NOM : GROUPE :

R1.06 - Mathématiques discrètes
Contrôle Terminal 2

Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Vendredi 21 janvier 2021
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	8 pages
Impression :	A4 recto-verso agrafé (1 point)
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Non
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1. 5

Un cadenas possède un code à 3 chiffres (de 0 à 9).

1. Combien de codes se terminent par un chiffre pair? 1

$10 \times 10 \times 5 = \boxed{500}$

1er chiffre 2e chiffre 3e chiffre
qui doit être pair : 0, 2, 4, 6 ou 8.

2. Combien de codes contiennent exactement un chiffre pair? 1

$3 \times 5 \times 5^2 = \boxed{375}$

places pour le chiffre pair — chiffre pair — deux chiffres impairs.

3. Combien de codes contiennent exactement une fois le chiffre 1 et une fois le chiffre 0 ? 1

$$\overbrace{\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{places pour 0 et 1}} \times \underbrace{2!}_{\text{ordre d'apparition entre 0 et 1}}}^{\text{ou } A_3^2} \times \underbrace{8}_{\text{3e chiffre différent de 0 et 1.}} = \boxed{48}$$

4. Combien de codes contiennent au moins une fois le chiffre 6 ? 1

$$\underbrace{10^3}_{\text{toutes les possibilités}} - \underbrace{9^3}_{\text{aucun chiffre 6}} = 1000 - 729 = \boxed{271}$$

5. Combien de codes possédant trois chiffres distincts se terminent par un chiffre impair ? 1

$$\overbrace{\underbrace{5}_{\text{1er chiffre pair}} \times \underbrace{4}_{\text{2e chiffre pair}} \times \underbrace{5}_{\text{3e chiffre qui doit être impair}}}^{\text{1 seul chiffre impair}} + \overbrace{\underbrace{2}_{\text{place du 1er chiffre impair}} \times \underbrace{5}_{\text{1er chiffre impair}} \times \underbrace{5}_{\text{chiffre pair}} \times \underbrace{4}_{\text{2e chiffre impair qui doit être en dernière position}}}^{\text{2 chiffres impairs}} + \overbrace{5 \times 4 \times 3}^{\text{3 chiffres impairs}} = 100 + 200 + 60$$

$$= \boxed{360}$$

ou plus simplement : $\underbrace{5}_{\text{dernier chiffre impair}} \times \underbrace{9}_{\text{1er chiffre distinct du dernier}} \times \underbrace{8}_{\text{2e chiffre distinct des deux autres}}$

NOM : GROUPE :

Exercice 2. 5

On considère la relation binaire sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\forall x, y \in \mathbb{N},\ x \mathcal{R} y \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{N},\ x + y = 2k$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

- Mq $\mathcal{R}$ est réflexive 1 : $\forall x \in \mathbb{N},\ x \mathcal{R} x$.

Soit $x \in \mathbb{N}$.

Montrons $x \mathcal{R} x$ c'est à dire $\exists k \in \mathbb{N},\ x + x = 2k$.

En posant $k = x$, on a bien : $x + x = 2x = 2k$

- Mq $\mathcal{R}$ est symétrique 1 : $\forall x, y \in \mathbb{N},\ x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$

Soit $x, y \in \mathbb{N}$.

Supposons $x \mathcal{R} y$ c'est à dire $\exists k \in \mathbb{N},\ x + y = 2k$

Montrons $y \mathcal{R} x$ " " $\exists k' \in \mathbb{N},\ y + x = 2k'$

En posant $k' = k$, on a bien : $y + x = x + y = 2k = 2k'$

- Mq $\mathcal{R}$ est transitive 1,5 : $\forall x, y, z \in \mathbb{N},\ x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$.

Soit $x, y, z \in \mathbb{N}$.

