2022.04.13.
김은영

제10장 벡터자기회귀모형

10.2.4 VAR(p)모형의 식별 및 추정

■ VAR(p) 모형의 시차 p 결정

- 정보기준(Information Criteria)을 사용

AIC(p)	$\ln\lvert\hat{\Sigma}\rvert+\frac{2m^2p}{N}$
BIC(p)	$\ln\lvert\hat{\Sigma}\rvert+\frac{m^2p\ln N}{N}$
HQ(p)	$\ln\lvert\hat{\Sigma}\rvert+\frac{2m^2p\ln N}{N}$

※ 충분한 관측값이 있을 때 다음 관계가 성립한다.

$$\hat{p}^{BIC} \le \hat{p}^{HQ} \le \hat{p}^{AIC}$$

- 우도비 검정을 사용

$H_0 : \Phi_{k+1} = \cdots = \Phi_p = 0$	$LR = N(\ln\lvert\Sigma_k\rvert - \ln\lvert\Sigma_p\rvert)$
$\Phi_j = 0 \ (j=k+2, \ \cdots, \ p)$의 조건에서 $H_0 : \Phi_{k+1} = 0$	$LR(k) = (N-m)(\ln\lvert\Sigma_k\rvert - \ln\lvert\Sigma_{k+1}\rvert)$

■ 잔차검정 [포트맨토(portmanteau) 검정]-VAR모형의 잔차가 백색잡음을 따르는지

- 귀무가설 $H_0 : R_1 = \cdots = R_k = 0$

여기서, $R_h = (r_{ij}(h))$: 잔차시계열의 시차 $h(=0, 1, \cdots)$의 표본자기상관행렬

- 검정통계량(Lutkepohl, 1993)

$$Q(k) = T\sum_{h=1}^{k} tr(R_h^T R_0^{-1} R_h R_0^{-1})$$

- 수정 검정통계량

$$Q_*(k) = T^2\sum_{h=1}^{k}\frac{1}{T-h} tr(R_h^T R_0^{-1} R_h R_0^{-1}) \sim \chi^2\left[m^2(k-p)\right]$$

10.3 그랜저 인과관계

■ 한 시계열이 다른 시계열에 영향을 미치는지 여부를 판단하는 검정

- C.W.J. Granger(1969)

[정의 10.2] 그랜저 인과관계(Granger Causality)

> 시계열 $\{X_t,\ t \geq 1\}$이 시계열 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$의 미래값을 예측하는 데 도움이 될 때, $\{X_t,\ t \geq 1\}$이 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 준다고(Granger-cause) 말한다. 그렇지 않은 경우 $\{X_t,\ t \geq 1\}$이 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 주지 못한다(fail to Granger cause)고 말한다.

- 비제한모형: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_p X_{t-q} + a_t$

- 귀무가설 $H_0 : \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0$

→ 귀무가설을 기각할 때, 시계열 $\{X_t,\ t \geq 1\}$이 시계열 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 준다 (X Granger-causes Y)고 한다.

※ 만약 두 모형의 설명력이 유사하면 가설을 기각하지 못한다.

- 제한[축소]모형: 귀무가설이 맞는 경우의 모형

$$Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{t-1} + \cdots + \alpha_p Y_{t-p} + a_t$$

- 검정통계량

$$F = \frac{(SSE_r - SSE_{ur})/q}{SSE_{ur}/(N-p-q-1)}$$

여기서, SSE_r: 제한모형의 잔차제곱합, SSE_{ur}: 비제한모형의 잔차제곱합

■ 두 시계열 $\{X_t,\ t \geq 1\}$와 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$에 대하여 다음 4가지 경우가 발생할 수 있다.

① $\{X_t,\ t \geq 1\}$가 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 주나, $\{Y_t,\ t \geq 1\}$는 $\{X_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 주지 않는다.

② $\{X_t,\ t \geq 1\}$가 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 주지 않으나, $\{Y_t,\ t \geq 1\}$는 $\{X_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 준다.

③ $\{X_t,\ t \geq 1\}$가 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 주고, $\{Y_t,\ t \geq 1\}$도 $\{X_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 준다.

④ $\{X_t,\ t \geq 1\}$가 $\{Y_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 주지 않고, $\{Y_t,\ t \geq 1\}$도 $\{X_t,\ t \geq 1\}$에 영향을 주지 않는다.

→ ③의 경우가 가장 VAR모형에 적합하다.

10.4 충격-반응 함수(Impulse Response Function; IRF)

■ VAR모형에서는 한 시계열에서 특정 시점의 충격(shock)에 의한 변화가 발생했을 때 다른 시계열에 어떤 영향을 주는지에 관심을 가진다.

