NOM :

GROUPE :

M3201 - Probabilités
Contrôle Continu (1h)
Jeudi 7 octobre 2021 - A. Ridard

Exercice 1.
Une urne contient 5 boules blanches et 3 boules noires, indiscernables au toucher.
On tire successivement et sans remise 3 boules de cette urne.

On pourra considérer les événements suivants :

- B_i *(resp.* N_i*) : « la i-ième boule tirée est blanche (resp. noire) »*
- *A : « au moins une boule noire figure dans le tirage »*

1. Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la seconde blanche et la troisième noire ?

$$P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)\,P(B_2 \mid B_1)\,P(N_3 \mid B_1 \cap B_2)$$

formule des probas comp.

$$= \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}$$

$$= \frac{5}{28}.$$

2. Quelle est la probabilité qu'au moins une boule noire figure dans le tirage ?

$$P(A) = P(N_1 \cup N_2 \cup N_3) = 1 - P(B_1 \cap B_2 \cap B_3)$$

$$= 1 - P(B_1)\,P(B_2 \mid B_1)\,P(B_3 \mid B_1 \cap B_2)$$

$$= 1 - \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}$$

$$= \frac{23}{28}$$

3. Sachant qu'au moins une boule noire figure dans le tirage, quelle est la probabilité que la première boule tirée soit noire ?

$$P(N_1 \mid A) = \frac{P(N_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(N_1)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{23}{28}} = \frac{21}{46}.$$

car $N_1 \subset A$

Exercice 2.
On dispose de deux composants électriques C_1 et C_2 supposés indépendants l'un de l'autre.
Pour $i \in \{1,2\}$, on note F_i l'événement « le composant C_i fonctionne » et $p_i = P(F_i)$.

En exprimant bien l'événement considéré à l'aide des F_i, calculer les probabilités suivantes en fonction des p_i.

1. La probabilité de fonctionnement du circuit si les composants sont disposés en série [1].

$$P(F_1 \cap F_2) = P(F_1)P(F_2) = p_1 p_2 .$$

par indépendance de F_1 et F_2.

2. La probabilité de fonctionnement du circuit si les composants sont disposés en parallèle [2].

$$\begin{aligned} P(F_1 \cup F_2) &= P(F_1) + P(F_2) - P(F_1 \cap F_2) \\ &= P(F_1) + P(F_2) - P(F_1)P(F_2) \quad \text{par indépendance} \\ &= p_1 + p_2 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

Exercice 3.
Vous êtes directeur de cabinet du ministre de la santé. Une maladie est présente dans la population, dans la proportion d'une personne malade sur 10 000. Un responsable d'un grand laboratoire pharmaceutique vient vous vanter son nouveau test de dépistage : si une personne est malade, le test est positif à 99 %. Si une personne n'est pas malade, le test est positif à 0,1 %.

On pourra considérer les événements suivants :

- *M : « la personne est malade »*
- *T : « le test est positif »*

Quelle est la probabilité pour qu'une personne positive au test soit effectivement malade ?

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\bar{M})P(\bar{M})}$$

formule de Bayes

$$= \frac{0{,}99 \times 0{,}0001}{0{,}99 \times 0{,}0001 + 0{,}001 \times 0{,}9999}$$

$$\simeq 0{,}09 .$$

[1]. Le circuit formé par les deux composants disposés en série fonctionne si et seulement si les deux composants fonctionnent
[2]. Le circuit formé par les deux composants disposés en parallèle fonctionne si et seulement si un des deux composants fonctionne

On note X le plus grand des numéros obtenus.

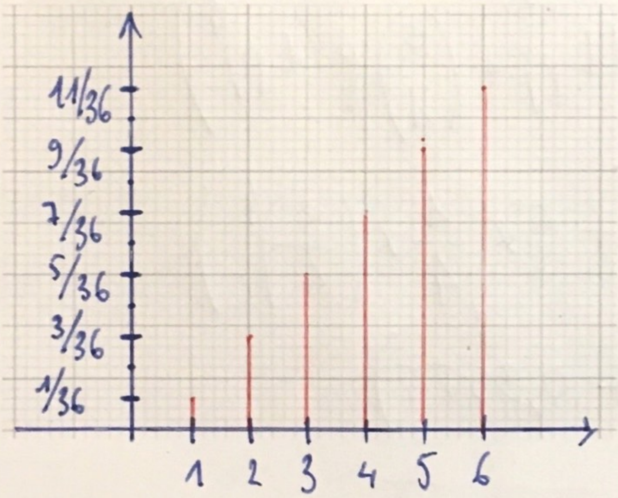
1. Déterminer la loi de X à l'aide d'un tableau.

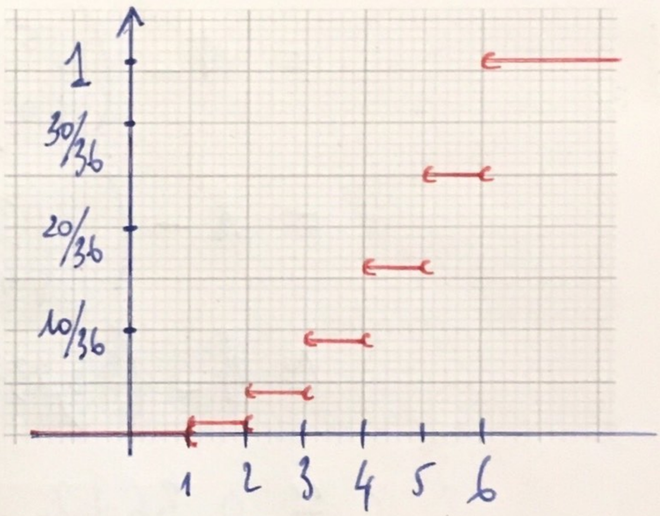
x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

car

dé 2 \ dé 1	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	2	3	4	5	6
3	3	3	3	4	5	6
4	4	4	4	4	5	6
5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6

2. Représenter graphiquement cette loi ainsi que la fonction de répartition de X.





3. Calculer l'espérance et la variance de X.

- $E(X) = 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36} \simeq 4{,}47$

- $E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{36} + 2^2 \times \frac{3}{36} + \dots + 6^2 \times \frac{11}{36} = \frac{791}{36}$

Th du transfert

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
$$= \frac{791}{36} - \left(\frac{161}{36}\right)^2$$
$$= \frac{2555}{1296} \simeq 1{,}97$$

4. On considère le jeu de dés suivant :

- On lance 5 fois deux dés (équilibrés)
- A chaque lancer, on gagne 1 point lorsque le plus grand des numéros obtenus est inférieur ou égal à 3, et 0 point sinon

On note S le nombre de points gagnés par un joueur à ce jeu.

(a) Reconnaître la loi de S.

$S \sim \mathcal{B}(5, p)$

avec $p = P(X \leq 3) = F(3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

(b) Calculer la probablité de gagner au moins 2 points.

$$P(S \geq 2) = 1 - P(S < 2)$$
$$= 1 - \left(P(S=0) + P(S=1)\right)$$
$$= 1 - \left(\binom{5}{0} p^0 (1-p)^5 + \binom{5}{1} p (1-p)^4\right)$$
$$= 1 - \left(\left(\frac{3}{4}\right)^5 + 5 \times \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^4\right)$$
$$\simeq 1 - (0{,}2373 + 0{,}3955)$$
$$\simeq 0{,}3672.$$