Исследование кривых Гвидо Гранди

Щавлева Ксения Владимировна
10 класс, МБОУ «Лицей №40»
Научный руководитель Красавина Юлия Владимировна, учитель математики

Роза Гвидо Гранди – кривая, напоминающая форму цветка. В данной работе были исследованы кривые Гвидо Гранди в зависимости от ее задающих параметров и написана программа для построения кривых на языке программирования Pascal. Также была выведена формула для вычисления площади одного лепестка розы. В ходе работы была установлена зависимость между параметрами, задающими уравнение кривой, и формой розы и зависимость между графиком кривой и симметричностью относительно осей координат.

Математика – наука, изучающая величины, количественные отношения и пространственные формы. Линии занимают особое положение в математике. Существуют различные кривые, которые изображаются в полярных координатах, такие как спираль Архимеда, лемниската Бернулли, астроида и т.д. В работе представлено исследование роз Гвидо Гранди.

В современном мире линии и орнаменты занимают особое положение. Много веков назад были созданы первые розы для украшения фасадов. Сейчас розы также используются дизайнерами при создании интерьеров. Кроме того, в природе существует множество процессов, связанных с розами, например, маятник Фуко.

Цель работы – исследование кривых Гвидо Гранди и изучение применения роз в современном мире.

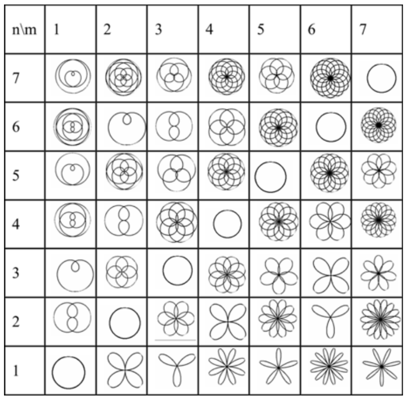


Рис. 1. Примеры роз Гранди в зависимости от параметров

Кривая розы в полярной системе координат задается уравнением r = l sin (kφ).

Параметр k определяет количество лепестков, а l – расстояние от начала координат до вершины лепестка (радиус окружности, описанной около этой кривой). Если k – дробное число,
то его можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. Тогда если и m, и n – нечетные числа, то число лепестков равно m, если хотя бы одно из чисел – четное число, то число лепестков равно 2m, если k – иррациональное, то число лепестков бесконечно.

При k > 1 кривая Гранди является гипотрохоидой.
Гипотрохоида – плоская кривая, образуемая фиксированной точкой, лежащей вне или внутри окружности, катящейся по внутренней стороне другой окружности большего радиуса.

При k < 1 кривая является эпитрохоидой.
Эпитрохоида – плоская кривая, образуемая фиксированной точкой, катящейся по внешней стороне другой окружности.

Розы Гранди в основном изображаются в полярной системе координат.
Полярная система координат – двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости задается двумя координатами – полярным углом и полярным радиусом.
Но существует ряд формул для перехода в декартовую систему координат:
r = $\sqrt{x^2+y^2}$,
cos $\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$,
sin $\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

При подстановке этих формул в исходное уравнение полярной розы можно получить уравнения кривых в декартовой системе координат:
$(x^2+y^2)^3 = 4\,l^2x^2y^2$ (k = 2 – четырехлепестковая роза)
$(x^2+y^2)^2 = l\,(3x^2y-y^3)$ (k = 3 – трехлепестковая роза)
$(x^2+y^2)^5 = 16\,l^2x^2y^2\,(x^2-y^2)^2$ (k = 4 – восьмилепестковая роза).

Для подсчета площади одного лепестка была выведена формула для площади криволинейного сектора в общем виде:

$S = \frac{1}{2}\int_{\Delta\varphi_0}^{\varphi_n} r^2\,d\varphi$

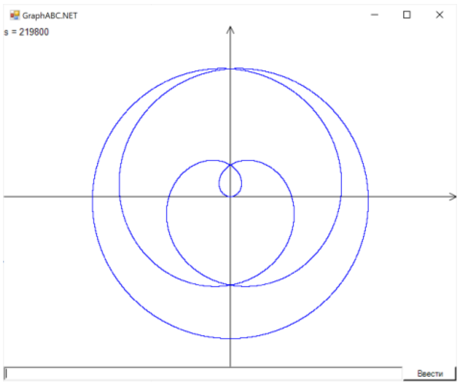
Для роз Гранди:

$S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}} l^2\sin^2(k\varphi)d\varphi = \frac{l^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}} \sin^2(k\varphi)d\varphi = \frac{l^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{k}} \frac{1-\cos(2k\varphi)}{2}d\varphi$

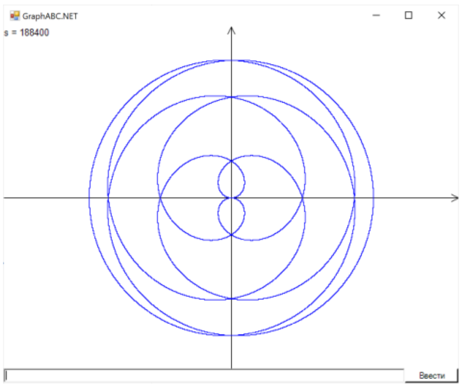
$= \frac{l^2}{4}\int_0^{\frac{\pi}{k}} (1-\cos(2k\varphi)d\varphi = \frac{l^2}{4}(\int_0^{\frac{\pi}{k}} 1d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{k}}\cos(2k\varphi)\,d\varphi) =$

