R5.A.11 Méthodes d'optimisation

Tom Ferragut, Thibault Godin
IUT de Vannes Informatique

Avant des commencer, une précaution qui risque d'en décevoir certains : la **programmation linéaire** ne parle pas vraiment de programmation. Le terme tend d'ailleurs à être remplacer par *optimisation linéaire* (sous contraintes)

Comme très souvent, une excellente source est le **Cormen, Leiserson, Rivest** *Introduction à l'algorithmique* (disponible à la BU)

Vous pouvez aussi consulter `https://www2.mat.ulaval.ca/fileadmin/Cours/MAT-2920/Chapitre3.pdf` qui donne de bon exemples.

Optimisation sous contraintes (linéaires)

Dans beaucoup de cas en optimisation on veut maximiser une quantité, mais on a des contraintes qui nous limitent :

- Comment enseigner un maximum de concepts mathématiques *en moins de 3h*
- Comment avoir toutes ses compétences en BUT1 *en ayant moins de 6 en maths*
- Comment maximiser les calories de ses courses *en dépensant moins de 100 €*

On va se limiter à des contraintes et des objectifs linéaires

Système d'inéquations

On veut crafter des objets dans mIUTcraft™® ©

Un ordinateur nécessite 1 verre, 1 plastique et 9 silicium ; une tablette utilise 2 verre, 1 plastique et 4 silicium

On a seulement 8 verres, 5 plastiques et 9 silicium

Un ordinateur se vend 2 BUTin et une tablette 1 BUTin. On cherche à maximiser la quantité de BUTin totale.

On obtient le problème :

$$\text{Maximiser} \quad c(x,y) = 2x + y \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{cases} x & +2y & \leq 8 \\ x & +y & \leq 5 \\ 9x & +4y & \leq 36 \end{cases}$$

Voc. : on a 2 variables (x, y) et 3 équations. C'est donc un problème 2d
rmq. : contrainte sous-entendue au problème : $x, y \geq 0$
rmq : on va commencer par mettre de côté la restriction "les nombres sont entiers"

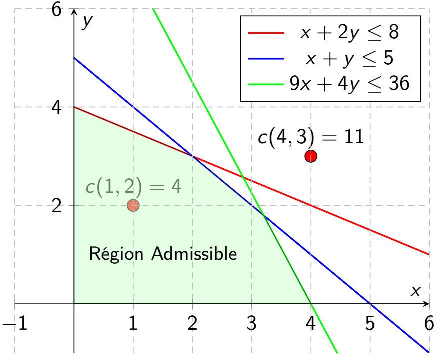
Représentation graphique du problème

Maximiser

$$c(x,y) = 2x + y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x & +2y & \leq 8 \\ x & +y & \leq 5 \\ 9x & +4y & \leq 36 \\ & x, y & \geq 0 \end{cases}$$



Méthodes de résolution

- Graphiques
  - Par isoclines (courbes de niveau)
  - Par les points extrémaux (sommets)
- Algoritmhiques
  - Méthode du simplexe (variation du pivot de Gauss)
  - Méthodes polynomiales (ellipsoïde, Karmarkar ...)

Résolution graphique : gradient et lignes de niveau

La fonction de coût $c(x, y)$ est une fonction (forme linéaire) continue $\rightsquigarrow$

forme linéaire $\rightsquigarrow$ les courbes de niveau sont des droites (en 2d, plan en 3d ...)

calcul du gradient $\rightsquigarrow$ direction de recherche (optimisation classique)

les droites de niveau sont perpendiculaires au gradient

en restant dans la région admissible

$$\nabla c(x, y) = (2, 1)$$

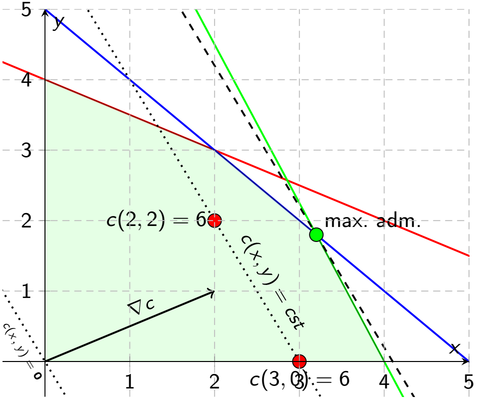
$$\begin{aligned} c(x, y) = cst &\iff 2x + y = cst \\ &\iff y = cst - 2x \end{aligned}$$

