TD 1 exercice 2

étude de la suite $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$

rmq : cette suite (définie par recurrence) n'est pas une suite "connue" (arithmétique, géometrique..) On doit donc trouver un moyen pour l'étudier.

Ici on va passer par une suite auxilliaire $(v_n)_n$ definie à partir de $(u_n)_n$ [1].
En étudiant (v_n) et en donnant une formule explicite on obtiendr une formule explicite pour (u_n) et donc sa limite

- $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$ mtq $(v_n)_n$ est une suite géométrique

Donc on cherche $q \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = q\, v_n$

Alors $v_{n+1} \overset{(\text{def})}{=} \dfrac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} + 1}$ (definition de v_n)

$$= \frac{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - 3}{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} + 1}$$ (on remplace u_{n+1} par sa def.)

$$= \frac{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} - 3\left(\frac{u_n + 3}{u_n + 3}\right)}{\frac{5u_n + 3}{u_n + 3} + 1\left(\frac{u_n + 3}{u_n + 3}\right)}$$ (on reduit au même dénominateur)

$$= \frac{\frac{5u_n + 3 - 3u_n - 9}{u_n + 3}}{\frac{5u_n + 3 + u_n + 3}{u_n + 3}}$$

[1] On ne précise pas ici comment $(v_n)_n$ est trouvée. Cela peut-être par des expérimentation numérique, voir TP2

$= \cancel{2u_n}$

(rappel : on cherche q tq : $= q\, v_n = q \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$)

$$= \frac{2u_n - 6}{6u_n + 6}$$

$$= \frac{2}{6} \frac{u_n - 3}{u_n + 1}$$

$$= \frac{1}{3} \frac{u_n - 3}{u_n + 1} = \frac{1}{3} v_n$$

Ainsi, la suite $(v_n)_n$ est une suite <u>géométrique</u> de raison $\frac{1}{3}$

$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{u_0 - 3}{u_0 + 1} \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3} v_n \end{cases}$$

Donc on a la formule explicite

$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$. En particulier $\lim v_n = 0$

On peut maintenant exprimer explicitement $(u_n)_n$.

$v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$ donc $v_n(u_n + 1) = u_n - 3$

donc $u_n v_n + v_n = u_n - 3$

donc $u_n v_n - u_n = -v_n - 3$

donc $u_n(v_n - 1) = -v_n - 3$

donc $u_n = \dfrac{-v_n - 3}{v_n - 1}$

Ainsi $u_n = \dfrac{v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 3}{v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n - 1}$

On peut maintenant calculer la limite de la suite $(u_n)_n$

- $u_0 = 4$ alors $V_0 = \frac{4-3}{4+1} = \frac{1}{5}$

donc $\lim u_n = \lim \frac{\frac{1}{5} \times (\frac{1}{5})^n - 3}{\frac{1}{5} \times (\frac{1}{5})^n - 1}$

$= \lim \frac{0-3}{0-1}$ (pas de forme indéterminée)

$= \boxed{3}$

- $u_0 = 3$ alors $V_0 = \frac{3-3}{3+1} = 0$

$\lim u_n = \lim \frac{0 \times (\frac{1}{5})^n - 3}{0 \times (\frac{1}{5})^n - 1} = \frac{0-3}{0-1} = \boxed{3}$

de plus $(u_n)_n$ est constante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 3$

⚠ - $u_0 = -1$ alors $V_0 = \frac{-1-3}{-1+1}$ impossible (div. par 0)

Ici on ne peut pas utiliser la suite auxilliaire $(V_n)_n$

Cependant on remarque $u_1 = \frac{5u_0 + 3}{u_0 + 3}$

$= \frac{-5+3}{-1+3} = \frac{-2}{2} = \boxed{-1}$

De même $u_2, u_3 \dots u_n = -1$. la suite est constante