NOM :   GROUPE :

Vannes
Université Bretagne Sud

R1.06 - Mathématiques discrètes
Contrôle Terminal

Université Bretagne Sud

Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Mardi 9 novembre 2021
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	? pages
Impression :	A4 recto-verso agrafé (1 point)
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Non
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1. 10

On considère l'ensemble $E = [\![0,9]\!] = \{0,1,2,\ldots,9\}$ et $A = \{0,2,4,6,8\}$, $B = \{5,7,9\}$ deux parties de E.

1. Compléter les définitions **en compréhension** suivantes :

   (a) $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 9 \}$ 1

   (b) $A = \{n \in E \mid \exists k \in \mathbb{N}, n = 2k \}$ 1

2. Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$ chacune des équations ensemblistes suivantes :

   (a) $A \cap X = \{0,4,8\}$

   complémentaire dans E → $E \setminus \{2,6\}$

   $\mathcal{S} = \{X \subset E \mid 2 \notin X \text{ et } 6 \notin X\} = \mathcal{P}(\overline{\{2,6\}})$ 1

   (b) $A \cap X = \{0,1,2\}$

   $\mathcal{S} = \emptyset$ $(\{0,1,2\} \not\subset A$ car $1 \notin A)$ facultatif 1

(c) $B \cap X = \emptyset$

$\mathcal{S} = \{X \subset E \mid 5 \notin X \text{ et } 7 \notin X \text{ et } 9 \notin X\}$ 1

$= \mathcal{P}(\overline{B})$

(d) $B \cup X = \overline{A}$

$\mathcal{S} = \{X \subset \overline{A} \mid 1 \in X \text{ et } 3 \in X\}$ 1,5

$= \{X \subset \overline{A} \mid \{1,3\} \subset X\}$

(e) $X \setminus A = B$

$\mathcal{S} = \{X \subset E \mid 1 \notin X \text{ et } 3 \notin X \text{ et } B \subset X\}$ 1,5

$= \{X \subset \overline{\{1,3\}} \mid B \subset X\}$

3. Déterminer les ensembles suivants :

(a) $A \Delta \overline{B}$

$A \Delta \overline{B} = \{1,3\}$ 1

(b) $\mathscr{P}(B)$

$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{5\}, \{7\}, \{9\}, \{5,7\}, \{5,9\}, \{7,9\}, \{5,7,9\}\}$ 1

NOM : GROUPE :

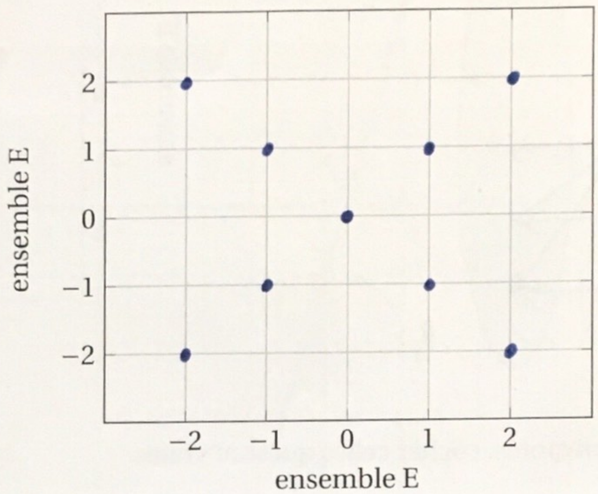
Exercice 2. 6

On considère $E = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et $F = \{0, 1, 2\}$.

1. Dans cette question, on s'intéresse à la relation binaire $\mathscr{R}_1$ de E vers E définie par :

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x \mathscr{R}_1 y \iff x^2 = y^2$$

Représenter graphiquement $\mathscr{R}_1$ en complétant le diagramme cartésien :

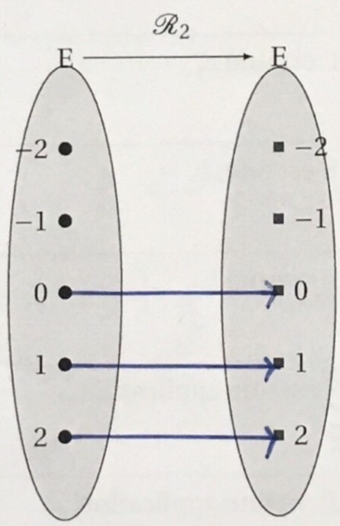


0,1

2. Dans cette question, on s'intéresse à la relation binaire $\mathscr{R}_2$ de E vers E définie par :

$$\forall x \in E, \forall y \in E,\ x \mathscr{R}_2 y \iff y = \left(\sqrt{x}\right)^2$$

(a) Représenter graphiquement $\mathscr{R}_2$ en complétant le diagramme sagittal :



0,1

(b) Déterminer la partie [1] de $E \times E$ correspondant à $\mathscr{R}_2$.

