Campus Virtual
Cruzeiro do Sul
Educação a Distância

Cálculo Numérico

Online

Unidade IV:

Integração Numérica

Responsável pelo Conteúdo:
Prof. Dr. João Pacheco B.C. de Melo
Prof. Dr. Jaime Sandro da Veiga

Revisão Técnica:
Prof. Dr. Victor Barbosa Félix

MATERIAL TEÓRICO

Orientação de Estudos

Olá, caros alunos!

Sejam bem-vindos a mais uma unidade de ensino e de aprendizagem da disciplina de Cálculo Numérico. Vocês irão conhecer os métodos utilizados para a integração numérica, a saída para quem não possui a resolução analítica de uma integral e precisa fazer a integração. É utilizada para a solução de situações dinâmicas, por exemplo, em que a resolução de um sistema de equações diferenciais resultará em uma simulação de um sistema dinâmico em um computador. Espero que tenham um excelente estudo e um bom aproveitamento!

A T E NÇ Ã O: Para um bom aproveitamento do curso, leiam o material teórico atentamente antes de realizar as atividades. É importante também respeitar os prazos estabelecidos no cronograma.

Olá caro aluno! Esta unidade tem por objetivo apresentar e introduzir os conceitos elementares sobre a Integração Numérica de Funções, que é uma ferramenta muito importante para todas as áreas do conhecimento. Aconselhamos a estudar todas as seções da unidade IV, procurando entender a teoria e os exercícios resolvidos e resolver os exercícios propostos para praticar. É fundamental fazer a leitura do material complementar e da bibliografia proposta para auxiliar na compreensão do tema e exercícios. No final, quando estiver com os conceitos assentados, não se esqueça de fazer a Atividade de Sistematização para nota.

Bom estudo a todos!

Contextualização

Nesta unidade IV, iremos estudar os fundamentos básicos para realizar integrações numericamente, em contrapartida à resolução analítica, que se aprende na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Dizemos que as derivadas são simples de se realizar analiticamente, mas a integração por vezes é tão complexa que é necessário fazer a fundação de um novo ramo da Matemática para que se possa ter uma ferramenta adequada para sua realização. Citamos, como exemplo, a Análise Complexa, em que funções analíticas de variáveis complexas são integradas no plano complexo. A Análise Complexa surgiu, após cerca de dois séculos de espera, para a resolução de algumas integrais reais no eixo real que não possuíam solução. Assim, as tabelas de fórmulas de integração que se conhecem atualmente são o resultado da compilação de resultados de milhares de trabalhos reunidos no decorrer de décadas (e, até mesmo, séculos). Contudo, novas integrais surgem todos os anos e nem sempre há soluções analíticas para elas. Neste caso, lançam-se mão dos métodos numéricos, que são sempre aplicados quando não se conhece a primitiva da função a ser integrada.

Devemos salientar, contudo, que métodos numéricos são sempre utilizados na resolução de equações ou de sistemas de equações diferenciais (equações envolvendo somente derivadas de funções), em equações integrais (equações envolvendo apenas integração de funções), ou em equações íntegro-diferenciais (ambas integrais e derivadas aparecem na mesma equação).

Os métodos numéricos que serão apresentados serão os mais simples, porém bastante utilizados, mas que não perfazem a totalidade dos métodos numéricos de integração. Em casos de funções que oscilam com frequências muito altas, ou mesmo em casos de ruídos, tais métodos apresentados nesta unidade tenderão a ter erros bastante acentuados. Nesses casos, outros métodos, tais como o Método de Monte Carlo, serão mais adequados, mas que não os abordaremos aqui. Diga-se de passagem, há vários métodos de Monte Carlo e há livros inteiramente voltados para o ensino de tais métodos. Cumpre salientar que este capítulo utiliza em muito as ferramentas matemáticas já vistas nas outras unidades, bem como o cálculo diferencial e integral.

