NOM : barème sur 22 (laissé sur 20)

GROUPE :

Vannes
Université Bretagne Sud

R1.07 - Outils fondamentaux
Contrôle Terminal

Université Bretagne Sud

Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Jeudi 12 janvier 2023
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	7 pages
Impression :	A3 R/V (pages 1 à 4) + A3 R/V (pages 5 à 7) **séparés**
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Non
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1. 13

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni de sa base canonique $\left(e_1, e_2\right)$ avec $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$.

1. Notons p la projection orthogonale sur $Vect\left(e_1\right)$ définie par :

$$p: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x,0) \end{array}$$

Écrire $\mathcal{M}(p)$, la matrice de p dans la base canonique.

$$\mathcal{M}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 1

Pour la suite de l'exercice, considérons f l'application linéaire définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y\,,\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y\right) \end{array}$$

Et notons $u = (3,-1)$.

2. Calculer $f(u)$.

$$f(u) = \left(\frac{4}{5}\times 3 + \frac{2}{5}\times(-1)\,,\ \frac{2}{5}\times 3 + \frac{1}{5}\times(-1)\right) = (2\,,1)$$ 1

3. Écrire $\mathscr{M}(f)$, la matrice de f dans la base canonique.

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

1

4. En déduire que f n'est pas bijective.

$$\det\left(\mathcal{M}(f)\right) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{5} - \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = 0$$

1

donc $\mathcal{M}(f)$ n'est pas inversible donc f n'est pas bijective.

5. Déterminer $f^{-1}\left(\{(0,0)\}\right)$ sous la forme d'un "Vect".

$$f^{-1}\left(\{(0,0)\}\right) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f\left((x,y)\right) = (0,0) \right\}.$$

Or $f((x,y)) = (0,0) \iff \mathcal{M}(f)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y = 0 \\ \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \frac{4}{5}x + \frac{2}{5}y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1$$

$$\iff y = -2x$$

Donc $f^{-1}\left(\{(0,0)\}\right) = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = -2x \right\}$

$$= \left\{ (x, -2x) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

2

$$= \left\{ x(1,-2) \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect}\left((1,-2)\right).$$

Considérons maintenant une autre base $\mathscr{B}' = \left(v_1, v_2\right)$ avec $v_1 = (2,1)$ et $v_2 = (-1,2)$.

6. Calculer $\mathscr{M}\left(f(v_1)\right)$ et $\mathscr{M}\left(f(v_2)\right)$, les matrices respectivement de $f(v_1)$ et $f(v_2)$ dans la base canonique.

$$\mathcal{M}\left(f(v_1)\right) = \mathcal{M}(f)\,\mathcal{M}(v_1) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$\mathcal{M}\left(f(v_2)\right) = \mathcal{M}(f)\,\mathcal{M}(v_2) = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

<u>Rq</u> : ce dernier résultat s'obtient directement moyennant la question 5

7. Déterminer $\mathscr{M}\left(f(v_1), \mathscr{B}'\right)$ et $\mathscr{M}\left(f(v_2), \mathscr{B}'\right)$, les matrices respectivement de $f(v_1)$ et $f(v_2)$ dans $\mathscr{B}'$.

$$\mathcal{M}\left(f(v_1), \mathcal{B}'\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } f(v_1) = (2,1) = 1 \times v_1 + 0 \times v_2 \quad (1)$$

d'après la question 6.

$$\mathcal{M}\left(f(v_2), \mathcal{B}'\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{car } f(v_2) = (0,0) = 0 \times v_1 + 0 \times v_2 . \quad (1)$$

<u>Rq</u> : le vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ a toujours pour coord 0 et 0 quelque soit la base.

8. En déduire $\mathscr{M}\left(f, \mathscr{B}'\right)$, la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.

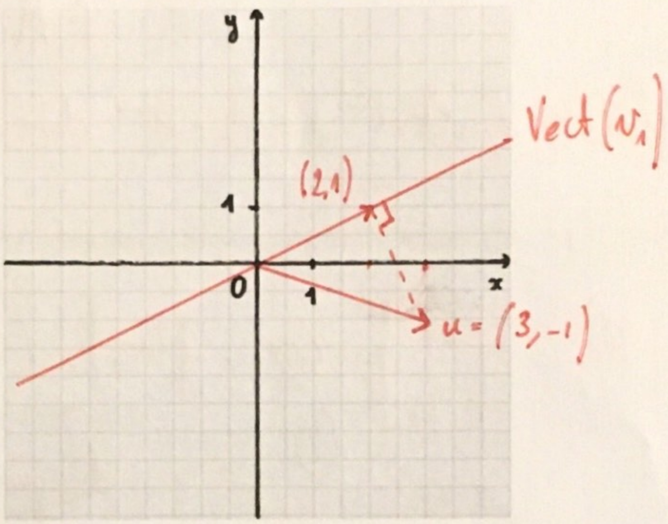
$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

9. A quelle transformation usuelle du plan correspond l'application f ?

Il s'agit de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1)$.

