



L

Aufgaben	Regeln	Registrieren	Preise	Förderer
Fragen				

Zum Weiteren  
und Versche

### Beispielaufgabe "Langeweile bei den Packwichteln" (Kalender 7-9, 2013)

In letzter Zeit beschweren sich immer öfter Packwichtel bei Esmeralda darüber, dass es sie langweilt, immer das gleiche Geschenk einzupacken. Da Esmeralda nicht möchte, dass sich unter den Packwichteln schlechte Stimmung ausbreitet, überlegt sie sich ein System dafür, wie die Wichtel sich abwechseln können. Dieses System möchte sie zuerst in der Packstation „Sport“ ausprobieren, um es dann gegebenenfalls auf alle anderen Stationen auszuweiten. Die Packstation „Sport“ hat im ersten Raum neun Packplätze (siehe Bild).

Esmeraldas System hat folgende Regeln: Jeder Wichtel soll nur einen Tag am selben Tisch sitzen, also am nächsten Tag wechseln. Damit aber kein Chaos entsteht, sollen die Wichtel nur an einen Nachbartisch wechseln, also nach vorn, nach hinten, nach links oder rechts (nie diagonal!). Iffi packt heute Fahrräder ein (vorne in der Mitte).

Wo wird sie morgen sitzen, wenn alle Wichtel vor der Arbeit ihre Plätze nach Esmeraldas Regeln tauschen?



#### Tweets


**MAA**

@maanow

Amir Aczel, who w  
about Wiles' proo  
Fermat's Last The  
at 65 [ow.ly/VMCyl](https://ow.ly/VMCyl)  
#mathchat

