



L

Aufgaben	Regeln	Registrieren	Preise	Förderer
Fragen				

Zum Weiteren  
und Versche

### Beispielaufgabe "Gespiegelter Weihnachtsbaum" (Kalender 7-9, 2011)

Im Sommer hat Lukas mit seinem Vater im Garten ein Baumhaus gebaut. Jetzt wollen sie es weihnachtlich schmücken - mit Lichterketten und einem kleinen Weihnachtsbaum. Doch schnell stellen sie fest: Neben dem Weihnachtsbaum ist fast gar kein Platz mehr in der Hütte.

Nach kurzem Überlegen hat Lukas eine Idee: Er nimmt eine Säge, viertelt das Bäumchen entlang des Stamms (wie du im Bild siehst) und stellt es in eine Ecke. Das spart viel Platz, sieht jetzt aber nicht mehr ganz so schön weihnachtlich aus.

Da hat sein Vater eine weitere gute Idee: Er nimmt zwei Spiegel und stellt sie senkrecht zum Boden hinter das Bäumchen in die Ecke. Den Winkel zwischen den beiden Spiegeln (waagrecht zum Boden) wählt er so, dass sie den geviertelten Weihnachtsbaum nun wieder wie einen ganzen Baum sehen können.

In welchem Winkel müssen die Spiegel zueinander stehen, damit Lukas und sein Vater den geviertelten Weihnachtsbaum als einen ganzen Baum sehen können?

[Tipp: Probiere es mit zwei Spiegeln selbst aus, zum Beispiel an einem Spiegelschrank. Beachte: Auch das Spiegelbild wird wieder gespiegelt.]



#### Tweets


**MAA**

@maanow

Amir Aczel, who w  
about Wiles' proo  
Fermat's Last Thec  
at 65 [ow.ly/VMCyl](https://ow.ly/VMCyl)  
#mathchat

Retweeted by  
dmv.mathematik.c

Show Summary


**dmv.math**

@dmv\_mat

#Mathe-#Advents  
heute, 3. #Advent:  
#Sonderverlosung  
mathe-im-advent.  
#matheimadvent

Expand



GEFÖRDERT VU

Bundesm  
für Bildun  
und Forsc

- a)  $45^\circ$
- b)  $90^\circ$
- c)  $120^\circ$
- d)  $180^\circ$

**Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:**

Das Mathe-im-Advent-Team

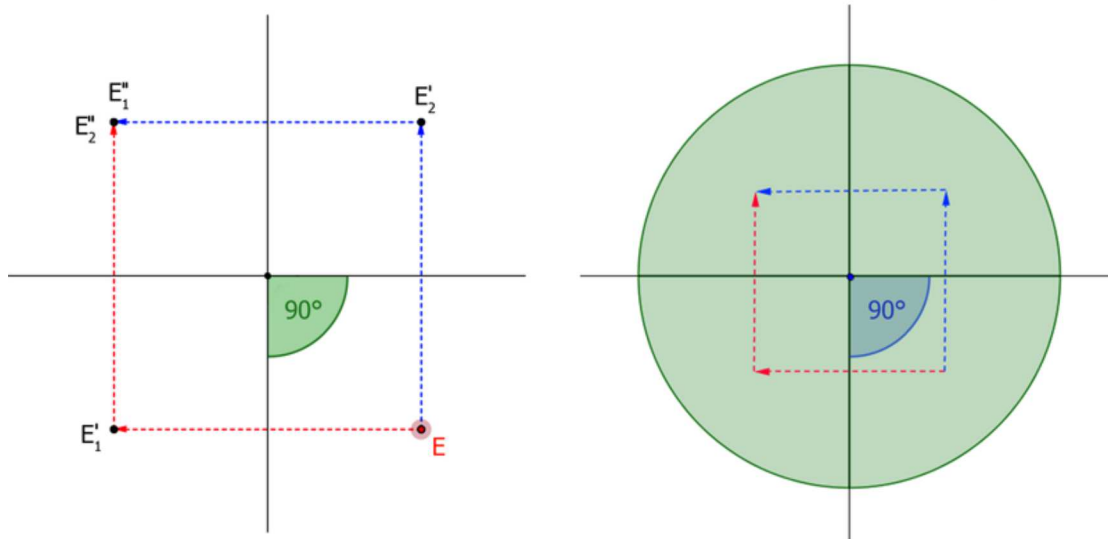
Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)

