



Campus Virtual

**Cruzeiro do Sul**

*Educação a Distância*

## ***Cálculo Numérico***

***Online***



# Unidade:

Sistemas Lineares

**Responsável pelo Conteúdo:**

Profa. Ms. Adriana Domingues Freitas

**Revisão Técnica:**

Prof. Dr. Jaime Sandro da Veiga

Prof.Dr. Victor Barbosa Félix

## ORIENTAÇÃO DE ESTUDOS

**Olá caros alunos,**

Nesta unidade, você conhecerá os métodos utilizados para a resolução dos sistemas lineares, um conteúdo muito utilizado em situações do dia a dia. Além disso, você irá fazer uma revisão nos conteúdos de matrizes e determinantes.

Inicie os estudos da unidade por meio da apresentação narrada em conjunto com o texto teórico, anotando os pontos principais e relevantes. Após essas anotações, faça uma análise comparativa com o mapa que se encontra disponível. Esse mapa irá guiar você, mostrando os conceitos e as relações existentes. Fique atento aos conceitos a seguir:

- Como fazer operações com matrizes, principalmente a operação de multiplicação de matrizes;
- O que são determinantes e como são calculados nos diferentes tipos de matrizes;
- Quais são os métodos para solução de sistemas lineares.

Busque informações também no material complementar e nas referências bibliográficas sugeridas que estão disponíveis na biblioteca.

O próximo passo é trabalhar com a atividade de aprofundamento para verificar quais as dúvidas que ainda existem e para saná-las, faça uma postagem no fórum de dúvidas.

Por último, resolva a atividade de sistematização. Acompanhe os exemplos, pois podem auxiliá-lo na solução dos exercícios. Sempre mantenha contato com o seu tutor e seus colegas que também podem ajudá-lo na solução dos exercícios e no esclarecimento das dúvidas.

Bom estudo!

## CONTEXTUALIZAÇÃO

A descrição da natureza, em termos matemáticos, é uma busca incansável de grande parte das chamadas Ciências Naturais. Diversos modelos matemáticos são criados com o objetivo de explicar, de maneira exata ou aproximada, os fenômenos naturais que nos cercam.

O modelo linear é, sem dúvida, um grande aliado na descrição de um determinado fenômeno, desde que tal fenômeno se comporte como linear ou se aproxime, significativamente, de um comportamento linear. Um dos motivos de tão grande ajuda é que este acarreta menos dificuldades nos cálculos e, geralmente, conduz a resultados significativos.

Há várias aplicações de modelos lineares como, por exemplo, circuitos elétricos, circuitos hidráulicos, modelos de transporte, logística e programação linear.

Dentro desse contexto, o conteúdo a ser estudado nesta unidade de Cálculo Numérico é a solução de sistemas lineares.

Bom estudo a todos!!

Olá!

Dando continuação à disciplina de Cálculo Numérico, nesta unidade estudaremos alguns métodos para a solução de sistemas lineares, mas antes faremos uma breve revisão sobre matrizes e determinantes.



## MATRIZ

Uma matriz de ordem  $m \times n$  é qualquer conjunto de  $m \times n$  elementos dispostos em **m** linhas e **n** colunas. Representamos cada elemento  $a_{ij}$  de uma matriz por uma letra minúscula acompanhada dos índices  $i$  (que representa a linha na qual o elemento está posicionado) e  $j$  (que representa a coluna na qual o elemento está posicionado); a matriz nós representamos por uma letra maiúscula, como no exemplo da matriz  $A_{3 \times 3}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Cada elemento de uma matriz é localizado por dois índices:  **$a_{ij}$**

O primeiro indica a linha e o segundo a coluna.

A matriz  $A$ , acima, representa uma matriz  $3 \times 3$ , e temos que:

$$a_{11} = 7 \quad ; \quad a_{12} = 3 \quad ; \quad a_{13} = 1 \quad ;$$

$$a_{21} = 0 \quad ; \quad a_{22} = -2 \quad ; \quad a_{23} = 2 \quad ;$$

$$a_{31} = 4 \quad ; \quad a_{32} = 6 \quad ; \quad a_{33} = 9 \quad .$$

As matrizes são classificadas de acordo com o número de linhas e colunas.

- Matriz linha:

Quando temos uma matriz **m** = 1, composta por uma única linha.

- Matriz coluna:

Quando temos uma matriz **n** = 1, composta por uma única coluna.

- Matriz nula:

Quando temos uma matriz cujos elementos são todos iguais a zero.

- Matriz quadrada:

Quando temos uma matriz  $m \times n$ , na qual  $m = n$ , ou seja, há o mesmo número de linhas e colunas.

Em toda matriz quadrada  $n \times n$  temos duas diagonais que são classificadas como: **diagonal principal e diagonal secundária**.

$\begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$  Neste caso: a diagonal principal é formada pelos elementos de posição:  $a_{11}$ ;  $a_{22}$ ,  $a_{33}$  que são: 7, -2, 9  
 E a secundária por  $a_{13}$ ;  $a_{22}$ ,  $a_{31}$ , respectivamente: 1, -2, 4

- Matriz triangular superior:

Quando temos uma matriz quadrada  $n \times n$ , na qual todos os elementos abaixo da diagonal principal são nulos.

Em nossa disciplina, o estudo da matriz quadrada é importante, pois a utilizaremos no cálculo do determinante na solução de sistemas lineares.

### Soma e subtração de matrizes:

Dadas duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , a matriz soma  $A + B$  é a matriz  $C = (c_{ij})_{m \times n}$ , na qual os elementos  $c_{ij}$  serão obtidos por:  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ , portanto, cada elemento de  $C$  será o resultado da soma entre os elementos correspondentes de  $A$  e  $B$ . Chamamos de correspondentes os termos que possuem os mesmos índices  $ij$ .

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Note que somamos  $c_{11} = a_{11} + b_{11}$  e assim sucessivamente para os demais termos das matrizes  $A$  e  $B$ .

