

# R5.A.12 Modélisations mathématiques

Thibault Godin, Lucie Naert

IUT de Vannes

6 novembre 2023

## Parcours sup

Chaque année  $\approx 800\,000$  élèves de terminal formulent des vœux dans le supérieur, comment les satisfaire au mieux ?

## Parcours sup

Chaque année  $\approx 800\,000$  élèves de terminal formulent des vœux dans le supérieur, comment les satisfaire au mieux ?

élève 1 : classement des formation  $f_3, f_5, f_1$

élève 2 : classement des formation  $f_1, f_4, f_2$

## Parcours sup

Chaque année  $\approx 800\,000$  élèves de terminal formulent des vœux dans le supérieur, comment les satisfaire au mieux ?

élève 1 : classement des formation  $f_3, f_5, f_1$

élève 2 : classement des formation  $f_1, f_4, f_2$

les formations classent aussi les élèves

## Parcours sup

Chaque année  $\approx 800\,000$  élèves de terminal formulent des vœux dans le supérieur, comment les satisfaire au mieux ?

élève 1 : classement des formation  $f_3, f_5, f_1$

élève 2 : classement des formation  $f_1, f_4, f_2$

les formations classent aussi les élèves

hypothèse simplificatrice : tous les élèves classent toutes les formations et inversement

