

※ **AR(1)모형의 ACF:** $\rho(k) = \dfrac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \phi_1^k,\ \ k = 1,\ 2,\ \cdots$

· AR(1)모형의 ACF는 시차가 증가함에 따라 지수적으로 감소(exponentially decaying)

■ AR(1)모형의 PACF

[정리 2.2]에 의해서

$k=1$	$Z_t = \phi_{11}Z_{t-1} + b_t$	$P(1) = \phi_{11} = \phi_1$
$k=2$	$Z_t = \phi_{11}Z_{t-1} + \phi_{22}Z_{t-2} + b_t$	$P(2) = \phi_{22} = \phi_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k=k$	$Z_t = \phi_{11}Z_{t-1} + \cdots + \phi_{kk}Z_{t-k} + b_t$	$P(k) = \phi_{kk} = \phi_k$

· AR(1)모형의 PACF는 시차 1에서 절단(cutoff)

3.1.2 AR(2)모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \qquad (3.9)$$

■ 자기공분산함수

$$Var(Z_t) = Var(\phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t)$$
$$= \phi_1^2 Var(Z_{t-1}) + \phi_2^2 Var(Z_{t-2}) + Var(a_t) + 2\phi_1\phi_2 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-2})$$
$$= \phi_1^2 Var(Z_{t-1}) + \phi_2^2 Var(Z_{t-2}) + \sigma_a^2 + 2\phi_1\phi_2 Cov(Z_{t-1}, Z_{t-2})$$
$$\gamma(0) = \phi_1^2\gamma(0) + \phi_2^2\gamma(0) + \sigma_a^2 + 2\phi_1\phi_2\gamma(1)$$
$$\rightarrow \ \gamma(0) = \frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)}\sigma_a^2$$

$$Z_t Z_{t-1} = \phi_1 Z_{t-1}^2 + \phi_2 Z_{t-1}Z_{t-2} + a_t Z_{t-1}$$
$$E(Z_t Z_{t-1}) = \phi_1 E(Z_{t-1}^2) + \phi_2 E(Z_{t-1}Z_{t-2}) + E(a_t Z_{t-1})$$
$$E(Z_t Z_{t-1}) = \phi_1 E(Z_{t-1}^2) + \phi_2 E(Z_{t-1}Z_{t-2})$$
$$\rightarrow \ \gamma(1) = \phi_1\gamma(0) + \phi_2\gamma(1)$$
$$\Rightarrow \ \gamma(1) = \frac{\phi_1\gamma(0)}{1-\phi_2} \qquad (\phi_2 \neq 1\text{일 때})$$

$$Z_t Z_{t-2} = \phi_1 Z_{t-1} Z_{t-2} + \phi_2 Z_{t-2}^2 + a_t Z_{t-2}$$
$$E(Z_t Z_{t-2}) = \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-2}) + \phi_2 E(Z_{t-2}^2) + E(a_t Z_{t-2})$$
$$E(Z_t Z_{t-2}) = \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-2}) + \phi_2 E(Z_{t-2}^2)$$
$$\rightarrow \ \gamma(2) = \phi_1\gamma(1) + \phi_2\gamma(0)$$
$$\Rightarrow \ \gamma(2) = \left[\frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2\right]\gamma(0) \qquad (\phi_2 \neq 1\text{일 때})$$

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t$$
$$Z_t Z_{t-k} = \phi_1 Z_{t-1} Z_{t-k} + \phi_2 Z_{t-2} Z_{t-k} + a_t Z_{t-k}$$
$$\gamma(k) = Cov(Z_t,\ Z_{t-k}) = E(Z_t Z_{t-k})$$
$$= \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + \phi_2 E(Z_{t-2} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k})$$
$$= \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + \phi_2 E(Z_{t-2} Z_{t-k})$$
$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2), \quad k \geq 1$ $\leftarrow$ Yule-Walker 방정식

· **정상성 조건**

$$\gamma(0) = \frac{1-\phi_2}{(1+\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)}\sigma_a^2 > 0$$

$$\rightarrow \quad -1 < \phi_2 < 1,\ \phi_2 + \phi_1 < 1,\ \phi_2 - \phi_1 < 1 \qquad (3.15)$$

※ AR(2)모형의 ACF

$$\rho(1) = \frac{\phi_1}{1-\phi_2} \qquad (3.14a)$$

$$\rho(2) = \frac{\phi_1^2}{1-\phi_2} + \phi_2 \qquad (3.14b)$$

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2),\ k \geq 1 \qquad (3.14c)$$

· AR(2)모형의 ACF는 시차가 증가함에 따라 지수적으로 감소(exponentially decaying)