Integração Numérica

Introdução

Nesta unidade, iremos mostrar como pode ser feita a integração de funções por métodos numéricos gerais. Isto se faz necessário, pois muitas vezes as integrais não podem ser feitas de uma forma analítica.
A Integração Numérica é o estudo de métodos aplicados para a obtenção do valor de uma dada integral definida quando não temos condições de fazer a integração de uma dada função por meios analíticos, ou quando a utilização dos métodos numéricos se justifica.
Para ilustração do que de mais simples se pretende após a execução de uma integração numérica, seja uma função $f(x)$ qualquer contínua. A integral de uma curva fornece a área A sob esta curva, como mostra a Figura 1:

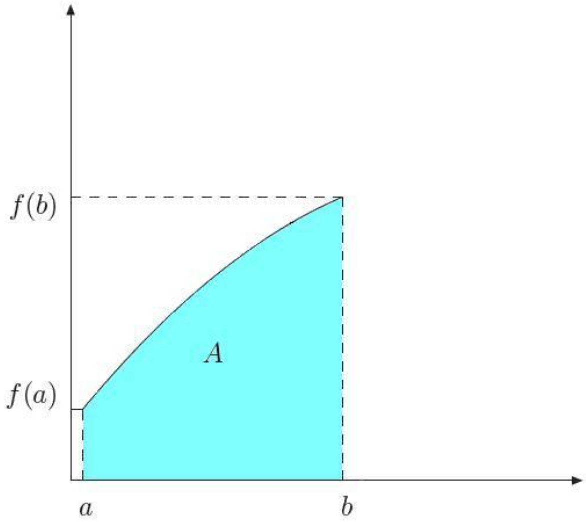

Figura 1: Gráfico da função $f(x)$, mostrando a área sob o gráfico entre os pontos a e b.

Conforme o que foi afirmado, podemos escrever a equação abaixo:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Quando a integral da função $f(x)$ ainda não estiver tabelada, então a integral acima deve ser obtida numericamente. Acrescentamos que existem muitas tabelas de integrais e recomendamos fortemente que você tenha alguma à disposição para estudar esta unidade. Nas referências, ao final deste texto, listamos duas.

Um método que fornece um valor aproximado de uma integração de uma função é chamado de integração numérica. Existem vários métodos a serem utilizados e aqui iremos tratar alguns destes métodos que são de fácil aplicação. Estes métodos podem ser basicamente divididos em dois, a saber:

i. Método dos Trapézios;
ii. Método de Simpson.

Ambos são casos especiais de *fórmulas de Newton-Cotes,* que veremos a seguir.

Método dos Trapézios

A ideia principal para o cálculo de uma área sob o gráfico de uma função é cobrir tal área com figuras geométricas simples e somar a área de todas elas. Cada figura deve estar de alguma forma atrelada ao valor da função no ponto em que se encontra um ou dois de seus vértices. A subdivisão de uma figura maior em várias figuras menores é introduzida de forma a facilitar o cálculo. No entanto, a figura maior possui, em geral, um de seus lados arredondados e as figuras simples com as quais a recobriremos, para que facilite o cálculo, são retas e, portanto, não arredondadas. Aí está a fonte de erros: aproximar figuras arredondadas por figuras retas. Quais figuras retas iremos utilizar? A mais simples de todas é o retângulo. Veja na Figura 2 o que acontece com apenas um retângulo da subdivisão: parte dele fica para fora, apesar de seu comprimento estar corretamente atrelado ao valor da função em um ponto dado, ξ_k, constituindo uma fonte de erros.

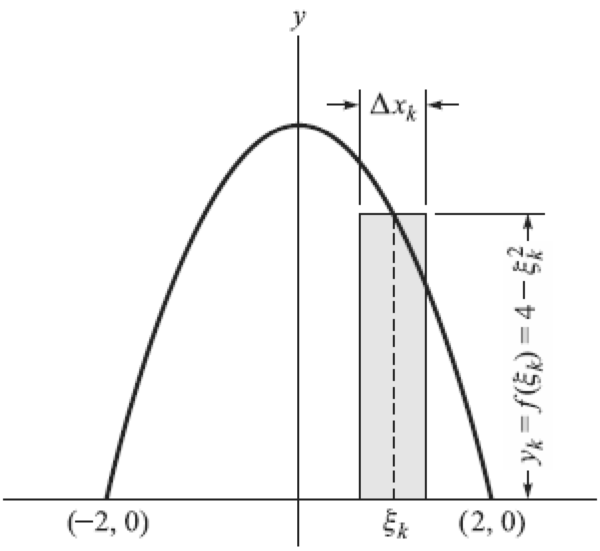

Figura 2: Uma função parabólica que será coberta com retângulos. Note que parte do retângulo fica para fora, consistindo uma fonte de erros para a integração numérica.

