NOM :

GROUPE :

Vannes

Université Bretagne Sud

R1.07 - Outils fondamentaux
Contrôle Terminal

Université Bretagne Sud

Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Vendredi 21 janvier 2022
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	8 pages
Impression :	A4 recto-verso agrafé (1 point)
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Non
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1. 5

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1,5

1. Calculer $P^2 - 3P + 2I$.

- Calculons d'abord P^2 :

$$\begin{array}{cc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}^{P} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_{P} & \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}}_{P^2} \end{array}$$

- Il vient ensuite :

$$P^2 - 3P + 2I = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. En déduire que P est inversible et déterminer son inverse.

1,5

De $P^2 - 3P + 2I = 0$, on tire : $-\frac{1}{2}(P^2 - 3P) = I$

Donc $\left(-\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}I\right)P = I$ et $P\left(-\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}I\right) = I$

D'où P inversible et $P^{-1} = -\frac{1}{2}P + \frac{3}{2}I$

$$= -\frac{1}{2}(P - 3I) = \underbrace{-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

2

3. Calculer les coordonnées du vecteur $(1,0,-2)$ dans la base $\mathscr{B}' = \left(u, v, w\right)$ définie par :

$$u = (0,-1,1),\ v = (1,2,-1),\ w = (-1,-1,2)$$

$P-1$

$$\mathcal{M}\left((1,0,-2), \mathcal{B}'\right) = P^{-1}\mathcal{M}\left((1,0,-2)\right)$$

$$= \overbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, $(1,0,-2) = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v - \frac{3}{2}w$

NOM : GROUPE :

5

Exercice 2.

On considère l'application linéaire f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y,\ -x + 2y + z,\ -y - z) \end{array}$$

1. Écrire $\mathcal{M}(f)$, la matrice de f dans la base canonique. 1,5

$$\mathcal{M}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Montrer que f n'est pas bijective. 1,5

f n'est pas bijective $\Longleftrightarrow$ $\det(\mathcal{M}(f)) = 0$.

Or $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$

$$= -1 + 1$$

$$= 0$$

Donc f n'est pas bijective.

3. Déterminer $f^{-1}\left(\{(0,0,0)\}\right)$ sous la forme d'un "Vect". 2

On cherche les $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$f\left((x,y,z)\right) = (0,0,0)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ y + z = 0 \\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\{(0,0,0)\}\right) &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -z \text{ et } y = -z \right\} \\ &= \left\{ (-z,-z,z) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ z(-1,-1,1) \mid z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left((-1,-1,1) \right). \end{aligned}$$

NOM : GROUPE :

Exercice 3. 5

On considère f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ **canoniquement** associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

- A est inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$. 1

Or $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

Donc A est inversible.

- Inversons A : 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) L_1 \leftarrow L_1 - L_2$$

A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) L_3 \leftarrow -L_3$$

2. En déduire $f^{-1}\big((x,y,z)\big)$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. 2

Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

$$\mathcal{M}\left(f^{-1}\big((x,y,z)\big)\right) = \mathcal{M}(f^{-1}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \mathcal{M}(f)^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x + 3y - 2z \\ -3y + 2z \\ 2y - z \end{pmatrix}$$

Donc $f^{-1}\big((x,y,z)\big) = \big(x + 3y - 2z,\ -3y + 2z,\ 2y - z\big)$.

NOM : GROUPE :

Exercice 4. 5

On considère f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ **canoniquement** associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$.

On introduit la (nouvelle) base $\mathscr{B}' = \left(e_1', e_2', e_3'\right)$ avec $e_1' = (1,2,2)$, $e_2' = (1,2,1)$ et $e_3' = (1,0,0)$.

1. Déterminer sous forme de triplet $f\left(e_1'\right)$, $f\left(e_2'\right)$ et $f\left(e_3'\right)$ 1,5

- $\mathcal{M}(f(e_1')) = \mathcal{M}(f)\mathcal{M}(e_1') = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}$

donc $\underline{f(e_1') = (3,6,6)}$.

- De même, on a : $\mathcal{M}(f(e_2')) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

donc $\underline{f(e_2') = (-1,-2,-1)}$

et $\mathcal{M}(f(e_3')) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $\underline{f(e_3') = (1,4,6)}$.

<u>Rq</u> : $f(e_3') = f(e_1) = (1,4,6)$ sans calcul.

2. A l'aide de la sortie Jupyter Notebook suivante, calculer $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$, la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.

2

```
In [2]: lst_P = [[1, 1, 1], [2, 2, 0], [2, 1, 0]]
        P = Matrix(lst_P)
        P.inv()
```

Out[2]:

$$\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

D'après la formule de changement de base, on a :

$$\mathcal{M}(f, \mathcal{B}') = P^{-1} A P.$$

Posons le calcul :

$$\overbrace{\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}}^{A} \overbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}}^{P}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}\times\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}}_{P^{-1}} \begin{pmatrix}8 & -7 & 6\\ -4 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}6 & 0 & 8\\ 0 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix} \times \frac{1}{2} = \underbrace{\begin{pmatrix}3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}}_{\mathcal{M}(f, \mathcal{B}')}$$

3. Vérifier les trois colonnes de $\mathscr{M}(f, \mathscr{B}')$ en utilisant les résultats de la question 1.

1,5

$$f(e'_1) = 3e'_1 = 3 \times (1, 2, 2) = (3, 6, 6)$$

$$f(e'_2) = -e'_2 = -(1, 2, 1) = (-1, -2, -1)$$

$$f(e'_3) = 4e'_1 - 2e'_2 - e'_3$$

$$= 4(1, 2, 2) - 2(1, 2, 1) - (1, 0, 0)$$

$$= (1, 4, 6)$$