

# Fundamentos de Matemática



Educação a Distância  
Cruzeiro do Sul Educacional  
Campus Virtual



# Material Teórico



**Relações trigonométricas no triângulo retângulo**

**Responsável pelo Conteúdo:**

Prof.<sup>a</sup> Me. Conceição Aparecida Cruz Longo

**Revisão Técnica:**

Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Cintia Aparecida Bento dos Santos

**Revisão Textual:**

Prof. Me. Claudio Brites



# UNIDADE

## Relações trigonométricas no triângulo retângulo



- Introdução
- Seno, Cosseno e Tangente
- Relações entre seno, cosseno e tangente
- Relações trigonométricas em um triângulo qualquer
- Trigonometria: Circunferência
- Relações trigonométricas



### Objetivo de APRENDIZADO

Nesta unidade veremos funções trigonométricas. Iniciaremos falando sobre trigonometria, que possui inúmeras aplicações nos diversos ramos da ciência, sendo considerada uma importante aliada no mundo moderno, por exemplo, na determinação de ângulos e distâncias inacessíveis.

Veremos nesta unidade alguns conceitos de trigonometria. Nossos objetivos são: reconhecer a importância do estudo dessa matéria para o desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos; aprofundar os estudos relativos à trigonometria no triângulo retângulo e depois em um triângulo qualquer; identificar, diferenciar e calcular diversas funções circulares.

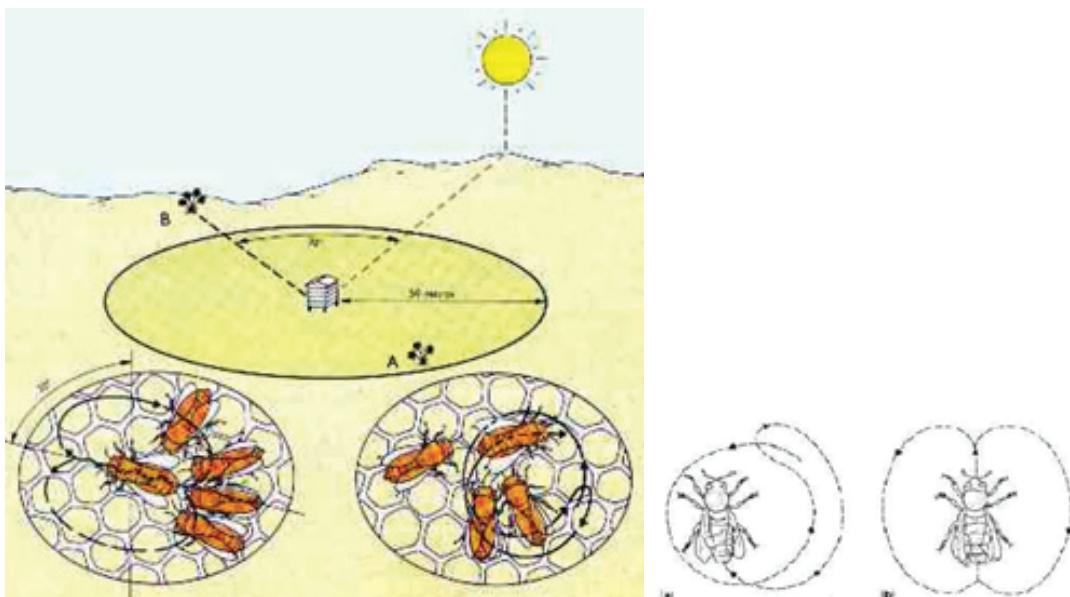
Iniciaremos nossos estudos com as relações trigonométricas no triângulo retângulo para, em seguida, abordar essas relações em um triângulo qualquer. Na sequência, abordaremos os elementos de uma circunferência que servirão de base para nossos estudos sobre as funções trigonométricas. Encerraremos a unidade com a relação fundamental da trigonometria e outras relações decorrentes das estudadas anteriormente.

Para se aprofundar nos conhecimentos aqui apresentados, faça a leitura do conteúdo e das situações problema apresentadas para compreensão e interpretação. Resolva os exercícios propostos antes de ver a resolução. Refaça os exercícios para verificar se realmente aprendeu – as respostas dos exercícios servem como uma forma de conferir seu raciocínio, se não estiver conseguindo resolver um exercício, uma situação problema, procure esclarecimento antes de desistir. Organize um horário de estudos para criar o hábito de estudar todos os dias. Para seu sucesso, realize as tarefas com organização clareza e pontualidade. E participe das discussões das ideias matemáticas nos fóruns.

## Contextualização

Uma abelha pode se lembrar da rota de voo a partir da posição do Sol no céu, do odor e da cor das flores. É capaz, também, de retornar à mesma fonte de alimento, no mesmo horário, do dia seguinte. O pesquisador Von Frisch foi quem descobriu a forma de comunicação das abelhas, que quando encontram uma boa fonte de néctar e pólen retornam para informar às demais a posição e o odor das flores. A abelha toma como referência a posição do Sol, isto é, o ângulo entre sua própria rota de voo e uma linha horizontal da colmeia, na direção do Sol.

Sua forma de comunicação é denominada “dançado requebrado”. Quando as flores estão a menos de 100 metros de distância da colmeia, a dança é circular. Se o alimento está a mais de 100, a abelha corre para frente por uma pequena distância, retornando ao ponto inicial por um semicírculo, e volta descrevendo um outro semicírculo na direção oposta, dando uma ideia de oito, veja Figura 7. Se a dança é feita a  $30^\circ$  à direita da vertical, significa que o alimento está a  $30^\circ$  à direita do sol.



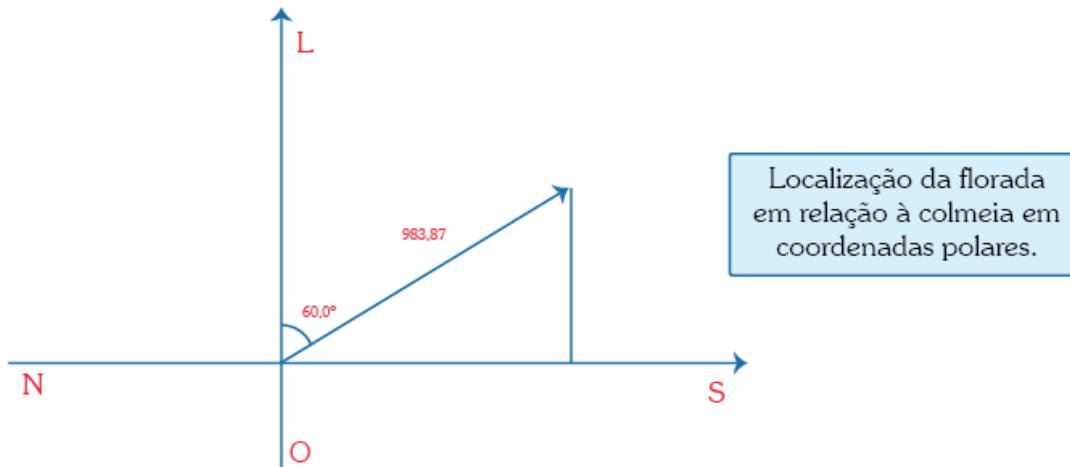
Ao dançar na colmeia, outras abelhas podem aprender a posição e o odor das flores, embora não aprendam sua cor e sua forma. O número de vezes por segundo que a abelha perfez o circuito “dançando” indica a distância da florada em relação à colmeia. Crane (1983) apresenta a duração de cada circuito da dança pela distância:

Distância (m)	200	500	1000	2000	3500	4500
Duração do circuito (s)	2,1	2,5	3,3	3,8	5,6	6,3

### Como podemos localizar uma florada a partir da dança da abelha?

Para calcular a distância da florada da colmeia, procederemos utilizando coordenadas polares, exemplo: se a fonte de alimento estiver a 983,87m da colmeia e formando um ângulo de  $60^\circ$  no sentido horário em relação à direção do sol nascente (leste), podemos encontrar a distância em que a florada está da colmeia em relação aos pontos cardinais.

Localização da florada em relação à colmeia em coordenadas polares.



As abelhas não usam coordenadas retangulares para comunicar a posição da fonte de alimentos. As coordenadas polares têm um papel importante no comportamento animal, principalmente na orientação de aves e peixes.

Temos que a hipotenusa do triângulo retângulo (distância da colmeia à florada) é 983,87m, e o ângulo em relação ao eixo x (que aponta para o sul) é 30°. Assim temos que:

- $\sin \theta = \frac{y}{r} \Rightarrow \sin 30^\circ = \frac{y}{983,87} \cong 491,93\text{m}$
- $\cos \theta = \frac{x}{r} \Rightarrow \cos 30^\circ = \frac{x}{983,87} \cong 852,05\text{m}$

Em coordenadas retangulares, podemos dizer que a fonte de alimento está, aproximadamente, a 491,93m para leste e 852,05m para o sul, em relação à colmeia.

Adaptado de: SANCHES, P.S.B. [et al.] *Mathematikós*: volume único, ensino médio. São Paulo: Saraiva, 2010.



## Explore

O Estudo Matemático do Comportamento das Abelhas

Disponível em: <http://goo.gl/oZuwZB>

## Introdução



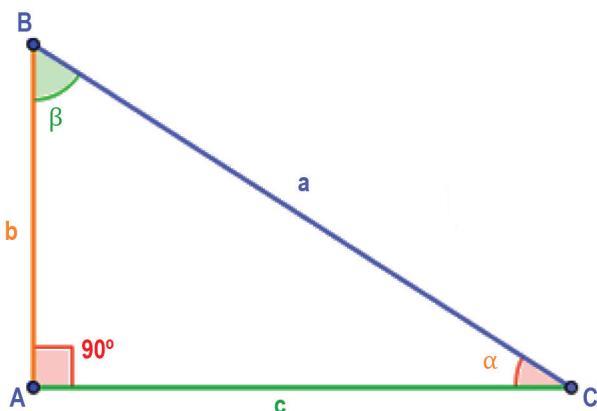
A Trigonometria (trigono: triângulo e metria: medidas) é o estudo da Matemática responsável pela relação existente entre os lados e os ângulos de um triângulo. Podemos observar a aplicação da trigonometria na determinação da altura de um prédio ou de uma montanha e no cálculo da largura de um rio para se construir uma ponte.

