R3.08 Probabilités

Thibault Godin
IUT de Vannes Informatique

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

1. `http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf`

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

1. `http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf`

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

- transfert d'information dans un réseau
  $\rightsquigarrow$ perte d'information, routage ...

1. http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

- transfert d'information dans un réseau
  $\rightsquigarrow$ perte d'information, routage ...
- dimensionnement raisonnable de paramètres, tests réalistes

1. http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

- transfert d'information dans un réseau
  $\rightsquigarrow$ perte d'information, routage ...
- dimensionnement raisonnable de paramètres, tests réalistes
- optimisation compilateur/processeur [1]

1. `http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf`

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

- transfert d'information dans un réseau
  $\rightsquigarrow$ perte d'information, routage ...
- dimensionnement raisonnable de paramètres, tests réalistes
- optimisation compilateur/processeur [1]
- cryptographie et fonction de hashage

1. http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

- transfert d'information dans un réseau
  $\rightsquigarrow$ perte d'information, routage ...
- dimensionnement raisonnable de paramètres, tests réalistes
- optimisation compilateur/processeur [1]
- cryptographie et fonction de hashage
- algorithmes probabiliste, IA et big-data

1. http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

- transfert d'information dans un réseau
  $\rightsquigarrow$ perte d'information, routage ...
- dimensionnement raisonnable de paramètres, tests réalistes
- optimisation compilateur/processeur [1]
- cryptographie et fonction de hashage
- algorithmes probabiliste, IA et big-data

1. http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf

But du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation, ainsi qu'à la résolution efficace de problèmes informatiques

- transfert d'information dans un réseau
  $\rightsquigarrow$ perte d'information, routage ...
- dimensionnement raisonnable de paramètres, tests réalistes
- optimisation compilateur/processeur [1]
- cryptographie et fonction de hashage
- algorithmes probabiliste, IA et big-data

Ces notes sont (très) fortement inspirées du cours d'Anthony Ridard (merci à lui). Une source intéressante pour compléter l'étude est `https://courses.csail.mit.edu/6.042/spring18/mcs.pdf` dont le cours s'inspire également..

1. `http://www-igm.univ-mlv.fr/~nicaud/articles/stacs16.pdf`

Plan du cours

Probabilités

Probabilités conditionnelles et indépendance

Problème de Monty Hall (Let's make a deal)

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur).
Ce joueur est placé devant trois portes fermées.
Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (ou tout autre prix magnifique) et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre (ou tout autre prix sans importance).
Il doit tout d'abord désigner une porte.
Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début).
Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Problème de Monty Hall (Let's make a deal)

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur).
Ce joueur est placé devant trois portes fermées.
Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (ou tout autre prix magnifique) et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre (ou tout autre prix sans importance).
Il doit tout d'abord désigner une porte.
Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début).
Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Que doit faire le candidat ? Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

Problème de Monty Hall (Let's make a deal)

Le jeu oppose un présentateur à un candidat (le joueur).
Ce joueur est placé devant trois portes fermées.
Derrière l'une d'elles se trouve une voiture (ou tout autre prix magnifique) et derrière chacune des deux autres se trouve une chèvre (ou tout autre prix sans importance).
Il doit tout d'abord désigner une porte.
Puis le présentateur doit ouvrir une porte qui n'est ni celle choisie par le candidat, ni celle cachant la voiture (le présentateur sait quelle est la bonne porte dès le début).
Le candidat a alors le droit ou bien d'ouvrir la porte qu'il a choisie initialement, ou bien d'ouvrir la troisième porte.

Que doit faire le candidat ? Quelles sont ses chances de gagner la voiture en agissant au mieux ?

- Comment modéliser cette situation mathématiquement ?
- Comment résoudre le problème mathématique ?

On va chercher à répondre à la question :

"Quelle chance a le candidat de gagner s'il ne change pas de porte ?"

---

2. En opposition avec déterministe

On va chercher à répondre à la question :

"Quelle chance a le candidat de gagner s'il ne change pas de porte ?"

C'est une **expérience aléatoire** [2] lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance.

2. En opposition avec déterministe

On va chercher à répondre à la question :

"Quelle chance a le candidat de gagner s'il ne change pas de porte ?"

