R5.A.12 Modélisations mathématiques

Thibault Godin, Lucie Naert
IUT de Vannes 28 novembre 2023

Plan

Valeurs et vecteurs propres

Mesure d'importance et marche aléatoire dans les graphes

Page-rank

Valeurs et vecteurs propres

$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}M = \mu\boldsymbol{u}$:

- $\boldsymbol{u}$ est un *vecteur propre* (à gauche) de M

Valeurs et vecteurs propres

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}M = \mu \boldsymbol{u}$:

- $\boldsymbol{u}$ est un *vecteur propre* (à gauche) de M
- μ est une *valeur propre* (à gauche) de M

Valeurs et vecteurs propres

$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}M = \mu\boldsymbol{u}$:

- $\boldsymbol{u}$ est un *vecteur propre* (à gauche) de M
- μ est une *valeur propre* (à gauche) de M
- $\boldsymbol{v}$ est un *vecteur propre* (à droite) de M

Valeurs et vecteurs propres

$M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}M = \mu\boldsymbol{u}$:

- $\boldsymbol{u}$ est un *vecteur propre* (à gauche) de M
- μ est une *valeur propre* (à gauche) de M
- $\boldsymbol{v}$ est un *vecteur propre* (à droite) de M
- λ est une *valeur propre* (à droite) de M

Valeurs et vecteurs propres

$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}M = \mu\boldsymbol{u}$:

- $\boldsymbol{u}$ est un *vecteur propre* (à gauche) de M
- μ est une *valeur propre* (à gauche) de M
- $\boldsymbol{v}$ est un *vecteur propre* (à droite) de M
- λ est une *valeur propre* (à droite) de M

Valeurs et vecteurs propres

$M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^n$, $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $M\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{u}M = \mu \boldsymbol{u}$:

- $\boldsymbol{u}$ est un *vecteur propre* (à gauche) de M
- μ est une *valeur propre* (à gauche) de M
- $\boldsymbol{v}$ est un *vecteur propre* (à droite) de M
- λ est une *valeur propre* (à droite) de M

Vérifier que $(-6, -1, 4)$ est un vecteur propre à gauche et donner la valeur propre associée

Même chose pour $(3, 2, 5)$ (à droite). $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Vérifier que 0 et 4 sont des valeurs propres et donner les vecteurs propres (à gauche) associés

Spectre

Soit M une matrice. α est une **valeur propre** de M ($\exists \boldsymbol{v}\ \ M{=}\alpha\boldsymbol{v}$)

- **Multiplicité** de $\alpha \rightsquigarrow$ nombre de vecteurs 2-à-2 linéairement indépendants tq α valeur propre
- **spectre** $\rightsquigarrow$ l'ensemble des valeurs propres (comptées avec multiplicité)

Spectre

Soit M une matrice. α est une **valeur propre** de M ($\exists \boldsymbol{v} \;\; M{=}\alpha \boldsymbol{v}$)

- **Multiplicité** de $\alpha \rightsquigarrow$ nombre de vecteurs 2-à-2 linéairement indépendants tq α valeur propre
- **spectre** $\rightsquigarrow$ l'ensemble des valeurs propres (comptées avec multiplicité)

rmq : même spectre à gauche et à droite

Spectre

Soit M une matrice. α est une **valeur propre** de M ($\exists \boldsymbol{v}\ \ M{=}\alpha\boldsymbol{v}$)

- **Multiplicité** de $\alpha \rightsquigarrow$ nombre de vecteurs 2-à-2 linéairement indépendants tq α valeur propre
- **spectre** $\rightsquigarrow$ l'ensemble des valeurs propres (comptées avec multiplicité)

rmq : même spectre à gauche et à droite

Attention : une matrice a au maximum de n mais peu être plus petit.

Spectre

Soit M une matrice. α est une **valeur propre** de M ($\exists \boldsymbol{v} \;\; M{=}\alpha\boldsymbol{v}$)

- **Multiplicité** de $\alpha \rightsquigarrow$ nombre de vecteurs 2-à-2 linéairement indépendants tq α valeur propre
- **spectre** $\rightsquigarrow$ l'ensemble des valeurs propres (comptées avec multiplicité)

rmq : même spectre à gauche et à droite

Attention : une matrice a au maximum de n mais peu être plus petit.