A trigonometria é o ramo da matemática que trata das relações entre os lados e os ângulos de triângulos. Na trigonometria plana trabalhamos com figuras geométricas que pertencem a um único plano, e na trigonometria esférica trabalhamos com triângulos que são uma seção da superfície esférica.

## Seno, Cosseno e Tangente



Primeiro vamos descrever quais são os elementos de um triângulo retângulo:



- » Em relação ao ângulo  $\beta$  o lado  $\overline{AB}$  é o cateto oposto a esse ângulo e o lado  $\overline{AC}$  é o cateto adjacente;
- » Em relação ao ângulo  $\alpha$ , o lado  $\overline{AC}$  é o cateto oposto a esse ângulo e o lado  $\overline{AB}$  é o cateto adjacente;
- » O lado oposto ao ângulo reto ( $\overline{CB}$ ) é a hipotenusa.

## Glossário



**Triângulo retângulo:** é aquele no qual um dos ângulos internos é reto.

## Definição das Razões Trigonométricas

Em todo triângulo retângulo, temos:

- A **razão** entre a medida do **cateto oposto** ao ângulo e a da **hipotenusa** é chamada **seno** do ângulo agudo.

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\text{sen } \beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \text{sen } \beta = \frac{c}{a}$$

- A **razão** entre a medida do **cateto adjacente** ao ângulo e a da **hipotenusa** é chamada **coseno** do ângulo agudo.

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\cos \beta = \frac{\text{cateto adjacente a } \beta}{\text{hipotenusa}} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \cos \beta = \frac{b}{a}$$

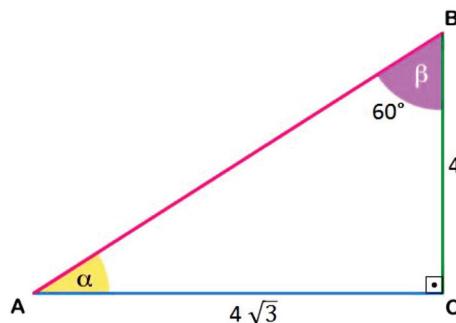
A razão entre a medida do cateto oposto ao ângulo e o do cateto adjacente a esse ângulo é chamada tangente do ângulo agudo.

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto a } \alpha}{\text{cateto adjacente a } \alpha} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\text{tg } \beta = \frac{\text{cateto oposto a } \beta}{\text{cateto adjacente a } \beta} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \text{tg } \beta = \frac{c}{b}$$

### Acompanhe o exercício resolvido:

- 1) Considere o triângulo retângulo seguinte.



### Agora, calcule:

- a medida do ângulo  $\alpha$ .
- a medida do lado  $AB$ .
- os valores de  $\text{sen } 60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$  e  $\text{tg } 60^\circ$ .
- os valores de  $\text{sen } \alpha$ ,  $\cos \alpha$  e  $\text{tg } \alpha$ .

### Resolução

a) Para calcular a medida do ângulo  $\alpha$ , vamos usar a relação: a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$ .

Assim:

$$\alpha + 60^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \alpha = 180^\circ - 60^\circ - 90^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$



Para saber sobre o assunto acesse o link abaixo:

**Brincando com Geometria: Soma dos ângulos de um triângulo**

Disponível em: <http://goo.gl/OqubCh>

b) Neste caso, aplicamos o teorema de Pitágoras:

$$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$$

$$(AB)^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 16 \cdot 3 + 16 \Rightarrow (AB)^2 = 48 + 16$$

$$(AB)^2 = 64 \Rightarrow AB = \sqrt{64} \Rightarrow AB = 8.$$



Para saber sobre o assunto acesse os links abaixo:

**Teorema-de-pitagoras:** <http://goo.gl/bcozlM>

**Exercícios sobre Teorema de Pitágoras:** <http://goo.gl/zCgOH9>

c)

$$\sin 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 60^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente a } 60^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\tg 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 60^\circ}{\text{cateto adjacente a } 60^\circ} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

d)

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 30^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

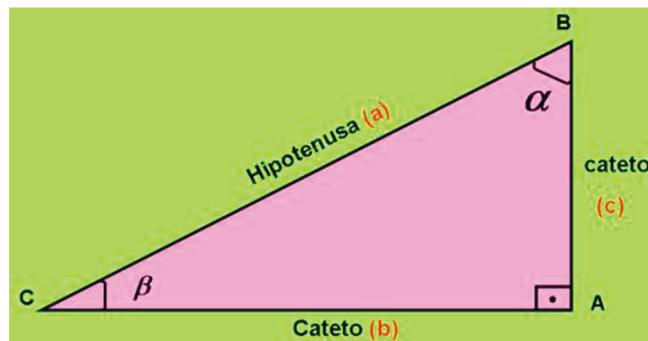
$$\cos 30^\circ = \frac{\text{cateto adjacente a } 30^\circ}{\text{hipotenusa}} = \frac{4\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto a } 30^\circ}{\text{cateto adjacente a } 30^\circ} = \frac{4}{4\sqrt{3}} = \frac{4}{4\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{4 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

## Relações entre seno, cosseno e tangente



Partindo das relações trigonométricas anteriores, podemos obter relações entre o seno, o cosseno e a tangente.



$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a}$	$\operatorname{sen} \beta = \frac{c}{a}$	$\cos \alpha = \frac{c}{a}$	$\cos \beta = \frac{b}{a}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{c}$	$\operatorname{tg} \beta = \frac{c}{b}$
---	--	-----------------------------	----------------------------	--	---

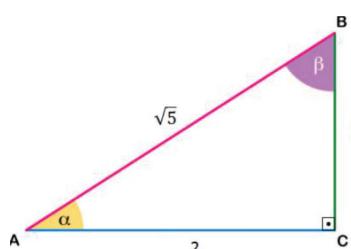
De acordo com o teorema de Pitágoras, temos que:  $(a)^2 = (b)^2 + (c)^2$ . Em seguida, vamos dividir os dois membros da equação por  $(a)^2$ .

$$\frac{a^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2$$

$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

Relação fundamental entre seno e cosseno de um ângulo agudo.

### Exemplo:



- $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$
- $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

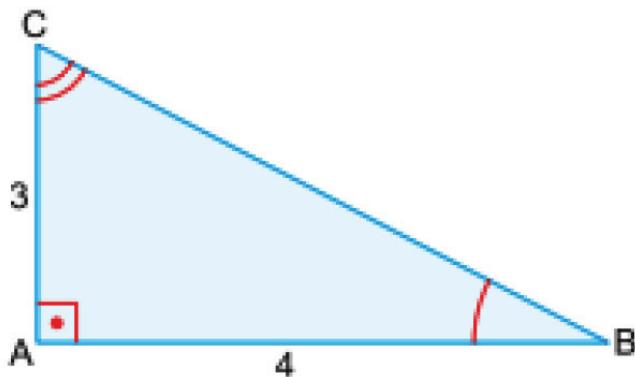
$$\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)^2 = \frac{5}{25} + \frac{4.5}{25} = \frac{5}{25} + \frac{20}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

Podemos estabelecer mais uma relação entre as razões seno, cosseno e tangente, dividindo  $\sin \alpha$  e  $\cos \alpha$ .

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = \operatorname{tg} \alpha$$

**Exemplo:**

No triângulo retângulo seguinte, calcular:



a) hipotenusa BC

$$(CB)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$$

$$(CB)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow (CB)^2 = 9 + 16 \Rightarrow (CB)^2 = 25 \Rightarrow (CB) = \sqrt{25} \Rightarrow (CB) = 5$$

b)  $\sin \hat{B}$

$$\sin \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

c)  $\cos \hat{B}$

$$\cos \hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

d)  $\operatorname{tg} \hat{B}$

$$\operatorname{tg} \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{3}{4}$$

e)  $\sin \hat{C}$

$$\sin \hat{C} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

f)  $\cos \hat{C}$

$$\cos \hat{C} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

g)  $\operatorname{tg} \hat{C}$

$$\operatorname{tg} \hat{C} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{4}{3}$$

## Valores do seno, do cosseno e da tangente de ângulos

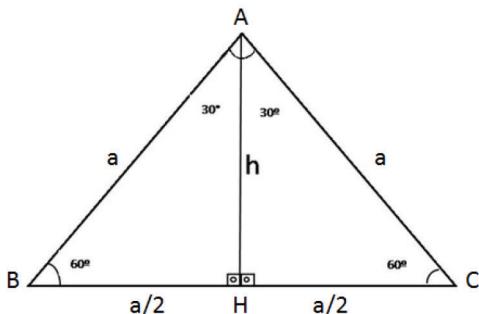
Cada ângulo agudo tem um valor de seno, cosseno e tangente. Alguns ângulos são muito importantes:  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$  (ângulos notáveis), mas a trigonometria não se limita a esses três ângulos notáveis. Na maioria das situações cotidianas, os ângulos não medem  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  ou  $60^\circ$ .

### Ângulos de $30^\circ$ e $60^\circ$

Consideremos inicialmente um triângulo equilátero de lado **a**.

#### Glossário

**Triângulo Equilátero** é todo triângulo que apresenta os três lados com a mesma medida. Nesse caso dizemos que os três lados são congruentes.



Utilizamos o teorema de Pitágoras para determinar a altura **h** em função de **a**.

