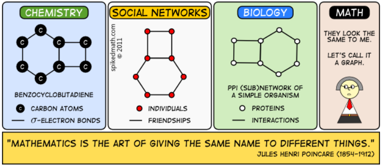
R2.07 Graphes

Corentin Dufourg, Régis Fleurquin et Thibault Godin
IUT de Vannes Informatique

Modélisation de situations concrètes : les relations/graphes de M. Jourdain



spiked math comics

- Liaisons routières, ferroviaires ou aériennes
- Déplacement d'une pièce d'échec
- Interactions écologiques
- Organigramme d'entreprise

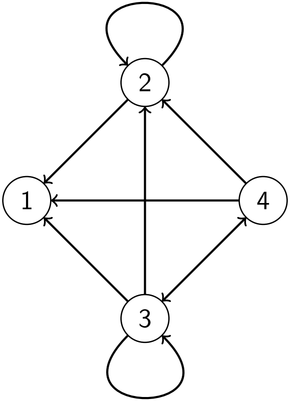
(Sûrement) modélisable avec des graphes :

- un ensemble d'objets homogènes (étudiants, machines, carrefours...)
- les liens entre ces objets (même groupe, relié par une route...)

Rappel des épisodes précédents (R1.06, relation binaire sur un ensemble)

Diagramme sagittal

Lorsque les ensembles au départ et à l'arrivée coïncident, on préfère la représentation sous forme de « graphe » :



Théorie des graphes : objectifs ?

- Comment modéliser une réseau d'ordinateurs ?
- Comment sortir à coup sûr d'un labyrinthe ?
- Quel est le plus court chemin (en distance ou en temps) pour se rendre d'une ville à une autre ?
- Comment minimiser la longueur totale des câbles d'un réseau ?
- Comment identifier la personne la plus influente d'un groupe ?
- Comment colorier un graphe (et organiser des week-ends et résoudre des problèmes de logique) ?
- Peut-on atteindre un endroit quand un adversaire nous en empêche (et vérifier un programme)

Graphe et relation

Définition

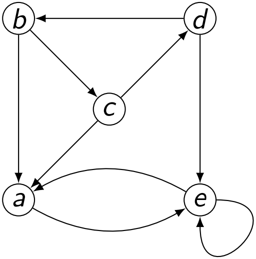
Un **graphe** $\mathcal{G}$ est un couple $\mathcal{G} = (S, A)$ avec :

- S un ensemble non vide et fini, les **sommets** ;
- A une relation binaire de S, les **arcs**.

Si aAb on dit que a est l'extrémité initiale et b l'extrémité finale.

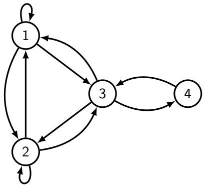
Exemple

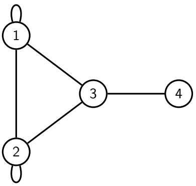
Le dessin :



est associé $\mathcal{G} = (S, A)$
avec $S = \{a, b, c, d, e\}$
et $\{aAe, bAa, bAc, cAa, cAd,$
$dAb, dAe, eAa, eAe\}$.

Graphe orienté et non orienté





Si la relation A est symétrique, on dira que le graphe est non-orienté (ou symétrique). On parlera alors d'**arête** au lieu d'arc (et on enlèvera les flèches et fusionnera les arcs symétriques).

Sinon on dira que le graphe est orienté (ou dirigé, ou que c'est un digraphe).

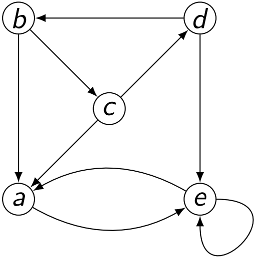
On ne peut enlever les flèches que si **toute** la relation est symétrique.

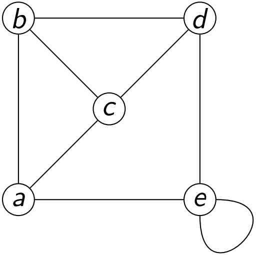
Donner la formalisation de ce graphe non-orienté dans ce cours une seule arête/arc entre deux sommets.

