Corrigé : récurrence

Soit u_n la suite definie par $u_1 = 0$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$

On calcule les premières valeurs de la suite :
$u_2 = 0 + 2 \times 1 - 1 = 1$
$u_3 = 1 + 2 \times 2 - 1 = 4$
$u_4 = 4 + 2 \times 3 - 1 = 9$
$u_5 = 9 + 2 \times 4 - 1 = 16$
$u_6 = 16 + 2 \times 5 - 1 = 25$

On remarque que pour ces valeurs $u_n = (n-1)^2$; ce sera donc notre conjecture.
On va demontrer ce résultat par *recurrence.*

Initialisation : déjà vue ($u_1 = (1-1)^2 = 0$)

Hérédité : On suppose la propriété $u_k = (k-1)^2$ vraie pour $k = n$. On va montrer que cela implique que $u_{n+1} = n^2$

On va calculer u_{n+1}. $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$ or par hypothèse de récurrence $u_n = (n-1)^2$

$u_{n+1} = u_n + 2n - 1 = \underbrace{(n-1)^2}_{\text{hypothèse de récurrence}} + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 - 2n - 1 = n^2 = ((n+1)-1)^2$

On vient de montrer par récurrence $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n = (n-1)^2$.

Voici un énoncé alternatif ; on va utiliser la même rédaction.

Soit u_n la suite definie par $u_1 = 0$, $u_{n+1} = u_n + 2(n+1) - 1$

On calcule les premières valeurs de la suite :
$u_2 = 0 + 2 \times 2 - 1 = 3$
$u_3 = 3 + 2 \times 3 - 1 = 8$
$u_4 = 8 + 2 \times 4 - 1 = 15$
$u_5 = 15 + 2 \times 5 - 1 = 24$
$u_6 = 24 + 2 \times 6 - 1 = 35$

On remarque que pour ces valeurs $u_n = n^2 - 1$; ce sera donc notre conjecture.
On va demontrer ce résultat par *recurrence.*

Initialisation : déjà vue ($u_1 = 1^2 - 1 = 0$)

Hérédité : On suppose la propriété $u_k = k^2 - 1$ vraie pour $k = n$. On va montrer que cela implique que $u_{n+1} = (n+1)^2 - 1$

On va calculer u_{n+1}. $u_{n+1} = u_n + 2(n+1) - 1$ or par hypothèse de récurrence $u_n = n^2 - 1$

$u_{n+1} = n^2 - 1 + 2n + 2 - 1 = n^2 + 2n = n^2 + 2n + 1 - 1 = (n+1)^2 - 1$

On vient de montrer par récurrence $\forall n \in \mathbf{N}, u_n = n^2 - 1$.