TD1

R2.09

Analyse

Premières propriétés

Exercice 1 : Maths financières 101

Une banque propose un placement à 1,5% par an, c'est à dire que chaque année, la banque ajoute 1,5% de ce que contient votre compte à celui-ci. Vous investissez 100 €, puis ne touchez plus à votre compte.

1. Combien d'argent avez-vous sur votre compte au bout d'un an ? Au bout de deux ans ? Après dix ans ?
2. Modélisez cette suite. Reconnaissez-vous une suite connue ?
3. Au bout de combien d'années aurez-vous 1000€ sur votre compte ?

Exercice 2 :

On définit une suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de u_0 et la condition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3}$$

1. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique ; en préciser la raison.
   (b) Calculer v_n en fonction de u_0 et de n
2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

   (a) $u_0 = 4$ (b) $u_0 = 3$ (c) $u_0 = -1$

Exercice 3 :

On considère le programme python suivant :

```
def Exercice():
  x=1
  y=10
  while(x+y >5):
    y=2*x+y
    x=-2*x
```

Pour étudier le comportement de ce programme, et, en particulier savoir s'il ne boucle pas de manière infinie, on considère les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans lesquelles, les nombres x_n et y_n représentent l'état (ou les valeurs) des variables x et y à l'itération n. Ainsi, nous avons :

$$\begin{cases} x_0 = 1 \text{ et } y_0 = 10 \\ x_{n+1} = -2x_n \\ y_{n+1} = 2x_n + y_n \end{cases}$$

1. Calculer x_1, y_1, x_2, y_2
2. Démontrer que $x_n = (-2)^n$
3. Démontrer que $y_n = 10 + \frac{2}{3}(1-(-2)^n)$
4. Démontrer qu'il existe un rang n tel que l'instruction
`while (x+y>5)`
soit fausse.
5. Que conclure quant à la terminaison du programme ?

Testez ce programme en Python (chez vous).

Limites

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{3n}u_n \end{cases}$$

1. Montrer que la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite géométrique
2. En déduire une formule explicite de u_n
3. Donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 5 : Complexité

```
Data: n
for 1 ≤ i ≤ n do
    algo1(i)
algo2(n)
```

1. Quelle est la complexité du programme si `algo1` est en $O(n)$ et `algo2` est en $O(n^3)$?
2. Quelle est la complexité du programme si `algo1` est en $O(n^2)$ et `algo2` est en $O(n^3)$?
3. Quelle est la complexité du programme si `algo1` est en $O(\ln n)$ et `algo2` est en $O(n)$?

Exercice 6 : Complexité

Algorithm 1: Dichotomie

```
Function recherche(T, x, d, f) :
    if f < d then
        return −1
    else
        m = ⌊(b+a)/2⌋
        if T[m] = x then
            return m
        else if T[m] < x then
            return
                recherche(T,x,m+1,f)
        else
            return
                recherche(T,x,m-1,x)
```

Algorithm 2: Stooge Sort

```
Function stoogesort(L, i = 0, j = len(L) − 1) :
    if L[i] > L[j] then
        tmp = L[i]
        L[i] = L[j]
        L[j] = tmp
    if j-i+1 >2 then
        t = floor((j − i + 1)/3)
        stoogesort(L, i, j − t)
        stoogesort(L, i + t, j)
        stoogesort(L, i, j − t)
    return L
```

1. Que fait le premier algorithme ? Donner sa complexité à l'aide du Master Theorem.
2. Donner la complexité du Stoogessort.

Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels *strictement positifs* telle que $\forall n > 1, \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq q < 1$. Montrer que la suite converge et que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

Exercice 8 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2$

1. Quelle est limite de cette suite ?
2. Justifier l'existence d'un entier N_0, tel que si $n > N_0$, alors $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{49}{72}$
3. Calculer l'entier N_0

Exercice 9 : * Somme des termes d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et telle que $u_0 = a$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2} = \frac{(n+1)(2a+nr)}{2}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q où q est différent de 1 ($q \neq 1$)

Montrer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$

Que dire dans le cas $q = 1$?