NOM : GROUPE :

R3.08 - Probabilités
Contrôle Terminal

Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Vendredi 13 janvier 2023
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	10 pages dont 2 tables
Impression :	A3 R/V (pages 1 à 4) + A3 R/V (pages 5 à 8) + A4 R/V (pages 9 et 10) **séparés**
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Oui
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1.
Un étudiant [1] vient de récupérer les clés de son nouvel appartement. Il s'agit d'un trousseau de quatre clés indistinguables. Elles ouvrent toutes la porte de l'appartement, mais seule l'une d'entre elles ouvre également la porte de l'immeuble !

Après une soirée bien (trop) arrosée, il rentre et doit trouver l'unique clé permettant d'accéder à l'intérieur de l'immeuble. Dans son état, il manque clairement de méthode puisqu'à chaque essai sans succès, il ne pense pas à mettre de côté la mauvaise clé !

On note X la variable aléatoire égale au nombre de tentatives nécessaires pour trouver la bonne clé.

1. Déterminer la loi de X.

2. En combien de tentatives peut-il *espérer* trouver la bonne clé ?

3. Quelle est la probabilité qu'il doive faire plus que 3 tentatives ?

[1]. toujours le même

4. Sachant qu'il a déjà fait 2 tentatives sans succès, quel est la probabilité qu'il réussisse en 5 tentatives au plus ?

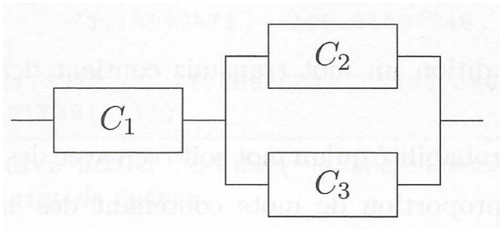
Il est content de son nouvel appartement qui est bien placé, mais il regrette d'habiter au 10-ième étage lorsque l'ascenseur de l'immeuble tombe en panne ! En fait, ses voisins qui habitent l'immeuble depuis plus de 20 ans lui ont avoué que l'ascenseur tombait en panne 2 fois par mois en moyenne.

On note Y la variable aléatoire égale au nombre de pannes par mois, et l'on suppose que Y suive une loi de Poisson.

5. Quelle est la probabilité de n'avoir aucune panne dans un mois ?

6. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 3 pannes dans un mois ?

Exercice 2.
On considère un système informatique dont les composants C_1, C_2 et C_3 sont disposés de la manière suivante :



Autrement dit :

- C_2 et C_3 sont en parallèle
- C_1 est en série avec le système (C_2, C_3)

Les MTBF [2] de chaque composants C_1, C_2 et C_3 sont respectivement 30 000 heures, 15 000 heures et 2 000 heures.

On note :

- T_i l'instant de première défaillance du composant C_i en supposant les taux de défaillance constants (lois exponentielles)
- T l'instant de première défaillance du système

1. Déterminer les lois de T_1, T_2 et T_3.

2. Quelle est la probabilité que le système fonctionne encore au bout de 5000 heures ?

[2]. Mean Time Between Failures correspondant à l'espérance de T estimée à partir d'un grand échantillon

3. Au bout de combien d'heures faut-il changer le composant C_1 pour que son risque de défaillance n'excède pas 10% ?

NOM : GROUPE :

Exercice 3.
Un hôtel restaurant propose deux gammes de chambres, les chambres standards et les chambres VIP (Very Important Person).
Un client se présente à cet hôtel pour réserver une chambre. On considère cette arrivée comme une expérience aléatoire.

Les statistiques de l'hôtel conduisent aux considérations suivantes :

- la probabilité que le client choisisse une chambre VIP est égale à $0,4$
- la probabilité que le client dîne au restaurant de l'hôtel est égale à $0,3$
- si le client choisit une chambre VIP, la probabilité qu'il dîne au restaurant de l'hôtel est égale à $0,6$

On note V l'événement « le client choisit une chambre VIP », et R l'événement « le client dîne au restaurant de l'hôtel ».

On s'intéresse au montant (en euro) de l'addition d'un client de l'hôtel au restaurant, et l'on note M ce montant.

1. **Dans cette question, on ne s'intéresse qu'aux clients ayant choisi une chambre standard**.
   Pour un tel client, on modélise M par la loi normale de paramètres $m = 45$ et $\sigma = 10$.

   (a) Quelle est la part des additions dont le montant dépasse 60 euros ?

   (b) Quelle est la part des additions dont le montant est compris entre 35 et 50 euros ?

(c) Sous quel montant se trouvent seulement 5% des additions ?

(d) Pour remercier les clients les plus « généreux », le restaurant offre le digestif lorsque le montant dépasse un certain seuil. Quel est ce seuil lorsque le restaurant remercie les 10% des clients les plus « généreux » ?

2. **Dans cette question, on ne s'intéresse qu'aux clients ayant choisi une chambre VIP**.
   Pour un tel client, on modélise M par la loi uniforme sur $[40, 80]$.

   (a) Quelle est la part des additions dont le montant dépasse 60 euros ?

   (b) Quelle est la part des additions dont le montant est compris entre 35 et 50 euros ?

3. **Dans cette question, on s'intéresse à tous les clients qui dînent au restaurant**.