Sinon $\rightsquigarrow$ **multi-graphe**

Arête/arc reliant un sommet à lui même $\rightsquigarrow$ **boucle**

Tout graphe orienté a un graphe associé non-orienté, obtenu en rendant la relation symétrique (clôture symétrique)



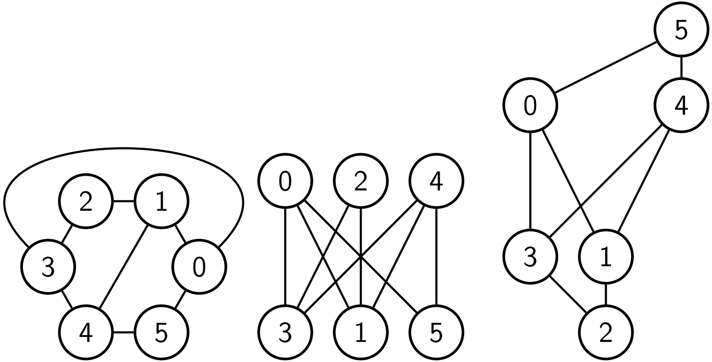


Le dessin d'un graphe n'est pas unique

$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ et la relation A donnée par

$0A1, 0A3, 0A5, 1A0, 1A0, 1A2, 1A4, 2A1, 2A3, 3A0, 3A2, 3A4,$
$4A1, 4A3, 4A5, 5A0, 5A4$

Ce graphe est-il orienté ? Le dessiner.



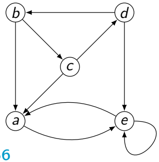
Vocabulaire

- L'**ordre d'un graphe** : nombre de sommets de ce graphe.
- La **taille d'un graphe** : nombre d'arêtes/arcs de ce graphe.
- Un graphe est **simple** s'il n'a pas de boucle.
- Le **degré** d'un sommet : nombre d'arêtes ayant pour extrémité ce sommet

  boucles comptées 2 fois

  Pour un graphe orienté :

- le **degré sortant** $d^+(s) \rightsquigarrow$ nombre d'arcs où s initial.
- le **degré entrant** $d^-(s) \rightsquigarrow$ nombre d'arcs où s final.



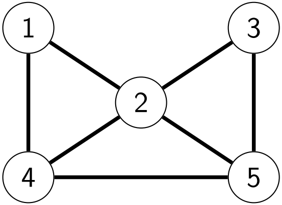
Décrire ce graphe avec le vocabulaire introduit précédemment.

Représentation d'un graphe

humain (petits graphes) dessin

mathématiques définitions formelle

informatiques matrices/listes



$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
$\{1A2, 1A4 \ldots\}$

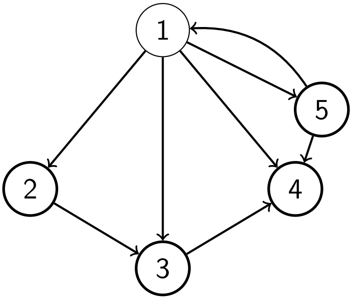
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence

Soit graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ d'ordre n.
La matrice d'adjacence de $\mathcal{G}$ est égale à la matrice $M = (M_{ij})$ de dimension $n \times n$ telle que

$$M_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } (iAj) \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Exemple



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- la somme des éléments de la i^e ligne de M est égale au degré sortant du sommet x_i de $\mathcal{G}$.
- la somme des éléments de la j^e colonne de M est égale au degré entrant du sommet x_j de $\mathcal{G}$.

Matrice d'adjacence

- Graphe orienté quelconque $\rightsquigarrow$ matrice d'adjacence quelconque
- Graphe non-orienté $\rightsquigarrow$ matrice d'adjacence symétrique.
- Absence de boucle $\rightsquigarrow$ 0 sur la diagonale.