$= \frac{l^2}{4}(\varphi - \frac{1}{2}\sin(2k\varphi))\,|_0^{\frac{\pi}{k}} = \frac{l^2}{4}((\frac{\pi}{k} - \frac{1}{2}\sin\frac{2k\pi}{k}) - 0) = \frac{\pi l^2}{4k} = \frac{\pi l^2 n}{4m}$

В ходе работы была написана программа для построения графика розы и нахождения площади одного лепестка. Примеры работы программы:



7, l = 219800
6, l = 188400



1. m = 1, n = 200, S ≈
2. m = 1, n = 200, S ≈

3. m = 2, n = 5, l = 200, S ≈ 78500

4. m = 5, n = 6, l = 200, S ≈ 37680

5. m = 21, n = 7 (k = 3), l = 200, S ≈ 10466(6)

6. m = 5, n = 2, l = 200, S ≈ 12560

Основное применение роз – создание орнаментов. Но кривые Гранди нашли свое применение и в физике.

Маятник Фуко – маятник, используемый для демонстрации существования вращения Земли. Он представляет из себя длинную проволоку с привязанным грузом. Маятник Фуко совершал колебания над поверхностью с песком. Через некоторое время было установлено, что плоскость маятника поворачивается, а значит, поверхность Земли вращается. Плоскость колебаний маятника поворачивается относительно земной поверхности в сторону, противоположную направлению вращения Земли.

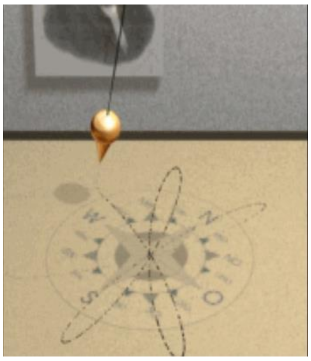


Рис. 2. Маятник Фуко

Выводы

1) В ходе работы была установлена связь между формой розы и параметрами, ее задающими. Также была установлена зависимость между параметром k и симметричностью относительно осей координат:

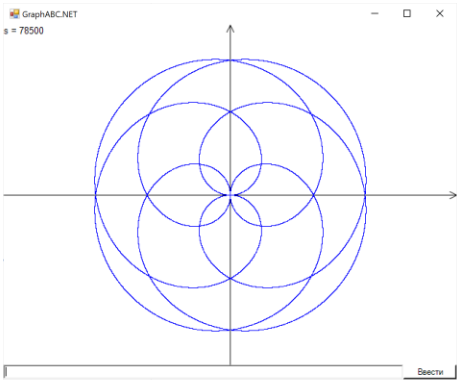
- При четном количестве лепестков роза симметрична относительно начала координат и осей координат;
- При нечетном количестве лепестков роза симметрична относительно оси ординат.

2) Для более наглядного изучения многообразия форм кривых Гвидо Гранди была написана программа на языке Pascal.

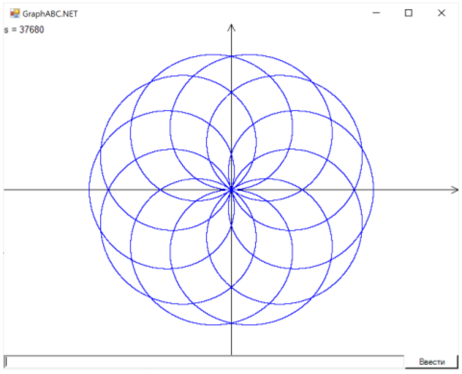
3) Было изучено применение роз Гранди.

Литература

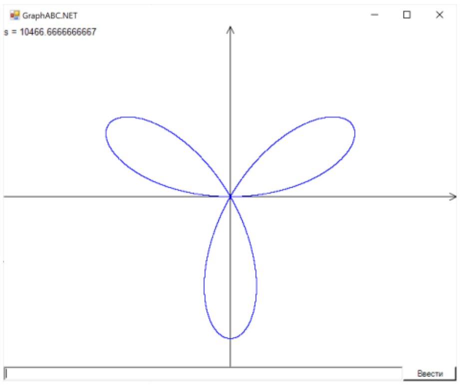
Демьянко А.В., Горовенко Л.А. Исследование параметров кривых Гвидо Гранди.



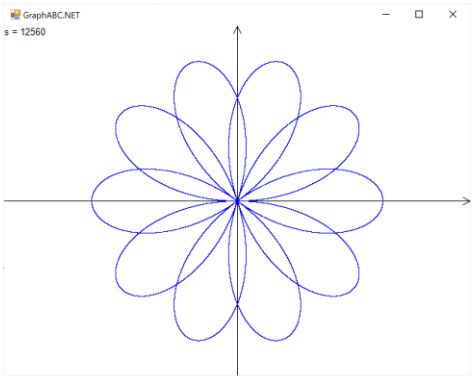
Гвидо



Савелов А.А. Плоские кривые. Систематика, свойства, применения (Справочное руководство).
Старова О.А. Розы Гранди [Электронный ресурс]. URL: http://www.e-osnova.ru/PDF/osnova_3_58_12909.pd
Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. [Электронный ресурс]. URL:



форм.



cyberleninka.ru
Математическое моделирование в дизайне и архитектуре малых [Электронный ресурс]. URL:
https://sibac.info/11124