

R5.A.12 Modélisations mathématiques

Cours 2 : Mariage stables équitables

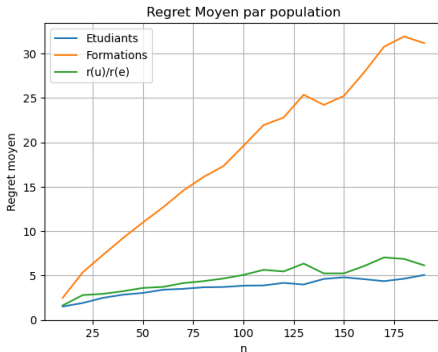
Thibault Godin, Lucie Naert

IUT de Vannes

13 novembre 2023

Motivation

L'algorithme de Gale-Shapley permet de donner une solution au problème des mariages stables entre les individus de deux populations P_1 et P_2 tout en avantageant l'une ou l'autre des parties.



Existe t-il un algorithme permettant d'obtenir des mariages toujours stables mais plus équitables ?

Principe de l'algorithme de Selkow

L'algorithme de Selkow a pour but de minimiser le regret maximal, c'est à dire le regret de l'individu (étudiant ou formation) le plus malheureux.

Definition 1

On appelle regret d'un étudiant (ou plus généralement, d'un élément de P_1) le rang, parmi ses préférences, de la formation (ou plus généralement, de l'élément de P_2) avec qui il est apparié. On définit de même le regret d'une formation.

Algorithme de Selkow

Entrées : Préférences de P_1 et P_2

Sortie : Liste de mariages équitables

Initialisation : Personne n'est marié

Algorithme de Selkow

Tant qu'un individu n'est pas marié :

- ▶ Faire un Gale-Shapley **sur les individus non mariés**
- ▶ Suite à ces propositions de mariages, calculer les bornes supérieures et inférieures des regrets de chaque individu du mariage
- ▶ Pour chaque individu :
 - ▶ si la borne supérieure est égale à la borne inférieure : le mariage est considéré comme *non perfectible*. Il est conservé.
 - ▶ sinon, le mariage est perfectible. Il est annulé.
- ▶ S'il reste des individus non mariés :
 - ▶ recherche de l'individu e avec le regret maximal parmi les individus célibataires
 - ▶ Interdire la possibilité de refaire ce mariage (on retire e de la liste de préférences de son partenaire et/ou on retire le partenaire de la liste de préférences de e)

Bornes supérieures et inférieures

L'algorithme de Selkow se base sur une propriété intéressante de Gale-Shapley pour fonctionner : le mariage résultant de Gale-Shapley est le mariage **le plus avantageux** pour les éléments de P_1 (qui choisissent selon leurs préférences) et **le moins avantageux** pour les éléments de P_2 (qui subissent les choix des partenaires).

Bornes supérieures et inférieures

Ainsi, après un mariage de type Gale-Shapley, le regret des éléments de P_1 sera donc minimal (**borne inférieure des regrets de P_1**) et celui des éléments de P_2 maximal (**borne supérieure des regrets de P_2**).

Évidemment, si l'on exécute Gale-Shapley après avoir échangé P_1 et P_2 , nous aurons donc une deuxième proposition de mariage qui avantage P_2 ! Le calcul des regrets sur ce nouveau mariage nous donnera la **borne inférieure des regrets de P_2** et la **borne supérieure des regrets de P_1** .

Mariages perfectibles/non perfectibles

Il suffit ensuite de comparer la borne inférieure et supérieure de chaque individu pour savoir s'il est dans un mariage **perfectible** (bornes différentes) ou **non** (les bornes sont égales : un meilleur mariage ne pourra pas être proposé).

Application sur un exemple

Initialisation : personne n'est marié.

