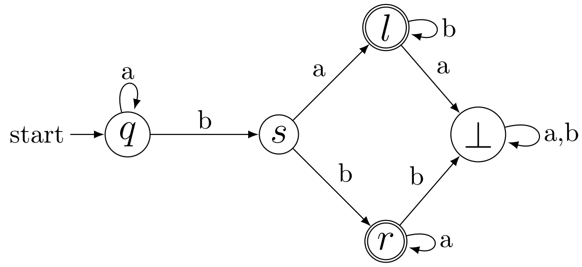
R4.A.12 – Automates et Langages

TD 3 : langages reconnaissables et automates

Les exercices ou questions marqués d'une ou plusieurs étoiles sont plus difficiles et/ou théoriques et peuvent être omis. Cependant ils sont intéressants pour l'étudiant·e souhaitant aller plus loin et restent faisables au niveau IUT.

Exercice 1 : (Échauffement)

Soit $\mathcal{A}$ l'automate suivant :



1. Donnez la représentation de l'automate ci-dessus sous forme de matrice de transitions.
2. Que fait l'automate pour les mots $\{\varepsilon, aa, ababb, abbaabb\}$?
3. Pour tous les mots de longueur < 4, indiquez s'ils sont acceptés ou refusés par l'automate.
4. Montrez que $L(A)$ est de cardinal infini. Que pouvez-vous dire du cardinal de $\overline{L(A)}$?
5. Dénotez sous la forme d'une expression régulière $L(A)$.
6. Dénotez avec une expression régulière $L(A) \cup a^*$ puis $L(A) \setminus a^*b^*$.

Exercice 2 : (grep)
Nous considérons des Automates Finis Déterministes complets sur l'alphabet $\{I, T, U\}$.

1. Construire un automate reconnaissant le mot IUT
2. Construire un automate reconnaissant les mots contenant toutes les lettres de l'alphabet.
3. Construire un automate reconnaissant les mots ne contenant pas la lettre I.
4. Construire un automate reconnaissant tous les mots contenant le sous-mot IUT
5. Construire un automate reconnaissant tous les mots contenant le sous-mot TUT
6. Construire un automate reconnaissant tous les mots contenant le sous-mot TTI

Exercice 3 :

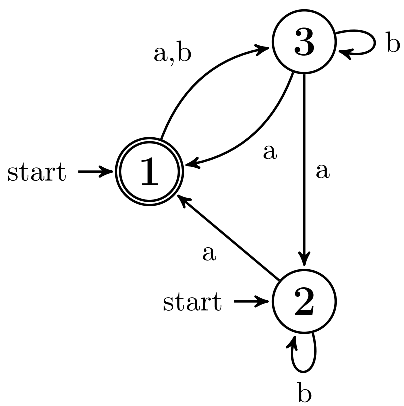
Soit $A = (Q, \Sigma, \delta, i_0, F)$ l'automate défini par : $Q = \{1, 2, 3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $i_0 = 1$, $F = \{3\}$, $\delta(1, a) = 2$, $\delta(1, b) = 1$, $\delta(2, a) = 2$, $\delta(2, b) = 3$, $\delta(3, a) = 3$ et $\delta(3, b) = 3$.

1. Donner la table et le graphe de transition de A.
2. Les mots $bbabb$, $aabaa$, $bbaaa$ appartiennent-ils au langage $L(A)$?
3. Donner tous les mots de $L(A)$ de longueur inférieure ou égale à 3.
4. Déterminer le cardinal de $L(A)$ et de son complémentaire.

Exercice 4 : (petits langages) Trouver un DFA reconnaissant les langages suivants :

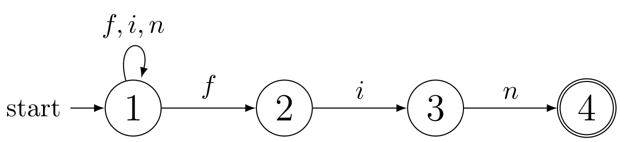
1. les langages dénotés par les expressions régulières : $\varepsilon, a, a^*, a^+, ba^*, (ab)^*, b^*a^*, b^*a^*b, (baa^*|b^*a)$.
2. les nombres entiers pairs en représentation binaire
3. sur $\Sigma = \{a, b\}$ tous les mots commençant par b et se terminant par b.
4. les nombres binaires multiples de 4
5. les nombres binaires comportant un nombre pair de 0 et un nombre pair de 1
6. les nombres impairs en représentation binaire sans 0 non significatifs à gauche.
7. les nombres entiers plus grands que 5 en représentation binaire sans 0 non significatifs à gauche
8. sur $\Sigma = \{a, b\}$ tous les mots contenant au moins la chaîne aab ou (non exclusif) la chaîne $aaab$.
9. sur $\Sigma = \{a, b\}$tous les mots qui ne sont pas dans $(abb^*)^*$.
10. sur $\Sigma = \{a, b\}$ tous les mots qui ont au moins deux a et au plus un b.

