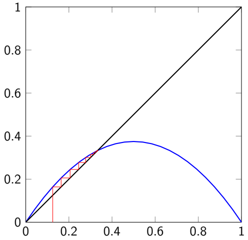
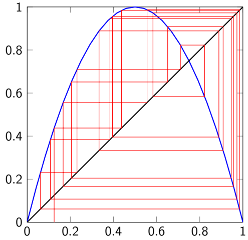
R2.09 Méthodes Numériques

Thibault Godin, Lucie Naert, Anthony Ridard
IUT de Vannes Informatique

On va étudier les suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction.



$\mu = \frac{3}{2}$



$\mu = 4$

La question principale est **"que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si on connaît f"**.

Par exemple on a vu que $\lim u_n = \ell \Rightarrow f(\ell) = \ell$ (on dit que ℓ est un point fixe de la fonction ℓ).

- Le prouver. Quelles sont les limites possibles de la suite $u_{n+1} = u_n^2$?
- Montrer que la réciproque (l'écrire) est fausse (donner un contre exemple).

Rappels math discrètes R1.06 :

Une fonction est une relation binaire où tout élément au départ est en relation avec au plus un élément à l'arrivée.

Une application est une fonction où tout élément au départ possède une image.

- Une fonction se note en général f plutôt que $\mathcal{R}$, et on écrit $y = f(x)$ plutôt que $x \ f \ y$
- En fait, une fonction f de E vers F se note :

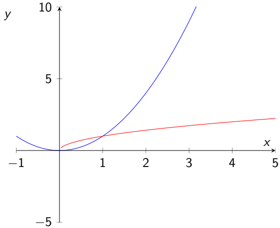
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

- En Mathématiques, il est commun de définir une fonction f en donnant l'expression permettant de « calculer » $f(x)$

Fonctions usuelles

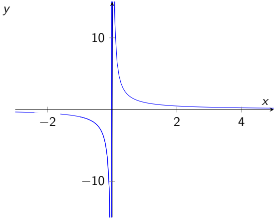
Fonction puissance $\alpha > 0$:

$$\begin{array}{rccc} .^{\alpha} : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{\alpha} \end{array}$$



Fonction inverse :

$$\begin{array}{rccc} .^{-1} : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^{-1} \end{array}$$

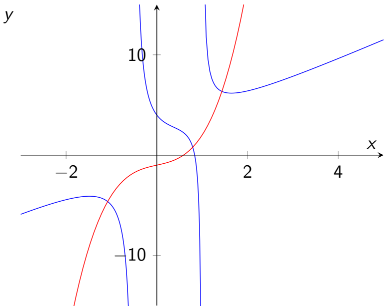


Fonctions usuelles

Fonctions polynomiales :

$$\begin{array}{rccl} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \end{array}$$

Fraction rationnelle : $\frac{P}{Q}$ où P et Q sont deux fonctions polynomiales.



Fonctions usuelles

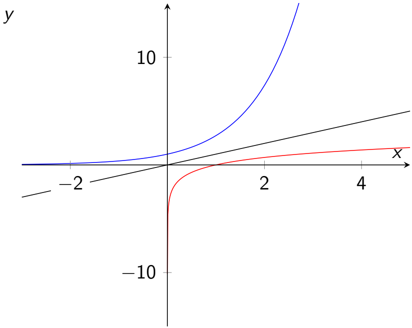
Fonction exponentielle :

$$\exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$$

Fonction logarithme :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$

remarque : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exp \circ \ln(x) = x$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \ln \circ \exp(x) = x$.



$$\log_d(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(d)}$$

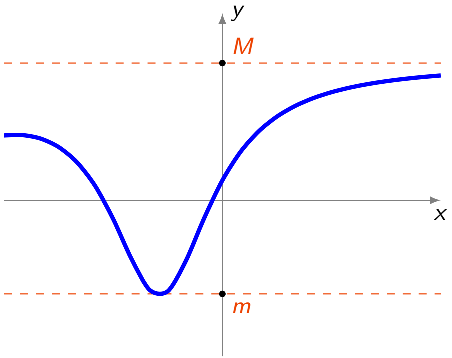
$$\log = \log_{10}$$

$$a^n = \exp(n \ln a) = e^{n \ln a}$$

Étude de fonction

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \leq M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in U \;\; f(x) \geq m$;
- f est ***bornée*** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \;\; |f(x)| \leq M$.



Étude de fonction

Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions. Alors :

- $f \geq g$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq g(x)$;
- $f \geq 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) \geq 0$;
- $f > 0$ si $\forall x \in U \quad f(x) > 0$;
- f est dite ***constante*** sur U si $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \; f(x) = a$;
- f est dite ***nulle*** sur U si $\forall x \in U \quad f(x) = 0$.

f positive $\rightsquigarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est positive.