Théorème Spectral

Soit M une matrice symétrique réelle de taille n. Alors M possède n-valeurs propres, toutes réelles.

Méthode algébrique :

- calcul des valeurs propres λ_i

Méthode algébrique :

- calcul des valeurs propres λ_i
  - Calcul de
    $P_M(X) = \mathrm{Det}(X.I - M)$
    algorithme exact (définition)
    efficace ($O(n^3)$)

Méthode algébrique :

- calcul des valeurs propres λ_i
  - Calcul de $P_M(X) = \mathrm{Det}(X.I - M)$
    algorithme exact (définition)
    efficace ($O(n^3)$)
  - Calcul des racines de $P_M(X) \rightsquigarrow$ valeurs propres de M
    algorithme approximé efficace ($O(n^2)$)

Calcul des valeurs et vecteurs propres

Méthode algébrique :

- calcul des valeurs propres λ_i
  - Calcul de $P_M(X) = \mathrm{Det}(X.I - M)$
    algorithme exact (définition) efficace ($O(n^3)$)
  - Calcul des racines de $P_M(X) \rightsquigarrow$ valeurs propres de M
    algorithme approximé efficace ($O(n^2)$)
- résolution du système $M\boldsymbol{v_i} = \lambda_i \boldsymbol{v_i}$
  algorithme exact efficace (pivot de Gauss) ($O(n^3)$)

Méthode algébrique :

- calcul des valeurs propres λ_i
  - Calcul de $P_M(X) = \text{Det}(X.I - M)$
    algorithme exact (définition)
    efficace ($O(n^3)$)
  - Calcul des racines de $P_M(X) \rightsquigarrow$ valeurs propres de M
    algorithme approximé efficace ($O(n^2)$)
- résolution du système $M\boldsymbol{v_i} = \lambda_i \boldsymbol{v_i}$
  algorithme exact efficace (pivot de Gauss) ($O(n^3)$)

Méthode algébrique :

- calcul des valeurs propres λ_i
  - Calcul de $P_M(X) = \mathrm{Det}(X.I - M)$
    algorithme exact (définition)
    efficace ($O(n^{\mathbf{3}})$)
  - Calcul des racines de $P_M(X) \rightsquigarrow$ valeurs propres de M
    algorithme approximé efficace ($O(n^{\mathbf{2}})$)
- résolution du système $M\boldsymbol{v_i} = \lambda_i \boldsymbol{v_i}$
  algorithme exact efficace (pivot de Gauss) ($O(n^{\mathbf{3}})$)

Méthodes itératives (Puissances itérées) :

Algorithm 6: Eigenvalue

Data: matrice M, précision ε
$\pi^{(0)}$=$random_{\mathbb{R}^n}(vector)$
$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} M$
while $||\pi^{(k-1)} - \pi^{(k)}|| > \varepsilon$ **do**
  $\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)} M$
$\boldsymbol{v}_0 = \pi^{(k)}$ **return** $\boldsymbol{v}_0$

Méthode algébrique :

- calcul des valeurs propres λ_i
  - Calcul de $P_M(X) = \mathrm{Det}(X.I - M)$
    algorithme exact (définition)
    efficace ($O(n^3)$)
  - Calcul des racines de $P_M(X) \rightsquigarrow$ valeurs propres de M
    algorithme approximé efficace ($O(n^2)$)
- résolution du système $M\boldsymbol{v_i} = \lambda_i \boldsymbol{v_i}$
  algorithme exact efficace (pivot de Gauss) ($O(n^3)$)

Méthodes itératives (Puissances itérées) :

Algorithm 7: Eigenvalue

Data: matrice M, précision ε
$\pi^{(0)}$=$random_{\mathbb{R}^n}(vector)$
$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}M$
while $||\pi^{(k-1)} - \pi^{(k)}|| > \varepsilon$ **do**
  $\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)}M$
$\boldsymbol{v}_0 = \pi^{(k)}$ **return** $\boldsymbol{v}_0$

