Croissances comparées

Cas classiques :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Plus généralement, pour tous réel strictement positifs a et b

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{ax}}{x^b} = +\infty \quad (1), \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{ax} = 0 \quad (2)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^b}{x^a} = 0 \quad (3), \quad \lim_{x\to 0^+} x^a\,|\ln(x)|^b = 0 \quad (4)$$

L'hypothèse $a > 0$ est indispensable. Supposer de plus $b > 0$ est en fait inutile (car pour $b \leq 0$, les limites considérées ne sont pas des formes indéterminées).

En cas de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ dans un calcul de limite de fonction, on se rapporte très souvent au tableau suivant :

$n \to +\infty$	log	poly.	exp
log	$\frac{\text{log}}{\text{log}} \rightsquigarrow$ fact.	$\frac{\text{poly}}{\text{log}} \to \infty$	$\frac{\text{exp}}{\text{log}} \to \infty$
poly	$\frac{\text{log}}{\text{poly}} \to 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{poly}} \rightsquigarrow$ fact.	$\frac{\text{exp}}{\text{poly}} \to \infty$
exp	$\frac{\text{log}}{\text{exp}} \to 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{exp}} \to 0$	$\frac{\text{exp}}{\text{exp}} \rightsquigarrow$ fact.

Par exemple, pour $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^3}{3^n}$ est de la forme $\frac{\text{poly}}{\text{exp}}$, et tend donc vers l'infini. Ici $\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^3}{3^n} = -\infty$ à cause du coefficient -2.

Les cases diagonales du tableau ne nous permettent pas de conclure directement, mais une méthode permet de trouver facilement la réponse.

polynôme sur polynôme : On factorise par le terme de plus grande puissance.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{-2n^3+n}{3n^2+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^2}\left(\frac{-2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1}\left(\frac{\overbrace{-2+\dfrac{1}{n^2}}^{\to -2}}{\underbrace{3+\dfrac{1}{n^2}}_{\to 3}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} n\frac{-2}{3}\\
&= -\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^5-2n^3+n}{7n^5+3n^2+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5}{n^5}\left(\frac{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}{7+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^5}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} 1\cdot\frac{1}{7}\\
&= \frac{1}{7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3+n}{7n^5+3n^2+1} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{n^5}\left(\frac{2+\frac{1}{n^2}}{7+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^5}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{7}\frac{1}{n^2}\\
&= 0
\end{aligned}$$

Cette technique fonctionne également avec les formes $\frac{\log}{\log}$ **et** $\frac{\exp}{\exp}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{4\ln^2(n)+7\ln(n)}{7\ln^9(n)+8\ln^5(n)}\} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^2(n)}{\ln^9(n)}\left(\frac{4+\frac{7}{\ln n}}{7+\frac{8}{\ln^4(n)}}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln^7(n)}\left(\frac{\overbrace{4+\dfrac{7}{\ln n}}^{\to 4}}{\underbrace{7+\dfrac{8}{\ln^4(n)}}_{\to 7}}\right)\\
&= 0
\end{aligned}$$

Attention ! ne pas confondre $\ln^2(n) = (\ln n)^2 \neq \ln(n^2) = 2\ln n$

Cette méthode des croissances comparées permet de calculer des formes indéterminées compliquées :

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{3^n + \ln^2(n^4) + 1/n}{-n^4 + \ln n^3} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n3^n + 4n\ln^2(n) + 1}{n}}{-n^4 + 3\ln n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n3^n}{n^4} \frac{1 + \frac{4\ln^2 n}{3^n} + \frac{1}{n3^n}}{-1 + \frac{3\ln n}{n^4}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n^3} \frac{\overbrace{1 + \dfrac{4\ln^2 n}{3^n} + \dfrac{1}{n3^n}}^{\to 1}}{\underbrace{-1 + \dfrac{3\ln n}{n^4}}_{\to -1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{-3^n}{n^3} \\
&= -\infty
\end{aligned}
$$