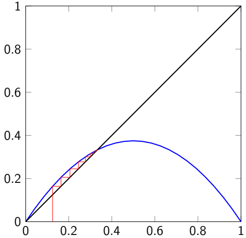
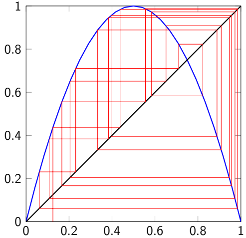
R2.09 Méthodes Numériques

Thibault Godin, Lucie Naert, Anthony Ridard
IUT de Vannes Informatique

On va étudier les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.



$\mu = \frac{3}{2}$



$\mu = 4$

La question principale est "que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on connaît f".

Par exemple on a vu que $\lim u_n = \ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$ (on dit que ℓ est un point fixe de la fonction ℓ).

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$

$\rightsquigarrow$ on voit $\sqrt{A}$ est un point fixe de $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x + \frac{A}{x}}{2} \end{array}$

Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leq M$ alors
$\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq M|x - y|$

Montrer l'inégalité des accroissements finis (en utilisant l'égalité des accroissements finis)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $k > 0$. f est dite k-lipschitzienne sur I, si

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(|f\,(x) - f\,(y)| \leq k\,|x - y|)$$

Un application k-lipschitzienne avec $k < 1$ est dite *contractante*

(un) Théorème du point fixe

Soit $f : [a; b] \to [a; b]$ une fonction vérifiant, pour tout $x \in [a; b]$ et tout $y \in [a; b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ avec } \boxed{0 < L < 1}$$

Alors, la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a; b] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers l'unique solution $\overline{x}$ de l'équation $x = f(x)$

✎ Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est contractante sur $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$. En déduire la convergence de la suite $u_0 = -\frac{1}{4}; u_{n+1} = u_n^2$.

Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors f est bornée et atteint ses bornés

traduction : l'image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue est inclue dans un intervalle $[y, z]$ et il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = y$ et $f(d) = z$.

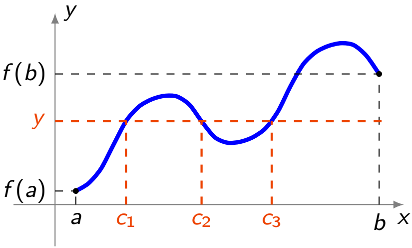
en général, il n'y a pas de raison que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

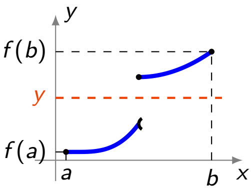
Donner un exemple de fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée n'atteignant pas ses bornes

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Il n'y a aucune raison que c soit unique.

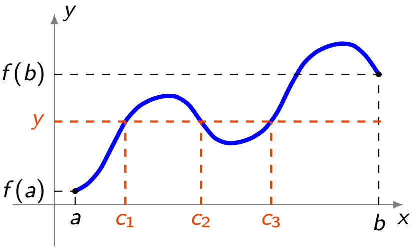


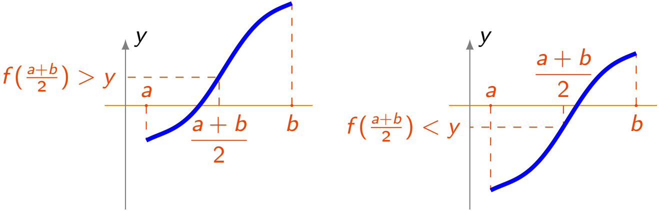


Donner un exemple de fonction non continue qui satisfait les conclusions du théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors

1. f établit une bijection de l'intervalle I dans l'image $J = f(I)$,
2. la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.





Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

- Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

On donne une approximation de c en réduisant l'intervalle à chaque fois :

Algorithm 1: Dichotomie

Input: f, a, b,y, ε

Output: approximation de y

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

while $|f(c) - y| > \varepsilon$ **do**

  if $f(c) < y$ **then**

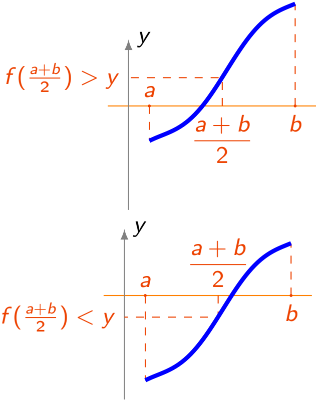
    $a \leftarrow c$

  else

    $b \leftarrow c$

  $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

return c



Pas besoin de monotonie !