■ AR(2)모형의 PACF

[정리 2.2]에 의해서

$k=1$	$Z_t = \phi_{11} Z_{t-1} + b_t$	$P(1) = \phi_{11} = \phi_1$
$k=2$	$Z_t = \phi_{11} Z_{t-1} + \phi_{22} Z_{t-2} + b_t$	$P(2) = \phi_{22} = \phi_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$k=k$	$Z_t = \phi_{11} Z_{t-1} + \cdots + \phi_{kk} Z_{t-k} + b_t$	$P(k) = \phi_{kk} = \phi_k$

· AR(2)모형의 PACF는 시차 2에서 절단(cutoff)

3.1.3 AR(p)모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \tag{3.17}$$

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p) Z_t = a_t \tag{3.18}$$

$$\phi_p(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots - \phi_p B^p \tag{3.19}$$

$$\phi_p(B) Z_t = a_t \tag{3.20}$$

$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$ $Z_t Z_t = \phi_1 Z_t Z_{t-1} + \phi_2 Z_t Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_t Z_{t-p} + a_t Z_t$ $E(Z_t^2) = \phi_1 E(Z_t Z_{t-1}) + \phi_2 E(Z_t Z_{t-2}) + \cdots + \phi_p E(Z_t Z_{t-p}) + E(a_t Z_t)$ $\rightarrow \gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \phi_2 \gamma(2) + \cdots + \phi_p \gamma(p) + \sigma_a^2$ 여기서, $E(a_t Z_t) = E(a_t^2) = Var(a_t) = \sigma_a^2$
$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} + a_t$ $Z_t Z_{t-k} = \phi_1 Z_{t-1} Z_{t-k} + \phi_2 Z_{t-2} Z_{t-k} + \cdots + \phi_p Z_{t-p} Z_{t-k} + a_t Z_{t-k}$ $\gamma(k) = Cov(Z_t, Z_{t-k}) = E(Z_t Z_{t-k})$ $\quad = \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + \phi_2 E(Z_{t-2} Z_{t-k}) + \cdots + \phi_p E(Z_{t-p} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k})$ $\quad = \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + \phi_2 E(Z_{t-2} Z_{t-k}) + \cdots + \phi_p E(Z_{t-p} Z_{t-k})$ $\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p),\ k \geq 1$ ←Yule-Walker 방정식

※ AR(p)모형의 ACF

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \phi_2 \rho(k-2) + \ldots + \phi_p \rho(k-p),\ k \geq 1 \tag{3.23a}$$

$$\phi_p(B) \rho(k) = 0,\ k \geq 1 \tag{3.23b}$$

- 위 식으로부터 처음 $(p-1)$개의 ACF를 구하면
  즉, $\rho(1),\ \cdots,\ \rho(p-1)$를 알면,
  모든 ACF를 산출할 수 있다.

■ **AR(p)모형의 정상성 조건**

[정리 3.1]

AR(p)모형이 정상적 시계열이 되기 위한 필요충분조건은 다항식 $\phi_p(z)=0$의 p개 근 각각의 크기(modulus)가 1보다 커야 한다. 즉, 모든 근이 단위원(unit root) 밖에 있어야 한다.

다항식 $\phi_p(z)=0$의 p개 근을 r_i, $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$라 하면

$$\phi_p(z) = (1-z/r_1)(1-z/r_2)\cdots(1-z/r_p) \tag{3.24}$$

$$|r_i| > 1,\ \ i=1,2,\cdots,p \tag{3.25}$$

↳ 정상성 조건

[예 3.2]

[정리 3.2] AR(p)모형의 ACF

다항식 $\phi_p(z)=0$의 p개 근 r_i, $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$이 서로 다를 때, 식 (3.23)의 Yule-Walker 방정식의 해는 다음과 같다.

$$\rho(k) = A_1(1/r_1)^k + \dots + A_p(1/r_p)^k,\ \ k=0,1,2,\cdots \tag{3.26}$$

여기서, A_i, $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$: 초기값에 의해 결정되는 상수들

· AR(p)모형이 정상적 시계열일 때 각 근의 크기는 1보다 크므로, ACF는 k가 증가할 때 지수적으로 감소한다.

· 근들이 복소수일 때는 ACF가 점진적으로 감소하는 사인 곡선들의 혼합체로 알려져 있다.

⇒ 시차에 따라 0으로 감소하는 형태를 띤다.

■ AR(p)모형의 PACF

$$P(1) = \rho(1) \tag{3.28a}$$

$$P(2) = \frac{\rho(2)-\rho^2(1)}{1-\rho^2(1)} \tag{3.28b}$$

$$P(p) = \phi_p \tag{3.28c}$$

$$P(k) = 0, k \geq p+1 \tag{3.28d}$$

⇒ AR(p)모형의 PACF는 시차 p 이후 절단