Maximiser

$$c(x, y) = 2x + y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x & +2y & \leq 8 \\ x & +y & \leq 5 \\ 9x & +4y & \leq 36 \\ & x, y & \geq 0 \end{cases}$$



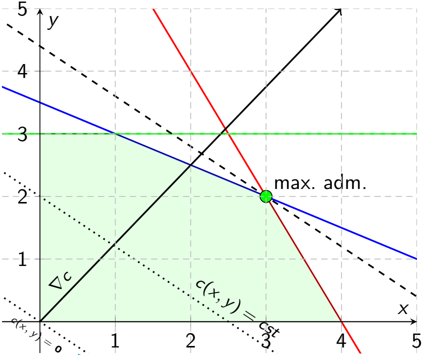
Résolution graphique : résumé

Maximiser

$$c(x,y) = 4x + 5y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x & +y & \leq 8 \\ x & +2y & \leq 7 \\ & y & \leq 3 \\ & x, y & \geq 0 \end{cases}$$



- tracer la région admissible
- calculer la droite $c(x,y) = 0$
- calculer $\nabla c(x,y)$
- chercher la parallèle la plus éloignée dans la direction de ∇c qui reste dans la zone admissible

-
- $y = -\frac{4}{5}x$
- $\nabla c = (4,5)$
- le max est atteint en $(3,2)$

Optimisation linéaire : écueils (I)

Minimiser

$$c(x,y) = 4x + 5y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x & +y & \leq 8 \\ x & +2y & \leq 7 \\ & y & \leq 3 \\ & x,y & \geq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

Maximiser

$$c'(x,y) = -(4x + 5y)$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x & +y & \leq 8 \\ x & +2y & \leq 7 \\ & y & \leq 3 \\ & x,y & \geq 0 \end{cases}$$

Minimiser

$$c(x,y) = 4x + 5y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x & +y & \geq 8 \\ x & +2y & \leq 7 \\ & y & \leq 3 \\ & x,y & \geq 0 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

Maximiser

$$c(x,y) = 4x + 5y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} -2x & +-y & \leq -8 \\ x & +2y & \leq 7 \\ & y & \leq 3 \\ & x,y & \geq 0 \end{cases}$$

Résolution graphique : écueils (II)

Maximiser

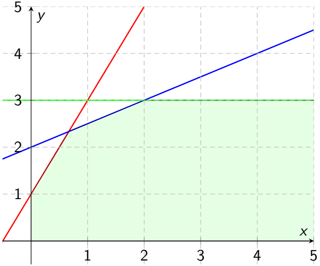
$$c(x, y) = 4x + 5y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} -2x & +y & \leq 1 \\ x & -2y & \leq -4 \\ & y & \leq 3 \\ & x, y & \geq 0 \end{cases}$$

Région admissible non-bornée

pas de solution/max $= +\infty$



Maximiser

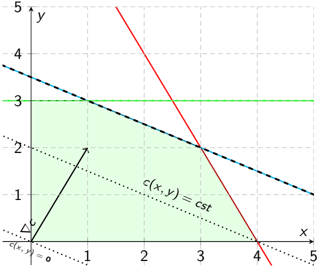
$$c(x, y) = x + 2y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} 2x & +y & \leq 8 \\ x & +2y & \leq 7 \\ & y & \leq 3 \\ & x, y & \geq 0 \end{cases}$$

infinité de solutions (x, y)

maximum unique



Résolution graphique par isoclines bilan

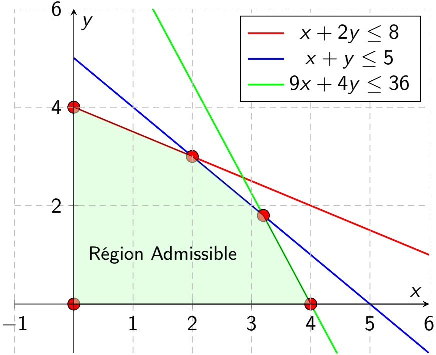
+ Facile à la main (petits exemples)
− Peu précis à la main
− Passe mal à l'échelle (si bcp de contraintes)
− Passe mal à l'échelle (si bcp de variable $\rightsquigarrow$ 3D, 4D, ... nD)
− Peu précis algorithmiquement