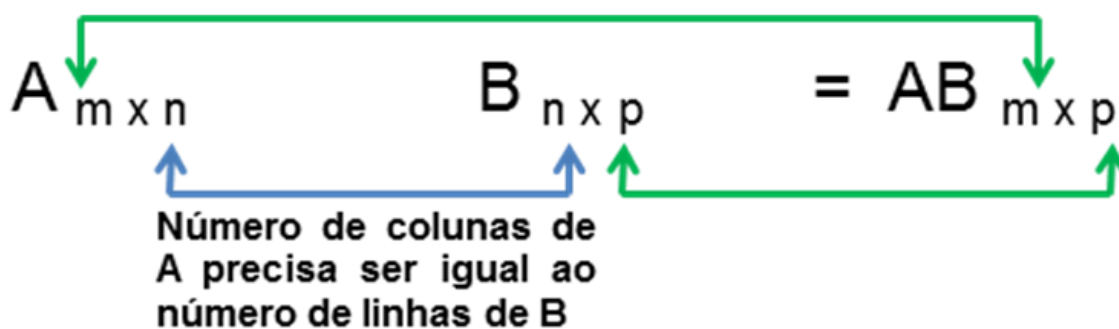
$$C = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11+} + b_{11}} & a_{12+} b_{12} & a_{13+} b_{13} \\ a_{21+} b_{21} & a_{22+} b_{22} & a_{23+} b_{23} \\ a_{31+} b_{31} & a_{32+} b_{32} & \mathbf{a_{33+} + b_{33}} \end{pmatrix}$$

## Multiplicação de matrizes

Dadas duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{n \times p}$ , a multiplicação entre as matrizes A e B gerará uma nova matriz C na qual:

Todo elemento  $c_{ij}$  é calculado ***multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i, da matriz A, pelos elementos da coluna j, da matriz B, e somando-se os produtos obtidos.*** Para dizer que a matriz C é o produto de A por B, vamos indicá-la por AB.

Só definimos o produto AB de duas matrizes quando o ***número de colunas da matriz A for igual ao número de linhas de B***, além disso, notamos que a matriz produto AB possui o número de linhas de A e o número de colunas de B.



Assim, se tivermos uma matriz  $A_{3 \times 2}$  e uma matriz  $B_{3 \times 3}$  não teremos o produto AB, visto que o número de colunas de A não é igual ao número de colunas de B.

Agora, se tivermos uma matriz  $A_{3 \times 3}$  e uma matriz  $B_{3 \times 3}$  o produto entre as matrizes se dará da seguinte forma:



$$\begin{matrix}
 \xrightarrow{\hspace{1cm}} \\
 A = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \mathbf{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}
 \end{matrix}
 \quad
 \begin{matrix}
 \downarrow \hspace{0.5cm} \\
 *B = \begin{bmatrix} \mathbf{b_{11}} & b_{12} & b_{13} \\ \mathbf{b_{21}} & b_{22} & b_{23} \\ \mathbf{b_{31}} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}
 \end{matrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathbf{a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{13} * b_{31}} & a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + a_{13} * b_{32} & a_{11} * b_{13} + a_{12} * b_{23} + a_{13} * b_{33} \\ a_{21} * b_{11} + a_{22} * b_{21} + a_{23} * b_{31} & a_{21} * b_{12} + a_{22} * b_{22} + a_{23} * b_{32} & a_{21} * b_{13} + a_{22} * b_{23} + a_{23} * b_{33} \\ a_{31} * b_{11} + a_{32} * b_{21} + a_{33} * b_{31} & a_{31} * b_{12} + a_{32} * b_{22} + a_{33} * b_{32} & a_{31} * b_{13} + a_{32} * b_{23} + a_{33} * b_{33} \end{bmatrix}$$

Note que cada termo da linha  $a_{1n}$  vai multiplicar um termo na coluna  $b_{n1}$ , e faremos a soma dos produtos, obtendo o  $c_{11} = \mathbf{a_{11} * b_{11} + a_{12} * b_{21} + a_{13} * b_{31}}$ .

Para o cálculo de  $c_{12}$  prosseguiremos da mesma forma, porém cada termo da linha  $a_{1j}$  vai multiplicar um termo da coluna  $b_{i2}$  e teremos  $c_{12} = a_{11} * b_{12} + a_{12} * b_{22} + a_{13} * b_{32}$ . No cálculo de  $c_{13}$ , cada termo da linha  $a_{1j}$  vai multiplicar um termo na coluna  $b_{i3}$  e teremos então  $a_{11} * b_{13} + a_{12} * b_{23} + a_{13} * b_{31}$ . E assim sucessivamente também para as demais linhas.

Exemplo:

Dadas duas matrizes  $A = (a_{ij})_{m \times n}$  e  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , com:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Temos que a matriz  $C = AB$  é possível, uma vez que a condição de que o número de colunas da matriz A é igual ao número de linhas da matriz B.

A matriz  $C=AB$  será obtida por:

$$C = \begin{bmatrix} 2.1+1.0 & 2.(-2)+1.4 \\ 3.1+4.0 & 3.(-2)+4.4 \end{bmatrix}$$

E, portanto:  $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$

## DETERMINANTES

Uma matriz quadrada  $A$  tem, associado a ela, um número real chamado **determinante da matriz  $A$  ( $\det A$ )**, obtido por meio de operações que envolvem todos os elementos da matriz.

### Determinante de matriz quadrada de ordem 1

Seja a matriz quadrada de ordem 1, indicada por  $A = [a_{11}]$ . Por definição, o determinante da matriz será igual ao número de  $a_{11}$ .

Exemplo: Seja a matriz  $A = [-3]$  o determinante de  $A$ , ou seja  $\det A = -3$ .

### Determinante da matriz quadrada de ordem 2

Seja a matriz quadrada de ordem 2. Calculamos seu determinante fazendo o produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária.