Tal cobertura com retângulos (Figura 3) constitui um dos procedimentos conhecidos como *Fórmulas de Newton-Cotes*. Tais fórmulas de integração podem ser apresentadas na forma:

$$x_0 = a \text{ e } x_n = b\,,$$

juntamente com

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h_0 f(x_0) + h_1 f(x_1) + \cdots + h_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} h_i f(x_i)\,.$$

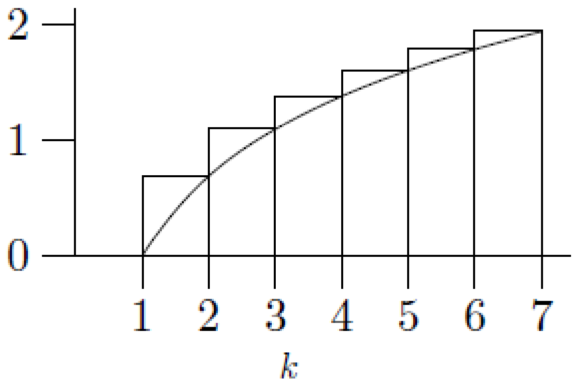

Figura 3: Cobertura de uma função com retângulos.

Se percebermos que a cobertura com retângulos não fornece bons resultados, pode-se cobrir a área sob o gráfico da função com trapézios, conforme é ilustrado na Figura 4, onde foi destacado um único trapézio.

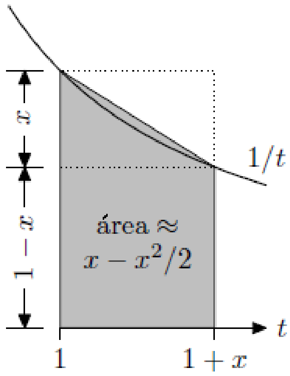

Figura 4: Ilustração do Método dos Trapézios.

Esta é propriamente a busca da solução pelo *Método dos Trapézios*, que é outra fórmula de Newton-Cotes. Este método consiste em aproximar uma função $f(x)$ em um dado intervalo fechado $[a, b]$ pela área do trapézio sob esta curva, ou seja

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{(b-a)}{2}[f(a) + f(b)]\,.$$

Quando fazemos um cálculo aproximado estamos introduzindo um erro. No caso da fórmula dos trapézios dada acima, este erro de truncamento é da ordem de:

$$\varepsilon = -\frac{(b-a)^3}{12}\frac{d^2 f(\mu)}{d\mu^2},$$

em que $\mu \in [a, b]$.

Exemplo 1: Ache a integral I da função $f(x) = \sqrt{3x-2}$, conforme apresentada abaixo:

$$I = \int_1^4 \sqrt{3x-2}\, dx\,,$$

usando para a integração o cálculo pelo Método dos Trapézios.

Solução: Aplicando-se a fórmula dos trapézios, temos:

$$\int_1^4 \sqrt{3x-2}\, dx \cong \frac{(4-1)}{2}\left[\sqrt{3\cdot 4-2}+\sqrt{3\cdot 1-2}\right] = 6.2434\,.$$

A solução exata desta integral é dada por (com erro na última casa):

$$\int_1^4 \sqrt{3x-2}\, dx = \int_1^4 (3x-2)^{1/2}\, dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}(3x-2)^{1/2}|_1^4 = 6.8051\,.$$

Note que temos uma diferença não desprezível (8%) no **Exemplo 1** dado acima, calculado com a fórmula dos trapézios em relação a integral exata.

Podemos diminuir o erro fazendo a utilização do método dos trapézios, subdividindo o intervalo fechado [a,b] em n subintervalos da forma:

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Assim, ao calcularmos a integral da função $f(x)$ no intervalo dado $[a,b]$ pelo método dos trapézios para n intervalos, teremos que:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)]\,,$$

em que cada subdivisão de x é dada por $x_{i+1} = x_i + h,\ com\ i = 0,1,2,\cdots,n-1$.
O erro no truncamento é dado por

$$|\varepsilon| \le \frac{(b-a)}{12}h^2 max\left|\frac{d^2 f(\mu)}{d\mu^2}\right|,$$

Com $\mu \in [a,b]$.

Exemplo 2: Iremos calcular a integral da função abaixo pelo método dos trapézios

$$I = \int_1^4 \sqrt{3x-2}\, dx$$

para $n = 3$, no intervalo [1,4], como no **Exemplo 1** dado anteriormente.

