

## R1.07 - Outils fondamentaux Contrôle Terminal



Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Vendredi 21 janvier 2022
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	8 pages
Impression:	A4 recto-verso agrafé (1 point)
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Non
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1. (5) On considère la matrice  $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Calculer  $P^2 - 3P + 2I$ .

(alulom d'abrd p²

(0 1-1)

(-1 2-1)

(1-1 1)

$$P^{2}-3P+2I = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.

De 
$$9^2 - 39 + 2I = 0$$
 on tire:  $-\frac{1}{2}(9^2 - 39) = I$ 

Donc 
$$\left(-\frac{1}{2}P_{+}\frac{3}{2}I\right)P = I$$
 et  $P\left(-\frac{1}{2}P_{+}\frac{3}{2}I\right) = I$ 

D'où P inversible et 
$$P'' = -\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}I$$

$$= \frac{1}{2}(P-3I) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Calculer les coordonnées du vecteur 
$$(1,0,-2)$$
 dans la base  $\mathcal{B}' = (u,v,w)$  définie par :

$$u = (0, -1, 1), \ v = (1, 2, -1), \ w = (-1, -1, 2)$$

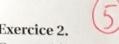
$$\mathcal{M}((1p_{3}-2), \mathcal{B}') = P^{-1}\mathcal{M}((1,0,-2))$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

## Exercice 2.

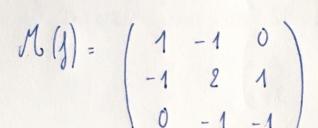


On considère l'application linéaire f définie par :

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (x - y, -x + 2y + z, -y - z)$$

1. Écrire  $\mathcal{M}(f)$ , la matrice de f dans la base canonique.



2. Montrer que f n'est pas bijective.



In at per bijective 
$$\iff$$
  $det(N_0(y)) = 0$ .

Or  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$ .

3. Déterminer  $f^{-1}(\{(0,0,0)\})$  sous la forme d'un "Vect".

On cherche les 
$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$
 tels que  $f((x,y,z)) = (0,0,0)$ 

$$\iff \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases}$$

$$J^{-1}\left(\left\{(22,2)\right\}\right) = \left\{\left(x,y,3\right) \in \mathbb{R}^{3} \mid x = -3 \text{ et } y = -3\right\}$$

$$= \left\{\left(-3,-3,3\right) \mid 3 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{3\left(-1,-1,1\right) \mid 3 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \text{Vect}\left(\left(-1,-1,1\right)\right).$$

NOM:

GROUPE:

Exercice 3.

On considère f l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associée à  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

o A st inversible (=> det (A) 
$$\neq 0$$
. (1)

Or  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ 

Done A est invesible.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & 2 & -1 \\ \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 \\ \end{array}$$

2. En déduire 
$$f^{-1}(x, y, z)$$
 pour tout  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\mathcal{M}\left(f^{-1}((x,y,y))\right) = \mathcal{M}\left(f^{-1}\right)\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{M}\left(f\right)^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x + 3y - 2y \\ -3y + 2z \\ 2y - 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.



On considère f l'application linéaire de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associée à  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ .

On introduit la (nouvelle) base  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  avec  $e'_1 = (1, 2, 2), e'_2 = (1, 2, 1)$  et  $e'_3 = (1, 0, 0)$ .

1. Déterminer sous forme de triplet  $f(e_1)$ ,  $f(e_2)$  et  $f(e_3)$ 



$$\mathcal{N}\left(f\left(e_{4}^{\prime}\right)\right) = \mathcal{M}\left(f\right)\mathcal{M}\left(e_{4}^{\prime}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

De même, pra: 
$$\mathcal{M}(f(e_2)) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc 
$$f(e_2) = (-1, -2, -1)$$

et 
$$\mathcal{M}(\{e'_3\}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
 done  $\{e'_3\} = \begin{pmatrix} 1, 4, 6 \end{pmatrix}$ 

2. A l'aide de la sortie Jupyter Notebook suivante, calculer 
$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$$
, la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

Out[2]: 
$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

3. Vérifier les trois colonnes de 
$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$$
 en utilisant les résultats de la question 1.

$$\begin{cases}
(e'_{1}) = 3e'_{1} = 3 \cdot (1, 2, 2) = (3, 6, 6)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(e'_{2}) = -e'_{2} = -(1, 2, 1) = (-1, -2, -1)
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
(e'_{3}) = 4e'_{1} - 2e'_{2} - e'_{3}
\end{cases}$$

$$= 4(1, 2, 2) - 2(1, 2, 1) - (1, 0, 0)$$

$$= (1, 2, 2) - 2(1, 2, 1) - (1, 0, 0)$$