

1. Railroad

먼저, 각 구역 내에서 가능한 경우의 수들을 구한다. n 개의 철도 R 들이 순서대로 줄을 서 있다고 가정할 때, 맨 앞이나 맨 뒤에서 꺼내는 2개의 경우가 있고, 둘 중 하나를 꺼내게 되면 $(n-1)$ 개의 철도들이 줄을 서 있는 게 되므로 점화식을 풀면 $2^{(n-1)}$ 개의 경우의 수가 있다. 따라서, 각 구역 내에서의 가능한 모든 경우의 수는 $2^{\sum_{i=1}^n a_i} - n$ 개가 된다. 한편, 서로 다른 구역들을 오가며 공사할 수 있으므로 이 경우 역시 고려해 주어야 한다. 이미 각 구역 내에서의 공사 순서는 위의 경우의 수만큼 구해 졌으므로, 그 순서에 따라 줄을 서 있다고 가정한다. 이때 문제는 이미 순서대로 줄 서 있는 철도들의 줄을 합치는 경우의 수이다. 먼저, 첫 번째 구역의 철도들을 기준으로 하면 맨 앞 철도의 앞과 맨 뒤 철도의 뒤를 포함하여 a_1+1 개의 자리가 있고, 이 자리에 a_2 개의 철도를 그들의 원래 순서를 유지하면서 배치하면 된다. 이 작업을 모든 구역에 대해서 반복해야 하므로, 이 경우의 수들을 정리한 표를 미리 만든 후 매 구역을 합칠 때 마다 표의 값을 참조해서 계속 곱해 주면 된다. 이 경우의 수를 정리한 표를 만들 때는,

- i 명의 사람을 1 곳에 배치하는 경우의 수 $B(i, 1) = 1$
- 1 명의 사람을 i 곳에 배치하는 경우의 수 $B(1, i) = i$
- i 명의 사람을 j 곳에 배치하는 경우의 수 $B(i, j) = B(i-1, j) + B(i, j-1)$

임을 활용하면 된다. 또, 표의 i 인덱스는 가장 큰 a_i 까지, 그리고 j 인덱스는 a_i 들의 총 합에서 가장 작은 a_i 를 뺀 것 까지 만들면 된다.

2. Cake

포함-배제 원리를 활용해서 부피를 계속해서 곱하거나 빼주면 된다. 먼저, $c \leq \min(a_i)$ 인 경우에는 칼로 인해 잘린 $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq c$ 영역의 부피만을 계산하면 되고, 적분을 통해 일반화하면 분모에 $n!$ 이 가므로 자연스럽게 c^n 을 구해주면 된다. 이 외의 경우에는, 칼이 감싸는 $x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq c$ 영역의 부피를 구한 후, 케이크 외부의 부피를 빼 주면 되는데, 이 때 2차원일 경우에는 c 에서 각 변을 뺀 길이를 길이가 같은 변으로 하는 직각이등변삼각형의 넓이 만큼 빼 주면 되지만, 3차원에서는 c 에서 각 변을 뺀 길이를 모선의 길이로 하는 삼각뿔의 부피를 빼 주게 될 경우에는 중복해서 빼지는 영역이 생긴다. 이 영역을 다시 더해줘야 하는데, 이 영역이 생기는 경우는 케이크의 두 변의 길이의 합이 c 보다 작은 경우 그 차만큼을 모선의 길이로 하는 삼각뿔이 생기게 되므로, 그 부피를 다시 빼 주면 된다. 4차원일 때는 위의 경우와 마찬가지로 한 후 다시 중복으로 뺀 부분을 더해줘야 한다. 이와 같은 방식으로 22차원까지 계속 더하고 빼고를 반복하면 된다. 이 때, 케이크의 n 개의 변 중에서 k 개의 합이 c 보다 작은지를 검사하여 같으면 홀수 k 에 대해서는 더하고, 짝수 k 에 대해서는 빼는 방식으로 해야 한다. k 는 2부터 케이크의 차원-1까지 모든 경우에 대해 다루어야 한다. 이 때, 가능한 조합의 수가 매우 커 질 수 있으므로 중간에 c 보다 커지는 경우가 확실시될 경우 그 가지를 pruning 해 주어야 한다.