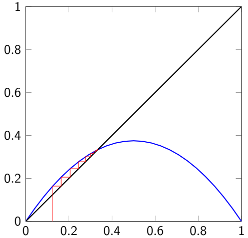
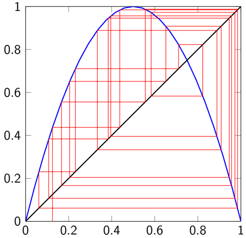
R2.09 Méthodes Numériques

Thibault Godin, Lucie Naert, Anthony Ridard
IUT de Vannes Informatique

On va étudier les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.

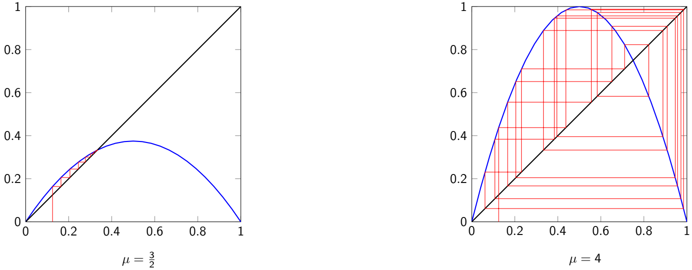


$\mu = \frac{3}{2}$



$\mu = 4$

On va étudier les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.



La question principale est **"que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on connaît f"**.

Rappels math discrètes R1.06 :

Une fonction est une relation binaire où tout élément au départ est en relation avec au plus un élément à l'arrivée.

Une application est une fonction où tout élément au départ possède une image.

- Une fonction se note en général f plutôt que $\mathcal{R}$, et on écrit $y = f(x)$ plutôt que $x \ f \ y$
- En fait, une fonction f de E vers F se note :

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- En Mathématiques, il est commun de définir une fonction f en donnant l'expression permettant de « calculer » $f(x)$

Fonctions usuelles

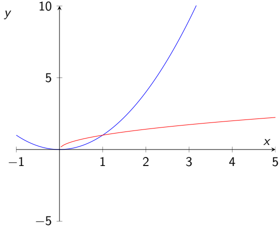
Fonction puissance $\alpha > 0$:

$$\begin{array}{rccc} .^{\alpha} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{\alpha} \end{array}$$

Fonctions usuelles

Fonction puissance $\alpha > 0$:

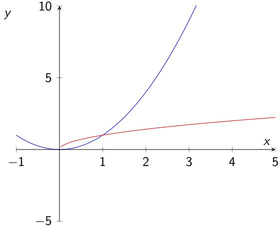
$$\begin{array}{rccc} .^{\alpha}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{\alpha} \end{array}$$



Fonctions usuelles

Fonction puissance $\alpha > 0$:

$$\begin{array}{rccc} .^{\alpha} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{\alpha} \end{array}$$



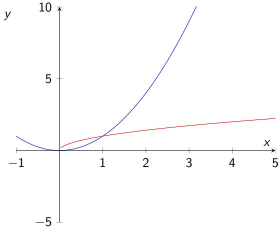
Fonction inverse :

$$\begin{array}{rccc} .^{-1} : & \mathbb{R}^{*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

Fonctions usuelles

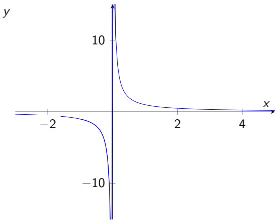
Fonction puissance $\alpha > 0$:

$$\begin{array}{rccc} .^{\alpha}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{\alpha} \end{array}$$



Fonction inverse :

$$\begin{array}{rccc} .^{-1}: & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$



Fonctions usuelles

Fonctions polynomiales :

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

Fonctions usuelles

Fonctions polynomiales :

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

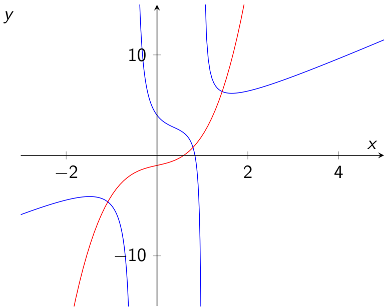
Fraction rationnelle : $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux fonctions polynomiales.

Fonctions usuelles

Fonctions polynomiales :

$$P: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

Fraction rationnelle : $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux fonctions polynomiales.



Fonctions usuelles

Fonction exponentielle :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Fonctions usuelles

Fonction exponentielle :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Fonction logarithme :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

Fonctions usuelles

Fonction exponentielle :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Fonction logarithme :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

remarque : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp \circ \ln(x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \circ \exp(x) = x$.

Fonctions usuelles

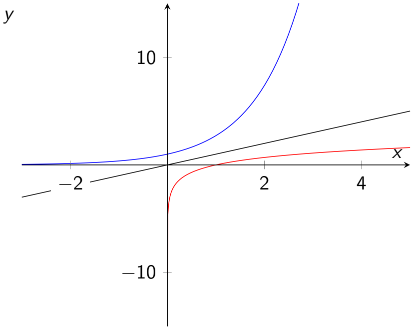
Fonction exponentielle :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Fonction logarithme :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

remarque : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp \circ \ln(x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \circ \exp(x) = x$.



