

*Les exercices ou questions marqués d'une ou plusieurs étoiles sont plus difficiles et/ou théoriques et peuvent être omis. Cependant ils sont intéressants pour l'étudiant-e souhaitant aller plus loin et restent faisables au niveau IUT.*

### Exercice 1 : (Échauffement)

1. Soit un alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ . Donnez en extension si possible ou à défaut la liste des mots de longueur au plus 3 des langages dénotés par les expressions régulières suivantes.

- |   |   |
|---|---|
| — $\emptyset$   | — $\emptyset^*$                               |
| — $\varepsilon$                                       | — $(b(abc ca)(cc a \varepsilon)a(a b)) abb a$ |
| — $a^*$   | — $ab^*ca^*$                                  |
| — $b\varepsilon\varepsilon b\varepsilon a\varepsilon$ | — $(a b c ab bc)^*$                           |
| — $\varepsilon^*$                                     | — $(ab b cc)^*a^+b^*$                         |

2. Démontrez que  $(a^*b^*)^* = (a|b)^*$
3. Démontrez que  $(a^*b)^*|(b^*a)^* = (a|b)^*$ .

### Exercice 2 : (Opérations ensemblistes sur les expressions régulières)

On considère les expressions régulières suivantes définies sur l'alphabet  $\Sigma = \{a, b\}$  :  $L_1 = a^*(ba)^*b^*$  ;  $L_2 = b^*a^*$  ;  $L_3 = ((ab|ba)^*b)|aa^*b^*$

1. Donnez tous les mots  $\mathbf{w}$  de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $L_3$  vérifiant  $|\mathbf{w}| \leq 2$
2. Donnez une expression régulière dénotant  $\overline{L_2}$  et  $L_1 \cap L_2$
3. Montrez que  $\Sigma^* \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3) \neq \emptyset$
4. Que pouvez-vous dire du cardinal de  $L_2 \Delta L_3$  ? Justifiez bien votre réponse.

### Exercice 3 : (Écriture scientifique des nombres)

1. Sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ , donner une expression régulière décrivant exactement les nombres binaires entiers pairs. Même question en interdisant les 0 non significatifs.
2. Sur l'alphabet que vous jugez adapté, donner une expression régulière aussi précise que possible décrivant exactement les nombres écrits en format scientifique.

### Exercice 4 : (Dates)

Sur l'alphabet que vous jugez adapté, donner une expression régulière aussi précise que possible décrivant exactement les dates (on précisera un format).

**Exercice 5 : \*** (Préfixes réguliers)

Montrer que la classe des langages réguliers est close par préfixe, c'est-à-dire que pour tout langage  $L$  décrit par une expression régulière  $e$ , le langage  $Pref(L)$  peut-être décrit par une expression régulière.

**Exercice 6 :** (Synthèse)

Soit l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$ .

1. Quels langages dénotent les expressions régulières sur  $\Sigma$  qui suivent :  $a$ ,  $abb$ ,  $ab|c$ ,  $ab^*$ ,  $(a|b)^*$ .
2. Soit  $L = (a|b)^*c^*|(b|c)^*a^*|(a|c)^*b^*$ . Donnez tous les mots de longueur inférieure ou égale à 2 appartenant à  $L$ . A-t-on  $\Sigma^* \subset L$  ou  $\Sigma^* \subset L^*$ ? Que peut-on dire de  $\text{Card}(L)$ ,  $\text{Card}(\overline{L})$  et  $\text{Card}(L^*)$ ? Déterminez par une expression régulière  $L \cap a^*b^*c^*$  et  $L \setminus a^*$ .
3. Donnez une expression régulière décrivant les langages des mots sur  $\Sigma$  ci-dessous :
  - (a) les mots contenant la chaîne « aba » au moins une fois
  - (b) les mots de longueur au moins 3 qui se terminent par « c »
  - (c) les mots qui commencent et se terminent par le même symbole
  - (d) les mots comportant un nombre pair de « a »
  - (e) les mots comportant nécessairement un symbole « a » en début et fin de mot ; et tel que s'il y a un « b » il est immédiatement suivi d'au moins 2 « c »