■ 한 시계열의 충격에 대한 다른 시계열의 반응을 시간의 함수로 분석
→ 충격반응함수(Impulse Response Function)
※ 충격: 통상 해당 오차항의 표준편차만큼의 변화량

■ 충격반응함수를 구하기 위해, 오차항 간의 상관관계가 없는 MA 형태 모형이 필요

$$Z_{1t} = u_{1t} + \psi_{11}^{(1)} u_{1,t-1} + \psi_{12}^{(1)} u_{2,t-1} + \psi_{11}^{(2)} u_{1,t-2} + \psi_{12}^{(2)} u_{2,t-2} + \cdots$$
$$Z_{2t} = u_{2t} + \psi_{21}^{(1)} u_{1,t-1} + \psi_{22}^{(1)} u_{2,t-1} + \psi_{21}^{(2)} u_{1,t-2} + \psi_{22}^{(2)} u_{2,t-2} + \cdots$$

여기서, $Cov(u_{1,t},\ u_{2,t}) = 0$

- $\psi_{21}^{(1)}$: 첫 번째 시계열의 충격에 대한 두 번째 시계열의 다음 시점에 대한 반응

• $IRF(i,j,s)$: j번째 시계열의 충격에 대한 i번째 시계열의 시간 s 이후의 반응

$$\rightarrow\ IRF(i,j,s) = \psi_{ij}^{(s)}$$

■ VAR(p)모형을 오차항의 상관계수행렬이 대각행렬이 되도록 바꾸는 방법

$$z_t = a_t + \Psi_1 a_{t-1} + \Psi_2 a_{t-2} + \cdots$$

여기서, $a_t \sim WN(0, \Sigma)$, Σ[분산공분산행렬]: 대칭, positive definite 행렬

$$\rightarrow\ \Psi_1 = \Phi_1,\ \Psi_2 = \Phi_1 \Psi_1 + \Phi_2,\ \cdots,\ \Psi_s = \Phi_1 \Psi_{s-1} + \Phi_2 \Psi_{s-2} + \cdots + \Phi_p \Psi_{s-p}$$

[정리 10.3] LDL 분해

임의의 대칭인 positive definite 행렬 A는 다음과 같이 분해된다.

$$A = LDL^T$$

여기서, L : 대각원소가 1인 하삼각행렬, D : 양의 원소를 갖는 대각행렬

[정리 10.4] Cholesky 분해

임의의 대칭인 positive definite 행렬 A는 양의 대각원소를 갖는 하삼각행렬 P로 다음과 같이 분해된다.

$$A = PP^T \qquad \text{여기서, } P = LD^{1/2}$$

■ 공분산행렬 Σ를 우선 LDL 분해한 다음 원래의 오차벡터 a_t 대신 직교 오차벡터 $u_t = L^{-1}a_t$를 사용하면 공분산행렬은 다음과 같다.

$$Var[u_t] = E[u_t u_t^T] = E[L^{-1}a_t(L^{-1}a_t)^T] = E[L^{-1}a_t a_t^T(L^{-1})^T]$$
$$= L^{-1}E[a_t a_t^T](L^{-1})^T = L^{-1}Var[a_t](L^{-1})^T = L^{-1}\Sigma(L^{-1})^T = D$$

■ 오차벡터 $v_t = P^{-1}a_t$를 사용하면 공분산행렬은 다음과 같다.

$$Var[v_t] = E[v_t v_t^T] = E[P^{-1}a_t(P^{-1}a_t)^T] = E[P^{-1}a_t a_t^T(P^{-1})^T]$$
$$= P^{-1}E[a_t a_t^T](P^{-1})^T = P^{-1}Var[a_t](P^{-1})^T = P^{-1}PP^T(P^{-1})^T = I$$

→ 오차벡터 v_t는 크기가 1인 서로 직교하는 오차항들의 벡터

⇒ 이를 모형에 사용하면 IRF 산출이 용이하다.

• 실제 사용하는 모형

$$z_t = v_t + \Psi_1^* v_{t-1} + \Psi_2^* v_{t-2} + \cdots$$

여기서, $v_t \sim WN(0, I)$

• 이때 j번째 시계열의 충격에 대한 i번째 시계열의 충격반응함수는

$$IRF(i, j, s) = \psi_{ij}^{*(s)}, \quad s = 1, 2, \cdots$$

여기서, $\psi_{ij}^{*(s)}$: 계수행렬 ψ_s^*의 (i, j) 원소