## Parcoursup et couplage

a,b,c,e,d ①

a,c,b,e,d ②

c,a,e,b,d ③

a,b,c,d,e ④

a,b,c,d,e ⑤

Ⓐ 1,3,5,4,2

Ⓑ 2,1,5,4,3

Ⓒ 5,2,3,4,1

Ⓓ 1,2,3,4,5

Ⓔ 1,2,3,4,5

## Parcoursup et couplage

a,b,c,e,d ①

a,c,b,e,d ②

c,a,e,b,d ③

a,b,c,d,e ④

a,b,c,d,e ⑤

Ⓐ 1,3,5,4,2

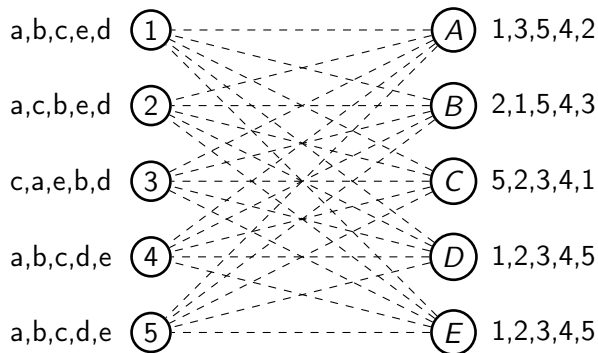
Ⓑ 2,1,5,4,3

Ⓒ 5,2,3,4,1

Ⓓ 1,2,3,4,5

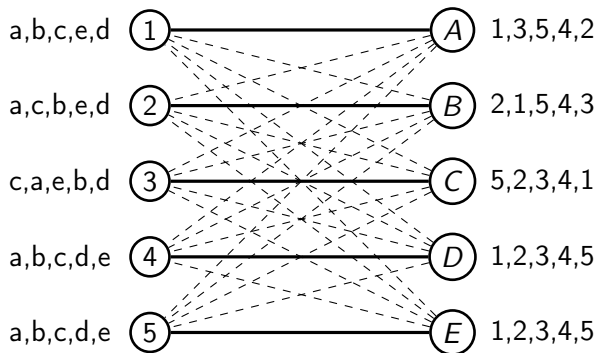
Ⓔ 1,2,3,4,5

## Parcoursup et couplage

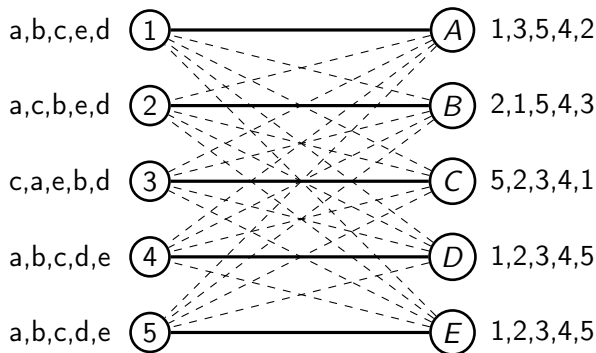




## Parcoursup et couplage



## Parcoursup et couplage



pas satisfaisant, on utilise pas les préférences

# Plan

## Parcoursup

Mariages stables

Algorithme de Gale–Shapley

# Mariages stables

proposition de mariages :

a,b,c,e,d (1)

(A) 1,3,5,4,2

a,c,b,e,d (2)

(B) 2,1,5,4,3

c,a,e,b,d (3)

(C) 5,2,3,4,1

a,b,c,d,e (4)

(D) 1,2,3,4,5

a,b,c,d,e (5)

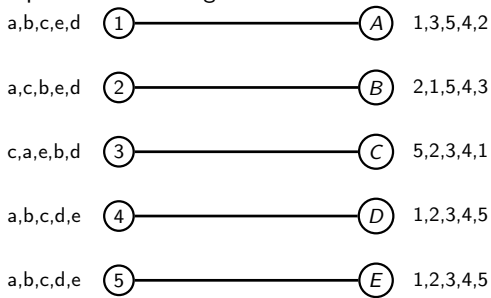
(E) 1,2,3,4,5

couple instable  $\{2, C\}$  (pas une  
arête) car

► 2 préfère  $C$  à  $B$

# Mariages stables

proposition de mariages :

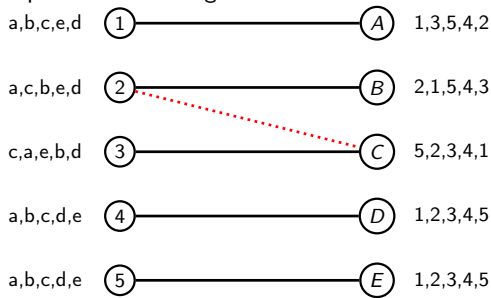


couple instable  $\{2, C\}$  (pas une arête) car

- ▶ 2 préfère  $C$  à  $B$
- ▶  $C$  préfère 2 à 3

# Mariages stables

proposition de mariages :

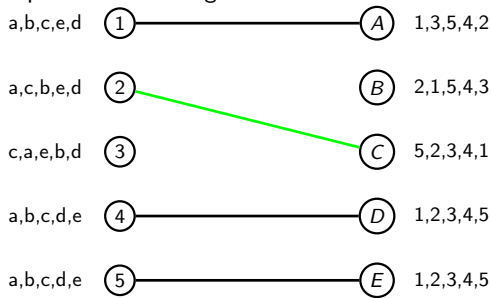


couple instable  $\{2, C\}$  (pas une arête) car

- ▶ 2 préfère C à B
- ▶ C préfère 2 à 3

# Mariages stables

proposition de mariages :



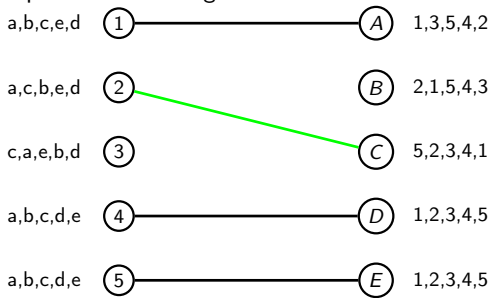
couple instable  $\{2, C\}$  (pas une arête) car

on améliorerait en prenant l'arête  $(2, C)$

- ▶ 2 préfère C à B
- ▶ C préfère 2 à 3

# Mariages stables

proposition de mariages :



couple instable  $\{2, C\}$  (pas une arête) car

- ▶ 2 préfère C à B
- ▶ C préfère 2 à 3

on améliorerait en prenant l'arête  $(2, C)$

mariage stable si pas de  $(n, l)$  tq  $n$  et  $l$  se préfèrent à leurs partenaires