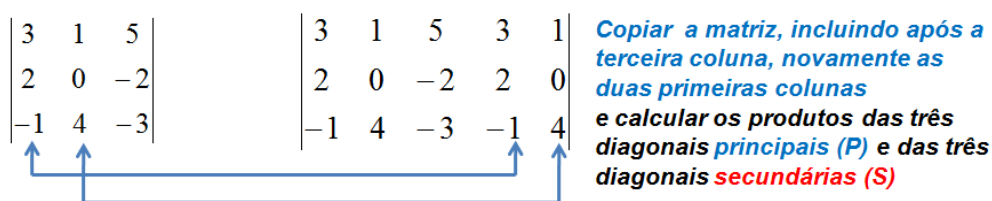
Exemplo: Seja  $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ , temos que o  $\det A = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

- produto da diagonal principal:  $6(-4) = -24$ ;
- produto da diagonal secundária:  $3 \cdot 2 = 6$ ,

isto é,  $\det A = -24 - 6 = -30$ .

$$\text{Determinante da matriz quadrada de ordem } n = 3$$

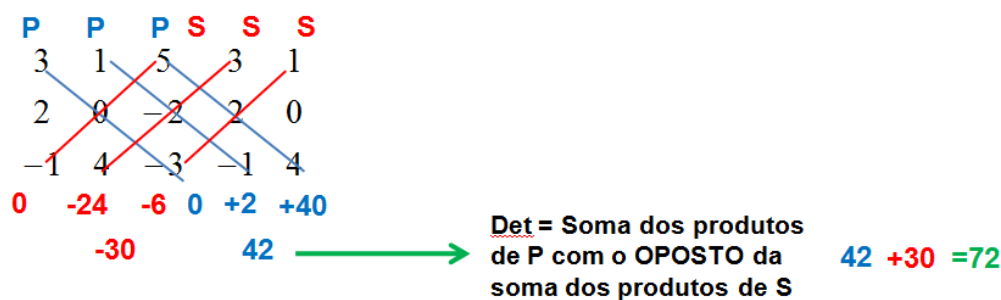
Existem alguns procedimentos para o cálculo do determinante das matrizes quadradas de ordem 3, um deles, chamado de REGRA DE SARRUS, consiste em copiar as duas primeiras colunas da matriz original, como vemos na Figura 1:



**Figura 1** - Cálculo do determinante - Regra de Sarrus - **Fonte:** O Autor

Note que, da matriz quadrada  $A_{3 \times 3}$ , teremos agora uma nova matriz com três diagonais de três elementos no sentido da diagonal principal e três diagonais no sentido das diagonais secundárias.

A seguir, somamos os produtos obtidos nas três diagonais principais com o oposto dos produtos obtidos nas diagonais secundárias como ilustrado na Figura 2:



**Figura 2** - Cálculo do determinante - Regra de Sarrus - **Fonte:** O Autor

O determinante será a soma dos produtos das diagonais principais com o oposto da soma dos produtos das diagonais secundárias.

### Determinante da matriz quadrada de ordem $n \geq 3$

Um dos métodos utilizados para o cálculo do determinante de matrizes de ordem  $n \geq 3$  é o Teorema de Laplace, no qual utilizamos o elemento chamado cofator  $A_{ij}$ .

Chamamos cofator  $A_{ij}$  de um elemento  $a_{ij}$  qualquer de uma matriz quadrada  $A$ , o elemento:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$  em que  $D_{ij}$  é o determinante da matriz que se obtém de  $A$ , eliminando as respectivas linha e coluna do elemento  $a_{ij}$ .

Exemplo:

Considere a matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ . Calcularemos o cofator  $A_{12}$ .

Para o cálculo do cofator, precisaremos do valor do determinante da matriz  $D_{12}$ , para isso eliminamos a primeira linha e segunda coluna da matriz  $A$  e obtemos a nova matriz  $D_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ . A seguir calculamos seu determinante, neste caso, como é uma matriz de ordem  $n = 2$ , fazemos o produto da diagonal principal menos o produto da diagonal secundária, assim o determinante dessa matriz será:  $\det D_{12} = 8 - (-35) = 43$ .

Agora podemos calcular o cofator  $A_{12}$ , usando a fórmula  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ ,

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12} ,$$

$$A_{12} = -1 \cdot (43) ,$$

$$A_{12} = -43 .$$

De acordo com o Teorema de Laplace, para calcular o determinante de uma matriz quadrada, escolhemos livremente uma de suas linhas ou colunas e somamos os produtos dos elementos dessa fila escolhida pelos respectivos cofatores. O Teorema de Laplace é útil quando temos matrizes de ordem  $n > 3$ , pois para matrizes de ordem  $n=3$ , o método de Sarrus se mostra mais prático.

Vejamos um exemplo para o cálculo do determinante de uma matriz  $A$  de ordem  $n = 4$ :

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & 2 & -1 \\ 7 & -5 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

Escolhemos livremente qualquer linha ou coluna da matriz, mas é conveniente que a linha ou coluna possua elementos nulos, já que dessa forma alguns cálculos são desnecessários. Para nosso exemplo, escolhemos a coluna 3, de modo que, pelo teorema de Laplace, o  $\det A$  será definido pela soma dos produtos dos elementos da terceira coluna com seus respectivos cofatores, portanto  $\det A = 2.A_{13} + 0.A_{23} + 3.A_{33} + 0.A_{43}$ .

Sabemos que o cofator  $A_{ij}$  é definido por:  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$ .

Calcularemos os cofatores  $A_{13}$  e  $A_{33}$ , já que não será necessário o cálculo de  $A_{23}$  e  $A_{43}$ , pois os elementos  $a_{23}$  e  $a_{43}$  são nulos, tornando os produtos igualmente nulos.

Para o cálculo do cofator  $A_{13}$  precisaremos do determinante  $D_{13}$ . A matriz  $D_{13}$  é obtida a partir da matriz  $A$ , eliminando a primeira linha e a terceira coluna, e seu determinante pode ser calculado pela regra de Sarrus, conforme estudamos anteriormente.

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot D_{13}$$

Verificamos que  $D_{13} = 12$ .

$$\begin{vmatrix} 7 & -5 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

Logo:

$$A_{13} = (-1)^4 \cdot 12,$$

$$A_{13} = 1 \cdot 12,$$

$$A_{13} = 12.$$

Para o cálculo do cofator  $A_{33}$  precisaremos do determinante  $D_{33}$ . A matriz  $D_{33}$  é obtida a partir da matriz  $A$ , eliminando a terceira linha e a terceira coluna, e seu determinante pode ser calculado pela regra da Sarrus, conforme estudamos anteriormente.

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot D_{33}.$$

Verificamos que  $D_{33} = -25$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 11 & -1 \\ 7 & -5 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -25$$

Logo:

$$A_{33} = (-1)^6 \cdot (-25),$$

$$A_{33} = 1 \cdot (-25),$$

$$A_{33} = -25.$$

Concluimos o processo calculando  $\det A = 2.A_{13} + 0.A_{23} + 3.A_{33} + 0.A_{44}$ :

$$\det A = 2.(12) + 0 + 3(-25) + 0 ,$$

$$\det A = 24 - 75 ,$$

$$\det A = -51 .$$

Com o que estudamos até aqui, você está apto a calcular determinantes de matrizes de qualquer ordem e isso será importante, pois dependeremos do cálculo dos determinantes para a resolução de sistemas lineares, como veremos a seguir.

