제9장 ARCH모형 및 GARCH모형

■ 오차항에 대한 가정

· 금융 시계열: 잔차들의 절대값 또는 잔차 제곱항은 자기상관관계를 가진다.

· 이분산성(heteroskedasticity)

9.1 ARCH모형

■ 시계열 $\{Z_t,\ t \geq 1\}$에 대하여 정상적 AR(1) 모형을 고려하자.

$$Z_t = c + \phi_1 Z_{t-1} + u_t$$

여기서, $E(u_t) = 0$, $Var(u_t) = \sigma_u^2$ ← 조건이 없는 분산(unconditional variance)

$cf)$ 조건부 분산: $\sigma_t^2 = Var(u_t | u_{t-1},\ \cdots)$

↳ '변동성'은 조건부 분산으로 평가된다.

→ 조건부 분산은 시간에 따라 변할 수 있다.

■ ARCH(q) 모형 ← Engle(1982)

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + w_t$$

여기서, 오차항 w_t: 평균 0, 분산 λ^2을 갖는 백색잡음

• 조건부 분산: $\sigma_t^2 = Var(u_t | u_{t-1},\ \cdots) = E(u_t^2 | u_{t-1},\ \cdots) = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

↳ ARCH(q) 모형

■ AR(p)-ARCH(q) 모형

평균 방정식	$Z_t = c + \phi_1 Z_{t-1} + u_t$
분산 방정식	$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

■ 회귀모형-ARCH(q) 모형

평균 방정식	$Y_t = x_t^T \beta + u_t$
분산 방정식	$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

■ ARCH(q)-M(ARCH-in-mean) 모형

평균 방정식	$Y_t = x_t^T \beta + \gamma g(\sigma_t^2) + u_t$
분산 방정식	$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$

※ $g(\bullet)$: 조건부 분산의 함수. [예] $g(\sigma_t^2) = \sigma_t^2$, $g(\sigma_t^2) = \sqrt{\sigma_t^2}$, $g(\sigma_t^2) = \ln(\sigma_t^2)$

■ ARCH 모형은 다음 조건이 필요하다.

① 제곱오차항 u_t^2은 양수여야 한다.

② 조건부 분산 σ_t^2은 양수여야 한다.

③ $u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + w_t$ 이 정상적이어야 한다.

※ ARCH(q) 모형의 정상성 조건: $\alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1$

■ 표준 오차항: $\nu_t = \dfrac{u_t}{\sigma_t}$ ← 기댓값 0, 분산 1

■ ARCH(q) 모형: $u_t = \sigma_t \nu_t$

- 오차항의 조건부 기댓값

$$E(u_t | u_{t-1}, \cdots) = E(\sigma_t \nu_t | u_{t-1}, \cdots) = \sigma_t E(\nu_t | u_{t-1}, \cdots) = 0$$

- 오차항의 조건부 분산

$$Var(u_t | u_{t-1}, \cdots) = Var(\sigma_t \nu_t | u_{t-1}, \cdots) = \sigma_t^2 \, Var(\nu_t | u_{t-1}, \cdots) = \sigma_t^2$$

- 오차항의 조건 없는 분산

$$\sigma_u^2 = Var(u_t) = E[Var(u_t | u_{t-1}, \cdots)] + Var[E(u_t | u_{t-1}, \cdots)]$$

$$\rightarrow \quad \sigma_u^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \cdots - \alpha_q}$$

※ ARCH(q) 모형이 정상적이려면 상기 분산이 유한해야 한다.

[정리 9.1]

ARCH(q) 모형의 정상성 조건은 다음과 같다.

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_q < 1$$

■ 조건부 분산을 이용한 ARCH(q) 모형의 명세

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + w_t \quad \rightarrow \quad u_t^2 = \sigma_t^2 + w_t$$

※ 평균 방정식의 오차항을 다음 두 가지 형태로 표현할 수 있다.

(형태 1)	$u_t^2 = \sigma_t^2 + w_t$	$E(w_t) = 0$	$Var(w_t) = \lambda^2$
(형태 2)	$u_t = \sigma_t \nu_t$	$E(\nu_t) = 0$	$Var(\nu_t) = 1$

- 분산 방정식[조건부 분산]은 동일하게 다음과 같다.

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

[정리]

$$u_t^2 = \sigma_t^2 \nu_t^2 = \sigma_t^2 + w_t \qquad w_t = \sigma_t^2(\nu_t^2 - 1) \leftarrow \text{ 형태 1 모형의 오차항}$$

- $Var(w_t) = E(w_t^2) = E[\sigma_t^4(\nu_t^2 - 1)^2]$

※ 형태 1 모형의 오차항의 분산은 u_t의 4차 모멘트(~첨도)와 연관된다.

[정의 9.1] 첨도(kurtosis)

확률변수 X의 첨도는 다음과 같다.

$$\gamma = \frac{E(X^4)}{Var^2(X)}$$

정규분포에 대한 첨도는 3이므로 첨도를 다음과 같이 정의하기도 한다.

$$\gamma_2 = \frac{E(X^4)}{Var^2(X)} - 3$$

■ 높은 값의 첨도는 꼬리확률이 높다는 것을 뜻한다.

→ 그만큼 이상값이 많이 나올 수 있다는 뜻이다.

⇒ $\gamma_2 > 0$일 때,

첨도는 정규분포보다 크며 이상값 또는 정규분포 경우보다 많이 발생할 수 있다.

[예] 수익률 관련 모형에서, 오차항의 첨도가 0보다 크다면,

변동성이 정규분포보다 크며 따라서 ARCH모형이 더 적합하다고 할 수 있다.

[정의 9.2]

- 고첨(leptokurtic): 어떤 분포의 첨도가 정규분포의 첨도보다 큰 경우
- 중첨(mesokurtic): 어떤 분포의 첨도가 정규분포의 첨도와 동일한 경우
- 저첨(platykurtic): 어떤 분포의 첨도가 정규분포의 첨도보다 작은 경우

9.2 ARCH모형의 추정 및 검정

■ 최대우도법을 사용하여 모수를 추정한다.

• n개의 관측값 $(y_1, \cdots, y_n)$을 사용하는 경우, 로그 우도함수는 다음과 같다.

$$\ln L(\Theta | y_1, \cdots, y_n) = \sum_{t=1}^{n} l_t$$

$$\text{여기서, } l_t = -\frac{1}{2}\left[\log(2\pi) + \log(\sigma_t^2) + \frac{u_t^2}{\sigma_t^2}\right]$$

$$u_t = y_t - x_t\beta$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2$$

※ 위의 우도함수를 최대화시키는 회귀계수 및 ARCH 계수들을 동시에 추정할 수 있다.

■ ARCH 효과가 있는지에 대한 검정: LM 검정(Breusch-Pagam, 1979)

• $H_0 : \alpha_1 = \cdots = \alpha_q = 0$

• ARCH 모형을 설정하고 추정한 이후 잔차에 추가적인 ARCH 효과가 있는지를 보는 잔차 진단(residual diagnostics)에 주로 사용된다.

• 절차

① 평균 방정식 모형 추정으로부터 잔차(u_i)를 얻는다.

② 잔차 제곱을 사용하여 다음의 회귀모형으로부터 결정계수 R^2을 얻는다.

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}^2 + \epsilon_t$$

③ 검정통계량을 계산하고 가설에 대한 결론을 내린다.

$$LM = nR^2$$

※ 이 검정통계량은 근사적으로 자유도 q의 카이제곱분포를 따른다.

• 위의 검정에서 ARCH 효과가 없다고 판단되면 ARCH 모형을 고려할 필요가 없다.