

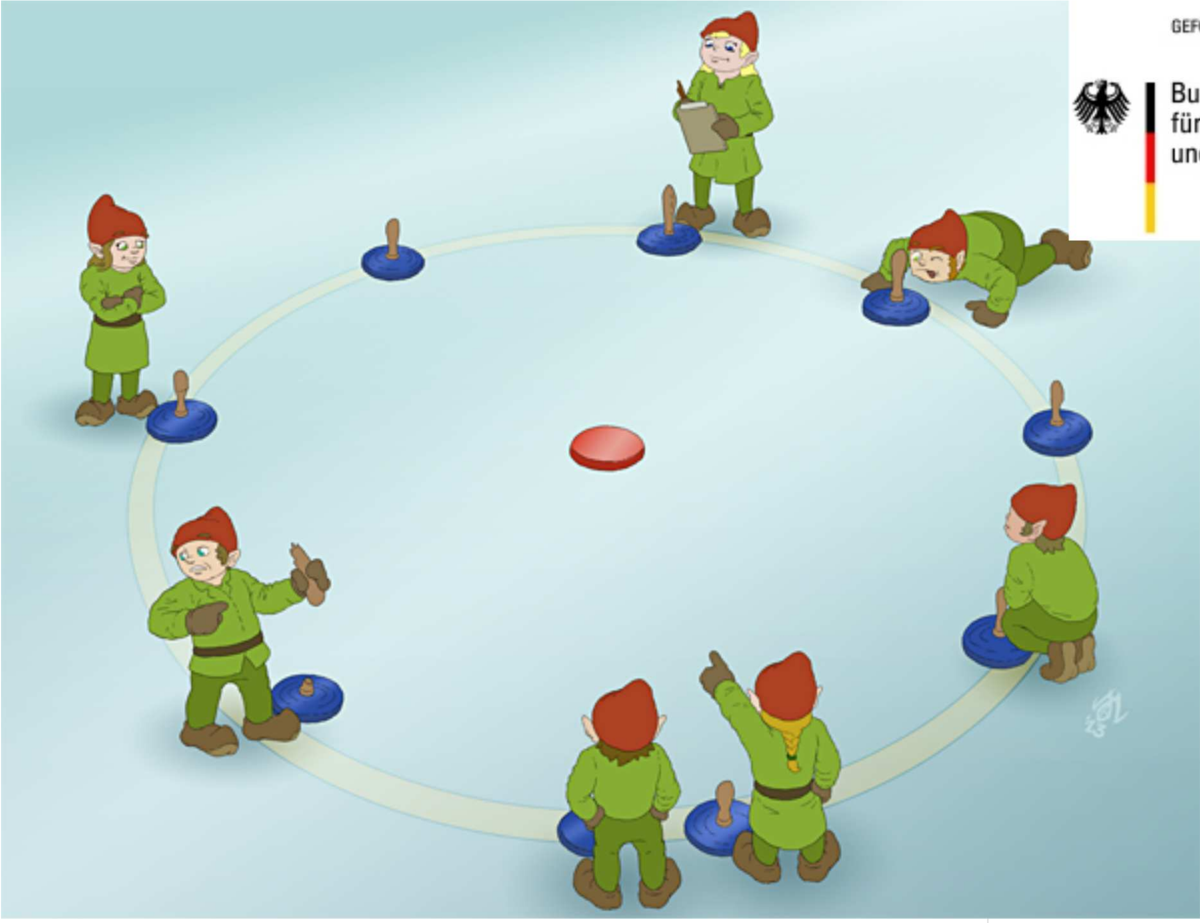

**Beispielaufgabe "Eisstockküsse" (Kalender 4-6, 2013)**

Heute findet traditionell der große Schlittschuhwettlauf der Wichtel statt. Im Rahmen der Veranstaltung finden noch weitere Wettbewerbe statt, damit sich noch mehr Wichtel sportlich betätigen können. Ein beliebter Wettbewerb ist das klassische Eisstockschießen.

Dabei müssen die Eisstöcke (kreisrunde blaue Scheiben mit Griff) über eine Eisfläche möglichst nah an eine rote Zielscheibe (ohne Griff) herangeschossen werden, wie du im Bild sehen kannst. Die rote Zielscheibe und die blauen Scheiben der Eisstöcke sind alle gleich groß. Die Teilnehmer stehen in gleichem Abstand im Kreis um die Zielscheibe herum. Auf Kommando lassen alle Wichtel gleichzeitig ihre Eisstöcke zum roten Zielscheibe gleiten. Es gewinnt der Eisstock, der am nächsten an der Zielscheibe liegen bleibt.

