

Скорость и время скатывания шарика в зависимости от траектории его движения

Андрей Константинович Вешняков

8 класс МБОУ Лицей № 87

Научный руководитель

ИПФ РАН Татьяна Александровна Хабарова

Шарик, скатываясь с наклонной поверхности, приобретает поступательное и вращательное движение. Я изучал характеристики движения шара (скорость, время) по наклонным траекториям. Серия натурных испытаний скатывания по нескольким кривым с разных высот шариков разных размеров и масс и численное повторение их на созданной математической модели.

Визуальные наблюдения и по кадровый анализ видеозаписи показали, а численные эксперименты подтвердили, что продолжительность скатывания шарика зависит от траектории и не зависит от массы шарика. Построена оптимальная траектория – брахистохрона.



1. И в наше время не редки наивные заблуждения, начинающих изучать физику, основанные на впечатлениях. Например, тело с большей массой должно падать быстрее т.к. сила его притяжения к земле больше. Или увеличение продолжительности скатывания шара по пологой поверхности заставляет думать, что его конечная скорость меньше чем она была бы при скатывании по крутой поверхности с той же высоты. Помимо перечисленных выше не явных фактов для "новичков", здесь есть еще более серьезная задача – движение по брахистохроне [1].

2. Мною была проделана серия экспериментов – скатывание с разных высот по различным траекториям (наклонная прямая, циклоида, гипербола и выпуклая поверхность) шариков разных масс и диаметров. Параметры движения вычислялись, в основном, посредством покадрового анализа видеозаписи эксперимента. Погрешность измерения времени не превышает продолжительность двух кадров $2/30 \text{ с} \approx 0,07 \text{ с}$, а погрешность вычисления скорости ($0,2 \text{ м/с}$) практически определяется точностью фиксации смещения шара на соседних видеокадрах (меньше половины диаметра шара). Погрешность конечной скорости, измеренной оптоэлектрическим датчиком, составляет 100 %, поскольку зафиксированные им показания ($0,01 \text{ с}$) соответствуют его наименьшей измеряемой величине.

Результаты выполненных экспериментов приведены в таблице 1, по ним были сделаны следующие выводы:

- прямая наклонная поверхность, которая характеризуется самой короткой траекторией, не обеспечивает наименьшее время скатывания шарика из начальной точки в конечную. Наиболее оптимальной с этой точки зрения оказалась циклоида, за ней в порядке возрастания времени следуют гипербола, прямая и выпуклая поверхность;

- для всех траекторий независимо от их формы конечная скорость шарика оказалась одинаковой. Более того, эта скорость не зависит от размеров и массы шарика (расхождения значений обусловлено большой погрешностью измерения оптоэлектрическим датчиком);

- достаточно неожиданным оказалось, что время скатывания шарика по циклоиде с разных участков её траектории (из начальной – самой верхней, и нескольких промежуточных) одинаково, не смотря на то, что протяжённости участков траектории существенно отличаются.

Табл. 1 – Результаты лабораторного эксперимента

Наименование величины	Половина циклоиды	Гипербола	Прямая	Выпуклая
Время скатывания, с	0,5	0,53	0,6	-
Место на финише	1	2	3	4
Конечная скорость большого шара, м/с (видео/датчик)	1,8/1,7	1,8/1,7	1,8/1,7	-/1,7
Конечная скорость малого шара, м/с (датчик)	0,85	0,85	0,85	0,85

3. Для объяснения полученных результатов были выполнены расчетные исследования.

3.1. При нахождении шара на наклонной поверхности реакция опоры компенсирует лишь часть силы гравитации, не скомпенсированная часть направлена вдоль поверхности и вызывает

движение шара по ней. При этом движение шара не является поступательным. Благодаря силе трения покоя, которая приложена к шару в точке его касания с поверхностью и направлена в сторону, противоположную движению, возникает момент, который придает шару ещё и вращательное движение.