Fonctions usuelles

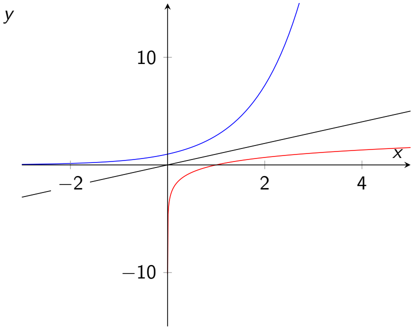
Fonction exponentielle :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Fonction logarithme :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

remarque : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp \circ \ln(x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \circ \exp(x) = x$.



$$\log_d(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(d)}$$

$$\log = \log_{10}$$

$$a^n = \exp(n \ln a) = e^{n \ln a}$$

Fonctions et suites

On a vu que les suites $(u_n)n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

Fonctions et suites

On a vu que les suites $(u_n)n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

on les verra parfois comme des fonctions réelles

$$\begin{array}{rccl} f_u: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & u_n \text{ si } x \in [n, n+1[\end{array}$$

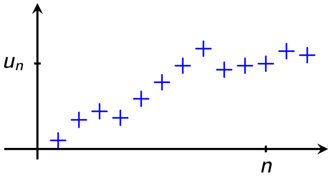
Fonctions et suites

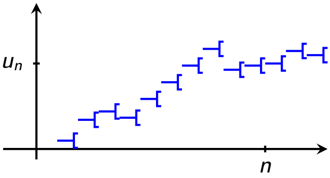
On a vu que les suites $(u_n)n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

on les verra parfois comme des fonctions réelles

$$\begin{array}{rccl} f_u: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & u_n \text{ si } x \in [n, n+1[\end{array}$$





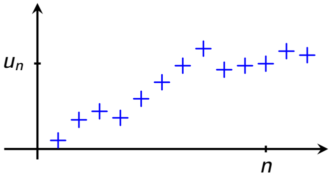
Fonctions et suites

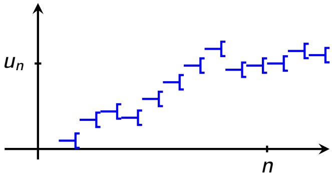
On a vu que les suites $(u_n)n \in \mathbb{N}$ sont des fonctions

$$\begin{array}{rccc} u: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longmapsto & u_n \end{array}$$

on les verra parfois comme des fonctions réelles

$$\begin{array}{rccl} f_u: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & u_n \text{ si } x \in [n, n+1[\end{array}$$





$\rightsquigarrow$ nombreux (contre-)exemples pour la suite !

Étude de fonction

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \leq M$;

Étude de fonction

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \leq M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \geq m$;

Étude de fonction

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \leq M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \geq m$;
- f est ***bornée*** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \;\; |f(x)| \leq M$.

Étude de fonction

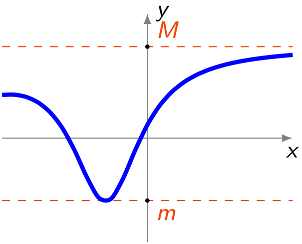
Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \leq M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \geq m$;
- f est ***bornée*** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in U \ \ |f(x)| \leq M$.

Étude de fonction

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

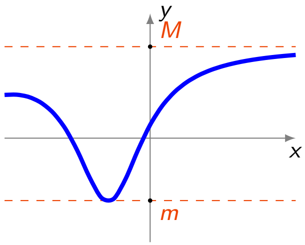
- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ \ f(x) \leq M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ \ f(x) \geq m$;
- f est ***bornée*** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in U \ \ |f(x)| \leq M$.



Étude de fonction

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \leq M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \geq m$;
- f est ***bornée*** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \;\; |f(x)| \leq M$.

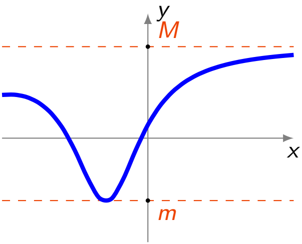


f bornée $\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est bornée

Étude de fonction

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \leq M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \geq m$;
- f est ***bornée*** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in U \ \ |f(x)| \leq M$.



f bornée $\rightsquigarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est bornée

$\rightsquigarrow$ notion d'intervalle stable

Étude de fonction

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f est dite ***constante*** sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \ f(x) = a$;
- f est dite ***nulle*** sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

Étude de fonction

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f est dite ***constante*** sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \; f(x) = a$;
- f est dite ***nulle*** sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

f positive $\rightsquigarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est positive.

Étude de fonction

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f est dite ***constante*** sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \ f(x) = a$;
- f est dite ***nulle*** sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

f positive $\rightsquigarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est positive.

$g : x \mapsto f(x) - x$ positive $\rightsquigarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

Étude de fonction

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in U \;\; f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U \;\; f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \;\; f(x) > 0$;
- f est dite ***constante*** sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \; f(x) = a$;
- f est dite ***nulle*** sur U si $\forall x \in U \;\; f(x) = 0$.

f positive $\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est positive.