## SISTEMAS LINEARES

Estudaremos agora os métodos de resolução de sistemas lineares. Nesta unidade veremos quatro métodos.

### Método de Cramer

Considere o sistema abaixo:

$$2x + 1y = 3 ,$$

$$1x - 3y = -2 .$$

A partir desse sistema, construiremos uma equação matricial na qual os coeficientes de  $x$  e  $y$  serão os elementos de uma matriz  $A$  e os termos independentes (sem  $x$  e  $y$ ) serão elementos de outra matriz  $B$ , conforme a Figura 3. Note que usando produto matricial é possível escrever o sistema como uma equação matricial  $A.X = B$ .

$$\begin{cases} 2x + 1y = 3 \\ 1x - 3y = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

**Figura 3** - Equação Matricial – **Fonte:** O Autor

A seguir, calcularemos o  $\det A$ , posteriormente o  $\det A_x$  e  $\det A_y$ . Para calcular  $\det A_x$ , basta trocar os elementos da primeira coluna da matriz  $A$  (que correspondem aos coeficientes de  $x$ ), pelos elementos que compõe a matriz  $B$ . Da mesma forma, para calcular o valor do  $\det A_y$  basta trocar os elementos da segunda coluna da  $A$  (que correspondem aos coeficientes de  $y$ ) pelos elementos que compõe a coluna da matriz  $B$ , como vemos na Figura 4.

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} & \det A &= [(2 \cdot (-3)) - [1 \cdot (1)]] = -6-1 \\
 & & \det A &= -7 \\
 \det A_x &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} & \det A_x &= [(3 \cdot (-3)) - [1 \cdot (-2)]] = -9+2 \\
 & & \det A_x &= -7 \\
 \det A_y &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} & \det A_y &= [(2 \cdot (-2)) - [3 \cdot (1)]] = -4 -3 \\
 & & \det A_y &= -7
 \end{aligned}$$

**Figura 4** - Cálculo  $\det A$ ,  $\det A_x$  e  $\det A_y$  – **Fonte:** O Autor

Os valores de  $x$  e  $y$  para a solução do sistema serão calculados por:

$$x = \frac{\det A_x}{\det A} = \frac{-7}{-7} = 1$$

$$y = \frac{\det A_y}{\det A} = \frac{-7}{-7} = 1$$

Portanto, a solução de nosso sistema será  $x = 1$  e  $y = 1$ .

Se tivermos um sistema cuja matriz seja quadrada de ordem três, resolveremos  $\det A$ ,  $\det A_x$ ,  $\det A_y$  e  $\det A_z$ , que deverão ser calculados conforme vimos na regra de Sarrus. Caso tenhamos uma matriz de ordem quatro, deveremos resolver por intermédio do Teorema de Laplace.

## Método de Gauss

O segundo método a ser estudado é o método de eliminação de Gauss, que consiste em transformar o sistema linear original  $S$  em um sistema linear equivalente  $S'$ , mas de forma escalonada, isto é, com matriz triangular superior. Mas antes vamos a algumas considerações: chamamos de sistemas equivalentes os sistemas que admitem a mesma solução, e é justamente nessa equivalência que

trabalharemos, pois deveremos executar transformações que nos permitam chegar a sistemas equivalentes ao inicial, porém mais práticos de serem resolvidos.

Dentre as transformações destacamos: multiplicando-se os membros de uma equação E qualquer de um sistema linear S, por um número  $K \neq 0$ , o novo sistema S' obtido, será equivalente a S.

Por exemplo, o sistema S é equivalente aos sistemas S' e S'':

**Sistema S**

$$2x + y = 5$$

$$-x + 3y = 1$$

**Sistema S'**

$$2x + y = 5$$

$$-2x + 6y = 2$$

**Sistema S''**

$$6x + 3y = 15$$

$$3x - 9y = -3$$

Note que a diferença de S' para S é que a segunda equação  $E_2$  em S' é o dobro da  $E_2$  em S e também que em S'', a  $E_1$  é o triplo da  $E_1$  de S. Mas são todos sistemas equivalentes, cuja solução é  $x = 2$  e  $y = 1$ .

Outra transformação importante é: “se substituirmos uma equação E de um sistema linear S, pela soma membro a membro (ou seja, de seus respectivos coeficientes e variáveis) dela com outra, o novo sistema obtido S', será equivalente a S”.

Vamos avaliar novamente nosso sistema S e o equivalente S':

**Sistema S**

$$2x + y = 5$$

$$-x + 3y = 1$$

**Sistema S'**

$$2x + y = 5$$

$$-2x + 6y = 2$$

Em S' podemos substituir a segunda equação  $E_2$  pela soma dela mesma com a primeira  $E_1$ , membro a membro, ou seja,

$$2x + (-2x) = 0 \quad \text{e também} \quad y + 6y = 7y \quad \text{e, por fim,} \quad 5 + 2 = 7.$$

Assim, a segunda equação ficará  $0x + 7y = 7$  e o sistema S'', obtido com essa nova equação, será equivalente a S e S':

$$2x + y = 5$$

$$0x + 7y = 7$$



Agora podemos facilmente determinar o valor de  $y$ , pois:

$$7y = 7, \text{ então } y = 1$$

$$\text{e se } y=1 \text{ temos que } 2x + (1) = 5, \text{ então } x = 2.$$

Utilizaremos essas transformações para obtermos sistemas lineares equivalentes, buscando uma matriz triangular superior.

Chamaremos de pivô o número pelo qual deveremos multiplicar as equações para que, ao somarmos ou subtrairmos duas equações, possamos anular uma das variáveis e repetiremos o processo até chegarmos à matriz triangular superior.

