TD1

R2.09

Analyse

Premières propriétés

Exercice 1 : Maths financières 101

Une banque propose un placement à 1,5% par an, c'est à dire que chaque année, la banque ajoute 1,5% de ce que contient votre compte à celui-ci. Vous investissez 100€, puis ne touchez plus à votre compte.

1. Combien d'argent avez-vous sur votre compte au bout d'un an ? Au bout de deux ans ? Après dix ans ?
2. Modélisez cette suite. Reconnaissez-vous une suite connue ?
3. Au bout de combien d'années aurez-vous 1000€ sur votre compte ?

Exercice 2 :

On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_1 et la condition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq 1 \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$$

1. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; en préciser la raison.
   (b) Calculer v_n en fonction de u_1 et de n
2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

   (a) $u_1 = 3$ (b) $u_1 = -1$ (c) $u_1 = 4$

Exercice 3 :

On considère le programme python suivant :

```python
def Exercice():
  x=1
  y=10
  while(x+y >5):
    y=2*x+y
    x=-2*x
```

Pour étudier le comportement de ce programme, et, en particulier savoir s'il ne boucle pas de manière infinie, on considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans lesquelles, les nombres x_n et y_n représentent l'état (ou les valeurs) des variables x et y à l'itération n. Ainsi, nous avons :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 10 \\ x_{n+1} = -2x_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n \end{cases}$$

1. Calculer x_1, y_1, x_2, y_2
2. Démontrer que $x_n = (-2)^n$
3. Démontrer que $y_n = 10 + \frac{2}{3}(1-(-2)^n)$
4. Démontrer qu'il existe un rang n tel que l'instruction
`while (x+y>5)`
soit fausse.
5. Que conclure quant à la terminaison du programme ?

Testez ce programme en Python.

Limites

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathcal{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n} u_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite géométrique
2. En déduire une formule explicite de u_n
3. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de rééls *stritements positifs* telle que $\forall n > 1, \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \ell < 1$. Montrer que la suite converge et que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Exercice 6 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$

1. Quelle est limite de cette suite ?
2. Justifier l'existence d'un entier N_0, tel que si $n > N_0$, alors $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{49}{72}$
3. Calculer l'entier N_0

Exercice 7 : * Somme des termes d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et telle que $u_0 = a$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1)(2a+nr)}{2}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q où q est différent de 1 ($q \neq 1$)
Montrer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$
Que dire dans le cas $q = 1$?

Exercice 8 : * Triangle de Pascal et automates cellulaires

On défini les coefficient binomiaux par les formule de récurrence

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} 1 & n = 0, k = 0; \\ 0 & \text{if } n < 0 \text{ ou } k < 0 \text{ ou } k > n \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. sur une grille, calculer $\binom{n}{k}$ pour $0 \leq k, n \leq 8$
2. sur une grille, colorier la case (n, k) en noir si $\binom{n}{k}$ est impair, en blanc sinon.
3. donner et démontrer une formule pour calculer la couleur $c(n, k)$ de la case (n, k), et l'utiliser pour colorier la grille de taille 17×17

   La limite de la forme obtenue s'appelle le triangle de Sierpiński