$g : x \mapsto f(x) - x$ positive $\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

✎ Donner un exemple de fonction f positive telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas monotone.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***croissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***croissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f est ***décroissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

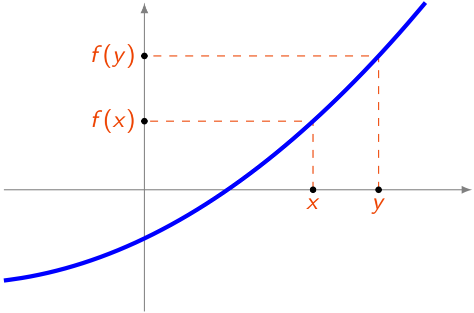
- f est ***croissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f est ***décroissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f est ***monotone*** sur U si f est croissante ou décroissante sur U.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***croissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f est ***décroissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f est ***monotone*** sur U si f est croissante ou décroissante sur U.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***croissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f est ***décroissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f est ***monotone*** sur U si f est croissante ou décroissante sur U.



Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

Cependant :

Théorème

Soit f croissante. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

Cependant :

Théorème

Soit f croissante. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

- Si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

Cependant :

Théorème

Soit f croissante. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

- Si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- Si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

Cependant :

Théorème

Soit f croissante. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

- Si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- Si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

Cependant :

Théorème

Soit f croissante. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

- Si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- Si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

le prouver

Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

Cependant :

Théorème

Soit f croissante. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

- Si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- Si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

le prouver Que peut-on dire sur la suite $u_{n+1} = u_n^2$?

Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

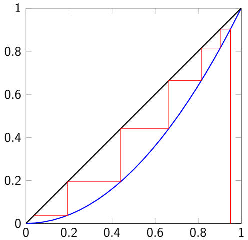
Cependant :

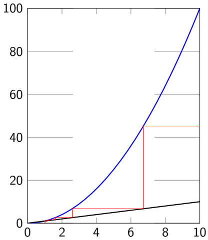
Théorème

Soit f croissante. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

- Si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- Si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

le prouver Que peut-on dire sur la suite $u_{n+1} = u_n^2$?





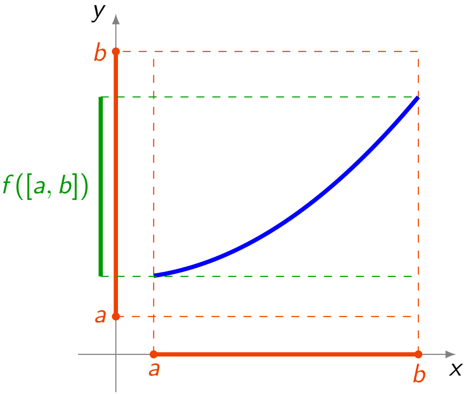
Intervalle stable

Un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est dit *stable* pour la fonction f si $f(I) \subset I$

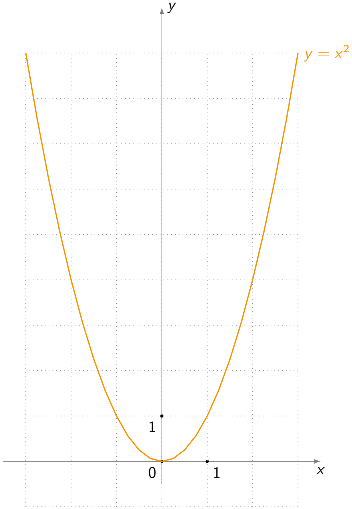
Intervalle stable

Un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est dit *stable* pour la fonction f si $f(I) \subset I$

Donc si $I = [a, b]$ est stable par f et $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, alors la suite $(u_n)_n$ est bornée : $\forall n \in \mathbb{N}, a \leq u_n \leq b$



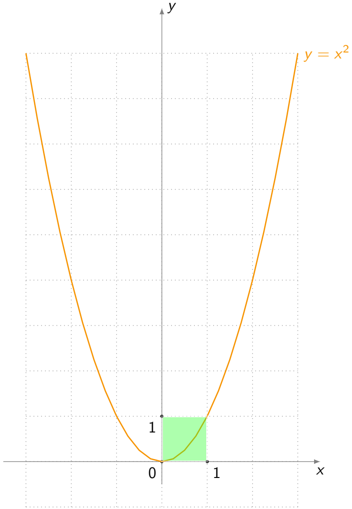
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

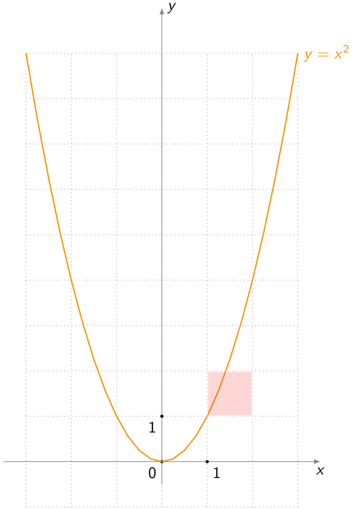
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