Retweeted by  
dmv.mathematik.c

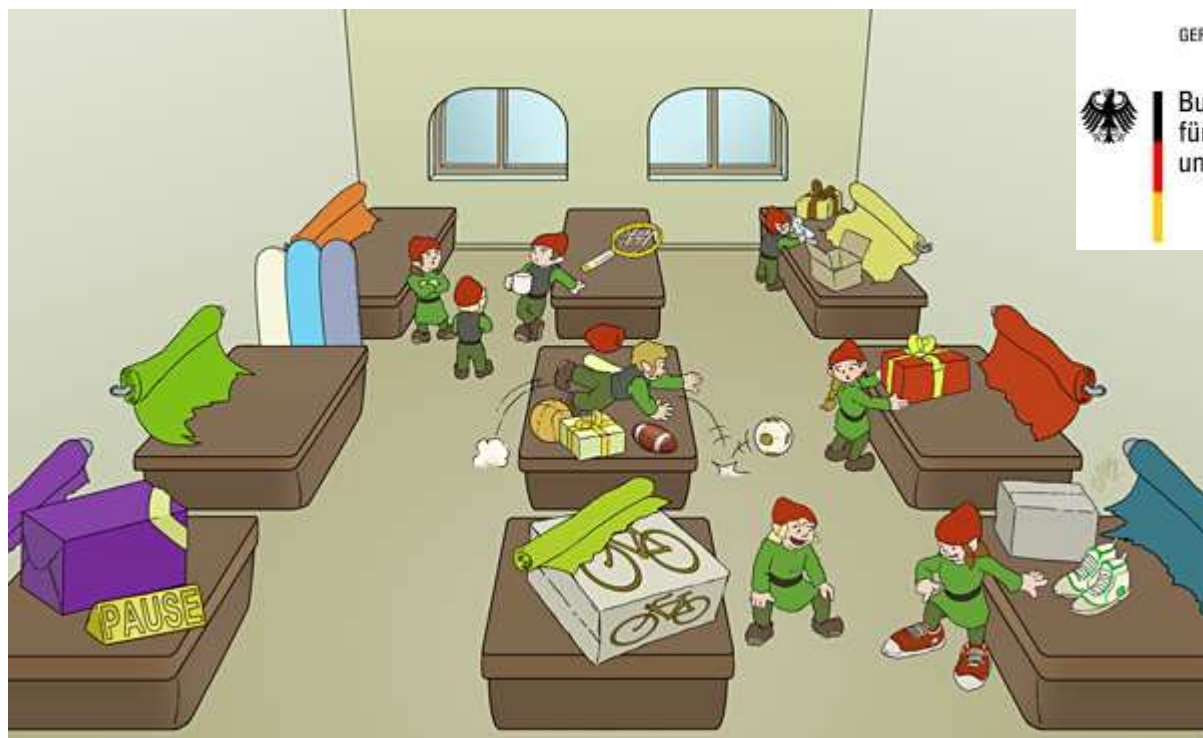
Show Summary


**dmv.mathematik**

@dmv\_math

#Mathe-#Advents  
heute, 3. #Advent:  
#Sonderverlosung  
mathe-im-advent.  
#matheimadvent

Expand



- a) Iffi wird am nächsten Morgen zu den Turnschuhen vorne rechts wechseln.
- b) Morgen wird Iffi vorne links, an dem Tisch mit dem „Pause“-Schild, Kitebuggies verpacken.
- c) Iffi wird morgen am mittleren Packplatz Bälle einpacken.
- d) In dieser Anordnung können nicht alle neun Wichtel nach den vorgeschriebenen Regeln die Plätze tauschen. Esmeralda muss also nach einem anderen System suchen.

**Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:**

Mathe-im-Advent-Team

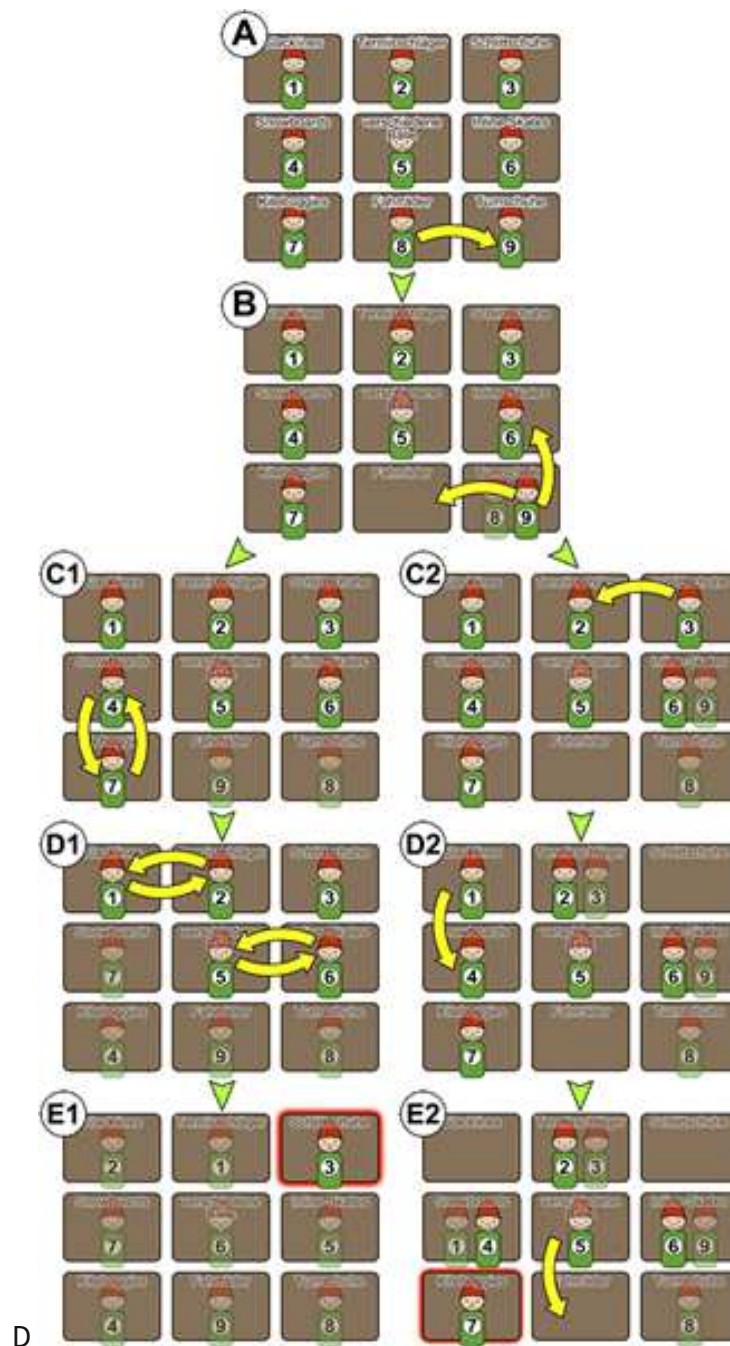
Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)