C'est une **expérience aléatoire**[2] lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance.
Une expérience aléatoire est souvent constitué de sous-expériences aléatoires, ici :

- La porte derrière laquelle se trouve la voiture (A,B ou C)
- La porte choisie par le candidat (A,B ou C)
- La porte ouverte par le présentateur (A,B ou C), en évitant la porte de la voiture et du candidat.

2. En opposition avec déterministe

On va chercher à répondre à la question :

"Quelle chance a le candidat de gagner s'il ne change pas de porte ?"

C'est une **expérience aléatoire**[2] lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance.
Une expérience aléatoire est souvent constitué de sous-expériences aléatoires, ici :

- La porte derrière laquelle se trouve la voiture (A,B ou C)
- La porte choisie par le candidat (A,B ou C)
- La porte ouverte par le présentateur (A,B ou C), en évitant la porte de la voiture et du candidat.

Le *résultat* (ou issue) de l'expérience est donc un triplet $(Porte1, Porte2, Porte3)$

2. En opposition avec déterministe

On va chercher à répondre à la question :

"Quelle chance a le candidat de gagner s'il ne change pas de porte ?"

C'est une **expérience aléatoire**[2] lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance.
Une expérience aléatoire est souvent constitué de sous-expériences aléatoires, ici :

- La porte derrière laquelle se trouve la voiture (A,B ou C)
- La porte choisie par le candidat (A,B ou C)
- La porte ouverte par le présentateur (A,B ou C), en évitant la porte de la voiture et du candidat.

Le *résultat* (ou issue) de l'expérience est donc un triplet $(Porte1, Porte2, Porte3)$

On note alors Ω l'ensemble des résultats possibles, appelé **univers**.
Pour le problème de Monty Hall, l'univers est donc

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (A,A,B),(A,A,C),(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,B,A), \\ (B,B,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A),(C,C,A),(C,C,B) \end{array} \right\}$$

2. En opposition avec déterministe

On va chercher à répondre à la question :

"Quelle chance a le candidat de gagner s'il ne change pas de porte ?"

C'est une **expérience aléatoire** [2] lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance.
Une expérience aléatoire est souvent constitué de sous-expériences aléatoires, ici :

- La porte derrière laquelle se trouve la voiture (A,B ou C)
- La porte choisie par le candidat (A,B ou C)
- La porte ouverte par le présentateur (A,B ou C), en évitant la porte de la voiture et du candidat.

Le *résultat* (ou issue) de l'expérience est donc un triplet $(Porte1, Porte2, Porte3)$

On note alors Ω l'ensemble des résultats possibles, appelé **univers**.
Pour le problème de Monty Hall, l'univers est donc

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (A,A,B),(A,A,C),(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,B,A), \\ (B,B,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A),(C,C,A),(C,C,B) \end{array} \right\}$$

Un ensemble de réalisation est appelé **événement**. Par exemple :

$$[\text{la voiture est derrière la porte } A] = \left\{ \ (A,A,B),(A,A,C),(A,B,C),(A,C,B) \ \right\}$$

2. En opposition avec déterministe

On va chercher à répondre à la question :

"Quelle chance a le candidat de gagner s'il ne change pas de porte ?"

C'est une **expérience aléatoire** [2] lorsque son résultat n'est pas connu à l'avance.
Une expérience aléatoire est souvent constitué de sous-expériences aléatoires, ici :

- La porte derrière laquelle se trouve la voiture (A,B ou C)
- La porte choisie par le candidat (A,B ou C)
- La porte ouverte par le présentateur (A,B ou C), en évitant la porte de la voiture et du candidat.