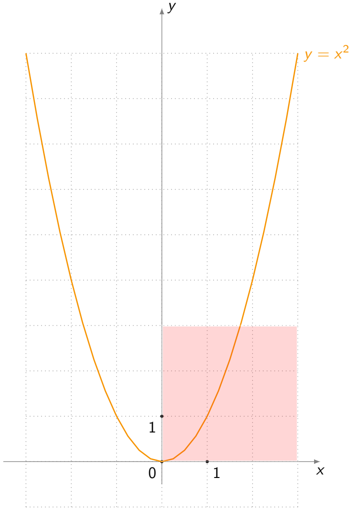
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

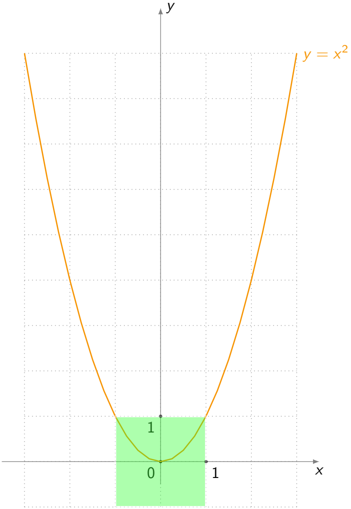
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

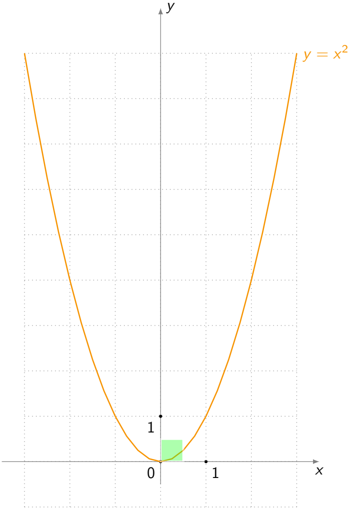
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

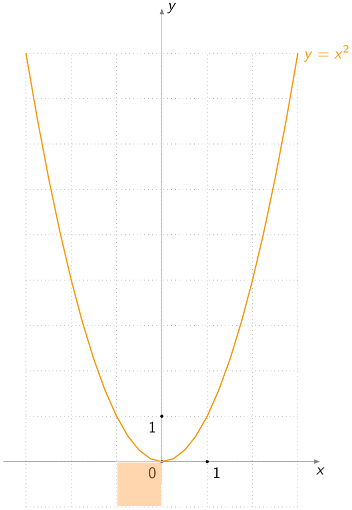
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

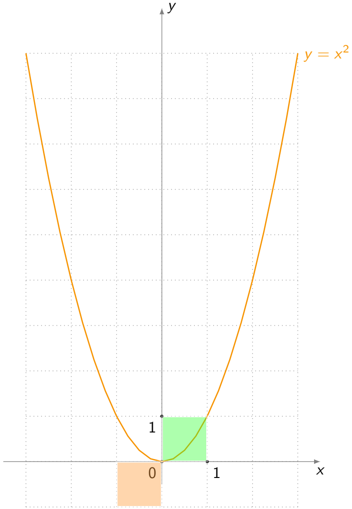
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

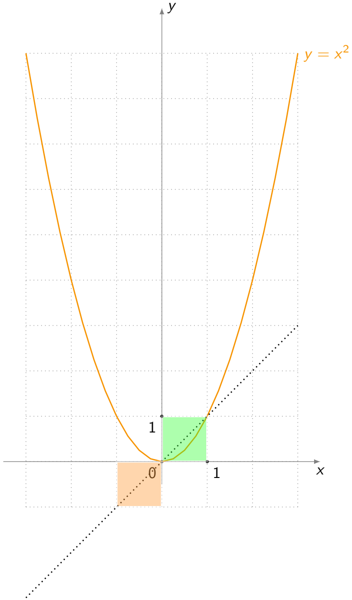
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

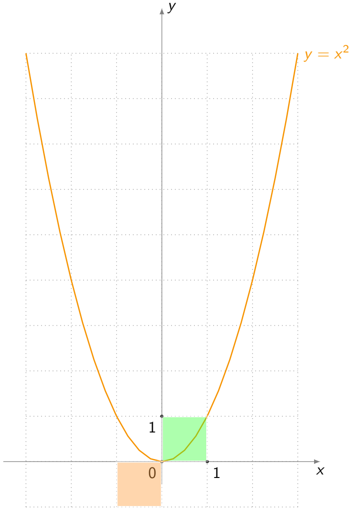
Intervalle stable



Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

Intervalle stable

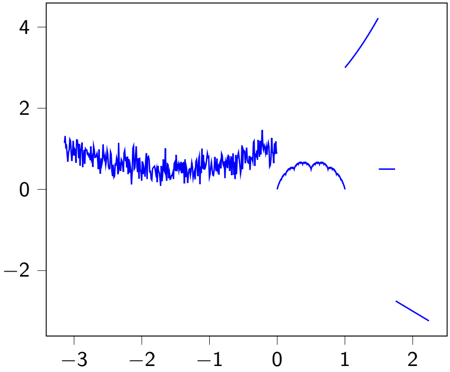


Quels intervalles sont stables pour $f : x \mapsto x^2$?

- $[0, 1]$
- $[1, 2]$
- $[0, 3]$
- $[-1, 1]$
- $[0, \frac{1}{2}]$
- $[-1, 0]$

En pratique on cherche un intervalle stable aussi petit que possible.

