R2.09 Méthodes Numériques

Thibault Godin, Lucie Naert, Anthony Ridard
IUT de Vannes Informatique

La suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ converge vers $\sqrt{A}$

La suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ converge vers $\sqrt{A}$

Comment approcher un réel ρ ? Et comment mesurer la "qualité" de l'approximation ?

La suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ converge vers $\sqrt{A}$

Comment approcher un réel ρ ? Et comment mesurer la "qualité" de l'approximation ?

On veut un *algorithme* qui prend en entrée un réel (et une précision) et qui renvoie une approximation de ce réel.

La suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ converge vers $\sqrt{A}$

Comment approcher un réel ρ ? Et comment mesurer la "qualité" de l'approximation ?

On veut un *algorithme* qui prend en entrée un réel (et une précision) et qui renvoie une approximation de ce réel.

on cherche une suite (u_n) telle que $\lim_n u_n = \rho$
(et $|u_n - \rho| = err(n)$ avec $err(n)$ une suite connue)

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

$\rightsquigarrow$ on cherche ρ tel que $\rho^2 = 2$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

$\rightsquigarrow$ on cherche ρ tel que $\rho^2 = 2$

$\rightsquigarrow$ naivement $0 \leq \rho \leq 2$ car $0^2 = 0 \leq 2 \leq 2^2 = 4$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

$\rightsquigarrow$ on cherche ρ tel que $\rho^2 = 2$

$\rightsquigarrow$ naivement $0 \leq \rho \leq 2$ car $0^2 = 0 \leq 2 \leq 2^2 = 4$

comment améliorer cet encadrement ?

Théorème des valeurs intermédiaires

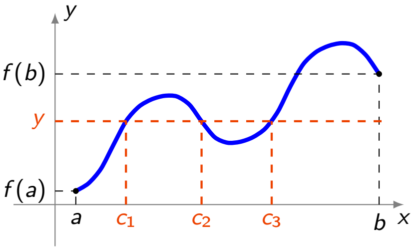
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

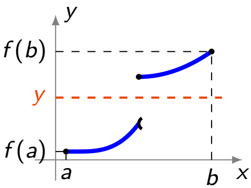
Il n'y a aucune raison que c soit unique.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Il n'y a aucune raison que c soit unique.

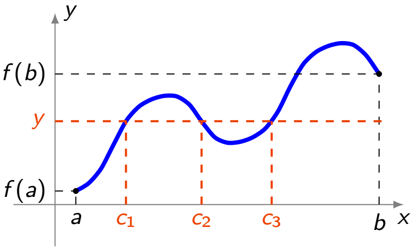


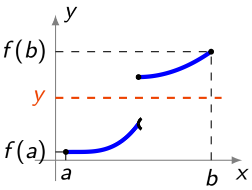


Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Il n'y a aucune raison que c soit unique.





Donner un exemple de fonction non continue qui satisfait les conclusions du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

- Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

- Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

On donne une approximation de c en réduisant l'intervalle à chaque fois :

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

- Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

On donne une approximation de c en réduisant l'intervalle à chaque fois :

Algorithm 3: Dichotomie

Input: f, a, b,y, ε

Output: approximation de y

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

while $|f(c) - y| > \varepsilon$ **do**

  if $f(c) < y$ **then**

    $a \leftarrow c$

  else

    $b \leftarrow c$

  $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

return c

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

- Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

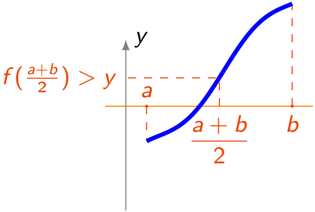
On donne une approximation de c en réduisant l'intervalle à chaque fois :

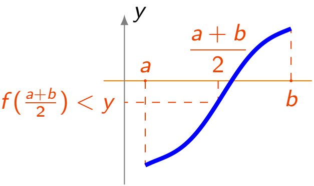
Algorithm 4: Dichotomie

Input: f, a, b,y, ε

Output: approximation de y

```
c ← (a+b)/2
while |f(c) − y| > ε do
    if f(c) < y then
        a ← c
    else
        b ← c
    c ← (a+b)/2
return c
```





Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

- Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

On donne une approximation de c en réduisant l'intervalle à chaque fois :

Algorithm 5: Dichotomie

Input: f, a, b,y, ε

Output: approximation de y

$c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

while $|f(c) - y| > \varepsilon$ **do**

  if $f(c) < y$ **then**

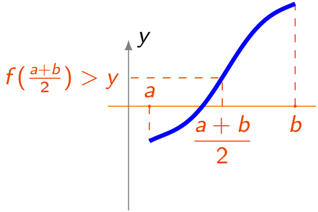
    $a \leftarrow c$

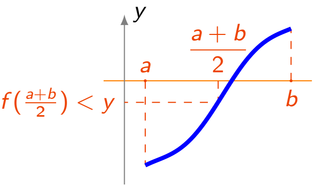
  else

    $b \leftarrow c$

  $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$

return c





Pas besoin de monotonie !