Pour le calculs des autres valeurs propres, on adapte cet algo (puissances inverse / deflation) ou on utilise des algo plus puissants (méthode QR)

Plan

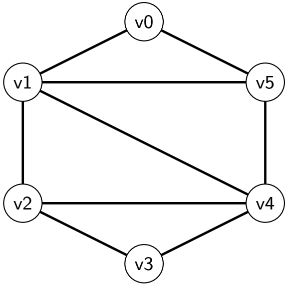
Valeurs et vecteurs propres

Mesure d'importance et marche aléatoire dans les graphes

Page-rank

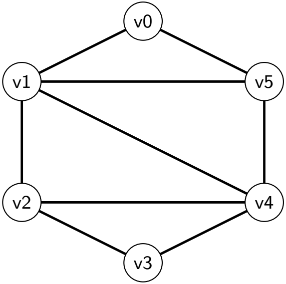
Rappel : chemins

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Rappel : chemins

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

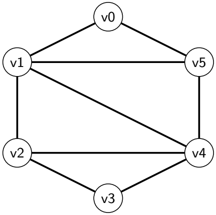


Proposition

Soit M la matrice d'adjacence d'un graphe $\mathcal{G}$. Alors le coefficient $M^h_{i,j}$ représente le nombre de chemins/chaînes de longueur exactement h allant de i à j

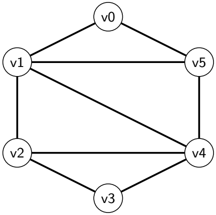
Promenade sur les graphes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



Promenade sur les graphes

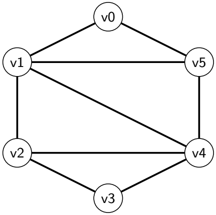
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Promenade sur les graphes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

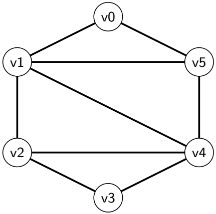


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Promenade sur les graphes

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&1\\1&1&0&0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$



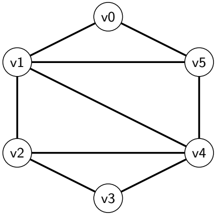
$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&1\\1&1&0&0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&1\\1&0&1&0&1&1\\0&1&0&1&1&0\\0&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&1\\1&1&0&0&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\1\\1\\0\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\6\\3\\3\\3\\5\end{pmatrix}$$

Parcours du graphe depuis un sommet

Promenade sur les graphes

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



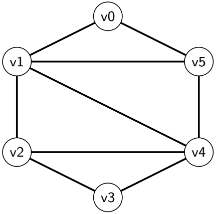
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Parcours du graphe depuis un sommet

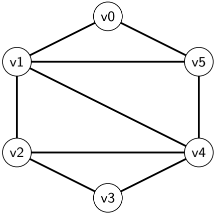
Problème : "création d'énergie/matière"

Promenade *aléatoire* sur les graphes



$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

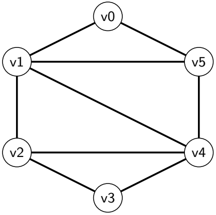
Promenade *aléatoire* sur les graphes



$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{7}{24} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{4}{24} \\ \frac{3}{24} \\ 0 \\ \frac{7}{24} \\ \frac{3}{24} \end{pmatrix}$$

Promenade *aléatoire* sur les graphes



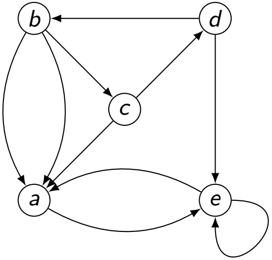
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} \\ 0 \\ \frac{7}{24} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{24} \\ \frac{4}{24} \\ \frac{3}{24} \\ 0 \\ \frac{7}{24} \\ \frac{3}{24} \end{pmatrix}$$

$M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est *stochastique* si $\forall i, j, M_{i,j} \geq 0$
et $\sum_{i=\mathbf{1}}^{n} M_{i,j} = 1$
bistochastique $\rightsquigarrow$ M et M^T sont stochastiques.

