TD1

Théorème 1

Pour tout graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ non-orienté connexe d'ordre n a au moins $n-1$ arêtes

Démonstration. On démontre le théorème par récurrence sur n.

Initialisation Soit $\mathcal{G}$ un graphe connexe à 1. Le graphe est (trivialement) connexe et a 0 arête, donc $\operatorname{Card} A = 0 \geq \operatorname{Card} S - 1$.

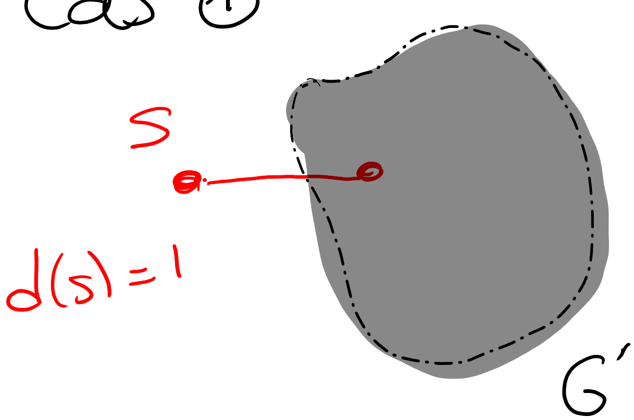
Hérédité Supposons que la propriété soit vraie pour les graphes d'ordre $n-1$ et considérons un graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ d'ordre n.
On distingue deux cas : si le graphe a un sommet x de degré 1 alors Prenons un sous-ensemble de sommets $S' = S \setminus \{x\}$ de taille $n-1$. Le graphe (S', A') induit par S' est connexe d'ordre $n-1$ donc $\operatorname{Card} A \geq \operatorname{Card} A' \geq n-2$ par hypothèse de récurrence. De plus le sommet restant doit être relié par une arête $a \in A \setminus A'$ pour que $\mathcal{G}$ soit connexe, donc $\operatorname{Card} A \geq n-1$.

Si tous les sommets sont de degré au moins 2, alors d'après le lemme des poignées de mains :

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Card} A &= \sum_S d(s) \\ &\geq \sum_S 2 \\ &\geq n \times 2 \end{aligned}$$

et donc $\operatorname{Card} A \geq n \geq n-1$. $\square$

Cas ①



connexe ordre n-1

$\rightsquigarrow$ $\geq n-2$ sommet
par recurrence

Lemme 2

Un graphe dont tous les sommets sont de degré au moins égal à deux possède un cycle.

Démonstration. On raisonne par l'absurde : supposons que tous les sommets d'un graphe $\mathcal{G} = (S, A)$ sont de degré plus grand que 2 et que ce graphe n'ait pas de cycle.
Partons d'un sommet arbitraire s_1. On peut construire un chemin maximum (le plus long possible) $s_1 s_2 \dots s_k$ ayant la propriété $\forall i \leq k, \forall j < i, s_i \neq s_j$ (on prend donc un nouveau sommet à chaque pas, en particulier le chemin est élémentaire). Remarquons que s_k est de degré au moins 2, et donc il existe $s \neq s_{k-1}$ qui soit voisin de s_k. De plus, comme le graphe n'a pas de cycle, ce sommet ne peut pas être un des s_i. Cela contredit l'hypothèse de maximalité du chemin (on a construit le chemin tel que s_k soit le dernier sommet où on peut arriver à un sommet non-visité), absurde. Donc le graphe possède un cycle $\square$

chemin $C : s_1 — s_2 — s_3 \cdots s_{q-1} — s_q$ tq

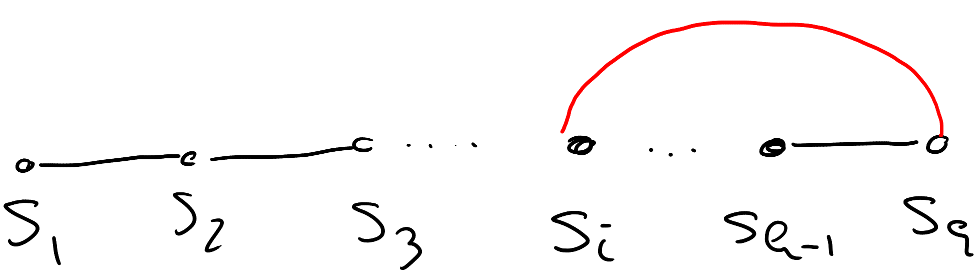
① C est elementaire : $\forall i \leq q, \forall j < i, s_i \neq s_j$

② C est maximal $\forall s \in S, s_q A s \Rightarrow \exists i \leq q, s = s_i$

OR $d(s_q) \geq 2$ donc il y a au moins 2 arêtes partant de s_q

Donc $\exists s \in S, s \neq s_{q-1}, s_q A s$

par maximalité $\exists i \leq q-1, s = s_i$

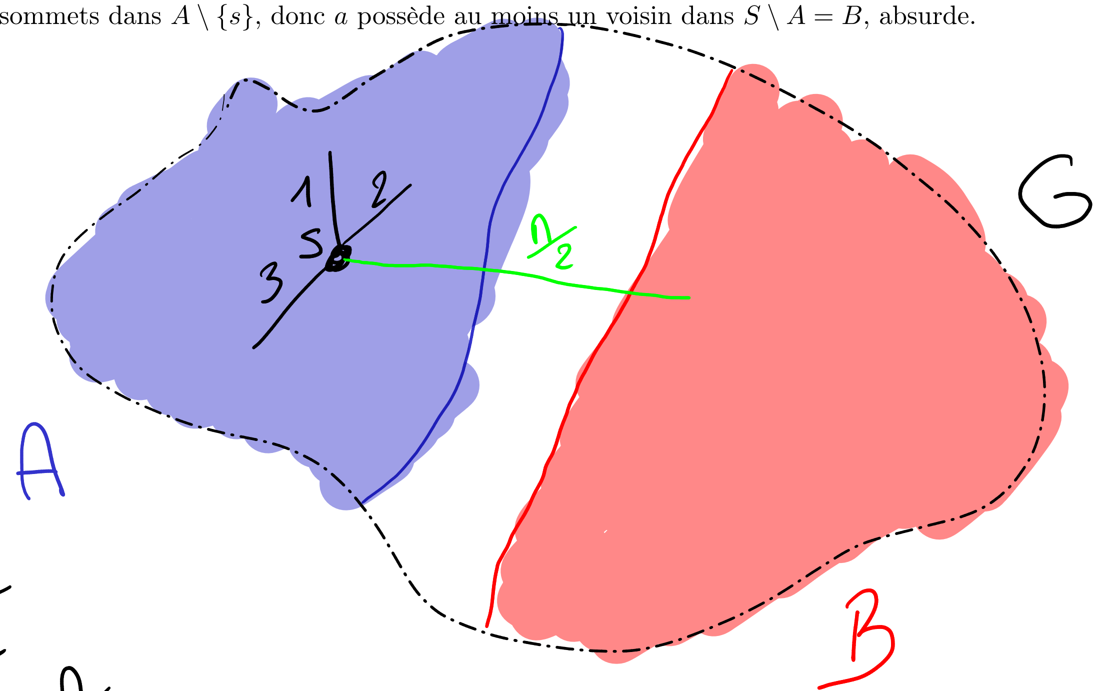


Lemme 3

Un graphe d'ordre n dont tous les sommets sont de degré au moins égal à $\frac{n}{2}$ est connexe.

Démonstration. Supposons par l'absurde que le graphe ne soit pas connexe. On peut donc partitionner son ensemble de sommets en deux sous-ensembles n'ayant pas d'arête entre eux. Formellement $\exists A, B, A \cap B = \emptyset, A \cup B = S$ tels que $\nexists a \in A, b \in B,$ avec $\{a, b\} \in A$.

On a alors $\operatorname{Card} A \leq n/2$ ou $\operatorname{Card} B \leq n/2$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $\operatorname{Card} A \leq n/2$. Prenons alors $s \in A$, et par hypothèse $\deg s \geq n/2$; or il n'y a au plus que $n/2 - 1$ sommets dans $A \setminus \{s\}$, donc a possède au moins un voisin dans $S \setminus A = B$, absurde. $\square$



$|A| \leq \frac{n}{2}$

$d(s) \geq \frac{n}{2}$

$|A \setminus \{s\}| = \frac{n}{2} - 1$ $\rightsquigarrow$ s a $\frac{n}{2} - 1$ possibles dans A $\rightsquigarrow$ au moins 1 voisin dans B $\rightsquigarrow$ absurde