# Plan

## Parcoursup

Mariages stables

Algorithme de Gale–Shapley

## Gale–Shapley

b,a,c,e,d ①

a,c,b,e,d ②

c,a,e,b,d ③

c,b,e,d,a ④

a,b,c,d,e ⑤

Ⓐ 3,1,5,4,2

Ⓑ 2,1,5,4,3

Ⓒ 5,2,3,4,1

Ⓓ 2,1,5,4,3

Ⓔ 3,2,5,4,1

▶ si élève non marié :

▶  $k = 1$

▶ si k-ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage

▶ sinon on demande au k-ième choix son avis

▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage

▶ sinon

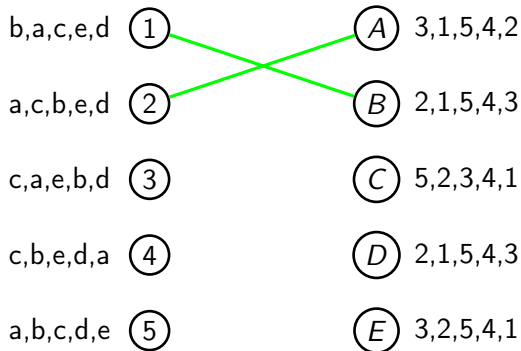
$k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley

b,a,c,e,d	①	(A)	3,1,5,4,2
a,c,b,e,d	②	(B)	2,1,5,4,3
c,a,e,b,d	③	(C)	5,2,3,4,1
c,b,e,d,a	④	(D)	2,1,5,4,3
a,b,c,d,e	⑤	(E)	3,2,5,4,1

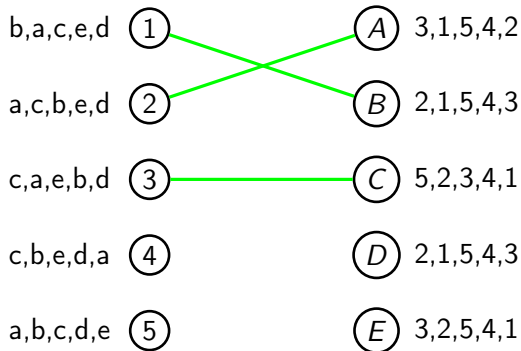
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



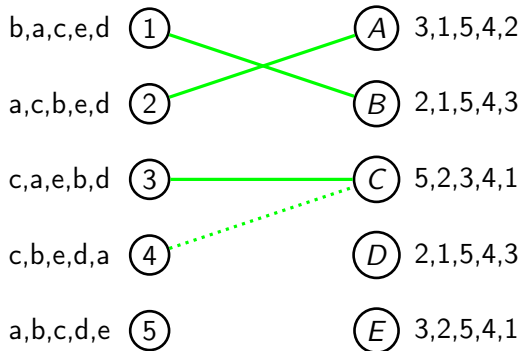
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



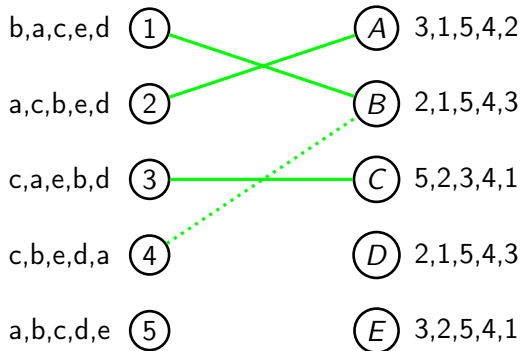
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



