R2.09 Méthodes Numériques

Thibault Godin, Lucie Naert, Anthony Ridard

IUT de Vannes Informatique

Contenu du cours

Le but du cours $\rightsquigarrow$ donner des outils mathématiques nécessaires à la compréhension et la modélisation de problèmes informatiques.

En particulier, on s'intéressera à 3 grands problèmes :

- Quel est le temps d'exécution d'un programme ?
  $\rightsquigarrow$ Théorie de la complexité
- Comment évolue une valeur numérique au cours d'un programme ?
  $\rightsquigarrow$ vérification (model checking)
- Comment trouver algorithmiquement une solution à une équation ?
  $\rightsquigarrow$ analyse numérique

Analyse et Quake 3

Dans le jeu vidéo (et le traitement de l'image en général), les réflections sont calculées en fonction de la normale (perpendiculaire) à une surface.

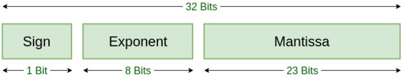
En particulier, étant donné un vecteur (x, y, z), on doit le *normaliser*, c'est à dire calculer :

$$v = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Analysons ce calcul :

- $x^2 + y^2 + z^2 \rightsquigarrow$ `x*x + y*y + z*z` $\rightsquigarrow$ Ok et efficace
- $x/R \rightsquigarrow$ `x/R` $\rightsquigarrow$ Ok, mais coûteux
- $\sqrt{N} \rightsquigarrow$? ? ?

L'ordinateur manie des entiers. On sait représenter certains réels (flottant IEEE754)



$$f = (-1)^{sign_2} \times 2^{exponent_2 - 127} \times (1.mantissa_2)$$

- ~~Comment calculer $\sqrt{f}$~~ ?
- On a seulement un nombre fini de `float`, comment donner une bonne approximation de $\sqrt{f}$?

Analyse et Quake 3

Solution 1 : `x/ sqrt(x*x + y*y + z*z)` $\rightsquigarrow$ ok mais division et boite noire $\rightsquigarrow$ moyennement efficace et satisfaisant

Solution 2 : calcul approché de $1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

```
float Q_rsqrt( float number )
{
long i;
float x2, y;
const float threehalfs = 1.5F;

x2 = number * 0.5F;
y  = number;
i  = * ( long * ) &y;                    // evil floating point
    bit level hacking
i  = 0x5f3759df - ( i >> 1 );            // what the fuck?
y  = * ( float * ) &i;
y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );   // 1st iteration

//      y  = y * ( threehalfs - ( x2 * y * y ) );
// 2nd iteration, this can be removed

return y;
}
```

subtilité du langage C

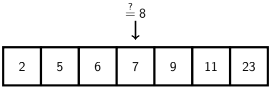
approximation grossière de $1/\sqrt{f}$

amélioration de l'approximation $1/\sqrt{f}$

Efficacité des algorithmes

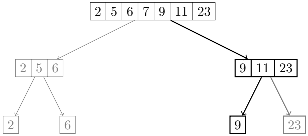
Recherches naïve et dichotomique dans une liste de n entiers triés

recherche naïve



au pire $\rightsquigarrow$ n tests d'égalité/comparaisons

recherche dichotomique



au pire $\rightsquigarrow$ $\log_2(n+1)$ tests

Quel algorithme est le plus rapide ?

n	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
$\log_2(n+1)$	3.46	6.66	9.97	13.29	16.61	19.93	23.25

On peut étudier $u_n = \frac{\log_2(n+1)}{n}$

$u_n \to_{n\to\infty} 0$, la recherche dichotomique est bien plus efficace que la recherche naïve

Suite

- Une ***suite*** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ième ***terme*** ou ***terme général*** de la suite.

- $u_n = n$
- $u_n = \frac{1}{n^2} + 5$
- $u_n =$ le n-ième nombre premier

Comment définit-on une suite ?

Il y a plusieurs façons de définir une suite :

- ***Par une formule explicite***, en fonction de l'entier n ;
  - $u_n = \sin \frac{1}{n}$, définie pour $n \in \mathbb{N}^*$
    $u_1 = \sin 1,\ u_2 = \sin \frac{1}{2}\ \ldots$
  - $v_n = \pi 2^{-n}$
    $v_0 = \pi,\ v_1 = \frac{\pi}{2},\ v_2 = \frac{\pi}{4}$
  - suite géométrique
    $u_n = aq^n$

```
def explicit(n):

  un = a*(q**n)
  return un
```

Comment définit-on une suite ?

Il y a plusieurs façons de définir une suite :

- ***Par une formule itérative***

  (Formule de récurrence)

  suite de Fibonnacci.

$$\begin{cases} F_{n+2} = & F_{n+1} + F_n \\ F_0 = & 0 \\ F_1 = & 1 \end{cases}$$

```
def FibonacciRec(n):

  if n== 0 or n==1:
    return 1
  else:
    return  FibonacciRec(n-1)+
                 FibonacciRec(n-2)
```

Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Comment définit-on une suite ?