Vitesses de convergence

$$c_0 = \frac{b-a}{2}; c_{n+1} = \left|\frac{b_n - a_n}{2}\right| \rightsquigarrow |c_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

Vitesses de convergence

$$c_0 = \frac{b-a}{2}; c_{n+1} = \left|\frac{b_n - a_n}{2}\right| \rightsquigarrow |c_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

On a la garantie théorique que la méthode converge. On souhaite maintenant comparer les vitesses de convergence

Vitesses de convergence

$c_0 = \frac{b-a}{2}$; $c_{n+1} = \left|\frac{b_n - a_n}{2}\right| \rightsquigarrow |c_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$

On a la garantie théorique que la méthode converge. On souhaite maintenant comparer les vitesses de convergence

$\lim \left|\frac{c_n - c}{c_{n-1} - c}\right| = \lim \left|\frac{err(n)}{err(n-1)}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$

On dit que la convergence est *linéaire*

$\lim \left|\frac{err(n)}{err(n-1)^\alpha}\right| \leq q \ (\alpha > 1)$; on dit que la convergence est *d'ordre* α.

Vitesses de convergence

$c_0 = \frac{b-a}{2}; c_{n+1} = \left|\frac{b_n - a_n}{2}\right| \rightsquigarrow |c_n - c| \leq \frac{b-a}{2^n}$

On a la garantie théorique que la méthode converge. On souhaite maintenant comparer les vitesses de convergence

$\lim \left|\frac{c_n - c}{c_{n-1} - c}\right| = \lim \left|\frac{err(n)}{err(n-1)}\right| \leq \frac{1}{2} < 1$

On dit que la convergence est *linéaire*

$\lim \left|\frac{err(n)}{err(n-1)^\alpha}\right| \leq q \ (\alpha > 1)$; on dit que la convergence est *d'ordre* α.

remarque : si la méthode est d'ordre α, le nombre de chiffres significatifs corrects est à chaque étape augmenté d'une constante et multiplié par α.

Et en 2D ? $\rightsquigarrow$ `https://www.youtube.com/watch?v=b7FxPsqfkOY`

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

- choix d'une fonction f tq $f(\sqrt{2}) = 0$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

- choix d'une fonction f tq $f(\sqrt{2}) = 0$

$f(x) = x - \sqrt{2}$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

- choix d'une fonction f tq $f(\sqrt{2}) = 0$

$f(x) = x - \sqrt{2}$

$f(x) = x^2 - 2$

Théorème des valeurs intermédiaires II

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

- Si f change de signe sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Théorème des valeurs intermédiaires II

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

- Si f change de signe sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$

Algorithm 7: Dichotomie racine

Function `recherche_racine_dich`(f, a, b) **:**

    Output: approximation d'une racine de f
    if $f(a).f(b) < 0$ **then**
        if $f(a) < 0$ **then**
            $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$
            while $|f(c)| > \varepsilon$ **do**
                if $f(c) < 0$ **then**
                    $a \leftarrow c$
                else
                    $b \leftarrow c$
                $c \leftarrow \frac{a+b}{2}$
            return c
        else
            `recherche_racine_dich`(f,b,a)
    else
        print("pas de changement de signe détecté")

Méthode de Newton

On essaie de trouver une meilleure méthode pour trouver les **racines** d'une fonctions :

Méthode de Newton

On essaie de trouver une meilleure méthode pour trouver les **racines** d'une fonctions :

remarque : couper au milieu n'est pas forcément la meilleure solution !

Méthode de Newton

On essaie de trouver une meilleure méthode pour trouver les **racines** d'une fonctions :

remarque : couper au milieu n'est pas forcément la meilleure solution !

