

Formulaire du simulateur Kaos

Perrine Vantalon
Pôle Simulation - Perseus Avionique
Ecole Centrale de Lille

Février 2021

Ce document a pour vocation de synthétiser tous les modèles utilisés dans le simulateur Kaos. Il est à l'image de l'état du simulateur en février 2021. Kaos est un simulateur à 6 DDL permettant la trajectographie des fusées Perseus. L'objectif de ce simulateur était de créer un environnement pour pouvoir tester par la suite des algorithmes de contrôle. Les modèles actuellement mis en place sont simples pour créer une première base de travail et sont destinés à évoluer et à s'enrichir afin de s'approcher le plus fidèlement de la réalité du vol d'une fusée.

Le présent document reprend en grande partie : Le Vol de la Fusée, Stabilité et Trajectographie Version 2.0 - juillet 2008 de Planètes Sciences qui a servi à l'équipe à créer Kaos.

Tous les paramètres utilisés ici sont exprimés en unité S.I : kg, m, s, K etc ... sauf en cas de précision et leurs unités seront omises lors de la rédaction des équations.

Les repères

On considère le mouvement du repère fusée ("Body"), repère d'axes $(\vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$ et d'origine le centre de gravité (X_{CG}) de la fusée, par rapport à un repère fixe lié à la Terre ("Earth"), d'axes $(\vec{x}_e, \vec{y}_e, \vec{z}_e)$ et d'origine (O) le pied de la rampe de lancement. La fusée est considérée rigide et le repère Terre est considéré inertiel. \vec{z}_e est dirigé vers le centre de la terre.

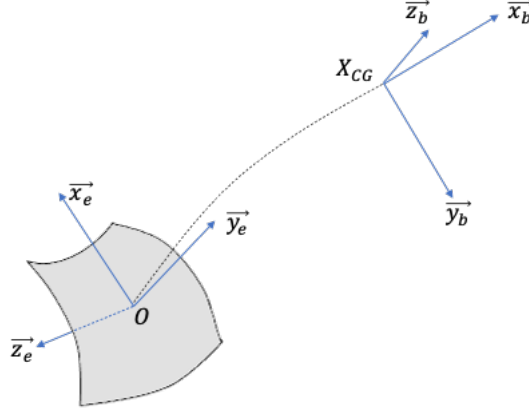


FIGURE 1 – Représentation des deux repères

L'orientation du repère fusée peut être décrite par les angles de Cardan (ϕ, θ, ψ) ou par un quaternion $(Q = (q_0, q_1, q_2, q_3))$.

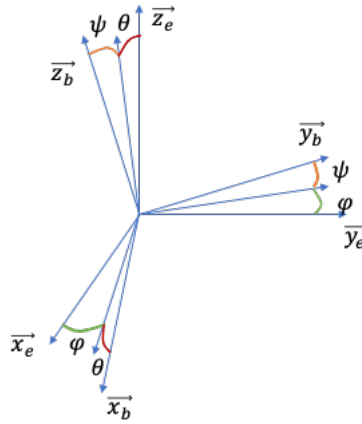


FIGURE 2 – Représentation des angles de Cardan

On a la relation de passage entre les deux représentations :

$$\begin{aligned} q_0 &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ q_1 &= \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ q_2 &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \\ q_3 &= \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) \end{aligned}$$

On obtient donc la matrice de changement de repère :

$$\begin{aligned}
M_{be} &= \begin{pmatrix} \cos(\phi) \cos(\theta) & \sin(\phi) \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) - \sin(\psi) \cos(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \sin(\phi) + \cos(\psi) \cos(\phi) & \cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) + \sin(\psi) \sin(\phi) & \sin(\psi) \sin(\theta) \cos(\phi) - \cos(\psi) \sin(\phi) & \cos(\theta) \cos(\phi) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 & 2(q_1 q_2 + q_0 q_3) & 2(q_1 q_3 - q_0 q_2) \\ 2(q_1 q_2 - q_0 q_3) & q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2 & 2(q_2 q_3 + q_0 q_1) \\ 2(q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2(q_2 q_3 - q_0 q_1) & q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Système de coordonnées du vent

Soit $\vec{V}_b = \begin{pmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{pmatrix}$, la vitesse de la fusée exprimée dans les axes fusée. La vitesse

relative \vec{V}_r de la fusée par rapport à l'air peut s'obtenir par : $\vec{V}_r = \vec{V}_b - M_{be} \vec{V}_{vent}$ où \vec{V}_{vent} est exprimé dans le repère terrestre.

