김은영

제3장 ARMA 모형

3.3 ARMA모형(AutoRegressive Moving Average Model)

■ AR모형과 MA모형을 결합시킨 모형

■ ARMA(p,q)모형

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\Phi_p(B) Z_t = \Theta_q(B) a_t$$

여기서, $\Phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$

$\Theta_q(z) = 1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \cdots - \theta_p z^q$

■ ARMA모형에 대한 정상성 및 가역성 조건

[정리 3.4]

ARMA(p,q)모형에 대한 정상성 및 가역성 조건은 다음과 같다.

➤ 정상성 조건: $\Phi_p(z) = 0$의 각 근의 크기가 1보다 커야 한다.

➤ 가역성 조건: $\Theta_q(z) = 0$의 각 근의 크기가 1보다 커야 한다.

단, $\Phi_p(z) = 0$ 및 $\Theta_q(z) = 0$에서 공통적인 근이 없어야 한다.

3.3.1 ARMA(1,1)모형

$$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

· 이 모형이 정상적이고 가역적이려면 만족해야 하는 조건

$$-1 < \phi_1 < 1,\ -1 < \theta_1 < 1,\ \phi_1 \neq \theta_1 \qquad (3.53)$$

■ 자기공분산함수

$Z_t = \phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1}$

$Z_t Z_{t-k} = \phi_1 Z_{t-1} Z_{t-k} + a_t Z_{t-k} - \theta_1 a_{t-1} Z_{t-k}$

$E(Z_t Z_{t-k}) = \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k}) + E(a_t Z_{t-k}) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_{t-k})$

$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1) + E(a_t Z_{t-k}) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_{t-k}),\ k = 0,\ 1,\ \cdots$

- $k=0$인 경우

$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(-1) + E(a_t Z_t) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_t)$

$\gamma(0) = \phi_1 \gamma(1) + \sigma_a^2 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)\sigma_a^2 = \phi_1 \gamma(1) + [1 - \theta_1(\phi_1 - \theta_1)]\sigma_a^2$ ----- ①

여기서, $E(a_t Z_t) = E[a_t(\phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})] = E(a_t^2) = \sigma_a^2$

$E(a_{t-1} Z_t) = E[a_{t-1}(\phi_1 Z_{t-1} + a_t - \theta_1 a_{t-1})] = \phi_1 E(a_{t-1} Z_{t-1}) - \theta_1 \sigma_a^2 = (\phi_1 - \theta_1)\sigma_a^2$

- $k=1$인 경우

$\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) + E(a_t Z_{t-1}) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_{t-1})$

$\gamma(1) = \phi_1 \gamma(0) - \theta_1 \sigma_a^2$ ----- ②

여기서, $E(a_t Z_{t-1}) = E[a_t(\phi_1 Z_{t-2} + a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2})] = 0$

$E(a_{t-1} Z_{t-1}) = E[a_{t-1}(\phi_1 Z_{t-2} + a_{t-1} - \theta_1 a_{t-2})] = E(a_{t-1}^2) = \sigma_a^2$

①과 ②를 연립으로 풀면

$$\gamma(0) = \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2 \qquad (3.56)$$

$$\gamma(1) = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 - \phi_1^2}\sigma_a^2 \qquad (3.57)$$

- $k \geq 2$인 경우

$\gamma(k) = \phi_1 \gamma(k-1),\ k \geq 2$

※ ARMA(1,1)모형의 ACF

$$\rho(1) = \frac{\gamma(1)}{\gamma(0)} = \frac{(\phi_1 - \theta_1)(1 - \phi_1\theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$$

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)} = \phi_1 \rho(k-1) = \phi_1^{k-1}\rho(1),\ k \geq 2$$

- ARMA(1,1)모형의 ACF: 지수적으로 감소하는 형태

■ ARMA(1,1)모형의 PACF

$$P(1) = \rho(1) \tag{3.60a}$$

$$P(2) = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)} = \frac{\rho(1)(\phi_1 - \rho(1))}{1 - \rho^2(1)} \tag{3.60b}$$

$$P(3) = \frac{\rho^3(1) - 2\rho(1)\rho(2) + \rho(1)\rho^2(2)}{1 - 2\rho^2(1) + 2\rho^2(1)\rho(2) - \rho^2(2)} = \frac{\rho^2(1)(\rho(1) - 2\phi_1 + \phi_1^2\rho(1))}{1 - (2 + \phi_1^2)\rho^2(1) + 2\phi_1\rho^3(1)}$$

