2022.04.20.
김은영

제11장 상태공간모형

11.2 칼만필터링

11.2.1 칼만필터링이란 무엇인가?

(1) 개요

- 공정제어를 위하여 Kalman(1960)이 제안한 알고리즘
- 시간의 흐름에 따라 모형식이 변화하는 동적 모형(dynamic model)
- 선형과 비선형의 중간 형태
- 장점: 예측 문제 해결
- 응용범위: 경제 예측, 신호 처리, 기상 예보 등

(2) 칼만필터 모형의 생성 구조

- 초기치가 필요함

- 주어진 상태방정식(state equation)에 의하여 전 상태로부터 내적오차를 합하여 현 상태의 값이 결정됨

- 주어진 출력방정식(output equation)에 의하여 고려된 입력변수값과 동적회귀계수 역할을 하는 현 상태의 내적과 출력오차의 합 형태로 관측치가 생성된다는 가정 아래 구성된 모형임

- 새로운 관측치가 얻어지면, 모형이 최신화(update)됨

(3) 칼만필터 모형

초기분포	$\theta_0 \sim N(m_0,\ C_0)$	• θ: 상태벡터
상태방정식	$\theta_t = G_t\theta_{t-1} + w_t,\quad w_t \sim N(0,\ W)$	• G_t: 전이행렬 • w_t: 내적오차벡터
출력방정식	$Y_t = F_t\theta_t + v_t,\qquad v_t \sim N(0,\ V)$	• Y_t : 관측치 • F_t : 입력벡터 • v_t : 출력오차

※ $\theta_{t-1},\ w_t$: 독립
$\theta_t,\ \ v_t$: 독립
$w_t,\ \ v_t$: 독립

[예 1]

시간에 따라 생성되는 종속변수가 1개, 설명변수가 2개인 선형모형을 생각해 보자.

(1) 회귀모형: 회귀계수가 미지의 상수. 정적 모형

$$Y_t = m_0 + m_1 X_{1t} + m_2 X_{2t} + v_t$$

(2) 회귀동적모형: 회귀계수가 시간에 따라 변하는 경우. 동적 모형

$$Y_t = m_{0t} + m_{1t} X_{1t} + m_{2t} X_{2t} + v_t$$

※ 각 회귀계수는 함수 형태로 추정해 주어야 함.

(3) 회귀동적선형모형: 회귀계수가 전 시점의 회귀계수에 의하여 결정되는 경우
회귀동적모형의 특수한 경우

[예] 전이행렬이 단위행렬인 경우(상태벡터: 임의보행인 경우)

$$Y_t = m_{0t} + m_{1t} X_{1t} + m_{2t} X_{2t} + v_t$$

$$\theta_t = \begin{pmatrix} m_{0t} \\ m_{1t} \\ m_{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{0,t-1} \\ m_{1,t-1} \\ m_{2,t-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_{01} \\ w_{1t} \\ w_{2t} \end{pmatrix}$$

11.2.2 칼만필터 모형의 종류

(1) 분류기준

- ■ 분석 변수의 동적 특성과 목적에 따라
- 구성요소들(전이행렬, 출력행렬, 상태벡터, 오차분산, 관측치)이 변화됨.
- 구성식이 여러 개로 표현되기도 함.

(2) 칼만필터 모형의 종류

① 은닉 마코프 모형(Hidden Markov Model)

- ■ Baum에 의해 제안됨.
- ■ 오차항이 없는 칼만필터 모형

$$\mu_t = G\mu_{t-1}$$
$$Y_t = F\mu_t$$

② **일차 칼만필터 모형(Simple Kalman Filter Model)**

- 오차항을 포함한 칼만필터 모형 중 가장 간단한 형태
- t 시점의 상태열이 임의보행과정으로
  직전 상태값 주위에서 흔들리면 변화할 때 사용함.

$$\mu_t = \mu_{t-1} + w_t$$
$$Y_t = \mu_t + v_t$$

③ **회귀 칼만필터 모형(Regression Kalman Filter Model)**

- 입력변수가 있는 경우 사용되는 동적 모형
- 계수(상태열)가 시간에 따라 변하는 동적 계수

$$\theta_t = \theta_{t-1} + w_t$$
$$Y_t = F_t\theta_t + v_t$$

④ **일반적 칼만필터 모형(General Kalman Filter Model)**

- 회귀 칼만필터 모형에서 동적 계수가 임의보행이 아닌 경우
- 이를 전이행렬로 고려하는 동적 모형

$$\theta_t = G\theta_{t-1} + w_t$$
$$Y_t = F_t\theta_t + v_t$$

⑤ **확장된 칼만필터 모형(Extended Kalman Filter Model)**

- 상태방정식과 출력방정식이 선형모형이 아닌 비선형모형인 경우
- 추정과 최신화는 주어진 식을 선형화하여 해결
- 시스템에 대한 물리적 이해가 필요함.

$$\theta_t = f(\theta_{t-1}, w_t)$$
$$Y_t = h(\theta_t, v_t)$$

11.2.3 최신화 알고리즘

(1) 칼만필터링

- 칼만필터 모형의 상태열$\{\theta_t\}$의 추정에 사용됨.