Le *résultat* (ou issue) de l'expérience est donc un triplet $(Porte1, Porte2, Porte3)$

On note alors Ω l'ensemble des résultats possibles, appelé **univers**.
Pour le problème de Monty Hall, l'univers est donc

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (A,A,B),(A,A,C),(A,B,C),(A,C,B),(B,A,C),(B,B,A), \\ (B,B,C),(B,C,A),(C,A,B),(C,B,A),(C,C,A),(C,C,B) \end{array} \right\}$$

Un ensemble de réalisation est appelé **événement**. Par exemple :

$$[\text{la voiture est derrière la porte } A] = \left\{ \; (A,A,B),(A,A,C),(A,B,C),(A,C,B) \; \right\}$$

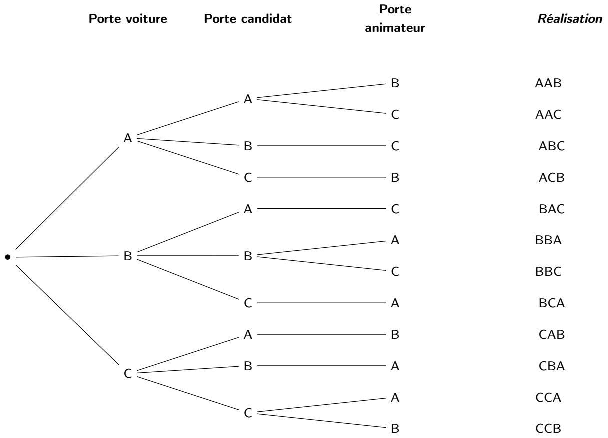
ou

$$[\text{Le candidat gagne (sans changer de porte)}] = \left\{ \begin{array}{l} (A,A,B),(A,A,C),(B,B,A), \\ (B,B,C),(C,C,A),(C,C,B) \end{array} \right\}$$

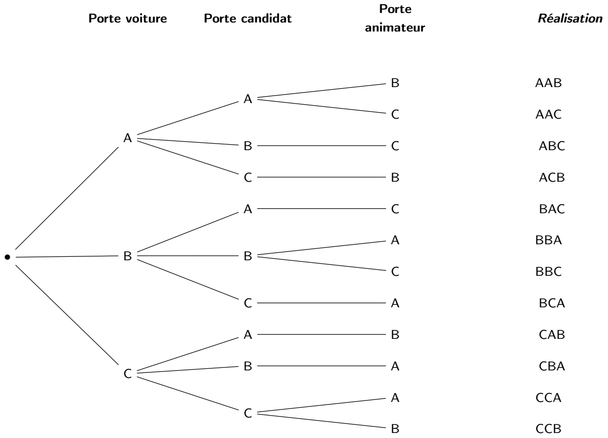
---

2. En opposition avec déterministe

On représente souvent les expériences aléatoires (simples) par un arbre de décision

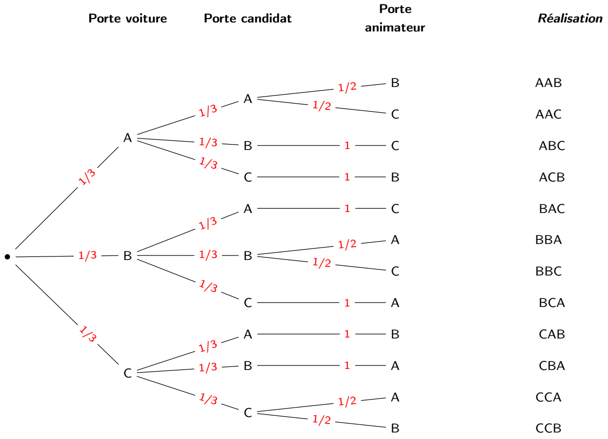


On représente souvent les expériences aléatoires (simples) par un arbre de décision
Il ne reste plus qu'à calculer les probabilités :



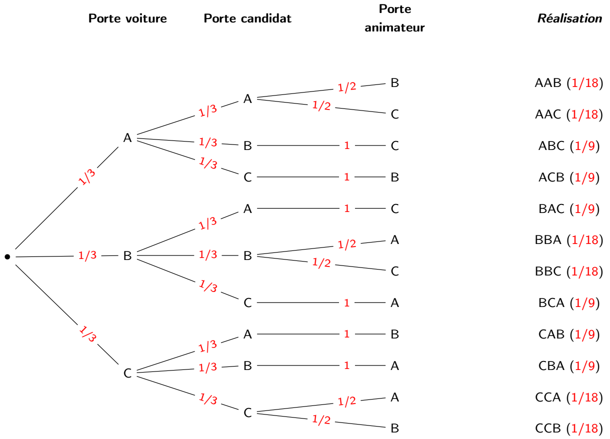
On représente souvent les expériences aléatoires (simples) par un arbre de décision