<https://dmv.mathematik.de>

[Lösung verbergen](#)

**Antwortmöglichkeit d) ist richtig. Es können nicht alle Wichtel ihre Plätze nach Esmeraldas System tauschen.**

Lösungsmöglichkeit 1: Ausprobieren



D

Du kannst für die Antworten a) bis c) überlegen, welche Konsequenzen es für die anderen Packwichtel hat, wenn Iffi zu einem der drei möglichen Tische (rechts, links, Mitte) wechselt: Aufgrund von Esmeraldas Regeln stehen meistens nur wenige Wechsel-Möglichkeiten für die anderen Wichtel zur Verfügung. Am geschicktesten gehst du vor, wenn du als erstes die Packwichtel betrachtest, für die es am wenigsten Optionen gibt.

Für Antwortmöglichkeit a) gilt Folgendes:

Iffi (Wichtel 8) wechselt zu den Turnschuhen nach rechts (Bild A). In Bild B hat sie den Platz schon eingenommen. Wichtel 9 muss den Tisch verlassen. Er hat zwei Möglichkeiten: zu den Fahrrädern (wo

Iffi vorher war) oder zu den Inline-Skates (zur mittleren Reihe rechts).

Wenn er zu den Fahrrädern wechselt, wo Iffi herkommt, kann Wichtel 7 nur noch zum Tisch in der mittleren Reihe links (Snowboards). Der Platz für die Kitebuggies (vorne links) kann dann nur von Wichtel 4 besetzt werden (Bild C1).

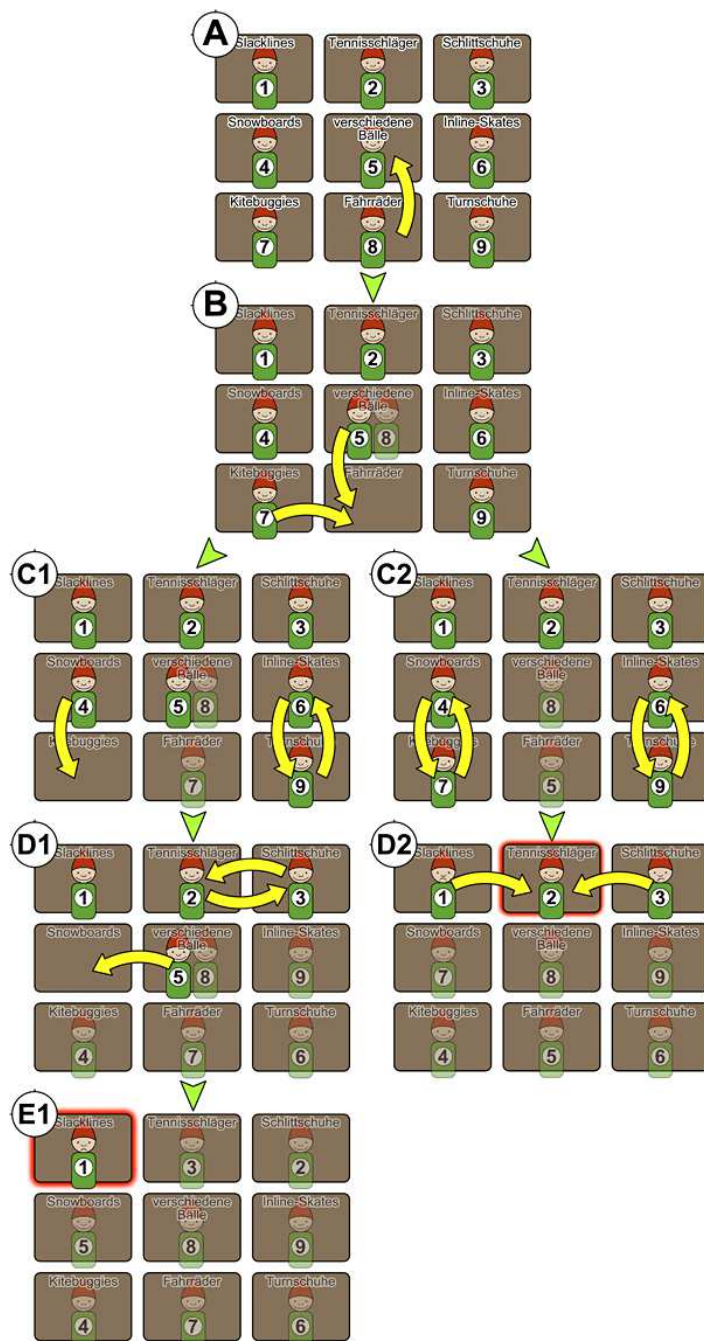
In Bild D1 haben die Wichtel 4, 7, 8 und 9 bereits gewechselt. Wichtel 1 kann nun nur nach rechts zu den Tennisschlägern. Der Packplatz hinten links (Slacklines) kann dann aber nur von Wichtel 2 eingenommen werden. Da die Tennisschläger von Wichtel 1 (hinten Mitte) besetzt sind, bleibt Wichtel 5 nur der Tisch mit den Inline-Skates (mittlere Reihe rechts). Daraus wiederum folgt, dass der freie Tisch mit den Bällen nur von Wichtel 6 besetzt werden kann. Die Wichtel 1 und 2 sowie die Wichtel 5 und 6 tauschen also jeweils die Plätze. Es entsteht dann die im Bild E1 dargestellte Situation: Wichtel 3 befindet sich in einer Sackgasse und findet keinen neuen Packplatz! Damit scheidet dieser Lösungsweg, in dem Wichtel 9 zu den Fahrrädern wechselt, aus.

