Exercice 2 : Définitions

Voici quelques-unes des multiples représentations mathématiques trouvées dans la littérature sur les graphes.

1) Pour chacune d'entre elles indiquez en vous justifiant : s'il s'agit d'un graphe orienté ou non, si les multi-arcs dans le cas orienté ou les multi-arêtes dans le cas non orienté sont autorisés, si les boucles sont autorisées, si les graphes sont simples. (Un graphe est simple s'il ne contient ni de multi-arêtes (arcs) ni de boucles)

2) Pour chacune d'entre elles dessinez un exemple de graphe réunissant les différentes possibilités offertes par la représentation et sa définition mathématique complète à l'aide de la représentation considérée.

A. Soit $A \subset S \times S$. Un graphe est G est défini par $G = (S, A)$

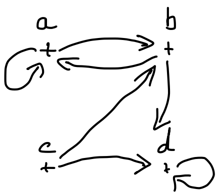
- S est l'ensemble des sommets.

- A est une partie du produit cartésien de S avec lui même. A est donc une relation binaire sur S. A est un ensemble de couples (a,b) avec $a \in S$ et $b \in S$. Or un couple est "ordonné". si $a \neq b$ $(a,b) \neq (b,a)$. Donc les graphes définis ainsi sont orientés.

- Un produit cartésien est un ensemble de couples. Or dans un ensemble tous les éléments sont distinguables. Un même couple ne peut donc pas apparaître deux fois. Les multi-arcs/arêtes/boucles sont interdits.

- Dans $S \times S$ le couple $(a,a) \in S \times S$ si $a \in S$. Donc les boucles sont possibles.

- Donc les graphes ne sont pas nécessairement simples.



$S = \{a, b, c, d\}$ Les sommets

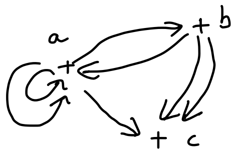
$A = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,d), (c,b), (c,d), (d,d)\}$ Les arcs

B. Soit $A = a_1, a_2, ..., a_n$ une famille d'éléments vérifiant tous : $\forall i, a_i \in S \times S$. Un graphe est G est défini par $G = (S, A)$

- les éléments sont piochés dans $S \times S$ donc ce sont des couples $\Rightarrow$ graphes orientés.

- Une famille d'éléments autorise la répétition d'un ou plusieurs éléments $\Rightarrow$ multi-arcs possibles.

- Comme pour $a \in S$, $(a,a) \in S \times S$, les boucles sont possibles donc les graphes ainsi définis ne sont pas nécessairement simples.



$S = \{a, b, c\}$ Les sommets

$A = (l_i)_{i \in [\![1,7]\!]} = \big((a,a), (a,a), (a,c), (a,b), (b,a), (b,c), (b,c)\big)$

Les arcs

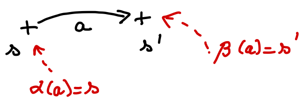
<u>Remarque</u> : Une famille $(x_i)_{i \in I}$ sur E est une suite finie finie d'éléments de E. Donc une application de $\underbrace{[\![1;n]\!]}_{I} \longrightarrow E$

On aurait en toute rigueur écrit $A = \{(1,(a,a)), (2,(a,a)), (3,(a,c)), \dots\}$

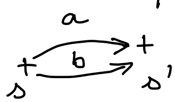
est défini par $G = (S, A)$

C. Soit A un ensemble fini. Soit $\alpha : A \to S$ et $\beta : A \to S$ deux applications (fonctions totales) appelés respectivement application origine et fin. Un graphe est G est défini par $G = (S, A, \alpha, \beta)$.

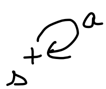
- A est l'ensemble des arcs. Le graphe est orienté car α qui "associe" à chaque arc son sommet "origine" et β associe son sommet "fin" laissent supposer l'orientation.



- Comme les applications α et β sont quelconques un arc a peut être associé par α et β aux même sommets qu'un arc b.
  - × On peut avoir $\alpha(a) = \alpha(b) = s$
    $\beta(a) = \beta(b) = s'$

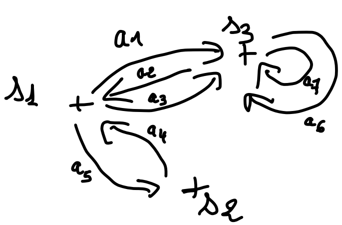


  - × on peut avoir $\alpha(a) = \beta(a) = s$



Les multi-arcs et les boucles sont possibles

- Les graphes ne sont pas nécessairement simples.



$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ les sommets

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ les arcs

origine $\alpha = \{(a_1, s_1), (a_2, s_3), (a_3, s_1), (a_4, s_2), (a_5, s_1), (a_6, s_3), (a_7, s_3)\}$

destination $\beta = \{(a_1, s_3), (a_2, s_1), (a_3, s_3), (a_4, s_1), (a_5, s_2), (a_6, s_3), (a_7, s_3)\}$

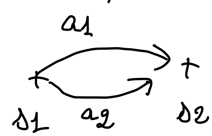
D. Soit A un ensemble fini. Soit $\gamma : A \to S \times S$ une application. Un graphe G est $G = (S, A, \gamma)$.

- A est l'ensemble des arcs car γ associe à chaque élément de A un couple de $S \times S$. Or un couple est "ordonné". Les graphes sont orientés.

$$s \xrightarrow{a} s' \qquad \gamma(a) = (s, s')$$

- Comme γ est quelconque, elle peut associer à 2 arcs a_1 et a_2 le même couple de sommet : $\gamma(a_1) = \gamma(a_2) = (s_1, s_2)$

Remarque ! Si γ était injective les multi-arcs seraient interdits !

