

Fundamentos da Matemática



Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

Material Teórico



Função Logarítmica

Responsável pelo Conteúdo:

Prof.^a Me. Conceição Aparecida Cruz Longo

Revisão Técnica:

Prof.^a Dr.^a Cintia Aparecida Bento dos Santos

Revisão Textual:

Prof. Me. Fatima Furlan

UNIDADE

Função Logarítmica



- Introdução
- Condição de Existência do Logaritmo
- Consequências da Definição de Logaritmo
- Propriedades Operatórias dos Logaritmos
- Mudança de base do logaritmo
- Função Logarítmica
- Equações Logarítmicas
- Inequações logarítmicas



- Nesta unidade trataremos das funções logarítmicas. Em latim *logarithmus* significa “números que envolvem”.
- A função logarítmica é a inversa da função exponencial. Os logaritmos surgiram, como ferramenta de cálculo, para realizar simplificações, já que transformam multiplicações e divisões nas operações mais simples de soma e subtração.

Neste módulo, veremos as funções logarítmicas. Iniciamos nossos estudos com a definição de logaritmo e a sua condição de existência. Estudaremos suas propriedades operatórias. Construiremos o gráfico de uma função logarítmica e resolveremos equações logarítmicas. Encerraremos a Unidade com as inequações logarítmicas.

Faça uma leitura atenciosa do conteúdo e das situações problemas propostas para compreensão e interpretação.

Contextualização

Silêncio

A modernidade e, consequentemente, a urbanização não trouxeram apenas conforto e modernidade. Com os benefícios, diversos problemas, antes, incomuns, passaram a fazer parte do nosso cotidiano. Entre eles, a poluição sonora. Buzinas, sirenes e motocicletas, bem como carros, rádios, televisores, aviões, liquidificadores etc., estão tornando o meio em que vivemos cada vez mais barulhento.

Estudos mostram que a poluição sonora pode causar, além de perda auditiva, estresse, falta de concentração, problemas neurológicos e digestivos, entre outros.

O nível equivalente de ruído de um ambiente é medido em **decibéis** por meio da função logarítmica $n(l) = 10 \log \frac{l}{l_0}$, em que l é a intensidade sonora, em watt/metro quadrado (w/m^2), e l_0 é a intensidade sonora mínima de audibilidade humana, podendo-se considerar $l_0 = 10^{-12} w/m^2$.

Além da intensidade do ruído do ambiente, fatores como o tempo de exposição e características específicas de cada pessoa têm influência nos danos causados à audição.

O nível de ruído recomendável pela Organização Mundial da Saúde (OMS) é de 50 dB. Porém, conforme o quadro seguinte, é comum a exposição a ruídos acima desse nível.

Gerador do ruído Nível equivalente de ruído

Gerador do ruído	Nível equivalente de ruído
Liquidificador	90 dB
Secador de cabelo	90 dB
Britadeira	100 dB
Buzina de automóvel	110 dB
Motor de motocicleta	120 dB
Decolagem de avião a jato	150 dB

Veja duas aplicações.

O nível de ruídos de um ambiente pode ser medido em decibéis (dB) e determinado pela função $n(x) = 120 + 10 \log x$, em que x é a intensidade do ruído, em watts/metro quadrado (w/m^2).

Ao decolar, um avião gerou um ruído com intensidade de $100 w/m^2$. Calcule o nível de ruído em decibéis.

Ao se medir o nível de ruído de um liquidificador, verificou-se que este atingia cerca de 90 dB. Determine a intensidade do ruído gerado pelo liquidificador em watts/metro quadrado.

Resolução:

A) $n(x)=120+10 \log x$, substituímos em x o valor de 100 w/m^2

$$n(100)=120+10 \log 100$$

$$n(100)=120+10 \log 10^2$$

$$n(100)=120+10.2 \log 10$$

$$n(100)=120+20 \cdot 1$$

$$n(100)=120+20$$

$$n(100)=140$$

Resposta: 140dB

B) $n(x)=120+10 \log x$, neste caso, temos $n(x)=90$.

$$90 = 120 + 10 \log x$$

$$10 \log x = 90 - 120$$

$$10 \log x = -30$$

$$\log x = \frac{-30}{10}$$

$$\log x = -3$$

$$10^{-3} = x$$

Resposta: 10^{-3} w/m^2 .

Fonte: RIBEIRO, J. **Matemática**: Ciência e linguagem: volume único. São Paulo: Scipione, 2007.

Introdução



Quando trabalhamos com potências, **três** operações aparecem:

A **primeira** é a potenciação. São dados a base a e o expoente n , por exemplo:

$a^n = x$, onde x é a **segunda** potência de a .

A **segunda** é a radiciação. Nesta, são dados o expoente n e a potência, como no exemplo:

$x^n = a$ ou $x = \sqrt[n]{a}$, em que x é a raiz **cúbica** de a , ou seja, $\sqrt[3]{a}$.

A **terceira** operação é a logaritmação. Nesta, são conhecidas a base a e a potência, como no exemplo $a^x = b$, onde x é o logaritmo do número b na base a , ou $\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$. Podemos estabelecer a equivalência:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

Assim, concluímos que: $\log_a b$ é o número ao qual devemos elevar a base a para obtermos o número b , no caso o número x .