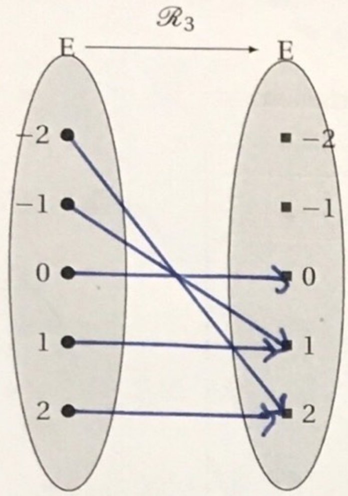
$\mathscr{R}_2 = (E, E, U)$ avec $U = \{(0,0), (1,1), (2,2)\}$ 0,1

1. Une relation binaire $\mathscr{R}$ de E vers F est définie par le triplet (E, F, U) où U désigne la partie de $E \times F$ demandée ici.

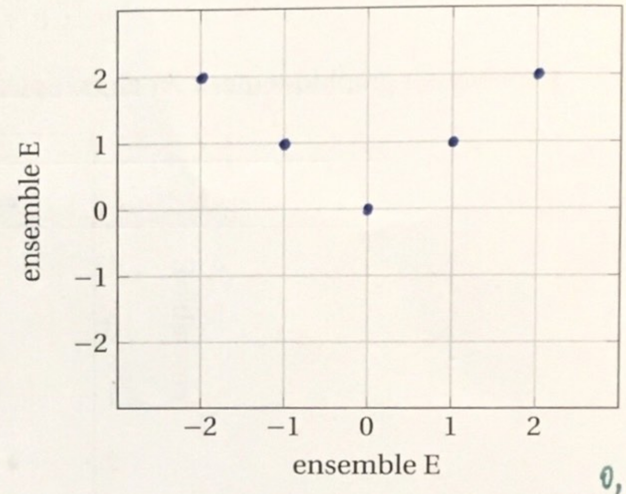
3. Dans cette question, on s'intéresse à la relation binaire $\mathscr{R}_3$ de E vers E définie par :

$$\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{E},\ x \,\mathscr{R}_3\, y \Longleftrightarrow y = \sqrt{x^2}$$

Représenter graphiquement $\mathscr{R}_3$ en complétant les diagrammes ci-dessous :



0,5



0,5

4. Parmi les assertions suivantes, cocher celles qui sont vraies.

⚠

- Dans chaque situation (numérotée de 1 à 7), il est possible de cocher 0, 1 ou 2 case(s)
- Attention aux ensembles de départ et d'arrivée exprimés dans chaque situation. Pour rappel :

$$\mathrm{E} = \{-2, -1, 0, 1, 2\} \quad \text{et} \quad \mathrm{F} = \{0, 1, 2\}$$

1. La relation binaire $\mathscr{R}_1$ **de** E **vers** E est une ...	☐ fonction ☐ application
2. La relation binaire $\mathscr{R}_2$ **de** E **vers** E est une ...	☒ fonction ☐ application
3. La relation binaire $\mathscr{R}_2$ **de** F **vers** E est une ...	☒ fonction ☒ application
4. La relation binaire $\mathscr{R}_2$ **de** F **vers** F est une application... E	☒ injective ☒ surjective
5. La relation binaire $\mathscr{R}_3$ **de** E **vers** E est une application ...	☐ injective ☐ surjective
6. La relation binaire $\mathscr{R}_3$ **de** E **vers** F est une application ...	☐ injective ☒ surjective
7. La relation binaire $\mathscr{R}_3$ **de** F **vers** F est une application ...	☒ injective ☒ surjective

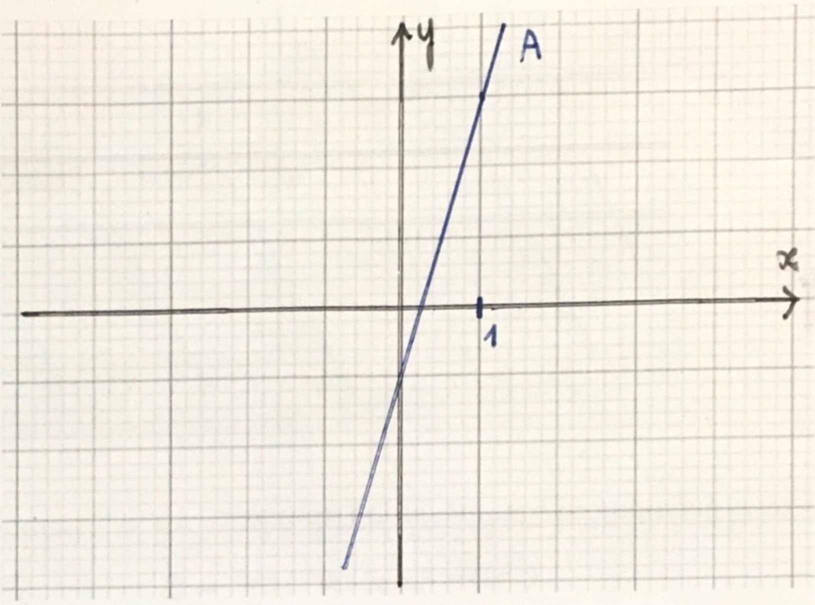
$7 \times 0,5 = 3,5$

NOM : GROUPE :

Exercice 3. 4

1. On considère $\mathrm{A} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 4x - 1\}$ et $\mathrm{B} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R},\ x = t + 1 \quad \text{et} \quad y = 4t + 3\}$.

