R3.08 - Probabilités
TD 1c - Calcul probabiliste

A. Ridard

Exercice 1.
On considère une urne contenant 8 boules blanches et 6 boules rouges, indiscernables au toucher.

1. On tire, successivement et avec remise, 5 boules.

Modélisation

Un tel tirage est un quintuplet $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ où $t_i \in \{b_1, \dots, b_8, r_1, \dots, r_6\}$.

Par conséquent, $Card(\Omega) = 14^5$.

(a) Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, 3 blanches et 2 rouges.

Solution

On note A l'événement considéré.
Pour compter (et même lister) les tirages dans A :
- on choisit la première boule parmi les 8 blanches
- on choisit la deuxième boule parmi les 8 blanches
- on choisit la troisième boule parmi les 8 blanches
- on choisit la quatrième boule parmi les 6 rouges
- on choisit la cinquième boule parmi les 6 rouges

On en déduit :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{8^3 \times 6^2}{14^5}$$

(b) Calculer la probabilité d'obtenir, peu importe l'ordre, 3 blanches et 2 rouges.

Solution

On note B l'événement considéré.
Pour compter (et même lister) les tirages dans B :
- on choisit les places des deux boules rouges parmi les 5 possibles
- on choisit les 3 boules blanches et les 2 rouges comme précédemment

On en déduit :

$$\mathrm{P}(B) = \binom{5}{2} \frac{8^3 \times 6^2}{14^5}$$

2. On tire, successivement et sans remise, 5 boules.

Modélisation

Un tel tirage est un quintuplet $(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)$ où $t_i \in \{b_1, \dots, b_8, r_1, \dots, r_6\}$ et $i \neq j \Rightarrow t_i \neq t_j$.

Par conséquent, $Card(\Omega) = 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10$.

(a) Calculer la probabilité d'obtenir, dans cet ordre, 3 blanches et 2 rouges.

Solution

On note A l'événement considéré.
Pour compter (et même lister) les tirages dans A :

- on choisit la première boule parmi les 8 blanches
- on choisit la deuxième boule parmi les 7 blanches restantes
- on choisit la troisième boule parmi les 6 blanches restantes
- on choisit la quatrième boule parmi les 6 rouges
- on choisit la cinquième boule parmi les 5 rouges restantes

On en déduit :

$$\mathrm{P}(A) = \frac{8\times 7\times 6\times 6\times 5}{14\times 13\times 12\times 11\times 10}$$

(b) Calculer la probabilité d'obtenir, peu importe l'ordre, 3 blanches et 2 rouges.

Solution

On note B l'événement considéré.
Pour compter (et même lister) les tirages dans B :

- on choisit les places des deux boules rouges parmi les 5 possibles
- on choisit les 3 boules blanches et les 2 rouges comme précédemment

On en déduit :

$$\mathrm{P}(B) = \binom{5}{2}\frac{8\times 7\times 6\times 6\times 5}{14\times 13\times 12\times 11\times 10}$$

3. On tire, simultanément, 5 boules.

Modélisation

Un tel tirage est un sous-ensemble $\{t_1, t_2, t_3, t_4, t_5\}$ de $\{b_1, \ldots, b_8, r_1, \ldots, r_6\}$.

Par conséquent, $Card(\Omega) = \binom{14}{5}$.

(a) Calculer la probabilité d'obtenir 3 blanches et 2 rouges.

Solution

On note C l'événement considéré.
Pour compter (et même lister) les tirages dans C :

- on choisit les 3 boules blanches parmi les 8 possibles
- on choisit les 2 boules rouges parmi les 6 possibles

On en déduit :

$$\mathrm{P}(C) = \frac{\binom{8}{3}\binom{6}{2}}{\binom{14}{5}}$$

(b) Comparer le résultat précédent avec celui obtenu à la question 2.(b), puis commenter.

Solution

En utilisant la relation $\binom{n}{k} = \dfrac{A_n^k}{k!}$, on obtient :

$$\mathrm{P}(C) = \frac{\binom{8}{3}\binom{6}{2}}{\binom{14}{5}} = \frac{\frac{A_8^3}{3!}\,\frac{A_6^2}{2!}}{\frac{A_{14}^5}{5!}} = \binom{5}{2}\frac{8\times 7\times 6\times 6\times 5}{14\times 13\times 12\times 11\times 10} = \mathrm{P}(B)$$

Les probabilités coïncident car, dans les deux cas, la répétition est interdite. Le fait que l'ordre n'intervienne plus dans le second cas n'impacte pas le résultat.

(c) Calculer la probabilité d'obtenir des boules pas toutes de la même couleur.

Solution

On note D l'événement considéré.
En considérant l'événement contraire, il vient :

$$\mathrm{P}(D) = 1 - \mathrm{P}(\bar{D}) = 1 - \frac{\binom{8}{5} + \binom{6}{5}}{\binom{14}{5}}$$