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow -h^2 = -a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow [-h^2 = -a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2] \cdot (-1) \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow h^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}a^2}{\sqrt{4}} \Rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

**Agora, vamos calcular  $\operatorname{sen} 30^\circ$ ,  $\operatorname{cos} 30^\circ$  e  $\operatorname{tg} 30^\circ$ .**

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\text{cat. adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{AH}{AB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

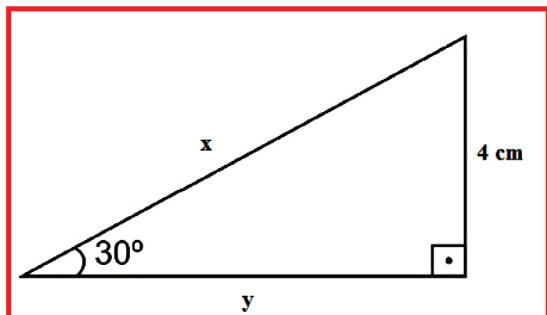
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\text{cat. oposto}}{\text{cat. adjacente}} = \frac{BH}{AH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



## Para Pensar

Calcule você os valores para  $\sin 60^\circ$ ,  $\cos 60^\circ$  e  $\tan 60^\circ$ . Em seguida, calcule os valores para  $\sin 45^\circ$ ,  $\cos 45^\circ$  e  $\tan 45^\circ$ .

**Organizando os resultados obtidos em um quadro, temos:**



$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
Seno	$1/2$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1/2$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

### Exercícios resolvidos:

Determine a medida da hipotenusa e do cateto maior do triângulo retângulo seguinte.

#### Resolução:

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{x}, \text{ na tabela } \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot x = 2 \cdot 4 \Rightarrow x = 8 \text{ cm (hipotenusa)}$$

Multiplicar em "cruz".

$$\tan 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{4}{y}, \text{ na tabela } \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4}{y} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot y = 3 \cdot 4 \Rightarrow \sqrt{3} \cdot y = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow y = \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

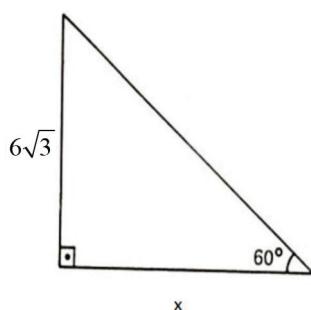
2) Vamos determinar x nos triângulos retângulos seguintes.

$$\text{a)} \tan 60^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{6\sqrt{3}}{x}, \text{ na tabela}$$

$$\tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$\frac{6\sqrt{3}}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} \cdot x = 6\sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$x = 6$$

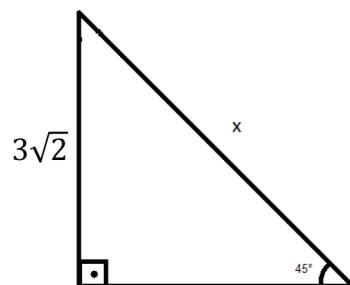


b)  $\sin 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3\sqrt{2}}{x}$ , na tabela

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{2} \cdot x = 2 \cdot 3\sqrt{2} \Rightarrow x = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$x=6$$



Para ângulos diferentes de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $60^\circ$ , usaremos a tabela no link a seguir:

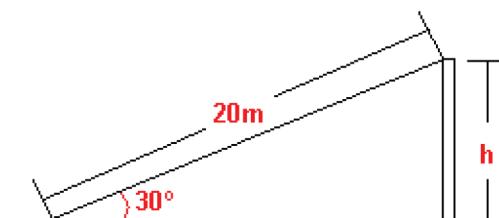


## Explore

Para melhor visualização dessa tabela, consulte: <http://goo.gl/SuL5hN>

### Exercício resolvido:

- 1) Uma rampa de 20 m de comprimento faz com o solo um ângulo de  $30^\circ$ . Uma pessoa que sobe essa rampa inteira fica a que altura do solo?



### Resolução:

$$\sin 30^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{h}{20}$$

$$2h = 1.20$$

$$2h = 20$$

$$h = \frac{20}{2}$$

$$h = 10$$

**Solução: 10 metros**

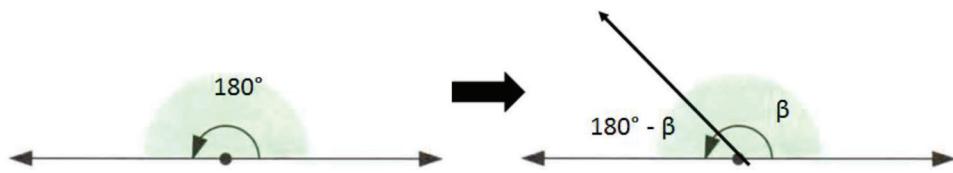
## Relações trigonométricas em um triângulo qualquer



### Seno e cosseno de ângulos obtusos

Como vimos, as situações até o momento envolveram apenas ângulos agudos, contudo, existem situações em que é necessário obter os valores do seno e do cosseno de um ângulo obtuso com medida  $\beta$ , tal que  $90^\circ < \beta < 180^\circ$ .

Veja a imagem a seguir, ela representa um ângulo de  $180^\circ$  e sua divisão em um ângulo obtuso de medida  $\beta$  e outro agudo de medida  $(180^\circ - \beta)$ .



Como  $(180^\circ - \beta)$  corresponde ao ângulo suplementar de  $\beta$ , podemos estabelecer as seguintes relações:

- O valor do seno de um ângulo obtuso  $\beta$  é igual ao valor do seno do seu suplementar  $(180^\circ - \beta)$ :

$$\sin \beta = \sin (180^\circ - \beta)$$

- O valor do cosseno de um ângulo obtuso  $\beta$  é igual ao oposto do valor do cosseno do seu suplementar  $(180^\circ - \beta)$ :

$$\cos \beta = -\cos (180^\circ - \beta)$$

Assim, usando essas relações, vamos determinar o valor do seno e do cosseno dos ângulos de  $150^\circ$  e  $132^\circ$ .

- $150^\circ$

$$\sin 150^\circ = \sin (180^\circ - 150^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = -\cos (180^\circ - 150^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

- $132^\circ$

$$\sin 132^\circ = \sin (180^\circ - 132^\circ) = \sin 48^\circ = 0,7431$$

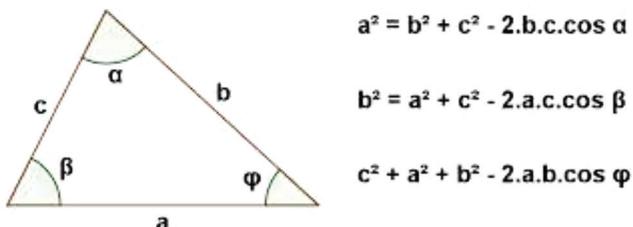
$$\cos 132^\circ = -\cos (180^\circ - 132^\circ) = -\cos 48^\circ = -0,6691$$

**ATENÇÃO:** Quando a medida do ângulo é  $90^\circ$ , temos:

- $\sin 90^\circ = 1$
- $\cos 90^\circ = 0$

## Lei dos cossenos

A **Lei dos Cossenos** estabelece que: em qualquer triângulo, o quadrado de um dos lados corresponde à soma dos quadrados dos outros dois lados, menos o dobro do produto desses dois lados pelo cosseno do ângulo entre eles. Sua fórmula é representada da seguinte maneira:

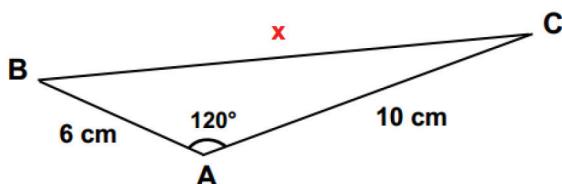


A partir disso, com a Lei dos Cossenos, podemos calcular em qualquer tipo de triângulo, não necessariamente o triângulo retângulo (com ângulo interno de  $90^\circ$ ), o comprimento de seus lados, desde que conheçamos a medida dos outros lados, bem como dos ângulos oposto a eles. Além disso, se souber o comprimento dos lados, a aplicação da Lei dos Cossenos também permite calcular todos os ângulos de um triângulo.

Dessa forma, quando se trata de um triângulo diferente do triângulo retângulo (com ângulo interno de  $90^\circ$ ), sejam os **acutângulos** (ângulos menor que  $90^\circ$ ) ou **obtusângulos** (ângulos maiores que  $90^\circ$ ), utilizamos “Lei do Cosseno”.

### Veja o exemplo:

Determine o valor de x no triângulo seguinte:



Aplicando a lei dos cossenos, temos:  $a^2 = b^2 + c^2 - 2.b.c.\cos \alpha$

$$x^2 = 6^2 + 10^2 - 2.6.10.\cos 120^\circ \rightarrow$$

$$x^2 = 36 + 100 - 120.\cos 120^\circ$$

$\cos 120^\circ = -\cos (180^\circ - 120^\circ) = -\cos 60^\circ$ 
 $\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

$$x^2 = 36 + 100 - 120. (-0,5)$$

$$x^2 = 36 + 100 + 60$$

$$x^2 = 196$$

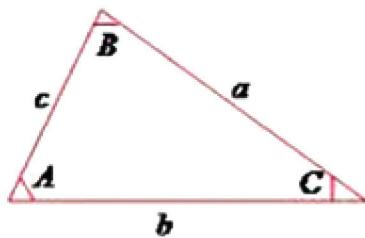
$$x = \sqrt{196}$$

$$x = 14$$

O valor de x é **14 cm**.

## Lei dos senos

A Lei ou o **Teorema dos Senos** determina que em um triângulo a relação do seno de um ângulo é sempre proporcional à medida do lado oposto a esse ângulo. Em outras palavras, esse teorema demonstra que num mesmo triângulo a razão entre o valor de um lado e o seno de seu ângulo oposto será sempre constante. Assim, para um triângulo ABC de lados a, b, c, a Lei dos Senos é representada pela seguinte fórmula:

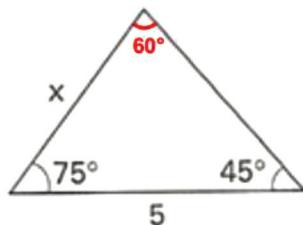


$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Importante ressaltar que nos triângulos que não sejam retângulos (com ângulo interno de  $90^\circ$ ), sejam os acutângulos (ângulos menor que  $90^\circ$ ) ou obtusângulos (ângulos maiores que  $90^\circ$ ), utilizamos também a Leis dos Senos.