Wichtel 9 könnte aber noch zu den Inlineskates wechseln: In Bild C2 ist er dort angekommen. Wichtel 3 bleibt dann nur ein Wechsel zu den Tennisschlägern (hinten Mitte). Da dieser Tisch dann auch besetzt ist, muss Wichtel 1 zu den Snowboards (Tisch in der mittleren Reihe links, siehe Bild D2).

Dem Wichtel 5 bleibt jetzt von den vier Wechsel-Möglichkeiten, die er zu Beginn hatte, nur noch der Fahrrad-Packplatz (vorne Mitte, siehe Bild E2). Wichtel 7 kann dann allerdings weder zur mittleren Reihe noch nach rechts wechseln und befindet sich somit in einer Sackgasse. Deshalb scheidet insgesamt die Antwortmöglichkeit a), dass Iffi zu den Turnschuhen wechselt, aus.

Mit der Begründung eben hast du gezeigt, dass Iffi nicht zu den Turnschuhen nach rechts wechseln kann. Aus Symmetriegründen kannst du damit auch den Wechsel nach links zu den Kitebuggies ausschließen. Wechselt sie nämlich nur zur anderen Seite, gelten alle bereits angestellten Überlegungen aus spiegelsymmetrischen Gründen auch. Antwortmöglichkeit b) scheidet deshalb auch aus.

Nun musst du untersuchen, was passiert, wenn Iffi zu den Bällen in der Mitte wechselt:



Iffis Fahrrad-Packplatz muss neu besetzt werden (Bild B). Hierfür kommen die Wichtel 5, 7 und 9 in Frage. Weil der Wichtel 7 von links und der Wichtel 9 von rechts auf den Fahrrad-Packplatz in der Mitte wechseln können, brauchst du aus Symmetriegründen nur eine von beiden zu prüfen: Geht die eine Richtung, klappt auch die andere, geht die eine Richtung nicht, klappt auch die andere nicht. Es reicht also, wenn du untersuchst, was passiert, wenn Wichtel 7 oder Wichtel 5 zu den Fahrrädern wechselt:

Geht Wichtel 7 zu den Fahrrädern, hat das dreierlei Folgen (C1): Der Tisch mit den Kitebuggies (vorne links) kann nur von Wichtel 4 besetzt werden und Wichtel 9 kann nur noch zu den Inline-Skates (mittlere Reihe rechts). Geht er dorthin, kann der Tisch mit den Turnschuhen (vorne rechts) nur noch von Wichtel 6 besetzt werden.