В итоге, потенциальная энергия, которой обладал шар, находясь в начальной (верхней) точке траектории, переходит, по мере скатывания вниз по траектории, в кинетическую энергию вращательного и поступательного движения.

Причем, как это хорошо видно из уравнения сохранения энергии [2], кинетическая энергия шара на всём протяжении своего движения по наклонной кривой, а, следовательно, и скорость его движения определяется разностью высот между начальным и текущим положением шара.

$$mgh = \frac{mV^2}{2} + \frac{mV^2}{5} = \frac{7}{10}mV^2$$
 Таким образом, конечная скорость шара на “финише” не зависит от формы траектории, размера и массы шара.

3.2. Чтобы перейти к вопросу поиска траектории, наиболее оптимальной с точки зрения минимизации времени скатывания шарика из одной точки в другую, я рассмотрел следующую задачу.

Перемещение шара из точки А в точку В поочерёдно через множество точек С, имеющих разные координаты (рисунок 1). Далее, посчитав время скатывания по каждой траектории, я определил траекторию с минимальным значением. Оказалось, что максимальный излом между прямолинейными траекториями на 1 и 2 этапах реализуется в условиях, когда тело начинает движение из состояния покоя. По мере увеличения начальной скорости кривизна траектории уменьшается и в итоге становится прямой.

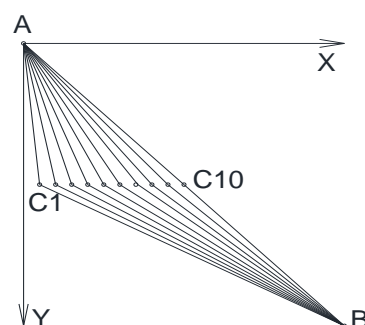


Рис 1 – Движение по ломаной кривой

3.3. Для вычисления оптимальной траектории я провёл численный эксперимент, используя для этого компьютерную модель.

В компьютерной модели были заложены все существенные для эксперимента зависимости, в нашем случае – кинематические законы движения тела по наклонной поверхности и закон сохранения энергии. Модель включала начальные, конечные и другие граничные условия.

Весь процесс скатывания шарика по криволинейной траектории был разбит на большое количество маленьких участков, движение на каждом из которых можно считать прямолинейным.

Задача поиска оптимальной кривой свелась к многократному (итерационному) расчёту задачи, которая была рассмотрена выше (п. 3.2). На каждом шаге был реализован алгоритм выбора наиболее оптимального наклона кривой (рисунок 2).

Полученная кривая является брахистохроной [3], поскольку её траектория полностью совпадает с частью циклоиды – кривой, которая описывает движение точки, находящейся на поверхности круга, при качении данного круга по прямой поверхности (рисунок 3).