### Acompanhe o exemplo:

Calcule o valor de x na figura seguinte.



### Aplicando a lei dos senos, temos:

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{5}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{x}{0,7071} = \frac{5}{0,8660} \Rightarrow 0,8660x = 5 \cdot 0,7071$$

$$x = \frac{3,5355}{0,8660} \Rightarrow x = 4,082$$

ou

$$\frac{x}{\sin 45^\circ} = \frac{5}{\sin 60^\circ} \Rightarrow \frac{x}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x = 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sqrt{3}x = 5\sqrt{2}$$

$$x = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{5\sqrt{6}}{3}$$

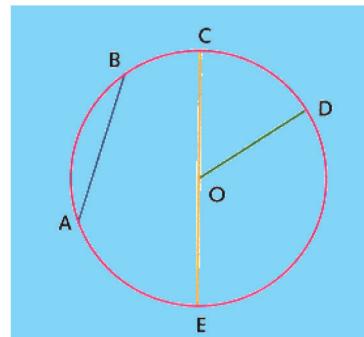
## Trigonometria: Circunferência



### Comprimento da circunferência

Os elementos da circunferência são:

- » O: centro da circunferência
- » A $\bar{B}$ : corda da circunferência
- » O $\bar{D}$ : raio da circunferência ( $r$ )
- » C $\bar{E}$ : diâmetro da circunferência ( $d = 2r$ )



Quando dividimos o comprimento (C) da circunferência pela medida do diâmetro (d), obtemos um valor aproximado de 3,14. Esse número é uma aproximação decimal do número irracional conhecido como:

$$\pi = 3,14159\dots$$

Para calcular o comprimento (C) da circunferência, usamos a fórmula:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r$$

#### Acompanhe o exemplo:

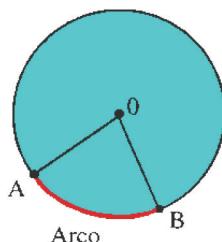
Para calcular o comprimento de uma circunferência de raio igual a 7 cm, fazemos:

$$C = 2 \cdot \pi \cdot r \Rightarrow C = 2 \cdot 3,14 \cdot 7 \Rightarrow C = 43,96$$

Portanto, o comprimento da circunferência é 43,96.

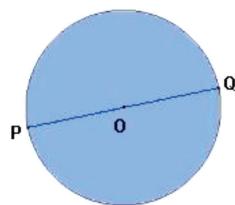
### Arco da circunferência

Considere uma circunferência onde são dados dois pontos, A e B. A circunferência irá se dividir em duas partes denominadas arcos, onde os pontos A e B são considerados extremidades desses dois arcos. Quando temos mais de um arco, indicamos os arcos da seguinte maneira:

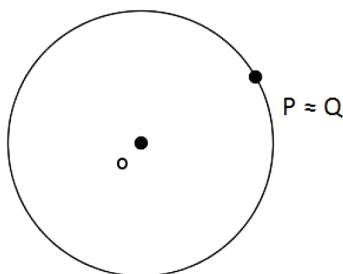


- O arco ACD:  $\widehat{ACD}$
- O arco ABD:  $\widehat{ABD}$

Quando P e Q são extremidades de um diâmetro, cada um dos dois arcos formados é chamado de **semicircunferência**.

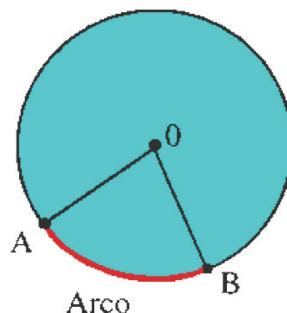


Quando os extremos coincidem, eles determinam na circunferência o **arco nulo** ou **arco de uma volta**:  $(\overline{PQ})$ .



## Ângulo central

Ângulo central de uma circunferência é o ângulo que tem o vértice no centro da circunferência. Na figura, o ângulo  $A\hat{O}B$  é um ângulo central da circunferência de centro O.

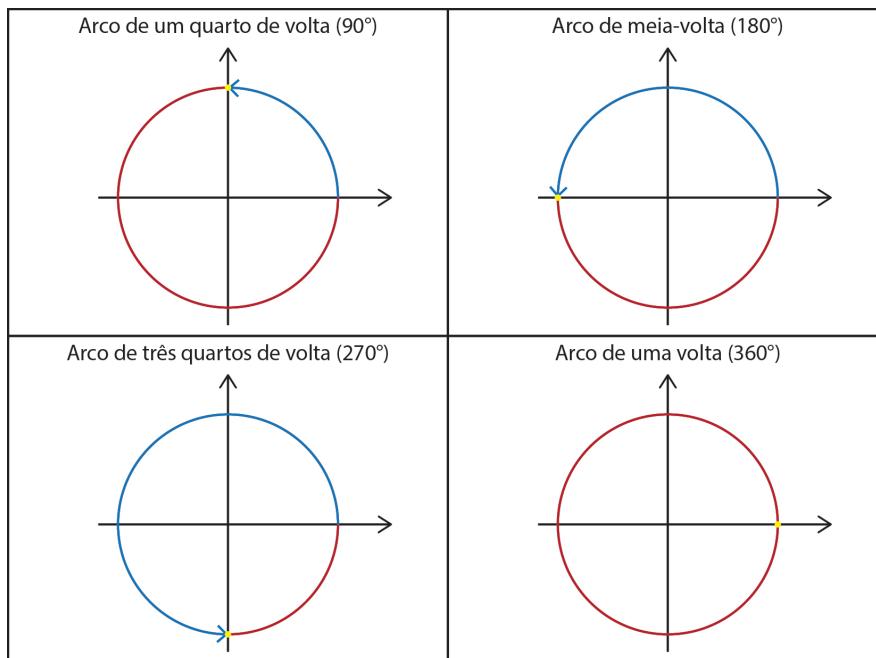


**ATENÇÃO:** A medida de um arco de circunferência é igual à medida do ângulo central correspondente. Na imagem anterior, temos: a medida de  $A\hat{O}B$  = medida de  $\widehat{AB}$  =  $\alpha$ .

## Medidas de arcos e ângulos

A medida de um ângulo central ( $\alpha$ ) pode ser expressa em grau ou radiano.

Quando dividimos uma circunferência em 360 partes iguais, cada uma dessas partes é um arco de um grau ( $1^\circ$ ), ou seja, uma circunferência tem  $360^\circ$ .

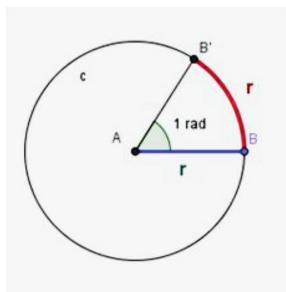


Os submúltiplos do grau são: minuto e segundo.

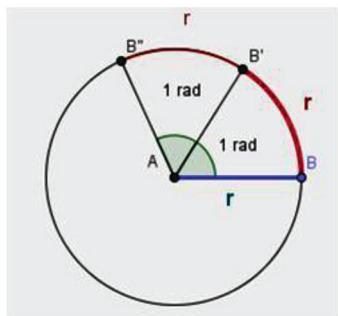
- »  $1^\circ = 60'$  (60 minutos);
- »  $1' = 60''$  (60 segundos).

Por exemplo, um arco mede 145 graus, 16 minutos e 35 segundos é indicado por:  $145^\circ 16' 35''$ .

Quando a medida do arco de uma circunferência for igual a medida do raio dessa circunferência, temos 1 radiano.



Então o comprimento do arco correspondente a um ângulo de 2 radianos é igual a 2 vezes o raio.

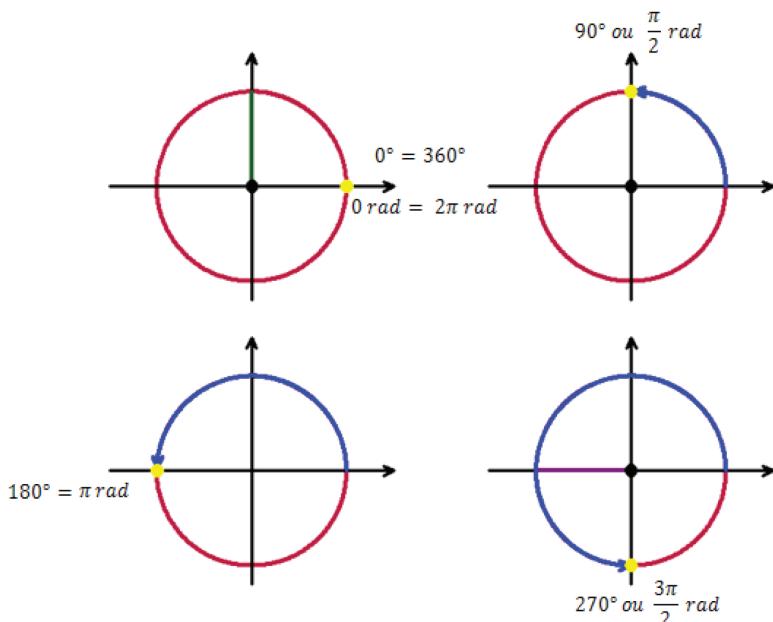


Em uma circunferência de raio  $r$ , a medida  $\alpha$  em radianos de um arco  $\widehat{AB}$  pode ser obtida dividindo o comprimento  $l$  do arco pela medida do raio dessa circunferência:

$$\alpha = \frac{C}{r} = \frac{2\pi}{r} = 2\pi \text{ rad}$$

Portanto, o arco de uma volta mede  $2\pi$  rad.

