



L

Aufgaben	Regeln	Registrieren	Preise	Förderer
Fragen				

Zum Weiteren
und Versche

Beispielaufgabe "Halbierte Polarkronen" (Kalender 7-9, 2013)

Die Wichtel Fridolin, Ragna und Iffi waren gestern zusammen auf dem Adventsflohmarkt und haben dort alle an Wendels Glücksautomaten Polarkronen gewonnen. Darüber haben die drei sich natürlich sehr gefreut.



Tweets

 **MAA**
@maanow
Amir Aczel, who w
about Wiles' proo
Fermat's Last Thec
at 65 ow.ly/VMCyl
#mathchat

Retweeted by
dmv.mathematik.c
Show Summary

 **dmv.math**
@dmv_mat
#Mathe-#Advents
heute, 3. #Advent:
#Sonderverlosung
mathe-im-advent.
#matheimadvent
Expand





Da die drei Freunde allerdings ein starkes Gerechtigkeitsgefühl haben, waren sie unzufrieden darüber, dass ihre Gewinne unterschiedlich hoch ausgefallen sind. „Ich hab‘ eine Idee“, schlug Iffi vor. „Ich gebe die Hälfte meiner Polarkronen dir, Ragna. Von dem, was du dann hast, gibst du die Hälfte Fridolin. Und von dem, was Fridolin dann hat, gibt er die Hälfte mir.“ „Geniale Idee, Iffi!“, meinte Ragna. „So machen wir’s.“

Nach dem Tausch stellte Iffi allerdings verwundert fest: „Guckt mal! Ich hab genauso viele Polarkronen wie vorher!“

Kann das richtig sein, was Iffi festgestellt hat?

- a) Nein, das kann nicht passieren. Die drei müssen etwas falsch gemacht haben.
- b) Ja, das kann passieren. Dafür gibt es sogar mehrere Möglichkeiten.
- c) Ja, das kann passieren, aber nur, wenn Iffi 100, Ragna 30 und Fridolin 60 Polarkronen hatten.
- d) Ja, das passiert immer. Egal, wie viele Polarkronen die drei gewonnen hätten.

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Monoid – das Mathematikblatt für Mitdenker

<http://www2.mathematik.uni-mainz.de/monoid/>

[Lösung verbergen](#)

Lösung:

Antwortmöglichkeit b) ist richtig: Ja, das kann passieren. Es gibt sogar mehrere Möglichkeiten dafür.

Lösungsmöglichkeit 1: Ausprobieren und Ausschließen

Du kannst dir ein paar Beispiele überlegen, um zu untersuchen, was passieren kann und so nach und nach drei der vier Antwortmöglichkeiten ausschließen.

Ausschließen von Antwortmöglichkeit d) durch ein Beispiel:

Vorher: Iffi: 8 Polarkronen, Ragna: 4 Polarkronen und Fridolin: 2 Polarkronen

Schritt 1: Iffi gibt Ragna 4 Polarkronen. Iffi hat nun 4, Ragna 8

Polarkronen.

Schritt 2: Ragna gibt Fridolin 4 Polarkronen. Ragna hat nun 4, Fridolin 6 Polarkronen.

Schritt 3: Fridolin gibt Iffi 3 Polarkronen. Fridolin hat nun 3, Iffi 7 Polarkronen.

Ergebnis: Iffi hat weniger Polarkronen als am Anfang.

Ausschließen von Antwortmöglichkeit a) durch Prüfung von Antwort c):

Vorher: Iffi: 100 Polarkronen, Ragna: 30 Polarkronen und Fridolin: 60 Polarkronen

Schritt 1: Iffi gibt Ragna 50 Polarkronen. Iffi hat nun 50, Ragna 80 Polarkronen.

Schritt 2: Ragna gibt Fridolin 40 Polarkronen. Ragna hat nun 40, Fridolin 100 Polarkronen.

Schritt 3: Fridolin gibt Iffi 50 Polarkronen. Fridolin hat nun 50, Iffi 100 Polarkronen.

Ergebnis: Iffi hat genauso viele Polarkronen wie am Anfang.

Neben Antwort d) ist also auch Antwort a) falsch. Um dich zwischen den Antworten b) und c) zu entscheiden, musst du nur noch prüfen, ob es weitere Beispiele gibt, die funktionieren.

Dazu kannst du geschickt mit Zahlen experimentieren. Wähle zunächst Beträge für Iffi und Ragna. Du kannst dir dann überlegen, wie viele Polarkronen Iffi an Ragna gibt und wie viele Ragna anschließend an Fridolin weiterreicht. Zum Schluss kannst du darüber nachdenken, wie viele Polarkronen Iffi von Fridolin bekommen muss, damit sie genauso viele hat wie am Anfang. Fridolins Anfangsbetrag kannst du dann gezielt danach auswählen.

Ausschließen von Antwortmöglichkeit c) durch ein weiteres Beispiel:

Vorher: Iffi: 80 Polarkronen, Ragna: 20 Polarkronen und Fridolin: x Polarkronen

Schritt 1: Iffi gibt Ragna 40 Polarkronen. Iffi hat nun 40, Ragna 60 Polarkronen.

Schritt 2: Ragna gibt Fridolin 30 Polarkronen. Ragna hat nun 30 Polarkronen.

Schritt 3: Damit Iffi genauso viele Polarkronen hat wie am Anfang, muss sie von Fridolin 40 Polarkronen bekommen. Fridolin müsste

also 80 Polarkronen haben. Das klappt dann, wenn er am Anfang 50 Polarkronen hat, weil er von Ragna ja noch 30 hinzubekommt.

Ergebnis: Iffi hat genauso viele Polarkronen wie am Anfang, wenn Fridolin zu Beginn 50 hat.

Es gibt also mindestens ein zweites Beispiel, bei dem es funktioniert. Antwort c) ist damit auch falsch und es bleibt nur Antwort b) übrig.

Lösungsmöglichkeit 2: allgemeine Lösung mit Variablen

Du kannst für die Beträge, die von den drei Wichteln gewonnen werden, Buchstaben als Platzhalter einsetzen: Iffi hat a Polarkronen, Ragna hat b Polarkronen und Fridolin hat c Polarkronen. In den einzelnen Schritten passiert nun Folgendes:

Schritt 1:

Iffi gibt die Hälfte von a an Ragna, also $0,5 \cdot a$ Polarkronen. Ragna hat dann $b + 0,5 \cdot a$ Polarkronen. Iffi hat nur noch $0,5 \cdot a$ Polarkronen

Schritt 2:

Ragna gibt die Hälfte von $b + 0,5 \cdot a$ Polarkronen Fridolin, also $0,5 \cdot (b + 0,5 \cdot a)$ Polarkronen. Fridolin hat nun $c + 0,5 \cdot (b + 0,5 \cdot a) = c + 0,5 \cdot b + 0,25 \cdot a$ Polarkronen. Ragna hat nun noch $0,5 \cdot (b + 0,5 \cdot a) = 0,5 \cdot b + 0,25 \cdot a$ Polarkronen.

Schritt 3:

Fridolin gibt die Hälfte von $c + 0,5 \cdot b + 0,25 \cdot a$, also $0,5 \cdot (c + 0,5 \cdot b + 0,25 \cdot a)$ Polarkronen, an Iffi. Iffi hat nun $0,5 \cdot a + 0,5 \cdot (c + 0,5 \cdot b + 0,25 \cdot a) = 0,5 \cdot a + 0,5 \cdot c + 0,25 \cdot b + 0,125 \cdot a = 0,625 \cdot a + 0,5 \cdot c + 0,25 \cdot b$ Polarkronen.

Iffi soll am Ende aber wieder genau a Polarkronen haben. Es soll also gelten:

$$a = 0,625 \cdot a + 0,5 \cdot c + 0,25 \cdot b$$

Wenn du $0,625 \cdot a$ auf beiden Seiten subtrahierst, erhältst du:

$$0,375 \cdot a = 0,5 \cdot c + 0,25 \cdot b$$

Wenn du nun $0,25 \cdot b$ auf beiden Seiten abziehst und die Seiten dann vertauschst, entsteht diese Gleichung:

$$0,5 \cdot c = 0,375 \cdot a - 0,25 \cdot b$$

Durch Multiplikation mit 2 steht auf der linken Seite nur noch c :

$$c = 0,75 \cdot a - 0,5 \cdot b$$

Wenn du nun drei Beträge a , b und c wählst, sodass diese Gleichung aufgeht, hat Iffi am Ende wieder so viele Polarkronen wie am Anfang. Die drei Wichtel können also nicht beliebig viele Polarkronen haben. Damit ist Antwort d) falsch. Das Beispiel aus Antwort c) kannst du mit der Gleichung prüfen. Dort ist $a = 100$, $b = 30$ und $c = 60$. Setze diese Zahlen in die Gleichung ein:

$$60 = 0,75 \cdot 100 - 0,5 \cdot 30$$

$$\Rightarrow 60 = 75 - 15$$

Das stimmt. Also funktioniert Beispiel c). Damit ist Antwort a) falsch. Jetzt musst du noch zwischen den Antworten b) und c) entscheiden. Du kannst dazu beliebige Beträge für Iffi und Ragna wählen und prüfen, wie viele Polarkronen Fridolin dann haben muss. Beispielsweise könnte Iffi 8 Polarkronen und Ragna 2 Polarkronen haben. Dann ist $a = 8$ und $b = 2$. Für c gilt dann:

$$c = 0,75 \cdot 8 - 0,5 \cdot 2 = 6 - 1 = 5.$$

Wenn Fridolin also 5 Polarkronen hat, geht die Rechnung auf. Mithilfe der Gleichung findest du noch viele weitere Beispiele. Dabei müssen natürlich a , b und c positiv sein. Falls c negativ ist, würde das Beispiel nicht gelten, da der gewonnene Geldbetrag immer eine positive Zahl ist.

Mathe im Advent
Über Mathe im
Advent
Medien
Archiv

Teilnehmen
Aufgaben
Regeln
Förderer

Social Media
Facebook
Twitter

©2015 DMV
Fragen
Impressum
Spenden