Недианы треугольника и их свойства

Кудряшова Ирина Игоревна
10 "Б" класс, МБОУ "Лицей" г. Арзамаса
Руководитель:
Научный руководитель: Т.В. Зуйкова
учитель математики МБОУ "Лицей"

Работа посвящена изучению свойств недиан треугольника и точек их пересечения. Составлено первое русскоязычное определение недиан треугольника, изучены свойства точек их пересечения. Рассмотрены основные свойства фигур, образованных недианами, получены соотношения площадей недиановых треугольников, четырёхугольников и шестиугольников. Составлены программы для создания изображений недиан треугольника и вычисления площади недианова шестиугольника на языке программирования Python. Создана страница, посвященная недианам треугольника, в Википедии.

Основоположником развития геометрии треугольника стал выдающийся российский математик Леонард Эйлер (60−70-ее годы XVIII века). Работы, которые написал Л. Эйлер стали основой огромного числа исследований в области геометрии треугольника. В существующей энциклопедии центров треугольника (англ. *ETC*) упоминается около 50 000 замечательных точек треугольника [1]. Однако, школьная планиметрия знакомит учащихся лишь с четырьмя замечательными точками треугольника, которые получаются в результате взаимного пересечения замечательных прямых: медиан, высот, биссектрис и серединных перпендикуляров. В данной работе мы изучим и исследуем термин, который невозможно найти в открытых источниках, кроме того, эта замечательная прямая до сих пор не упоминалась ни в одном русскоязычном источнике.

Термин "недиана" (англ. nedian) упоминается в работах Д. Саттерли (John Satterly) в 50-х годах XX века. Будучи преподавателем математики Кембриджского университета он разметил несколько статей в журнале "The Mathematical Gazette" [3], которые были посвящены определению центров тяжести недианова шестиугольника (nedian hexagon) и треугольника (упоминается в 1936 г. Н. Алистоном) [5].

Изучив первоисточники, мы пришли к выводу, что единичные работы американских ученых-педагогов не раскрывают всех геометрических свойств недиан, как уникального феномена элементарной геометрии. Вторая проблема заключается в полном отсутствии отечественных исследований в данной области.

В связи с чем определяется *цель исследования*: изучив феномен "недиана", расширить сведения элементарной геометрии треугольника свойствами замечательных прямых (недиан) и точек их пересечения.

Термин "*недиана*" треугольника (англ. nedian) упоминается в работах Д. Саттерли (1954−57 гг.) и Н. Алистона (1936 г.) [3; 5; 6]. Однако чёткого определения данного понятия у авторов нет. Оно задаётся описанием: "If the sides of the triangle are, in order, divided such that the short section of each side is $1/n^{\text{th}}$ the length of side ... may be called *Nedians of the triangle* (the name recalls of *n*) ... Putting $n=2$ gives ... the medians" [3, С. 111]. Таким образом, становится понятно, что в основе термина "недиана" заложены два понятия: "n" − число, которое задаёт отношение отсекаемого отрезка от стороны треугольника, ко всей длине стороны и "dian" − составляющая определения медианы, отрезок соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

Сформулируем определение термина "*недиана треугольника*".

Определение 1. *Недианы треугольника* (англ. nedian) − чевианы, соединяющие вершину треугольника и точки противолежащей стороны, которые отстоят на $1/n$ длины от её концов.

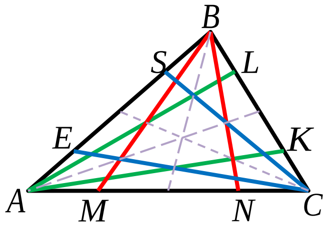

Рис. 1

Таким образом, число n конкретизирует название недианы. Например, при $n=2$ чевиана, соединяющая вершину и середину противоположной стороны, становится медианой, при $n=5$ − пентадианой и т.д. По определению недианы, $AM : AC = NC : AC = 1 : n$ (см. рис. 1). Передними недианами Д. Саттерли называет те, что идут первыми, при обходе треугольника ABC против часовой стрелки (AK, CS и BM), к задним недианам относит AL, CE и BN [6, С. 289]. При взаимном пересечении трёх передних или задних недиан образуется треугольник (nedian triangle).

Разобьём все недианы на две группы по их расположению от противоположной вершины треугольника: *нижние и верхние*.

Определение 2. Пусть недианы, выходящие из одной вершины, называются *смежными*, а выходящие из разных вершин – *противоположными.*

Определение 3. Две противоположные недианы назовём *верхними,* если они пересекаются ближе к третьей вершине треугольника (например, AL и CS при вершине B). Тогда *нижними* называются противоположные *недианы*, пересекающиеся дальше от третьей вершины треугольника (AK и CN).

Свойство №1: В любом треугольнике, точки пересечения нижних и верхних недиан лежат на медиане и делят её в отношении $2(2n-1):2n(n-2):(n+1)$, считая от вершины.

Последовательно ставя перед собой задачи, мы получили второе свойство недиан треугольника, а также нашли соотношение площадей четырёхугольников, образованных парами нижних и верхних недиан и площади исходного треугольника: $\frac{S_{AC_1OB_1}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2}{n(n+1)}$ для верхних недиан (см. рис. 2) и $\frac{S_{BEO_1K}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2(n-1)^2}{n(2n-1)}$ – для нижних.

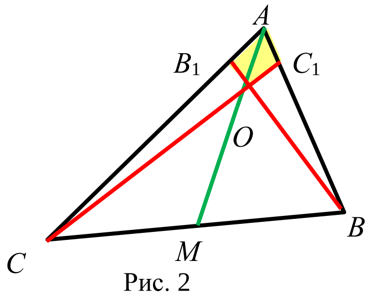

Рис. 2

Свойство №2: Пары нижних (верхних) недиан отсекают от треугольника равновеликие четырёхугольники и треугольники, которые медианой в свою очередь разбиваются на равновеликие треугольники.