Il ne reste plus qu'à calculer les probabilités :



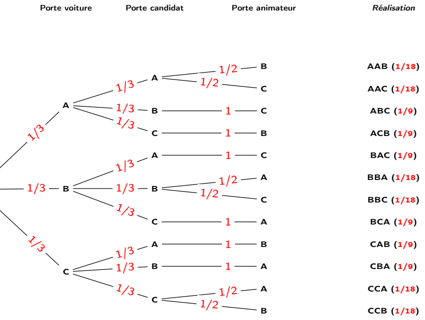
On représente souvent les expériences aléatoires (simples) par un arbre de décision

Il ne reste plus qu'à calculer les probabilités :



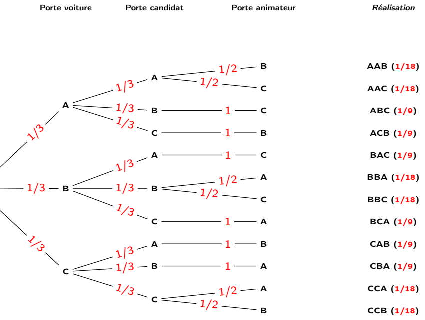
Essayons de formaliser

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}([\textbf{gagner sans changer}]) &= \mathbb{P}(\{(A,A,B),(A,A,C),(B,B,A),(B,B,C),(C,C,A),(C,C,B)\}) \\
&= \mathbb{P}(\{(A,A,B)\}) + \mathbb{P}(\{(A,A,C)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,A)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,C)\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{(C,C,A)\}) + \mathbb{P}(\{(C,C,B)\}) \\
&= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A) \\
&\quad + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(B) \\
&= \mathbf{\frac{1}{3}} \times \mathbf{\frac{1}{3}} \times \mathbf{1} + \mathbf{\frac{1}{3}} \times \mathbf{\frac{1}{3}} \times \mathbf{1} + \mathbf{\frac{1}{3}} \times \mathbf{\frac{1}{3}} \times \mathbf{1} \\
&= \mathbf{\frac{3}{9}} = \mathbf{\frac{1}{3}}
\end{aligned}
$$



Essayons de formaliser

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}([\textbf{gagner sans changer}]) &= \mathbb{P}(\{(A,A,B),(A,A,C),(B,B,A),(B,B,C),(C,C,A),(C,C,B)\})\\
&= \mathbb{P}(\{(A,A,B)\}) + \mathbb{P}(\{(A,A,C)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,A)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,C)\})\\
&\quad + \mathbb{P}(\{(C,C,A)\}) + \mathbb{P}(\{(C,C,B)\})\\
&= \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(A)\\
&\quad + \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(B)\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1\\
&= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$



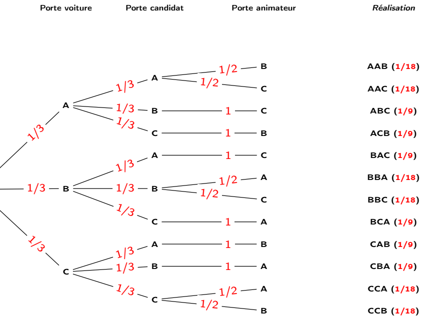
Wait !
What happened here ?

On vient de faire soudainement plein de calculs sans justification ! Suivre son intuition va vite être limité $\rightsquigarrow$ il nous faut des règles *claires*.

✓ **ligne 1 $\to$ ligne 2**

Essayons de formaliser

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}([\textbf{gagner sans changer}]) &= \mathbb{P}(\{(A,A,B),(A,A,C),(B,B,A),(B,B,C),(C,C,A),(C,C,B)\}) \\
&= \mathbb{P}(\{(A,A,B)\}) + \mathbb{P}(\{(A,A,C)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,A)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,C)\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{(C,C,A)\}) + \mathbb{P}(\{(C,C,B)\}) \\
&= \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(A) \\
&\quad + \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(B) \\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 \\
&= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$



Wait !
What happened here ?