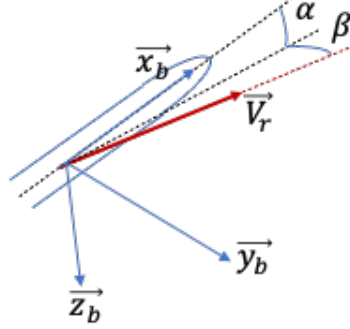


FIGURE 3 – Représentation des angles α et β

α est l'angle d'attaque et β est l'angle de dérapage. Il est possible de les retrouver à partir de \vec{V}_r

$$\alpha = \arctan\left(\frac{w_r}{u_r}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{v_r}{\|\vec{V}_r\|}\right)$$

Soit M_{bw} la matrice de changement de base entre le repère du vent ("Wind") et celui de la fusée :

$$M_{bw} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \cos(\beta) & -\cos(\alpha) \sin(\beta) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) & \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement

On décrit le mouvement par 12 états ou 13 états. La fusée est donc décrite à tout moment suivant la représentation choisie par le vecteur :

$$\begin{aligned}
Y &= [x, y, z, u_b, v_b, w_b, \phi, \theta, \psi, p, q, r] \\
\text{ou } Y &= [x, y, z, u_b, v_b, w_b, q_0, q_1, q_2, q_3, p, q, r]
\end{aligned}$$

avec

$$X_{CG} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega} = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$$

X_{CG} centre de gravité de la fusée dans le repère terrestre, \vec{V}_b vecteur vitesse dans le repère fusée et $\vec{\omega}$ les vitesses angulaires dans le repère fusée.

La deuxième loi de Newton permet d'obtenir les dérivées de u_b, v_b, w_b . \vec{F} correspond à la somme des forces dans le repère fusée et m est la masse de la fusée.

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_b \\ \dot{v}_b \\ \dot{w}_b \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \left(\vec{F} - m\vec{V}_b \right) - \vec{\omega} \wedge \vec{V}_b \quad (1)$$

Le théorème du moment cinétique permet d'obtenir les dérivées de p, q, r . \vec{M} correspond à la somme des moments dans le repère fusée et I à la matrice d'inertie de la fusée.

$$\begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{pmatrix} = I^{-1} \left(\vec{M} - \vec{\omega} \wedge (I\vec{\omega}) - \dot{I}\vec{\omega} \right) \quad \text{avec} \quad I = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (2)$$

Les angles ϕ, θ, ψ s'obtiennent par intégration de leurs dérivées. La relation entre les dérivées et les vitesses angulaires en axe fusée p, q, r est la suivante :

$$\begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \sin(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \frac{\sin(\phi)}{\cos(\theta)} & \frac{\cos(\phi)}{\cos(\theta)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} \quad (3)$$

De même pour le quaternion, on a la relation :

$$\dot{Q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Le quaternion obtenu après intégration doit être renormé. Le quaternion doit être de norme unitaire pour éviter une divergence des calculs.

Enfin on obtient x, y, z en intégrant $\vec{V}_e = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = M_{be} \vec{V}_b$.

Forces et Moments

On effectue le bilan des forces et des moments dans le repère de la fusée.

$$\vec{F} = \vec{T} + \vec{F}_a + M_{be} \vec{P} \quad (5)$$

$$\vec{M} = \vec{M}_T + \vec{M}_{F_a} (+\vec{M}_r) \quad (6)$$

\vec{T} et \vec{F}_a étant respectivement la force de poussée et la force aérodynamique, toutes deux exprimée dans le repère de la fusée. \vec{M}_T et \vec{M}_{F_a} sont les moments correspondant à ces forces. La force gravitationnelle \vec{P} s'exprimant mieux dans le repère terrestre, elle est définie dans ce référentiel et ensuite multipliée par la matrice de changement de base.

Les moments sont définis en O, le point de référence aéro et sont ensuite transportés au centre de gravité X_{CG} par la formule de Varignon :

$$M_{CG} = M_O - \overrightarrow{OX_{CG}} \wedge \vec{F}$$

Force gravitationnelle

$$\vec{P} = m \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix} \text{ où } g \text{ est défini selon l'équation d'Helmert :}$$

$$g = 9.80616 - 0.025928 \times \cos(2\phi_{lat}) + 6.9 \times 10^{-5} \times \cos(2\phi_{lat})^2 - 3.086 \times 10^{-6} \times h$$

ϕ_{lat} correspond à la latitude, h à l'altitude au dessus du niveau de la mer. Avec le référentiel choisi, $h = -z$ si $z(0) = 0$.