Definição

Para definirmos o que é o logaritmo, vamos tomar como exemplo as equações exponenciais a seguir:

A) $5^x = 25 \Leftrightarrow 5^x = 5^2 \Leftrightarrow x = 2$

Esse valor 2 denomina-se logaritmo do número 25 na base 5 e é representado por $\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$. Assim:

$$\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$$

B) $3^x = \frac{1}{81} \Rightarrow 3^x = \frac{1}{3^4} \Rightarrow 3^x = 3^{-4} \Rightarrow x = -4$

O valor de -4 chama-se logaritmo do número $\frac{1}{81}$ na base 3 e é representado por $\log_3 \frac{1}{81} = -4$.

Dados os números reais positivos a e b , com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de b na base a o expoente c , tal que $a^c = b$, ou seja:

logaritmando
 $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
base logaritmo

No logaritmo, a base pode ser qualquer número real positivo diferente de 1.

Exemplo 1:

- a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$
- b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow (\frac{1}{2})^{-5} = 32$
- c) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$



Exemplo 2:

Calcule os logaritmos a seguir, aplicando a definição:

A) $\log_3 27$

Resolução:

$$\log_3 27 = x \Rightarrow 3^x = 27 \Rightarrow 3^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$$

B) $\log_{0,2} 25$

Resolução:

$$\log_{0,2} 25 = x \Rightarrow (0,2)^x = 25 \Rightarrow (\frac{2}{10})^x = 25 \Rightarrow (\frac{1}{5})^x = 25 \Rightarrow (5^{-1})^x = 25 \Rightarrow 5^{-x} = 25 \Rightarrow -x = 2 \Rightarrow x = -2$$

C) $\log_{(\frac{1}{9})} 3\sqrt{3}$

Resolução:

$$\log_{(\frac{1}{9})} 3\sqrt{3} = x$$

Conserva-se a base e soma-se os expoentes.

$$(\frac{1}{9})^x = 3\sqrt{3} \Rightarrow (\frac{1}{3^2})^x = 3 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (3^{-2})^x = 3^{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow 3^{-2x} = 3^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$$

Observações:

- De acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo, os logaritmos de:

$\log_3(-81); \log_{10}0; \log_03; \log_28 \text{ e } \log_16$

Aplique a definição, nesses casos e veja o que acontece.

- Quando a base do logaritmo for 10 damos o nome de logaritmos decimais e podemos representá-los assim:

$\log 8$, que é o logaritmo de 8 na base 10.

Exemplo 3

Determine o valor de b para que: $\log_{\frac{1}{8}} b = -2$.

Resolução:

Aplicando a definição, temos:

$$\left(\frac{1}{8}\right)^{-2} = b \Rightarrow 8^2 = b \Rightarrow b=64$$

Exemplo 4

Determine o valor de a sabendo-se que: $\log_a 25 = 2$.

Resolução:

Aplicando a definição, temos:

$$a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 25 \Rightarrow a = \pm\sqrt{25} \Rightarrow a = \pm 5$$

Como a deve ser um número positivo e diferente de 1, temos que $a = 5$ (o valor -5 não deve ser considerado)

Portanto, $a = 5$



Além dos logaritmos decimais, temos outro logaritmo importante, cuja base é o número irracional $e = 2,718281828\dots$

Obtido pelo matemático Leonhard Euler (1707 – 1783), o logaritmo de base e é chamado logaritmo neperiano ou logaritmo natural e é representado por $\log_e b$ ou $\ln b$.

Exemplo 5

Determine o valor de cada expressão:

A) $\log_2 (\log_{10} 100)$

Resolução:

» Primeiro calculamos $\log 100$.

$$\log_{10} 100 = x \Rightarrow 10^x = 100 \Rightarrow 10^x = 10^2 \Rightarrow x = 2$$

» Em seguida, calculamos $\log_2 2$.

$$\log_2 2 = x \Rightarrow 2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^1 \Rightarrow x = 1$$

B) $\log_2 0,25 + \log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5}$

Vamos calcular separadamente $\log_2 0,25$ e $\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5}$

$$\log_2 0,25 = x \Rightarrow 2^x = 0,25 \Rightarrow 2^x = \frac{25}{100} \Rightarrow 2^x = \left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow 2^x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow 2^x = (2)^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$\log_{\frac{1}{25}} \sqrt{5} = x \Rightarrow \left(\frac{1}{25}\right)^x = \sqrt{5} \Rightarrow \left(\frac{1}{5^2}\right)^x = \sqrt{5} \Rightarrow 5^{-2x} = 5^{\frac{1}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

Agora, somamos: $-2 + (-\frac{1}{4}) = -2 - \frac{1}{4} = \frac{-8-1}{4} = \frac{-9}{4}$

C) $\sqrt{\frac{3 \log_2 \sqrt{8}}{2}}$

Vamos calcular $\log_2 \sqrt{8}$

$$\log_2 \sqrt{8} = x \Rightarrow 2^x = \sqrt{8} \Rightarrow 2^x = \sqrt{2^3} \Rightarrow 2^x = 2^{\frac{3}{2}} \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\sqrt{\frac{3 \cdot \frac{3}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$$

Condição de Existência do Logaritmo



Pela condição de logaritmo, vimos que:

$$\log_a b = c, \text{ existe se } a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Assim, é preciso definir, em alguns casos, quais os valores de a e b para que o logaritmo exista.

