

TD 5

R2.07 Graphes

Le but de ce TD est de présenter quelques exemples, de difficultés variables, où une modélisation en graphe est pertinente.

Exercice 1 : Ore La mise en exploitation d'un nouveau gisement minier demande la réalisation d'un certain nombre de tâches. Le tableau suivant représente ces différentes tâches avec leurs relations d'antériorité.

Tâche	Description	Durée (en jours)	Tâches antérieures
A	obtention d'un permis d'exploitation	120	-
B	établissement d'une piste de 6 km	180	A
C	transport et installation de 2 sondeuses	3	B
D	création de logement des ouvriers	30	B
E	goudronnage de la piste	60	B
F	adduction d'eau	90	D
G	campagne de sondage	240	C,D
H	forage et équipement de trois puits	180	E,F,G
I	transport et installation du matériel	30	J,H
J	construction de bureaux ingénieurs	240	E,F,G
K	tracage et aménagement du fond	360	J,H
L	construction d'une laverie	240	J,H
M	début exploitation	-	toutes

- Déterminez le temps minimum de réalisation de l'ensemble
- Déterminez les dates au plus tôt et les dates au plus tard de chaque tâche.

Exercice 2 : Escales

La compagnie Coleop'Air dessert différentes villes européennes. Le tableau ci-dessous donne les durées de vol entre ces différentes villes.

- Comment déterminer le trajet le plus rapide entre deux villes ?
- Comment modifier la méthode précédente afin de prendre en compte la durée des escales dans les différents aéroports ?

	A	B	C	D	E
A		1h30	2h00		2h15
B	1h40				3h00
C	2h20			2h55	
D			3h20		1h05
E	2h25	3h10	1h10		

aéroport	temps d'escale
A	0h20
B	1h
C	0h40
D	1h10
E	0h30

Exercice 3 : Trainspotting On a six wagons à trier. Dans la gare de triage, les wagons entrent

dans l'ordre 2, 5, 3, 6, 1, 4 et doivent sortir dans l'ordre croissant. Deux wagons i et j peuvent être mis sur la même voie si et seulement s'ils entrent dans l'ordre dans lequel ils doivent sortir.

Dessinez un graphe illustrant la situation, en indiquant ce que représentent les sommets et les arêtes de votre graphe.

Quel problème de théorie des graphes est mis en jeu ici ?

Quel sera le nombre minimal de voies nécessaires au tri ?

Exercice 4 : Radio locale (CT 20-21)

Ci-dessous le tableau des distances en km à vol d'oiseau entre les six villes bretonnes.

	Rennes	Brest	S ^t Brieuc	Quimper	Vannes	Morlaix
Rennes	0	210	95	180	92	168
Brest		0	126	53	152	52
S ^t Brieuc			0	113	94	78
Quimper				0	107	68
Vannes					0	130
Morlaix						0

Radio Breizh a le projet d'installer une station de radio dans chacune des six villes bretonnes suivantes : Rennes – Brest – St Brieuc – Quimper – Vannes – Morlaix .

- Les émetteurs de Radio Breizh (un par ville) doivent être reliés par un réseau rapide ; Radio Breizh choisit donc d'installer un réseau de fibre optique.
 - Quel modélisation et algorithme(s) de graphes proposeriez vous à Radio Breizh pour minimiser leurs dépenses ?
 - Sachant qu'un kilomètre de fibre coûte 1€, quel est le prix minimum que devra dépenser Radio Breizh pour relier tous ses émetteurs.
- En radio, deux stations interfèrent dès lors qu'elles sont distantes de moins de 100 kilomètres à vol d'oiseau. Il faut donc que deux stations distantes de moins de 100km utilisent des fréquences différentes.
 - Modéliser ce problème en terme de graphes et proposez des algorithmes pour le résoudre.
 - Combien de fréquences, au minimum, Radio Breizh devra-t-elle prévoir pour éviter toute interférence entre les six stations ?

Exercice 5 : Éco-gestion On souhaite transformer des salles de cours en salles info. La gestion des tâches est donnée par le tableau ci-dessous.

Tâche à réaliser	Repère	Durée (en jours)	Tâches précédentes
Vider la salle et démonter le matériel	A	2	–
Nettoyer et repeindre	B	4	A
installer table et tableau	C	1	B
Commander et réceptionner le câblage	D	10	–
Déballer et contrôler le câblage	E	1	D
Câbler la salle	F	3	B, E
Installer et brancher les postes info.	G	1	C, F
Installer les logiciel, configurer et tester les postes	H	7	G

1. Donner la matrice d'adjacence du graphe modélisant ce problème.
2. On suppose que l'IUT dispose de personnels qualifiés en quantité illimité pour travailler à la rénovation de ces salles.
 - a. Comment organiser le travail au mieux et dans quel ordre. Préciser l'algorithme utilisé et dessiner le graphe que vous trouvez en résultat (attention à bien faire apparaître chaque étape de l'algorithme sur votre copie).
 - b. Donner, pour chaque tâche, la date au plus tôt à laquelle elle peut commencer. En déduire la durée totale des travaux.
3. Par mesure d'économie, l'IUT décide de n'affecter qu'une seule personne à la rénovation.
 - a. Donner un algorithme permettant de déterminer un ordre approprié.
 - b. Proposer un ordre valide pour l'exécution de ces tâches.
 - c. Donner la durée totale que prendront les travaux dans ce cas.

