

Exercice 1 : (Langages)

Soit $\Sigma = \{0, 1, 2\}$.

1. Rappelez la définition de langage construit sur un alphabet Σ .
2. Donnez en extension quelques langages construits sur Σ ayant pour cardinal 1, 2 et 3.
3. Quel est le plus petit et le plus gros langage (au sens de l'inclusion) que l'on peut construire sur Σ .
4. Soit L le langage composé des mots sur Σ qui ont un 0 en premier symbole et au moins deux 1 en fin de mot. Donnez quelques éléments de L . Que vaut $\text{Card}(L)$? Peut-on donner une définition en extension de L ? Donnez une définition en compréhension de L . Donnez tous les mots $\mathbf{w} \in L$, vérifiant $|\mathbf{w}| \leq 5$.

Exercice 2 : (Récapitulons!)

1. Soit Σ un alphabet. Que peut désigner X dans les situations qui suivent (il peut y avoir parfois plusieurs réponses possibles) :

- | | |
|--------------------------------------|----------------------------------------|
| 1. a. $X = \Sigma$ | g. $X \in \Sigma^*$ |
| b. $X = \Sigma$ | h. $X = \Sigma^*$ |
| c. $X \subseteq \Sigma$ | i. $X \subseteq \Sigma^*$ |
| d. $X \in \mathcal{P}(\Sigma)$ | j. $X \in \mathcal{P}(\Sigma^*)$ |
| e. $X = \mathcal{P}(\Sigma)$ | k. $X = \mathcal{P}(\Sigma^*)$ |
| f. $X \subseteq \mathcal{P}(\Sigma)$ | l. $X \subseteq \mathcal{P}(\Sigma^*)$ |
2. On prend le cas du langage Python (cela marcherait avec JAVA, C, Lisp ...). Que valent, pour ce langage, les ensembles Σ , Σ^* et $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ associés. On note P la syntaxe du langage Python. Quelles relations ensemblistes entretient P avec Σ^* et $\mathcal{P}(\Sigma^*)$. Donnez des mots \mathbf{w} et \mathbf{w}' vérifiant $\mathbf{w} \in P$ et $\mathbf{w}' \notin P$. Faites deux diagrammes de Venn représentant P , Σ , Σ^* et $\mathcal{P}(\Sigma^*)$.

Exercice 3 : (Opérateur de concaténation de langages)

Soit un alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$.

1. Soit $L = \{aa, b, bca\}$ et $L' = \{a, bbb, cba\}$ deux langages construits sur Σ . Donnez en extension $L.L'$. Que vaut $\text{Card}(L.L')$?
2. Soit $L = \{aa, a, b\}$ et $L = \{a, cb\}$. Donnez en extension $L.L'$. Que vaut $\text{Card}(L.L')$?
3. Soit $L = \{ab, a\}$ et $L' = \{c, bc\}$ Donnez en extension $L.L'$. Que vaut $\text{Card}(L.L')$?
4. Que peut-on en conclure sur le cardinal de la concaténation de deux langages? Et quand un des langages est infini?
5. Quel est l'élément neutre pour la concaténation de mots? Et pour la concaténation de langages?

Exercice 4 : (Opérateurs ensemblistes sur les langages)

Soit un alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Soient $L = \{aaa, bb, c\}$, $L' = \{\varepsilon, a, b, c, ba, ab, bb, aa\}$, $L'' = \{c, bc, aa, bb\}$ trois langages sur Σ^* .

1. Calculez $L \cap L'$ et $L \cap L''$.
2. Calculez $L \cup L'$ et $L \cup L''$.
3. Calculez $L' \setminus L$ et $L'' \setminus L'$.
4. Calculez $L \Delta L'$ et $L' \Delta L''$.
5. Calculez ${}^c L'$ et ${}^c L$ (complémentaire dans Σ^*).

Exercice 5 : (Opérateurs de Kleene)

Soit un alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Soient $L = \{aaa, bb, c\}$, $L' = \{\varepsilon, a, b, c, ba, ab, bb, aa\}$, $L'' = \{c, bc, aa, bb\}$ trois langages sur Σ^* .

1. Donnez tous les mots de L^* de longueur inférieure ou égale à 4.
2. Montrez que $L'^* = \Sigma^*$. A-t-on le même résultat pour L et L'' ?
3. Démontrez que l'opérateur de Kleene est compatible avec l'inclusion ($L \subset L' \Rightarrow L^* \subset L'^*$).
4. Démontrez que pour tout langage L on a : $L^*.L^* = L^*$
5. Démontrez que pour tout langage L on a : $(L^*)^* = L^*$
6. Si $L'^* = L^*$ que peut-on dire de L et L' (au sens de l'inclusion)? Justifiez votre réponse, utilisez des exemples si besoin.