Supposons $x \mathcal{R} y$ c'est à dire $\exists k \in \mathbb{N},\ x + y = 2k$

et $y \mathcal{R} z$ " " $\exists k' \in \mathbb{N},\ y + z = 2k'$

Montrons $x \mathcal{R} z$ " " $\exists k'' \in \mathbb{N},\ x + z = 2k''$

En posant $k'' = k + k' - y$, on a bien : $x + z = (2k - y) + (2k' - y)$

$= 2(k + k' - y)$

$\in \mathbb{N}$ car sinon $x + z$ serait négatif

- On en conclut que $\mathcal{R}$ est bien une relation d'équivalence.

2. Décrire la classe d'équivalence de 0 et celle de 1. 1

- $Cl(0) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \sim 0\}$
$= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, x + 0 = 2k\}$

Autrement dit, $Cl(0)$ est l'ensemble des entiers pairs.

- $Cl(1) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \sim 1\}$
$= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, x + 1 = 2k\}$
$= \{x \in \mathbb{N} \mid \exists k \in \mathbb{N}, x = 2k - 1\}$

Autrement dit, $Cl(1)$ est l'ensemble des entiers impairs.

3. Existe-t-il une autre classe d'équivalence? *N'oubliez pas de justifier votre réponse.* 0,5

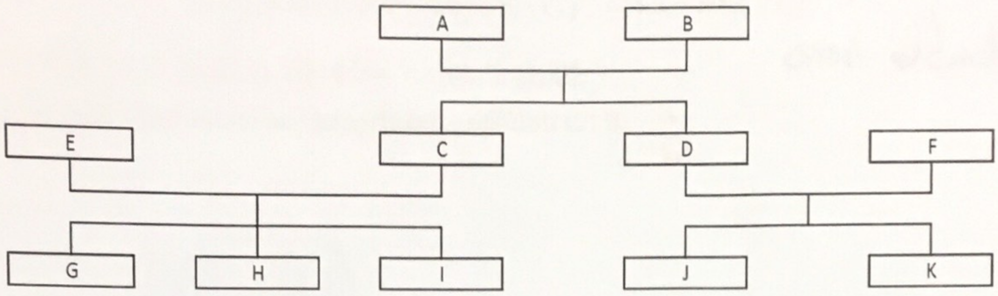
Les classes d'équivalences forment une partition de $\mathbb{N}$, mais on a déjà $Cl(0) \cup Cl(1) = \mathbb{N}$ donc il ne peut pas y en avoir une autre.

NOM :

GROUPE :

Exercice 3. 4

Considérons l'arbre généalogique suivant :

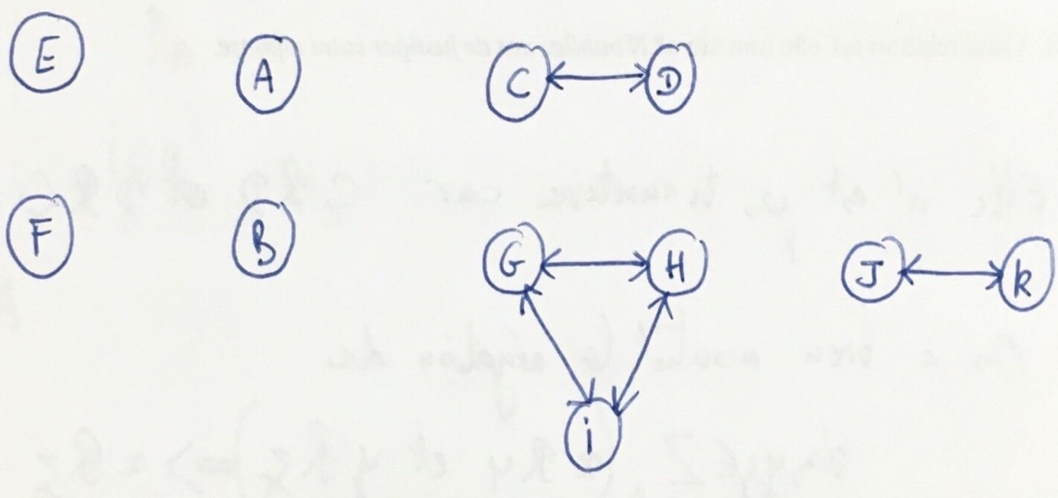


Ainsi, A et B ont eu les deux enfants C et D. Avec E, C a eu les trois enfants G, H et I...