Während der Planung des Eisstockschießens unterhalten sich Orlandie und Albert. Orlandie meint: „Ich bin gespannt, ob mal ein Eisstock direkt an der roten Zielscheibe liegen bleibt.“ „Das kann natürlich passieren“, antwortet Albert. „Es könnte theoretisch sogar passieren, dass mehrere Eisstöcke so liegen bleiben, dass sie gleichzeitig die Zielscheibe berühren.“

Wie viele der Eisstöcke könnten theoretisch gleichzeitig die rote Zielscheibe berühren?



a) höchstens 7

b) höchstens 6

c) höchstens 5

d) höchstens 4

**Diese Aufgabe wurde vorgeschlagen von:**

Mathe-im-Advent–Team

Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV)

[https://dmv.mathematik.de](https://dmv.mathematik.de)

Lösung verbergen

**Antwortmöglichkeit b) ist richtig: Es können höchstens 6 Eisstöcke die Zielscheibe gleichzeitig berühren.**

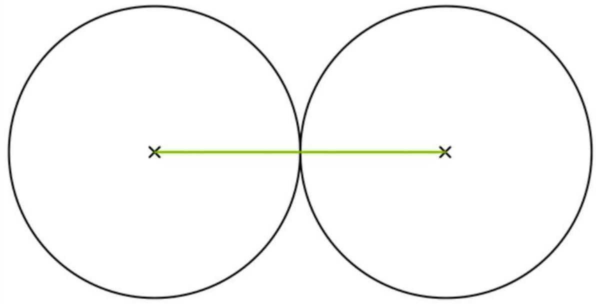
<u>Lösungsmöglichkeit 1</u>: Ausprobieren

Am einfachsten lässt sich diese Aufgabe durch Ausprobieren lösen.

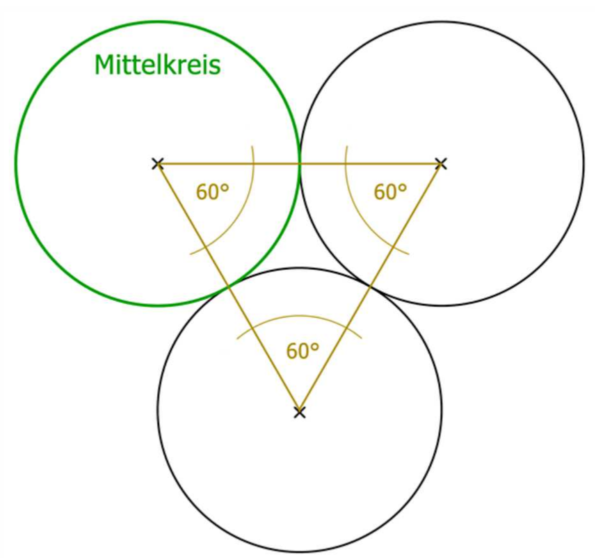
Nimm dazu gleich große Münzen oder Spielsteine (z.B. Mühlesteine oder Backgammonsteine), von denen du einen in die Mitte legst und so viele wie möglich darum herum. Du wirst feststellen, dass höchstens 6 Kreise (bzw. Münzen oder Spielsteine) die „Zielscheibe“ in der Mitte gleichzeitig berühren können. Vergleich dazu das Bild unten.

Lösungsmöglichkeit 2: geometrische Überlegungen

Du kannst das Problem auch geometrisch lösen. Den kürzesten Abstand zwischen dem Mittelpunkt eines Kreises und seinem *Umfang* nennt man den *Radius*. Wenn du nun zwei gleich große Kreise aneinanderlegst, ist der Abstand der Mittelpunkte genau doppelt so groß wie der Radius der Kreise:

