R2.09 exercice supplémentaire

Étude de $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 6} \end{cases}$

⓪ Tracer cette suite sur Python

① Montrer par Récurrence que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 6$

② En déduire que (u_n) est convergente.
Donner sa limite en utilisant le théorème du point fixe

③ Retrouver le résultat de ② en posant $v_n = u_n^2 - 12$
et en montrant que v_n est une suite géométrique

---

① a) Montrons que $u_n \geq 0$
par récurrence

<u>init</u> $u_0 = 1 \geq 0$ ok

<u>hérédité</u> soit $n \geq 0$
on suppose que $u_n \geq 0$
montrons $u_{n+1} \geq 0$

$$u_{n+1} \overset{(def)}{=} \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 6} \overset{(HR)}{\geq} \sqrt{\frac{1}{2}\cdot(0)^2 + 6}$$

$$\geq \sqrt{6} \geq 0$$

Ainsi, par récurrence, on a montré que $u_n \geq 0$

b) Montrons que $u_n \leq 6$

par récurrence

<u>init</u> $u_0 = 1 \leq 6$ ok

<u>hérédité</u> soit $n \geq 0$, supposons $u_n \leq 6$, montrons $u_{n+1} \leq 6$

$$u_{n+1} \overset{(\text{def})}{=} \sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 6} \underset{(\text{HR})}{\leq} \sqrt{\frac{1}{2}(6)^2 + 6}$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2} \times 36 + 6}$$

$$\leq \sqrt{24} \leq \sqrt{36} = 6$$

Ainsi, par recurrence, $u_n \leq 6$

c) Montrons que $u_n \leq u_{n+1}$ (ie $(u_n) \nearrow$)

par recurrence

<u>init</u> : $u_0 = 1 \leq \sqrt{\frac{1}{2} + 6} = \sqrt{7} = u_1$

<u>hérédité</u> soit $n \geq 0$; supposons que $u_n \leq u_{n+1}$

montrons $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

par hypothèse de recurrence $u_n \leq u_{n+1}$

comme $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $u_n, u_{n+1} \geq 0$ $u_n^2 \leq u_{n+1}^2$

donc $\frac{1}{2}u_n^2 + 6 \leq \frac{1}{2}u_{n+1}^2 + 6$

comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ $\sqrt{\frac{1}{2}u_n^2 + 6} \leq \sqrt{\frac{1}{2}u_{n+1}^2 + 6}$

soit, par definition de u_n $u_{n+1} \leq u_{n+2}$

donc, par recurrence $u_n \leq u_{n+1}$

② ⓐ montrons que (u_n) est convergente

On va utiliser le théorème de croissance monotone

• (u_n) est croissante (1.c) • u_n est majorée (1.b)

D'après le théorème de croissance monotone, (u_n) est convergente

et $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = \ell \leq 6$

ⓑ On remarque que (u_n) est définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{avec} \quad f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\frac{1}{2}x^2 + 6} \end{array}$$

D'après le théorème du point fixe, si (u_n) converge vers ℓ alors ℓ satisfait l'équation $\ell = f(\ell)$

soit $\ell = \sqrt{\frac{1}{2}\ell^2 + 6}$. Déterminons ℓ

donc $\ell^2 = \frac{1}{2}\ell^2 + 6$

soit $\frac{1}{2}\ell^2 = 6$ donc $\ell = \pm\sqrt{12}$

Comme $u_n \geq 0$, la seule limite possible est $\sqrt{12}$

Ainsi, d'après 2a (u_n) est convergente et donc

$$\lim_{n \to \infty} u_n = \sqrt{12}$$

3) Posons $V_n = u_n^2 - 12$

Montrons que (v_n) est une suite géométrique, c'est-à-dire que $V_{n+1} = q\,V_n$ pour un certain q (indépendant de n)

$$V_{n+1} \overset{(\text{def } v_n)}{=} (u_{n+1})^2 - 12 \overset{(\text{def } u_n)}{=} \left(\sqrt{\tfrac{1}{2}u_n^2 + 6}\right)^2 - 12$$

$$= \frac{1}{2}u_n^2 + 6 - 12$$

$$= \frac{1}{2}u_n^2 - 6 = \frac{1}{2}(u_n^2 - 12)$$

$$= \frac{1}{2} V_n$$

Donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$

On peut donner V_n sous forme explicite :

$$V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n V_0 = (-11) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Comme $-1 < q < 1$, la suite (v_n) converge vers 0

donc $\lim V_n = 0 = \lim u_n^2 - 12$

donc $\lim u_n^2 = 12$

Comme u_n est convergente (d'après 2.a)

$\lim u_n = \sqrt{12}$