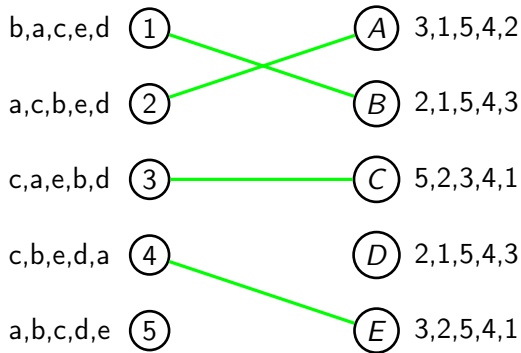
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

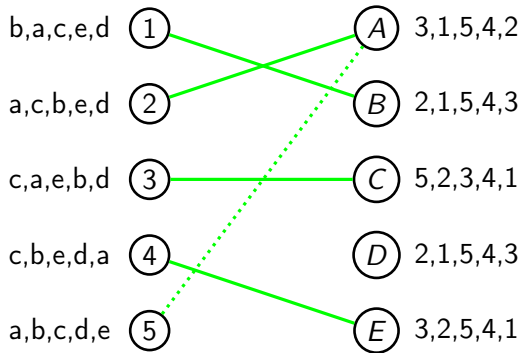
## Gale-Shapley



- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

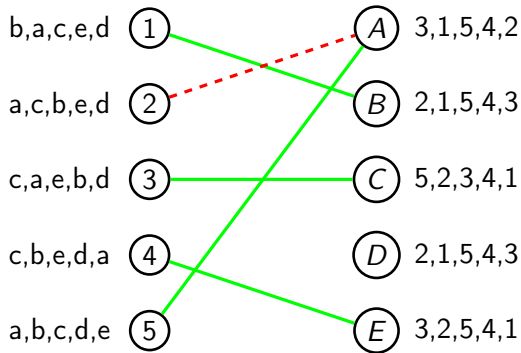


## Gale-Shapley



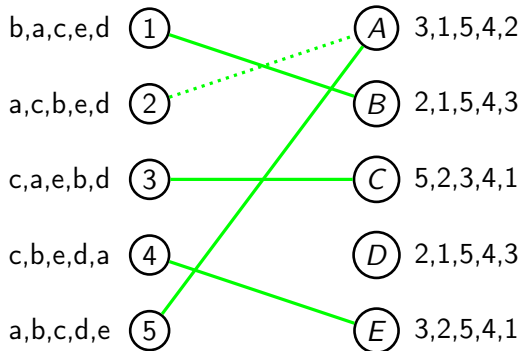
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



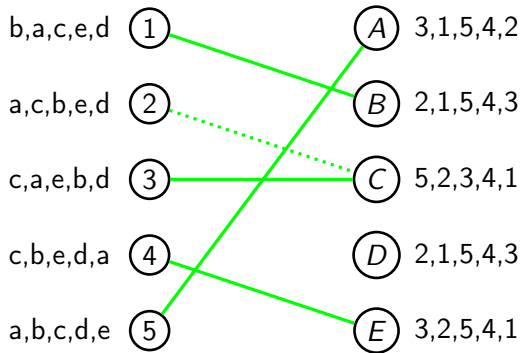
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



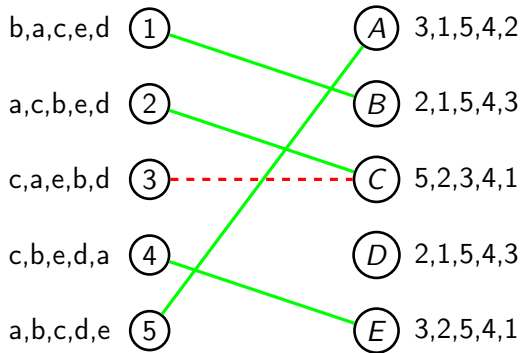
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