[www.dmv.mathematik.de](http://www.dmv.mathematik.de)[Lösung verbergen](#)**Antwortmöglichkeit b) ist richtig. Lukas muss die Spiegel im Winkel von  $90^\circ$  zueinander stellen.**

Die Lösung kannst du mit Hilfe der unten stehenden Skizzen erkennen. Dort sind die Spiegel durch die Spiegelachsen dargestellt, um nachvollziehen zu können, wie die Spiegelbilder gespiegelt werden. Wenn du in einen Spiegel guckst, kannst du feststellen, dass der dein Spiegelbild immer senkrecht zum Spiegel entsteht. Zum besseren Verständnis sind die Spiegelungen einmal nur mit einem Punkt und einmal mit einem Viertelkreis ausgeführt. Der

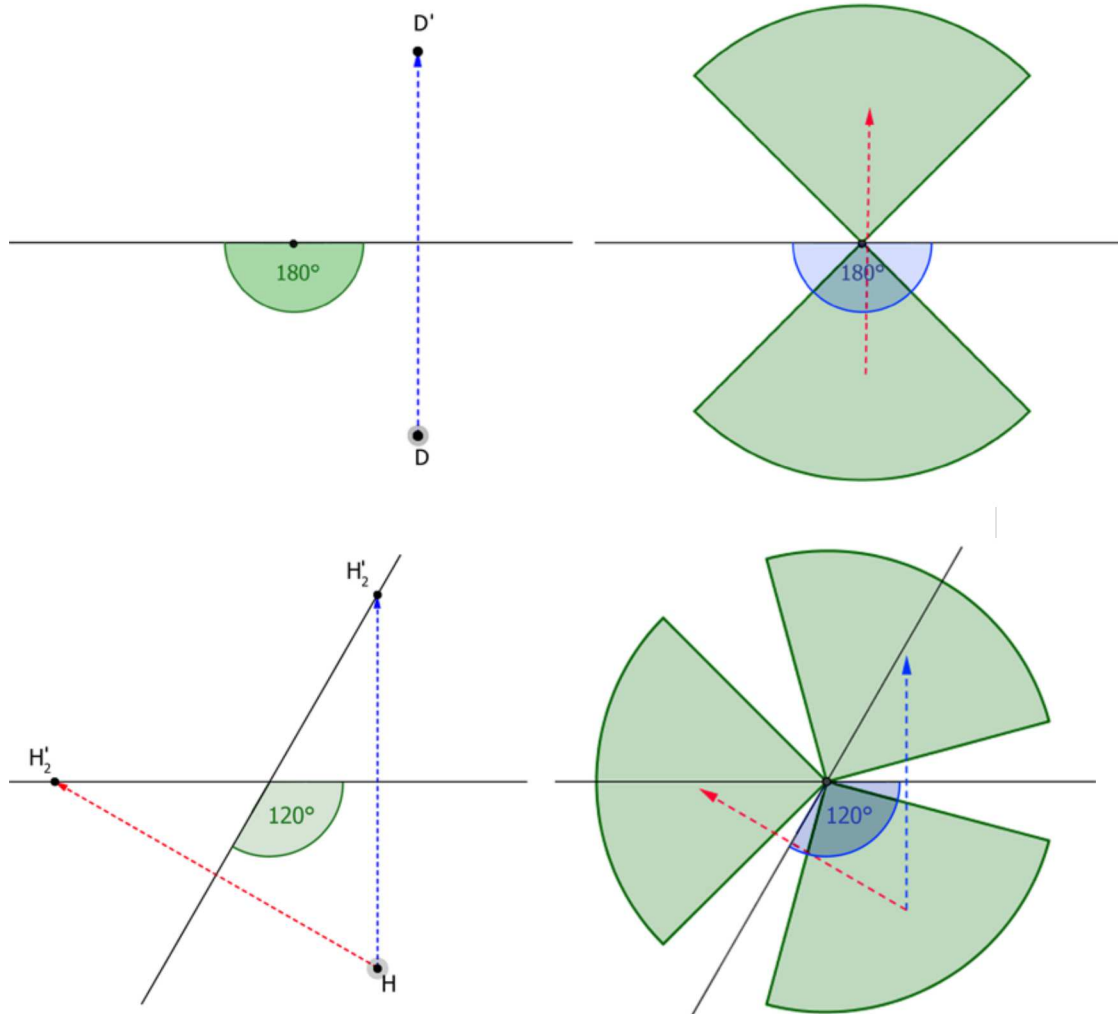
grüne Viertelkreis steht symbolisch für den geviertelten Weihnachtsbaum. Der Punkt bzw. der Viertelkreis wird zuerst über beide Spiegelachsen gespiegelt, dann werden die Spiegelbilder wieder gespiegelt. Die jeweiligen „Spiegelwege“ sind mit einem blauen und einem roten Pfeil dargestellt, bis sich die beiden Spiegelwege genau treffen.