Il y a plusieurs façons de définir une suite :

- ***à l'aide d'une formule itérative utilisant une fonction***, par exemple la suite : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$

  Exemple :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{3}{u_n}\right) \end{cases}$$

```
def f(x):

  return 1/2*(x + 3/x)

def un(n):
  if n==0:
    return 5
  else:
    return f(un(n-1))
```

Calculer les 3 premiers termes de la suite, puis donner à la calculatrice une valeur approchée de u_5.

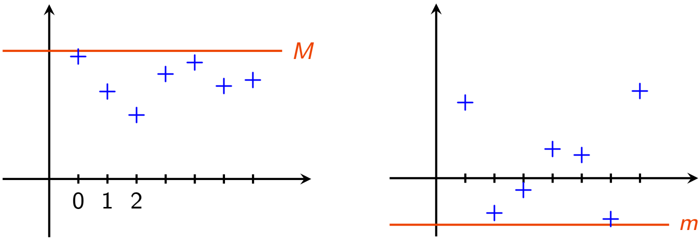
Premières propriétés

Définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***majorée*** si $\quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***minorée*** si $\quad \exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m.$
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***bornée*** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M.$$



Premières propriétés

Montrer que la suite $u_n = -n$ est majorée.

Donner un exemple de suite bornée et un autre de suite ni minorée ni majorée.

Montrer que la suite de Fibonacci est minorée par 1 mais n'est pas majorée.

Démonstration par récurrence

On utilise l'implication suivante[a] :

$$\left(\underbrace{\mathcal{P}(0)}_{\text{Initialisation}} \quad \text{et} \quad \big(\underbrace{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Longrightarrow \mathcal{P}(n+1)}_{\text{Hérédité}} \big) \right) \Longrightarrow \Big(\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Big)$$

a. Il s'agit du principe de récurrence

- Cette technique est à privilégier lorsque la démonstration *directe*[a] n'aboutit pas
- On peut généraliser :
  - en initialisant à un entier $n_0 > 0$
  - en considérant une récurrence « forte »

a. Considérer un n quelconque de $\mathbb{N}$ et montrer $\mathcal{P}(n)$

Récurrence

<u>Initialisation</u> :

Vérifions $\mathcal{P}(0)$

$\left.\vdots\right\}$ Vérification de $\mathcal{P}(0)$

<u>Hérédité</u> :

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons[a] $\mathcal{P}(n)$

Montrons $\mathcal{P}(n+1)$

$\left.\vdots\right\}$ Preuve de $\mathcal{P}(n+1)$

---

a. Il s'agit de l'Hypothèse de Récurrence (HR)

Récurrence

On considère la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n$.
Démontrer « $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n$ ».

Montrer que la suite de Fibonacci est minorée par 1 mais n'est pas majorée.
Donner un exemple de suite bornée et un autre de suite ni minorée ni majorée.

Premières propriétés

Une suite est dite :

1. ***croissante*** si, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geqslant u_n$
2. ***décroissante*** si, $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \leqslant u_n$
3. ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante

Pour étudier la monotonie on étudie les suites :

1. u_{n+1} - u_n (en la comparant à 0)
   si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite positive :
2. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (en la comparant à 1).

Premières propriétés (suite)

✎ Donner un exemple de suite non monotone bornée et un autre de suite décroissante non minorée.

✎ Montrer que la suite de Fibonacci est croissante (étudier $F_n - F_{n-1}$), puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

✎ Le produit de deux suites croissantes est-il une suite croissante ? *(Que pensez vous des suites* $u_n = -\dfrac{1}{n^3}$ *ou* $v_n = -1 - \dfrac{1}{n}$ *et du produit* $u_n v_n$ *?)*

Suites de référence

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite ***arithmétique*** si $u_n = u_{n-1} + r$ et $u_0 = a$

(TP) Étudier la suite arithmétique définie par $u_n = u_{n-1} + r$ et $u_0 = a$

Donner une formule explicite en fonction de n.

Illustrer les comportements possibles de la suite selon les paramètre a et r

Suites de référence

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite ***géométrique*** si $u_n = q \cdot u_{n-1}$ et $u_0 = a$

(TP) Étudier la suite géométrique définie par $u_n = qu_{n-1}$ et $u_0 = a$

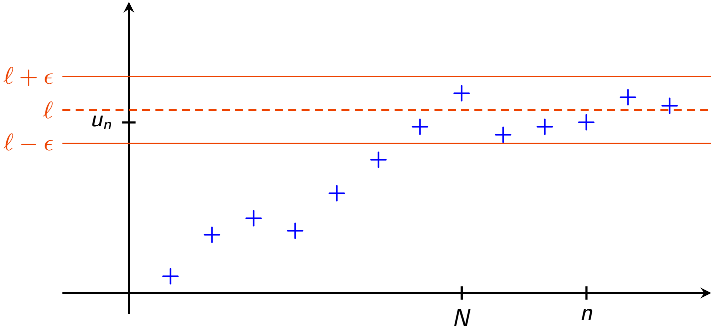
Donner une formule explicite en fonction de n.