On vient de faire soudainement plein de calculs sans justification ! Suivre son intuition va vite être limité $\rightsquigarrow$ il nous faut des règles *claires*.

- ✓ **ligne 1 $\longrightarrow$ ligne 2**
- ✓ **ligne 3 $\longrightarrow$ ligne 4**

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.
- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**. On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.
- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**. On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.
- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**. On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A
- Ω est l'**événement certain** et $\varnothing$ l'**événement impossible**

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.
- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**. On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A
- Ω est l'**événement certain** et $\varnothing$ l'**événement impossible**
- Deux **événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.
- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**. On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A
- Ω est l'**événement certain** et $\varnothing$ l'**événement impossible**
- Deux **événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
- Un **système complet d'événements** est une partition de Ω c'est à dire une famille[3] $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements :

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.
- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**. On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A
- Ω est l'**événement certain** et $\varnothing$ l'**événement impossible**
- Deux **événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
- Un **système complet d'événements** est une partition de Ω c'est à dire une famille[3] $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements :
  - possibles : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ A_i \neq \varnothing$

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.
- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**. On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A
- Ω est l'**événement certain** et $\varnothing$ l'**événement impossible**
- Deux **événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
- Un **système complet d'événements** est une partition de Ω c'est à dire une famille[3] $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements :
  - possibles : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ A_i \neq \varnothing$
  - incompatibles deux à deux : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

La théorie des probabilités s'appuie sur la théorie des ensembles mais sa terminologie est spécifique :

- On note Ω l'ensemble des résultats possibles – l'**univers**.
- L'ensemble des parties de Ω est notée $\mathcal{P}(\Omega)$ et ses éléments sont appelés des **événements**. On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est un **espace probabilisable**
- Si A est un événement, $\overline{A}$ est l'**événement contraire** de A
- Ω est l'**événement certain** et $\varnothing$ l'**événement impossible**
- Deux **événements** A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$
- Un **système complet d'événements** est une partition de Ω c'est à dire une famille [3] $(A_1, \ldots, A_n)$ d'événements :
  - possibles : $\forall i \in \{1, \ldots, n\},\ A_i \neq \varnothing$
  - incompatibles deux à deux : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$
  - décrivant tout l'univers : $\Omega = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$

On lance deux fois un dé 6

1. Décrire l'univers
2. Décrire l'événement "la somme des dés vaut 9"
3. Décrire l'événement "la somme des dés est paire"

3. En fait, la notion de famille est plus générale car elle autorise une infinité dénombrable d'événements, mais cela sort du cadre de ce cours

Probabilités

Notion de probabilité

Probabilités conditionnelles et indépendance

Notion de probabilité conditionnelle

Événements indépendants

Definition 1 (Probabilité)

Une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (additivité)

On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Definition 1 (Probabilité)

Une probabilité sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est une application $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ vérifiant :

- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- Si A et B sont des événements incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (additivité)

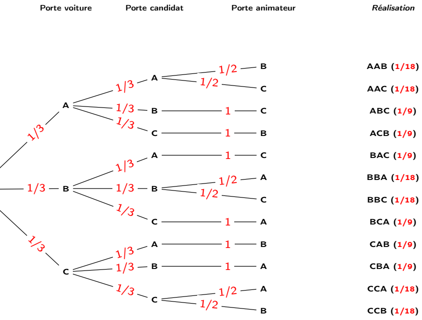
On dit alors que le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Propriétés élémentaires

- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
- Si A est un événement, alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Pour tout événement A et B, on a :
  - $A \subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$
  - $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements incompatibles deux à deux, alors $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Essayons de formaliser

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\textbf{gagner sans changer}]) &= \mathbb{P}(\{(A,A,B),(A,A,C),(B,B,A),(B,B,C),(C,C,A),(C,C,B)\})\\
&= \mathbb{P}(\{(A,A,B)\}) + \mathbb{P}(\{(A,A,C)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,A)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,C)\})\\
&\quad + \mathbb{P}(\{(C,C,A)\}) + \mathbb{P}(\{(C,C,B)\})\\
&= \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(A)\\
&\quad + \mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(B)\times\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(C)\times\mathbb{P}(B)\\
&= \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1 + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 1\\
&= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$



Wait !
What happened here ?