Exemplo:

Determine os valores reais de x para os quais existe:

A) $\log_3 (x - 5)$

Como a base é 3 (positiva e diferente de 1), devemos impor que:

$$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$$

Logo, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$.

B) $\log_{\frac{3}{2}} (x^2 - 7x + 10)$

Condição de existência: $x^2 - 7x + 10 > 0$
 $x^2 - 7x + 10 = 0$

Vamos encontrar as raízes da equação e fazer o estudo do sinal da equação do 2º grau.

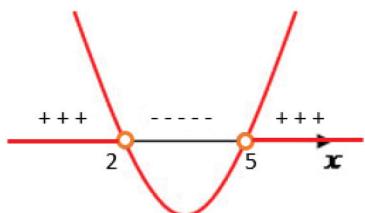
$a = 1 > 0$ (concavidade voltada para cima)

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$\Delta = 9 > 0$ (duas raízes reais e distintas)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x' = 2 \text{ e } x'' = 5$$



Logo, a solução é dada por $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 2 \text{ e } x > 5\}$

C) $\log_{x-2} (x^2 - 4x - 5)$

Pelas condições de existência, temos:

$$\text{I}) x - 2 \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 + 2 \Rightarrow x \neq 3$$

e

$$x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$$

$$\text{II}) x^2 - 4x - 5 > 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

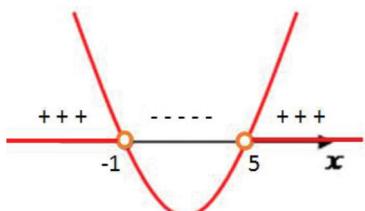
$a = 1 > 0$ (concavidade voltada para cima)

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$\Delta = 36 > 0$ (duas raízes reais e distintas)

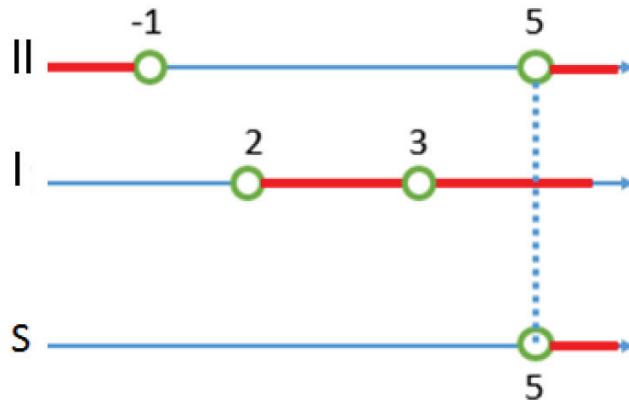
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x' = -1 \text{ e } x'' = 5$$



$$\{x \in \mathbf{R} \mid x < -1 \text{ e } x > 5\}$$

Satisfazendo simultaneamente as duas condições, temos:



Logo, a solução é dada por $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 5\}$

Consequências da Definição de Logaritmo



1. $\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$, qualquer que seja $a > 0$ e $a \neq 1$.
2. $\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$, para todo $a > 0$ e $a \neq 1$.
3. $\log_a a^n = n$, pois $a^n = a^n$ para todo $a > 0$ e $a \neq 1$ e para todo n .
4. $a^{\log_a N} = N$, com $N > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.
5. $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$, com $x > 0$, $y > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

1) Calcule o valor dos logaritmos:

- a. $\log_6 1 = 0$
- b. $\log_{0,6} 0,6 = 1$
- c. $\log_{\sqrt{6}} \sqrt{6} = 1$
- d. $\log_{\frac{1}{6}} 1 = 0$

2) Dê o valor de x nas igualdades:

- a. $1 = \log_3 x \Rightarrow x = 3$
- b. $1 = \log_x 8 \Rightarrow x = 8$

3) Calcule o valor dos logaritmos seguinte:

- a. $\log_5 5^4 = 4$
- b. $\log_3 3^6 = 6$
- c. $\log_2 2^{-4} = -4$
- d. $\log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$
- e. $\log_3 (\underbrace{\log_5 5^3}_3) = \log_3 3 = 1$
- f. $(2. \underbrace{\log_{\underline{10}}}_1)^{\log_2 13} = (2.1)^{\log_2 13} = 2^{\log_2 13} = 13$

Propriedades Operatórias dos Logaritmos



Vamos conhecer agora, as propriedades operatórias dos logaritmos.

1^a propriedade: logaritmo do produto

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c, \text{ com } a > 0, b > 0, c > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Numa mesma base, o logaritmo do produto de dois números positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um desses números.

Exemplos:

- a. $\log_2 (3 \cdot 5) = \log_2 3 + \log_2 5$
- b. $\log 300 = \log (3 \cdot 100) = \log 3 + \log 100 = \log 3 + \log \underbrace{10^2}_2 = \log 3 + 2$

Atenção: $\log 3 \cdot 2$ não é o mesmo que $\log (3 \cdot 2)$.