Podemos estabelecer uma relação entre graus e radianos, veja:



### Exercícios resolvidos:

Determine, em radianos, a medida de  $\widehat{AB}$  em uma circunferência, sabendo que o raio dela tem 12 cm e o comprimento do arco tem 54 cm.

Resolução:

$$\alpha = \frac{C}{r} \Rightarrow \frac{54}{12} = 4,5 \text{ rad}$$

Converta  $30^\circ$  em radianos.

### Resolução:

Grau	Radiano
180	$\pi$
30	x



### Explore

Regra de três simples. Sugestão: <http://www.somatematica.com.br/fundam/regra3s.php>

$$\frac{180}{30} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 30\pi \Rightarrow x = \frac{30\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\text{Portanto, } 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

Escreva  $\frac{3\pi}{4}$  rad em graus.

### Resolução:

grau	radiano
180	$\pi$
x	$3\pi/4$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow \pi x = 180 \cdot \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \pi x = 135\pi \Rightarrow x = \frac{135\pi}{\pi} \Rightarrow x = 135^\circ$$

$$\text{Portanto, } \frac{3\pi}{4} \text{ rad} = 135^\circ.$$

Qual é o comprimento de um arco correspondente a um ângulo central de  $60^\circ$  contido numa circunferência de 1 cm de raio?

### Resolução:

Primeiro convertemos  $60^\circ$  em radianos:

Grau	Radiano
180	$\pi$
60	x

$$\frac{180}{60} = \frac{\pi}{x} \Rightarrow 180x = 60\pi \Rightarrow x = \frac{60\pi}{180} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

**Temos que:**

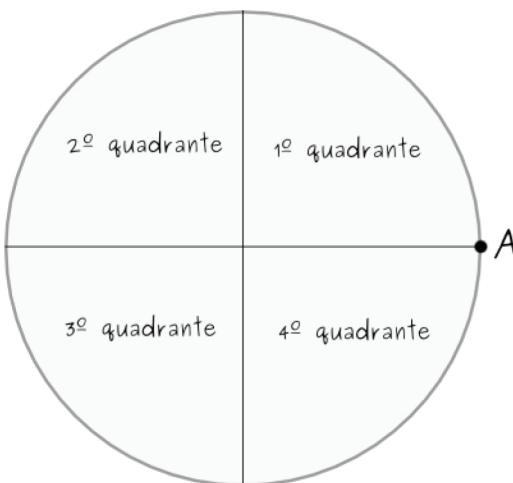
$$\alpha = \frac{\pi}{3} \text{ e } r = 1, \text{ e como } \alpha = \frac{C}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{3} = \frac{C}{1} \Rightarrow 3C = 1 \cdot \pi \Rightarrow C = \frac{\pi}{3}$$

O comprimento do arco é  $\frac{\pi}{3}$  cm, aproximadamente 1,05 cm.

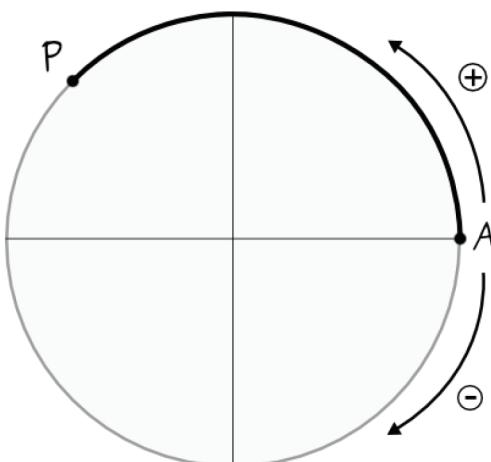
## Ciclo trigonométrico e arco trigonométrico

O ciclo trigonométrico é uma circunferência de raio igual a 1, sobre a qual é fixada um ponto A como origem e um sentido (anti-horário) como positivo.

O ciclo trigonométrico é dividido em quatro partes, chamadas quadrantes.



O arco trigonométrico é o conjunto dos infinitos arcos obtidos partindo-se do ponto de origem A até a próxima extremidade P. Os arcos podem ser obtidos na primeira passagem ou após várias voltas completas no ciclo trigonométrico, no sentido positivo ou negativo.



## Arcos côngruos

Dizemos que dois arcos são côngruos quando os pontos que representam suas extremidades coincidem. Uma regra prática eficiente para determinar se dois arcos são côngruos consiste em verificar se a diferença entre eles é um número divisível ou múltiplo de  $360^\circ$ , isto é, a diferença entre as medidas dos arcos dividida por  $360^\circ$  precisa ter resto igual a zero.

Por exemplo: Verifique se os arcos de medidas  $6\ 230^\circ$  e  $8\ 390^\circ$  são côngruos.

- »  $8\ 390^\circ - 6\ 230^\circ = 2160^\circ$ , agora dividimos  $2\ 160^\circ$  por  $360^\circ$ .
- »  $2\ 160 : 360 = 3$  e resto igual a zero.
- » Portanto,  $6\ 230^\circ$  e  $8\ 390^\circ$  são côngruos.

**Atenção:** Verifique você se os arcos de medidas  $2\ 010^\circ$  e  $900^\circ$  são côngruos.

- » Se um arco é medido em graus, a expressão geral dos arcos côngruos é dada por:

$$\alpha^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

- » Se um arco é medido em radianos, a expressão geral dos arcos côngruos é dada por:

$$x + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

### Acompanhe o exemplo:

Escreva a expressão geral dos arcos côngruos a:

a)  $300^\circ$

$$\alpha = 300^\circ + k \cdot 360^\circ, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

b)  $\frac{13\pi}{6}$

$$\alpha = \frac{13\pi}{6} + k \cdot 2\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}$$

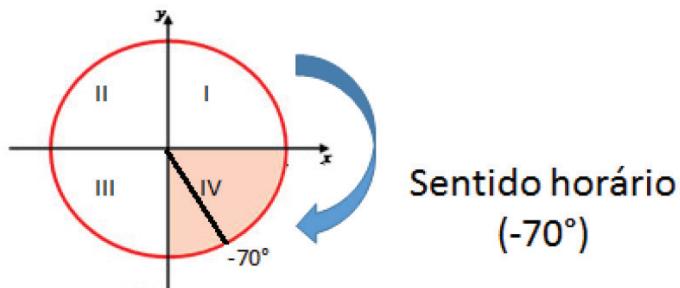
### Exercícios resolvidos:

1) Em qual quadrante se localiza a extremidade do arco que mede:

a)  $-2\ 950^\circ$

**Resolução:** Como a medida absoluta do arco é maior que  $360^\circ$ , dividimos esse valor por  $360$  e o resto dessa divisão permite que encontremos o quadrante procurado.

$2\ 950 : 360 = 8$  e resto  $70$ , ou seja, esse arco dá  $8$  voltas completas mais  $70^\circ$  no sentido horário ( $-2\ 950^\circ$ ). Assim, a extremidade do arco encontra-se no  $4^\circ$  quadrante.



b)  $\frac{13\pi}{4}$

**Resolução:** Uma dica é transformar  $\frac{13\pi}{4}$  em graus. Vamos lá!

**Graus                  Radianos**

$$\begin{array}{ccc} 180 & \text{-----} & \pi \\ x & \text{-----} & \frac{13\pi}{4} \end{array}$$

$$\frac{180}{x} = \frac{\pi}{\frac{13\pi}{4}} \Rightarrow \pi x = 180 \cdot \frac{13\pi}{4} \Rightarrow \pi x = 585\pi \Rightarrow x = 585^\circ$$

E agora, proceder da mesma maneira que o exercício anterior.

$$585 : 360 = 1 \text{ e resto } 225.$$

$225^\circ$  no sentido positivo (anti-horário) está no terceiro quadrante.

2) Calcule a 1<sup>a</sup> determinação positiva do arco de  $1835^\circ$  e o número de voltas completas que esse arco dá na circunferência trigonométrica.

**Resolução**

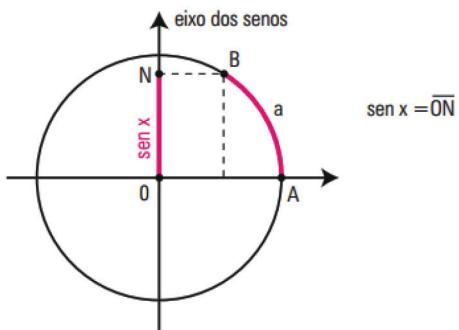
$$1835 : 360 = 5 \text{ e resto } 35.$$

Esse arco tem 5 voltas completas em sentido anti-horário e sua 1<sup>a</sup> determinação positiva é  $35^\circ$ .

## Funções trigonométricas

### A função seno

Marcamos um ponto B, no qual determinamos um arco  $\overarc{AB}$ , cuja medida é um número real. O seno desse arco é definido como o valor da ordenada do ponto B.

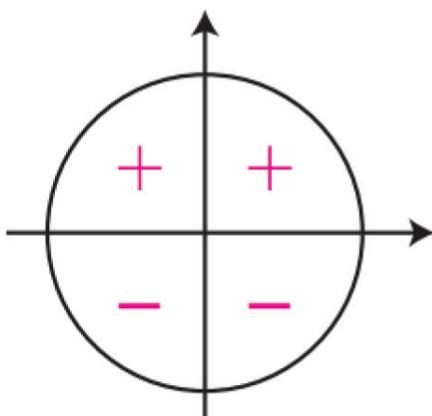


$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \sin x$$

### Variação do sinal da função seno

O seno será positivo no 1º e 2º quadrantes e negativo no 3º e 4º quadrantes.



O domínio da função seno é o conjunto dos números reais ( $D = \mathbb{R}$ ).

### A imagem da função seno é dada por:

O valor do seno se repete a cada volta, sendo uma função periódica. Seu período é  $2\pi$  rad.