On vient de faire soudainement plein de calculs sans justification ! Suivre son intuition va vite être limité $\rightsquigarrow$ il nous faut des règles *claires*.

✓ **ligne 1 $\longrightarrow$ ligne 2**

✓ **ligne 3 $\longrightarrow$ ligne 4**

Probabilité élémentaire : cardinal et dénombrement

Definition 2 (Probabilité uniforme)

On appelle probabilité uniforme l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \end{array}$$

Definition 2 (Probabilité uniforme)

On appelle probabilité uniforme l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}: & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \end{array}$$

Il existe d'autres probabilités

La probabilité uniforme est utilisée uniquement lorsque tous les résultats possibles sont équiprobables. C'est souvent une hypothèse de la modélisation.

Probabilité élémentaire : cardinal et dénombrement

Definition 2 (Probabilité uniforme)

On appelle probabilité uniforme l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P} : & \mathcal{P}(\Omega) & \rightarrow & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \end{array}$$

Il existe d'autres probabilités

La probabilité uniforme est utilisée uniquement lorsque tous les résultats possibles sont équiprobables. C'est souvent une hypothèse de la modélisation.

On lance deux fois un dé 6 *équilibré*

1. Peut-on dire que la probabilité est uniforme ?
2. Calculer la proba. de l'événement "le premier dé vaut 3 et le deuxième 6"
3. Calculer la proba. de l'événement "la somme des dés vaut 9"
4. Calculer la proba. l'événement "la somme des dés est paire"

Probabilités élémentaires : combinatoire et dénombrement I

Probabilité uniforme : $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \rightsquigarrow$ calcul de Card (A) ?

Factorielle : $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

Probabilités élémentaires : combinatoire et dénombrement I

Probabilité uniforme : $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \rightsquigarrow$ calcul de Card (A) ?

Factorielle : $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

Lemme : permutations

Si on a n objet, il y a $n!$ façons possibles de les ordonner (ranger).

Probabilités élémentaires : combinatoire et dénombrement I

Probabilité uniforme : $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \rightsquigarrow$ calcul de Card (A) ?

Factorielle : $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

Lemme : permutations

Si on a n objet, il y a $n!$ façons possibles de les ordonner (ranger).

Arrangement : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ Combinaison : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Probabilités élémentaires : combinatoire et dénombrement I

Probabilité uniforme : $\mathbb{P}(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} \rightsquigarrow$ calcul de Card (A) ?

Factorielle : $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$

Lemme : permutations

Si on a n objet, il y a $n!$ façons possibles de les ordonner (ranger).

Arrangement : $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ Combinaison : $C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Prendre p objets parmi n	Echantillon ordonné	Echantillon non ordonné
sans répétition	A_n^p	C_m^p
avec répétition	n^p	C_{p+n-1}^p

Placer n objets dans m cases	Objets discernables	Objets non discernables
un objet par case	A_m^n	C_m^n
sans limitation du nombre d'objets par case	m^n	C_{m+n-1}^n

PSWD

Pour accéder à un service sur Internet, vous devez taper un mot de passe de 4 lettres choisies dans l'alphabet latin majuscule (26 caractères).

- Combien de mots de passe de 4 lettres peut-on créer ?
- Combien de mots de passe de 4 lettres distinctes peut-on créer ?

An dro

L'*an dro* (en breton standard) ou *en dro* (en breton vannetais) nom signifiant : « le tour » ou « la ronde », est une danse bretonne originaire du pays vannetais

L'an dro se danse en ronde, en chaîne ouverte ou par couples. 10 danseurs répartis en 5 couples sont présent sur la piste :

- si l'on danse en chaîne ouverte
  - De combien de manières les danseurs peuvent-ils se placer ?
  - Et si chaque couple souhaite rester côte-à-côte ?
- si l'on danse en ronde
  - De combien de manières les danseurs peuvent-ils se placer ?
  - Et si chaque couple souhaite rester côte-à-côte ?