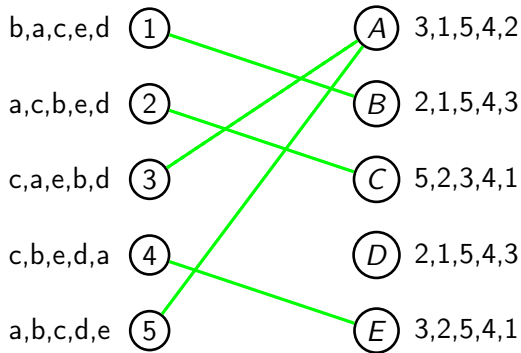
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



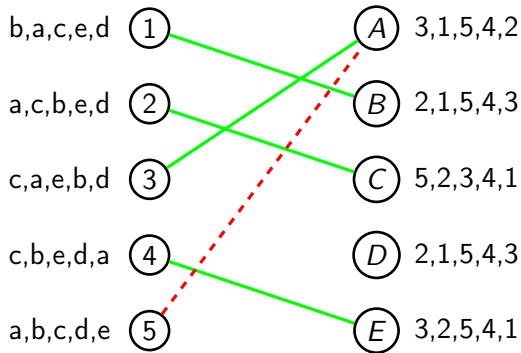
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



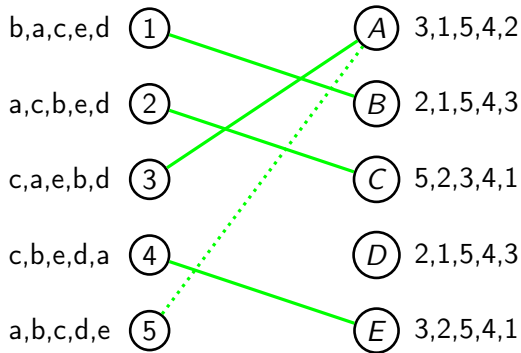
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

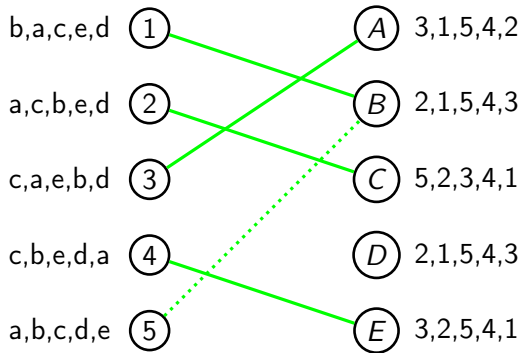
## Gale-Shapley



- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

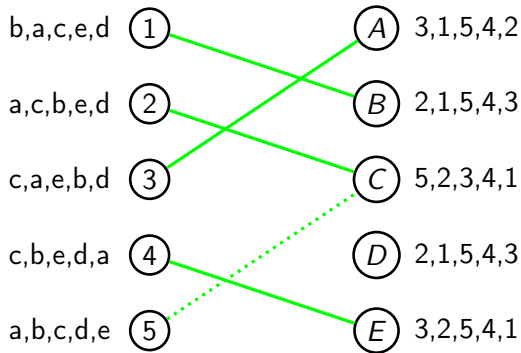


## Gale-Shapley



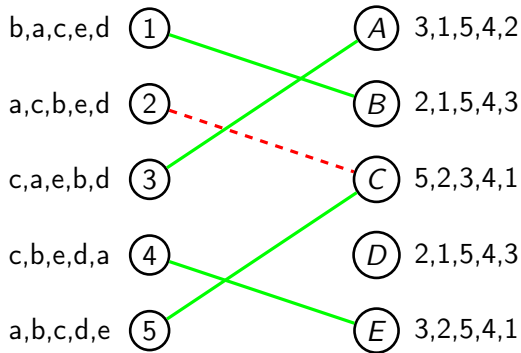
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