Force aérodynamique

Les forces aérodynamiques et les moments sont :

$$\begin{aligned} \vec{F}_a &= - \frac{\rho S}{2} V^2 \begin{pmatrix} C_A \\ C_Y \\ C_N \end{pmatrix} \\ \vec{M}_{F_a} &= \frac{\rho S}{2} V^2 l_d \begin{pmatrix} C_l \\ C_m \\ C_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{\rho S}{2} V^2 l_d \begin{pmatrix} C_{l_0} - \frac{p}{2V} l_d C_{lp} \\ C_{m\alpha} - \frac{q}{2V} l_d C_{mq} \\ C_{n\beta} - \frac{r}{2V} l_d C_{nr} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ρ est la densité de l'air. $V = \|\vec{V}_r\|$ pour alléger les notations. S est la surface frontale de la fusée. l_{ref} est la longueur de référence entre le centre de portance et le point de référence aéro et l_d le diamètre de la fusée. M est le nombre de Mach. $M = \frac{V}{a}$ où a est la vitesse du son : $a = \sqrt{1.403 \times 287 \times T}$, T température. α et β sont les angles d'attaque et de dérapage.

L'ensemble des coefficient doit être fournis par l'utilisateur. On fait actuellement l'approximation $C_N(M, \alpha) = C_{N\alpha} \alpha$ et $C_Y(M, \beta) = C_{N\alpha} \beta$ où $C_{N\alpha}$ peut être obtenu par la méthode de Barrowman si le coefficient n'est pas entrée en paramètre.

On a la conversion avec les coefficients aérodynamiques établi en repère vent :

$$\begin{aligned} C_x &= (C_A \cos \alpha + C_N \sin \alpha) \cos \beta - C_Y \sin \beta \\ C_y &= C_Y \cos \beta + (C_A \cos \alpha + C_N \sin \alpha) \sin \beta \\ C_z &= C_N \cos \alpha - C_A \sin \alpha \end{aligned}$$

Le coefficient de roulis est $C_l = C_{l_0} + C_{lp} \frac{pl_d}{2V}$ avec C_{lp} le taux de roulis instantané. Le coefficient de tangage est $C_m = C_{m\alpha}(M, \alpha) + C_{mq} \frac{ql_d}{2V}$, avec $C_{m\alpha}(M, \alpha) = \frac{l_{ref}}{l_d} C_N$ et C_{mq} le coefficient aérodynamique du taux de tangage instantané.

Le coefficient de lacet est $C_n = C_{n\beta}(M, \beta) + C_{mq} \frac{rl_d}{2V}$, avec $C_{n\beta}(M, \beta) = -\frac{l_{ref}}{l_d} C_Y$ et C_{nr} le coefficient aérodynamique du taux de lacet instantané.

Force de Poussée

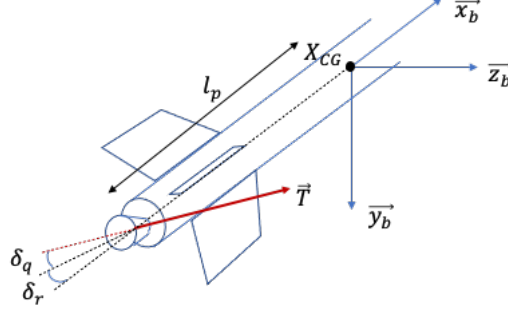


FIGURE 4 – Représentation de la force de Poussée

Soit M_{bn} la matrice de changement de base entre le repère de la tuyère et celui de la fusée :

$$M_{bn} = \begin{pmatrix} \cos(\delta_r) \cos(\delta_q) & -\sin(\delta_r) & \cos(\delta_r) \sin(\delta_q) \\ \sin(\delta_r) \cos(\delta_q) & \cos(\delta_r) & \sin(\delta_r) \sin(\delta_q) \\ -\sin(\delta_r) & 0 & \cos(\delta_q) \end{pmatrix}$$

On exprime la force de Poussée dans le repère de la tuyère ("Nozzle"), puis dans le repère de la fusée.

$$\vec{T} = M_{bn} \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \cos(\delta_r) \cos(\delta_q) \\ \sin(\delta_r) \cos(\delta_q) \\ -\sin(\delta_q) \end{pmatrix}$$

T est la poussée produite par tous les moteurs allumés. Le moment associé est :

$$\vec{M}_T = l_p \vec{x}_b \wedge \vec{T} = l_p T \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(\delta_q) \\ -\sin(\delta_r) \sin(\delta_q) \end{pmatrix}$$

l_p est la distance entre le centre de gravité et la base de la tuyère.

Atmosphère

Modèles décrivant la pression P et la température T en fonction de l'altitude h , ce qui permet ensuite de calculer ρ .

$$\begin{aligned} P &= P_0 \times \left(1 - \frac{0.0065h}{288}\right)^{5.2586} \\ T &= T_0 - \frac{0.65}{100} h \\ \rho &= \frac{PM}{RT} \end{aligned}$$

$P_0 = 1013.25$ hPa, $T_0 = 288$ K, $M = 28.965 \times 10^{-3}$ kg.mol⁻¹, $R = 8.314$ la constante des gaz parfait.