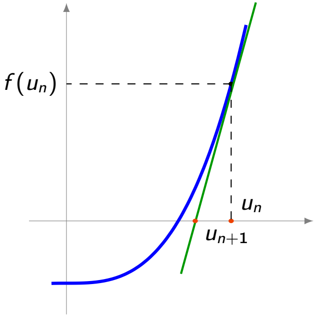
idée suivre la pente $f'(x_0)$ jusqu'à croiser l'abscisse

Méthode de Newton

On essaie de trouver une meilleure méthode pour trouver les **racines** d'une fonctions :

remarque : couper au milieu n'est pas forcément la meilleure solution !

idée suivre la pente $f'(x_0)$ jusqu'à croiser l'abscisse

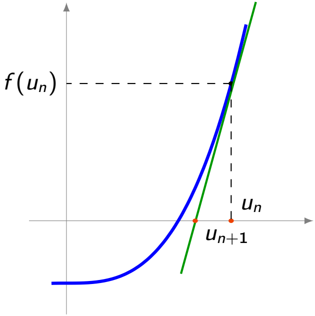


Méthode de Newton

On essaie de trouver une meilleure méthode pour trouver les **racines** d'une fonctions :

remarque : couper au milieu n'est pas forcément la meilleure solution !

idée suivre la pente $f'(x_0)$ jusqu'à croiser l'abscisse



On part de la droite
$y = f'(x_n)\,(x_{n+1} - x_n) + f(x_n)$
d'où $u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$

Avantage/inconvénients

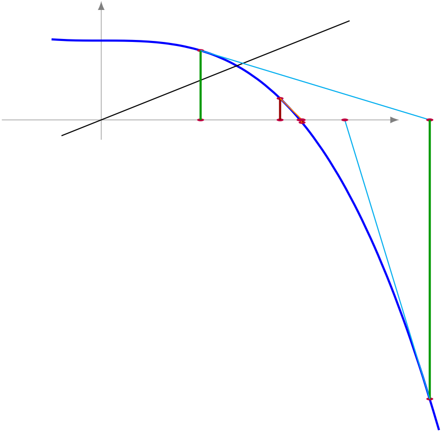
Méthode de Newton

- \+ convergence d'ordre 2
- \- convergence non-garantie
- \- calculs de dérivée
- \+ pas obligé d'avoir un changement de signe

Avantage/inconvénients

Méthode de Newton

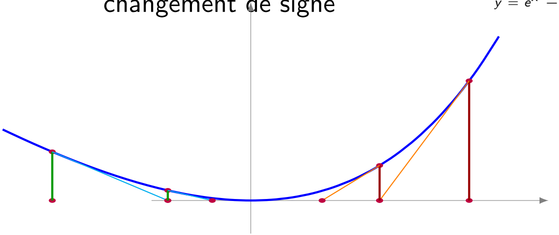
+ convergence d'ordre 2
- convergence non-garantie
- calculs de dérivée
+ pas obligé d'avoir un changement de signe

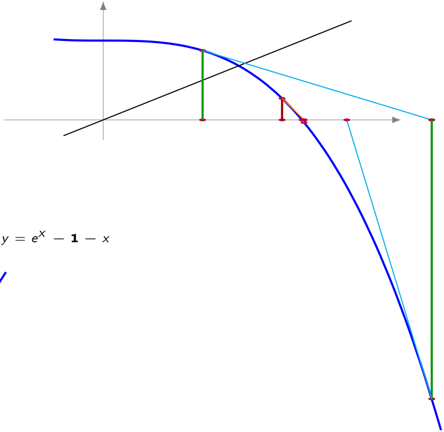


Avantage/inconvénients

Méthode de Newton

+ convergence d'ordre 2
- convergence non-garantie
- calculs de dérivée
+ pas obligé d'avoir un changement de signe





Méthode de Newton

Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction tels que :

- f est dérivable et sa dérivée est continue
- $f(a) f(b) < 0$ (cad que l'équation f(x) = 0 a une solution dans [a,b]).
- Pour tout $x \in [a; b]$, $f'(x) \neq 0$ (c'est à dire que f' a un signe constant)

Méthode de Newton

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction tels que :

- f est dérivable et sa dérivée est continue
- $f(a)\,f(b) < 0$ (cad que l'équation f(x) = 0 a une solution dans [a,b]).
- Pour tout $x \in [a;b]$, $f'(x) \neq 0$ (c'est à dire que f' a un signe constant)

Alors,

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$ converge vers l'unique solution ℓ de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a;b]$

Méthode de Newton

Soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ une fonction tels que :

- f est dérivable et sa dérivée est continue
- $f(a)\, f(b) < 0$ (cad que l'équation f(x) = 0 a une solution dans [a,b]).
- Pour tout $x \in [a;b]$, $f'(x) \neq 0$ (c'est à dire que f' a un signe constant)

Alors,

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$ converge vers l'unique solution ℓ de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a;b]$

- en posant : $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, *et* $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, on prend $u_0 \in$ [a,b] tel que $\frac{M}{m}|u_0 - \ell| < 1$.