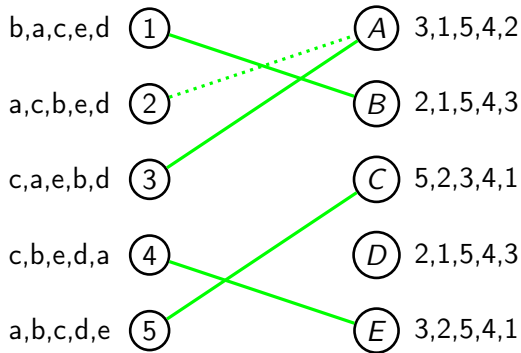
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



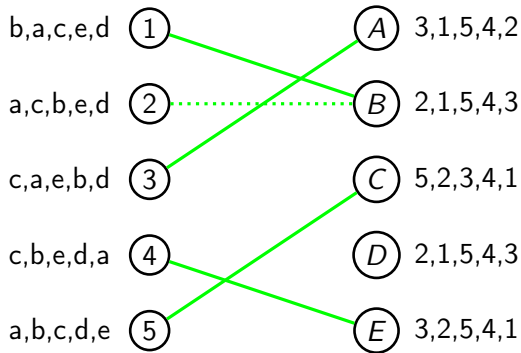
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale–Shapley



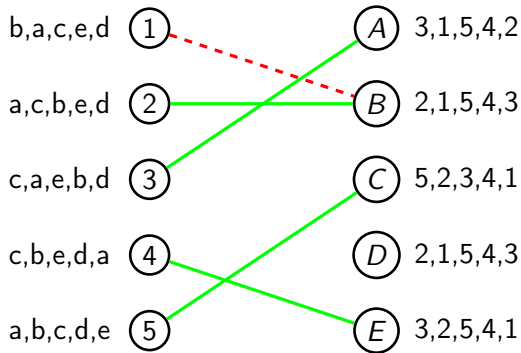
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



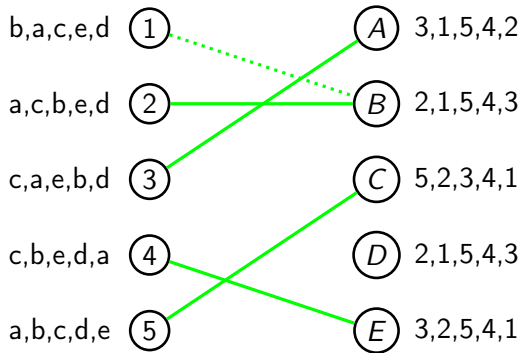
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



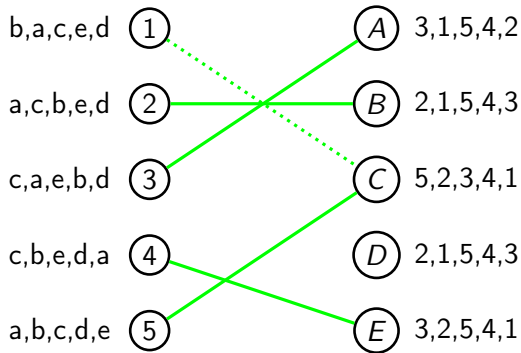
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