Avantages/Inconvénients

- Avantages :
  - La recherche de chemins ou de chaînes s'effectue aisément.
  - La matrice d'adjacence possède quelques propriétés qui peuvent être exploitées.
  - Compacité de la représentation.
- Inconvénients :
  - Stockage et examen inutile de zéros.
  - Redondance des informations pour les graphes non orientés.

taille : n^2

Matrice d'incidence pour un graphe orienté

Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe orienté sans boucle comportant n sommets $x_1, ..., x_n$ et m arcs $a_1, ..., a_m$.
On appelle matrice d'incidence (aux arcs) de G la matrice $I = (I_{ij})$ de dimension $n \times m$ telle que :

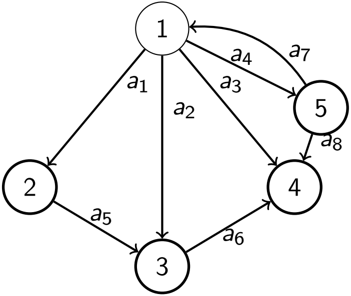
$$I_{ij} = \begin{cases} +1 \text{ si } x_i \text{ est l'extrémité initiale de } a_j \\ -1 \text{ si } x_i \text{ est l'extrémité terminale de } a_j \\ 0 \text{ si } x_i \text{ n'est pas une extrémité de } a_j \end{cases}.$$

Matrice d'incidence pour un graphe non orienté

Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe non-orienté sans boucle comportant n sommets $x_1, ..., x_n$ et m arêtes $a_1, ..., a_m$.
On appelle matrice d'incidence (aux arêtes) de $\mathcal{G}$ la matrice $I = (I_{ij})$ de dimension nm telle que :

$$I_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i \text{ est une extrémité de } a_j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

Exemple



$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- la somme des éléments de la i^{e} ligne de U vaut $d_+(j) - d_-(j)$ pour les graphes orienté, $d(j)$ pour les graphes non-orienté.
- la somme des éléments de la j^{e} colonne de U vaut 0 pour les graphes orientés, 2 pour les non-orientés.

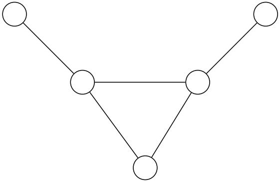
Avantages/Inconvénients

- Avantages :
  - Rapidité des recherches.
  - Compacité de la représentation.
  - Informations non redondantes pour les graphes non orientés.
- Inconvénients :
  - Stockage et examen inutile de zéros
  - On ne peut pas représenter les boucles

taille $n \times m$

Récapitulons !

On appelle *graphe taureau* le graphe dessiné ci-dessous :

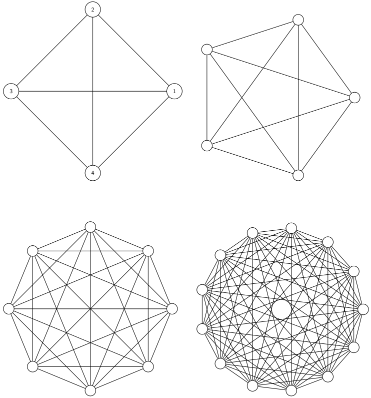


Donner la relation associée à ce graphe.
Donner son ordre et sa taille.
Donner sa matrice d'adjacence et sa matrice d'incidence.

Graphes complets

Définition

Un graphe complet est un graphe où chaque sommet est relié à tous les autres. Le graphe complet d'ordre n est noté K_n. Dans ce graphe chaque sommet est de degré n-1.



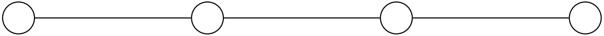

```python
def complete(n):
    A=np.zeros((n,n))
    for i in range(n):
        for j in range(i+1,n):
          A[i][j]=1
          A[j][i]=1

    return A
```

Graphes Chemin et Cycle

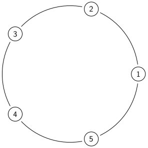
Le graphe **chemin** P_n est tel que $S = \{1, 2, ..., n\}$ et $A = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, ..., \{n-1, n\}\big\}$. En d'autre termes $A = \{\{x, y\} \| x - y| = 1\}$.

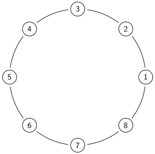
```
def path(n):
    A=np.zeros((n,n))
    for i in range(n-1):
        A[i][i+1]=1
        A[i+1][i]=1
    return A
```



Le **cycle élémentaire** C_n est tel que $S = \{1, 2, ..., n\}$ et $A = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, ..., \{n, 1\}\big\}$, en d'autre termes $A = \{\{x, y\} \| x - y| = 1\} \cup \{\{1, n\}\}$.

