NOM :

GROUPE :

R1.06 - Mathématiques discrètes
Contrôle Terminal

Nom du responsable :	A. Ridard
Date du contrôle :	Jeudi 20 octobre 2022
Durée du contrôle :	1h30
Nombre total de pages :	6 pages
Impression :	A4 recto-verso agrafé (1 point)
Documents autorisés :	A4 recto-verso manuscrit
Calculatrice autorisée :	Non
Réponses :	Directement sur le sujet

Exercice 1. 6

On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $A = \{a, b, c, f\}$, $B = \{d, e, f\}$, $C = \{c, d\}$ trois de ses parties.

1. Déterminer les ensembles suivants :

   (a) $(A \cup C) \cap B$

   $(A \cup C) \cap B = \{d, f\}$ 0,5

   (b) $(A \setminus C) \setminus B$ et $A \setminus (C \setminus B)$. ~~Quelle propriété de la différence ensembliste observe-t-on ici ?~~

   $(A \setminus C) \setminus B = \{a, b\}$ 0,5

   $A \setminus (C \setminus B) = \{a, b, f\}$ 0,5

   Rq : la différence ensembliste n'est donc pas associative.

   (c) $\mathscr{P}(B) \setminus \mathscr{P}(C)$ et $\mathscr{P}(B \setminus C)$

   $\mathscr{P}(B) \setminus \mathscr{P}(C) = \{\{e\}, \{f\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, B\}$ 1

   $\mathscr{P}(B \setminus C) = \{\emptyset, \{e\}, \{f\}, \{e, f\}\}$ 0,5

2. Résoudre dans $\mathscr{P}(E)$ les équations ensemblistes suivantes :

(a) $A \cap X = \{f\}$

$$\mathcal{S} = \{X \subset E \mid f \in X \text{ et } a \notin X \text{ et } b \notin X \text{ et } c \notin X\}$$

$$= \{X \subset E \mid f \in X \text{ et } X \subset \overline{\{a,b,c\}}\}$$

$$= \{X \subset E \setminus \{a,b,c\} \mid f \in X\}$$

1

(b) $B \cup X = A \cup C$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$

Par l'absurde, s'il existait un tel X, on aurait :

$e \in B \subset B \cup X = A \cup C = \{a, b, c, d, f\}$ ce qui est impossible !

1

(c) $C \cup X = B \cup (A \cap C)$

$$\mathcal{S} = \{X \subset E \mid e \in X \text{ et } f \in X \text{ et } a \notin X \text{ et } b \notin X\}$$

$$= \{X \subset E \mid \{e, f\} \subset X \text{ et } X \subset \overline{\{a,b\}}\}$$

$$= \{X \subset E \setminus \{a,b\} \mid \{e,f\} \subset X\}$$

1

NOM : GROUPE :

8

Exercice 2.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses? Justifier.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$

FAUX. On va démontrer la négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} \neq x$.

Posons $x = -1$.

On a bien : $\sqrt{(-1)^2} = 1 \neq -1$ 2

2. $\forall x \in [2, +\infty[, \dfrac{-2x+4}{-x^2+2x-1} \geq 0$

VRAI. Soit $x \in [2, +\infty[$.

$-2x+4 \leq 0$ et $-x^2+2x-1 = -(x-1)^2 \leq 0$ 2

donc $\dfrac{-2x+4}{-x^2+2x-1} \geq 0$.

3. $\exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, m = kn$

VRAI. Posons $m = 0$.

Vérifions : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists k \in \mathbb{N}, m = kn$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Posons $k = 0$. 2

On a bien : $m = 0 = 0n = kn$.

4. $\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x > A \Longrightarrow \frac{1}{x} < \epsilon$

VRAI. Soit $\varepsilon > 0$.

Posons $A = \frac{1}{\varepsilon}$ (il est bien strictement positif)

Vérifions : $\forall x \in \mathbb{R}, x > A \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. 2

Supposons $x > A$.

Montrons $\frac{1}{x} < \varepsilon$.

Comme $A = \frac{1}{\varepsilon}$, $x > A$ fournit $x > \frac{1}{\varepsilon}$ ou encore $\frac{1}{x} < \varepsilon$.

NOM :

GROUPE :

Exercice 3. (4)

1. Soit E un ensemble. Démontrer l'assertion suivante : 2

$$\forall A \subset E,\ \forall B \subset E,\ (A \cap B = A \cup B) \Longleftrightarrow A = B$$

Soit $A \subset E$ et $B \subset E$.

- Montrons $A = B \Rightarrow (A \cap B = A \cup B)$

Supposons $A = B$.

Montrons $A \cap B = A \cup B$.

Comme $A = B$, on a : $A \cap B = A \cap A = A = A \cup A = A \cup B$

- Montrons $(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$

Supposons $A \cap B = A \cup B$.

Montrons $A = B$.

- Montrons $A \subset B$

Comme $A \cap B = A \cup B$, on a : $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$

- Montrons $B \subset A$

Idem en échangeant les rôles de A et B (argument de symétrie)

2. Démontrer **par contraposition** l'assertion suivante : 2

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (\forall \epsilon > 0,\ x \leq \epsilon) \Longrightarrow x = 0$$

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

Montrons $x \neq 0 \Rightarrow (\exists \varepsilon > 0, x > \varepsilon)$.

Supposons $x \neq 0$.

Montrons $\exists \varepsilon > 0, x > \varepsilon$.

Posons $\varepsilon = \frac{x}{2}$.

Comme $x \in \mathbb{R}_+$ et $x \neq 0$, on a $x > 0$ donc $\varepsilon = \frac{x}{2} > 0$.

De plus, $1 > \frac{1}{2}$ donc $x > \frac{x}{2} = \varepsilon$.

↳ multiplier par un nombre positif "respecte" l'inégalité

Exercice 4. 2

Démontrer **par récurrence** l'assertion suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\},\ 2^n > 2n-1$$

Initialisation $(n=2)$:

$2^2 = 4 > 3 = 2 \times 2 - 1.$

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Supposons $2^n > 2n-1$ (HR).

Montrons $2^{n+1} > 2(n+1) - 1 = 2n+1$

$2^{n+1} = 2 \times 2^n \underset{(HR)}{>} 2 \times (2n-1) = 4n-2.$

Il suffit donc de montrer $4n-2 > 2n+1$.

On remarque : $4n-2 > 2n+1 \Leftrightarrow 2n > 3 \Leftrightarrow n > \frac{3}{2}$.

Or, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ donc $n \geqslant 2 > \frac{3}{2}$ et donc $4n-2 > 2n+1$.

D'où $2^{n+1} > 4n-2 > 2n+1$.