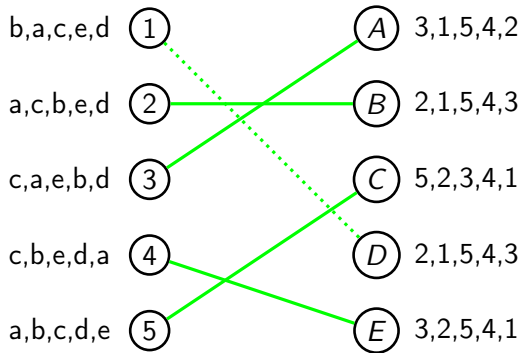
## Gale-Shapley



- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

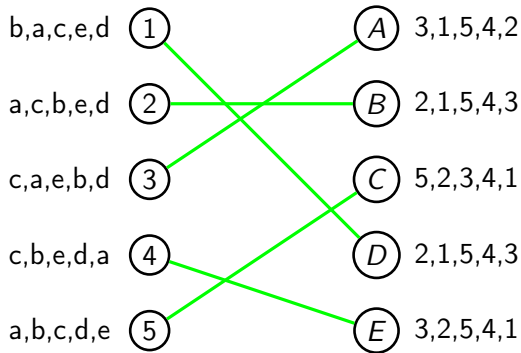


## Gale-Shapley



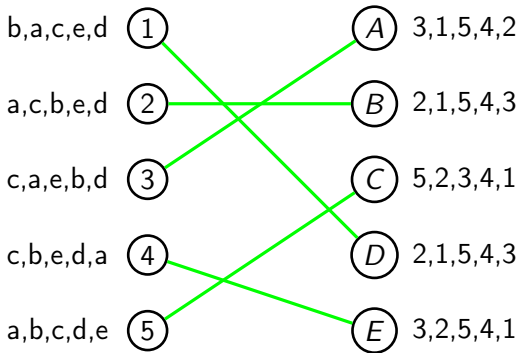
- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

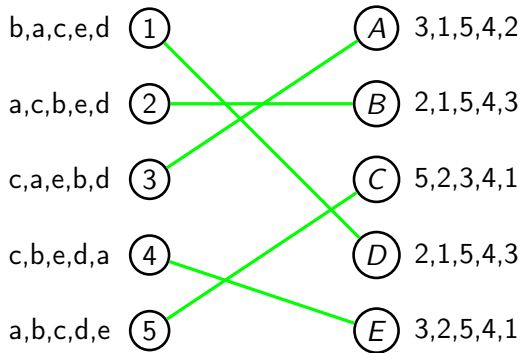
## Gale-Shapley



optimal pour les élèves mais pas pour les formations !

- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Gale-Shapley



optimal pour les élèves mais pas pour les formations !

complexité  $\approx |S|^2$

- ▶ si élève non marié :
  - ▶  $k = 1$
  - ▶ si  $k$ -ème choix non marié  $\rightsquigarrow$  mariage
  - ▶ sinon on demande au  $k$ -ième choix son avis
    - ▶ si couple instable  $\rightsquigarrow$  mariage
    - ▶ sinon  $k \leftarrow k + 1$

## Qualité de la solution

Une solution stable existe toujours ...

## Qualité de la solution

Une solution stable existe toujours ... mais ne satisfait pas forcément les même personnes

A : YXZ	B : ZYX	C : XZY
X : BAC	Y : CBA	Z : ACB

## Qualité de la solution

Une solution stable existe toujours ... mais ne satisfait pas forcément les mêmes personnes

A : YXZ	B : ZYX	C : XZY
X : BAC	Y : CBA	Z : ACB

3 solutions stables

## Qualité de la solution

Une solution stable existe toujours ... mais ne satisfait pas forcément les même personnes

A : YXZ	B : ZYX	C : XZY
X : BAC	Y : CBA	Z : ACB

3 solutions stables

- ▶ "optimale pour les étudiants" : AY, BZ, CX (les étudiants proposent)
- ▶ "second choix" : AX, BY, CZ (sex-equal stable matching, NP—dur)
- ▶ "optimale pour les universités" AZ, BX, CY (les universités proposent)



## Qualité de la solution

Une solution stable existe toujours ... mais ne satisfait pas forcément les même personnes

A : YXZ	B : ZYX	C : XZY
X : BAC	Y : CBA	Z : ACB

3 solutions stables

- ▶ "optimale pour les étudiants" : AY, BZ, CX (les étudiants proposent)
- ▶ "second choix" : AX, BY, CZ (sex-equal stable matching, NP—dur)
- ▶ "optimale pour les universités" AZ, BX, CY (les universités proposent)

(ref : D. F. Manlove, Algorithmics of Matching Under Preferences)