$g : x \mapsto f(x) - x$ positive $\rightsquigarrow (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.

✎ Donner un exemple de fonction f positive telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit pas croissante.

✎ Que peut-on dire sur la suite $u_0 = 1, u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n + n}$?

Intervalle stable

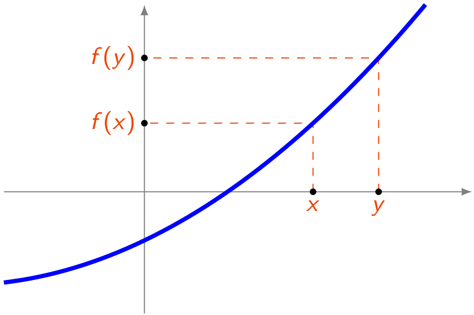
Soient $f : U \to \mathbb{R}$, un intervalle $I \subset U$ est dit *stable* si $f(I) \subset I$

Si l'intervalle $[a, b] = I$ est stable par la fonction f et $u_0 \in I$ alors la suite $(u_n)_n$ définie par récurrence par $u_{n+1} = f(u_n)$ est *bornée*

Montrer que $u_0 = \frac{1}{2}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ est convergente.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

- f est ***croissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$
- f est ***décroissante*** sur U si $\forall x, y \in U \quad x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$
- f est ***monotone*** sur U si f est croissante ou décroissante sur U.



Suites et fonctions croissantes

f croissante $\not\rightsquigarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante : prendre $x \mapsto \frac{1}{2}x$

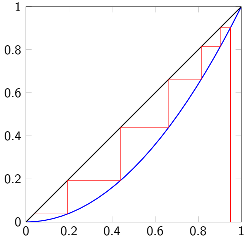
Cependant :

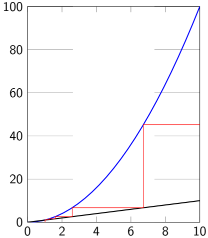
Soit f croissante. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: $u_{n+1} = f(u_n)$ alors :

- Si $u_1 \geq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
- Si $u_1 \leq u_0$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

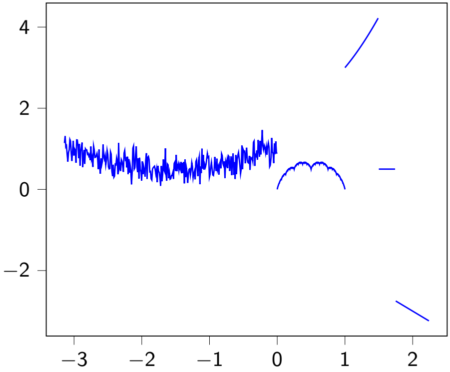
✎ le prouver

✎ Que peut-on dire sur la suite $u_{n+1} = u_n^2$?





Étudions une fonction



(quasi-)impossible $\rightsquigarrow$ on va avoir besoin d'hypothèse supplémentaires.

Limite d'une fonction

Limite en l'infini

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f ***a pour limite*** ℓ ***en*** $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

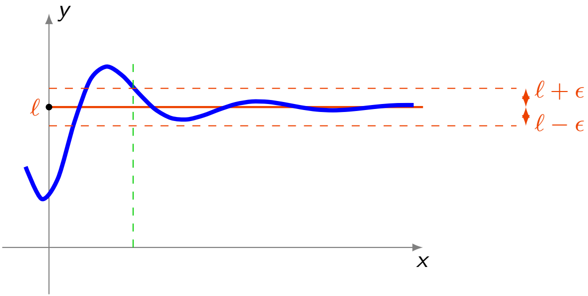
  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.
- On dit que f ***a pour limite*** $+\infty$ ***en*** $+\infty$ si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

  On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

On définira de la même manière la limite en $-\infty$ pour des fonctions définies sur les intervalles du type $]-\infty, a[$.

Limite d'une fonction



Exemple 1

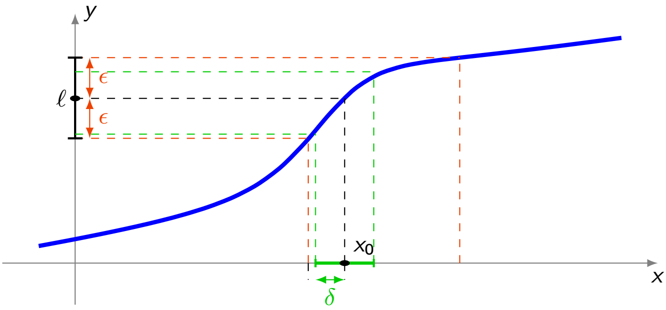
On a les limites classiques suivantes pour tout $n \geq 1$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x^n}\right) = 0.$

Limite d'une fonction

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f ***a pour limite*** ℓ ***en*** x_0 si
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ On dit aussi que $f(x)$ ***tend vers*** ℓ ***lorsque*** x ***tend vers*** x_0. On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou bien $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.



Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

- On dit que *f **a pour limite** $+\infty$ **en** x_0* si

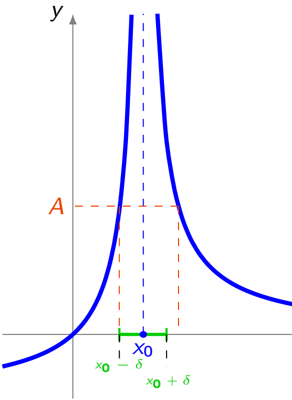
$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

- On dit que *f **a pour limite** $-\infty$ **en** x_0* si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) < -A$$

On note alors $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.



Propriétés des limites

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, sauf, peut-être en $x_0 \in I$.
Si f admet une limite quand x tend vers x_0. Alors, cette limite est unique

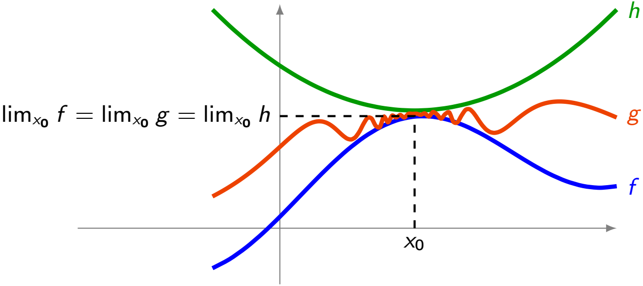
On utilisera surtout la contraposée : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant toutes deux pour limite x_0. Alors si $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell \neq \ell' = \lim_{n\to\infty} f(v_n)$ alors f n'a pas de limite en x_0

✎ Prouver que $x \mapsto \cos x$ n'a pas de limite en $+\infty$

✎ Prouver que $x \mapsto \frac{1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$ n'a pas de limite en 0

De manière générale, si $\lim_{n\to\infty} u_n = x_0$ mais que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite alors la fonction f n'a pas de limite en x_0

- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leq \ell'$.
- Si $f \leq g$ et si $\lim\limits_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim\limits_{x_0} g = +\infty$.
- Théorème des gendarmes Si $f \leq g \leq h$ et si $\lim\limits_{x_0} f = \lim\limits_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}$, alors g a une limite en x_0 et $\lim\limits_{x_0} g = \ell$.



Remarque : on peut travailler sur un petit intervalle autour de x_0

Théorème des croissances comparées

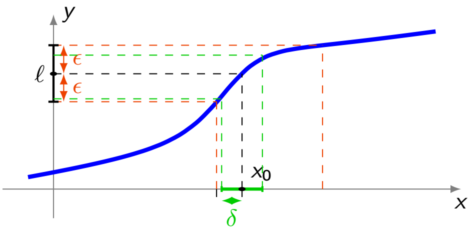
$x \to +\infty$	log	poly.	exp
log	$\frac{\text{log}}{\text{log}} \rightsquigarrow$ fact.	$\frac{\text{poly}}{\text{log}} \to \infty$	$\frac{\text{exp}}{\text{log}} \to \infty$
poly	$\frac{\text{log}}{\text{poly}} \to 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{poly}} \rightsquigarrow$ fact.	$\frac{\text{exp}}{\text{poly}} \to \infty$
exp	$\frac{\text{log}}{\text{exp}} \to 0$	$\frac{\text{poly}}{\text{exp}} \to 0$	$\frac{\text{exp}}{\text{exp}} \rightsquigarrow$ fact.

$$\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0^- \qquad ; \qquad \forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$$

Régularité d'une fonction

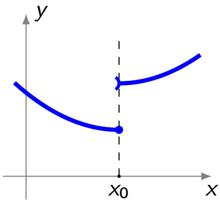
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

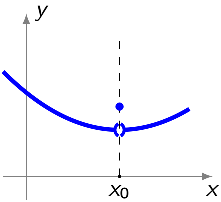
- On dit que f est ***continue en un point*** $x_0 \in I$ si
  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).
- On dit que f est ***continue sur*** I si f est continue en tout point de I.