Notons $Z = \{A, B, ..., K\}$ l'ensemble des individus sur cet arbre, et $\mathscr{R}$ la relation binaire sur Z définie par :

$$\forall x, y \in Z,\ x\,\mathscr{R}\,y \Longleftrightarrow x \text{ est le frère ou la sœur de } y$$

1. Représenter, à l'aide d'un graphe, la relation binaire $\mathscr{R}$. 2



2. Cette relation est-elle symétrique ? *N'oubliez pas de justifier votre réponse.* 1

Elle est symétrique car tous les arcs sont à double sens.

3. Cette relation est-elle transitive ? *N'oubliez pas de justifier votre réponse.* 1

Elle n'est pas transitive car $C \mathcal{R} D$ et $D \mathcal{R} C$ mais $C \not\mathcal{R} C$.

Rq : On a bien montré la négation de

$$\forall x, y, z \in Z, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \Rightarrow x \mathcal{R} z$$

c'est à dire

$$\exists x, y, z \in Z, (x \mathcal{R} y \text{ et } y \mathcal{R} z) \text{ et } x \not\mathcal{R} z$$

On a posé $x = C$, $y = D$ et $z = C$.

NOM : GROUPE :

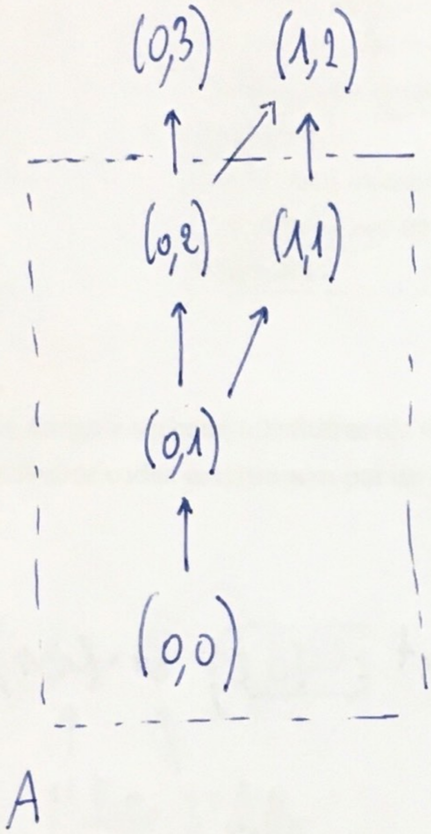
Exercice 4. 6

On considère la relation d'ordre sur $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \preceq (x',y') \Longleftrightarrow x \leq x' \text{ et } y \leq y'$$

On note $A = \{(0,0),\ (0,1),\ (0,2),\ (1,1)\}$ et $B = A \cup \{(0,3),\ (1,2)\}$.

1. Représenter le diagramme de Hasse de cette relation sur B. 2



2. Cet ordre est-il partiel ou total ? 1

Cet ordre est partiel car $(0,2) \not\preceq (1,1)$

et $(1,1) \not\preceq (0,2)$

3. Déterminer, s'il existe, le minimum de A. 0,5

$\min(A) = (0,0)$

4. Déterminer, s'il existe, le maximum de A. 0,5

$\max(A)$ n'existe pas.

5. Déterminer les éléments maximaux de A. 1

Les éléments maximaux de A sont : $(0,2)$ et $(1,1)$.

6. Déterminer, si elle existe, la borne supérieure de A dans B. 1

$\sup_B(A) = (1,2)$