NOM :

GROUPE :

R1.06 - Mathématiques discrètes
Contrôle Continu (45 minutes)
Mercredi 5 octobre 2022 - A. Ridard

**Exercice 1.** 5,5 → 11/2

Pour chaque question, indiquer la (les) bonne(s) réponse(s). Une case cochée justement rapporte 1 point, une case cochée injustement enlève 0.5 point, et une case non cochée ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

| | |
|---|---|
| **1.** Par quoi peut-on compléter les pointillés pour que l'assertion soit vraie ? $(\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq 2 \ldots x^2 \geq 4)$ et $(\forall y \in \mathbb{R},\ \lvert y\rvert \leq 3 \ldots 0 \leq y \leq 3)$ | ☐ $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$<br>☐ $\Longleftarrow$ et $\Longleftarrow$<br>☒ $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$<br>☐ $\Longrightarrow$ et $\Longrightarrow$ |
| **2.** Quelles sont les assertions vraies ? | ☐ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - x \geq 0$<br>☒ $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 - n \geq 0$<br>☒ $\forall x \in \mathbb{R},\ \lvert x^3 - x\rvert \geq 0$<br>☒ $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 2 \Longrightarrow n \geq 3$ |
| **3.** On considère P une assertion fausse, Q une assertion vraie et R une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies | ☐ Q et (P ou R)<br>☐ P ou (Q et R)<br>☒ non(P et Q et R)<br>☒ (P ou Q) et (Q ou R) |
| **4.** A quoi est logiquement équivalent « P $\Longrightarrow$ Q » ? | ☒ Q ou non(P)<br>☐ non(P) ou non(Q)<br>☒ non(P) ou Q<br>☐ P et non(Q) |
| **5.** Etant données P et Q deux assertions, quelles sont les assertions toujours vraies (que P et Q soient vraies ou fausses) ? | ☒ (P $\Longrightarrow$ Q) ou (Q $\Longrightarrow$ P)<br>☒ (P $\Longrightarrow$ Q) ou non(Q)<br>☒ P ou (P $\Longrightarrow$ Q)<br>☐ (P $\Longleftrightarrow$ Q) ou non(P) |

NOM : GROUPE :

**Exercice 2.** (5,5)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Écrire la négation des assertions suivantes.

1. $\forall x \in [0,1],\ f(x) \neq 0$

(1) $\exists x \in [0,1],\ f(x) = 0$

2. $\forall M < 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) < M$

(1,5) $\exists M < 0, \forall A > 0, \exists x \geqslant A, f(x) \geqslant M$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \Longrightarrow x \leq 0$

(1,5) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $x > 0$

4. $\forall \epsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ |x-1| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(1)| < \epsilon$

(1,5) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x-1| < \eta$ et $|f(x) - f(1)| \geqslant \varepsilon$

**Exercice 3.** (3)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. Écrire "mathématiquement" les assertions suivantes.

1. $f$ est constante.

(1) $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c$

2. $f$ s'annule.

(1) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

3. $f$ ne peut s'annuler que sur $[0,1]$.

(1) $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Rightarrow x \in [0,1]$

NOM :                                                                 GROUPE :

**Exercice 4.** 6

On définit l'opérateur ***xor*** correspondant au ***ou exclusif*** de la manière suivante :

$$P \; xor \; Q \sim (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

(2) 1. A l'aide d'une table de vérité, montrer : $P \; xor \; Q \sim \neg(P \Longleftrightarrow Q)$

| $P$ | $Q$ | $P \vee Q$ | $P \wedge Q$ | $\neg(P \wedge Q)$ | $P \; xor \; Q$ | $P \Leftrightarrow Q$ | $\neg(P \Leftrightarrow Q)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| V | V | V | V | F | F | V | F |
| V | F | V | F | V | V | F | V |
| F | V | V | F | V | V | F | V |
| F | F | F | F | V | F | V | F |

Les deux colonnes coincident donc les assertions sont logiqut. équiv.

(2) 2. A l'aide de la double implication, montrer par le calcul : $\neg(P \Longleftrightarrow Q) \sim (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$$\neg(P \Leftrightarrow Q) \sim \neg(P \Rightarrow Q \wedge Q \Rightarrow P)$$
$$\sim \neg(P \Rightarrow Q) \vee \neg(Q \Rightarrow P)$$
$$\sim (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg P)$$
$$\sim (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$

(2) 3. A l'aide de la distributivité, montrer par le calcul : $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \sim (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

$$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \sim (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$
$$\sim ((P \vee Q) \wedge \neg P) \vee ((P \vee Q) \wedge \neg Q)$$
$$\sim \underbrace{(P \wedge \neg P)}_{\text{toujours faux}} \vee (Q \wedge \neg P) \vee (P \wedge \neg Q) \vee \underbrace{(Q \wedge \neg Q)}_{\text{toujours faux}}$$

directement par double distributivité

$$\sim (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$$