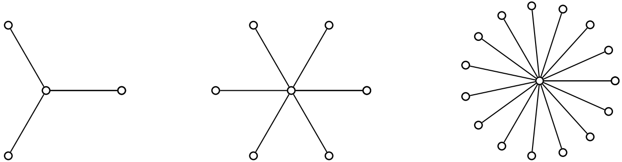
```
def cycle(n):
    A=path(n)
    A[0][n-1]=1
    A[n-1][0]=1
    return A
```





Graphes Étoile

La **étoile** S_n est telle que $S = \{0, 1, 2, ..., n\}$ et
$A = \left\{\{\{0, 1\}, \{0, 2\}, ..., \{0, n\}\right\}$.

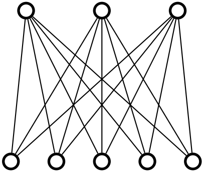


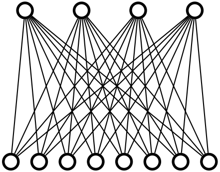
```
def star(n):
  A=np.zeros((n+1,n+1))
  for i in range(1,n+1):
        A[0][i]=1
        A[i][0]=1
  return A
```

Graphes bipartis (complets)

Un graphe est **biparti** si son ensemble de sommet peut être partitionné en deux sous ensembles tel que que toute arête aie ses extrémités dans un ensemble différent.

Le graphe biparti complet $K_{m,n}$ est le graphe $(S_1 \cup S_2, \{\{s_1, s_2\} | s_1 \in S_1 \text{ et } s_2 \cup S_2\})$ avec Card $S_1 = m$ et Card $S_2 = n$.





Notons s_1, s_2,...,s_n les sommets d'un graphe $\mathcal{G}$

$$(\deg(s_1), \deg(s_2), \ldots, \deg(s_n))$$

est appelée le *suite des degrés* du graphe $\mathcal{G}$.

Théorème des poignées de mains

$\mathcal{G} = (S, A)$ non-orienté, on a :

$$\sum_{s \in X} \deg(s) = 2 \times \mathrm{Card}(A)$$

$\mathcal{G} = (S, A)$ orienté, on a :

$$\sum_{s \in X} \deg^+(s) = \sum_{s \in X} \deg^-(s) = \mathrm{Card}(A)$$

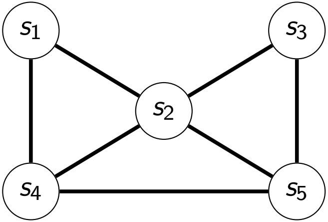
Corollaire

Dans un graphe non-orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Chaine (ou chemin)

Définition

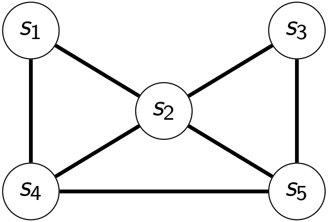
- Dans un graphe non orienté, **une chaine** d'extrémités le sommet s_1 et le sommet s_2 est une suite finie d'arêtes consécutives, reliant s_1 à s_2.
- La **longueur** d'une chaine est égale au nombre d'arêtes parcourues (en tenant compte des multiplicités) en suivant cette chaine.



Définition

- Un chaîne est **simple** si chaque arête de la chaine est empruntée une seule fois.
- Une chaîne est **élémentaire** si elle ne passe pas deux fois par le même sommet.

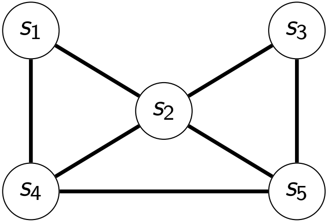
rmq : élémentaire $\Rightarrow$ simple



Pour les graphes orientés on parle de **chemin**.

Définition

Un **cycle** est une chaîne simple dont le premier sommet est le même que le dernier.



Pour les graphes orientés on parle de **circuit**.

Théorème de König, 1927

Soient x et y deux sommets distincts d'un graphe $\mathcal{G}$. S'il existe une chaîne/ un chemin dans $\mathcal{G}$ reliant x à y alors il existe une chaîne/un chemin élémentaire de x à y.

Lemme

Si dans un graphe $\mathcal{G}$ tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors $\mathcal{G}$ possède au moins un cycle.

Lemme

Un graphe sans cycle (acyclique) $\mathcal{G}$ à n sommets possède au plus $n - 1$ arêtes.

