TD3

R2.09

Analyse

Exercice 1 : (Suites des racines et des carrés)

1. On admet que la fonction racine est (strictement) croissante.
   Soit la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
   (a) Si $a = 0,5$, montrer que la suite est bornée. Étudier sa (dé)croissance et conclure.
   (b) Si $a = 2$, montrer que la suite est décroissante. Conclure.
2. Soit maintenant la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n^2$.
   (a) Étudier la suite pour $a = 0,5$
   (b) Étudier la suite pour $a = 2$

Exercice 2 : *(Suites récurrentes et fonctions décroissantes)

Soit $\begin{array}{rccc} f: & [a,b] & \longrightarrow & [a,b] \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ une fonction décroissante.

Montrer que $f \circ f$ est une fonction croissante.

En déduire que si $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et décroissante, avec Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

— La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.
— La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.

1. étudier la suite $u_0 = a, u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$
2. étudier la suite $u_0 = a \in [0,1], u_{n+1} = -u_n^2 + 1$

Attention aux hypothèses ! La fonction doit être décroissante sur tout l'intervalle

Exercice 3 :** (Point fixe)

Soit f continue sur $[a,b]$ à valeurs dans $[a,b]$. Montrer que f a un point fixe.

Indication : se ramener à la recherche de racine

Exercice 4 : Soit $f(x) = \sqrt{x}$. Appliquer le théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[100, 101]$. En déduire l'encadrement $10 + \frac{1}{22} \leq \sqrt{101} \leq 10 + \frac{1}{20}$.

Exercice 5 : (Suite de Héron) Soit la suite de Héron définie par $u_{n+1} = f(u_n); u_0 = 2$; avec $f : x \mapsto \frac{1}{2}(x + \frac{2}{x})$.

— Calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$
— En déduire que l'intervalle $[1,2]$ est stable par f.

— Montrer que f est contractante sur cet intervalle.

— En déduire que $(u_n)_n$ converge vers une limite (que l'on rappellera) et donner un vitesse de convergence.

Exercice 6 : (Théorème du point fixe) On pose $v_0 = 2; v_{n+1} = g(v_n)\ n \geq 0$ où $g : [1;2] \to \mathbb{R}\ x \mapsto \frac{3}{2} - \frac{1}{4x^2}$

— Déterminez les points fixes de la fonction g.

— Établir le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1;2]$ et en déduire que cet intervalle est stable.

— Montrer que g est un contractante dont on donnera la constante k.

— À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(v_n); n \geq 0$ converge et préciser sa limite.

Exercice 7 : (Dichotomie) Trouver par la méthode de la dichotomie, une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-3} près.

Exercice 8 : * (bilan) L'objectif de l'exercice est d'étudier la convergence de la méthode du point fixe et de Newton pour résoudre l'équation :

$$x = e^{-x} \qquad (E)$$

On pose $f(x) = x - e^{-x}$ et $g(x) = e^{-x}$.

1. Montrez que (E) a une unique solution a dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, 1]$.
2. Méthode du point fixe.
   (a) Montrez que $g([\frac{1}{4}, 1]) \subset [\frac{1}{4}, 1]$.
   (b) Montrez qu'il existe $0 < L < 1$ tel que $\forall x \in [\frac{1}{4}, 1]\ |g'(x)| < L$.(Vous trouverez $L \approx 0.78$)
   (c) En déduire que $\forall x, y \in [\frac{1}{4}, 1]\ |g(x) - g(y)| < L|x - y|$.
   (d) En déduire que la suite définie par : $\begin{cases} x_0 \in \left[\frac{1}{4}; 1\right] \\ x_{n+1} = g\left(x_n\right) \end{cases}$ converge vers a.
3. Méthode de Newton.
   (a) Montrez qu'il existe $m = \min_{x \in [\frac{1}{4}, 1]} |f'(x)|$.
   (b) Montrez qu'il existe $M = \max_{x \in [\frac{1}{4}, 1]} |f''(x)$.
   (c) En utilisant le théorème de la méthode de Newton, proposez un premier terme u_0 de la suite définie par : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$ afin qu'elle converge vers a.
4. Combien d'itérations faut-il pour la méthode du point fixe converge avec une précision de 10^{-12} ? Même question avec la méthode de Newton.

Exercice 9 : ** (Point fixe des fonctions contractante) Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue et contractante.

En raisonnant par l'absurde, montrer que f admet un unique point fixe.