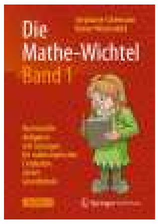

Beispielaufgabe "Streit um das Lebkuchenhaus" (Kalender 7-9, 2012)

Iffi und Ollo haben sich heimlich in die Backstube der Bäcker-Wichtel geschlichen und allerlei Leckereien gestohlen: 23 Kekse haben die Schleckermäuler erbeutet und dazu noch ein leckeres Lebkuchenhaus. Doch kaum haben die beiden dieses und die Kekse unter ihren Mänteln in ihr Wohnzimmer gerettet, streiten sie sich um das Lebkuchenhaus. Ollo macht schließlich folgenden Vorschlag: „Wir nehmen abwechselnd Kekse vom Teller, und zwar nehmen wir pro Zug 1, 2, 3 oder 4 Kekse. Die genaue Anzahl können wir vor jedem Zug neu festlegen, aber immer mindestens einen Keks und maximal vier Kekse. Wer den letzten Keks nimmt, bekommt das Lebkuchenhaus“. Iffi zweifelt zuerst. Doch als Ollo sich dazu überreden lässt, dass Iffi den Anfang machen darf, ist sie einverstanden.

Wie viele Kekse sollte Iffi im ersten Zug von den 23 Keksen nehmen, damit sie – wenn sie danach clever handelt – das Lebkuchenhaus auf jeden Fall bekommt?

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Martin Lüdtke

Student der Ruprecht-Karls-Universität in Heidelberg

Lösung verbergen

Antwortmöglichkeit c) ist richtig: Iffi sollte 3 Zimtsterne vom Teller nehmen.

Du kannst auf die Lösung kommen, indem du rückwärts rechnest. Überlege dir, wie Iffi es schaffen kann, den letzten Keks wegzunehmen. Dazu müssten bei ihrem letzten Zug 1, 2, 3 oder 4 Kekse auf dem Teller liegen. 5 wären zu viel, denn sie kann nur 1 bis 4 Kekse nehmen – das ist die Regel. Gleichzeitig dürfen bei Ollos Zug zuvor nicht schon nur 1, 2, 3 oder 4 Kekse auf dem Teller liegen. Sonst könnte er sie sich einfach nehmen und würde gewinnen.

Die Lösung ist folgende: Wenn 5 Kekse auf dem Teller liegen und Ollo 1, 2, 3 oder 4 Kekse nehmen muss, kann Iffi auf jeden Fall den Rest nehmen. Der Trick liegt also in den 5er Päckchen. Iffi muss sich überlegen, wie sie es schaffen kann, dass Ollo irgendwann 5 Kekse vorfindet.

In der Überlegung zu den letzten Keksen steckt ein Prinzip, das Iffi weiterhilft: Immer, wenn Ollo Kekse genommen hat, kann sie so viele nehmen, dass sie zusammen 5 Kekse genommen haben. Nimmt Ollo 4 Kekse, nimmt sie einen. Nimmt er beim nächsten Zug 2 Kekse, nimmt sie 3. Das geht in jeder Runde, denn sie kann vor jedem Zug entscheiden, wie viel sie sich nimmt. So kann Iffi das ganze Spiel lang steuern, wie viele Kekse auf dem Teller liegen. Nach ihrem Zug sollten das 20, 15, 10 und schließlich 5 Kekse sein.

Damit nach Iffis erstem Zug 20 Kekse auf dem Teller liegen, sollte sie zu Beginn 3 Kekse wegnehmen. Dann kann sie den Plan durchführen. Kurz vor Schluss liegen dann 5 Kekse auf dem Teller. Egal, wie viele Kekse Ollo nun nimmt: Iffi kann den Rest nehmen und hat gewonnen.

Die anderen Antwortmöglichkeiten können ausgeschlossen werden:

Nimmt Iffi zu Beginn nicht 3 Kekse und Ollo hat den Trick erkannt, wird Iffi verlieren! Würde Iffi nur 1 oder 2 Kekse nehmen, könnte Ollo entsprechend 2 oder 1 Keks nehmen, sodass 20 Kekse übrigblieben. Würde sie 4 Kekse nehmen, blieben 19 übrig und Ollo könnte den Kekshaufen durch die Wegnahme von ebenfalls 4 Keksen auf die nächst kleinere durch 5 teilbare Anzahl nämlich - 15 - reduzieren. Dann könnte Ollo den oben beschriebenen Plan von Iffi verfolgen und würde am Ende das Lebkuchenhaus gewinnen. Es könnte aber auch sein, dass Ollo den Trick nicht erkennt und Iffi dennoch gewinnt. Das wäre dann aber Glück, sie würde also nicht in jedem Fall gewinnen.

Blick über den Tellerrand

Dieses Spiel hat schon eine lange Geschichte. Man nennt es das Nim-Spiel. So ganz sicher, woher das Nim-Spiel kommt, ist man sich nicht. Vergleichbare Spiel gab es im alten China oder auch in Europa zu Beginn des 16. Jahrhunderts. „Nim“ wird nur mit einem „m“ geschrieben, es stammt vermutlich von dem altenglischen oder germanischen Wort „nim“ (deutsch: nimm!). Das Nim-Spiel ist das bekannteste Spiel, zu dem es eine vollständige mathematische Theorie gibt. Sie geht auf den Mathematikprofessor Charles Leonard Bouton aus Harvard (1902) zurück. Man ordnet das Nim-Spiel in das mathematische Gebiet der *Kombinatorischen Spieltheorie* ein.

Üblicherweise ist das Nim-Spiel ein Zwei-Personenspiel. Es gibt entweder einen Haufen (z.B. von Streichhölzern oder Münzen, hier: Kekse) oder mehrere Haufen mit jeweils einer bestimmten Anzahl von Teilen. Es gibt unterschiedliche Regeln. In der einfachsten Version, die wir auch hier vorliegen haben, gibt es einen Haufen, von dem die beiden Spieler abwechselnd jeweils 1, 2 oder 3 (oder auch wie hier 1, 2, 3 oder 4) Teile wegnehmen dürfen. Wer den Haufen leert, hat gewonnen. Auch hier ist eine Variation möglich – die Misère-Form: Hier verliert derjenige, der am Schluss das letzte Teil nehmen muss.

Professor Boutons Spieltheorie für eine beliebige Anzahl von Haufen und Gegenständen beruht auf der binären Darstellung der ganzen Zahlen (also der Zahlendarstellung im Dualsystem oder auf Deutsch: Zweiersystem). Er schreibt die Anzahl von Gegenständen in jedem Haufen als Summe von Zweierpotenzen auf und simuliert die Züge durch eine Addition im Zweiersystem.

Im Internet findest du viele Webseiten über das Nim-Spiel. Du kannst da auch teilweise gegen den Computer im Spiel antreten. Doch aufgepasst: Das Nim-Spiel ist kein faires Spiel! Es ist ein Strategiespiel, bei dem – sofern man die Strategie kennt und auch streng verfolgt – eine bestimmte Person gewinnt: entweder die zuerst ziehende oder die andere. Du kannst davon ausgehen, dass der Computer so programmiert ist, dass er immer optimal zieht und du dann verlierst, wenn du dir nicht die richtige Ausgangsposition ausgesucht hast.

Auch das Schachspiel ist ein Strategiespiel, doch da gibt es so viele Zugmöglichkeiten, dass keiner 100%-ig optimal ziehen kann und den Ausgang im Vorhinein berechnen kann. Das schafft auch ein Computer heute noch nicht.