Connexité

Définition

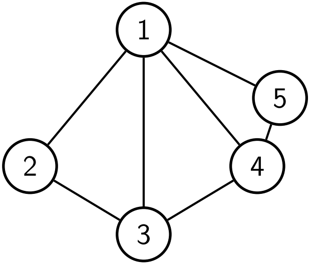
Une composante connexe $\mathcal{C}$ d'un graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ est un sous-ensemble *maximal* de sommets tq toute paire de sommets est relié par une chaîne.

Formellement, si $x \in \mathcal{C}$ alors on a :

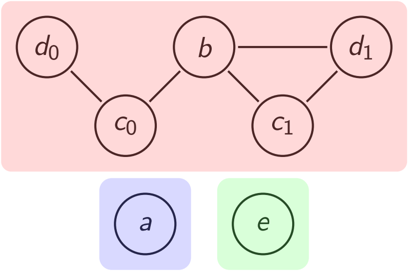
- pour tout $y \in \mathcal{C}$ il existe une chaîne reliant x à y et une reliant y à x
- pour tout $y \notin \mathcal{C}$ il n'existe aucune chaîne reliant x à y ou bien il n'en existe aucune une reliant y à x

Un graphe $\mathcal{G}$ est dit **connexe** ssi il possède une unique composante connexe.

Un graphe connexe :



Un graphe décomposé en composantes connexes :



Lemme

Un graphe $\mathcal{G}$ d'ordre n connexe comporte au moins $n-1$ arêtes.

Forte connexité

Définition

Une composante fortement connexe $\mathcal{C}$ d'un graphe orienté $\mathcal{G} = (S, A)$ est un sous-ensemble *maximal* de sommets tels que toute paire de sommets est relié par un chemin.

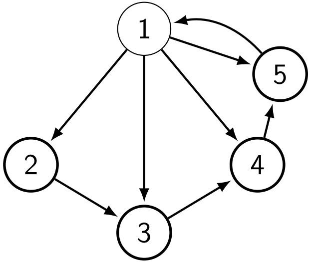
Formellement, si $x \in \mathcal{C}$ alors on a :

- pour tout $y \in \mathcal{C}$ il existe une un chemin reliant x à y et une reliant y à x
- pour tout $y \notin \mathcal{C}$ il n'existe aucun chemin reliant x à y ou bien il n'en existe aucun reliant y à x

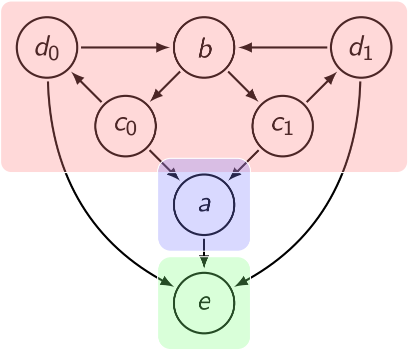
Un graphe $\mathcal{G}$ est dit **fortement connexe** ssi il possède une unique composante fortement connexe.

Forte connexité : exemples

Un graphe fortement connexe :

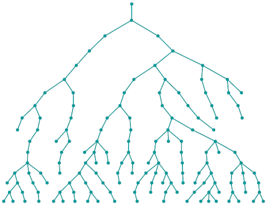


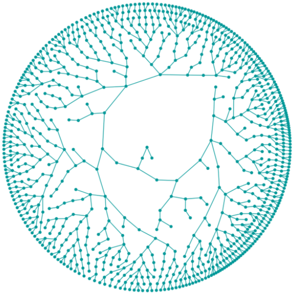
Un graphe décomposé en composantes fortement connexes :



Arbres

Un **arbre** non orienté est un graphe non-orienté connexe sans cycle.





