NOM :

GROUPE :

Vannes

IUT Université Bretagne Sud

R01.07 - Outils mathématiques fondamentaux
Contrôle Continu (1h)
Lundi 13 décembre 2021 - A. Ridard

Université Bretagne Sud

Exercice 1. Déterminer les coordonnées du vecteur $(5,1,3)$ dans la base $\big((1,1,1),(1,-1,0),(2,-1,1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

5

On cherche $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(5,1,3) = \alpha(1,1,1) + \beta(1,-1,0) + \gamma(2,-1,1)$$

$$\iff (5,1,3) = (\alpha + \beta + 2\gamma, \alpha - \beta - \gamma, \alpha + \gamma)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 5 \\ \alpha - \beta - \gamma = 1 \\ \alpha + \gamma = 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 5 \\ -2\beta - 3\gamma = -4 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -\beta - \gamma = -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 5 \\ -2\beta - 3\gamma = -4 \\ \gamma = 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = 2 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

NOM :

GROUPE :

Exercice 2.

5

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 + 2A - 3I$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 8 & -5 \\ -5 & 8 & -1 \\ -6 & 12 & -2 \end{pmatrix}}_{A^2} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 6 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}}_{2A} - \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{3I}$$

2 1 1

$$= \begin{pmatrix} 4 & 14 & -9 \\ -7 & 13 & -3 \\ -8 & 22 & -7 \end{pmatrix}.$$

1

NOM :

GROUPE :

5

Exercice 3.

Résoudre les systèmes suivants et exprimer, s'il est non vide, l'ensemble des solutions sous forme de "Vect".

1. $\begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ 2x + y - z + t = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + y + z - 3t = 0 \\ -y - 3z + 7t = 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x = 2z - 4t \\ y = -3z + 7t \end{cases}$

$\mathcal{S} = \{ (2z - 4t, -3z + 7t, z, t) \mid z, t \in \mathbb{R} \}$ 2

$= \{ z(2, -3, 1, 0) + t(-4, 7, 0, 1) \mid z, t \in \mathbb{R} \}$

$= \mathrm{Vect}((2, -3, 1, 0), (-4, 7, 0, 1))$ 1

2. $\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ x + 4y + z = 15 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2y + 4z = 11 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 \\ \boxed{0 = -3} \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$

$\mathcal{S} = \emptyset$ 2

NOM : GROUPE :

Exercice 4. 5

On considère $P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2x + y - 3z = 0\}$ et $P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$.

1. Exprimer P_1 et P_2 sous forme de "Vect". En déduire leur nature.

- $P_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 2x + 3z\}$

$= \{(x, 2x+3z, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{x(1,2,0) + z(0,3,1) \mid x, z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\big((1,2,0), (0,3,1)\big)$. 1,5

- $P_2 = \{(-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(-1,0,1) + y(0,1,0) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$

$= \text{Vect}\big((-1,0,1), (0,1,0)\big)$ 1,5

- P_1 et P_2 sont des plans (vectoriels) 0,5

2. Un étudiant prétend que $P_1 = Vect\big((-1,-2,0),(1,-1,-1)\big)$. A-t-il raison ?

On peut se contenter d'un argument "géométrique".

- $-2\times(-1) + (-2) - 3\times 0 = 0$ donc $(-1,-2,0) \in P_1$
- $-2\times 1 + (-1) - 3\times(-1) = 0$ donc $(1,-1,-1) \in P_1$
- $(-1,-2,0)$ et $(1,-1,-1)$ sont non colinéaires (évident)

donc ils engendrent bien P_1 autrement dit

$P_1 = \text{Vect}\big((-1,-2,0), (1,-1,-1)\big)$. 1,5

Ou alors (cf. verso)

2

3. **(Bonus)** Exprimer $P_1 \cap P_2$ sous forme de "Vect". En déduire sa nature.

$$(x,y,z) \in P_1 \cap P_2 \iff \begin{cases} -2x + y - 3z = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x + y - 3z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + L_1$$

$$\iff \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases} \qquad 1$$

Donc $P_1 \cap P_2 = \{(-z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

$= \{z(-1,1,1) \mid z \in \mathbb{R}\}$

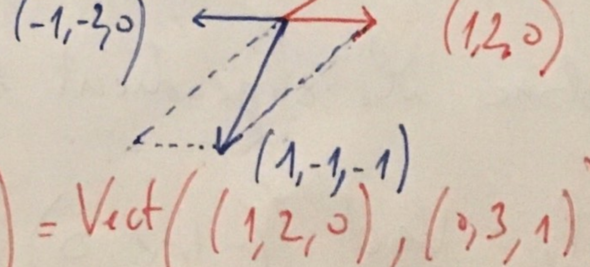
$= \text{Vect}\left((-1,1,1)\right)$. 0,5

Il s'agit d'une droite (vectorielle) 0,5

Autre réponse pour 2)

$(-1,-2,0) = -(1,2,0)$

$(1,-1,-1) = (1,2,0) - (0,3,1)$



donc $\text{Vect}\left((-1,-2,0),(1,-1,-1)\right) = \text{Vect}\left((1,2,0),(0,3,1)\right) = P_1$

Rq : on peut aussi montrer la double inclusion, mais c'est (beaucoup) plus long.