(2) 칼만필터링의 특징

① 미지의 상태열 $\{\theta_t\}$를 추정하는 반복처리과정

② 동적 처리 기법. 시간의 흐름에 따라 진행하면서 과거와 현재의 출력값들을 보고 현재의 상태를 추정해감.

③ 평균제곱오차를 최소로 하는 최적 상태열을 추정하는 통계적 이론을 바탕으로 함.

④ 체계적 기법(systematic method). 일단 칼만필터 모형이 만들어지면 칼만필터 알고리즘을 쉽게 사용할 수 있음.

⑤ 나쁜 초기치의 영향이 오래 가지 않음. 초기치에 대해 강건함.

⑥ 프로그래밍이 쉬움.

(3) 최신화 알고리즘(updating algorithm)

■ 칼만필터링은 다변량 정규분포이론에 근거

■ 최적 상태값을 추정하는 동적순환과정(dynamic recursive procedure)으로 이루어짐.

$t = 1, 2, \cdots$

다음 과정을 반복 수행함.

① $t-1$ 시점까지의 모든 정보 D_t에 의한 θ_{t-1}의 분포:

$$\theta_{t-1} | Y_{t-1} \sim N(m_{t-1}, C_{t-1})$$

② t 시점에서의 θ_t의 사전분포:

상태방정식 $\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t$, $w_t \sim N(0, W_t)$에 의하여,

$$\theta_t | D_{t-1} = (G_t \theta_{t-1} + w_t) | D_{t-1} \sim N(a_t, R_t)$$

여기서 $a_t = G_t m_{t-1}$, $R_t = G_t C_{t-1} G_t' + W_t$

③ t 시점에서의 Y_t에 대한 전방 일단계 예측:

출력방정식 $Y_t = F_t \theta_t + v_t , v_t \sim N(0, V)$에 의하여

$$Y_t | D_{t-1} = (F_t \theta_t + v_t) | D_{t-1} \sim N(f_t, Q_t)$$

여기서 $f_t = F_t a_{t-1}$, $Q_t = F_t R_{t-1} F_t' + V_t$

※ 이때 평균이 f_t 값이 Y_t에 대한 전방 일단계 예측치가 됨.
즉 Y_t에 대한 추정치로 사용됨.

④ Y_t 값이 관측된 후 t 시점에서의 정보 D_t에 대한 최신화:

$$D_t = \{D_{t-1}, Y_t\} \rightarrow \theta_t | Y_t \sim N(m_t, C_t)$$

여기서 $m_t = a_t + A_t e_t$, $C_t = R_t - A_t Q_t A_t'$, $e_t = Y_t - f_t$, $A_t = R_t F_t Q_t^{-1}$

(4) 칼만필터링 알고리즘

$F_t,\ G_t,\ t=1,2,\ \cdots$가 주어져 있는 경우 다음 과정을 수행함

[단계1] 초기치 부여: $m_1,\ C_1$을 알맞은 범위에서 임의로 잡는다.

[단계2] 반복 단계(최신화 및 예측치 생성 단계): $t=2,\ 3,\ \cdots$

$a_t = G_t m_{t-1}$

$R_t = G_t C_{t-1} G_t' + W_t$

$f_t = F_t a_{t-1}$: 일단계 전방 예측치

$Q_t = F_t R_{t-1} F_t' + V_t$

$e_t = Y_t - f_t$: 예측오차

$A_t = R_t F_t Q_t^{-1}$: 칼만이득(Kalman gain)

$m_t = a_t + A_t e_t$: 최신화된 상태벡터의 평균벡터

$C_t = R_t - A_t Q_t A_t'$: 최신화된 상태벡터의 공분산행렬

11.2.4 동적선형모형

(1) 고전적 칼만필터 모형의 한계

■ 고전적 칼만필터 모형은 출력오차분산 V와 내적오차분산 W에 대하여 상수 또는 상수행렬이라고 둠.

■ 이 값들은 경험적으로 결정되어 예측의 정확도 향상에 한계가 있음.

■ 오차분산에 대한 사전확률분포를 고려한 모형으로 '**베이지안 칼만필터 모형**'이 유용함.