2^a propriedade: logaritmo do quociente

$$\log_a \left(\frac{b}{c} \right) = \log_a b - \log_a c, \text{ com } a > 0, b > 0, c > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Numa mesma base, o logaritmo do quociente de dois números positivos é igual à diferença entre os logaritmos desses números.

Exemplos:

a. $\log_2 \left(\frac{16}{4}\right) = \log_2 16 - \log_2 4 = \log_2 2^4 - \log_2 2^2 = 4 - 2 = 2$

b. $\log\left(\frac{7}{10}\right) = \log 7 - \underbrace{\log 10}_1 = \log 7 - 1$

3^a propriedade: logaritmo da potência

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Exemplos:

a. $\log_3 5^7 = 7 \cdot \log_3 5$

b. $\log 10^2 = 2 \underbrace{\log 10}_1 = 2 \cdot 1 = 2$

Exercício resolvido

1) Dados $\log_b a = 5$ e $\log_b 2 = 10$, resolva a expressão: $\log_b 24a - \log_b 3$.

Aplicando as propriedades, temos:

$$\log_b 24a - \log_b 3 = \log_b \frac{24a}{3} \quad \text{Aplicar a propriedade do logaritmo do quociente}$$

$$\log_b 8a = \log_b 8 + \log_b a = \quad \text{Aplicar a propriedade do logaritmo do produto.}$$

$$\log_b 2^3 + \log_b a = 3 \cdot \log_b 2 + \log_b a \quad \text{Aplicar a propriedade do logaritmo da potência.}$$

Substituir os valores dados: $3 \cdot 10 + 5 = 30 + 5 = 35$.

2) Escreva as expressões na forma de um único logaritmo.

a. $3 \log 12 + \log 7 = \log 12^3 + \log 7 = \log 12^3 \cdot 7$

b. $(3 \log_2 7 + \log_2 6) - 6 \log_2 3 = (\log_2 7^3 + \log_2 6) - \log_2 3^6$
propriedade de potência

$$(\log_2 7^3 \cdot 6) - \log_2 3^6 = \log_2 \frac{7^3 \cdot 6}{3^6}$$



Mudança de base do logaritmo

Observem:

$$\log_4 64 = 3, \text{ pois } 4^3 = 64$$

$$\log_2 64 = 6, \text{ pois } 2^6 = 64$$

$$\log_2 4 = 2, \text{ pois } 2^2 = 4$$

Temos também que: $\log_4 64 = 3$, podemos escrever:

$\log_4 64 = \frac{\log_2 64}{\log_2 4}$, dizemos que houve uma mudança de base nos logaritmos de base 4 e 2.

$$\text{Assim, } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos:

A) $\log_5 8 = \frac{\log_3 8}{\log_3 5}$, neste caso, o $\log_5 8$ foi transformado em um quociente de logaritmos na base 3.

B) $\log_{\sqrt{3}} 12 = \frac{\log_7 12}{\log_7 \sqrt{3}}$, neste caso, o $\log_{\sqrt{3}} 12$ foi transformado em um quociente de logaritmos na base 7.

ATENÇÃO: A base deve ser escolhida de acordo com a conveniência de cada exercício.

Exercícios resolvidos

1) Escreva $\log_2 8$ usando logaritmos na base 10.

$$\log_2 8 = \frac{\log 8}{\log 2}$$

2) Dado $\log_b a = 6$, calcule $\log_a b^3$.

$$\log_a b^3 = \frac{\log_b b^3}{\log_b a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

3) Calcule o valor da expressão $\log_3 5 \cdot \underline{\log_{25} 81}$.

Escrever na base 3.

$$\log_3 5 \cdot \log_{25} 81 = \log_3 5 \cdot \frac{\log_3 81}{\log_3 25}$$

$$\log_3 5 \cdot \frac{\log_3 3^4}{\log_3 5^2} = \log_3 5 \cdot \frac{4 \log_3 3}{2 \log_3 5} = \log_3 5 \cdot \frac{2 \cancel{\log_3 3}}{\cancel{\log_3 5}} = 2 \cdot 1 = 2$$

Função Logarítmica



Vimos na Unidade anterior que a função definida por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é uma função exponencial. Lembrando que essa é uma função bijetora, ou seja, possui a função inversa.

A função inversa da função exponencial é a função logarítmica, definida por:

$f: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ ou $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Exemplos:

- a. $f(x) = \log_2 x$
- b. $y = \log x$
- c. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

Exercício resolvido

1) Seja a função $f(x) = \log(2x+3)$, determine $D(f)$, $CD(f)$ e $Im(f)$.

Pela definição de logaritmo, temos: $2x + 3 > 0 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$

$$D(f) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > -\frac{3}{2}\}$$

Como a função logarítmica é bijetora, temos que: $CD(f) = Im(f)$, portanto podemos obter o CD de f calculando o D de f^{-1} .