Souvent on comprend mieux une expérience si l'on suppose/fixe certains paramètres. Cela amène à la notion de proba conditionnelles :

Souvent on comprend mieux une expérience si l'on suppose/fixe certains paramètres. Cela amène à la notion de proba conditionnelles :

Definition 3 (Probabilité conditionnelle)

Soit B un événement réalisable c'est à dire vérifiant $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle sachant B l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$

Souvent on comprend mieux une expérience si l'on suppose/fixe certains paramètres. Cela amène à la notion de proba conditionnelles :

Definition 3 (Probabilité conditionnelle)

Soit B un événement réalisable c'est à dire vérifiant $\mathbb{P}(B) \neq 0$.
On appelle probabilité conditionnelle sachant B l'application :

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{P}_B : & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & A & \mapsto & \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \end{array}$$

- $\mathbb{P}_B$ est une probabilité !
- Si $\mathbb{P}(B) = 0$, on convient de poser $\mathbb{P}(A|B) = 0$

Formule des probabilités composées

Si A et B sont des événements, alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)$.

Généralisation :

- Si A, B, C sont des événements, alors $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(C|A \cap B)$
- Si $A_1, \dots, A_n$ sont des événements, alors
  $\mathbb{P}\left(A_1 \cap \dots \cap A_n\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2) \dots \mathbb{P}(A_n|A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$

Une urne contient n boules blanches et n boules rouges.
On tire successivement et sans remise n boules dans cette urne.
On note A_k l'événement « la boule obtenue lors du k-ième tirage est blanche ».

Déterminer la probabilité qu'une boule rouge figure dans ce tirage en mesurant l'événement contraire.
On pourra étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$ avant de répondre dans le cas général.

Formule des probabilités totales

Soit A un événement de sorte que la famille $\left(A, \overline{A}\right)$ soit un système complet d'événements [a].
Si B est un événement [b], alors $\mathbb{P}(B) = P(B|A)\mathbb{P}(A) + P(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})$.

Généralisation :

- Soit (A_1, A_2, A_3) un système complet d'événements.
  Si B est un événement, alors $\mathbb{P}(B) = P(B|A_1)\mathbb{P}(A_1) + P(B|A_2)\mathbb{P}(A_2) + P(B|A_3)\mathbb{P}(A_3)$
- Soit $(A_1, \dots, A_n)$ un système complet d'événements.
  Si B est un événement, alors $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$

---

a. Si ce n'est pas le cas (A impossible ou certain), ce conditionnement n'aurait pas d'intérêt !
b. dont la réalisation "dépend" de celle de A

On dispose de six urnes numérotées de 1 à 6.

L'urne numéro k comporte k boules blanches et une boule rouge.

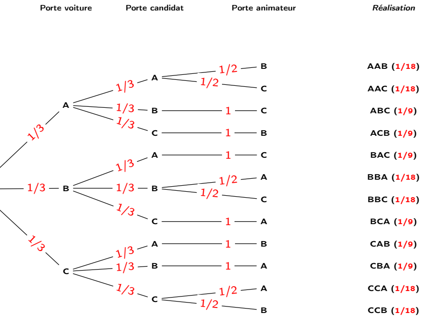
Un joueur lance un dé équilibré puis choisit une boule dans l'urne correspondant au résultat du dé.

On note A_k l'événement « le dé donne la valeur k » et B l'événement « la boule tirée est blanche ».

Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Essayons de formaliser

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([\textbf{gagner sans changer}]) &= \mathbb{P}(\{(A,A,B),(A,A,C),(B,B,A),(B,B,C),(C,C,A),(C,C,B)\}) \\
&= \mathbb{P}(\{(A,A,B)\}) + \mathbb{P}(\{(A,A,C)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,A)\}) + \mathbb{P}(\{(B,B,C)\}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\{(C,C,A)\}) + \mathbb{P}(\{(C,C,B)\}) \\
&= \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A) \\
&\quad + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(B) \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 1 \\
&= \frac{3}{9} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$



Wait ! What happened here ?

