Проблемы Гольдбаха и Теорема о распределении простых чисел. Как достичь наибольшей точности?

Горячев Святослав Андреевич
10 класс ,МБОУ «Лицей №40»
Научный руководитель Ю. А. Кузнецова,
Учитель МБОУ «Лицей №40»

В данной работе проведен сравнительный анализ тернарной и бинарной проблем Гольдбаха и Теоремы о распределении простых чисел Гаусса в эффективности поиска простых чисел и решения задач. Для более наглядного сравнения точностей теорем на основе компьютерных алгоритмов на языке PascalABC были построены множества точек с координатами чисел, которые удалось найти с помощью каждой из теорем. Множества точек представляют интерес для изучения поведения простых чисел на больших промежутках.

Простые числа всегда были неизведанной частью теории чисел. Многие ученые старались внести свой вклад в эту область математики, продвинуть ее вперед. Начало развитию этой области дали известные математики древности Евклид и Эратосфен [3]. Особое внимание привлекает именно Эратосфен, так как он является создателем решета Эратосфена - простейшего алгоритма поиска простых чисел. Но наука о числе не стоит на месте. Одним из следующих важнейших оказался вклад Гольдбаха и Эйлера. Они высказали предположения о свойствах простых чисел, в последствии названные тернарной и бинарной проблем Гольдбаха [3].

Тернарная проблема Гольдбаха. Каждое нечётное число больше 5 можно представить в виде суммы трёх простых чисел.

Бинарная проблема Гольдбаха(проблема Эйлера). Каждое чётное число больше 2 можно представить в виде суммы двух простых чисел. Параллельно с Гольдбахом и Эйлером французский математик Иоганн Карл Фридрих Гаусс нашел интересную связь простых чисел и натурального логарифма [3]. Гаусс выяснил, что настоящее количество простых чисел в промежутке от 1 до n примерно равно отношению x к ln(x) (оценочное число простых чисел), причем при увеличении x они становятся примерно равны. То есть чем больше число, тем выше точность, она приближается к 1.

$lim\,\pi(x)/(x/In(x))=1$

При $x - \infty$, «-» обозначает стремится.

Итак, можно сказать, что именно поиск простых чисел и соотвествующие алгоритмы всегда представляли интерес и не потеряли свою актуальность, поскольку формулы нахождения простого числа еще нет. При наличии сравнительного анализа проблем Гольдбаха и математических решет [1],[5] в эффективности поиска простых чисел, сделанного до данного исследования, демонстрирующего удобство проблем Гольдбаха перед последними, появился смысл в проведении нового исследования, но уже не с решетами. А именно сравнительного анализа проблем Гольдбаха и Теоремы о распределении простых чисел в точности поиска простых чисел и эффективности решения задач.

Бинарная проблема Гольдбаха.

Самое хорошее сравнение - наглядное, поэтому были построены демонстрационные множества точек. На оси x были отложены четные числа, а на оси y отношение количества простых чисел, найденных программой, к настоящему числу простых чисел, стоящих до данного числа, по бинарной проблеме Гольдбаха. Например, четное число 14, до него стоит 6 простых чисел, проблеме Гольдбаха соответствуют только 3. Смотрим отношение 3 к 6. И так для всех четных чисел. Получилась множество точек, где нет какой-то зависимости, и все точки стоят хаотично, варьируясь от 0,1 до 0,8 (точность от 10% до 80%), ниже приведены скриншоты этого множества точек на разных промежутках. Основано на алгоритме разложения числа на простую сумму. Рисунок №1. Была использована бинарная проблема Гольдбаха, а не тернарная из-за сложности написания соответствующего алгоритма.

