Ex (diapo 16)

1) <u>Montrer que tout entier $n \geq 2$ admet un diviseur premier.</u>

⚠ La décomposition en facteurs premiers (diapo 17) n'est pas encore connue.

On veut mq : $\forall n \geq 2, \exists p \in \mathcal{P}, p \mid n$.

il est entendu que $n \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.

Soit $n \geq 2$.

<u>1er cas</u> : $n \in \mathcal{P}$ (n est premier)

Posons $p = n$.

On a bien $p \in \mathcal{P}$ et $p \mid n$

on démontre la quantification existentielle de manière constructive

<u>2e cas</u> : $n \notin \mathcal{P}$

on utilise une disjonction de cas pour ne pas considérer le min d'un singleton, mais rien nous y oblige.

Posons $p = \min \{ d \geq 2, \ d \mid n \}$

p est le plus petit des diviseurs de n supérieurs ou égaux à 2.

Evidemment, $p \mid n$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $p \in \mathcal{P}$ c'est à dire :

$$\forall d \geq 2, \quad d \mid p \Longrightarrow d = p.$$

Soit $d \geq 2$.

Supposons $d \mid p$.

Montrons $d = p$.

Comme $d \mid p$, on sait déjà que $d \leq p$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $d \geq p$.

je vous rappelle que l'antisymétrie de la relation d'ordre "naturelle" fournit : $(d \leq p \text{ et } p \leq d) \Rightarrow d = p$

$\boxed{\text{Par l'absurde}}$, supposons $d < p$.

Comme $d \mid p$ et $p \mid n$, on a $d \mid n$

ce qui contredit la minimalité de p.

2) <u>En déduire que l'ensemble $\mathcal{P}$ est infini</u>

$\boxed{\text{Par l'absurde}}$, supposons $\mathcal{P}$ fini autrement dit il existe $k \in \mathbb{N}$ tq $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$.

Considérons l'entier $n = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$.

Cet entier $n \geq 2$ n'admet pas de diviseur premier

raisonnt par l'absurde imbriqué dans un autre !

($\boxed{\text{car sinon}}$, il existerait $i \in [\![1, k]\!]$ tel que $p_i \mid n$ et donc on aurait : $p_i \mid n - p_1 p_2 \cdots p_k = 1$ ce qui est impossible)

ce qui contredit le résultat démontré à la question 1).

⚠ Cela ne signifie pas que $p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ soit premier (cf. code sur Moodle)