Arbres

Il existe de nombreuses caractérisations des arbres :

Théorème

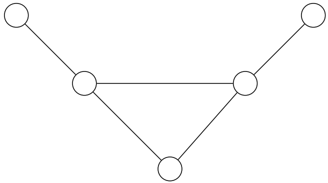
Soit $\mathcal{G}$ un graphe non orienté d'ordre n. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- $\mathcal{G}$ est un arbre ;
- $\mathcal{G}$ est connexe sans cycle ;
- $\mathcal{G}$ est connexe et a $n-1$ arêtes ;
- $\mathcal{G}$ est connexe et la suppression de n'importe quelle arête le déconnecte ;
- $\mathcal{G}$ est sans cycle et a $n-1$ arêtes ;
- $\mathcal{G}$ est sans cycle et l'ajout de n'importe quel arête crée un cycle ;
- entre toute paire de sommets de $\mathcal{G}$ il existe une unique chaîne élémentaire ;

Définition

$x, y \in S$ la distance entre x et y : minimum des longueurs des chemins/chaînes reliant x et y, noté $\mathrm{dist}(x, y)$.
Excentricité d'un sommet $\chi(s)$: maximum des distances entre s et les sommets du graphe, et vaut donc $\max_{x \in S} \mathrm{dist}(s, y)$
Diamètre du graphe : maximum des distances entre les sommets du graphe, et vaut donc $\max_{x,y \in S} \mathrm{dist}(x, y) = \max_{s \in S} \chi(s)$
Rayon d'un graphe : distance minimal à laquelle un sommet peut être du reste des sommets du graphe, soit $\min_{x \in S} \max_{y \in S} \mathrm{dist}(x, y) = \min_{s \in S} \chi(s)$

Dans un graphe orienté, $\mathrm{dist}(x, y) \neq \mathrm{dist}(y, x)$ en général

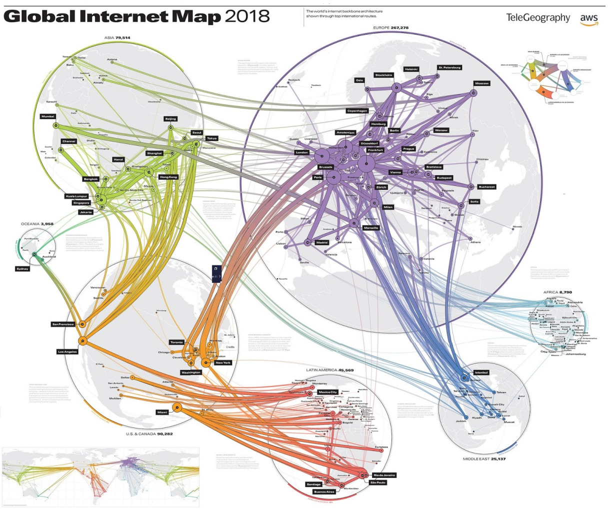


Le rayon vaut 2 et le diamètre 3.

Lemme

Pour tout graphe, le diamètre vaut au plus deux fois le rayon.

Questions ?



Global Internet Map 2018
The world's internet backbone architecture shown through top international routes.
TeleGeography
aws
ASIA 79,514
EUROPE 267,278
OCEANIA 3,958
AFRICA 8,790
U.S. & CANADA 90,282
LATIN AMERICA 45,569
MIDDLE EAST 25,137

Contenu supplémentaire

Dans les slides suivantes vous trouverez des notions supplémentaires sur les graphes.

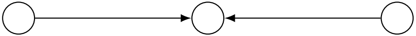
Elles ne seront pas exigibles aux contrôles mais peuvent être intéressantes, par exemple pour la SAÉ.

Arbres orientés

Un graphe orienté est un arbre enraciné si et seulement si

- il est faiblement connexe,
- il a un unique sommet sans prédécesseur (la racine),
- et tous ses autres sommets ont exactement un prédécesseur.

Un graphe orienté sans circuit n'est pas forcément un arbre orienté.



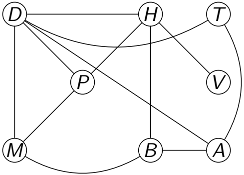
- racine de l'arbre : le sommet qui n'a pas de prédécesseur
- feuilles de l'arbre : les sommets qui n'ont pas de successeur ;
- nœuds de l'arbre : tous les autres sommets ;
- branche de l'arbre : tout chemin de la racine vers une feuille,
- descendant/ascendant de s : les successeurs/le prédécesseur de s,

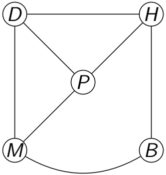
Sous graphe

Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe et $S' \subset S$.

- Un sous-graphe $\mathcal{G}[S']$ consiste à considérer seulement une partie des sommets de S et les liens induits par A, c'est-à-dire le graphe $\mathcal{G}[S'] = (S', A')$ où $\forall i, j \in S', iA'j \Leftrightarrow iAj$.

