

Croissances comparées

Cas classiques :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$$

Plus généralement, pour tous réel strictement positifs a et b

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \quad (1), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^b e^{ax} = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad (3), \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a |\ln(x)|^b = 0 \quad (4)$$

L'hypothèse $a > 0$ est indispensable. Supposer de plus $b > 0$ est en fait inutile (car pour ≤ 0 , les limites considérées ne sont pas des formes indéterminées).

En cas de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ dans un calcul de limite de fonction, on se rapporte très souvent au tableau suivant :

$n \rightarrow +\infty$	log	poly.	exp
log	$\frac{\log}{\log} \rightsquigarrow \text{fact.}$	$\frac{\text{poly}}{\log} \rightarrow \infty$	$\frac{\text{exp}}{\log} \rightarrow \infty$
poly	$\frac{\log}{\text{poly}} \rightarrow 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{poly}} \rightsquigarrow \text{fact.}$	$\frac{\text{exp}}{\text{poly}} \rightarrow \infty$
exp	$\frac{\log}{\text{exp}} \rightarrow 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{exp}} \rightarrow 0$	$\frac{\text{exp}}{\text{exp}} \rightsquigarrow \text{fact.}$

Par exemple, pour $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^3}{3^n}$ est de la forme $\frac{\text{poly}}{\text{exp}}$, et tend donc vers l'infini. Ici $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^3}{3^n} = -\infty$ à cause du coefficient -2 .

Les cases diagonales du tableau ne nous permettent pas de conclure directement, mais une méthode permet de trouver facilement la réponse.

polynôme sur polynôme : On factorise par le terme de plus grande puissance.

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-2n^3 + n}{3n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^2} \left(\frac{-2 + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n^2}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{1} \left(\frac{\overbrace{-2 + \frac{1}{n^2}}^{\rightarrow -2}}{\underbrace{3 + \frac{1}{n^2}}_{\rightarrow 3}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{-2}{3} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5 - 2n^3 + n}{7n^5 + 3n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^5}{n^5} \left(\frac{1 - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{7 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 \cdot \frac{1}{7} \\
&= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^3 + n}{7n^5 + 3n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^3}{n^5} \left(\frac{2 + \frac{1}{n^2}}{7 + \frac{3}{n^3} + \frac{1}{n^5}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{7} \frac{1}{n^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Cette technique fonctionne également avec les formes $\frac{\log}{\log}$ et $\frac{\exp}{\exp}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 \ln^2(n) + 7 \ln(n)}{7 \ln^9(n) + 8 \ln^5(n)} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2(n)}{\ln^9(n)} \left(\frac{4 + \frac{7}{\ln n}}{7 + \frac{8}{\ln^4(n)}} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln^7(n)} \left(\frac{\overbrace{4 + \frac{7}{\ln n}}^{\rightarrow 4}}{\underbrace{7 + \frac{8}{\ln^4(n)}}_{\rightarrow 7}} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Attention ! ne pas confondre $\ln^2(n) = (\ln n)^2 \neq \ln(n^2) = 2 \ln n$

Cette méthode des croissances comparées permet de calculer des formes indéterminées compliquées :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n + \ln^2(n^4) + 1/n}{-n^4 + \ln n^3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{n3^n + 4n \ln^2(n) + 1}{n}}{-n^4 + 3 \ln n} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n3^n}{n^4} \frac{1 + \frac{4 \ln^2 n}{3^n} + \frac{1}{n3^n}}{-1 + \frac{3 \ln n}{n^4}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{n^3} \frac{\overbrace{1 + \frac{4 \ln^2 n}{3^n} + \frac{1}{n3^n}}^{\rightarrow 1}}{\underbrace{-1 + \frac{3 \ln n}{n^4}}_{\rightarrow -1}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3^n}{n^3} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$