Lien forts avec les proba $\rightsquigarrow$ *chaînes de Markov*

Qui est important dans un graphe ?



Qui est important dans un graphe ?

www $\rightsquigarrow$ gros[1] réseau (graphe)

Qui est important dans un graphe ?

www $\rightsquigarrow$ gros[1] réseau (graphe) $\rightsquigarrow$ impossible de trier "à la main" des résultats de recherche par mot-clef

Qui est important dans un graphe ?

www $\rightsquigarrow$ gros[1] réseau (graphe) $\rightsquigarrow$ impossible de trier "à la main" des résultats de recherche par mot-clef

$\rightsquigarrow$ Google's PageRank

Qui est important dans un graphe ?

www $\rightsquigarrow$ gros[1] réseau (graphe) $\rightsquigarrow$ impossible de trier "à la main" des résultats de recherche par mot-clef

$\rightsquigarrow$ Google's PageRank

hypothèses :

- Si le site 1 renvoie vers le site 2, le site 1 considère le site 2 comme intéressant

Qui est important dans un graphe ?

www $\rightsquigarrow$ gros[1] réseau (graphe) $\rightsquigarrow$ impossible de trier "à la main" des résultats de recherche par mot-clef

$\rightsquigarrow$ Google's PageRank

hypothèses :

- Si le site 1 renvoie vers le site 2, le site 1 considère le site 2 comme intéressant
- Si un site important renvoie vers un site 2, le site 2 est sûrement important aussi

Qui est important dans un graphe ?

www $\rightsquigarrow$ gros[1] réseau (graphe) $\rightsquigarrow$ impossible de trier "à la main" des résultats de recherche par mot-clef

$\rightsquigarrow$ Google's PageRank

hypothèses :

- Si le site 1 renvoie vers le site 2, le site 1 considère le site 2 comme intéressant
- Si un site important renvoie vers un site 2, le site 2 est sûrement important aussi
- Si le site 1 renvoie vers beaucoup d'autres sites, il faut répartir l'importance entre ces sites.

Qui est important dans un graphe ?

L'importance (HITS) $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, ..., n\}$ serait donnée par $\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$

Qui est important dans un graphe ?

L'importance (HITS) $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, ..., n\}$ serait donnée par $\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$
formule récursive, on ne dispose pas a priori de méthode assurant :

Qui est important dans un graphe ?

L'importance (HITS) $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, ..., n\}$ serait donnée par $\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$
formule récursive, on ne dispose pas a priori de méthode assurant :

- l'existence,

Qui est important dans un graphe ?

L'importance (HITS) $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, ..., n\}$ serait donnée par $\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$
formule récursive, on ne dispose pas a priori de méthode assurant :

- l'existence,
- l'unicité,

Qui est important dans un graphe ?

L'importance (HITS) $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, ..., n\}$ serait donnée par $\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$
formule récursive, on ne dispose pas a priori de méthode assurant :

- l'existence,
- l'unicité,
- le calcul efficace

Qui est important dans un graphe ?

L'importance (HITS) $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, ..., n\}$ serait donnée par $\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$
formule récursive, on ne dispose pas a priori de méthode assurant :

- l'existence,
- l'unicité,
- le calcul efficace

Qui est important dans un graphe ?

L'importance (HITS) $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, ..., n\}$ serait donnée par $\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$
formule récursive, on ne dispose pas a priori de méthode assurant :

- l'existence,
- l'unicité,
- le calcul efficace

d'une solution $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ non triviale.

Qui est important dans un graphe ?

L'importance (HITS) $\pi_j \geq 0$ de la page $j \in \{1, ..., n\}$ serait donnée par $\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$
formule récursive, on ne dispose pas a priori de méthode assurant :

- l'existence,
- l'unicité,
- le calcul efficace

d'une solution $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ non triviale.

