NOM : GROUPE :

R1.07 - Outils mathématiques fondamentaux
Contrôle Continu (1h)
Mercredi 7 décembre 2022 - A. Ridard

Chaque système linéaire devra être résolu par la méthode du pivot de Gauss.
Aucune permutation d'équations et encore moins d'inconnues n'est autorisée.

Exercice 1. Déterminer les coordonnées du vecteur $(1,1,1)$ dans la base $\big((1,2,0),(-1,-3,1),(1,4,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $(1,1,1) = \alpha(1,2,0) + \beta(-1,-3,1) + \gamma(1,4,1)$
$= (\alpha - \beta + \gamma,\ 2\alpha - 3\beta + 4\gamma,\ \beta + \gamma)$

Pour cela, on résout le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha - 3\beta + 4\gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

4

$$\iff \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ -\beta + 2\gamma = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \beta + \gamma = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 1 \\ -\beta + 2\gamma = -1 \\ 3\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Les coordonnées sont 2, 1 et 0.

<u>Rq</u> : on a bien $2(1,2,0) + 1\times(-1,-3,1) + 0\times(1,4,1) = (1,1,1)$.

Exercice 2.
On considère $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$.
Un étudiant affirme que $P = Vect\big((1,1,0),(-1,0,1)\big)$, un autre prétend que $P = Vect\big((1,1,0),(0,1,1)\big)$.

Détailler la démarche (très probablement) suivie par chacun des étudiants.

Pour le premier : $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y - z\}$

$= \{(y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

2 $= \{y(1,1,0) + z(-1,0,1) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$= Vect\big((1,1,0), (-1,0,1)\big)$

Pour le deuxième : $P = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x + z\}$

$= \{(x, x+z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

2 $= \{x(1,1,0) + z(0,1,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$= Vect\big((1,1,0), (0,1,1)\big)$.

NOM : GROUPE :

Exercice 3.
Résoudre les systèmes suivants et exprimer, s'il est non vide, l'ensemble des solutions sous forme de "Vect".

1. $\begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ x - 3y + z + t = 0 \\ x + y - 3z + t = 0 \\ -3x + y + z + t = 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ -4y + 4t = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -4z + 4t = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ 4y + 4z - 8t = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_1 \end{cases}$$

4

$$\iff \begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ -4y + 4t = 0 \\ -4z + 4t = 0 \\ 4z - 4t = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ -4y + 4t = 0 \\ -4z + 4t = 0 \\ 0 = 0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases}$$

Cette étape n'est pas obligatoire, on peut remarquer que $L_4 = -L_3$ et donc retirer L_4 du système.

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = \{(t,t,t,t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{t(1,1,1,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$= \mathrm{Vect}\big((1,1,1,1)\big).$$

$$2. \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x - 3y + 4z = 1 \\ x - 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -y + 2z = -1 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -y + 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

3

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y + z = 1 \\ -y + 2z = -1 \\ 0 = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

L'égalité $0 = 1$ est toujours fausse, le système n'a donc pas de solution : $\mathcal{S} = \emptyset$.

NOM : GROUPE :

Exercice 4.
Pour chaque question, indiquer la (les) bonne(s) réponse(s). Une case cochée justement rapporte 1 point, une case cochée injustement enlève 0.5 point, et une case non cochée ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

1. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.	☒ $2A - B = C$ ☒ $AB = D$ ☐ $BA = E$ ☐ $AB = BA$
2. On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $E = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.	☐ $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ☒ $AB = \begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$ ☐ $CA = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ ☒ $CD = E$

2

2

Exercice 5.
On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.

1

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Donc $A^2 = A$.

2. (Bonus) Montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = A$.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 1$, $A^1 = A$ (trivial)

<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons $A^n = A$ (HR)
Montrons $A^{n+1} = A$.

1 bonus

$$A^{n+1} = \underbrace{A^n}_{(HR)} \times A = \underbrace{A \times A = A}_{\text{d'après question 1.}}$$