Campus Virtual
Cruzeiro do Sul
Educação a Distância

Interpolação polinomial

Campus Virtual
Cruzeiro do Sul
Educação a Distância

Interpolação polinomial

MATERIAL TEÓRICO

Responsável pelo Conteúdo:
Prof. Ms. Alexandre Aparecido Neves

Revisão Técnica:
Prof. Dr. Victor Barbosa Félix

Interpolação polinomial

A relação funcional entre as variáveis de um problema prático, via de regra, é de difícil determinação. Normalmente se obtém, por medições manuais ou automáticas, uma tabela ou um gráfico de valores correspondentes. Em alguns casos, pode-se determinar a função como uma combinação de funções conhecidas e nos casos mais comuns esse tratamento não se aplica. Podemos citar como exemplo a obtenção da função da deformação de uma barra de aço sujeita a um esforço através do ensaio de tração.

Existem diversas técnicas para aproximar uma função de fórmula desconhecida ou de difícil manipulação. Dentre essas técnicas podemos destacar: aproximação por interpolação, aproximação por regressão e aproximação por séries. Nesta unidade, estudaremos o caso da interpolação polinomial por esta ser de fácil aplicação e manipulação. Os métodos a serem estudados para uma aproximação de uma função f(x) são muito utilizados em situações onde se trabalham com dados experimentais.

Método utilizando a resolução do sistema linear

Trata-se de um método bastante simples, porém a sua eficiência do ponto de vista computacional é pequena. Vamos tomar como exemplo, o seguinte caso, três pontos não colineares dispostos na tabela abaixo:

x	x_0	x_1	x_2
f(x)	$f(x_0)=y_0$	$f(x_1)=y_1$	$f(x_2)=y_2$

Queremos determinar um polinômio $p_2(x)$ de grau 2 que interpole os pontos tabelados. Para isso devemos utilizar as seguintes equações:

$$y_0 = P_2(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2$$
$$y_1 = P_2(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$$
$$y_2 = P_2(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2$$

Observe que cada um dos elementos da tabela deve ser substituído de tal forma que possa construir as equações do sistema linear.

Normalizando o sistema linear, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Exemplo de aplicação:

Com os dados da tabela abaixo, determinar o polinômio interpolador de grau 2:

x	2	2,4	2,9
f(x)	3	4,2	5,3

$$y_0 = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 \Rightarrow 3 = a_0 + a_1(2) + a_2(2)^2 \Rightarrow 3 = a_0 + a_1(2) + a_2(4)$$

$$y_1 = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 \Rightarrow 4{,}2 = a_0 + a_1(2{,}4) + a_2(2{,}4)^2 \Rightarrow 4{,}2 = a_0 + a_1(2{,}4) + a_2(5{,}76)$$

$$y_2 = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 \Rightarrow 5{,}3 = a_0 + a_1(2{,}9) + a_2(2{,}9)^2 \Rightarrow 5{,}3 = a_0 + a_1(2{,}9) + a_2(8{,}41)$$

Normalizando o sistema linear, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2{,}4 & 5{,}76 \\ 1 & 2{,}9 & 8{,}41 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4{,}2 \\ 5{,}3 \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

a_0=-7,2667 a_1=6,9111 a_2=0,8889

Com isso o polinômio interpolador de grau 2 para o intervalo entre os pontos x=2 e x=2,9 é:

$$p(x) = -7{,}2667 + 6{,}9111x + 0{,}8889x^2$$

Vale salientar que o polinômio interpolador para este caso é de grau 2 pois temos três pontos. No caso de uma quantidade maior de pontos, devemos verificar o grau do polinômio de forma que:

Se tivermos n pontos tabelados, o polinômio interpolador terá grau n-1

Método de Lagrange

O método de Lagrange ou Lagrangeano é baseado no fato de que qualquer polinômio de grau n que passa pelos pontos (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n), com $x_i \neq x_j$, quaisquer que sejam $i \neq j$, pode ser escrito na forma:

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$ e $$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_0 - x_j)}$$

Para exemplificar, vamos reproduzir o método supondo quatro pontos dados: (x_0,y_0), (x_1,y_1), (x_2,y_2), (x_3,y_3). Como dispomos de quatro pontos, o polinômio a ser utilizado será de grau 3. Se utilizássemos cinco pontos, o polinômio seria de grau 4 e assim por diante.

Vamos trabalhar por etapas para obtenção do polinômio interpolador:

Etapa 1: Construir o polinômio de Lagrange, de acordo com o grau estabelecido:

$$P_3(x)=y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x)+y_3L_3(x)$$

Etapa 2: O polinômio deve passar pelos pontos dados de tal forma que:

$P_3(x_0) = y_0$, $P_3(x_1) = y_1$, $P_3(x_2) = y_2$, $P_3(x_3) = y_3$.