Para calcular f^{-1} trocamos as variáveis x por y e y por x , em seguida, isolamos y .

$$y = \log(2x+3)$$

$x = \log(2y+3)$ aplicamos a definição de logarítmico: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

$$10^x = 2y + 3 \Rightarrow 10^x - 3 = 2y \Rightarrow y = \frac{10^x - 3}{2}$$

Portanto, $f^{-1}(x) = \frac{10^x - 3}{2}$. O domínio desta função são os Reais (\mathbf{R}), consequentemente o $CD(f) = \mathbf{R}$ e, também, $Im(f) = \mathbf{R}$.

2) Dada a função $f(x) = \log_3 x$, calcule:

A) $f(9)$

$$f(9) = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2 \log_3 3 = 2 \cdot 1 = 2$$

B) $f\left(\frac{1}{3}\right)$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \log_3 \frac{1}{3} = \log_3 3^{-1} = -1 \log_3 3 = -1 \cdot 1 = -1$$

C) $f^{-1}(x)$

$$y = \log_3 x \Rightarrow x = \log_3 y \Rightarrow 3^x = y$$

$$f^{-1}(x) = 3^x$$

D) $f^{-1}(-1)$

$$f^{-1}(1) = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

3) Determine o domínio da função $f(x) = \log_{(x-5)} (11-2x)$

Pela definição, temos: $f(x) = \log_a b$, temos que $a > 0$ e $a \neq 1$ e $b > 0$.

I. $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$ e $x - 5 \neq 1 \Rightarrow x \neq 6$

II. $11 - 2x > 0 \Rightarrow 11 > 2x \Rightarrow 2x < 11 \Rightarrow x < \frac{11}{2}$

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid 5 < x < \frac{11}{2}\}$$

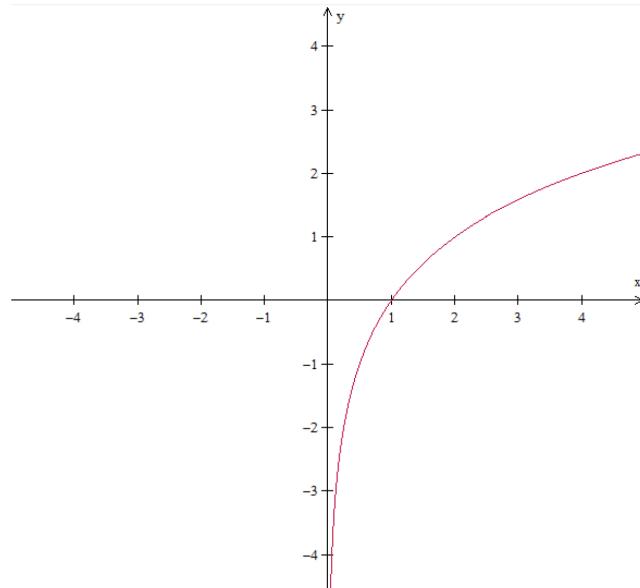
Gráfico da função logarítmica

Observe a construção de dois gráficos de funções logarítmicas.

$$f(x) = \log_2 x \text{ e } g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$$

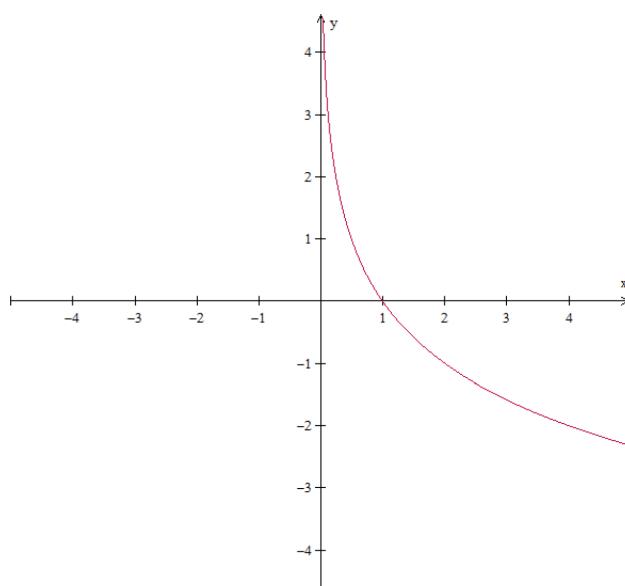
Atribuímos alguns valores para x e encontramos os valores correspondentes de $f(x)$ e $g(x)$.

x	$f(x) = \log_2 x$	$(x, f(x))$
$\frac{1}{4}$	$f\left(\frac{1}{4}\right) = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2 \log_2 2 = -2 \cdot 1 = -2$	$(\frac{1}{4}, -2)$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -1 \log_2 2 = -1 \cdot 1 = -1$	$(\frac{1}{2}, -1)$
1	$f(1) = \log_2 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$f(2) = \log_2 2 = 1$	$(2, 1)$
4	$f(4) = \log_2 2^2 = 2 \cdot \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$	$(4, 2)$



Quando $a > 1$, a função logarítmica é crescente. Se aumentarmos os valores de x , os valores correspondentes de $f(x)$ também aumentam. No gráfico anterior, temos $a = 2 > 1$, portanto a função é crescente.