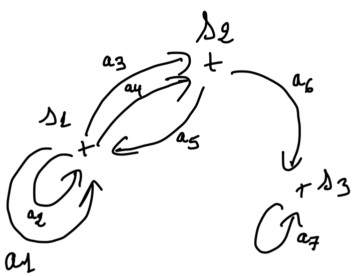


Les multi-arcs sont possibles

On peut associer à $a_1 \in A$ le couple (s_1, s_1) : $\gamma(a_1) = (s_1, s_1)$

Les boucles sont possibles

- Les graphes ne sont pas nécessairement simples.



$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ Les sommets

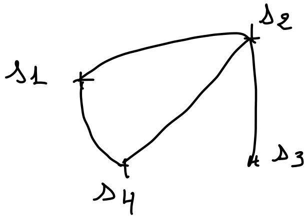
$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7\}$ Les arcs

$$\gamma = \{(a_1, (s_1, s_1)), (a_2, (s_1, s_1)), (a_3, (s_1, s_2)), (a_4, (s_1, s_2)), (a_5, (s_2, s_1)), (a_6, (s_2, s_3)), (a_7, (s_3, s_3))\}$$

γ associe un arc avec son couple de sommet

E. Soit $A \subset \{\{a,b\} | a \in S, b \in S \text{ et } a \neq b\}$. Un graphe est $G = (S, A)$.

- A est l'ensemble des arêtes. Car $\{a,b\} = \{b,a\}$ ce sont des ensembles. Il n'y a pas d'orientation. Les graphes sont non orientés.
- Comme A est un ensemble on ne peut pas répéter la même arête.
  $\Rightarrow$ les multi-arêtes sont impossibles.
- Il est également interdit d'avoir $a = b$ donc les boucles sont impossibles.
- Les graphes ainsi définis sont tous simples.



$S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ les sommets

$A = \{\{s_1, s_2\}, \{s_1, s_4\}, \{s_2, s_4\}, \{s_2, s_3\}\}$

Les arêtes

F. On appelle $\mathcal{P}_2(S)$ l'ensemble des parties de S à deux éléments. Soit $A \subset \mathcal{P}_2(S)$. Un graphe est $G = (S, A)$.

$\mathcal{P}_2(S) = \{\{a,b\} \mid a \in S \text{ et } b \in S \text{ et } a \neq b\}$ Donc cette définition est la même que la E qui précède : non orientés, simples.

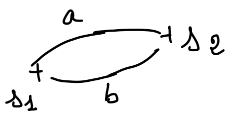
On peut reprendre exactement l'exemple de la question E qui précède.

est $G = (S, A)$.

G. Soit A un ensemble fini. Soit $\gamma : A \to \mathcal{P}_2(S) \cup \mathcal{P}_1(S)$ (ensemble des parties à un élément de S) une application (fonction totale). Un graphe G est $G = (S, A, \gamma)$.

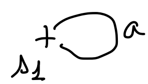
- A est l'ensemble des arêtes. Car γ associe à un élément de A soit un ensemble $\{a,b\}$ soit $\{a\}$ avec $a \in S$, $b \in S$ et $a \neq b$. $\Rightarrow$ les graphes sont non orientés.

- Les multi-arêtes sont possibles car $\gamma(a) = \gamma(b) = \{s_1, s_2\}$ est possible. 2 éléments distincts ayant la même image par γ.

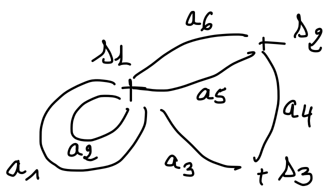


Remarque ! avec γ injective les multi-arêtes seraient impossibles !

- Les boucles sont possibles car γ peut projeter sur un élément de $\mathcal{P}_1(S)$ par exemple $\gamma(a) = \{s_1\}$



- Les graphes ne sont donc pas nécessairement simples.



$S = \{s_1, s_2, s_3\}$ les sommets

$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ les arêtes

$\gamma = \{(a_1, \{s_1\}), (a_2, \{s_1\}), (a_3, \{s_1, s_3\}), (a_4, \{s_2, s_3\}), (a_5, \{s_1, s_2\}), (a_6, \{s_1, s_2\})\}$

associe une arête avec ces 2 sommets

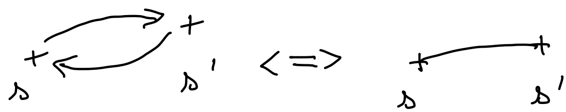
H. Soit A une relation binaire symétrique sur S. Un graphe est G est défini par $G = (S, A)$

- Une relation binaire sur S est une partie de $S \times S$. Donc les graphes sont orientés a priori.

- A est symetrique donc $\forall x \in S, \forall y \in S \quad xAy \Rightarrow yAx$.

  Si un arc existe entre $s_1 \rightarrow s_2$ il doit y avoir un arc $s_2 \rightarrow s_1$.

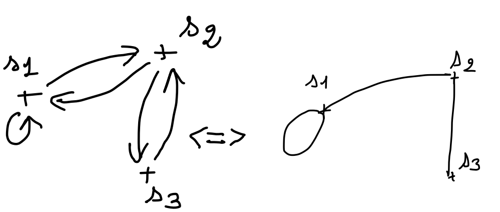
  Donc au final un graphe peut être considéré comme non orienté.



- La relation A étant une partie de $S \times S$ qui est un ensemble de couples le même arc ne peut apparaître qu'une seule fois. Les multi-arêtes sont impossibles.

- Les boucles sont possibles car $\forall a \in S \quad (a,a) \in S \times S$.

- Les graphes ne sont pas necessairement simples.



$S = \{s_1, s_2, s_3\}$

$A = \{(s_1,s_2), (s_2,s_1), (s_2,s_3), (s_3,s_2), (s_1,s_1)\}$