0,2,5,1,4,3 ①

① 0,5,4,1,3,2

5,0,1,3,4,2 ②

② 5,0,4,3,1,2

2,5,1,3,0,4 ③

③ 0,1,3,4,5,2

3,4,5,0,1,2 ④

④ 1,4,5,0,2,3

0,2,5,1,3,4 ⑤

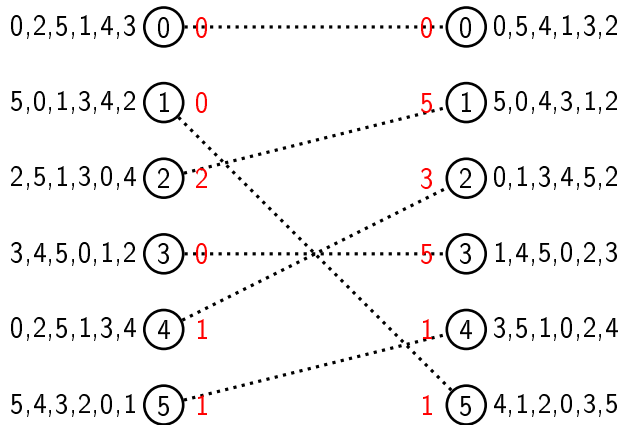
⑤ 3,5,1,0,2,4

5,4,3,2,0,1 ⑥

⑥ 4,1,2,0,3,5

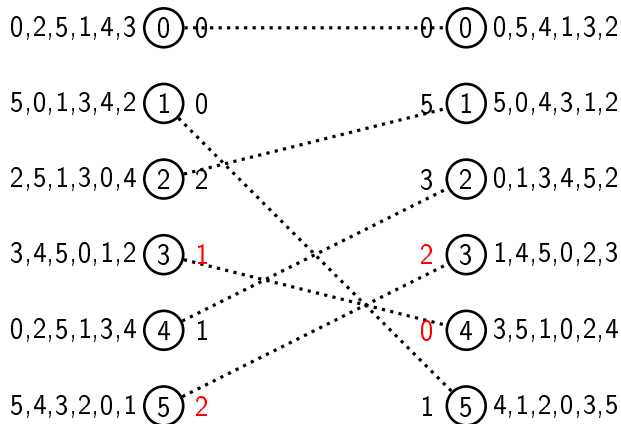
Mariages finaux : aucun

Gale-Shapley (P_1, P_2)



Borne inf(P_1) : $[0, 0, 2, 0, 1, 1]$ - Borne sup(P_2) : $[0, 5, 3, 5, 1, 1]$

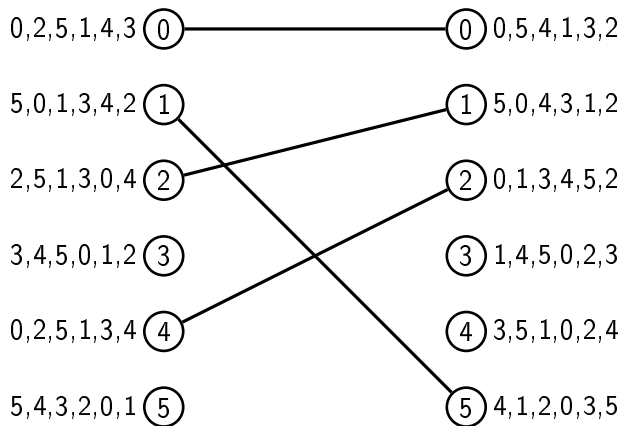
Gale-Shapley (P_2, P_1)



Borne $\inf(P_1)$: $[0, 0, 2, 0, 1, 1]$ - Borne $\sup(P_2)$: $[0, 5, 3, 5, 1, 1]$

Borne $\sup(P_1)$: $[0, 0, 2, 1, 1, 2]$ - Borne $\inf(P_2)$: $[0, 5, 3, 2, 0, 1]$

Conservation des mariages non perfectibles



Mariages finaux (mariages non perfectibles) : (0,0), (1,5), (2,1) et (4,2)

Regret maximal

①

②

③

borne = 1 ④

⑤

borne = 2 ⑥

①

②

③

④ borne = 5

⑤ borne = 1

⑥

Recherche du regret maximal dans les bornes supérieures des individus non mariés

Réduction du problème

3,4,5,0,1,2 (3)

(3) 1,4,5,0,2,3

(4) 3,5,1,0,2,4

5,4,3,2,0,1 (5)

Réduction du problème

3,4 ③

③ 5,3

④ 3,5

4,3 ⑤

- ▶ on ne considère que les individus non mariés

Réduction du problème

4 ③

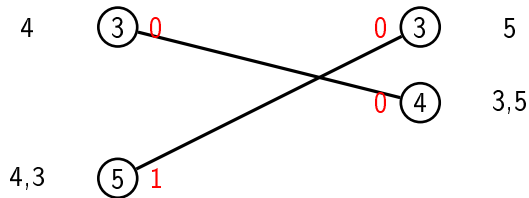
③ 5

④ 3,5

4,3 ⑤

- ▶ on ne considère que les individus non mariés
- ▶ on retire la possibilité de faire le mariage qui apporte le regret max

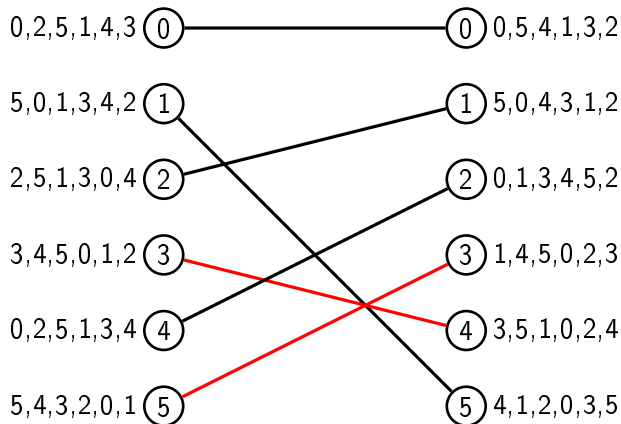
Réitération des étapes précédentes sur le sous-problème



Mariages finaux : $(0,0)$, $(1,5)$, $(2,1)$, $(3,5)$, $(4,2)$ et $(5, 3)$

Tout le monde est marié : fin de l'algorithme.

Résultat



Regret maximal moyen