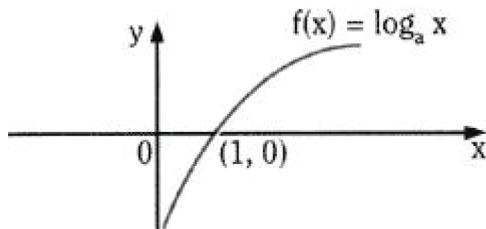
x	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$	$(x, f(x))$
1/4	$g(\frac{1}{4}) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = \log_{\frac{1}{2}} 2^{-2} = -2 \log_{\frac{1}{2}} 2 = -2 \cdot (-1) = 2$	$(\frac{1}{4}, 2)$
1/2	$g(\frac{1}{2}) = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$	$(\frac{1}{2}, 1)$
1	$g(1) = \log_{\frac{1}{2}} 1 = 0$	$(1, 0)$
2	$g(2) = \log_{\frac{1}{2}} 2 = -1$	$(2, -1)$
4	$g(4) = \log_{\frac{1}{2}} 2^2 = 2 \cdot \log_{\frac{1}{2}} 2 = 2 \cdot 1 = -2$	$(4, -2)$



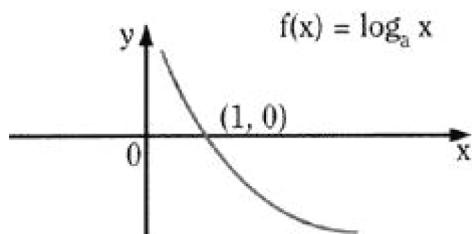
Quando $a < 1$, a função logarítmica é decrescente. Se aumentarmos os valores de x , os valores correspondentes de $g(x)$ diminuem. No gráfico anterior, temos $a = 1/2 < 1$, portanto a função é decrescente.

Como consequência da análise dos gráficos e da definição, concluímos que:

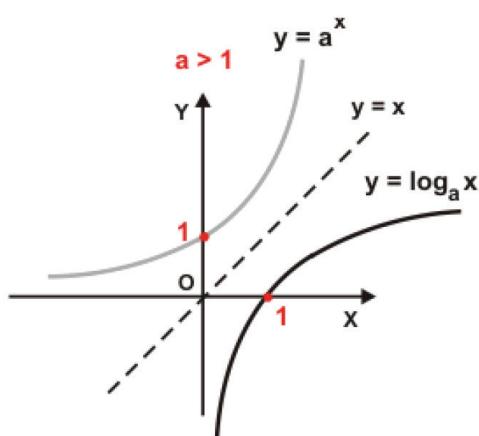
- Se $a > 1$ a função é crescente.



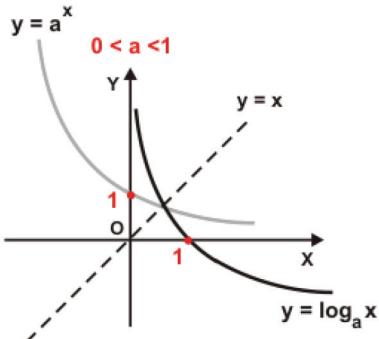
- Se $a < 1$ a função é decrescente.



- » O gráfico da função logarítmica passa pelo ponto $(1, 0)$, ou seja, $f(1) = 0$, ou ainda, $\log_a 1 = 0$.
- » O gráfico não toca o eixo y e nem ocupa os quadrantes II e III.
- » Na função logarítmica, o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem são definidos por: $D(f) = R^*+$, $CD(f) = R$ e $Im(f) = R$.
- » Os gráficos de duas funções inversas são simétricos em relação à reta $y = x$. Veja os gráficos das funções inversas $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$.



Observe que as duas funções são crescentes ($a > 1$). No entanto, à medida que aumentamos os valores de x , a função exponencial cresce rapidamente, enquanto que a função logarítmica cresce muito lentamente.



Neste caso, as duas funções são decrescentes, ou seja,) $0 < a < 1$.

Equações Logarítmicas



Acompanhe os exercícios resolvidos:

Resolva a equação: $\log_2(x-2) = 3$

Primeiro, analisamos o logaritmando e a base. No caso, a base é um número real positivo e diferente de 1, mas é preciso verificar o logaritmando.

Condição de existência: $x - 2 > 0 \Rightarrow x > 2$

Em seguida, aplicamos a definição de logaritmo: $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \log_2(x-2) &= 3 \\ \Rightarrow 2^3 &= x - 2 \Rightarrow 8 = x - 2 \Rightarrow x = 10. \end{aligned}$$

A solução da equação logarítmica tem que satisfazer a condição de existência $x > 2$ e como 10 é maior que 2, a solução desta equação é $S = \{10\}$.

2) Resolva: $\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$

Condição de existência: $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ e $x > 0$, portanto $x > 3$.

$$\log_2(x-3) + \log_2 x = 2$$

$$\log_2(x-3) \cdot x = 2$$

$$2^2 = x \cdot (x - 3)$$

Aplicamos a definição de logaritmo:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

$$4 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

$a = 1 > 0$ (concavidade para cima)

$\Delta = 25 > 0$ (duas raízes reais de distintas)

$$x' = 4 \text{ e } x'' = -1$$

Agora, temos que verificar a condição de existência que é $x > 0$. Neste caso, $x = 4$ pertence ao intervalo $x > 0$, mas $x = -1$ não pertence a esse intervalo, portanto, a solução é $S = \{4\}$.