Si $\mathcal{G}$ représente les liaisons aériennes journalières en Europe, entre Athènes, Budapest, Dublin, Madrid, Helsinki, Paris, Talinn et Varsovie ; donner le sous graphe correspondant aux villes Budapest Dublin, Helsinki, Madrid et Paris.





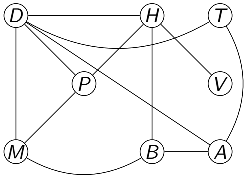
Graphe partiel

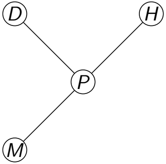
Un graphe partiel de $\mathcal{G}$ consiste à ne considérer qu'une partie des arêtes de A. Soit $\mathcal{G} = (S, A)$ un graphe et A' une relation binaire sur S telle que $iA'j \Rightarrow iAj$.

- Le graphe partiel $\mathcal{G}\langle A' \rangle$ consiste à considérer seulement les arêtes donnée par A', c'est-à-dire le graphe $\mathcal{G}\langle A' \rangle = (S', A')$ où $S' = \{i \in S | \exists j \in S, iA'j \vee jA'i\}$.

Un graphe partiel où $S' = S$ est dit **couvrant**

En reprenant le même exemple, un graphe partiel possible est de ne considérer que les liaisons passant par Paris.





Union de graphes

Définition

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes. Leur *union* est le graphe $G \cup G' = (S \cup S', A_\cup)$ avec $\forall x, y \in S \cup S', xA_\cup y \iff xAy \vee xA'y$.

Donner et dessiner l'union des graphes $\mathcal{G} = (S, A)$ avec $S = \{a, b, c, d, e\}$ et $\{aAe, eAa, bAa, bAc, cAd, dAb, dAe, eAe\}$;
et $G' = (S', A')$ avec $S' = \{d, e, f, g\}$ et $\{dA'e, dA'd, dA'f, fA'g, gA'g, hA'e\}$.

Intersection de graphes

Définition

Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes. Leur *intersection* est le graphe $G \cap G' = (S \cap S', A_\cap)$ avec $\forall x, y \in S \cap S', xA_\cap y \iff xAy \wedge xA'y$.

Donner et dessiner l'intersection des graphes $\mathcal{G} = (S, A)$ avec $S = \{a, b, c, d, e\}$ et $\{aAe, eAa, bAa, bAc, cAd, dAb, dAe, eAe\}$;
$G' = (S', A')$ avec $S' = \{d, e, f, g\}$ et $\{dA'e, dA'd, dA'f, fA'g, gA'g, hA'e\}$.

Graphe complémentaire

Définition

Soit $G = (S, A)$ un graphe, son *complémentaire* est le graphe $\overline{G} = (S, \overline{A})$ avec $\forall x, y \in S, x\overline{A}y \iff \neg(xAy)$.

Donner et dessiner le graphe complémentaire du graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ avec $S = \{a, b, c, d, e\}$ et $\{aAe, eAa, bAa, bAc, cAd, dAb, eAe\}$.
Que peut-on dire du complémentaire d'un graphe non-orienté ?

Produits de graphes

Soient $G = (S, A)$ et $G = (T, A')$, on définit les graphes produits ayant comme sommets $S \times T$:

nom du produit	symbole	relation entre les sommets (s_1, t_1) et (s_2, t_2)
Produit Cartésien	$G \square G'$	$(s_1 A s_2 \wedge t_1 = t_2) \vee (s_1 = s_2 \wedge t_1 A' t_2)$
Produit de Kronecker	$G \times G'$	$(s_1 A s_2 \wedge t_1 A' t_2)$
Produit fort	$G_1 \boxtimes G_2$	$(s_1 A s_2 \wedge t_1 = t_2) \vee (s_1 = s_2 \wedge t_1 A' t_2)$ $\vee (s_1 A s_2 \wedge t_1 A' t_2)$

Soit P_2 le graphe chemin à 2 sommets.
Dessiner $P_2 \square P_2$, $P_2 \times P_2$ et $P_2 \boxtimes P_2$. Exprimer $G_1 \boxtimes G_2$ en utilisant $G_1 \square G_2$ et $G_1 \times G_2$.