Exemplo: resolver o sistema linear S.

$$S = \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$$

$$2x + y - z = 3$$

$$3x - y - 2z = -4.$$

Note que o sistema linear, composto por três equações, pode ser transformado na equação matricial abaixo:

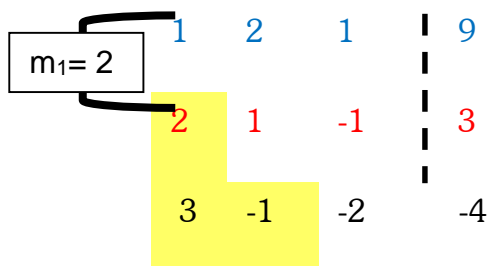
$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}$$

Resolveremos as equações quando obtivermos da matriz original uma matriz triangular superior. Para isso, seguiremos as seguintes etapas:

**Etapas 1:** eliminar os elementos que estão em destaque, ou seja, os elementos  $a_{21}$ ,  $a_{31}$  e  $a_{32}$  da matriz  $A_{3 \times 3}$ , usando as multiplicações e somas necessárias.

**1º Passo:** destacar o elemento pivô da primeira etapa, ou seja, o elemento  $a_{11}$ , pois é por meio dele que anularemos o elemento  $a_{21}$ . Assim, definiremos a partir de  $a_{11}$  e  $a_{21}$ , o multiplicador da equação.

$$m_1 = \frac{a_{21}}{a_{11}} = \frac{2}{1} = 2$$

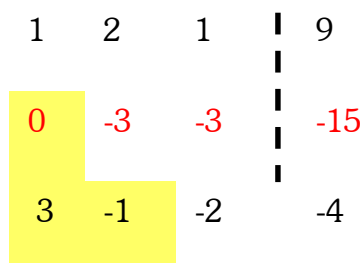


$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 9 \\
 2 & 1 & -1 & 3 \\
 3 & -1 & -2 & -4
 \end{array}$$

**2º Passo:** determinar a transformação da segunda equação ( $E2'$ ), que será dada pela subtração da mesma ( $E2$ ) com a primeira equação ( $E1$ ) multiplicada por  $m_1$ , ou seja,  $E2' = E2 - m_1 \cdot E1$ . Acompanhe a transformação de cada um dos termos da segunda equação  $E2'$ :

NOVO $a_{21}$	NOVO $a_{22}$	NOVO $a_{23}$	NOVO $a_{24}$
$a_{21} - m_1 \cdot a_{11}$	$a_{22} - m_1 \cdot a_{12}$	$a_{23} - m_1 \cdot a_{13}$	$a_{24} - m_1 \cdot a_{14}$
$2 - 2(1)$	$1 - 2(2)$	$-1 - 2(1)$	$3 - 2(9)$
0	-3	-3	-15

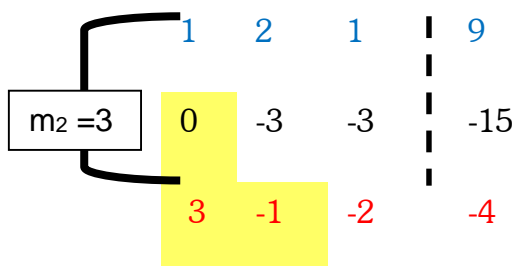
Logo, nosso sistema, com a substituição de  $E2$  por  $E2'$  ficará:



$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 9 \\
 0 & -3 & -3 & -15 \\
 3 & -1 & -2 & -4
 \end{array}$$

**3º Passo:** anular o termo  $a_{31}$ , neste caso o pivô será determinado por  $a_{11}$  e o multiplicador ( $m_2$ ), por  $a_{11}$  e  $a_{31}$

$$m_2 = \frac{a_{31}}{a_{11}} = \frac{3}{1} = 3$$



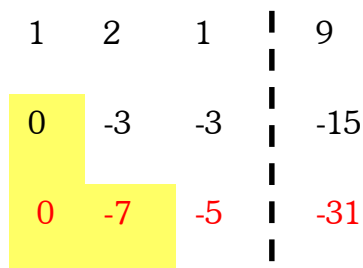
$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 9 \\
 0 & -3 & -3 & -15 \\
 3 & -1 & -2 & -4
 \end{array}$$

**4º Passo:** executar a transformação, mas agora da terceira equação (E3) que será subtraída do triplo da primeira equação (E1)

A nova E3' será dada por:

novo $a_{31}$	novo $a_{32}$	novo $a_{33}$	novo $a_{34}$
$a_{31} - m_2 \cdot a_{11}$	$a_{32} - m_2 \cdot a_{12}$	$a_{33} - m_2 \cdot a_{13}$	$a_{34} - m_2 \cdot a_{14}$
$3 - 3(1)$	$-1 - 3(2)$	$-2 - 3(1)$	$-4 - 3(9)$
0	-7	-5	-31

O sistema, com a nova equação, ficará:



$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 9 \\
 0 & -3 & -3 & -15 \\
 0 & -7 & -5 & -31
 \end{array}$$

**5º Passo:** anular o termo  $a_{32}$ . O pivô será determinado por  $a_{22}$  e o multiplicador, por  $a_{22}$  e  $a_{32}$ .

$$m_3 = \frac{a_{32}}{a_{22}} = \frac{-7}{-3} = \frac{7}{3}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 9 \\
 0 & -3 & -3 & -15 \\
 0 & -7 & -5 & -31
 \end{array}$$

$m_3 = 7/3$

**6º Passo:** executamos a transformação, mas agora da terceira equação (E3) que será subtraída da segunda equação (E2) multiplicada por  $m_3 = 7/3$ .

A terceira equação E3', será dada por:

novos $a_{31}$	novos $a_{32}$	novos $a_{33}$	novos $a_{34}$
$a_{31} - m_3 \cdot a_{21}$	$a_{32} - m_3 \cdot a_{22}$	$a_{33} - m_3 \cdot a_{23}$	$a_{34} - m_3 \cdot a_{24}$
$0 - 7/3(0)$	$-7 - 7/3(-3)$	$-5 - 7/3(-3)$	$-31 - 7/3(-15)$
0	0	$-5 + 7 = 2$	$-31 + 35 = 4$

Dessa forma, nosso sistema ficará:

$$\begin{array}{ccc|c}
 1 & 2 & 1 & 9 \\
 0 & -3 & -3 & -15 \\
 0 & 0 & 2 & 4
 \end{array}$$

Que compõe uma matriz triangular na qual prosseguiremos com a segunda etapa.

**2ª Etapa:** Resolver as equações E1, E2 e E3.

Iniciamos por E3:

$$2z = 4.$$

$$z = 2.$$

Com o valor de  $z = -2$ , resolvemos E2:

$$-3y - 3z = -15,$$

$$-3y - 3(2) = -15,$$

$$y = 3.$$

E por fim, resolvemos E3:

$$x + 2y + z = 9,$$

$$x + 2(3) + (2),$$

$$x = 1.$$

Portanto, a solução de nosso sistema será  $S = (1, 3, 2)$ .