Exercice 6 : SNCF (CT 21-22) La SNCF doit transporter des produits chimiques en train. Malheureusement ce transport est potentiellement dangereux et certains produits ne doivent en aucun cas être en contact avec d'autres. Le train doit donc être séparé en wagons transportant chacun des produits chimiques n'interagissant pas ensemble.

La Brochure ED 753 *Stockage et transfert des produits chimiques dangereux* résume les incompatibilités dans le tableau suivant.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A		X			X				X	
B	X							X		X
C							X	X	X	
D						X			X	X
E	X					X	X			
F				X	X			X		
G			X		X					X
H		X	X			X				
I	X		X	X						
J		X		X			X			

1. Donner une première estimation du nombre de wagons nécessaires avec l'algorithme de coloration naïve (en précisant bien toutes les étapes et l'ordre choisi).
2. On rappelle l'algorithme DSatur : **DSatur Algorithm (so called because it uses saturation degree)**
 - (a) Arrange the vertices by decreasing order of degrees.
 - (b) Choose a vertex with a maximal saturation degree. If there is an equality, choose any vertex of maximal degree and saturation in the uncolored subgraph.
 - (c) Color the chosen vertex with the least possible (lowest numbered) color.
 - (d) If all the vertices are colored, stop. Otherwise, return to (b)

Appliquer en précisant bien toutes les étapes l'algorithme DSatur à ce graphe.

3. Donner inférieure sur le nombre optimal de wagons utilisés (bien préciser comment vous obtenez cette borne).

4. Écrire (en pseudo-code ou avec une syntaxe proche du python), une fonction **VerifColoration** ; qui prend en paramètre une matrice d'adjacence **A** et un tableau **C** donnant la couleur de chaque sommet ; et qui renvoie **Vrai** si **C** correspond à une coloration valide du graphe représenté par **A**, **Faux** sinon.

Exercice 7 : Chaises musicales

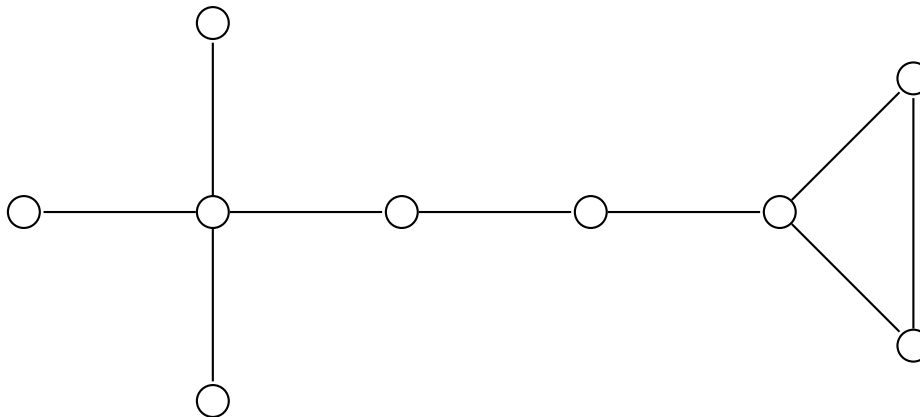
Sept élèves, Ahmed, Bruno, Charlotte, Damien, Elie, Fanny et Goulven, se sont rendus à la cafétéria aujourd'hui. Le tableau suivant précise « qui a rencontré qui » (la cafétéria étant petite, deux élèves présents au même moment se rencontrent nécessairement...).

l'élève	A	B	C	D	E	F	G
a rencontré	D,E	D,E,F,G	E,G	A,B,E	A,B,C,D,F,G	B,E,G	B,C,E,F

De combien de chaises la cafétéria doit-elle disposer au minimum ?

Dans ce genre de problème, toutes les combinaisons (arêtes) ne sont pas cohérente. On parle de graphes d'intervalle.

Exercice 8 : Un robot se promène sur le graphe ci-dessous. Partant d'un sommet quelconque s , appelé sommet de stockage, il doit déposer un cube sur chacun des autres sommets. Il possède suffisamment de cubes sur le sommet de stockage, mais ne peut transporter qu'un cube à la fois (il doit donc repasser par le sommet de stockage avant de livrer un autre cube). Calculer, pour chacun des sommets du graphe, le trajet minimum que doit parcourir le robot si ce sommet est sommet de stockage. Quel est le « meilleur » sommet de stockage ?



Exercice 9 : Jeu des bâtonnets On commence avec un tas de n bâtonnets. Chaque joueur à son tour prend 1, 2 ou 3 bâtonnets. Le joueur qui prend le dernier bâtonnet gagne.

Modéliser ce jeu pour $n = 10$. En déduire une stratégie générale.

Même question pour le jeu où le joueur qui prend le dernier bâton perd.