Illustrer les comportements possibles de la suite selon les paramètre a et q

Limite

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour ***limite*** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$



On dit aussi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** ℓ. Autrement dit : u_n est proche d'aussi près que l'on veut de ℓ, à partir d'un certain rang.

Limite

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** $+\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \implies u_n \geq A)$$

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers*** $-\infty$ si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geq N \implies u_n \leq -A)$$

On note $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ ou parfois $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, et de même pour une limite $\pm\infty$.

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***convergente*** si elle admet une limite ***finie***. Elle est ***divergente*** sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

Limite

✍ Donner un exemple de suite non monotone tendant vers 0. Idem tendant vers 1.

✍ Donner un exemple de suite n'admettant pas de limite. Donner un exemple de suite bornée n'admettant pas de limite

Propriétés des limites

1. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n - \ell) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty}|u_n - \ell| = 0$,
2. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \implies \lim_{n\to+\infty}|u_n| = |\ell|$.

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$.
2. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell'$$
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$
3. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.

Donner un exemple de suite telle que $\lim u_n^2$ existe et soit finie mais $\lim u_n$ n'existe pas.

Limites par encadrement

Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$, 3 suites telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
à partir d'un certain rang N_0

On suppose de plus que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$

Alors, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell}$

rmq : rien n'empêche de prendre une suite constante pour u_n ou w_n

Montrer que la suite $\frac{\sin(1/n)}{n}$ est convergente et donner sa limite.

Limites monotones

Théorème

Toute suite croissante et majorée est convergente.

Et aussi :

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

✍ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$, $u_n = \sqrt{2 + u_{n-1}}$.
Montrer que cette suite est croissante et majorée par 2. Que peut-on en conclure ?

Une suite positive, qui converge vers 0 est-elle décroissante ? *(Que pensez vous de la suite* $\dfrac{2 + (-1)^n}{n}$ *?)*

Une suite croissante, négative, converge-t-elle vers 0 ?

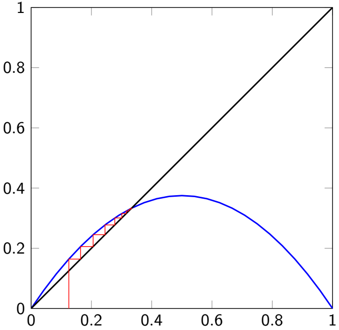
Suite récurrente définie par une fonction

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et une ***suite récurrente***

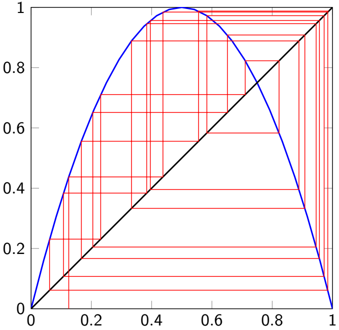
$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

donc $u_0, \quad u_1 = f(u_0), \quad u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)), \quad u_3 = f(u_2) = f(f(f(u_0))), \ldots$

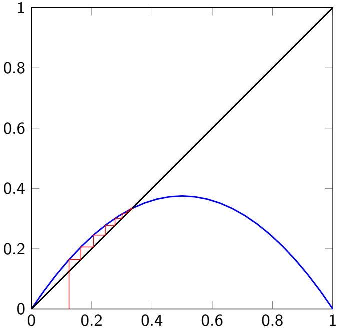
Exemple : suite logistique $u_{n+1} = \mu u_n(1 - u_n)$



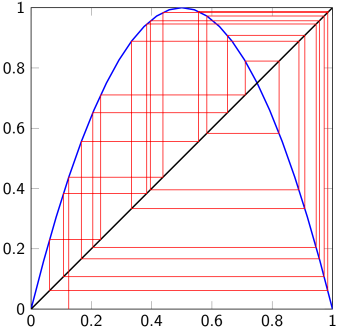
$\mu = \frac{3}{2}$



$\mu = 4$



$\mu = \frac{3}{2}$



$\mu = 4$

Le comportement est compliqué et semble dépendre beaucoup de μ

Cependant $\rightsquigarrow$ si la suite converge vers ℓ alors $f(\ell) = \ell$

- Comment trouver une solution à cette équation ?
  posons $g(x) = f(x) - x$ donc $g(\ell) = 0$
- Comment trouver les racines d'une fonction ?
- Que ce passe-t-il s'il y a plusieurs solutions ? Peut-on prendre des solutions approchées ?