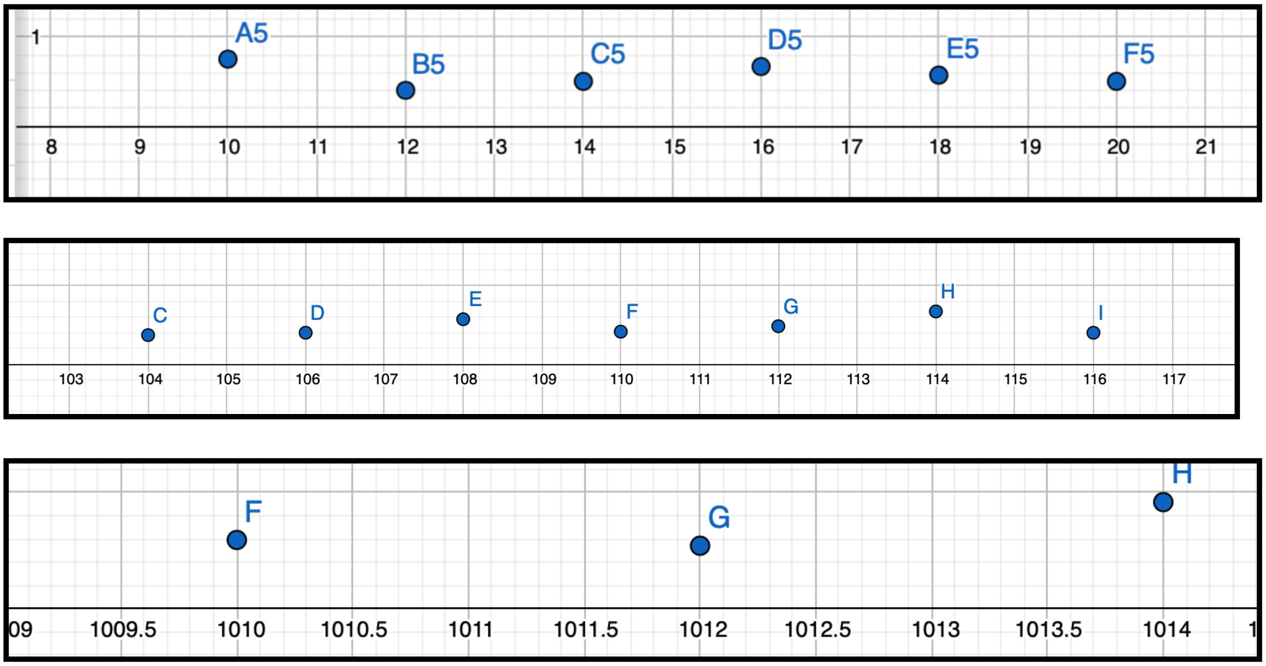

Рисунок №1. Мое множество,
на разных промежутках:

1) от 10 до 20
2) от 104 до 116

Теорема о распределении простых чисел.

Ниже приведены графики π(x), где по оси x откладывается число, а по оси y количество простых чисел до соответствующего числа их x. Второй график - это отношение x к ln(x), который, как заметил Гаусс, примерно равен π(x). Рисунок №2.

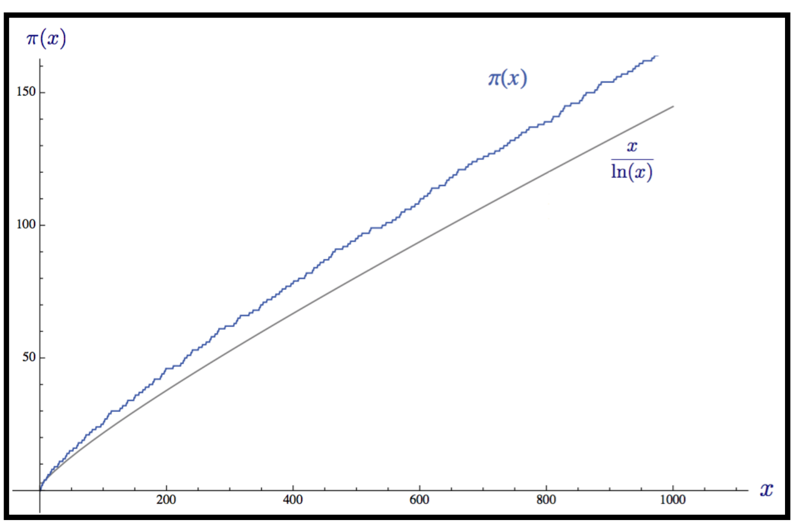

Рисунок №2, теорема Гаусса, показаны два графика, отношения значений которых я рассматриваю

А также множество точек, отношение π(x) к x/1n(x). Оно стремится к единице при увеличении x, но при этом еще немного колеблется [3]. Оно более точное, чем предыдущий для проблем Гольдбаха. Рисунок №3. С помощью двух этих множеств точек и производилось сравнение, так как они являются графической интерпретацией точности.