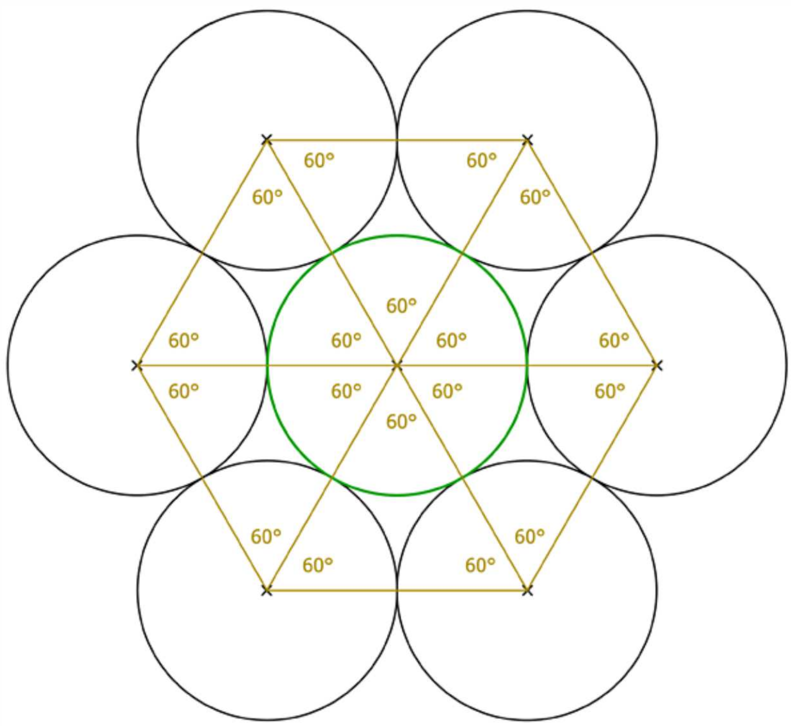


Du kannst jetzt einen dieser beiden Kreise als Mittelkreis bestimmen. Der andere ist dann der erste Kreis, der ihn berührt. Wenn nun ein dritter Kreis an die anderen beiden Kreise gelegt wird, sieht das so aus:




Du siehst, dass die Überlegung für den Abstand zweier Mittelpunkte für alle Kreise gilt. Daher bilden die drei Mittelpunkte der drei Kreise ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten. Es handelt sich also um ein gleichseitiges Dreieck. In diesem Dreieck gilt außerdem, dass alle Winkel gleich groß sind. Da die Summe aller Winkel im Dreieck immer 180° ist, sind die drei Winkel jeweils 180° : 3 = 60° groß.

Wenn du nun immer mehr Kreise um den Mittelpunkt legst, entstehen immer mehr dieser Dreiecke. Und für alle gilt dasselbe: Sie sind gleichseitig und weisen nur 60°-Winkel auf. Vor allem gilt, dass bei allen Dreiecken der Winkel, der im mittleren Kreis liegt, 60° groß ist. Da der volle Winkel eines Kreises genau 360° groß ist, passen genau 360°: 60° = 6 gleich große gleichseitige Dreiecke im Kreis angeordnet aneinander – und damit auch genau 6 Kreise um den mittleren Kreis:




**Mathematische Exkursion**

Die richtige Lösung, die Zahl 6, hat in diesem Zusammenhang in der Mathematik einen besonders schönen Namen: Man nennt sie die Kusszahl. Sie heißt so, weil sie die Anzahl der gleich großen Kreise wiedergibt, die einen anderen gleich großen Kreis berühren, also sozusagen küssen können. Diese Zahl gibt es nicht nur für die zweidimensionale Ebene, sondern auch für den dreidimensionalen Raum. Dann werden nicht Kreise, sondern Kugeln betrachtet. Die Frage lautet dann: Wie viele gleich große Kugeln können eine weitere gleich große Kugel gleichzeitig berühren? Diese Frage ist nicht so einfach zu beantworten: Die Mathematiker Isaac Newton und David Gregory haben sich im 17. Jahrhundert darüber gestritten, ob die richtige Kusszahl für Kugeln die 12 oder die 13 ist. Erst im 20. Jahrhundert konnte bewiesen werden, dass Newton Recht hatte: Es ist die 12. Mathematiker gehen sogar soweit, nicht nur die zweidimensionale Ebene und den dreidimensionalen Raum, sondern auch noch Räume mit mehreren Dimensionen zu betrachten. Das sind dann Räume, die wir uns nicht mehr so einfach vorstellen können. Und auch die Kusszahlen für die meisten dieser Räume sind bis heute zwar eingegrenzt, aber nicht genau bestimmt worden.

Es gibt in der Mathematik noch ein weiteres Problem zur Anordnung von Kugeln, das der dichtesten Kugelpackung. Dabei geht es dann nicht wie bei der Kusszahl um die Frage, wie viele Kugeln eine andere Kugel berühren können, sondern um die Frage, wie viele Kugeln einen Raum mit möglichst kleinen Lücken ausfüllen können. Dieses Problem kannst du dir beispielsweise mit Orangen veranschaulichen, die auf dem Markt in einer Kiste gestapelt sind. Wenn du nach Möglichkeiten zur dichtesten Anordnung von Kugeln suchst, stößt du dabei wieder auf die Kusszahl: Bei allen möglichen dichtesten Anordnungen berührt jede Kugel 12 andere Kugeln.

Wie die Kusszahl für den dreidimensionalen Raum ist auch dieses Problem ein wunderbares Beispiel dafür, dass mathematische Vermutungen manchmal ganz lange auf ihren Beweis warten müssen. Zufälligerweise wurde auch zu diesem Problem schon im 17. Jahrhundert die richtige Vermutung aufgestellt (und zwar von Johannes Kepler), aber erst im 20. Jahrhundert der Beweis geliefert, und zwar 1998 von Thomas Hales mithilfe eines Computers. Und dieser Beweis wird noch nicht einmal von allen Mathematikern akzeptiert.