R2.09

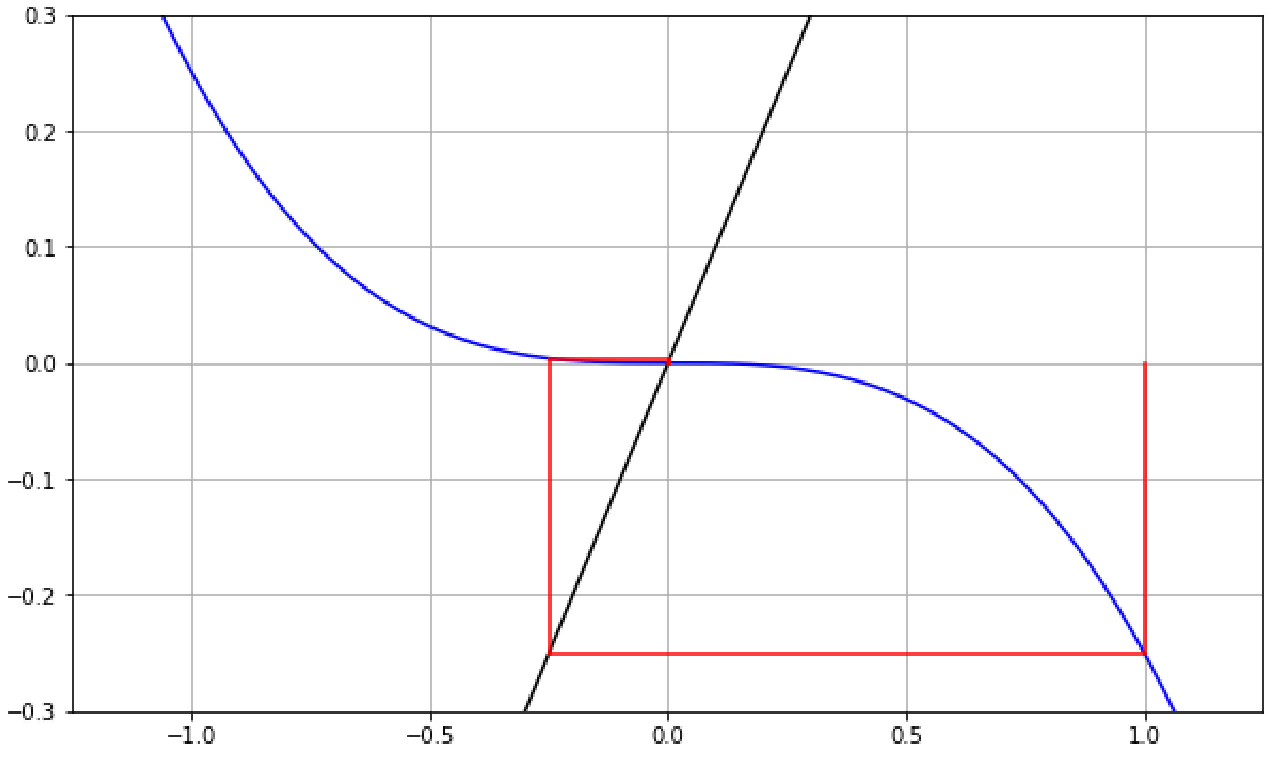
Méthodes Numériques

Étude d'une suite définie par une fonction contractante

On s'intéresse à la fonction définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\frac{u_n^3}{4} \end{cases}$

On cherche à trouver la limite de (u_n) (si elle existe).

On est dans le cas d'une suite de la forme "$u_{n+1} = f(u_n)$" avec $f : x \mapsto -\frac{x^3}{4}$.



Expérimentalement, cette suite semble converger (vers 0), mais on remarque cependant que f n'est pas croissante (et d'ailleurs que $(u_n)_n$ n'est pas monotone).
On ne peut donc pas utiliser le théorème de convergence monotone.

On remarque en revanche que f est "assez plate" autour de 0, cela signifie que f "rapproche" les points dans cette zone.
On va donc essayer d'utiliser le théorème du point fixe convergeant.

On doit donc chercher un intervalle $[a, b]$ tel que :

— $[a, b]$ est stable par f (ie $f([a, b]) \subset [a, b]$)
— f est contractante sur $[a, b]$ (ie $\exists L < 1, \forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y) \leq L|x - y|$)

Pour montrer que f est contractante, on va utiliser le *théorème des accroissements finis* : "si $|f'(x)| \leq k < 1$ pour tout $x \in [a, b]$, alors f est $k-$contractante sur $[a, b]$".

On va donc étudier f' afin de trouver un intervalle stable et de prouver la contractance.

$f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 \leq 0$ donc f est décroissante. On complète via des calculs de limites classique le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\searrow$	$-\infty$

Au vu de u_0 et du tracé de la fonction, on va essayer de prouver notre théorème avec l'intervalle $[-1; 1]$

$$\begin{aligned} f([-1, 1]) &\overset{f \text{ décrois.}}{=} [f(1), f(-1)] \\ &= [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}] \\ &\subset [-1, 1] \end{aligned}$$

L'intervalle $[-1, 1]$ est donc stable par f. On va maintenant voir si f est contractante sur cet intervalle. On va pour cela utiliser l'inégalité des accroissements finis et chercher à majorer f' sur $[-1, 1]$.

On va étudier $f'([-1, 1])$. Pour cela, on commence par étudier les variations de f', en calculant sa dérivée f''.

$f''(x) = -\frac{3}{4} \times 2x = -\frac{3}{2}x$

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		0		$-$		
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{3}{4}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3}{4}$	$\searrow$	$-\infty$

On a alors

$$\begin{aligned}
f'([-1,1]) &\overset{\text{intervalles monotones}}{=} f([-1,0]) \cup f([0,1]) \\
&= [f(-1), f(0)] \cup [f(1), f(0)] \\
&= [-\frac{3}{4}, 0] \cup [-\frac{3}{4}, 0] \\
&= [-\frac{3}{4}, 0]
\end{aligned}$$

Donc

$$|f'(x)| \leq \frac{3}{4} < 1 \text{ sur l'intervalle } \overset{\text{accroissements finis}}{\Longrightarrow} f \text{ est } \frac{3}{4}\text{-contractante.}$$

–

Ainsi d'après le théorème du point fixe monotone, on a $\lim_n u_n = \ell$ avec ℓ un point fixe de f dans l'intervalle $[-1, 1]$.

On résout l'équation au point fixe

$$\begin{aligned}
f(\ell) = \ell &\iff -\frac{\ell^3}{4} = \ell \\
&\iff \begin{cases} \ell & = 0 \\ -\frac{\ell^2}{4} & = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \ell & = 0 \\ \ell^2 & = -4 \quad \text{impossible dans } \mathbb{R} \end{cases}
\end{aligned}$$

Le seul point fixe réel est donc $\ell = 0$.

Ainsi $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

De plus le théorème du point fixe contractant donne la vitesse de convergence : $|u_n - \ell| \leq L^n |u_0 - \ell|$, ainsi

$$|u_n| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$