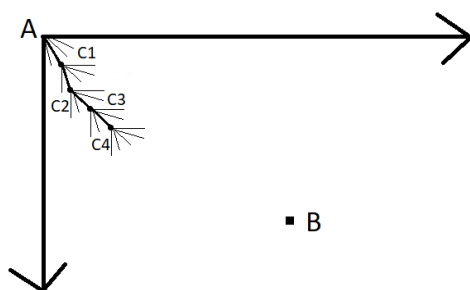


Рис 2 – Поиск оптимальной траектории

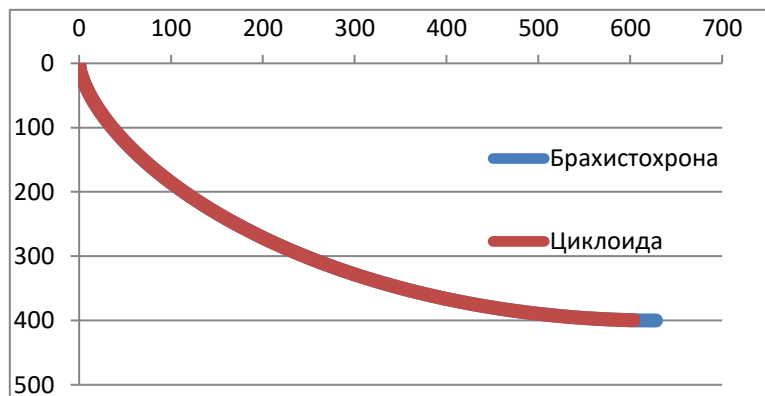


Рис 3 – Наложение циклоиды и брахистохроны

Если соотношение длины и высоты кривой равно $\frac{\pi}{2}$ брахистохрона начинается строго вертикально, а заканчивается строго горизонтально – половина циклоиды. Если указанное соотношение больше, то оптимальной с точки зрения быстрого достижения конечной точки является циклоида, траектория которой опускается ниже конечной точки, поскольку для скорейшего преодоления больших горизонтальных расстояний выгоднее набрать большую скорость на основном участке пути, несмотря на увеличение длины траектории. В пределе шар может перемещаться между точками, находящимися на одной высоте.

3.4. Вторая серия численных экспериментов заключалась в расчетах движения шарика по траекториям (рисунок 4), которые были использованы в натурных экспериментах – прямая, гипербола и циклоида (вместо брахистохроны). Для построения циклоиды было смоделировано движение точки [4] на поверхности круга.

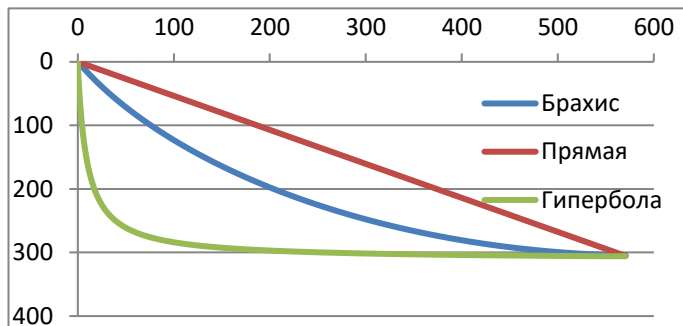


Рис 4 – Траектории для численного эксперимента

Для каждой кривой были определены скорость шарика на каждой итерации, время скатывания и общая длина траектории. Кроме того, для каждой кривой дополнительно рассмотрены варианты скатывания шарика из промежуточных положений (с высоты 200 и 100 мм).

4. Результаты численных экспериментов (таблица 2) хорошо согласуются с натурными испытаниями и подтверждают все наблюдения:

- наиболее оптимальной кривой является брахистохрона;
- конечная скорость шарика зависит только от высоты траектории и не зависит от её формы и массы шарика;
- время скатывания из любой точки брахистохроны одинаково.

Табл. 2 – Результаты численного эксперимента

Наименование параметра	Брахистохрона (Циклоида)			Гипербола			Прямая		
	305	200	100	305	200	100	305	200	100
Конечная скорость, мм/с	2086	1689	1193	2090	1697	1207	2088	1692	1198
Путь, мм	674	541	375	799	694	593	647	425	213
Время, с	0,52	0,51	0,50	0,53	0,53	0,60	0,62	0,50	0,36

В рамках данной работы предложен также способ расчета сложной кривой – брахистохронны с помощью компьютерной модели на основе законов кинематики (без использования сложного математического аппарата с использованием дифференциального исчисления).

Литература

1. С.Г. Гиндикин «Рассказы о физиках и математиках» Москва. Из-во. МЦНМО – 4-е издание. 2006.
2. <https://sites.google.com/site/zakonifizika/home/zakony-sohranenia-energii>
3. [Оптимизация. Обзор методов \(statistica.ru\)](http://statistica.ru)
4. [Рассказ седьмой. Брахистохрона \[1986 Тихонов В.М. - Рассказы о максимумах и минимумах\] \(mathemlib.ru\)](http://mathemlib.ru)