(On peut supposer que les scores recherchés sont normalisés, $\sum |\pi_i| = 1$)

Matrice pondérée

$\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$

Matrice pondérée

$\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Matrice pondérée

$\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

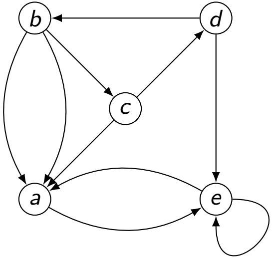
$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} H \rightsquigarrow \text{vp } 1$$

Matrice pondérée

$\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} H \rightsquigarrow \text{vp } 1$$

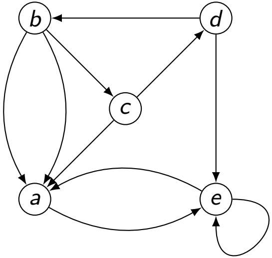


Matrice pondérée

$\pi_j = \sum_{i \in Pred(j)} \frac{\pi_i}{d_+ i}$

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} H \rightsquigarrow \text{vp } 1$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Hit : exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\pi = \pi H$$

Hit : exemple

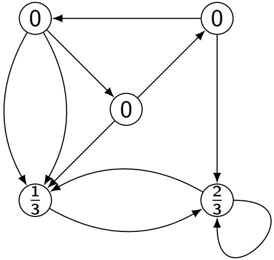
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\pi = \pi H$$

Hit : exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

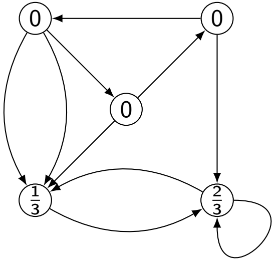


$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$\pi = \pi H$$

Hit : exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

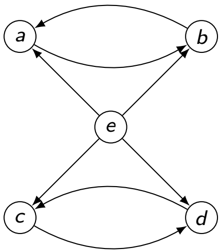


$$H_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

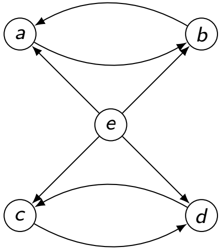
$$\pi = \pi H$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{2}{3}\right)$$

$\pi = \pi H$: Limites

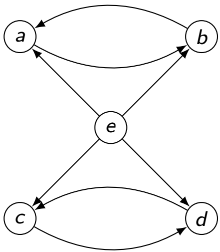


$\pi = \pi H$: Limites



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

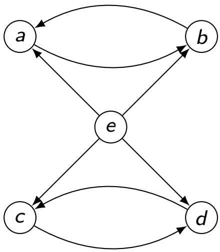
$\pi = \pi H$: Limites



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$$

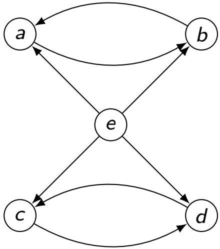
$\pi = \pi H$: Limites



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ $v_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\pi = \pi H$: Limites

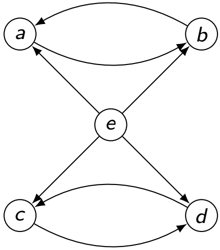


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ $v_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\leadsto$ non-unique (et contradictoire)

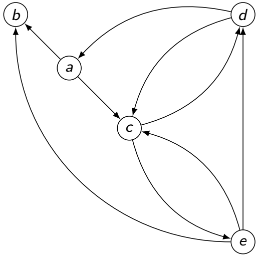
$\pi = \pi H$: Limites



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

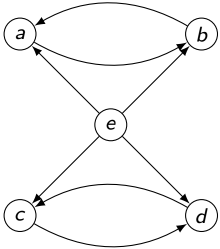
$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ $v_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\rightsquigarrow$ non-unique (et contradictoire)



$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

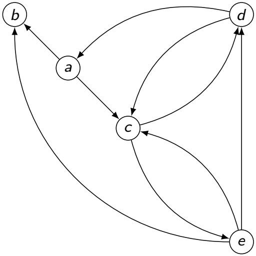
$\pi = \pi H$: Limites



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ $v_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

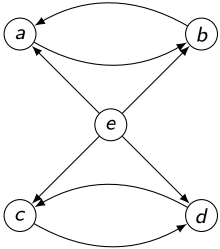
$\rightsquigarrow$ non-unique (et contradictoire)