### Valores notáveis:

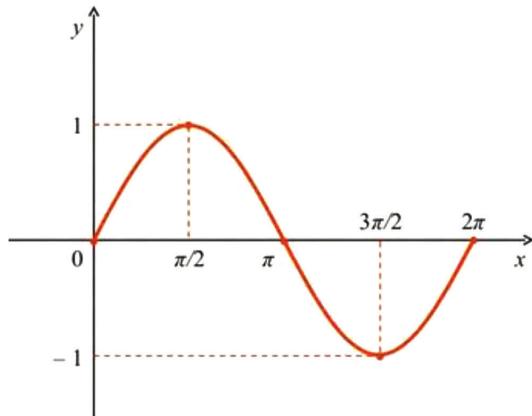
#### Gráfico da função seno

A medida que variamos o arco  $x$  de  $0$  até  $2\pi$  no sentido anti-horário, observamos que:

- $\sin 0 = 0$ ;
- No 1º quadrante a função é sempre positiva e crescente;
- Para  $x = \frac{\pi}{2}$ , a função assume seu valor máximo (+1), ou seja,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ;

- d. No 2º quadrante, a função é sempre positiva, porém decrescente;
- e.  $\sin \pi = 0$ ;
- f. No 3º quadrante, a função é sempre negativa e permanece decrescente;
- g. Para  $x = \frac{3\pi}{2}$  a função assume seu valor mínimo (-1), ou seja,  $\sin \frac{3\pi}{2} = -1$ ;
- h. No 4º quadrante, a função é ainda negativa, mas passa ser crescente;
- i.  $\sin 2\pi = \sin 0 = 0$ ;
- j. O gráfico é simétrico em relação à origem (0,0);
- k. A curva representada no gráfico da função  $f(x) = \sin x$  é chamada senóide;
- l. A partir do início de uma segunda volta no ciclo trigonométrico, os valores de  $\sin x$  irão repetir os resultados obtidos na primeira volta, o que faz da função  $f(x) = \sin x$  uma função periódica de período  $2\pi$  (uma volta).

Arco (x)	$\sin x$
0	0
$\pi/2$	1
$\pi$	0
$3\pi/2$	-1
$2\pi$	0

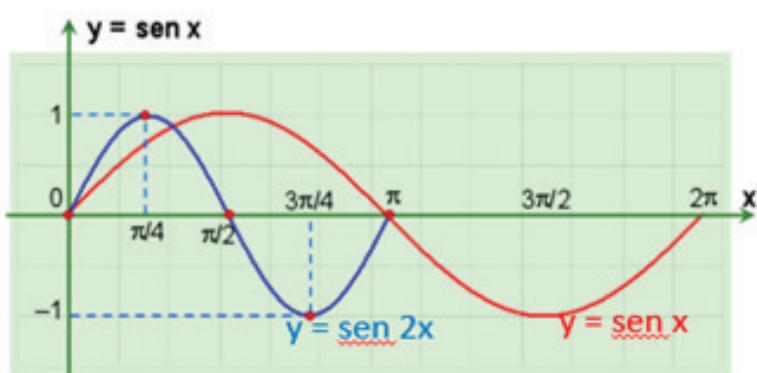


### Exercícios resolvidos:

1) Esboce o gráfico da função trigonométrica  $f(x) = \sin 2x$ .

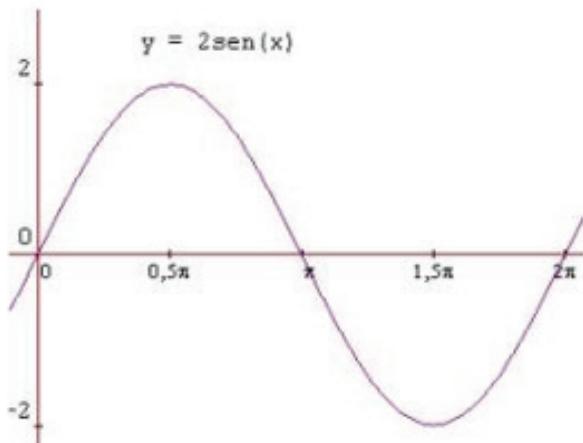
**Resolução:** Construir a tabela a partir de alguns valores conhecidos do intervalo de  $[0, 2\pi]$  para  $2x$ .

$2x$	$x$	$\sin 2x$
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	1
$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	-1
$2\pi$	$\pi$	0



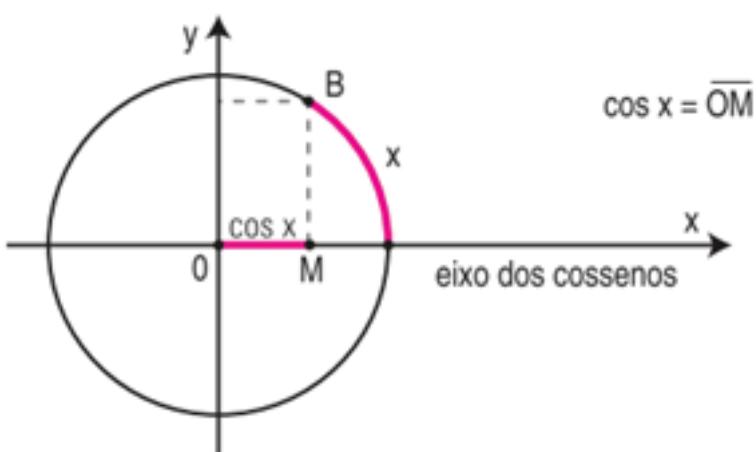
Esboce o gráfico da função trigonométrica  $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ .

<b>2x</b>	<b>x</b>	<b>sen 2x</b>
0	0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	2
$\pi$	0	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1	-2
$2\pi$	$\pi$	0



### A função cosseno

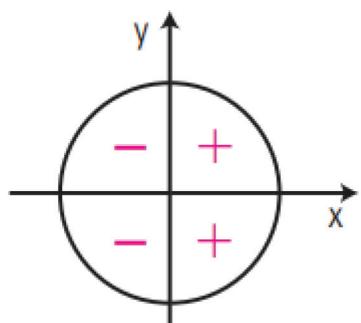
A função cosseno é a abscissa da extremidade do ponto B no ciclo trigonométrico.



$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \cos x$$

### Variação do sinal da função cosseno



O cosseno será positivo no 1º e 4º quadrantes e negativo no 2º e 3º quadrantes.

O domínio da função cosseno é o conjunto dos números reais ( $D = \mathbb{R}$ ).

A imagem da função cosseno é dada por:

$$\text{Im} = [-1, 1] \text{ ou } -1 \leq \cos x \leq 1.$$

O valor do cosseno se repete a cada volta, sendo uma função periódica. Seu período é  $\frac{3\pi}{k}$  rad.

**Valores notáveis:**

	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

**Gráfico da função cosseno**

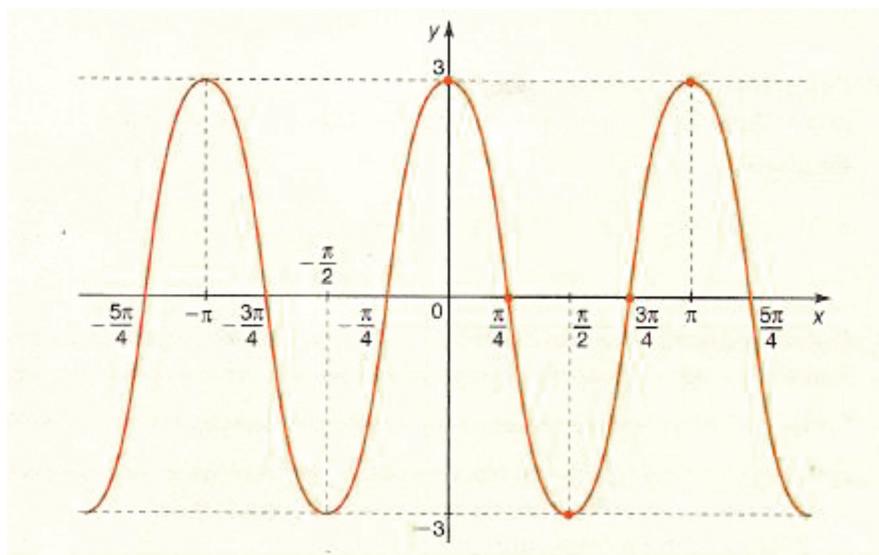
A medida que variamos o arco x de  $0$  até  $2\pi$  no sentido anti-horário, observamos que:

- Em  $x = 0$ , a função assume seu valor máximo:  $\cos 0 = 1$ ;
- No  $1^{\circ}$  quadrante, a função é sempre positiva e decrescente;
- $\cos \frac{\pi}{2} = 0$
- No  $2^{\circ}$  quadrante, a função é sempre positiva, porém decrescente;
- Em  $x = \pi$ , a função assume seu valor mínimo:  $\cos \pi = -1$
- No  $3^{\circ}$  quadrante, a função é sempre negativa e porém crescente;
- $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ ;
- No  $4^{\circ}$  quadrante, a função é ainda positiva e permanece crescente;
- $\cos 2\pi = \cos 0 = 1$ ;
- O gráfico é simétrico em relação à origem  $(0,0)$ ;
- A curva representada no gráfico da função  $f(x) = \sin x$  é chamada cossenóide;
- A partir do início de uma segunda volta no ciclo trigonométrico, os valores de  $\cos x$  irão repetir os resultados obtidos na primeira volta, o que faz da função  $f(x) = \cos x$  uma função periódica de período  $2\pi$  (uma volta).