Para que isto ocorra, temos:

$P_3(x_0) = y_0$, $L_0(x_0)=1$, $L_1(x_0) = 0$, $L_2(x_0) = 0$, $L_3(x_0) = 0$

$P_3(x_1) = y_1$, $L_0(x_1)=0$, $L_1(x_1) = 1$, $L_2(x_1) = 0$, $L_3(x_1) = 0$

$P_3(x_2) = y_2$, $L_0(x_2)=0$, $L_1(x_2) = 0$, $L_2(x_2) = 1$, $L_3(x_2) = 0$

$P_3(x_3) = y_3$, $L_0(x_3)=0$, $L_1(x_3) = 0$, $L_2(x_3) = 0$, $L_3(x_3) = 1$

Etapa 3: Construir os Lagrangeanos da seguinte forma:

Lagrangeano L_0:

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}$$

Lagrangeano L_1:

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}$$

Lagrangeano L_2:

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}$$

Lagrangeano L_3:

$$L_3(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

Através da construção dos Lagrangeanos, podemos verificar que o polinômio pode ser encontrado sem ter que resolver o sistema 4x4.

Vamos resolver um exemplo de aplicação: Vamos determinar um polinômio utilizando o método de Lagrange, que interpola os pontos da tabela abaixo e também estimar o valor de polinômio para x=2.

x	0	1	3	4
f(x)	3	5	7	9

Como a tabela dispõe de quatro valores, o polinômio a ser interpolado é de grau 3 e daí vamos executar as etapas de acordo o que foi estudado:

Construir o polinômio de Lagrange, de acordo com o grau estabelecido:

$P_3(x) = 3L_0(x) + 5L_1(x) + 7L_2(x) + 9L_3(x)$

Vamos obter cada um dos Lagrangeanos, de acordo com a tabela:

Lagrangeano L_0:

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)}$$

$$L_0(x) = -\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12}$$

Lagrangeano L_1:

$$L_1(x) = \frac{(x-0)(x-3)(x-4)}{(1-0)(1-3)(1-4)}$$

$$L_1(x) = \frac{(x)(x-3)(x-4)}{6}$$

Lagrangeano L_2:

$$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-4)}{(3-0)(3-1)(3-4)}$$

$$L_2(x) = -\frac{(x)(x-1)(x-4)}{6}$$

Lagrangeano L_3:

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(4-0)(4-1)(4-3)}$$

$$L_3(x) = \frac{(x)(x-1)(x-3)}{12}$$

Substituindo os Lagrangeanos no polinômio de Lagrange, temos:

$$P_3(x) = 3(-\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12}) + 5(\frac{x(x-3)(x-4)}{6}) + 7(-\frac{x(x-1)(x-4)}{6}) + 9(\frac{x(x-1)(x-3)}{12})$$

$$P_3(x) = -3(\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{12}) + 5(\frac{x(x-3)(x-4)}{6}) - 7(\frac{x(x-1)(x-4)}{6}) + 9(\frac{x(x-1)(x-3)}{12})$$

Com isso obtemos o polinômio interpolador de Lagrange.

Para estimar o valor de x=2, basta substituir no polinômio obtido o valor de x por 2. Com isso, temos:

$$P_3(x) = -3(\frac{(2-1)(2-3)(2-4)}{12}) + 5(\frac{2(2-3)(2-4)}{6}) - 7(\frac{2(2-1)(2-4)}{6}) + 9(\frac{2(2-1)(2-3)}{12})$$

$$P_3(x) = -\frac{6}{12} + \frac{20}{6} + \frac{28}{6} - \frac{18}{12}$$

$$P_3(x) = 6$$

Valor estimado de x=2 com o polinômio interpolador obtido pelo método de Lagrange.

Agora podem ter surgido algumas dúvidas. Procure consultar o material complementar, a bibliografia.

Anotações

Referências

RUGGIERO, M. A. G., LOPES, V.L.R. - **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**, 2ª edição, 1998, Editora Makron Books – São Paulo.

SPERANDIO, D., MENDES, J.T., SILVA, L.H.M. - **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**, 2003, Editora Pearson – São Paulo.

HUMES, A.F.P.C., MELO, I.S.H., YOSHIDA, L.K., MARTINS, W.T. – Noções de **Cálculo Numérico**, 1984, Editora McGraw Hill – São Paulo

www.cruzeirodosul.edu.br

Campus Liberdade

Rua Galvão Bueno, 868

01506-000

São Paulo SP Brasil

Tel: (55 11) 3385-3000