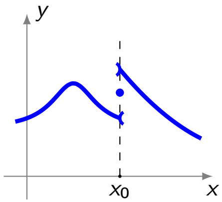


Intuitivement, une fonction est continue sur un intervalle, si on peut tracer son graphe « sans lever le crayon », c'est-à-dire si sa courbe représentative n'admet pas de saut.

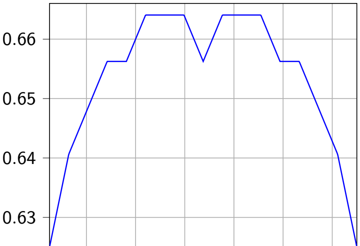
Voici des fonctions qui ne sont pas continues en x_0 :

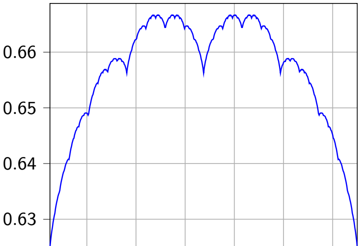






Attention, une fonction continue n'est pas forcément "lisse"





Problème(s)

On a vu que pour étudier $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction, on a souvent besoin de connaître :

- le sens de variation de f (théorème de monotonie)
- signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ (définition des suites croissantes)
- les maxima et minima de f (pour borner la suite)

Comment obtenir ces infos ? Prendre des fonctions plus régulières (hypothèses plus fortes) $\rightsquigarrow$ plus d'outils

Derivée

f est ***dérivable en*** x_0 si le ***taux d'accroissement*** $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a une limite finie lorsque x tend vers x_0. La limite s'appelle alors le ***nombre dérivé*** de f en x_0 et est noté $f'(x_0)$. Ainsi $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

f est ***dérivable sur*** I si f est dérivable en tout point $x_0 \in I$. La fonction $x \mapsto f'(x)$ est la ***fonction dérivée*** de f, elle se note f'.

Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = \frac{(x-x_0)(x+x_0)}{x-x_0} = x + x_0 \xrightarrow[x \to x_0]{} 2x_0.$$

de plus $f'(x) = 2x$.

Derivée

Une fonction dérivable en x_0 est *continue* en x_0

la réciproque est fausse

Donner un contre-exemple et l'expliquer

Fonctions usuelles

Fonction $x \mapsto$	**Dérivée**
x^n	$nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$

Opérations

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I. Alors pour tout $x \in I$:

- $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$ où λ est un réel fixé
- $(f \times g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ (si $f(x) \neq 0$)
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ (si $g(x) \neq 0$)

Calculer la dérivée de $x \mapsto x \ln x - x + 56$

Démontrer la formule $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

Fonctions composées

Soient f, g telles que g est dérivable en a et f est dérivable en $g(a)$. Alors $f \circ g$ est dérivable en a et

$$(f \circ g)'(a) = g'(a).f'(g(a))$$

preuve (presque) :

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f \circ g(a) - f \circ g(x)}{a - x} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{f \circ g(a) - f \circ g(x)}{g(a) - g(x)} \frac{g(a) - g(x)}{a - x} \\
&= g'(a).f'(g(a))
\end{aligned}$$

Calculer la dérivée de $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$

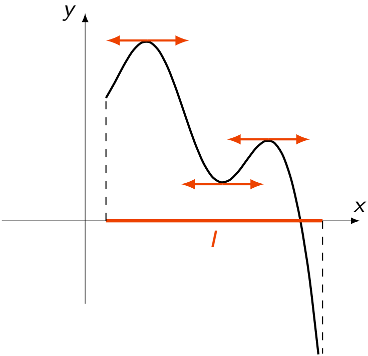
Fonctions composées

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

Calculer la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$

Extrema

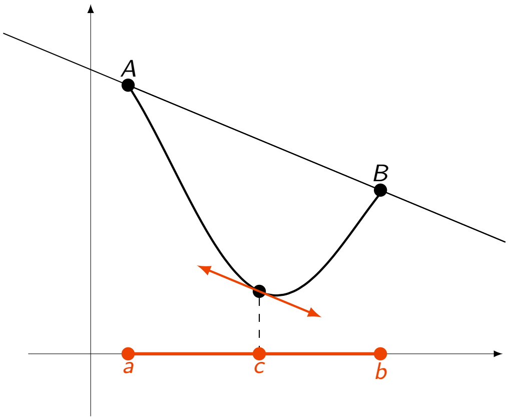
Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.



La réciproque est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.

Théorème des accroissements finis

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$



Corollaire

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

1. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f$ est croissante ;
2. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f$ est décroissante ;
3. $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad f$ est constante ;