Vale considerar que, neste exemplo, lidamos com números inteiros, porém podemos encontrar sistemas com números racionais e, por vezes, poderemos encontrar pivôs nulos ou próximos de zero, o que pode conduzir a resultados imprecisos com a ampliação de erros de arredondamento. Assim, para contornar problemas como esse, podemos executar algumas manobras como:

- No início de cada etapa, escolher para pivô o elemento de maior módulo entre os coeficientes;
- Trocar as linhas das equações, se necessário para obter um pivô mais conveniente;
- Promover transformações, por meio da multiplicação em duas equações simultaneamente, em busca de um pivô mais conveniente.

## Método de Gauss-Jacobi

O terceiro método que estudaremos é o método de Gauss-Jacobi, que trabalha o sistema linear  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , em que:

$A$  : matriz quadrada dos coeficientes das variáveis,

$X$  : matriz linha com as variáveis,

$B$  : matriz linha dos termos independentes.

Neste método, nós transformamos o sistema  $AX = B$  em um sistema do tipo  $X = CX + G$  que se tornará a base do processo de iteração para o cálculo do conjunto solução. Adotando valores iniciais, a cada iteração realizada em  $X = CX + G$ , o resultado converge para a solução dentro de uma margem de erro calculada.

Exemplo: Resolver o sistema S, utilizando quatro casas decimais e considerando aproximação inicial  $x = 0$  e  $y = 0$  e erro  $\varepsilon < 0,05$ .

$$S = \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$

Para transformar  $AX = B$  em  $X = CX + G$ , devemos isolar na equação E1 a variável  $x$  e, em seguida na equação E2, a variável  $y$ . Se tivermos uma terceira equação, daremos sequência e isolaremos a variável  $z$ .

Em E1, temos:

$$2x + y = 3,$$

$$x = \frac{1}{2}(3 - y),$$

$$x = 0,5(3 - y).$$

Em E2, temos:

$$x - 3y = -2,$$

$$y = -1/3(-2 - x),$$

$$y = 0,3333(2 + x).$$

Agora com as variáveis isoladas, temos  $X = CX + G$  definida, executaremos um processo iterativo que consiste em substituímos os valores para  $x$  e  $y$ , obtendo  $x_1$  e  $y_1$  com suas respectivas margens de erro. Finalizaremos o processo quando chegarmos ao erro estabelecido.

1ª Iteração: como temos por aproximação inicial $x = 0$ e $y = 0$ , então:	
Utilizando $x = 0$ , obteremos $y_1$ :	Utilizando $y = 0$ , obteremos $x_1$ :
$y_1 = 0,3333(2 + x),$	$x_1 = 0,5(3 - y),$
$y_1 = 0,3333(2 + 0),$	$x_1 = 0,5(3 - 0),$
$y_1 = 0,3333(2),$	$x_1 = 0,5(3),$
$y_1 = 0,6666 .$	$x_1 = 1,5 .$
Com o erro: $\varepsilon =  y_1 - y_0 ,$	Com o erro $\varepsilon =  x_1 - x_0 ,$
$\varepsilon =  0,6666 - 0  = 0,6666 .$	$\varepsilon =  1,5 - 0  = 1,5 .$

2ª Iteração: utilizaremos  $x_1 = 1,5$  e  $y_1 = 0,6666$  :

Com  $x_1 = 1,5$  obteremos  $y_2$ :

$$y_2 = 0,3333(2 + x_1),$$

$$y_2 = 0,3333(2 + 1,5),$$

$$y_2 = 0,3333(3,5),$$

$$y_2 = 1,1666 .$$

Com o erro:  $\varepsilon_y = |y_2 - y_1|$ ,

$$\varepsilon_y = |1,1666 - 0,6666| = 0,5 .$$

Com  $y_1 = 0,6666$  obteremos  $x_2$ :

$$x_2 = 0,5(3 - y_1),$$

$$x_2 = 0,5(3 - 0,6666),$$

$$x_2 = 0,5(2,3334),$$

$$x_2 = 1,1667 .$$

Com o erro  $\varepsilon_x = |x_2 - x_1|$ ,

$$\varepsilon_x = |1,1667 - 1,5| = 0,3333 .$$

Com os erros  $\varepsilon_x$  e  $\varepsilon_y$ , podemos calcular o erro da iteração por meio da razão entre o maior valor de  $\varepsilon$  e o maior valor absoluto obtido entre  $x$  e  $y$  na iteração. Logo,

$$\varepsilon = \frac{0,5}{1,1667} = 0,429 .$$

3ª Iteração: utilizaremos  $x_2 = 1,1667$  e  $y_2 = 1,1666$  :

Com  $x_2 = 1,1667$  obteremos  $y_3$ :

$$y_3 = 0,3333(2 + x_2),$$

$$y_3 = 0,3333(2 + 1,1667),$$

$$y_3 = 0,3333(3,1667),$$

$$y_3 = 1,0555 .$$

Com o erro:  $\varepsilon = |y_3 - y_2|$ ,

$$\varepsilon_y = |1,0555 - 1,1666| = 0,1111$$

Com  $y_2 = 1,1666$  obteremos  $x_3$ :

$$x_3 = 0,5(3 - y_2),$$

$$x_3 = 0,5(3 - 1,1666),$$

$$x_3 = 0,5(1,8334),$$

$$x_3 = 0,9167 .$$

Com o erro  $\varepsilon = |x_3 - x_2|$ ,

$$\varepsilon_x = |0,9167 - 1,1667| = 0,25 .$$

$$\text{Calculando o erro } \varepsilon \text{ da iteração 3: } \varepsilon = \frac{0,25}{1,0555} = 0,237$$