Méthode de Newton

Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction tels que :

- f est dérivable et sa dérivée est continue
- $f(a) f(b) < 0$ (cad que l'équation f(x) = 0 a une solution dans [a,b]).
- Pour tout $x \in [a; b]$, $f'(x) \neq 0$ (c'est à dire que f' a un signe constant)

Alors,

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$ converge vers l'unique solution ℓ de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a; b]$

- en posant : $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, *et* $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, on prend $u_0 \in$ [a,b] tel que $\frac{M}{m}|u_0 - \ell| < 1$.

On a $|u_n - \ell| < \frac{m}{M} \left(\frac{M}{2m}|u_0 - \ell|\right)^{2^n}$.

Méthode de Newton

Soit $[a; b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction tels que :

- f est dérivable et sa dérivée est continue
- $f(a) f(b) < 0$ (cad que l'équation f(x) = 0 a une solution dans [a,b]).
- Pour tout $x \in [a; b]$, $f'(x) \neq 0$ (c'est à dire que f' a un signe constant)

Alors,

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{f(u_n)}{f'(u_n)} \end{cases}$ converge vers l'unique solution ℓ de l'équation $f(x) = 0$ dans $[a; b]$

- en posant : $m = \min_{x\in[a,b]} |f'(x)|$, *et* $M = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|$, on prend $u_0 \in$ [a,b] tel que $\frac{M}{m}|u_0 - \ell| < 1$.

On a $|u_n - \ell| < \frac{m}{M}\left(\frac{M}{2m}|u_0 - \ell|\right)^{2^n}$.

Attention : ce sont des conditions *suffisantes* pour la convergence, mais pas *nécessaires*.

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

- choix d'une fonction f tq $f(\sqrt{2}) = 0$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

- choix d'une fonction f tq $f(\sqrt{2}) = 0$

$f(x) = x - \sqrt{2}$

Approximation de $\sqrt{2}$

On veut construire $u_n \to \sqrt{2}$

- choix d'une fonction f tq $f(\sqrt{2}) = 0$

$f(x) = x - \sqrt{2}$

$f(x) = x^2 - 2$

Méthode de Newton & Héron

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$

Méthode de Newton & Héron

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$ *Et comment a-t-on créé cette suite ?*

Méthode de Newton & Héron

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$ *Et comment a-t-on créé cette suite ?*

Prenons $f(x) = x^2 - A$. Clairement $\sqrt{A}$ est une racine de f et f' est continue.

Méthode de Newton & Héron

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$ *Et comment a-t-on créé cette suite ?*

Prenons $f(x) = x^2 - A$. Clairement $\sqrt{A}$ est une racine de f et f' est continue.

$f'(x) = 2x$. On applique la méthode de Newton x_{n+1}

Méthode de Newton & Héron

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$ *Et comment a-t-on créé cette suite ?*

Prenons $f(x) = x^2 - A$. Clairement $\sqrt{A}$ est une racine de f et f' est continue.

$f'(x) = 2x$. On applique la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\mathbf{2}} - A}{2x_n} = \frac{x_n^{\mathbf{2}} + A}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}$

Méthode de Newton & Héron

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$ *Et comment a-t-on créé cette suite ?*

Prenons $f(x) = x^2 - A$. Clairement $\sqrt{A}$ est une racine de f et f' est continue.

$f'(x) = 2x$. On applique la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} = \frac{x_n^2 + A}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}$

La méthode de Héron est un cas particulier de la méthode de Newton.

Méthode de Newton & Héron

Pourquoi la suite d'Héron $u_0 = A; u_{n+1} = \frac{u_n + \frac{A}{u_n}}{2}$ semble-t-elle converger vers $\sqrt{A}$ *Et comment a-t-on créé cette suite ?*

Prenons $f(x) = x^2 - A$. Clairement $\sqrt{A}$ est une racine de f et f' est continue.

$f'(x) = 2x$. On applique la méthode de Newton $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^{\mathbf{2}} - A}{2x_n} = \frac{x_n^{\mathbf{2}} + A}{2x_n} = \frac{x_n + \frac{A}{x_n}}{2}$

La méthode de Héron est un cas particulier de la méthode de Newton. C'est donc une méthode d'ordre 2 pour trouver une racine carrée