NOM : GROUPE :

R01.06 - Mathématiques discrètes
Contrôle Continu (1h15)
Mardi 12 octobre 2021 - A. Ridard

Exercice 1.
Soit P et Q deux assertions.
On considère l'assertion R définie par :

$$R \sim (P \wedge Q) \Longrightarrow (P \vee \neg Q)$$

1. Compléter la table de vérité de R.

P	Q				R
V	V				
V	F				
F	V				
F	F				

2. Transformer R en une assertion équivalente[1] ne contenant que les connecteurs ¬ et ∧.

1. Vous pouvez d'ailleurs vous en servir pour "vérifier" la table de vérité de R

Exercice 2.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$ une suite réelle.

On rappelle les définitions suivantes :

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* quand elle vérifie :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* quand elle vérifie :
$$\exists m \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq \mathrm{M}$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0* quand elle vérifie :
$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| < \epsilon)$$

En niant ces définitions, exprimer à l'aide d'une phrase quantifiée chacune des assertions suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

NOM :   GROUPE :

Exercice 3.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? **Justifier**[2].

1. $\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

2. $\forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ \exists x \in \mathbb{R}^*,\ z - xy = 0$

3. $\forall \epsilon > 0,\ \exists a > 0,\ a < \epsilon$

2. Démontrer l'assertion si elle est vraie, et démontrer sa négation si elle est fausse

4. $\exists a > 0,\ \forall \epsilon > 0,\ a < \epsilon$

5. $\forall x \in \left[-\dfrac{5}{4}, +\infty\right[,\ x = \sqrt{4x+5} \Longleftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0$

NOM : GROUPE :

Exercice 4.

1. Soit a et b des réels. Démontrer **par contraposition** l'implication :

$$a+b \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q}$$

On rappelle qu'un réel x est rationnel[3] *s'il peut s'écrire comme une fraction de deux entiers relatifs :*

$$\exists p \in \mathbb{Z},\ \exists q \in \mathbb{Z}^*,\ x = \frac{p}{q}$$

3. On désigne par $\mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer **par double implication** l'équivalence [4] :

$$\left(\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq b\right) \iff \left(\exists m \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ m \leq f(x) \leq \mathrm{M}\right)$$

On rappelle que $|f(x)| \leq b$ *signifie* $-b \leq f(x) \leq b$.

4. Elle exprime qu'une fonction est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée