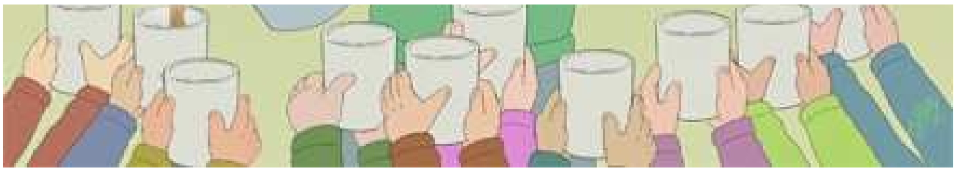
Beispielaufgabe "All you can drink" (Kalender 7-9, 2012)

Die Adventszeit macht sich auch in der Sterndorfer Schule bemerkbar: In einigen Mathestunden gibt es Kekse und heißen Kakao. Frau Herzgut hat sich zur Motivation etwas Besonderes ausgedacht, das die schnellen Rechner nicht zu sehr bevorteilt: Für jede gelöste Aufgabe bekommt man heißen Kakao eingeschenkt. Sie kündigt an: „Für die erste Aufgabe bekommt ihr einen halben Becher, für die zweite halb so viel dazu (also einen viertel Becher), für die dritte Aufgabe dann ein Achtel vom Becher und immer so weiter. Ihr bekommt also für jede Aufgabe halb so viel Kakao wie für die Aufgabe davor!“ Sami ist begeistert. Er überlegt sich, dass er den Kakao aufspart und erst, wenn er ganz viel davon hat, alles auf einmal trinkt. Am liebsten würde er ewig weiterrechnen und Kakao sammeln. Doch da fällt ihm auf, dass er ja nur einen Becher hat.

Wie viele Becher braucht Sami, um den Kakao zu sammeln?



GEFÖRDERT VO

Bundesm
für Bildun
und Forsc

a) Es reicht ein Becher – egal, wie lange er rechnet.

b) Er braucht genau zwei Becher. Das reicht, um unbegrenzt weiter belohnt zu werden.

c) Wenn er nie aufhört zu rechnen und immer mehr Kakao bekommt, reichen zwei Becher nicht: Er braucht genau drei.

d) Falls er motiviert bleibt und den Kakao weiter sammelt, wird er immer mehr Becher brauchen – theoretisch unendlich viele.

Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:

Das Mathe-im-Advent – Team

Deutsche Mathematiker-Vereinigung

http://www.dmv.mathematik.de

Lösung verbergen

Antwortmöglichkeit a) ist richtig: Sami reicht ein Becher für den Kakao.

Du kannst die Lösung am besten nachvollziehen, wenn du dir den Füllvorgang in einzelnen Schritten vorstellst:

Zu Beginn ist der Becher leer. Frau Herzgut füllt den Becher dann zur Hälfte. Die andere Hälfte bleibt leer.

Diese leere Hälfte wird von Frau Herzgut dann wieder halb gefüllt. Es kommt die Hälfte von dem halben Becher, also eine Viertelfüllung hinzu, sodass der Becher insgesamt zu dreiviertel gefüllt ist. Das letzte Viertel bleibt aber leer.

Dieses letzte Viertel wird von Frau Herzgut dann wieder nur zur Hälfte gefüllt. Die Hälfte von einem Viertel ist ein Achtel, es kommt also eine Achtelfüllung hinzu und das letzte Achtel bleibt leer.

Dieses letzte Achtel wird von Frau Herzgut dann wieder zur Hälfte gefüllt. Die Hälfte von einem Achtel ist ein sechzehntel, es kommt also eine Sechzehntelfüllung hinzu. Das letzte Sechzehntel bleibt leer.

...

Du kannst in den Schritten ein Muster erkennen: Frau Herzgut füllt immer wieder die Hälfte vom verbleibenden Platz im Becher auf. So bleibt ein immer kleinerer Anteil des Bechers leer (erst die Hälfte, dann ein Viertel, dann ein Achtel, dann ein Sechzehntel usw.) und ebenso wird auch die Kakaomenge, die Frau Herzgut hinzukippt, immer kleiner (erst die Hälfte, dann ein Viertel, dann ein Achtel, dann ein Sechzehntel usw.). Daher bleibt immer noch ein wenig Platz im Becher und der Becher wird theoretisch nie ganz voll. Auch praktisch wird die Menge Kakao, die Frau Herzgut nachschüttet irgendwann so klein, dass sie praktisch keinen Kakao mehr nachschüttet. Ein Becher reicht also - egal, wie lange Sami rechnet!

Blick über den Tellerrand

Mathematisch gesehen liegt dem Füllen des Bechers eine Reihe zugrunde. Wenn man in Zahlen ausdrückt, wie viel Kakao in den Becher kommt, ist dies zunächst ½.

Dann folgt die Hälfte der Hälfte, also ¼. Du kannst es auch so ausdrücken: $½ \cdot ½ = (½)^2$.

Im Becher ist nun die Hälfte gefüllt und nochmal ein Viertel: $½ + ¼ = ½ + (½)^2 = ¾$

Es folgt dann die Hälfte von einem Viertel, das ist ein Achtel: $1/8 = ½ \cdot ¼ = ½ \cdot ½ \cdot ½ = (½)^3$.

Im Becher kommt nun dieses Achtel dazu: $½ + ¼ + 1/8 = ½ + (½)^2 + (½)^3 = 7/8$

Du kannst erkennen, dass in jedem Schritt die Hälfte vom Schritt davor hinzukommt. Die Summe lautet also:

$(½)^1 + (½)^2 + (½)^3 + (½)^4 + (½)^5 + (½)^6 + \dots$

Du siehst, dass sich die Summanden nur durch den Exponenten, unterscheiden und der Quotient zweier benachbarter Summanden ist konstant bei ½. So eine Summe heißt Reihe und diese Reihe ist so wichtig für die Mathematiker, dass sie sogar einen speziellen Namen hat: Sie heißt geometrische Reihe.

Mathematiker interessieren sich dafür, ob eine solche Reihe konvergiert. Eine Konvergenz liegt dann vor, wenn sich die Summe einem bestimmten Wert immer mehr annähert, diesen aber nie überschreitet. Man kann zeigen, dass unsere Reihe konvergiert – und zwar gegen 1. Die Summe nähert sich der 1, überschreitet sie aber nicht. Irgendwann ist der Rest sehr, sehr klein, aber die Summe bleibt immer unter 1. Das bedeutet in unserem Fall: Der Becher wird nie voll. Und das kann man mit etwas mehr Mathematik sehr gut zeigen.