(a) Calculer $\mathrm{P}\left(V \cap R\right)$ et $\mathrm{P}\left(\overline{V} \cap R\right)$.

(b) Quelle est la part des additions dont le montant dépasse 60 euros ?

Table E La distribution de Poisson

Les valeurs dans la partie centrale de la table donnent la probabilité de x occurrences dans un processus de Poisson, avec une moyenne de μ. Par exemple, quand μ = 1,6, la probabilité de quatre occurrences est de 0,0551.

					μ					
x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0	0.9048	0.8187	0.7408	0.6703	0.6065	0.5488	0.4966	0.4493	0.4066	0.3679
1	0.0905	0.1637	0.2222	0.2681	0.3033	0.3293	0.3476	0.3595	0.3659	0.3679
2	0.0045	0.0164	0.0333	0.0536	0.0758	0.0988	0.1217	0.1438	0.1647	0.1839
3	0.0002	0.0011	0.0033	0.0072	0.0126	0.0198	0.0284	0.0383	0.0494	0.0613
4	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0016	0.0030	0.0050	0.0077	0.0111	0.0153
5	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0007	0.0012	0.0020	0.0031
6	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

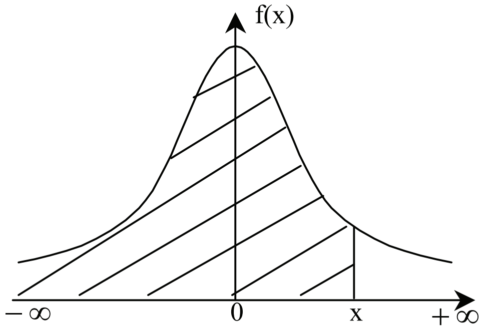
					μ					
x	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
0	0.3329	0.3012	0.2725	0.2466	0.2231	0.2019	0.1827	0.1653	0.1496	0.1353
1	0.3662	0.3614	0.3543	0.3452	0.3347	0.3230	0.3106	0.2975	0.2842	0.2707
2	0.2014	0.2169	0.2303	0.2417	0.2510	0.2584	0.2640	0.2678	0.2700	0.2707
3	0.0738	0.0867	0.0998	0.1128	0.1255	0.1378	0.1496	0.1607	0.1710	0.1804
4	0.0203	0.0260	0.0324	0.0395	0.0471	0.0551	0.0636	0.0723	0.0812	0.0902
5	0.0045	0.0062	0.0084	0.0111	0.0141	0.0176	0.0216	0.0260	0.0309	0.0361
6	0.0008	0.0012	0.0018	0.0026	0.0035	0.0047	0.0061	0.0078	0.0098	0.0120
7	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0008	0.0011	0.0015	0.0020	0.0027	0.0034
8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0003	0.0005	0.0006	0.0009
9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002

					μ					
x	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.7	2.8	2.9	3.0
0	0.1225	0.1108	0.1003	0.0907	0.0821	0.0743	0.0672	0.0608	0.0550	0.0498
1	0.2572	0.2438	0.2306	0.2177	0.2052	0.1931	0.1815	0.1703	0.1596	0.1494
2	0.2700	0.2681	0.2652	0.2613	0.2565	0.2510	0.2450	0.2384	0.2314	0.2240
3	0.1890	0.1966	0.2033	0.2090	0.2138	0.2176	0.2205	0.2225	0.2237	0.2240
4	0.0992	0.1082	0.1169	0.1254	0.1336	0.1414	0.1488	0.1557	0.1622	0.1680
5	0.0417	0.0476	0.0538	0.0602	0.0668	0.0735	0.0804	0.0872	0.0940	0.1008
6	0.0146	0.0174	0.0206	0.0241	0.0278	0.0319	0.0362	0.0407	0.0455	0.0540
7	0.0044	0.0055	0.0068	0.0083	0.0099	0.0118	0.0139	0.0163	0.0188	0.0216
8	0.0011	0.0015	0.0019	0.0025	0.0031	0.0038	0.0047	0.0057	0.0068	0.0081
9	0.0003	0.0004	0.0005	0.0007	0.0009	0.0011	0.0014	0.0018	0.0022	0.0027
10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0004	0.0005	0.0006	0.0008
11	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002
12	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001

					μ					
x	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	4.0
0	0.0450	0.0408	0.0369	0.0344	0.0302	0.0273	0.0247	0.0224	0.0202	0.0183
1	0.1397	0.1304	0.1217	0.1135	0.1057	0.0984	0.0915	0.0850	0.0789	0.0733
2	0.2165	0.2087	0.2008	0.1929	0.1850	0.1771	0.1692	0.1615	0.1539	0.1465
3	0.2237	0.2226	0.2209	0.2186	0.2158	0.2125	0.2087	0.2046	0.2001	0.1954
4	0.1734	0.1781	0.1823	0.1858	0.1888	0.1912	0.1931	0.1944	0.1951	0.1954

Loi Normale centrée réduite

Probabilité de trouver une valeur inférieure à x.



$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{u^2}{2}}\,du$$

X	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

Table pour les grandes valeurs de x :

x	3	3,2	3,4	3,6	3,8	4	4,2	4,4	4,6	4,8
F(x)	0,99865003	0,99931280	0,99966302	0,99984085	0,99992763	0,99996831	0,99998665	0,99999458	0,99999789	0,99999921