При $n>2$ в любом треугольнике можно провести шесть недиан. Точки пересечения каждой пары верхних и нижних недиан образуют шестиугольник $ZXTSOL$ (см. рис. 3). Именно центру масс такого шестиугольника посвящена работа Д. Саттерли [3].

Определение 4. Недианов шестиугольник – шестиугольник, вершины которого расположены в точках пересечения пар верхних и нижних недиан треугольника.

Следствие 1. Вершины недианова шестиугольника лежат на медианах треугольника (из свойства №1).

Недианов шестиугольник имеет площадь S, которая относится к площади исходного треугольника:

$$\frac{S}{S_{\Delta ABC}}=\frac{2(n-2)^2}{(2n-1)(n+1)}.$$

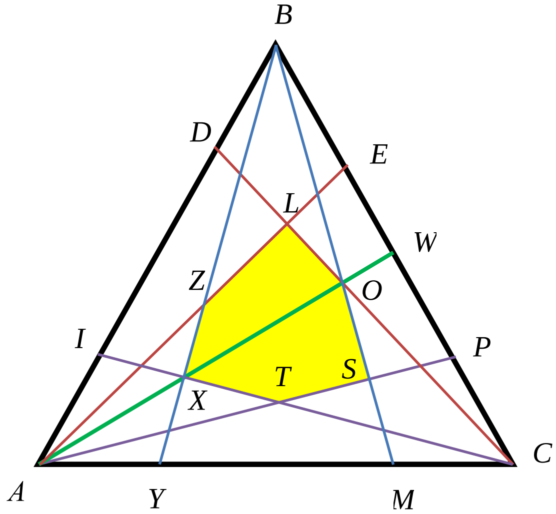

Рис. 3

Для создания изображения треугольника и его недиан использован язык программирования Python. На своде необходимо задать координаты вершин треугольника и заданное отношение для оснований недиан. Рисунок по заданным точкам выполняется с помощью библиотеки matplotlib, предназначенной для разработки двумерных графиков.

Для написания программного кода для нахождения площади недианова шестиугольника будем использовать два способа: абсолютное значение, которое получаем, используя найдённую формулу, и практическое значение (получено по координатам вершин шестиугольника). Координаты вершин недианова шестиугольника будем находить, используя свойство №1.

Нахождение площади недианова шестиугольника двумя различными способами даёт нам два незначительно отличающихся числа. Чтобы найти среднее значение абсолютной погрешности полученных измерений, проведём 400 испытаний: зафиксируем случайным образом 20 треугольников, затем зададим 20 последовательных значений n. Для каждой пары найдённых значений площади недианова шестиугольника найдём разность абсолютной и практической площадей. Отметим, что расхождения идут в −16 порядке. Найдём среднее значение абсолютной погрешности в каждом треугольнике и общее среднее значение. Получим, что общее среднее значение абсолютной погрешности всех измерений составляет $\Delta_{cp} = -513{,}9 \cdot 10^{-16}$. То есть, в среднем площадь шестиугольника, вычисляемая с помощью программного алгоритма, находится с излишком.

В результате работы автором:

- проведена этимология термина "недиана треугольника" и "недианов шестиугольник". Изучены первоисточники, сформулировано русскоязычное определение недианы треугольника и недианова шестиугольника;
- недианы треугольника разбиты на виды в зависимости их расположения от вершин и сторон треугольника. Введены определения для нижних и верхних недиан;
- определены основные свойства точек пересечения недиан и площадей фигур, которые получаются при разбиении треугольника недианами (треугольников, четырёхугольников и шестиугольника). Получены соотношения для разбиения медианы треугольника недианами, а также соотношения, показывающие отношение площадей недиановых фигур к площади исходного треугольника;
- создан программный код на языке Python, который позволяет построить изображение треугольника и его недиан, по его координатам и значению n, также с помощью этой программы получены значения площадей недианова шестиугольника двумя способами: по заданной формуле и через программный алгоритм;
- проведены испытания работы программы и определена абсолютная средняя погрешность и размах полученных измерений с точностью до 10^{-16};
- собранный материал позволил создать уникальную страницу в свободной энциклопедии Википедии: https://ru.wikipedia.org/wiki/Недиана.

Дальнейшая область исследований будет посвящена недианову треугольнику, а также тетраэдру и его недианным плоскостям. Нахождению объёма недианова многогранника.

Список литературы:

1. Encyclopedia of Triangle Centers [Электронный ресурс] // ETC: Сайт. URL: https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html (дата обращения 12.2020).
2. Мякишев А.Г. Элементы геометрии треугольника / А.Г. Мякишев. Под ред. В.М. Тихомиров. – М.: МЦНМО, 2002. – 32 с.
3. John Satterly. The nedians of a plane triangle (англ.) // The Mathematical Gazette. − 1954/05. − Vol. 38, iss. 324. P. 111–113. Сайт. URL: https://www.cambridge.org/core/journals/mathematical-gazette/article/abs/2392-the-nedians-of-a-plane-triangle/EF226FAF0943BD78533FDA133268FB34
4. Страница Википедии: One-seventh area triangle. Сайт. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/One-seventh_area_triangle (дата обращения 01.2021).
5. John Satterly. A metod of constructing a triangle /Laerning Teaching // Phillip S. Jones, Sister Mary Constantia, John Satterly, Robert A. Laird and Charles H. Schutter. − Vol. 45, No. 8 (декабрь 1952), PP. 602-606.
6. John Satterly. The nedians and the nedian hexagons (англ.) // The Mathematical Gazette. − 1957/12. − Vol. 41, No. 338. PP. 289−291.