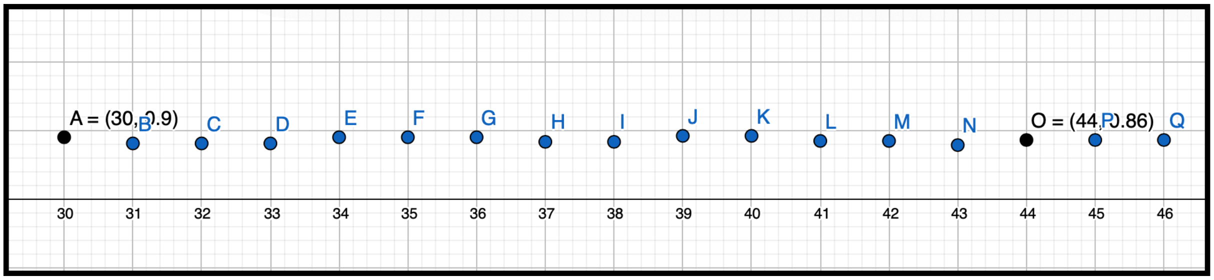

Рисунок №3. Мое множествона промежутке от 30 до 46.

Для более высокой точности построения множеств точек и автоматизации процесса были написаны алгоритмы на языке PascalABC, которые определяют количество простых чисел на заданном промежутке в соответствии с разными теоремами и определяют точность этого поиска. А также решены разные прикладные задачи для демонстрации эффективности и применимости теорем и их алгоритмов в повседневности [2],[4].

Произведенные исследования позволили сравнить две теоремы из теории чисел. Получилось, что каждая из них имеет преимущества и недостатки перед другой. Точность в оценке количества простых чисел у Теоремы Гаусса выше, чем у проблем Гольдбаха, что видно из множеств точек. Поэтому для решения задач, где нужно оценить количество, она подходит больше. Однако Гауссовская теорема не дает нам представлений о том, какие это числа, в отличие от проблем Гольдбаха. То есть, известно их приблизительное количество, но не значение самих чисел. А вот проблемы Гольдбаха дают нам все эти числа, но имеют более низкую точность. Соотвественно, проблемы Гольдбаха применимы для более широкого круга задач, так как чаще используются сами числа, а не их количество.

В ходе выполнения работы было высказано предположение о поведении множества точек для бинарной проблемы Гольдбаха на более больших промежутках. Имеется ли какой-нибудь период или закономерность? Особый интерес представляет тот факт, что множество точек с координатами, равными какому-либо отношению еще не сильно изучены. В планах для будущей исследовательской деятельности произвести анализ множества точек бинарной проблемы Гольдбаха, а также написать программу и проделать такую же операцию для тернарной проблемы Гольдбаха. Конечно, тернарная проблема Гольдбаха уже доказана, но бинарная доказана лишь для достаточно большого числа, поэтому есть смысл в поиске взаимосвязей вышеприведенных графиков и доказательства этой теоремы. Также в дальнейшем необходимо заняться исследованием новых методов поиска простых чисел и выявить наиболее точные и удобные.

Список литературы.

1) Бухсштаб А. А. Теория чисел - Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, Москва 1960.
2) Виленкин Н. Я., Ивашев-Мугатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учебник для учащихся общеобразовательных организаций (углубленный уровень). - 19-е изд., стер.-М.: Мнемоника, 2015. - 352 с.
3) Грасиан Э. Простые числа. Долгая дорога к бесконечности. Мир математики: в 40 т. Пер. с англ. - М.: Де Агостини, 2014. - 144с.
4) Мерзляк А. Г., Поляков В.М. Алгебра : 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций. - М. : Вентана-Граф, 2018. - 384 с.
5) Строгац С. Удовольствие от х. Увлекательное путешествие в мир математики от одного из лучших преподавателей в мире апер. С англ. - М. : Манн, Иванов и Фербер, 2014. - 304 с