Exercice 5 : (NFA)



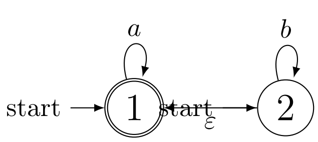
1. Identifier toutes les causes de non-déterminisme.
2. Donnez sa représentation mathématique.
3. Donnez sa représentation sous forme matrice de transitions.
4. Donnez tous les mots de longueur < 4 acceptés et refusés par l'automate.
5. Étudiez le cardinal de $L(A)$ et de $\overline{L(A)}$.
6. En usant de l'algorithme vu en cours, donnez un automate fini déterministe reconnaissant le même langage.

Exercice 6 : (NFA II)



1. Identifiez les sources de non déterminisme.
2. Donnez sa représentation mathématique et sa matrice de transitions.
3. Quel est le langage reconnu par cet automate ?
4. Trouvez un DFA reconnaissant le même langage.

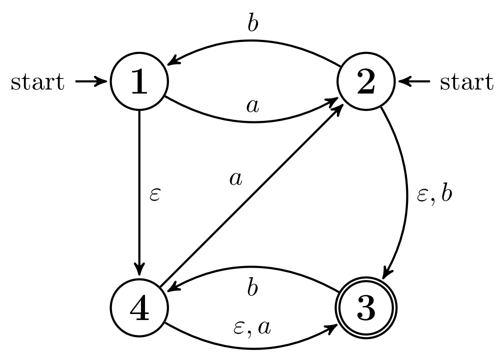
Exercice 7 : (ε-NFA)



1. Identifiez les sources de non déterminisme.

2. Donnez sa représentation mathématique et sa matrice de transitions.
3. Quel est le langage reconnu par cet automate ?
4. Trouvez un DFA reconnaissant le même langage.

Exercice 8 : (ε-NFA)



1. Quelles sont toutes les sources de non déterminisme dans cet automate ?
2. Donnez sa définition mathématique.
3. Montrez que $L(A) \neq \emptyset$ et $\overline{L(A)} \neq \emptyset$
4. Étudiez la cardinalité de $L(A)$ et $\overline{L(A)}$
5. Calculez la clôture de chaque état.
6. En usant des clôtures et de l'algorithme vu en cours déduire un AFD équivalent

Exercice 9 : *(Miroir) Donner la construction, qui, à partir d'un automate reconnaissant un langage L, calcul un automate reconnaissant le miroir de L.

Exercice 10 : (Thompson)

1. En utilisant la méthode de Thompson, proposez un ε-NFA reconnaissant chacune des expressions régulières qui suivent :
   (a) ab
   (b) $abc|ca$
   (c) ba^*b
   (d) $(ab)^*a|ca$
   (e) $((ab^*|c)^*a)|(ab(b|ac)^*)$
2. Montrez que les automates obtenus à la question précédente peuvent être un peu simplifiés sans beaucoup d'effort.

Exercice 11 : (Thompson & Rabin–Scott)

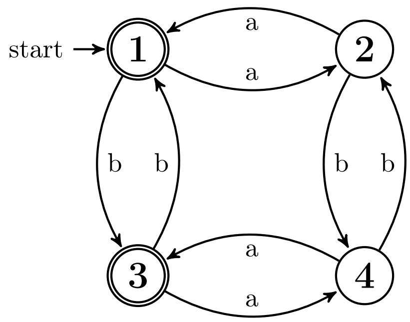
Donnez un ε-NFA reconnaissant le langage décrit par l'expression régulière $(ab)^*|aab^*c|a^*$. Determinisez l'automate obtenu et proposez un DFA complet reconnaissant ce langage.

Exercice 12 : (Brzozowski–McCluskey)

À l'aide de l'algorithme de Brzowoski–McKuskley, (re)donner les langages reconnus par les automates dessinés sur cette feuille de TD.

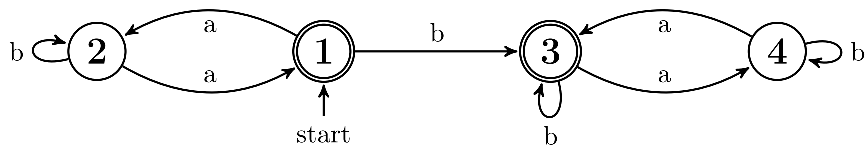
Exercice 13 : *(Moore)

1. Soit l'automate A donné par :



   Minimiser l'automate à l'aide de l'algorithme de Moore

2. Soit B l'automate :



   Minimiser l'automate à l'aide de l'algorithme de Moore

3. Que peut-on en conclure quant aux langages reconnus par ces deux automates ?