Étudions une fonction



(quasi-)impossible $\rightsquigarrow$ on va avoir besoin d'hypothèse supplémentaires.

Limite d'une fonction

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Limite d'une fonction

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en $+\infty$*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

Limite d'une fonction

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f ***a pour limite*** ℓ ***en*** $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

  On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

- On dit que f ***a pour limite*** $+\infty$ ***en*** $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

  On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite d'une fonction

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en $+\infty$*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

  On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim_{+\infty} f = \ell$.

- On dit que ***f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$*** si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

  On note alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite d'une fonction

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en $+\infty$*** si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

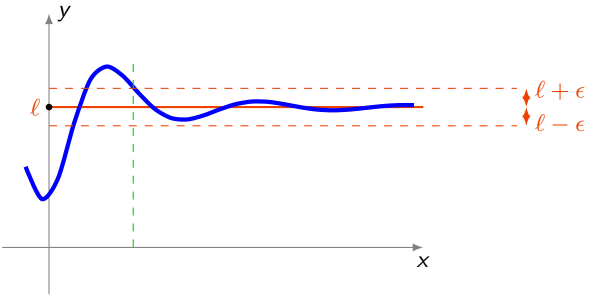
- On dit que ***f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$*** si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définira de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

Limite d'une fonction



Exemple 1

On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

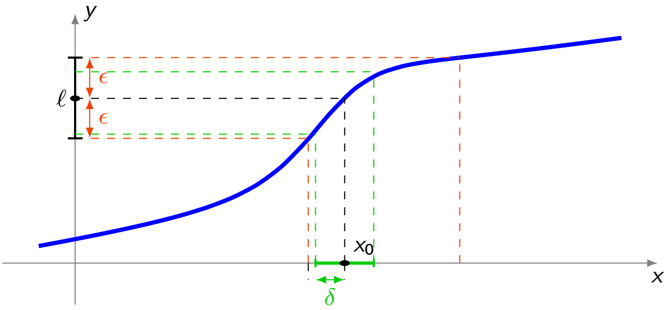
- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x^n}\right) = 0.$

Limite d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f ***a pour limite*** ℓ ***en*** x_0 si

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ On dit aussi que $f(x)$ ***tend vers*** ℓ ***lorsque*** x ***tend vers*** x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.



Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- On dit que ***f a pour limite $+\infty$ en x_0*** si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- On dit que *f **a pour limite** $+\infty$ **en** x_0* si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que *f **a pour limite** $-\infty$ **en** x_0* si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- On dit que ***f a pour limite $+\infty$ en x_0*** si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que ***f a pour limite $-\infty$ en x_0*** si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- On dit que *f* ***a pour limite*** $+\infty$ ***en*** x_0 si

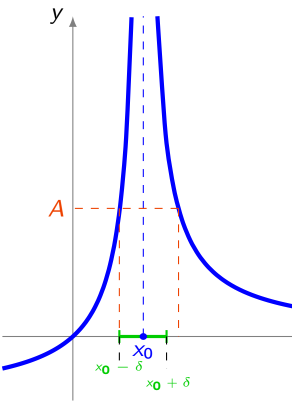
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que *f* ***a pour limite*** $-\infty$ ***en*** x_0 si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



Propriétés des limites

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$. Si f admet une limite quand x tend vers x_0. Alors, <u>cette limite est unique</u>

Propriétés des limites

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$. Si f admet une limite quand x tend vers x_0. Alors, cette limite est unique

On utilisera surtout la contraposée : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant toutes deux pour limite x_0. Alors si $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell \neq \ell' = \lim_{n\to\infty} f(v_n)$ alors f n'a pas de limite en x_0

Propriétés des limites

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$.
Si f admet une limite quand x tend vers x_0. Alors, cette limite est unique

On utilisera surtout la contraposée : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant toutes deux pour limite x_0. Alors si $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell \neq \ell' = \lim_{n\to\infty} f(v_n)$ alors f n'a pas de limite en x_0

Prouver que $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$

Propriétés des limites

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$. Si f admet une limite quand x tend vers x_0. Alors, cette limite est unique

On utilisera surtout la contraposée : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant toutes deux pour limite x_0. Alors si $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell \neq \ell' = \lim_{n\to\infty} f(v_n)$ alors f n'a pas de limite en x_0

- Prouver que $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$
- Prouver que $x \mapsto \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$ n'a pas de limite en 0

Propriétés des limites

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$. Si f admet une limite quand x tend vers x_0. Alors, cette limite est unique

On utilisera surtout la contraposée : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant toutes deux pour limite x_0. Alors si $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell \neq \ell' = \lim_{n\to\infty} f(v_n)$ alors f n'a pas de limite en x_0

- Prouver que $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$
- Prouver que $x \mapsto \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ n'a pas de limite en 0

De manière générale, si $\lim_{n\to\infty} u_n = x_0$ mais que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite alors la fonction f n'a pas de limite en x_0

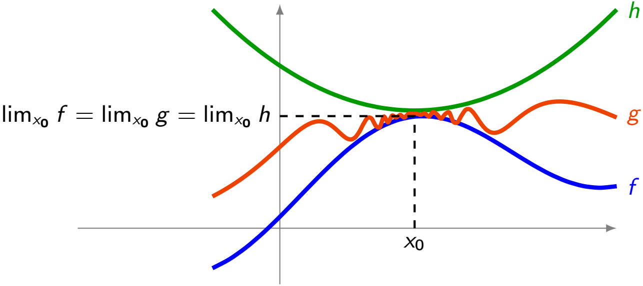
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.