On vient de faire soudainement plein de calculs sans justification ! Suivre son intuition va vite être limité $\rightsquigarrow$ il nous faut des règles *claires*.

- ✓ **ligne 1 → ligne 2**
- ✓ **ligne 3 → ligne 4**
- ✓ **ligne 2 → ligne 3**

Formule de Bayes

Soit A un événement de sorte que la famille $\left(A, \overline{A}\right)$ soit un système complet d'événements.

Si B est un événement réalisable, alors $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{P(B|A)\mathbb{P}(A) + P(B|\overline{A})\mathbb{P}(\overline{A})}$.

Généralisation :

Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements.

Si B est un événement réalisable, alors pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathbb{P}(A_k|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A_k)\mathbb{P}(A_k)}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$.

La formule de Bayes est utile pour les raisonnements « rétroactifs ». Si on sait mesurer la conséquence B d'un événement A et que l'on sait l'événement B réalisé, la formule de Bayes permet de savoir si l'événement A l'a été. On parle parfois de la formule de probabilité des causes.

Une urne contient deux dés : l'un est équilibré et l'autre donne systématiquement un 6.
On choisit un dé dans l'urne et on le lance.
On note A l'événement « le dé choisi est équilibré » et B l'événement « le dé lancé donne un 6 ».

En supposant que le dé lancé donne un 6, déterminer la probabilité que ce dé soit équilibré.

Problème de Monty Hall

On se propose ici de résoudre le problème de Monty Hall d'une autre manière.
On considère F_i l'événement « la voiture est derrière la porte i » et O_j celui « le présentateur ouvre la porte j ».
Pour fixer les idées, sans perdre de généralité [a], on peut supposer que le joueur ait choisi la porte 1, et le présentateur ouvert la porte 2.
Indice : Calculer $\mathbb{P}(F_1|O_2)$ et $\mathbb{P}(F_3|O_2)$, puis conclure [b].

---

a. Les calculs seraient les mêmes dans les autres cas

b. Le joueur peut évaluer les probabilités de F_1 et F_3 avec une information supplémentaire

Probabilités

Notion de probabilité

Probabilités conditionnelles et indépendance

Notion de probabilité conditionnelle

Événements indépendants

Definition 4 (Indépendance de deux événements)

On dit que deux événements A et B sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$

- Soit B un événement réalisable. Alors,
  A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ autrement dit, savoir que B est réalisé n'apporte rien !
- Si A et B sont des événements indépendants, alors A et $\overline{B}$ le sont aussi, tout comme $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

1. On lance deux fois un dé équilibré.
   Les événements A : « le premier lancer donne un six » et
   B : « le second lancer donne un six » sont-ils indépendants ?
2. On tire successivement sans remise deux boules dans une urne contenant 5 boules blanches et 2 boules rouges.
   Les événements A : « la première boule tirée est blanche » et
   B : « la seconde boule tirée est blanche » sont-ils indépendants ?
3. Même question avec un tirage successif avec remise.

En général, on ne vous demande pas de prouver l'indépendance, mais plutôt de l'utiliser (hypothèse naturelle ou de travail).

Ne pas confondre indépendance et incompatibilité

D'après le tableau suivant, dans quel(s) cas les événements A et B sont-ils indépendants ?

	$\mathbb{P}(A)$	$\mathbb{P}(B)$	$\mathbb{P}(A \cup B)$
cas 1	0.1	0.9	0.91
cas 2	0.4	0.6	0.76
cas 3	0.5	0.3	0.8

Definition 5 (Indépendance mutuelle d'événements)

On dit que les événements $A_1, \ldots, A_n$ sont mutuellement indépendants si pour tout J finie [a] $\subset \{1, \ldots, n\}$, on a :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbb{P}(A_j)$$

a. Inutile ici, mais permet de généraliser la définition à une infinité dénombrable d'événements

Ne pas confondre indépendance deux à deux et indépendance mutuelle

On lance deux dés discernables et l'on considère les événements :

- A : « le premier dé lancé donne un résultat pair »
- B : « le second dé lancé donne un résultat pair »
- C : « la somme des deux dés est paire »

Montrer que les événements A, B et C sont deux à deux indépendants, mais pas mutuellement indépendants.