Au final, on se retrouve à examiner un nouveau PL avec la contrainte $c(x, y) \geq cst$ et à vérifier que la région admissible n'est pas vide $\rightsquigarrow$ mauvais algorithme

Sommets

Théorème

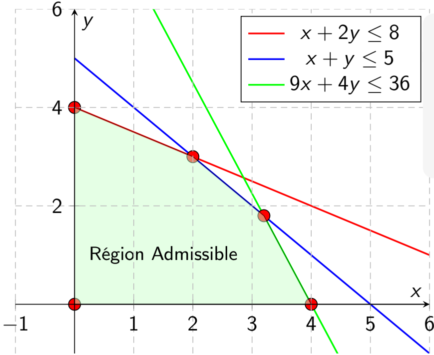
Si le polyèdre formé par l'ensemble des solutions d'un PL est borné, alors il existe au moins une solution optimale et l'une d'elles est obtenue sur un point extrême



Sommets

Théorème

Si le polyèdre formé par l'ensemble des solutions d'un PL est borné, alors il existe au moins une solution optimale et l'une d'elles est obtenue sur un point extrême

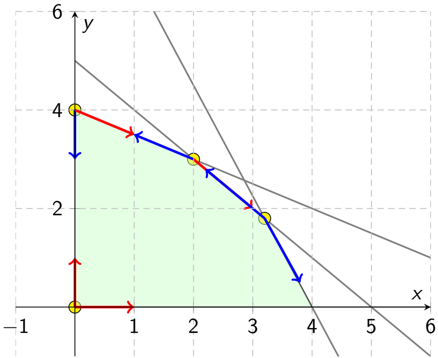


Corollaire

Pour trouver l'optimum, il "suffit" d'examiner les points extrêmes de la région admissible

Résolution Graphique : Sommets

1. Partir d'un sommet $\boldsymbol{s}$ de la région admissible
2. Déterminer une arête le long de laquelle le coût augmente. S'il n'en existe pas, $\boldsymbol{s}$ est optimal, `STOP`
3. Se déplacer le long de l'arête jusqu'au sommet $\boldsymbol{t}$ suivant. S'il n'existe pas, le problème est non borné, STOP Sinon, poser $\boldsymbol{s} \leftarrow \boldsymbol{t}$ et revenir en 2



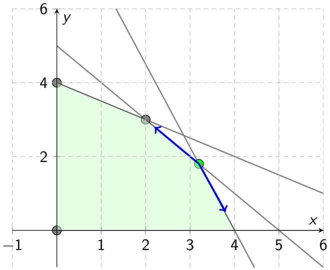
En 2D $\rightsquigarrow$ au pire nb contraintes sommets $\rightsquigarrow$ assez efficace

En 2D $\rightsquigarrow$ trouver un nouveau sommet $\rightsquigarrow$ assez efficace

Sommets : dimensions supérieures

- en dimension supérieur il y a (beaucoup) de chemins/choix possibles
- les sommets sont plus difficiles à calculer en nD
- il peut y avoir jusqu'à $\Theta(c^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ sommets pour un PL à n variables et c contraintes

$\rightsquigarrow$ pas efficace algorithmiquement



Simplexe

Algorithme du simplexe $\rightsquigarrow$ Dantzig 1947

idée de base : raffinement de la méthode des sommets utilisant le pivot de Gauss (BUT1)

En écriture matricielle, un problème linéaire (de dimension q) sous forme normale s'écrit :

$$\text{Maximiser} \quad c^T x \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{cases} Ax & \leq b \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

où

- $c = (c_1, \ldots, c_q)^T$ est le vecteur colonne (à q lignes) de calcul du coût ;
- $x = (x_1, \ldots, x_q)^T$ est le vecteurs colonnes (à q lignes) des variables ;
- $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ est une matrice (à p lignes et q colonnes) des contraintes ;
- et $b = (b_1, \ldots, b_p)^T$ est le vecteur colonne (à p lignes) des bornes

Simplexe : forme matricielle (standard)