(2) 동적선형모형(Dynamic Linear Model)

$$\theta_t = G_t \theta_{t-1} + w_t$$
$$Y_t = F_t \theta_t + v_t$$
$$v_t \sim N(0,\ V_t),\quad V_t \sim IG(n_t/2,\ n_t s_t/2)$$

① 고려된 동적선형모형

■ 상태변수에 대한 초기분포: $\theta_1 \sim N(m_1,\ C_1)$ θ: 상태벡터

■ 상태 방정식: $\theta_t = \theta_{t-1} + w_t,\quad w_t \sim N(0,\ W_t)$ G_t: 전이행렬

w_t: 내적오차벡터

■ 출력 방정식: $Y_t = F_t\theta_t + v_t,\ v_t \sim N(0,\ V_t)$ Y_t: 관측치, F_t: 입력벡터

v_t: 출력오차

■ 출력오차분산의 분포: $V_t \sim IG(n_t/2,\ n_t s_t/2)$

② W_t**의 해결**

■ θ_t의 분산은 (상태방정식) $R_t = C_{t-1} + W_t$
→ 내적오차분산인 W_t를 알아야 함.

■ 분산은 양수 혹은 양정치행렬
→ $R_t = C_{t-1}/\delta_t$, $0 < \delta_t \le 1$ → δ_t 추정 문제

■ 차선책: $R_t = C_{t-1}/\delta_t$로 놓고 (잔차제곱합 SSE를 최소로 하는) 최적 δ를 구하는 문제로 해결할 수 있음

■ δ를 $0 < \delta_t \le 1$ 사이에서 변화시켜가며 동적선형모형을 수행시키며 SSE를 구한 후 최소 SSE를 가지는 감소인자를 선택
※ 최적 감소인자(Optimal Discount Factor)

③ V_t**의 해결**

■ 출력오차분산 V_t는 역감마분포를 따르는 확률변수로 가정
■ n_t, s_t를 동적으로 추정하는 과정을 추가하며 해결

< 동적선형모형 추정 알고리즘 >

$F_t,\ t = 1, 2, \cdots$가 주어져 있는 경우 다음 과정을 수행함

[단계1] 초기치 부여: m_1, C_1을 알맞은 범위에서 임의로 잡는다.
최적 감소인자 δ를 사용한다.

[단계2] 반복 단계(최신화 및 예측치 생성 단계): $t = 2, 3, \cdots$

$R_t = C_{t-1}/\delta$

$f_t = F_t m_{t-1}$: y_t에 대한 일단계 전방 예측치

$Q_t = F_t' R_{t-1} F_t + s_{t-1}$

$e_t = Y_t - f_t$: 예측오차

$A_t = R_t F_t' Q_t^{-1}$: 칼만이득(Kalman gain)

$m_t = m_{t-1} + A_t e_t$: 최신화된 상태벡터의 평균벡터

$n_t = n_{t-1} + 1$: 최신화된 n_t

$s_t = s_{t-1} + s_{t-1}(e_t^2 / Q_t - 1)/n_t$: 최신화된 s_t

$C_t = R_t s_t / Q_t$: 최신화된 상태벡터의 공분산행렬

11.2.5 동적선형모형 모의실험

(1) 목적: 칼만필터링의 추정 정확도를 검증하고자 함.

(2) 모의실험 과정

[단계1] 설명변수열 X_t를 생성한다.
[단계2] 주어진 칼만필터 모형으로 반응변수열 Y_t를 생성한다.
[단계3] 회귀분석을 수행한다.
[단계4] 생성된 반응변수열과 설명변수열로 칼만필터링을 수행한다.
[단계5] 최신화 과정으로 추정되는 계수열과 본래 모형을 비교한다.

(3) 변수열 설명

① 설명변수 생성: $x_t = \sqrt{t}$, $t = 1, 2, \cdots, 150$

② 자료생성을 위한 칼만필터 모형식:

$$\begin{aligned} a_t &= a_{t-1} + \delta_{1t},\ \delta_{1t} \sim N(0,\ W_{1t}) \\ b_t &= b_{t-1} + \delta_{2t},\ \delta_{2t} \sim N(0,\ W_{2t}) \\ y_t &= a_t + b_t x_t + v_t,\ v_t \sim N(0,\ V_t) \end{aligned}$$

③ a_t의 생성을 위한 내적오차 생성: $N(0, 25)$에서 δ_{1t}를 생성한다.

④ a_t의 생성: $a_1 = 50$으로 놓고 $a_t = a_{t-1} + \delta_{1t}$, $t = 2, 3, \cdots, 150$

⑤ b_t의 생성을 위한 내적오차 생성: $N(0, 4)$에서 δ_{2t}를 생성한다.

⑥ $b_1 = 5$로 놓고 $b_t = b_{t-1} + \delta_{2t}$, $t = 2, 3, \cdots, 150$을 산출한다.

⑦ y_t의 생성을 위한 출력오차 생성: $N(0, 30)$에서 v_t를 생성한다.

⑧ $y_t = a_t + b_t x_t + v_t$, $t = 1, 2, \cdots, 150$을 산출한다.