4ª Iteração: utilizaremos $x_3 = 0,9167$ e $y_3 = 1,0555$ :	
Com $x_3 = 0,9167$ , obteremos $y_4$	Com $y_3 = 1,0555$ , obteremos $x_4$
$y_4 = 0,3333(2 + x_3),$	$x_4 = 0,5(3 - y_3),$
$y_4 = 0,3333(2 + 0,9167),$	$x_4 = 0,5(3 - 1,0555),$
$y_4 = 0,3333(2,9167),$	$x_4 = 0,5(1,9445),$
$y_4 = 0,9721.$	$x_4 = 0,9723.$
Com o erro: $\varepsilon =  y_4 - y_3 ,$	Com o erro $\varepsilon =  x_4 - x_3 ,$
$\varepsilon =  0,9721 - 1,0555  = 0,0834.$	$\varepsilon =  0,9723 - 0,9167  = 0,0556.$
Calculando o erro $\varepsilon$ da iteração 4: $\varepsilon = \frac{0,0833}{0,9723} = 0,086.$	

5ª Iteração: utilizaremos $x_4 = 0,9723$ e $y_4 = 0,9721$	
Com $x_4 = 0,9723$ , obteremos $y_5$	Com $y_4 = 0,9721$ , obteremos $x_5$
$y_5 = 0,3333(2 + x_4),$	$x_5 = 0,5(3 - y_4),$
$y_5 = 0,3333(2 + 0,9723),$	$x_5 = 0,5(3 - 0,9721),$
$y_5 = 0,3333(2,9723),$	$x_5 = 0,5(2,0279),$
$y_5 = 0,9907.$	$x_5 = 1,0140.$
Com o erro: $\varepsilon =  y_5 - y_4 ,$	Com o erro $\varepsilon =  x_5 - x_4 ,$
$\varepsilon =  0,9907 - 0,9721  = 0,0186.$	$\varepsilon =  1,0140 - 0,9723  = 0,0417.$

Calculando o erro  $\varepsilon$  da 5ª iteração:  $\varepsilon = \frac{0,0417}{1,0140} = 0,041$  notamos que a margem de erro  $\varepsilon < 0,05$  foi satisfeita para o sistema, caso o erro procurado fosse  $\varepsilon \leq 0,01$ , continuaríamos a iteração:



6ª Iteração: utilizaremos $x_5 = 1,0140$ e $y_5 = 0,9907$	
Com $x_5 = 1,0140$ , obteremos $y_6$	Com $y_5 = 0,9907$ , obteremos $x_6$
$y_6 = 0,3333(2 + x_5),$	$x_6 = 0,5(3 - y_5),$
$y_6 = 0,3333(2 + 1,0140),$	$x_6 = 0,5(3 - 0,9907),$
$y_6 = 0,3333(3,0140),$	$x_6 = 0,5(2,0093),$
$y_6 = 1,0046.$	$x_6 = 1,0047.$
Com o erro: $\varepsilon =  y_6 - y_5 ,$	Com o erro $\varepsilon =  x_6 - x_5 ,$
$\varepsilon =  1,0046 - 0,9907  = 0,0139.$	$\varepsilon =  1,0047 - 1,0140  = 0,0093.$

Na sexta iteração, chegamos aos valores de  $x = 1,0047$  e  $y = 1,0046$  com margem de erro inferior a 0,01 e, portanto, finalizamos o processo considerando, dentro do erro estabelecido, o conjunto solução  $S = (1,0047; 1,0046)$ . Se quisermos um resultado mais preciso, poderemos continuar as iterações de acordo com uma nova margem de erro procurada.

Podemos notar que os valores obtidos após seis iterações convergem para os valores que obtivemos pelo processo de Cramer, o primeiro método que apresentamos aqui nesta unidade.

Assim, o método de Gauss-Jacobi é um método que permite, por meio de iterações, a obtenção de soluções que convergem, dentro de uma margem de erro, para suas respectivas soluções exatas.

## Método de Gauss-Seidel

O quarto método que estudaremos é o método de Gauss-Seidel, que trabalha o sistema linear  $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ , nas mesmas situações que compareceram no método de Gauss-Jacobi, a saber:

$A$  : matriz quadrada dos coeficientes das variáveis,

$X$  : matriz linha das variáveis,

$B$  : matriz linha dos termos independentes.

Neste método, o procedimento será muito semelhante ao de Gauss-Jacobi, isto é, transformamos o sistema  $AX = B$  em um sistema do tipo  $\mathbf{X} = \mathbf{CX} + \mathbf{G}$  que se tornará a base do processo de iteração para o cálculo, porém com a diferença de que a iteração não será feita com uma aproximação inicial para a matriz inteira  $\mathbf{X}$  para a obtenção de nova matriz  $\mathbf{X}$  após a iteração, mas a iteração será feita em sequência para cada variável. Dessa forma, ao fornecer uma aproximação para  $y_0$  e  $z_0$ , obtemos  $x_1$ ; com  $x_1$  e  $z_0$ , obtemos  $y_1$ ; com  $x_1$  e  $y_1$ , obtemos  $z_1$  de maneira a formar a primeira iteração para a matriz  $\mathbf{X}$ . Prosseguindo as iterações, utilizamos  $y_1$  e  $z_1$ , para obter  $x_2$ ; com  $x_2$  e  $z_1$ , obtemos  $y_2$  e com  $x_2$  e  $y_2$ , obtemos finalmente  $z_2$  para formar a segunda iteração para a matriz  $\mathbf{X}$ . Conforme a necessidade, o método poderá prosseguir.

Vamos fazer um exemplo para tornar mais claro o método.

Exemplo: Resolver o sistema S pelo método de Gauss-Seidel utilizando quatro casas decimais e considerando como aproximação inicial  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  e  $z_0 = 0$  e erro  $\varepsilon < 0,05$ .

$$S = \begin{cases} 5x + y + z = 5, \\ 3x + 4y + z = 6, \\ 3x + 3y + 6z = 0. \end{cases}$$

Isolando cada uma das variáveis, obtemos:

Em E1:

$$5x + y + z = 5,$$

$$x = 0,2 (5 - y - z).$$

Em E2:

$$3x + 4y + z = 6,$$

$$y = 0,25 (6 - 3x - z).$$

Em E3:

$$3x + 3y + 6z = 0,$$

$$z = -0,5 (x + y).$$

1ª Iteração: como temos por aproximação inicial  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  e  $z_0 = 0$ , então:

