NOM :

GROUPE :

R3.08 - Probabilités
Contrôle Continu (1h)
Mercredi 14 décembre 2022 - A. Ridard

Exercice 1. 10

Un étudiant vient de récupérer les clés de son nouvel appartement. Il s'agit d'un trousseau de quatre clés indistinguables. Elles ouvrent toutes la porte de l'appartement, mais seule l'une d'entre elles ouvre également la porte de l'immeuble !
Cet étudiant va procéder avec méthode pour trouver l'unique clé permettant d'accéder à l'intérieur de l'immeuble : à chaque essai sans succès, il met bien de côté la mauvaise clé pour ne pas l'essayer à nouveau.

On note :

- B_i l'événement « la i-ième clé essayée est la bonne », pour $i \in \{1,2,3,4\}$
- X la variable aléatoire égale au nombre de tentatives nécessaires pour trouver la bonne clé

1. Exprimer l'événement $(X = 2)$ à l'aide des B_i et des $\overline{B_i}$.

$(X=2) = \overline{B}_1 \cap B_2$ 0,5

2. En déduire $P(X = 2)$.

$P(X=2) = P(\overline{B}_1 \cap B_2) = P(\overline{B}_1)\, P(B_2 | \overline{B}_1) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$. 1

Probas composées

3. Exprimer l'événement $(X = 3)$ à l'aide des B_i et des $\overline{B_i}$.

$(X=3) = \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3$ 0,5

4. En déduire $P(X = 3)$.

$P(X=3) = P(\overline{B}_1)\, P(\overline{B}_2 | \overline{B}_1)\, P(B_3 | \overline{B}_1 \cap \overline{B}_2)$

$= \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 1

5. Déterminer la loi de X à l'aide d'un tableau.

x_i	1	2	3	4
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

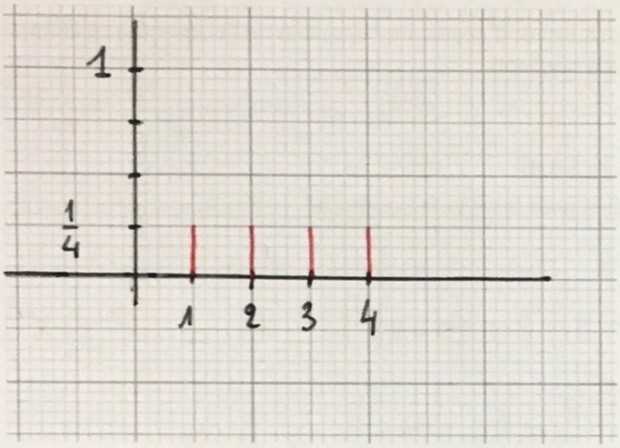
1

$$P(X=1) = P(B_1) = \frac{1}{4}$$

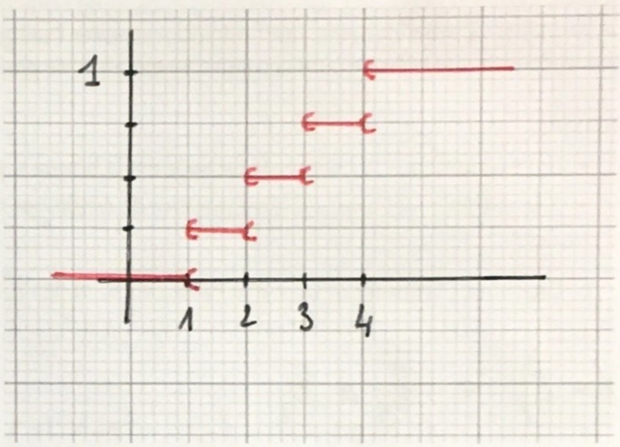
$$P(X=4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

6. Représenter graphiquement cette loi (à gauche) ainsi que la fonction de répartition de X (à droite).

1



1



7. Calculer, **à l'aide des définitions**, l'espérance et la variance de X.

- $E(X) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1+2+3+4) = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$ 1
- $E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{4} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(1+4+9+16) = \frac{30}{4} = \frac{15}{2}$ 1

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \frac{30}{4} - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$$ 1

8. A posteriori, reconnaissez-vous une loi usuelle?

$X \sim \mathcal{U}_{\{1,2,3,4\}}$. 1

NOM : GROUPE :

Exercice 2. 10

On considère le jeu suivant :

- le joueur lance une pièce
- s'il obtient pile, il lance un dé à six faces (numérotées de 1 à 6)
- sinon, il lance un dé à trois faces (numérotées de 1 à 3)

La pièce et les deux dés sont supposés équilibrés !
La manche est gagnée si le joueur obtient 1 au lancer de dé.

On note :

- F l'événement « obtenir face »
- M l'événement « gagner la manche »

1. Calculer la probabilité de gagner la manche.

$$P(M) = P(M|F)P(F) + P(M|\bar{F})P(\bar{F}) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{4}$$

Probas totales

1

2. Sachant que la manche ait été gagnée, quelle est la probabilité que le joueur ait obtenu face au lancer de pièce ?

$$P(F|M) = \frac{P(M|F)P(F)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

Bayes

1

3. Sachant que la manche ait été gagnée, quelle est la probabilité que le joueur ait obtenu pile au lancer de pièce ?

$$P(\bar{F}|M) = 1 - P(F|M) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

1

4. Sachant que la manche ait été perdue, quelle est la probabilité que le joueur ait obtenu pile au lancer de pièce ?

$$P(\bar{F}|\bar{M}) = \frac{P(\bar{M}|\bar{F})P(\bar{F})}{P(\bar{M})} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \frac{5}{9}.$$

1

En effet, $P(\bar{M}|\bar{F}) = 1 - P(M|\bar{F}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

et $P(\bar{M}) = 1 - P(M)^3 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

5. En fait, une partie se joue en 5 manches, et la partie est gagnée si au moins 3 manches sont gagnées.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de manches gagnées sur les 5 jouées (toutes les manches sont jouées, même si par exemple les trois premières sont gagnées).

(a) Reconnaître la loi de X, déterminer son espérance et sa variance.

$X \sim \mathcal{B}(5, p)$ avec $p = P(M) = \frac{1}{4}$. 1

$E(X) = 5p = \frac{5}{4}$ 0,5

$V(X) = 5p(1-p) = \frac{15}{16}$ 0,5

(b) Calculer la probabilité de gagner la partie.

$P(X \geq 3) = 1 - \left(P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right)$ 1

$= 1 - \left(\binom{5}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 \right)$

$\simeq 1 - (0{,}2373 + 0{,}3955 + 0{,}2637) \simeq 0{,}1035$

(c) Ce jeu est gratuit, et chaque manche gagnée rapporte 3 euros, mais une manche perdue fait perdre 1 euro. Quel gain (éventuellement négatif) le joueur peut-il *espérer* obtenir sur une partie?

On pourra noter G la variable aléatoire égale à ce gain.

$G = 3X - (5-X) = 4X - 5$ 1

donc $E(G) \underset{\text{par linéarité}}{=} 4E(X) - 5 = 4 \times \frac{5}{4} - 5 = 0$ 1

(d) Calculer la variance de G.

$V(G) = V(4X-5) = 4^2 V(X) = 4^2 \times \frac{15}{16} = 15.$ 1