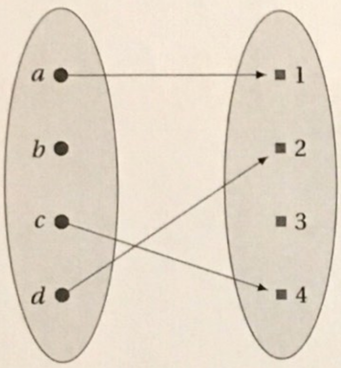
NOM : barème sur 30 (ramené sur 20) GROUPE :

R1.06 - Mathématiques discrètes
Contrôle Terminal 2

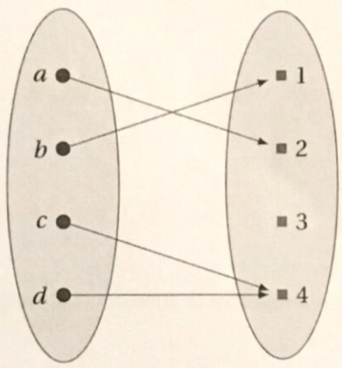
Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Jeudi 12 janvier 2023
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	8 pages
Impression :	A3 R/V (pages 1 à 4) + A4 R/V (pages 5 et 6) + A4 R/V (pages 7 et 8) **séparés**
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Non
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1. 13

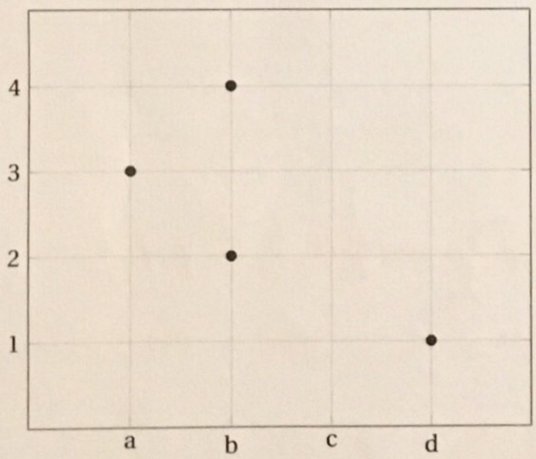
Considérons les six relations binaires de $E = \{a, b, c, d\}$ vers $F = \{1, 2, 3, 4\}$ définies ci-dessous.



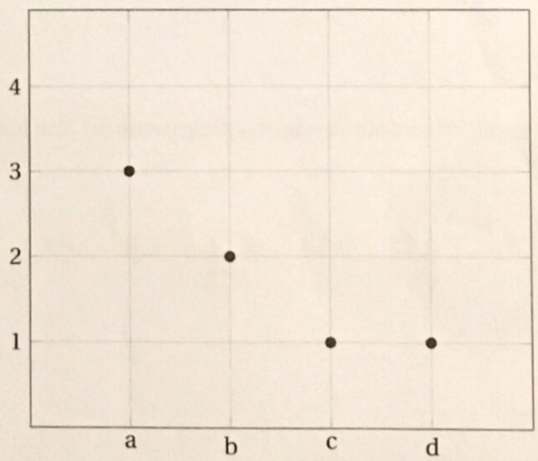
Relation $\mathscr{R}_1$



Relation $\mathscr{R}_2$



Relation $\mathscr{R}_3$



Relation $\mathscr{R}_4$

$\{(a, 1), (b, 2), (d, 3), (d, 4)\}$

Relation $\mathscr{R}_5$

$\{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 4)\}$

Relation $\mathscr{R}_6$

Indiquer pourquoi les affirmations suivantes sont fausses :

1. $\mathscr{R}_1$ est une application

$D_{\mathscr{R}_1} = \{a, c, d\} \neq E$ 1

2. $\mathscr{R}_2$ est une application injective

$c \mathscr{R}_2 4$ et $d \mathscr{R}_2 4$ (et évidemment $c \neq d$) 1

3. $\mathscr{R}_3$ est une application surjective

$\mathscr{R}_3$ n'est pas une fonction (car $b \mathscr{R}_3 2$ et $b \mathscr{R}_3 4$) donc ce n'est pas une application. 1

4. $\mathscr{R}_4$ est une application dont la relation réciproque est une fonction

$\mathscr{R}_4^{-1}$ n'est pas une fonction car $1 \mathscr{R}_4^{-1} c$ et $1 \mathscr{R}_4^{-1} d$. 1

5. $\mathscr{R}_5$ est une application dont la relation réciproque est une fonction