3.3.2 ARMA(p,q)모형

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \ldots. - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \ldots - \theta_q a_{t-q}$$

$$\Phi_p(B) Z_t = \Theta_q(B) a_t$$

여기서, $\Phi_p(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p$

$\Theta_q(z) = 1 - \theta_1 z - \theta_2 z^2 - \cdots - \theta_p z^q$

■ 자기공분산함수

$$Z_t - \phi_1 Z_{t-1} - \phi_2 Z_{t-2} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \cdots - \theta_q a_{t-q}$$

$$Z_t Z_{t-k} - \phi_1 Z_{t-1} Z_{t-k} - \phi_2 Z_{t-2} Z_{t-k} - \cdots - \phi_p Z_{t-p} Z_{t-k} =$$
$$a_t Z_{t-k} - \theta_1 a_{t-1} Z_{t-k} - \theta_2 a_{t-2} Z_{t-k} - \cdots - \theta_q a_{t-q} Z_{t-k}$$

$$E(Z_t Z_{t-k}) - \phi_1 E(Z_{t-1} Z_{t-k}) - \phi_2 E(Z_{t-2} Z_{t-k}) - \cdots - \phi_p E(Z_{t-p} Z_{t-k}) =$$
$$E(a_t Z_{t-k}) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_{t-k}) - \theta_2 E(a_{t-2} Z_{t-k}) - \cdots - \theta_q E(a_{t-q} Z_{t-k})$$

$$\gamma(k) = \phi_1 r(k-1) + \phi_2 \gamma(k-2) + \cdots + \phi_p \gamma(k-p)$$
$$+ E(a_t Z_{t-k}) - \theta_1 E(a_{t-1} Z_{t-k}) - \theta_2 E(a_{t-2} Z_{t-k}) - \cdots - \theta_q E(a_{t-q} Z_{t-k}),\ k = 0,1,\cdots$$

여기서, $E(a_{t-i} Z_{t-k}) = 0,\ i < k$

※ ARMA(p,q)모형의 ACF

$k \geq max(p,q+1)$에 대해 다음이 성립한다.

$$\rho(k) = \phi_1 \rho(k-1) + \ldots + \phi_p \rho(k-p),\ k \geq \max(p.q+1) \tag{3.62}$$

→ 시차가 증가할 때 ARMA(p,q)모형의 ACF는 AR(p)모형과 유사하게 지수적으로 감소하는 패턴을 갖게 된다.

➤ ARMA(p,q)모형의 ACF는 p와 q의 크기에 따라 약간 다른 모양을 갖는다.

1) $p \geq q+1$일 때, $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \ldots + \phi_p\rho(k-p)$, $k \geq p$ 이므로 초깃값을 고려하면 $k \geq 1$부터 ACF는 AR(p)모형과 유사하게 0으로 감소한다.

2) $p \leq q$일 때, $\rho(k) = \phi_1\rho(k-1) + \ldots + \phi_p\rho(k-p)$, $k \geq q+1$이므로 처음 $q-p$값은 별도의 값을 갖고 그 이후 AR(p)모형과 유사하게 0으로 감소한다.

■ ARMA(p,q)모형의 PACF

$$P(1) = \phi_{11} = \rho(1)$$

$$P(2) = \phi_{22} = \frac{\rho(2) - \rho^2(1)}{1 - \rho^2(1)}$$

$$P(s) = \phi_{ss} = \frac{\rho(s) - \sum_{j=1}^{s-1} \phi_{s-1,j}\rho(s-j)}{1 - \sum_{j=1}^{s-1} \phi_{s-1,j}\rho(j)}, \quad s = 2,3,\cdots$$

여기서

$$\phi_{s,j} = \phi_{s-1,j} - \phi_{ss}\phi_{s-1,s-j}, \quad (j = 1,2,\cdots,s-1)$$

■ ARMA(p,q)모형의 PACF의 성질

1) $p \geq q+1$일 때, 처음 $p-q$개는 별도의 값을 갖고 이후 MA(q)모형과 유사하게 0으로 감소한다.

2) $p \leq q$일 때, 처음부터 MA(q)모형과 유사하게 0으로 감소한다.

표 4.1 ARMA모형의 이론적 ACF와 PACF의 패턴

모형	ACF	PACF
AR(p)	지수적으로 감소하거나 진폭이 감소하는 사인파 형태	시차 p 이후에 절단되는 형태
MA(q)	시차 q 이후에 절단되는 형태	지수적으로 감소하거나 진폭이 감소하는 사인파 형태
ARMA(p,q)	$p > q$인 경우: 처음부터 지수적으로 감소하거나 진폭이 감소하는 사인파 형태 (AR항이 MA항보다 많으므로 전체적으로 AR모형의 ACF형태를 갖는다) $p < q$인 경우: 처음 $q-p+1$개의 별도값을 갖고 그 이후 감소하는 형태(MA항이 AR항보다 많으므로 전체적으로 MA모형의 ACF형태를 갖는다)	$p > q$인 경우: 처음 $p-q+1$개의 별도값을 갖고 그 이후 감소하는 형태(AR항이 MA항보다 많으므로 전체적으로 AR모형의 PACF형태를 갖는다) $p < q$인 경우: 처음부터 지수적으로 감소하거나 진폭이 감소하는 사인파 형태(MA항이 AR항보다 많으므로 전체적으로 MA모형의 PACF형태를 갖는다)