Stellt Lukas die Spiegel im Winkel von  $90^\circ$  aneinander, wird das Viertel des Weihnachtsbaums einmal nach oben und einmal nach links über die Spiegelachse gespiegelt. Beide Spiegelbilder (roter Weg und blauer Weg) werden im nächsten Schritt genau aufeinander gespiegelt. So wird der Viertel-Weihnachtsbaum auf einen ganzen, runden Weihnachtsbaum gespiegelt.



### Winkel zwischen den Spiegeln größer als $90^\circ$

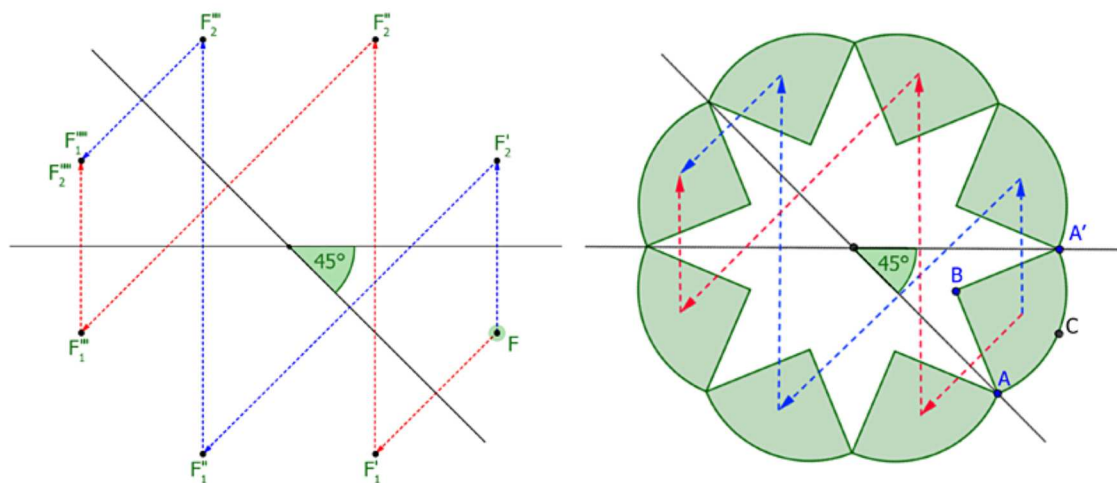
Ein Viertel-Weihnachtsbaum hat  $360^\circ : 4 = 90^\circ$ . Ist der Winkel größer als  $90^\circ$  (Antwortmöglichkeiten c) und d)) bilden sich Lücken zwischen dem Baum und den Spiegeln. Diese Lücken werden auch mitgespiegelt, sodass Lukas im gespiegelten Bild nicht nur den Viertel-Weihnachtsbaum, sondern auch die Lücken sieht. Das ist in diesen beiden Skizzen dargestellt.



