NOM :

GROUPE :

R01.06 - Mathématiques discrètes
Contrôle Continu (1h15)
Mardi 12 octobre 2021 - A. Ridard

Exercice 1. 4

Soit P et Q deux assertions.
On considère l'assertion R définie par :

$$R \sim (P \wedge Q) \Longrightarrow (P \vee \neg Q)$$

1. Compléter la table de vérité de R.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg Q$	$P \vee \neg Q$	R
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V

2

2. Transformer R en une assertion équivalente[1] ne contenant que les connecteurs $\neg$ et $\wedge$.

$R \sim (P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee \neg Q)$

$\sim \neg(P \wedge Q) \vee (P \vee \neg Q)$

$\sim \neg\left(\neg\left(\neg(P \wedge Q) \vee (P \vee \neg Q)\right)\right)$

$\sim \neg\left((P \wedge Q) \wedge \neg(P \vee \neg Q)\right)$

$\sim \neg\left((P \wedge Q) \wedge (\neg P \wedge Q)\right)$

$\sim \neg\left(P \wedge \neg P \wedge Q\right)$

2

1. Vous pouvez d'ailleurs vous en servir pour "vérifier" la table de vérité de R

Exercice 2. 4

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, \ldots)$ une suite réelle.

On rappelle les définitions suivantes :

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *croissante* quand elle vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geq u_n$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *bornée* quand elle vérifie :

$$\exists m \in \mathbb{R},\ \exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$$

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers 0* quand elle vérifie :

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n| < \epsilon)$$

En niant ces définitions, exprimer à l'aide d'une phrase quantifiée chacune des assertions suivantes.

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.

$\exists n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} < u_n$

1

2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

$\forall m \in \mathbb{R},\ \forall M \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ (u_n < m \text{ ou } u_n > M)$

1,5

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0.

$\exists \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \text{ et } |u_n| \geq \varepsilon$

1,5

NOM :   GROUPE :

Exercice 3. 6,5

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? **Justifier** [2].

1. $\exists x \in \mathbb{R}^*$, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $\forall z \in \mathbb{R}^*$, $z - xy = 0$

(0,5) FAUX. Démontrons $\forall x \in \mathbb{R}^*, \exists y \in \mathbb{R}^*, \exists z \in \mathbb{R}^*, z - xy \neq 0$ (0,5)

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

Posons $y = -1 \in \mathbb{R}^*$ et $z = x \in \mathbb{R}^*$. 1,5

(0,5) Vérifions que y et z conviennent bien :

$$z - xy = x - x \times (-1) = 2x \neq 0 \quad \text{car } x \neq 0.$$

2. $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $\forall z \in \mathbb{R}^*$, $\exists x \in \mathbb{R}^*$, $z - xy = 0$

(0,5) VRAI.

Soit $y \in \mathbb{R}^*$ et $z \in \mathbb{R}^*$.

Posons $x = \frac{z}{y} \in \mathbb{R}^*$ 1

(0,5) Vérifions que x convient bien :

$$z - xy = z - \left(\frac{z}{y}\right) y = 0.$$

3. $\forall \epsilon > 0$, $\exists a > 0$, $a < \epsilon$

(0,5) VRAI

Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $a = \frac{\varepsilon}{2} > 0$. 1

(0,5) Vérifions que a convient bien :

$$a = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \text{car } \frac{1}{2} < 1 \ (\text{et } \varepsilon > 0)$$

2. Démontrer l'assertion si elle est vraie, et démontrer sa négation si elle est fausse

4. $\exists a>0,\ \forall \epsilon>0,\ a<\epsilon$

(0,5) FAUX. Démontrons $\forall a>0, \exists \varepsilon>0, a \geq \varepsilon$ (0,5)

Soit $a>0$.

Posons $\varepsilon = a > 0$.

(0,5) Vérifions que ε convient bien : (1,5)

$$\varepsilon = a \leq a \quad (\text{évident})$$

5. $\forall x \in \left[-\frac{5}{4},+\infty\right[,\ x=\sqrt{4x+5} \Longleftrightarrow x^2-4x-5=0$

(0,5) FAUX. Démontrons $\exists x \in \left[-\frac{5}{4},+\infty\right[,\ x^2-4x-5=0 \not\Rightarrow x=\sqrt{4x+5}$ (0,5)

Posons $x=-1 \in \left[-\frac{5}{4},+\infty\right[$.

(0,5) Vérifions que x convient bien : (1,5)

$$x^2-4x-5=0 \quad \text{et} \quad \sqrt{4x+5}=1 \neq x$$

NOM : GROUPE :

Exercice 4. 5,5

1. Soit a et b des réels. Démontrer **par contraposition** l'implication :

$$a+b \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow a \notin \mathbb{Q} \text{ ou } b \notin \mathbb{Q}$$

On rappelle qu'un réel x est rationnel[3] *s'il peut s'écrire comme une fraction de deux entiers relatifs :*

$$\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^*, x = \frac{p}{q}$$

Supposons $a \in \mathbb{Q}$ et $b \in \mathbb{Q}$.
Montrons $a+b \in \mathbb{Q}$. 1

Comme $a \in \mathbb{Q}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ tq $a = \frac{p}{q}$.

De même, il existe $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{Z}^*$ tq $b = \frac{p'}{q'}$.

On en déduit : $a+b = \frac{p}{q} + \frac{p'}{q'} = \frac{pq' + qp'}{qq'}$ 1,5

En posant $p'' = pq' + qp' \in \mathbb{Z}$ et $q'' = qq' \in \mathbb{Z}^*$,
on a bien $a+b = \frac{p''}{q''}$ c'est à dire $a+b \in \mathbb{Q}$.

3. On désigne par Q l'ensemble des rationnels

2. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer **par double implication** l'équivalence[4] :

$$\left(\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq b\right) \Longleftrightarrow \left(\exists m \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R},\ m \leq f(x) \leq \mathrm{M}\right)$$

On rappelle que $|f(x)| \leq b$ signifie $-b \leq f(x) \leq b$.

Montrons $\Longrightarrow$.

Supposons $\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq b$.

Montrons $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$.

1

Posons $m = -b \in \mathbb{R}$ et $M = b \in \mathbb{R}$.

Vérifions que m et M conviennent bien :

1

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme $|f(x)| \leq b$, on a $-b \leq f(x) \leq b$ c'est à dire $m \leq f(x) \leq M$.

Montrons $\Longleftarrow$

Supposons $\exists m \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, m \leq f(x) \leq M$.

Montrons $\exists b \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq b$.

Posons $b = \max\{|m|, |M|\} \in \mathbb{R}$.

1

Vérifions que b convient bien :

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$-b \leq -|m| \leq m \leq f(x) \leq M \leq |M| \leq b$

D'où $-b \leq f(x) \leq b$ c'est à dire $|f(x)| \leq b$.

4. Elle exprime qu'une fonction est bornée si et seulement si elle est minorée et majorée