In Bild D1 haben die Wichtel 4, 6 und 9 bereits gewechselt. Daraus



lässt sich wieder Einiges folgern: Wichtel 3 kann nur noch zu den Tennisschlägern (hinten Mitte) wechseln. Tut er dies, kann der Tisch mit den Schlittschuhen (hinten rechts) nur noch von Wichtel 2 besetzt werden. Da dann der Tisch mit den Tennisschlägern (hinten Mitte) von Wichtel 3, der Tisch mit den Inline-Skates (mittlere Reihe rechts) von Wichtel 9 und der Tisch mit den Fahrrädern (vorne Mitte) von Wichtel 7 besetzt ist, kann Wichtel 5 nur noch zu den Snowboards (mittlere Reihe, siehe Bild D1).

Bild E1 zeigt dann aber: Acht Wichtel haben gewechselt, nur Wichtel 1 bleibt an seinem Tisch. Weil er nirgendwohin mehr wechseln kann. Er steckt also in einer Sackgasse! So scheiden aus Symmetriegründen gleich zwei Wechsel-Möglichkeiten aus: Wichtel 7 und auch Wichtel 9 können nicht zur Fahrrad-Packstation wechseln.

Du musst nun nur noch untersuchen, was passiert, wenn Wichtel 5 zum Fahrrad-Packplatz wechselt:

Wenn Wichtel 5 zu den Fahrrädern geht, können die Wichtel 7 und 9 dort nicht mehr hin. Sie müssen beide an die Paktische in der mittleren Reihe wechseln. Die Tische mit den Kitebuggies (vorne links) und den Turnschuhen (vorne rechts) sind dann unbesetzt. Sie können aber nur noch von den Wichteln 4 und 6 besetzt werden (siehe Bild C2).

Bild D2 zeigt: Die Wichtel 4 bis 9 haben einen neuen Platz eingenommen. Wichtel 1 und Wichtel 3 können nun beide nur noch zu den Tennisschlägern (hinten in der Mitte). Da aber nicht beide an den gleichen Tisch wechseln können, scheidet auch diese letzte Möglichkeit aus. Insgesamt stellst du also fest: Es gibt keine Möglichkeit für Iffi nach den vorgegeben Regeln zu wechseln. Esmeralda muss ihr System noch einmal überdenken! Es stimmt deshalb die Antwortmöglichkeit d).

### Lösungsmöglichkeit 2: Grundsätzliche Überlegungen

Du kannst auch grundsätzliche Überlegungen anstellen:

1. Für jeden Wichtel, der einen Platz nach rechts wechselt, muss auch ein Wichtel einen Platz nach links wechseln. Wenn z.B. ein Wichtel aus der linken Spalte in die mittlere Spalte wechselt, sind in der linken Spalte nur noch zwei Wichtel. Egal, wohin genau jeder Wichtel wechselt: Damit die linke Spalte wieder voll besetzt ist, muss irgendein Wichtel nach links wechseln. Es wechseln also insgesamt genauso viele Wichtel nach rechts wie nach links. Die Summe der Wechsel nach links und rechts muss also gerade sein.
2. Für jeden Wichtel, der nach hinten wechselt, muss auch ein

Wichtel nach vorne wechseln. Die Summe der Wechsel nach hinten und vorne muss also auch gerade sein (siehe Überlegung 1).

Die Summe aller Wechsel ist die Summe aus den Wechseln nach rechts und links und den Wechseln nach hinten und vorne. Da beide Anzahlen gerade sein müssen, muss auch die Summe aller Wechsel gerade sein. Da aber insgesamt 9 Wichtel wechseln, ist dies unmöglich.

Mathe im Advent  
Über Mathe im  
Advent  
Medien  
Archiv

Teilnehmen  
Aufgaben  
Regeln  
Förderer

Social Media  
Facebook  
Twitter

©2015 DMV  
Fragen  
Impressum  
Spenden