3) Resolva a equação: $\log_5(x^2 + x - 6) = \log_5(3x+2)$.

Condição de existência:

$$x^2 + x - 6 > 0$$

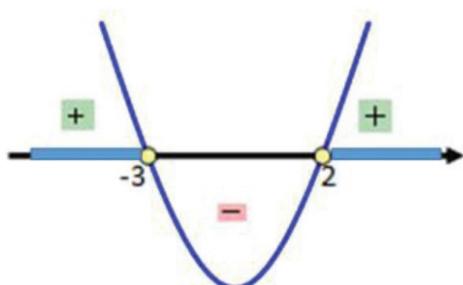
$$x^2 + x - 6 = 0$$

Para resolver essa inequação, resolvemos a equação do 2º grau e fazemos o estudo do sinal dessa função.

$a = 1 > 0$ (concavidade para cima)

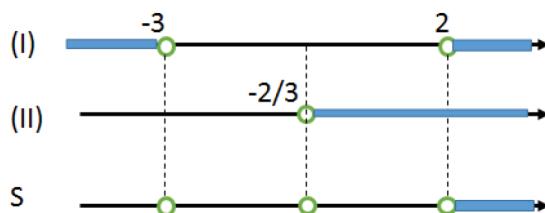
$\Delta = 25 > 0$ (duas raízes reais e distintas)

$$x' = -3 \text{ e } x'' = 2$$



$$3x + 2 > 0 \Rightarrow 3x > -2 \Rightarrow x > -2/3$$

Determinamos a condição de existência por meio da intersecção de (I) e (II).



Portanto, a condição de existência é $x > 2$.

Agora, vamos resolver a equação logarítmica aplicando a propriedade:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

$$\begin{aligned}
 \log_5(x^2 + x - 6) &= \log_5(3x + 2) \\
 x^2 + x - 6 &= 3x + 2 \\
 x^2 + x - 6 - 3x - 2 &= 0 \\
 x^2 - 2x - 8 &= 0 \\
 a = 1 > 0 \text{ (concavidade para cima)} \\
 \Delta = 36 > 0 \text{ (duas raízes reais e diferentes)} \\
 x' = -2 \text{ e } x'' = 4
 \end{aligned}$$

Agora, temos que verificar a condição de existência, que é $x > 2$, portanto apenas $x = 4$ satisfaz a condição de existência. $S = \{4\}$.

4) Resolver a equação: $\log_2(\log_3 x) = 2$.

Condição de existência: $x > 0$ e $\log_3 x > 0$.

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$\log_2(\log_3 x) = 2 \Rightarrow 2^2 = \log_3 x \Rightarrow 4 = \log_3 x \Rightarrow \log_3 x = 4$, aplicamos novamente a definição de logaritmo: $3^4 = x \Rightarrow x = 81$.

Verificando a condição de existência, temos $S = \{81\}$

5) Resolva: $2 \log_{10} x = \log_{10} 4 + \log_{10} 3x$.

Condição de existência: $x > 0$ e $3x > 0 \Rightarrow x > 0$

$$2 \log_{10} x = \log_{10} 4 + \log_{10} 3x$$

$$2 \log_{10} x = \log_{10}(4 \cdot 3x)$$

$$\log_{10} x^2 = \log_{10}(4 \cdot 3x)$$

$$x^2 = 4 \cdot 3x \Rightarrow x^2 = 12x \Rightarrow x^2 - 12x = 0$$

Resolvendo a equação: $x^2 - 12x = 0$, encontramos $x' = 0$ e $x'' = 12$.

Verificando a condição de existência, que é $x > 0$, a solução é apenas $x'' = 12$.

$$S = \{12\}$$

Inequações logarítmicas



Vamos recordar algumas informações importantes que nos ajudarão a resolver uma inequação.

- A função $f(x) = \log_a x$ é crescente quando $a > 1$. Neste caso, conserva-se o sinal da desigualdade.
- A função $f(x) = \log_a x$ é decrescente quando $0 < a < 1$. Neste caso, troca-se o sinal da desigualdade.

Para resolver uma inequação logarítmica, reduzimos os dois membros a logaritmos de mesma base a ($a > 0$ e $a \neq 1$).

Acompanhe os exercícios resolvidos:

1) Resolva a inequação: $\log_5 (5x+10) \leq \log_5 45$.

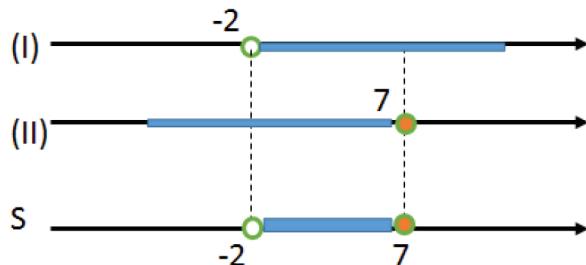
Condição de existência: $5x + 10 > 0 \Rightarrow x > -2$ (I)

Neste caso, já temos as bases dos logaritmos iguais. Como a base é 5 ($a > 1$), mantemos o sinal da desigualdade e resolvemos a inequação.

$$\log_5 (5x+10) \leq \log_5 45$$

$$5x + 10 \leq 45 \Rightarrow 5x \leq 45 - 10 \Rightarrow 5x \leq 35 \Rightarrow x \leq 7 \text{ (II)}$$

A solução da inequação é dada pela intersecção de (I) e (II).



$$\text{Assim, } S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 7\}$$

2) Resolva a inequação: $\log_{\frac{1}{3}}(4x-1) \leq 2$.

