Complément

R3.08 Probabilité

Th. Godin & Anthony Ridard

Faible incidence et tests successifs

L'objectif de ce complément est de mettre en lumière l'importance de l'incidence [1] dans les calculs Bayésiens.

On se place dans un cadre médical où l'on cherche à tester des patients pour une maladie M.

Notons les événements
- $P =$ "le test est positif"
- $M =$ "le patient est malade"

On considère un test dont on fixe la sensibilité (c'est-à-dire la probabilité que le test soit positif sachant que le patient est malade, *i.e.* $\mathbb{P}(P|M)$) à 95% ; et la spécificité (c'est-à-dire la probabilité que le test soit positif sachant que le patient n'est pas malade, *i.e.* $\mathbb{P}(P|\bar{M})$) à 1%.

On va traiter deux exemples : le cas d'une maladie commune (à forte incidence) et le cas d'une maladie rare (à faible incidence)

Pour le patient (et le personnel médical), deux questions sont importantes :

- Si le test est positif, suis-je vraiment malade [2] ? $\mathbb{P}(M|P)$
- Si le test est négatif, puis-je être vraiment malade [3] ? $\mathbb{P}(M|\bar{P})$

D'après la formule de Bayes on a

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(P|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})}$$

et

$$\mathbb{P}(M|\bar{P}) = \frac{\mathbb{P}(\bar{P}|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\bar{P})} = \frac{\mathbb{P}(\bar{P}|M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(\bar{P}|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(\bar{P}|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})}$$

Forte incidence : Supposons que $\mathbb{P}(M) = 10\%$

Alors on a

$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{0,99.0,1}{0,99.0,1 + 0,01.0,9} \approx 91,67\%$$

et

$$\mathbb{P}(M|\bar{P}) = \frac{0,01.0,1}{0,01.0,1 + 0,99.0,9} \approx 0,11\%$$

On a donc un test paraissant (naïvement) très satisfaisant.

---

1. C'est-à-dire de la probabilité de l'événement que l'on cherche à prédire, dans notre exemple la maladie.
2. Si le patient n'est pas malade alors que le test est positif, on parle de *faux positif*
3. Si le patient est malade alors que le test est négatif, on parle de *faux négatif*

Faible incidence : Supposons que $\mathbb{P}(M) = 0,1\%$

Alors on a
$$\mathbb{P}(M|P) = \frac{0,99.0,001}{0,99.0,001 + 0,01.0,999} \approx 9,02\%$$
et
$$\mathbb{P}(M|\bar{P}) = \frac{0,01.0,001}{0,01.0,001 + 0,99.0,999} \approx 0,001\%$$

On a alors un résultat qui paraît plus contrasté : on a presque aucun faux négatif, mais seulement 10% de chance d'être réellement malade !
Ce résultat est normal, et bien pris en compte dans les campagnes de depistages. On peut facilement contourner le problème, en faisant un deuxième test (que l'on supposera indépendant du premier bien sûr).

On refait les calculs (avec un test de même sensibilité et sensibilité) en notant P_2 l'événement "être positif au deuxième test". La remarque clef va être que le patient n'est plus dans la population générale : il est positif au premier test, on a donc $P(M|P_1) = 9\%$, alors on a :

$$\mathbb{P}(M|P_1 \cap P_2) = \frac{\mathbb{P}(P_2|M \cap P_1)\mathbb{P}(M|P_1)}{\mathbb{P}(P_2)} = \frac{\mathbb{P}(P_2|M \cap P_1)\mathbb{P}(M|P_1)}{\mathbb{P}(P_2|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P_2|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})}$$

Par indépendance entre les deux tests $\mathbb{P}(P_2|M \cap P_1) = \mathbb{P}(P_2|M)$, donc

$$\mathbb{P}(M|P_1 \cap P_2) = \frac{\mathbb{P}(P_2|M)\mathbb{P}(M|P_1)}{\mathbb{P}(P_2)} = \frac{\mathbb{P}(P_2|M)\mathbb{P}(M|P_1)}{\mathbb{P}(P_2|M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(P_2|\bar{M})\mathbb{P}(\bar{M})}$$

On se retrouve donc très proche du cas précédent, avec une incidence à $9\% \approx 10\%$.

On a
$$\mathbb{P}(M|P_1 \cap P_2) = \frac{0,99.0,0902}{0,99.0,0902 + 0,01.0,9098} \approx 90.75\%$$

(de manière moins intéressant, on a $\mathbb{P}(M|\bar{P}_2 \cap P_1) \approx 0,10\%$)

En conclusion, l'efficacité d'un test est toujours à mettre en regard avec l'incidence globale de l'événement mesuré ; et en cas de faible incidence, il peut être nécessaire de mettre en place des précautions (par exemple si le traitement comporte des risques), par exemple en procédant à un deuxième (troisième, quatrième) test.