**Exercício resolvido:**

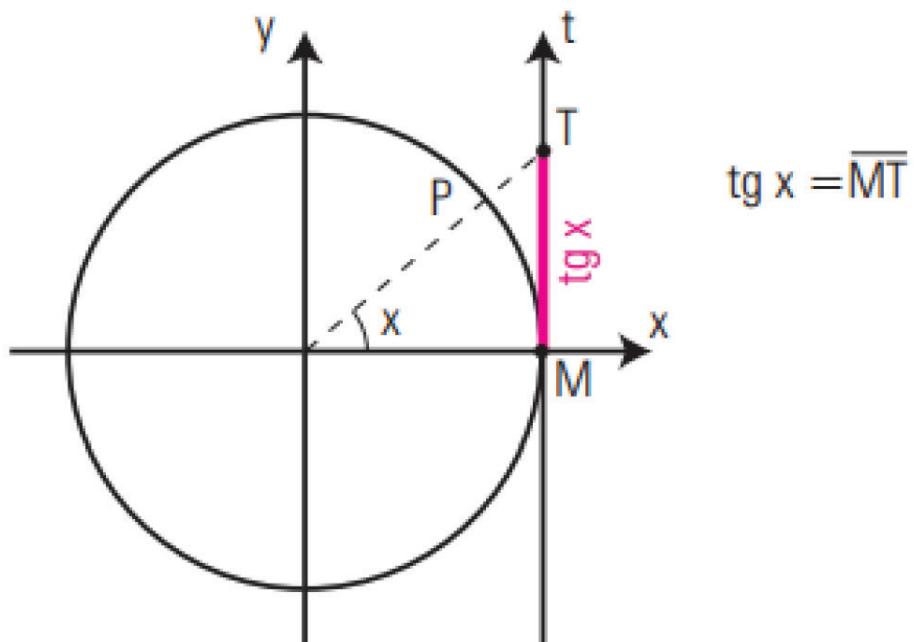
Esboce o gráfico da função trigonométrica  $f(x) = 3 \cos 2x$ .

<b>2x</b>	<b>x</b>	<b><math>\cos 2x</math></b>	<b><math>3 \cos 2x</math></b>
0	0	1	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	0	0
$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	-1	-3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	0	0
$2\pi$	$\pi$	1	3



## A função Tangente

O eixo das tangentes é a reta  $t$ , paralela ao eixo  $y$ , traçada pelo ponto  $M$ .



$$\text{Relacionando: } \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \operatorname{tg} x$$

O domínio da função tangente é:

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

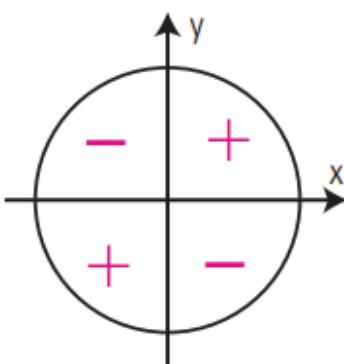
A imagem é dada por:

$$\text{Im} = ]-\infty, +\infty[ \text{ ou } \text{Im} = \mathbb{R}$$

O período da função tangente é  $\pi$ .

### Variação do sinal da função tangente

A tangente é positiva no 1º e 3º quadrantes e negativa no 2º e 4º quadrantes.



### Valores notáveis

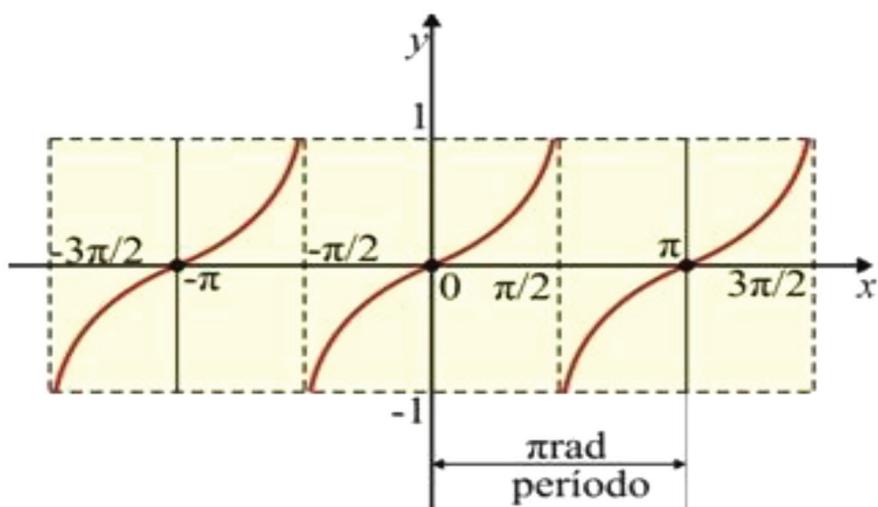
	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
tangente	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\not{def}$	0	$\not{def}$	0

### Gráfico da função tangente

A medida que variamos o arco  $x$  de  $0$  até  $2\pi$  no sentido anti-horário, observamos que:

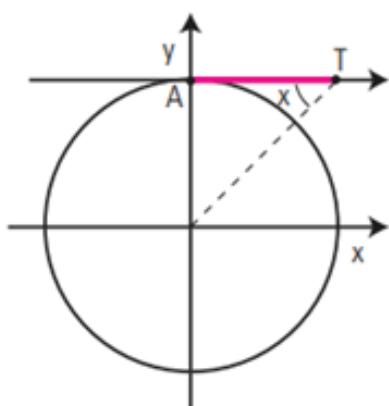
- $\operatorname{tg} 0 = 0$ , a função é sempre positiva e crescente;
- Para  $x = \pi/2$ , a função não é definida;
- No 2º quadrante, a função é sempre negativa e crescente;
- $\operatorname{tg} \pi = 0$ ;

- e. No 3º quadrante, a função é sempre positiva, porém crescente;
- f. Para  $x = 3\pi/2$  a função não é definida;
- g. No 4º quadrante, a função é negativa e crescente;
- h.  $\operatorname{tg} 2\pi = 0$
- i. À medida que  $x$  tende aos valores para os quais a função tangente não é definida, a tangente tende a assumir valores positivos infinitamente grandes ou valores negativos infinitamente pequenos.



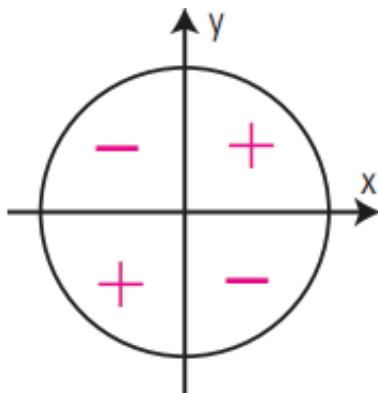
## As funções cotangente, secante e cossecante

Função cotangente: Podemos relacionar  $\cot x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$ . No ciclo trigonométrico, o eixo das cotangentes é o eixo paralelo ao eixo das abscissas e perpendicular ao eixo das ordenadas pelo ponto A.



### Variação do sinal da função cotangente

A cotangente é positiva no 1º e 3º quadrantes e negativa no 2º e 4º quadrantes.



**Valores notáveis:**

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cot x$	$\cancel{\exists}$	0	$\cancel{\exists}$	0	$\cancel{\exists}$

Podemos definir cotangente sendo o inverso da tangente:  $\cot x = \frac{1}{\tan x}$  ou  $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ,

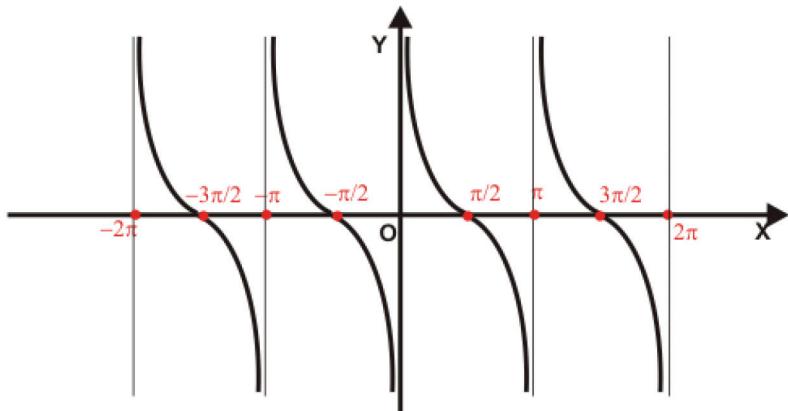
sendo sem  $x \neq 0$ .

$$D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \pi + k\pi\}$$

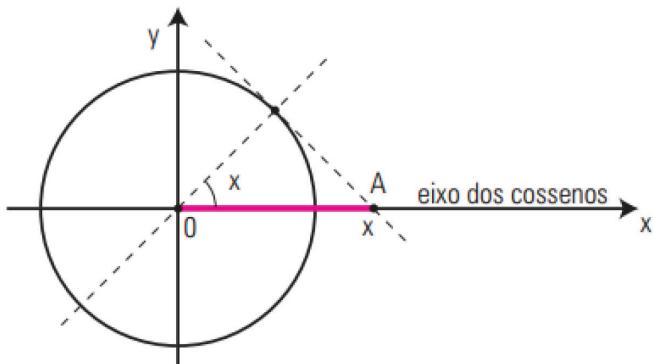
$$\text{Im} = \mathbb{R}$$

$$P = \pi$$

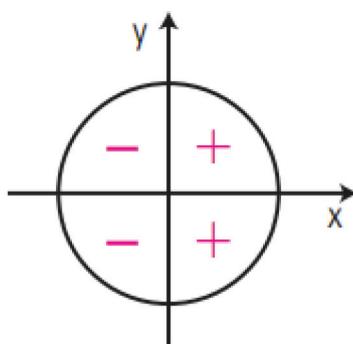
### Gráfico da função cotangente



**Função Secante:** é definida como a abscissa  $\overline{OA}$  do ponto A.



A secante é positiva no 1º e 4º quadrantes e negativa no 2º e 3º quadrantes



### Valores notáveis

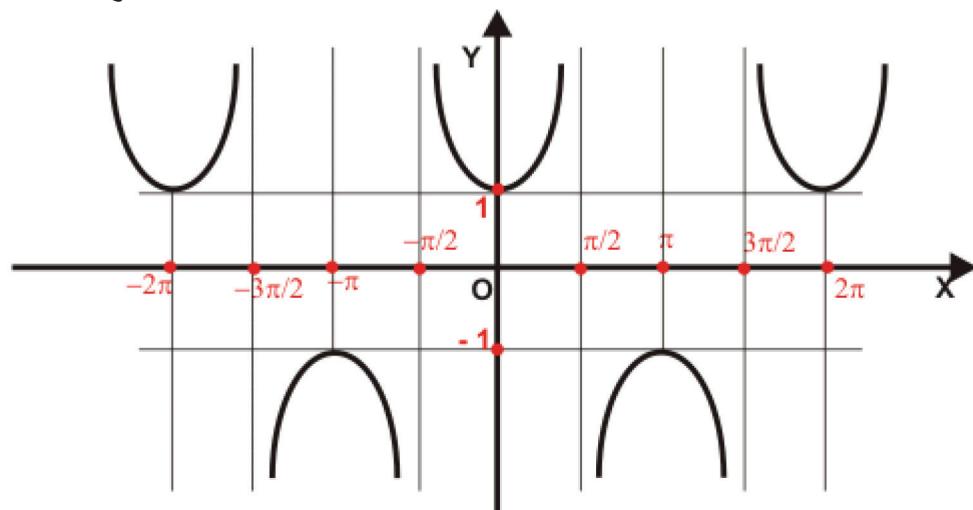
x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sec x$	1	$\not{def}$	-1	$\not{def}$	1