Utilizando  $y_0 = 0$  e  $z_0 = 0$ , obteremos

$x_1$ :

$$x_1 = 0,2 (5 - y_0 + z_0),$$

$$x_1 = 0,2 (5 - 0 + 0)$$

$$x_1 = 1.$$

Com o erro  $\varepsilon_A = |x_1 - x_0|$ ,

$$\varepsilon_A = |1 - 0| = 1.$$

Utilizando  $x_1 = 1$  e  $z_0 = 0$ , obteremos

$y_1$ :

$$y_1 = 0,25 (6 - 3x_1 - z_0),$$

$$y_1 = 0,25 (6 - 3 \cdot 1 - 0),$$

$$y_1 = 0,75.$$

Com o erro:  $\varepsilon_A = |y_1 - y_0|$ ,

$$\varepsilon_A = |0,75 - 0| = 0,75.$$

1ª Iteração: como temos por aproximação inicial  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$  e  $z_0 = 0$ , então:

Utilizando  $x_1 = 1$  e  $y_1 = 0,75$ , obteremos  $z_1$ :

$$z_1 = -0,5 (x_1 + y_1),$$

$$z_1 = -0,5 (1 + 0,75),$$

$$z_1 = -0,875.$$

Com o erro:  $\varepsilon_A = |z_1 - z_0|$ ,

$$\varepsilon_A = |-0,875 - 0| = 0,875.$$

O erro relativo é determinado pela razão entre o maior erro absoluto e o maior valor entre  $x_1$ ,  $y_1$  e  $z_1$ :

$$\varepsilon = \frac{1}{1} = 1.$$

O procedimento em sequência deve ser o mesmo. Vamos apresentar apenas os resultados. A segunda iteração irá produzir os seguintes valores:

Com  $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{bmatrix}$ , obtemos  $X_2 = \begin{bmatrix} 1,025 \\ 0,95 \\ -0,9875 \end{bmatrix}$  com os seguintes erros absolutos:

$\varepsilon_{A2} = \begin{bmatrix} 0,025 \\ 0,20 \\ 0,1125 \end{bmatrix}$ , e erro relativo  $\varepsilon = \frac{0,20}{1,025} = 0,19512 > 0,05$ . Portanto, temos de partir para a terceira iteração. Os valores para a solução são dados por:  $X_3 = \begin{bmatrix} 1,0075 \\ 0,99125 \\ -0,99938 \end{bmatrix}$ , e para os erros absolutos:  $\varepsilon_{A3} = \begin{bmatrix} 0,0175 \\ 0,04125 \\ 0,01188 \end{bmatrix}$ . O erro relativo é  $\varepsilon = \frac{0,04125}{1,0075} = 0,040943 < 0,05$ , o que significa que podemos parar o processo na terceira iteração. Percebe-se que a solução exata é  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .

Para a solução de sistemas lineares, dentre os quatro métodos estudados, podemos optar por um deles, cabe uma análise para verificar qual deles poderá ser mais preciso ou ainda que forneça menos etapas e por consequência seja mais eficiente.

Além disso, é importante considerar que em nossa disciplina tratamos de soluções para “sistemas lineares possíveis e determinados”, ou seja, sistemas que admitem uma única solução, mas vale observar que em outras situações (que não foram tratadas aqui) podemos nos deparar com sistemas lineares possíveis e indeterminados, pois apresentam infinitas soluções e ainda sistemas lineares impossíveis, que não admitem soluções. Nossos estudos focam os sistemas possíveis e determinados, já que na próxima unidade estudaremos os ajustes de curvas para determinarmos funções que se aproximem de resultados experimentais e, para isso, utilizaremos a solução de sistemas lineares.

Para treinar, deixamos aqui alguns exercícios com as respectivas respostas:

- 1) Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Cramer:

$$\begin{aligned} -x + y - z &= 5, \\ x + 2y + 4z &= 4, \\ 3x + y - 2z &= -3. \end{aligned}$$

**Resposta:  $x=-2$  ;  $y=3$  ;  $z=0$ .**

- 2) Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss

$$\begin{aligned} -x + y - 2z &= -9, \\ 2x + y + z &= 6, \\ -2x - 2y + z &= 1. \end{aligned}$$

**Resposta:  $x=2$  ;  $y=-1$  ;  $z=3$ .**

3) Calcule o determinante:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

**Resposta:  $\det = -12$ .**

4) Resolva o sistema linear abaixo pelo método de Gauss-Jacobi. Considere aproximação inicial  $x_0 = 0,7$ ,  $y_0 = -1,6$  e  $z_0 = 0,6$ . Utilize quatro casas decimais e  $\varepsilon < 0,01$ . Dica: neste caso, você terá três variáveis para isolar e criar três funções de iteração.

$$10x + 2y + z = 7,$$

$$x + 5y + z = -8,$$

$$2x + 3y + 10z = 6.$$

**Resposta:  $x=0,9979$  ;  $y= -1,9996$  ;  $z = 0,9968$ .**

5) Resolva o sistema linear abaixo pelos métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel:

$$x+y = 3$$

$$x-3y=-3.$$

Faça o gráfico das duas retas referentes a cada uma das equações ao isolar o  $y$  em função de  $x$  e apresente cada um dos pontos referentes a cada iteração diferenciando para cada um dos métodos, observando a trajetória seguida ao ligar ponto por ponto das soluções.

6) Aplique analiticamente e graficamente os métodos de Gauss-Jacobi e de Gauss-Seidel no sistema:

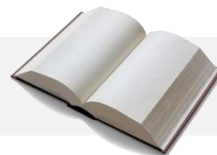
$$2x+5y = -3$$

$$3x+ y = 2.$$

Repita o procedimento para o sistema obtido ao permutar as duas equações. O que aconteceu?

[illegible][illegible]

## REFERÊNCIAS



FRANCO, N.M.B. - **Cálculo Numérico**. São Paulo: Editora Pearson, 2006.

HUMES, A.F.P.C., MELO, I.S.H., YOSHIDA, L.K., MARTINS, W.T. – **Noções de Cálculo Numérico**. São Paulo: Editora McGraw Hill, 1984

IEZZI, G. **Fundamentos de Matemática Elementar**: Sequências, Matrizes, Determinantes, Vol. 4. São Paulo: Atual, 2004.

RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V.L.R. - **Cálculo Numérico**: Aspectos Teóricos e Computacionais. São Paulo: Editora Makron Books, 1984.







*[www.cruzeirodosul.edu.br](http://www.cruzeirodosul.edu.br)*

*Campus Liberdade*

*Rua Galvão Bueno, 868*

*01506-000*

*São Paulo SP Brasil*

*Tel: (55 11) 3385-3000*