Condição de existência: $4x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$ (I)

Como a base é $\frac{1}{3}$ ($0 < x < 1$), invertemos o sinal da desigualdade:

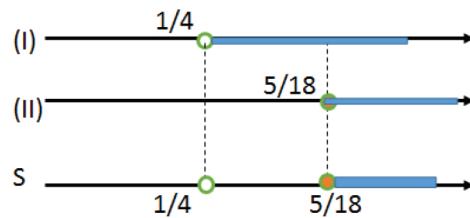
$$\log_{\frac{1}{3}}(4x-1) \leq 2 \Rightarrow \log_{\frac{1}{3}}(4x-1) \leq \log_{\frac{1}{3}}(\frac{1}{3})^2$$

Cancelamos os log e invertemos o sinal da desigualdade:

$$4x - 1 \geq (\frac{1}{3})^2$$

$$4x - 1 \geq \frac{1}{9} \Rightarrow 4x \geq \frac{1}{9} + 1 \Rightarrow 4x \geq \frac{1}{9} + \frac{9}{9} \Rightarrow 4x \geq \frac{10}{9} \Rightarrow x \geq \frac{10}{36} \Rightarrow x \geq \frac{5}{18} \text{ (II)}$$

A solução da inequação é dada pela intersecção de (I) e (II).



$$\text{Assim, } S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq \frac{5}{18}\}$$

3) Resolva a inequação: $\log_3 x + \log_3 (x-8) < 2$.

Condição de existência: $x > 0$ e $x - 8 > 0 \Rightarrow x > 8$, basta $x > 8$ (I)

$$\log_3 x + \log_3 (x-8) < \log_3 3^2$$

$$\log_3 x + \log_3 (x-8) < \log_3 9$$

$$\log_3 x \cdot (x-8) < \log_3 9$$

Como a base é igual a 3 ($a > 1$), mantemos o sinal da desigualdade.

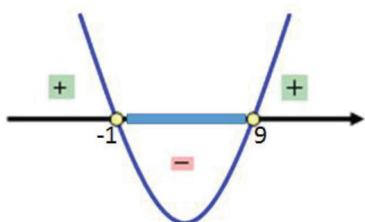
$$x \cdot (x-8) < 9 \Rightarrow x^2 - 8x - 9 < 0$$

$$x^2 - 8x - 9 = 0$$

$a = 1 > 0$ (concavidade voltada para cima)

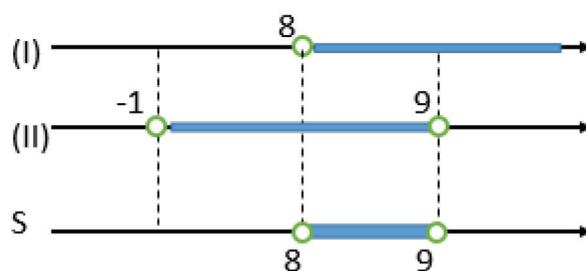
$\Delta = 100 > 0$ (duas raízes reais e distintas)

$$x' = -1 \text{ e } x'' = 9$$



-1 < x < 9 (II)

A solução da inequação é dada pela intersecção de (I) e (II).



$$\text{Assim, } S = \{x \in \mathbb{R} \mid 8 < x < 9\}$$

Material Complementar

Para aprofundar seus estudos sobre função exponencial, consulte as indicações a seguir:

Sites:

- » **Propriedades Operatórias dos Logaritmos :** <http://goo.gl/zCC5cN>
- » **Exponencial e Logaritmos :** <http://goo.gl/4ebiwS>
- » **Logaritmos :** <http://interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/7673.htm>

Livro:

Capítulo 8 do livro “**A Matemática do Ensino Médio**” (volume 1), de Elon Lages Lima, Paulo César P. Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado. Rio de Janeiro, SBM, 1997. Coleção do Professor de Matemática.

Referências

- BIGODE, A.J.L. **Projeto Velear: Matemática (9º ano)**. São Paulo: Scipione, 2012.
- DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e aplicações - 1º ano**. São Paulo: Ática, 2011.
- PAIVA, M. **Matemática**: volume único. São Paulo: Moderna, 1999.
- RIBEIRO, J. **Matemática: Ciência e linguagem**: volume único. São Paulo: Scipione, 2007.

Anotações





Educação a Distância
Cruzeiro do Sul Educacional
Campus Virtual

www.cruzeirodosulvirtual.com.br
Campus Liberdade
Rua Galvão Bueno, 868
CEP 01506-000
São Paulo SP Brasil
Tel: (55 11) 3385-3000



Universidade
Cruzeiro do Sul



UNICID
Universidade
Cidade de S. Paulo



UNIFRAN
Universidade
de Franca



UDF
Centro
Universitário



Módulo
Centro
Universitário