Vitesses de convergence

$c_0 = \frac{b-a}{2}; c_{n+1} = \left|\frac{b_n-a_n}{2}\right| \rightsquigarrow |c_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$

On a la garantie théorique que la méthode converge. On souhaite maintenant comparer les vitesses de convergence

$\lim \left|\frac{c_n-c}{c_{n-1}-c}\right| = \lim \left|\frac{err(n)}{err(n-1)}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$

On dit que la convergence est *linéaire*

$\lim \left|\frac{err(n)}{err(n-1)^\alpha}\right| \leq q \ (\alpha > 1)$; on dit que la convergence est *d'ordre* α.

remarque : si la méthode est d'ordre α, le nombre de chiffres significatifs corrects est à chaque étape augmenté d'une constante et multiplié par α.

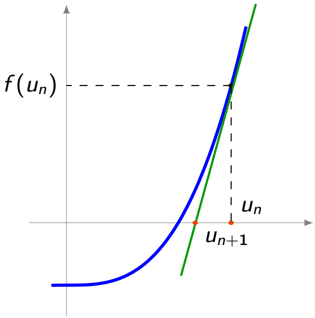
Et en 2D ? $\rightsquigarrow$ `https://www.youtube.com/watch?v=b7FxPsqfkOY`

Méthode de Newton

On essaie de trouver une meilleure méthode pour trouver les **racines** d'une fonctions :

remarque : couper au milieu n'est pas forcément la meilleure solution !

idée suivre la pente $f'(x_0)$ jusqu'à croiser l'abscisse

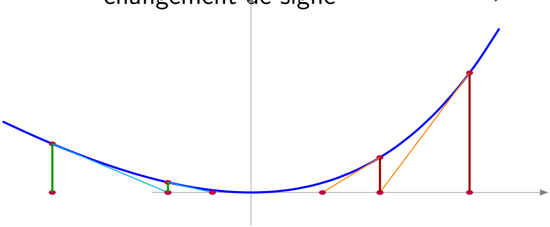


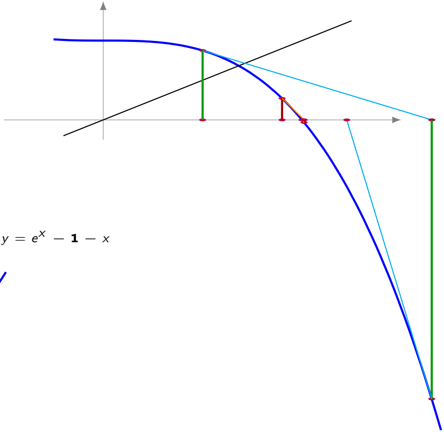
On part de la droite
$y = f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$
d'où $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Avantage/inconvénients

Méthode de Newton

- \+ convergence d'ordre 2
- \- convergence non-garantie
- \- calculs de dérivée
- \+ pas obligé d'avoir un changement de signe





Méthode de Newton

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction tels que :

- f est dérivable et sa dérivée est continue
- $f(a)\, f(b) < 0$ (cad que l'équation f(x) = 0 a une solution dans [a,b]).
- Pour tout $x \in [a;b]$, $f'(x) \neq 0$ (c'est à dire que f' a un signe constant)

Alors,

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$ converge vers l'unique solution ℓ de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a;b]$

- en posant : $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, *et* $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, on prend $u_0 \in$ [a,b] tel que $\frac{M}{m}|u_0 - \ell| < 1$.

On a $|u_n - \ell| < \frac{m}{M} \left(\frac{M}{m}|u_0 - \ell|\right)^{2^n}$.

Attention : ce sont des conditions *suffisantes* pour la convergence, mais pas *nécessaires*.

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

- choix d'une fonction f tq $f(\sqrt{2}) = 0$

$f(x) = x - \sqrt{2}$

$f(x) = x^2 - 2$

Méthode de Newton & Héron

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$ *Et comment a-t-on créé cette suite ?*

Prenons $f(x) = x^2 - A$. Clairement $\sqrt{A}$ est une racine de f et f' est continue.

$f'(x) = 2x$. On applique la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\mathbf{2}} - A}{2x_n} = \frac{x_n^{\mathbf{2}} + A}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}$

La méthode de Héron est un cas particulier de la méthode de Newton. C'est donc une méthode d'ordre 2 pour trouver une racine carrée