   (a) Représenter graphiquement[2] l'ensemble A.



0,5

   (b) Montrer par double inclusion que A = B.

$B \subset A$:

Soit $(x,y) \in B$

Montrer que $(x,y) \in A$.

Comme $(x,y) \in B$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t+1$ et $y = 4t+3$.

Alors, $4x - 1 = 4(t+1) = 4t+3 = y$ donc $(x,y) \in A$. 1

$A \subset B$:

Soit $(x,y) \in A$.

Montrer que $(x,y) \in B$.

Posons $t = x - 1$.

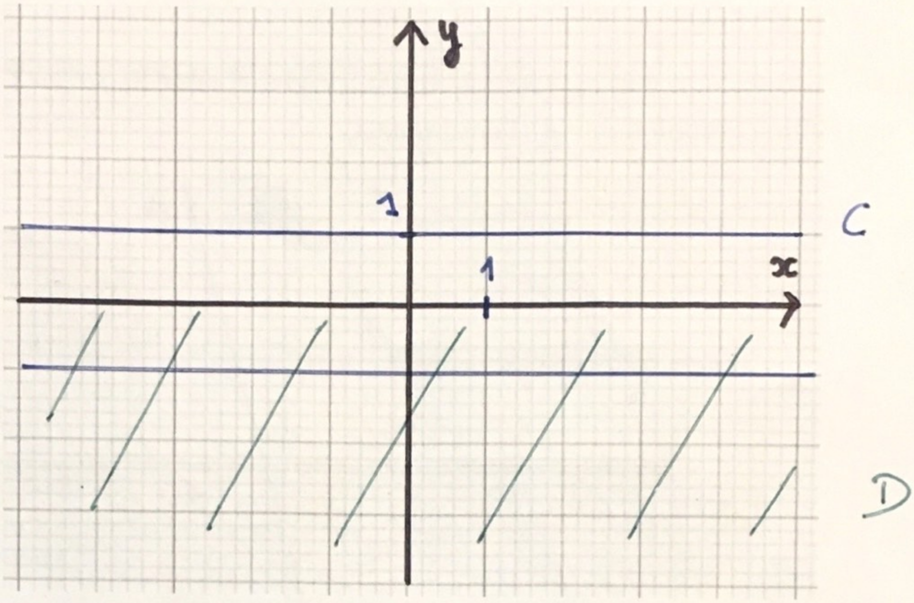
On a bien $x = t + 1$

et $y = 4x - 1 = 4(t+1) - 1 = 4t + 3$ d'où $(x,y) \in B$. 1

2. Un couple (x, y) sera représenté graphiquement par le point d'abscisse x et d'ordonnée y.

2. On considère $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = 1\}$ et $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}$

(a) Représenter graphiquement les ensembles C et D.



1

(b) Compléter la définition en compréhension suivante :

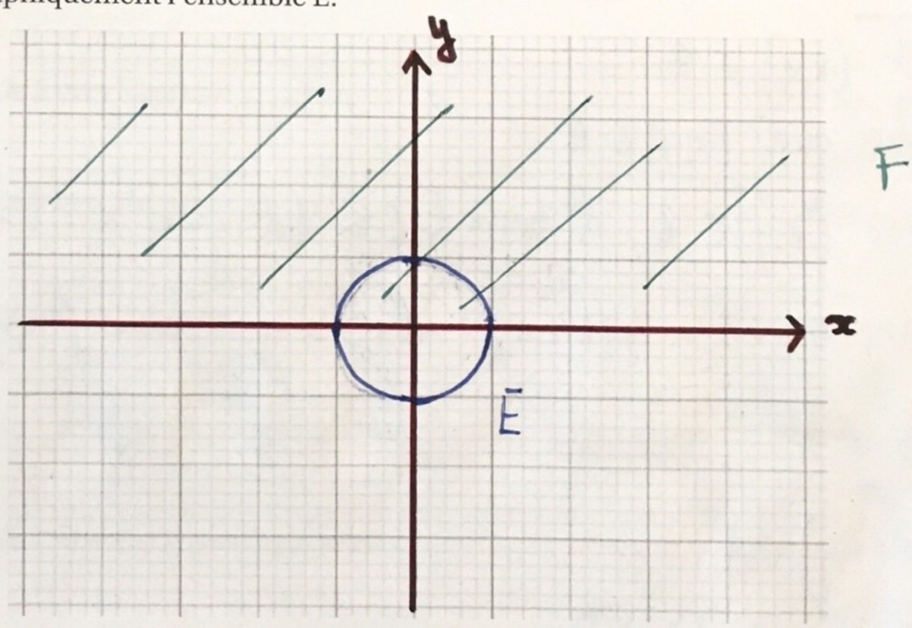
$$C \cap D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -1 \}$$

0,5

1,5

3. **(question bonus)** On considère $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\}$

(a) Représenter graphiquement l'ensemble E.



1

(b) Compléter la définition en compréhension suivante :

$$E \cap F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sqrt{1 - x^2} \}$$

0,5