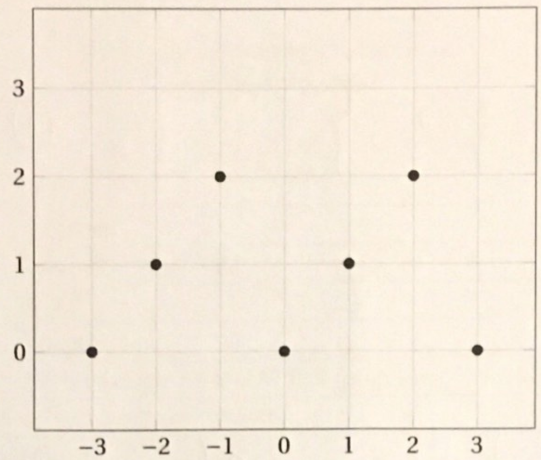
$\mathscr{R}_5$ n'est pas une application car $D_{\mathscr{R}_5} = \{a, b, d\} \neq E$ 1

6. $\mathscr{R}_6$ est une application surjective

3 est en relation avec aucun élément de E donc 1

$\mathscr{R}_6$ n'est pas surjective.

Exercice 2.
Considérons l'application f de $E = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ vers $F = \{0, 1, 2, 3\}$ définie par :



Application f

1. Déterminer les ensembles suivants :
   (a) $Im(f)$

$Im(f) = \{0, 1, 2\}$ 1

   (b) $f\big(\{3\}\big)$

$f(\{3\}) = \{0\}$ 1

   (c) $f\big(\{-1, 1\}\big)$

$f(\{-1, 1\}) = \{1, 2\}$ 1

   (d) $f^{-1}\big(\{3\}\big)$

$f^{-1}(\{3\}) = \emptyset$ 1

(e) $f^{-1}(\{0\})$

$f^{-1}(\{0\}) = \{-3, 0, 3\}$ 1

(f) $f^{-1}(\{0,1\})$

$f^{-1}(\{0,1\}) = \{-3, -2, 0, 1, 3\}$ 1

2. En modifiant les ensembles de départ et d'arrivée, rendre l'application f bijective [1].

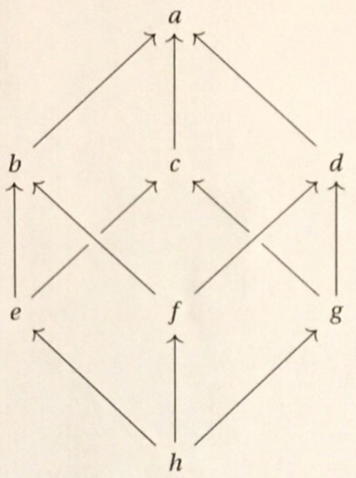
En prenant, par exemple, $\{0,1,2\}$ au départ et $\{0,1,2\}$ à l'arrivée, f induit bien une bijection. 1

1. Plus rigoureusement, définir une fonction bijective induite par f.

NOM : GROUPE :

Exercice 3. 6

On considère la relation d'ordre sur $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ représentée par le diagramme de Hasse suivant :



On note $A = \{e, f, h\}$ et $B = A \cup \{a, b\}$.

1. Cet ordre est-il partiel ou total ?

$e \not\leq f$ et $f \not\leq e$ donc cet ordre est partiel. 1

2. Déterminer, s'il existe, le minimum de A.

$\min A = h$ 1

3. Déterminer, s'il existe, le maximum de A.

max A n'existe pas. 1

4. Déterminer les éléments maximaux de A.

e et f sont maximaux dans A 1

5. Déterminer les majorants de A dans B.

Les majorants de A dans B sont b et a. 1

6. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure de A dans B.

$\sup_B A = \min\{b, a\} = b.$ 1

3

Exercice 4.

Considérons $A = \{a, b, c\}$ et notons A^* l'ensemble des « mots » formés à partir des lettres de l'« alphabet » A.

Plus précisément, en notant A^i l'ensemble des mots de « longueur » $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^* = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \ldots$$

avec $A^0 = \{\varnothing\}$ constitué du mot vide de longueur 0,
$A^1 = A = \{a, b, c\}$ constitué des mots de longueur 1,
$A^2 = \{aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc\}$ constitué des mots de longueur 2...

On définit deux relations d'ordre sur l'ensemble des mots A^* :

- l'ordre lexicographique (du dictionnaire) que l'on notera $\leq_{lex}$
- l'ordre militaire défini par :

$$\forall u, v \in A^*,\ u \leq_{mil} v \Longleftrightarrow \big(|u| < |v|\big) \text{ ou } \big(|u| = |v| \text{ et } u \leq_{lex} v\big)$$

où $|u|$ désigne la longueur du mot u c'est à dire son nombre de lettres.