(1)

10. Représenter le vecteur u et son image par cette transformation en laissant vos traits de construction, puis vérifier que l'image ainsi construite corresponde bien à celle obtenue par le calcul à la question 2.



(1)

NOM :

GROUPE :

Exercice 2. 8 + 1

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\left(e_1, e_2, e_3\right)$ avec $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ et $e_3 = (0,0,1)$.

1. Notons r la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de $Vect\left(e_1\right)$ définie par :

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x,-z,y) \end{array}$$

Écrire $\mathcal{M}(r)$, la matrice de r dans la base canonique.

$$\mathcal{M}(r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1

2. Notons h_λ l'homothétie de centre O et de rapport λ définie par :

$$h_\lambda : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (\lambda x, \lambda y, \lambda z) \end{array}$$

Écrire $\mathcal{M}(h_\lambda)$, la matrice de h_λ dans la base canonique.

$$\mathcal{M}(h_\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

1

Considérons f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ **canoniquement** associée à $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -4 \\ -4 & 2 & -4 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

et introduisons une autre base $\mathscr{B}' = \left(v_1, v_2, v_3\right)$ avec $v_1 = (1,-1,0)$, $v_2 = (1,1,-2)$ et $v_3 = (1,1,1)$.

3. Déterminer $\mathscr{M}\left(f, \mathscr{B}'\right)$, la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.
On pourra s'inspirer des questions 6 à 8 de l'exercice 1.

$\mathcal{M}(f(v_1)) = A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $f(v_1) = (6,-6,0) = 6 \times v_1 + 0 \times v_2 + 0 \times v_3$

$\mathcal{M}(f(v_2)) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $f(v_2) = (6,6,6) = 0 \times v_1 + 0 \times v_2 + 6 \times v_3$

$\mathcal{M}(f(v_3)) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ donc $f(v_3) = (-6,-6,12) = 0 \times v_1 - 6 \times v_2 + 0 \times v_3$

D'où :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

2

4. A l'aide de $\mathscr{M}\left(f, \mathscr{B}'\right)$, montrer que f est bijective et déterminer $\mathscr{M}\left(f^{-1}, \mathscr{B}'\right)$, la matrice de f^{-1} dans $\mathscr{B}'$.
On pourra, si besoin, permuter deux lignes dans la méthode du pivot de Gauss.

$\det(\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')) = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \times \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 6^3 \neq 0$ donc f est bijective

et $\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}') = \mathcal{M}(f, \mathcal{B}')^{-1}$ donc nous allons inverser $\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{6} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{6} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{6} L_3 \end{array}$$

Conclusion :

$$\mathcal{M}(f^{-1}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & -1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

2

5. Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}') = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

En prenant $\lambda = 6$, on a bien :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} = \mathscr{M}(f, \mathscr{B}') .$$

1

6. En déduire que f est la composée de deux transformations usuelles de l'espace que l'on précisera.

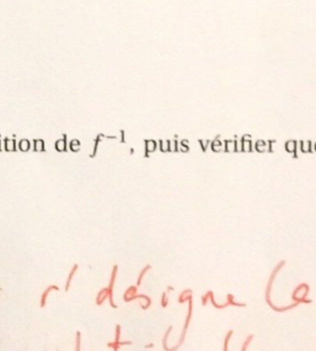
$$\mathscr{M}(f, \mathscr{B}') \underset{\text{d'après la quest. 5}}{=} \mathscr{M}(h_6)\, \mathscr{M}(r) \underset{\text{d'après le cours}}{=} \mathscr{M}(h_6 \circ r) .$$

1

donc $f = h_6 \circ r$.

7. **(Bonus)** A partir de cette décomposition de f, déterminer géométriquement une décomposition de f^{-1}, puis vérifier que cette décomposition corresponde bien à la matrice obtenue par le calcul à la question 4.

Géométriquement, on a : $f^{-1} = r' \circ h_{1/6}$ où r' désigne la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de $\mathrm{Vect}(e_1)$



Donc $\mathscr{M}(f^{-1}) = \mathscr{M}(r')\, \mathscr{M}(h_{1/6})$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \\ 0 & -1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

✓

1