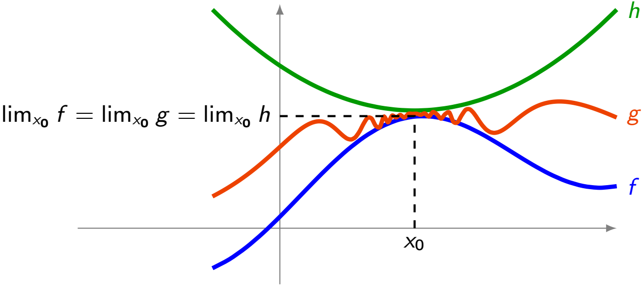
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- Théorème des gendarmes Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- Théorème des gendarmes Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- Théorème des gendarmes Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.



- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.
- Théorème des gendarmes Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim_{x_0} g = \ell$.



Remarque : on peut travailler sur un petit intervalle autour de x_0

Théorème des croissances comparées

$x \to +\infty$	log	poly.	exp
log	$\frac{\text{log}}{\text{log}} \rightsquigarrow$ fact.	$\frac{\text{poly}}{\text{log}} \to \infty$	$\frac{\text{exp}}{\text{log}} \to \infty$
poly	$\frac{\text{log}}{\text{poly}} \to 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{poly}} \rightsquigarrow$ fact.	$\frac{\text{exp}}{\text{poly}} \to \infty$
exp	$\frac{\text{log}}{\text{exp}} \to 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{exp}} \to 0$	$\frac{\text{exp}}{\text{exp}} \rightsquigarrow$ fact.

Théorème des croissances comparées

$x \to +\infty$	log	poly.	exp
log	$\frac{\text{log}}{\text{log}} \rightsquigarrow$ fact.	$\frac{\text{poly}}{\text{log}} \to \infty$	$\frac{\text{exp}}{\text{log}} \to \infty$
poly	$\frac{\text{log}}{\text{poly}} \to 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{poly}} \rightsquigarrow$ fact.	$\frac{\text{exp}}{\text{poly}} \to \infty$
exp	$\frac{\text{log}}{\text{exp}} \to 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{exp}} \to 0$	$\frac{\text{exp}}{\text{exp}} \rightsquigarrow$ fact.

$$\lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = 0^- \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x\to -\infty} x^n e^x = 0$$

Régularité d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est ***continue en un point*** $x_0 \in I$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

Régularité d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est ***continue en un point*** $x_0 \in I$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).
- On dit que f est ***continue sur*** I si f est continue en tout point de I.

Régularité d'une fonction

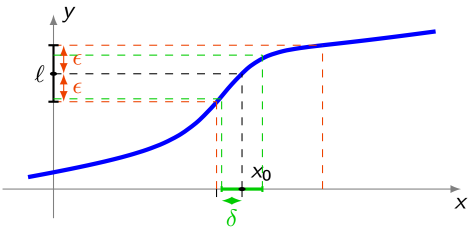
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- On dit que f est ***continue en un point*** $x_0 \in I$ si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).
- On dit que f est ***continue sur*** I si f est continue en tout point de I.

Régularité d'une fonction

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

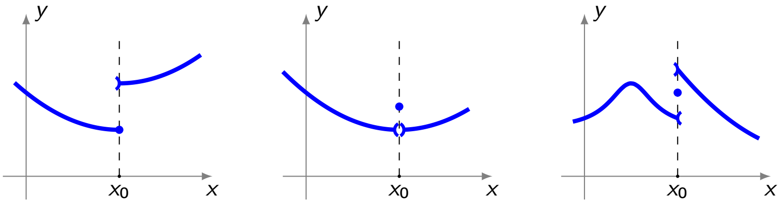
- On dit que f est ***continue en un point*** $x_0 \in I$ si
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).
- On dit que f est ***continue sur*** I si f est continue en tout point de I.



Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

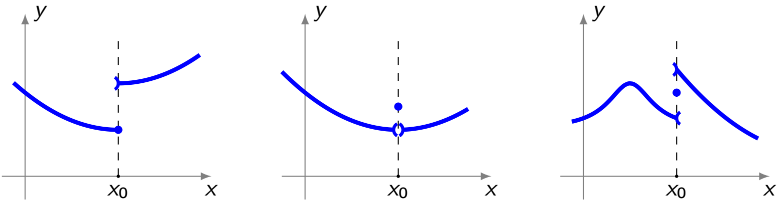
Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :

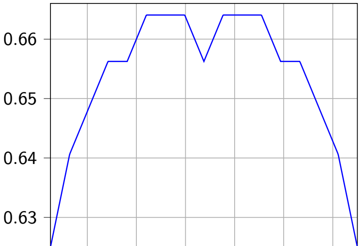


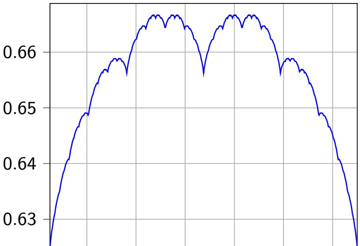
Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :



Attention, une fonction continue n'est pas forcément "lisse"





limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Si on prend f continue on a

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors si u_n admet une limite ℓ, c'est un point fixe de f. C'est-à-dire : $\lim u_n = \ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$

limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Si on prend f continue on a

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors si u_n admet une limite ℓ, c'est un point fixe de f. C'est-à-dire : $\lim u_n = \ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$

Le prouver. Quelles sont les limites possibles de la suite $u_{n+1} = u_n^2$?

limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Si on prend f continue on a

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors si u_n admet une limite ℓ, c'est un point fixe de f. C'est-à-dire : $\lim u_n = \ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$

- Le prouver. Quelles sont les limites possibles de la suite $u_{n+1} = u_n^2$?
- Montrer que la réciproque (l'écrire) est fausse (donner un contre exemple).

Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors f est bornée et atteint ses bornes

Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors f est bornée et atteint ses bornes

traduction : l'image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue est inclue dans un intervalle $[y, z]$ et il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = y$ et $f(d) = z$.

Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors f est bornée et atteint ses bornes

traduction : l'image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue est inclue dans un intervalle $[y, z]$ et il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = y$ et $f(d) = z$.

en général, il n'y a pas de raison que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

Théorème de Weierstrass

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors f est bornée et atteint ses bornes

traduction : l'image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue est inclue dans un intervalle $[y, z]$ et il existe $c, d \in [a, b]$ tels que $f(c) = y$ et $f(d) = z$.

en général, il n'y a pas de raison que $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

Donner un exemple de fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée n'atteignant pas ses bornes

Théorème des valeurs intermédiaires

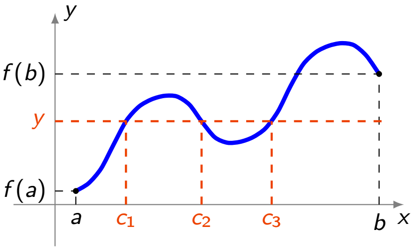
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

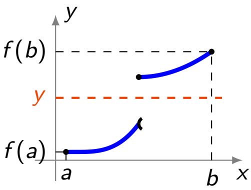
Il n'y a aucune raison que c soit unique.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Il n'y a aucune raison que c soit unique.

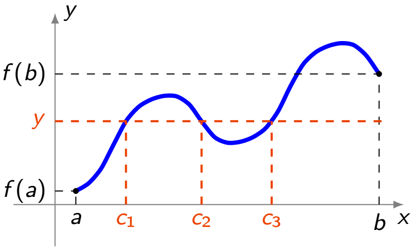


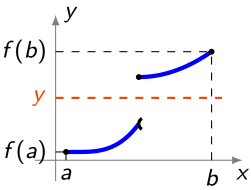


Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment, alors, pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Il n'y a aucune raison que c soit unique.





Donner un exemple de fonction non continue qui satisfait les conclusions du théorème des valeurs intermédiaires

Étude de suite

proposition

Si $f : [a, b] \to [a, b]$ est une fonction continue croissante, alors quelque soit $u_0 \in [a, b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a, b]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

✎ faire le bilan des théorèmes utilisés pour montrer ce résultat

Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

- des bornes et des intervalles stables

Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

- des bornes et des intervalles stables
- le sens de variation de f (théorème de monotonie)

Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

- des bornes et des intervalles stables
- le sens de variation de f (théorème de monotonie)
- signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ (définition des suites croissantes)

Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

- des bornes et des intervalles stables
- le sens de variation de f (théorème de monotonie)
- signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ (définition des suites croissantes)
- les maxima et minima de f (pour borner la suite)

Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

- des bornes et des intervalles stables
- le sens de variation de f (théorème de monotonie)
- signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ (définition des suites croissantes)
- les maxima et minima de f (pour borner la suite)

Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

- des bornes et des intervalles stables
- le sens de variation de f (théorème de monotonie)
- signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ (définition des suites croissantes)
- les maxima et minima de f (pour borner la suite)

Comment obtenir ces infos ?

Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

- des bornes et des intervalles stables
- le sens de variation de f (théorème de monotonie)
- signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ (définition des suites croissantes)
- les maxima et minima de f (pour borner la suite)

Comment obtenir ces infos ? Prendre des fonctions plus régulières/lisses (hypothèses plus fortes) $\rightsquigarrow$ plus d'outils

Derivée

f est ***dérivable en*** x_0 si le ***taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

Derivée

f est ***dérivable en*** x_0 si le ***taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

f est ***dérivable sur*** I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f, elle se note f'.

Derivée

f est ***dérivable en*** x_0 si le ***taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

f est ***dérivable sur*** I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f, elle se note f'.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Derivée

f est ***dérivable en x_0*** si le ***taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

f est ***dérivable sur I*** si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f, elle se note f'.

✎ Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

Derivée

f est ***dérivable en x_0*** si le ***taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

f est ***dérivable sur I*** si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f, elle se note f'.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

de plus $f'(x) = 2x$.

