

### Exercice 1 : (Langages)

Soit  $\Sigma = \{0, 1, 2\}$ .

1. Donnez en extension quelques langages construits sur  $\Sigma$  ayant pour cardinal 1, 2 et 3.
2. Quel est le plus petit et le plus gros langage (au sens de l'inclusion) que l'on peut construire sur  $\Sigma$ .
3. Soit  $L$  le langage composé des mots sur  $\Sigma$  qui ont un 0 en premier symbole et au moins deux 1 en fin de mot. Donnez quelques éléments de  $L$ . Que vaut  $\text{Card}(L)$ ? Peut-on donner une définition en extension de  $L$ ? Donnez une définition en compréhension de  $L$ . Donnez tous les mots  $\mathbf{w} \in L$ , vérifiant  $|\mathbf{w}| \leq 5$ .

### Exercice 2 : (Opérateur de concaténation de langages)

Soit un alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ .

1. Soit  $L = \{aa, b, bca\}$  et  $L' = \{a, bbb, cba\}$  deux langages construits sur  $\Sigma$ . Donnez en extension  $L.L'$ . Que vaut  $\text{Card}(L.L')$ ?
2. Soit  $L = \{aa, a, b\}$  et  $L' = \{a, cb\}$ . Donnez en extension  $L.L'$ . Que vaut  $\text{Card}(L.L')$ ?
3. Soit  $L = \{ab, a\}$  et  $L' = \{c, bc\}$ . Donnez en extension  $L.L'$ . Que vaut  $\text{Card}(L.L')$ ?
4. Que peut-on en conclure sur le cardinal de la concaténation de deux langages? Et quand un des langages est infini?
5. Quel est l'élément neutre pour la concaténation de mots? Et pour la concaténation de langages?

### Exercice 3 : (Opérateurs ensemblistes sur les langages)

Soit un alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Soient  $L = \{aaa, bb, c\}$ ,  $L' = \{\varepsilon, a, b, c, ba, ab, bb, aa\}$ ,  $L'' = \{c, bc, aa, bb\}$  trois langages sur  $\Sigma^*$ .

1. Calculez  $L \cap L'$  et  $L \cap L''$ .
2. Calculez  $L \cup L'$  et  $L \cup L''$ .
3. Calculez  $L' \setminus L$  et  $L'' \setminus L'$ .
4. Calculez  ${}^cL'$  et  ${}^cL$  (complémentaire dans  $\Sigma^*$ ).

### Exercice 4 : (Opérateur de Kleene)

Soit un alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Soient  $L = \{aaa, bb, c\}$ ,  $L' = \{\varepsilon, a, b, c, ba, ab, bb, aa\}$ ,  $L'' = \{c, bc, aa, bb\}$  trois langages sur  $\Sigma^*$ .

1. Donnez tous les mots de  $L^*$  de longueur inférieure ou égale à 4.
2. Démontrez que l'opérateur de Kleene est compatible avec l'inclusion ( $L \subset L' \Rightarrow L^* \subset L'^*$ ).
3. Montrez que  $L'^* = \Sigma^*$ . A-t-on le même résultat pour  $L$  et  $L''$ ?
4. Démontrez que pour tout langage  $L$  on a :  $L^*.L^* = L^*$
5. Démontrez que pour tout langage  $L$  on a :  $(L^*)^* = L^*$
6. Si  $L'^* = L^*$  que peut-on dire de  $L$  et  $L'$  (au sens de l'inclusion)? Justifiez votre réponse, utilisez des exemples si besoin.