Maximiser

$$c(x,y) = 2x + y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x & +2y & \leq 8 \\ x & +y & \leq 5 \\ 9x & +4y & \leq 36 \\ & x,y & \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 9 & 4 \end{pmatrix} \; b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Maximiser $\quad c^T X$

sous les contraintes

$$\begin{cases} AX & \leq b \\ X & \geq 0 \end{cases}$$

Simplexe : forme matricielle standard

En fait, on cherche souvent une forme encore plus rigide, la *forme standard*

$$\text{Maximiser} \quad c^T x \quad \text{sous les contraintes} \quad \begin{cases} Ax & = b \\ x & \geq 0 \end{cases}$$

- $c = (c_1, ..., c_q)^T$ est le vecteur colonne (à q lignes) de calcul du coût ;
- $x = (x_1, ..., x_q)^T$ est le vecteurs colonnes (à q lignes) des variables ;
- $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$ est une matrice (à p lignes et q colonnes) des contraintes ;
- et $b = (b_1, ..., b_p)^T$ est le vecteur colonne (à p lignes) des bornes

Cela peut toujours se faire. L'astuce consiste à rajouter des variables (dites d'écart). Par exemple $x + 2y \leq 8$ sera remplacé par :

$$\begin{cases} x + 2y + z & = 8 \\ z & \geq 0 \end{cases}$$

Simplexe : forme matricielle standard

Maximiser

$$c(x,y) = 2x + y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x & +2y & \leq 8 \\ x & +y & \leq 5 \\ 9x & +4y & \leq 36 \\ & x, y & \geq 0 \end{cases}$$

Devient :

Maximiser

$$c(x, y, z_1, z_2, z_3) = 2x + y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x & +2y & +z_1 & & & = 8 \\ x & +y & & +z_2 & & = 5 \\ 9x & +4y & & & +z_3 & = 36 \\ & x, y, & z_1, z_2, z_3 & & & \geq 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

Maximiser $\quad c^T X$

sous les contraintes $\begin{cases} AX & = b \\ X & \geq 0 \end{cases}$

Simplexe : pivotage et résolution I

Maximiser

$$c(x, y, z_1, z_2, z_3) = 2x + y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x & +2y & +z_1 & & & = 8 \\ x & +y & & +z_2 & & = 5 \\ 9x & +4y & & & +z_3 & = 36 \\ & x, y, & z_1, z_2, z_3 & & & \geq 0 \end{cases}$$

On résout à partir de la solution de base $(x, y, z_1, z_2, z_3) = (0, 0, 8, 5, 36)$ (donc $c = 0$)

$$\begin{cases} z_1 & = 8 & -x & -2y \\ z_2 & = 5 & -x & -y \\ z_3 & = 36 & -9x & -4y \\ c & = & 2x & +y \end{cases}$$

Augmenter x ferait augmenter c, donc on va l'augmenter un maximum (ce qui fera diminuer z_1, z_2 et z_3)

opt. $x = \frac{36}{9} - \frac{z_3}{9} - \frac{4}{9}y$

$$\begin{cases} z_1 & = 8 & -(\frac{36}{9} - \frac{z_3}{9} - \frac{4}{9}y) & -2y \\ z_2 & = 5 & -(\frac{36}{9} - \frac{z_3}{9} - \frac{4}{9}y) & -y \\ x & = \frac{36}{9} & -\frac{z_3}{9} & -\frac{4}{9}y \\ c & = & 2(\frac{36}{9} - \frac{z_3}{9} - \frac{4}{9}y) & +y \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 & = 4 & +\frac{z_3}{9} & -\frac{14}{9}y \\ z_2 & = 1 & +\frac{z_3}{9} & -\frac{5}{9}y \\ x & = 4 & -\frac{z_3}{9} & -\frac{4}{9}y \\ c & = 8 & -\frac{2}{9}z_3 & +\frac{1}{9}y \end{cases}$$

avec comme solution

$(x, y, z_1, z_2, z_3) = (4, 0, 4, 1, 0)$

Simplexe : pivotage et résolution II

$$\begin{cases} z_1 &= 4 &+\frac{z_3}{9} &-\frac{14}{9}y \\ z_2 &= 1 &+\frac{z_3}{9} &-\frac{5}{9}y \\ x &= 4 &-\frac{z_3}{9} &-\frac{4}{9}y \\ c &= 8 &-\frac{2}{9}z_3 &+\frac{1}{9}y \end{cases}$$