Ainsi,

- $bc \leq_{mil} aaa$ car $|bc| = 2 < 3 = |aaa|$
- $ab \leq_{mil} ac$ car $|ab| = 2 = |ac|$ et $ab \leq_{lex} ac$

1. Représenter, de gauche à droite, le diagramme de Hasse sur $E = \{a, b, aa, ab, ba, bb\}$:
   (a) pour l'ordre lexicographique

$a \rightarrow aa \rightarrow ab \rightarrow b \rightarrow ba \rightarrow bb$ (1)

   (b) pour l'ordre militaire

$a \rightarrow b \rightarrow aa \rightarrow ab \rightarrow ba \rightarrow bb$ (1)

2. L'ordre militaire s'appuie sur l'ordre lexicographique mais aussi sur la longueur des mots.
   La relation binaire $\mathscr{R}$ définie ci-dessous est-elle une relation d'ordre sur l'ensemble des mots A^* ?

$$\forall u, v \in A^*,\ u \mathscr{R} v \Longleftrightarrow |u| \leq |v|$$

$a \mathscr{R} b$ et $b \mathscr{R} a$, mais $a \neq b$
donc $\mathscr{R}$ n'est pas anti-symétique.
et donc $\mathscr{R}$ n'est pas une relation d'ordre. (1)

NOM :

GROUPE :

Exercice 5. (8)

On considère la relation binaire sur $\mathbb{N}^2$ définie par :

$$\forall (a,b),\ (a',b') \in \mathbb{N}^2,\ (a,b)\mathscr{R}\,(a',b') \Longleftrightarrow a+b' = a'+b$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

<u>$\mathcal{R}$ est réflexive :</u>

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. (1)

$a+b = a+b$ donc $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a,b)$.

<u>$\mathcal{R}$ est symétrique :</u>

Soit (a,b), $(a',b') \in \mathbb{N}^2$. (1)

Supposons $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b')$.

Montrons $(a',b')\,\mathcal{R}\,(a,b)$.

il s'agit en fait de la symétrie de l'égalité.

Comme $a+b' = a'+b$, on a (évidemment) $a'+b = a+b'$

d'où le résultat.

<u>$\mathcal{R}$ est transitive :</u>

Soit (a,b), (a',b'), $(a'',b'') \in \mathbb{N}^2$.

Supposons $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b')$ et $(a',b')\,\mathcal{R}\,(a'',b'')$.

Montrons $(a,b)\,\mathcal{R}\,(a'',b'')$. (1)

$$\begin{aligned} a+b'' &= a-a'+a'+b'' \\ &= a-a'+a''+b' \quad \text{car } (a',b')\,\mathcal{R}\,(a'',b'') \\ &= a''-a'+a+b' \\ &= a''-\cancel{a'}+\cancel{a'}+b \quad \text{car } (a,b)\,\mathcal{R}\,(a',b') \\ &= a''+b. \end{aligned}$$

2. Montrer que les éléments $(1,1)$ et $(2,2)$ sont équivalents.

$1+2 = 2+1$ donc $(1,1)\,\mathcal{R}\,(2,2)$ 1

ou encore $(1,1) \sim (2,2)$ puisque $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence

3. Montrer que les éléments $(1,2)$ et $(2,3)$ sont dans la même classe d'équivalence.

$1+3 = 2+2\ (=4)$ donc $(1,2) \sim (2,3)$ et donc

$Cl((1,2)) = Cl((2,3))$. 1

4. Décrire la classe d'équivalence de $(1,1)$ et celle de $(1,2)$.

$$Cl((1,1)) = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid \cancel{1}+b = a+\cancel{1}\}$$ 1

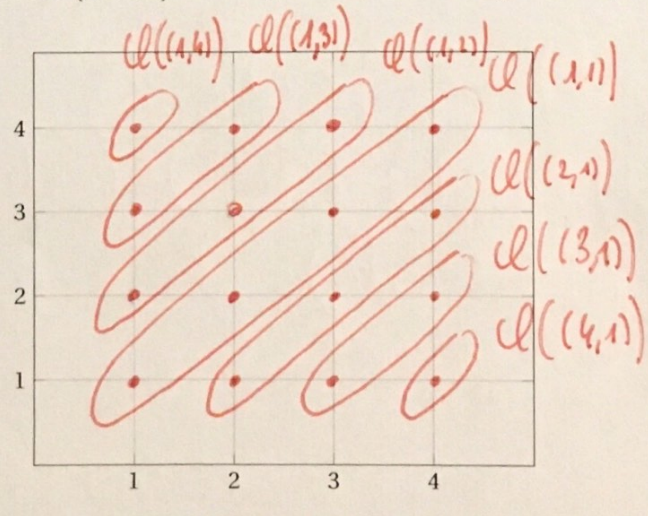
$$= \{(a,a) \mid a \in \mathbb{N}\}$$

$$Cl((1,2)) = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid 1+b = a+2\}$$

$$= \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid b = a+1\}$$ 1

$$= \{(a,a+1) \mid a \in \mathbb{N}\}$$

5. Représenter graphiquement la partition de $\{1,2,3,4\}^2$ induite par cette relation d'équivalence, en faisant bien apparaitre les différentes classes.



1