$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

vp $(0.85, -0.40, -0.23 + 0.27i, -0.23 - 0.27i, 0)$

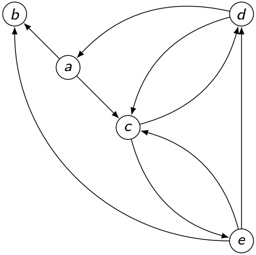
$\pi = \pi H$: Limites



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

$v_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$ $v_2 = \left(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

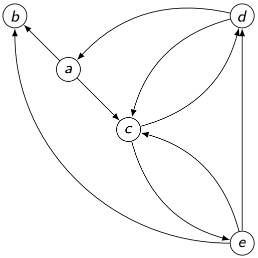
$\rightsquigarrow$ non-unique (et contradictoire)

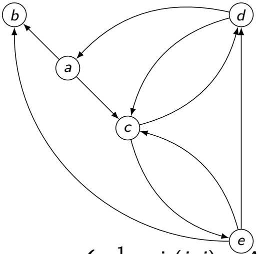


$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

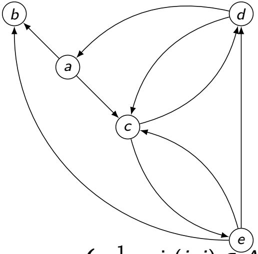
vp $(0.85, -0.40, -0.23 + 0.27i, -0.23 - 0.27i, 0)$

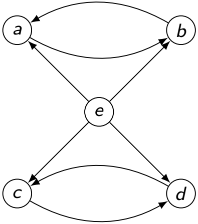
$\rightsquigarrow$ impossible


b
d
a
c
e

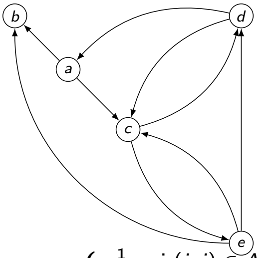


$$\text{puits} \rightsquigarrow S_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ \frac{1}{n} \text{ si } d_+(i) = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

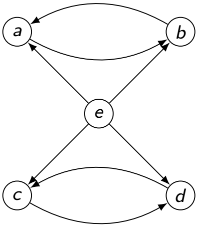




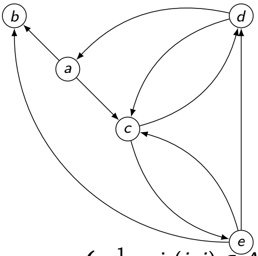
$$\text{puits} \rightsquigarrow S_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ \frac{1}{n} \text{ si } d_+(i) = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

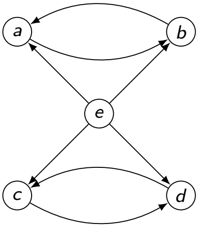


puits $\rightsquigarrow$ $S_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ \frac{1}{n} \text{ si } d_+(i) = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$



pas fortement connexe/période $\rightsquigarrow$
$G = \alpha S + \frac{(1-\alpha)}{n} J$

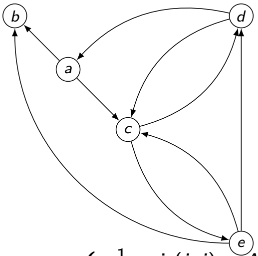


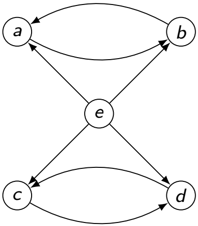


puits $\rightsquigarrow S_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ \frac{1}{n} \text{ si } d_+(i) = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

pas fortement connexe/période $\rightsquigarrow$
$G = \alpha S + \frac{(1-\alpha)}{n} J$

Solution : Perturber légèrement le modèle initial pour obtenir un système "proche" mais avec de "bonnes" propriétés $\rightsquigarrow$ pouvoir appliquer le thm. de Perron.