Augmenter y ferait augmenter c, donc on va l'augmenter un maximum (ce qui fera diminuer z_1, z_2 ou x)

opt. $y = \frac{9}{5} + \frac{81}{5}z_3 - \frac{9}{5}z_2$

$$\begin{cases} z_1 &= 4 &+\frac{z_3}{9} &-\frac{14}{9}\left(\frac{9}{5} + \frac{81}{5}z_3 - \frac{9}{5}z_2\right) \\ y &= \frac{9}{5} &+\frac{81}{5}z_3 &-\frac{9}{5}z_2 \\ x &= 4 &-\frac{z_3}{9} &-\frac{4}{9}\left(\frac{9}{5} + \frac{81}{5}z_3 - \frac{9}{5}z_2\right) \\ c &= 8 &-\frac{2}{9}z_3 &+\frac{1}{9}\left(\frac{9}{5} + \frac{81}{5}z_3 - \frac{9}{5}z_2\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 &= \frac{6}{5} &+\frac{z_3}{5} &-\frac{14}{5}z_2 \\ y &= \frac{9}{5} &+\frac{81}{5}z_3 &-\frac{9}{5}z_2 \\ x &= \frac{16}{5} &-\frac{z_3}{5} &-\frac{4}{5}z_2 \\ c &= \frac{16}{5} &-\frac{1}{5}z_3 &-\frac{1}{5}z_2 \end{cases}$$

avec comme solution $(x, y, z_1, z_2, z_3) = (\frac{16}{5}, \frac{9}{5}, \frac{6}{5}, 0, 0)$ tous les coef. du coût négatifs $\rightsquigarrow$ plus d'augmentation possible $\rightsquigarrow$ `stop`

Simplexe : tableau et pivotage

	x	y	z_1	z_2	z_3		
z_1	**1**	**2**	**1**	**0**	**0**	**8**	$L_1' \leftarrow L_1 - L_3'$
z_2	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**5**	$L_2' \leftarrow L_2 - L_3'$
z_3	$\boxed{\mathbf{9}}$	**4**	**0**	**0**	**1**	**36**	$L_3' \leftarrow L_3 \times \frac{1}{9}$
Max	**2**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	$L_4' \leftarrow L_4 - 2L_3'$

$(x, y, z_1, z_2, z_3) = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{36})$ **(base)**

	x	y	z_1	z_2	z_3		
z_1	**0**	$\frac{14}{9}$	**1**	**0**	$-\frac{1}{9}$	**4**	$L_1' \leftarrow L_1 - \frac{14}{9} L_2'$
z_2	**0**	$\boxed{\frac{5}{9}}$	**0**	**1**	$-\frac{1}{9}$	**1**	$L_2' \leftarrow L_2 \times \frac{9}{5}$
x	**1**	$\frac{4}{9}$	**0**	**0**	$\frac{1}{9}$	**4**	$L_3' \leftarrow L_3 - \frac{4}{9} L_2'$
Max	**0**	$\frac{1}{9}$	**0**	**0**	$-\frac{2}{9}$	$-\mathbf{8}$	$L_4' \leftarrow L_4 - \frac{1}{9} L_2'$

$(x, y, z_1, z_2, z_3) = (\mathbf{4}, \mathbf{0}, \mathbf{8}, \mathbf{5}, \mathbf{0})$

	x	y	z_1	z_2	z_3	
z_1	**0**	**0**	**1**	$-\frac{14}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
y	**0**	**1**	**0**	$\frac{9}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
x	**1**	**0**	**0**	$-\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{16}{5}$
Max	**0**	**0**	**0**	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{41}{5}$

$(x, y, z_1, z_2, z_3) = (\mathbf{3.2}, \mathbf{1.8}, \mathbf{1.2}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$

On retrouve bien notre maximum

Simplexe : bilan

+ Raisonnable à implémenter
+ Efficace en pratique
– Besoin de règles supplémentaires pour être meilleur
– Exponentiel en pire cas
– Attention à la précision si on divise par des petits nombre (idem pivot)

Règles de pivotage : critère de Dantzig
En rajoutant des (petites) perturbations aléatoires, on converge presque sûrement vers une solution proche de la solution réelle en temps polynomial
Il existe aussi des algo. réellement polynomiaux (mais on ne sait pas s'il existe une règle de pivotage qui rend le simplexe polynomial)