Derivée

Une fonction dérivable en x_0 est *continue* en x_0

Derivée

Une fonction dérivable en x_0 est *continue* en x_0

la réciproque est fausse

Derivée

Une fonction dérivable en x_0 est *continue* en x_0

la réciproque est fausse

Donner un contre-exemple et l'expliquer

Fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	**Dérivée**
x^n	$nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Calculer la dérivée de $x \mapsto x \ln x - x + 56$

Démontrer la formule $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Fonctions composées

Soient f, g telles que g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a).f'(g(a))$$

Fonctions composées

Soient f, g telles que g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a).f'(g(a))$$

preuve (presque) :

Fonctions composées

Soient f, g telles que g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a).f'(g(a))$$

preuve (presque) :

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f \circ g(a) - f \circ g(x)}{a - x} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f \circ g(a) - f \circ g(x)}{g(a) - g(x)} \frac{g(a) - g(x)}{a - x} \\
&= g'(a).f'(g(a))
\end{aligned}$$

Fonctions composées

Soient f, g telles que g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a).f'(g(a))$$

preuve (presque) :

$$\begin{aligned}(f \circ g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f \circ g(a) - f \circ g(x)}{a - x} \\ &= \lim_{x \to a} \frac{f \circ g(a) - f \circ g(x)}{g(a) - g(x)} \frac{g(a) - g(x)}{a - x} \\ &= g'(a).f'(g(a))\end{aligned}$$

✎ Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

Fonctions composées

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

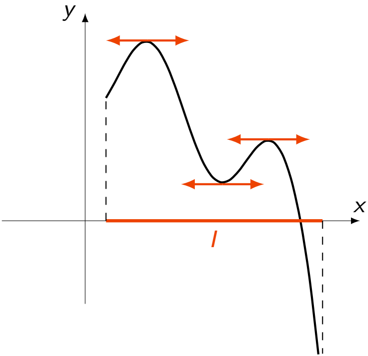
Fonctions composées

Fonction	Dérivée
u^n	$nu' u^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u' e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

Calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

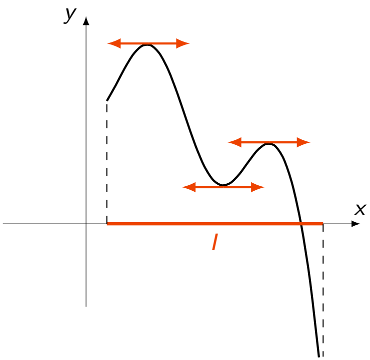
Extrema

Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.



Extrema

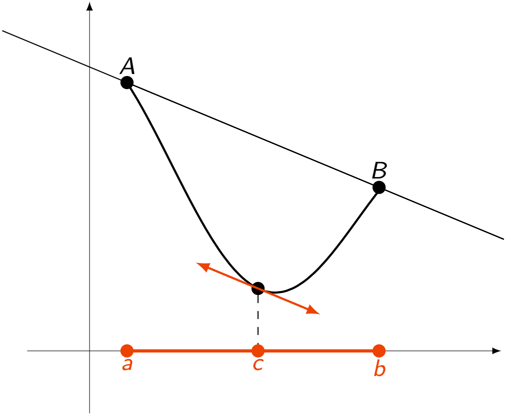
Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.



La réciproque est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$



Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est croissante ;
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est décroissante ;
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est constante ;

Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leq M$ alors

$$\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq M|x - y|$$

Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leq M$ alors

$$\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq M|x - y|$$

Montrer l'inégalité des accroissements finis (en utilisant l'égalité des accroissements finis)

Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leq M$ alors
$\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq M|x - y|$

✍ Montrer l'inégalité des accroissements finis (en utilisant l'égalité des accroissements finis)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $k > 0$. f est dite k-lipschitzienne sur I, si

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|)$$

Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leq M$ alors
$\forall x, y \in I \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq M|x - y|$

✎ Montrer l'inégalité des accroissements finis (en utilisant l'égalité des accroissements finis)

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $k > 0$. f est dite k-lipschitzienne sur I, si

$$(\forall x \in I)\,(\forall y \in I)\,(|f\,(x) - f\,(y)| \leq k\,|x - y|)$$

Un application k-lipschitzienne avec $k < 1$ est dite *contractante*

(un) Théorème du point fixe

Soit $f : [a; b] \rightarrow [a; b]$ une fonction vérifiant, pour tout $x \in [a; b]$ et tout $y \in [a; b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ avec } \boxed{0 < L < 1}$$

Alors, la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a; b] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers l'unique solution $\overline{x}$ de l'équation $x = f(x)$

(un) Théorème du point fixe

Soit $f : [a; b] \to [a; b]$ une fonction vérifiant, pour tout $x \in [a; b]$ et tout $y \in [a; b]$

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \text{ avec } \boxed{0 < L < 1}$$

Alors, la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \in [a; b] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

converge vers l'unique solution $\overline{x}$ de l'équation $x = f(x)$

✎ Montrer que la fonction $x \mapsto x^2$ est contractante sur $]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}[$. En déduire la convergence de la suite $u_0 = -\frac{1}{4}; u_{n+1} = u_n^2$.