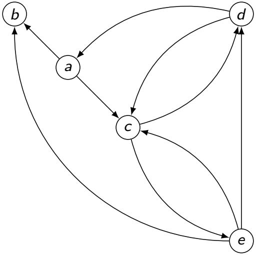
puits $\rightsquigarrow S_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{d_+(i)} \text{ si } (i,j) \in A \\ \frac{1}{n} \text{ si } d_+(i) = 0 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

pas fortement connexe/période $\rightsquigarrow$
$G = \alpha S + \frac{(1-\alpha)}{n} J$

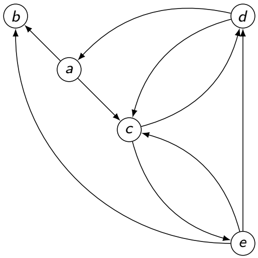
Solution : Perturber légèrement le modèle initial pour obtenir un système "proche" mais avec de "bonnes" propriétés $\rightsquigarrow$ pouvoir appliquer le thm. de Perron.

(La matrice $\frac{J}{n}$ est parfois appelée matrice de téléportation)

$\pi = \pi G$: Solutions

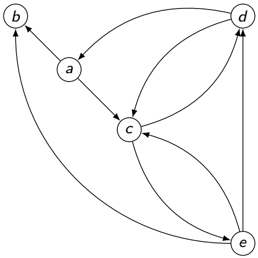


$\pi = \pi G$: Solutions



$$G = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.455 & 0.455 & 0.03 & 0.03 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.455 & 0.455 \\ 0.455 & 0.03 & 0.455 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.313 & 0.313 & 0.313 & 0.03 \end{pmatrix}$$

$\pi = \pi G$: Solutions



$$G = \begin{pmatrix} 0.03 & 0.455 & 0.455 & 0.03 & 0.03 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.03 & 0.03 & 0.03 & 0.455 & 0.455 \\ 0.455 & 0.03 & 0.455 & 0.03 & 0.03 \\ 0.03 & 0.313 & 0.313 & 0.313 & 0.03 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = (0.16, 0.18, 0.27, 0.22, 0.17)$$

Calcul "en pratique"

Algorithm 8: Eigenvalue

Data: matrice M, précision ε

$\pi^{(0)}$= random(vector)

$\pi^{(1)} = \pi^{(0)}M$

while $||\pi^{(k-1)} - \pi^{(k)}|| > \varepsilon$ **do**

  $\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)}M$

return $\pi^{(k)}$

Calcul "en pratique"

Algorithm 9: Eigenvalue

Data: matrice M, précision ε
$\pi^{(0)}$= random(vector)
$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} M$
while $||\pi^{(k-1)} - \pi^{(k)}|| > \varepsilon$ **do**
  $\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)} M$
return $\pi^{(k)}$

- Converge (sous réserves sur M vérifiées pour G)
- On demande généralement que $\sum_i \pi_i^{(k)} = 1$

Calcul "en pratique"

Algorithm 10: Eigenvalue

Data: matrice M, précision ε
$\pi^{(0)}$= random(vector)
$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} M$
while $||\pi^{(k-1)} - \pi^{(k)}|| > \varepsilon$ **do**
  $\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)} M$
return $\pi^{(k)}$

- Converge (sous réserves sur M vérifiées pour G)
- On demande généralement que $\sum_i \pi_i^{(k)} = 1$

- Une centaine d'itérations suffisent pour obtenir une approximation utilisable
- Le calcul peut être réalisé hors ligne, par exemple, une fois par mois, pour mettre à jour le vecteur des scores.

Calcul "en pratique"

Algorithm 11: Eigenvalue

Data: matrice M, précision ε
$\pi^{(0)}$= random(vector)
$\pi^{(1)} = \pi^{(0)} M$
while $||\pi^{(k-1)} - \pi^{(k)}|| > \varepsilon$ **do**
 $\pi^{(k+1)} = \pi^{(k)} M$
return $\pi^{(k)}$

- Converge (sous réserves sur M vérifiées pour G)
- On demande généralement que $\sum_i \pi_i^{(k)} = 1$

- Une centaine d'itérations suffisent pour obtenir une approximation utilisable
- Le calcul peut être réalisé hors ligne, par exemple, une fois par mois, pour mettre à jour le vecteur des scores.

Sur notre exemple de G ; $k = 11$ et
$\pi^{(k)} - \pi^{(k)} G = (-1.5e-07, \quad -5.2e-07, \quad -8.9e-07, \quad 3.1e-07, \quad 1.3e-06)$