NOM :   GROUPE :

R1.07 - Outils fondamentaux
Contrôle Terminal

Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Vendredi 21 janvier 2022
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	8 pages
Impression :	A4 recto-verso agrafé (1 point)
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Non
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1.

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $P^2 - 3P + 2I$.

2. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.

3. Calculer les coordonnées du vecteur $(1,0,-2)$ dans la base $\mathscr{B}' = \left(u, v, w\right)$ définie par :

$$u = (0,-1,1),\ v = (1,2,-1),\ w = (-1,-1,2)$$

NOM : GROUPE :

Exercice 2.

On considère l'application linéaire f définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y,\ -x+2y+z,\ -y-z) \end{array}$$

1. Écrire $\mathscr{M}(f)$, la matrice de f dans la base canonique.

2. Montrer que f n'est pas bijective.

3. Déterminer $f^{-1}\Big(\big\{(0,0,0)\big\}\Big)$ sous la forme d'un "Vect".

NOM : GROUPE :

Exercice 3.

On considère f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ **canoniquement** associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

2. En déduire $f^{-1}\Big((x, y, z)\Big)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

NOM : GROUPE :

Exercice 4.

On considère f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ **canoniquement** associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

On introduit la (nouvelle) base $\mathscr{B}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ avec $e_1' = (1,2,2)$, $e_2' = (1,2,1)$ et $e_3' = (1,0,0)$.

1. Déterminer sous forme de triplet $f\left(e_1'\right)$, $f\left(e_2'\right)$ et $f\left(e_3'\right)$

2. A l'aide de la sortie Jupyter Notebook suivante, calculer $\mathscr{M}\left(f,\mathscr{B}'\right)$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

```
In [2]: lst_P = [[1, 1, 1], [2, 2, 0], [2, 1, 0]]
        P = Matrix(lst_P)
        P.inv()
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Vérifier les trois colonnes de $\mathscr{M}\left(f,\mathscr{B}'\right)$ en utilisant les résultats de la question 1.