### Winkel zwischen den Spiegeln kleiner als $90^\circ$

Ist der Winkel kleiner als  $90^\circ$  wird zwar das ganze Bildfeld ausgefüllt, der Weihnachtsbaum wird aber nicht rund. Im Tipp stand, dass auch das Spiegelbild wieder gespiegelt wird. Wie das geschieht, siehst du unten in der Zeichnung. Die weiße Lücke entsteht dadurch, dass der Viertelkreis nicht ganz in den  $45^\circ$ -Winkel hineinpasst und somit ein Lücke entsteht, die auch wieder mitgespiegelt wird.

Stellst du dir das räumlich vor, wird auch oben an der Spitze eine Lücke zum Spiegel entstehen. Diese Lücke wird dann auch mitgespiegelt und die Spitze des Weihnachtsbaums sieht eher aus wie eine Krone mit 8 Zacken.



Das alles kannst du dir bereits leicht überlegen, wenn du bedenkst, dass ein Vollwinkel  $360^\circ$  hat und  $360^\circ : 4 = 90^\circ$ . Das heißt, der Stamm weist einen Winkel von  $90^\circ$  auf. Es entstehen Lücken, wenn die Spiegel nicht direkt am Stamm anliegen. Diese Lücken werden mitgespiegelt. Somit müssen auch die Spiegel in einem rechten Winkel zueinander stehen, damit mit Hilfe der Spiegel ein ganzer Baum entsteht.

### Blick in die höhere Mathematik

Diese Aufgabe basiert auf der Einteilung von Objekten in sogenannte Symmetriegruppen. Ohne Verschiebungen zu beachten, gibt es Drehsymmetrien und Spiegelsymmetrien.

Bei den Drehsymmetrien wird geschaut, um welche Teiler vom Vollwinkel man ein Objekt drehen muss, damit man wieder das ursprüngliche Bild erhält. Ein unsymmetrisches Objekt zum Beispiel muss man um  $360^\circ = 360^\circ : 1$  drehen, um es wieder in der gleichen Weise zu sehen (das ist die zyklische Gruppe  $C_1$ ), ein gleichseitiges Dreieck zum Beispiel sieht nach einer Drehung um  $120^\circ = 360^\circ : 3$  wieder gleich aus; es gehört also zur zyklischen Gruppe  $C_3$ .

Neben der Drehung kann zusätzlich auch die Achsenspiegelung betrachtet werden. Gruppen von spiegelsymmetrischen Objekten werden endliche Coxeter-Gruppen genannt.

Diese mathematische Theorie ist auch wichtig für angewandte Wissenschaften. Die Frage, ob man eine Ebene mit bestimmten Körpern lückenlos parkettieren kann, spielt in der Industrie eine wichtige Rolle (z.B. bei der Pflasterung von Bürgersteigen oder einer optimierten Materialnutzung). Auch in der Chemie findet diese Theorie eine Anwendung. Dort werden Strukturen von Molekülen und Kristallen untersucht. Eine Schneeflocke zum Beispiel hat die Symmetriegruppe eines regelmäßigen Sechsecks.

[Mathe im Advent](#)  
[Über Mathe im](#)  
[Advent](#)  
[Medien](#)  
[Archiv](#)

[Teilnehmen](#)  
[Aufgaben](#)  
[Regeln](#)  
[Förderer](#)

[Social Media](#)  
[Facebook](#)  
[Twitter](#)

[©2015 DMV](#)  
[Fragen](#)  
[Impressum](#)  
[Spenden](#)