A função secante é o inverso do cosseno:

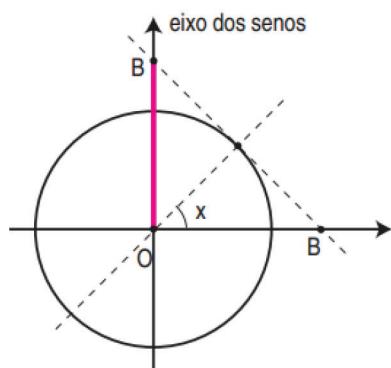
$$\sec x = \frac{1}{\cos x} \text{ e } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1 \text{ ou } y \leq -1\} \quad P = 2\pi$$

## Gráfico da função secante

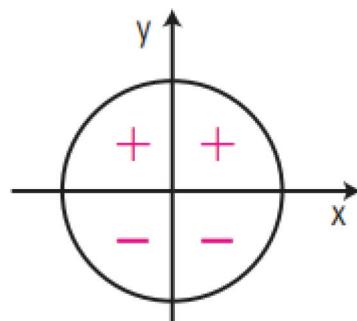


**Função Cossecante** é definido como a ordenada  $\overline{OB}$  do ponto B.



## Variação do sinal da função cossecante

A cossecante é positiva no 1º e 2º quadrantes e negativa no 3º e 4º quadrante



## Valores notáveis

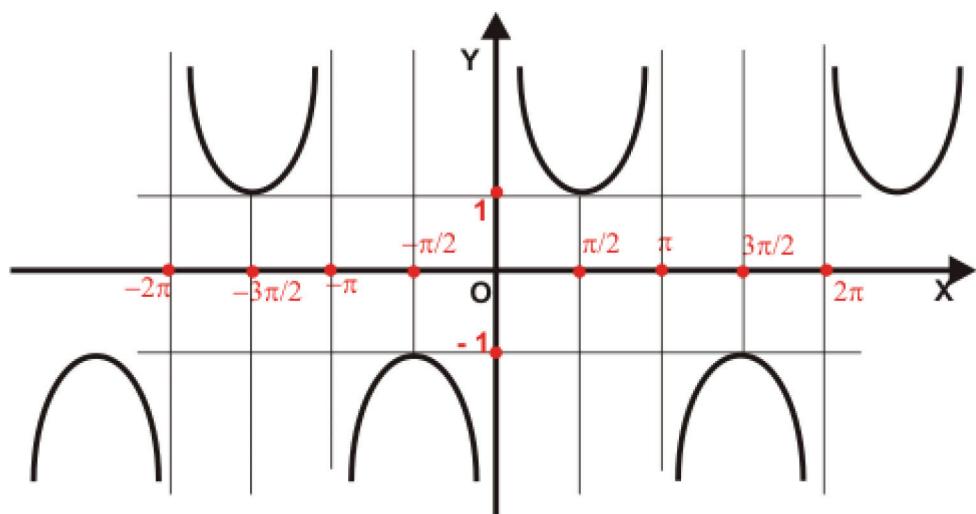
x	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
cossec x	$\not{exists}$	1	$\not{exists}$	-1	$\not{exists}$

A função cossecante é o inverso da função seno:  $\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x}$  em que  $x \neq k\pi$ , com  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Im} = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 1 \text{ ou } y \leq -1\}$$

$$P = 2\pi$$

### Gráfico da função cossecante

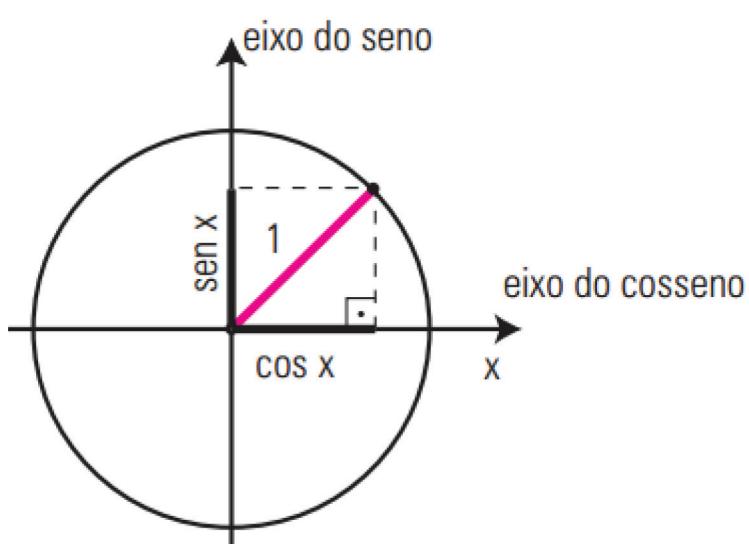


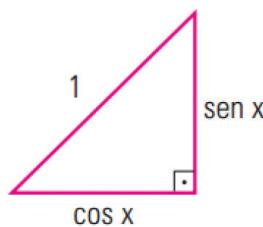
### Relações trigonométricas



### Relação fundamental

De acordo com o ciclo trigonométrico, temos que:





Aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$1^2 = (\operatorname{sen} x)^2 + (\operatorname{cos} x)^2$$

A relação fundamental da trigonometria é:  **$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x = 1$**

## Outras relações trigonométricas

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x} \text{ ou } \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$\operatorname{sec} x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}$$

$$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\operatorname{sec}^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 x = \operatorname{cossec}^2 x \text{ ou } \operatorname{cossec}^2 x = 1 + \operatorname{cotg}^2 x$$

## Exercício resolvido:

Sendo  $\operatorname{cos} \alpha = -\frac{1}{3}$  com  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , determine  $\operatorname{sen} \alpha$ ,  $\operatorname{cossec} \alpha$  e  $\operatorname{tg} \alpha$ .

Resolução:

- $\operatorname{sen} \alpha$

$$\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{9} + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{9-1}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\operatorname{sen} \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

- $\operatorname{cossec} \alpha$

$$\operatorname{cossec} \alpha = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} \Rightarrow \operatorname{cossec} \alpha = -\frac{1}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}} \Rightarrow \operatorname{cossec} \alpha = -1 \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{cossec} \alpha = -\frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \operatorname{cossec} \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \operatorname{cossec} \alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

- $\operatorname{tg} \alpha$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}{-\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$$

## Material Complementar

Para aprofundar seus estudos sobre trigonometria, consulte as indicações a seguir.



- [https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97049/Gerson\\_Luis\\_Uberti.PDF?sequence=1](https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/97049/Gerson_Luis_Uberti.PDF?sequence=1)
- <http://www.somatematica.com.br/soexercicios/razoesTrig.php>
- [http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica\\_elementar/Trigonometria/Trigonometria\\_do\\_Tri%C3%A2ngulo\\_Ret%C3%A2ngulo/Exerc%C3%ADcios](http://pt.wikibooks.org/wiki/Matem%C3%A1tica_elementar/Trigonometria/Trigonometria_do_Tri%C3%A2ngulo_Ret%C3%A2ngulo/Exerc%C3%ADcios)
- [http://www.anossaescola.com/cr/webquest\\_id.asp?questID=1415](http://www.anossaescola.com/cr/webquest_id.asp?questID=1415)



- LASKY, K. **O bibliotecário que mediu a terra.** Rio de Janeiro: Salamandra, 2001.
- GUELLI, O. **Contando a História da Matemática: dando corda na Trigonometria.** SP: Ática. 1997.

## Referências

- BIGODE, A.J.L. **Projeto Vlear: Matemática** – 9º ano. São Paulo: Scipione, 2012.
- DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações** – 1º ano. São Paulo: Ática, 2011.
- IEZZI, G.: **Fundamentos de Matemática Elementar**. 8. ed. v. 3. Editora Atual, 2004. PAIVA, M. Matemática: volume único. São Paulo: Moderna, 1999.
- RIBEIRO, J. **Matemática: ciência e linguagem – volume único**. São Paulo: Scipione, 2007.

## Anotações





**Educação a Distância**  
Cruzeiro do Sul Educacional  
*Campus Virtual*

www.cruzeirodosulvirtual.com.br  
Campus Liberdade  
Rua Galvão Bueno, 868  
CEP 01506-000  
São Paulo SP Brasil  
Tel: (55 11) 3385-3000



Universidade  
**Cruzeiro do Sul**



**UNICID**  
Universidade  
Cidade de S. Paulo



**UNIFRAN**  
Universidade  
de Franca



**UDF**  
Centro  
Universitário



**Módulo**  
Centro  
Universitário