Solução: Temos que:

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1.$$

Logo, com o intervalo de x para as subdivisões dado por $h = 1$, construímos a tabela abaixo:

x	1	2	3	4
$f(x)$	1	2	2.6457	3.1623

Pela fórmula dos trapézios, temos:

$$\int_1^4 \sqrt{3x-2}\, dx = \frac{1}{2}[1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2.6457 + 3.1623] = 6.72685\,.$$

Comparando-se esse resultado aproximado com o cálculo exato (6.8051), podemos observar que essa aproximação é muito melhor do que a anterior, com um desvio de cerca de 1.1%, se comparada com o valor exato. Por conseguinte, a subdivisão do intervalo de integração, mesmo sendo pequena, pode aprimorar bastante o resultado.

Método de Simpson – Regra de Simpson 1/3

A integração de uma função pelo método de Simpson (ou regra de Simpson 1/3) consiste em usar polinômios de 2° grau (parábolas) em vez de retas no lado do trapézio por intermédio da fórmula abaixo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{h}{3}[f(a) + 4f(me) + f(b)],$$

em que o passo h e o ponto médio me são dados por:

$$h = \frac{b-a}{2},$$

$$me = \frac{b+a}{2}.$$

O erro por truncamento cometido ao utilizarmos o método acima é dado por:

$$\varepsilon = -\frac{h^4}{180}(b-a)max\left|\frac{d^4 f(\mu)}{d\mu^4}\right|,$$

em que o 4 na expressão acima significa a derivada de quarta ordem da função $f(x)$ e μ pertence ao intervalo $[a, b]$.

Exemplo 3: Como exemplo e em comparação com o método anterior, iremos calcular a integral abaixo pelo Método de Simpson:

$$\int_1^4 \sqrt{3x-2}\,dx \cong \frac{1.5}{3}\left[\sqrt{3\cdot 1-2}+4\sqrt{3\cdot 2.5-2}+\sqrt{10}\right] = 0.5\left[1+4\sqrt{5.5}+\sqrt{10}\right]$$
$$= 6.7716,$$

em que:

$$h = \frac{(b-a)}{2} = \frac{(4-1)}{2} = 1.5$$

e

$$me = \frac{(b+a)}{2} = \frac{(4+1)}{2} = 2.5\,.$$

Podemos observar que obtemos um valor muito próximo do valor exato da integral (6,8051), com um erro de aproximadamente 0.4%.

O método de Simpson pode ser generalizado para qualquer número de intervalos de maneira a obter uma melhor aproximação para a integral a ser calculada numericamente.

Neste caso, temos de subdividir o intervalo $[a, b]$ em $2n$ subintervalos também igualmente espaçados. Neste caso, h e x_i são dados por:

$$h = \frac{(b-a)}{2n}$$

e

$$x_i = x_0 + ih,$$

em que $i = 0, 1, 2, \cdots, 2n,\ x_0 = a \ e \ x_{2n} = b$.

Logo, temos a aproximação para a integração da função $f(x)$ dada por:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n}\int_{x_i}^{x_{2i}} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{2n-2}}^{x_{2n}} f(x)\,dx$$
$$= \frac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + \cdots + 2f(x_{2n-2})$$
$$+ 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})].$$

O erro neste caso é dado por:

$$\varepsilon = -\frac{h^5}{2880n^4}\frac{d^4 f(\mu)}{d\mu^4}\,.$$

Exemplo 4: Calcule a integral a seguir:

$$I = \int_0^4 e^x \, dx\,,$$

utilizando a fórmula de Simpson para $n = 2$.

Solução: Seja o intervalo considerado da integração [0,4]. Calculando h, temos:

$$h = \frac{(b-a)}{2n} = \frac{(4-0)}{2 \cdot 2} = 1,$$

com $x_0 = 0$ e $x_4 = 4$.

Assim, temos que:

$$f(0) = e^0 = 1,$$

$$f(1) = e^1 = 2.71828,$$

$$f(2) = e^2 = 7.38906\,,$$

$$f(3) = e^3 = 20.08554\,,$$

$$f(4) = e^4 = 54.59815\,.$$

Aplicando-se a fórmula de Simpson, resulta em:

$$\begin{aligned} I = \int_0^4 e^x \, dx &\cong \frac{h}{3}[f(0) + 4f(1) + 2f(2) + 4f(3) + f(4)] \\ &= \frac{1}{3}[1 + 4 \cdot 2.71828 + 2 \cdot 7.38906 + 4 \cdot 20.08554 + 54.59815] \\ &= 53.86385. \end{aligned}$$

Comparando-se esse resultado com o valor exato da integral dada acima $e^4 - e^0 = 54.59815 - 1 = 53{,}59815$, com erro na última casa, temos um desvio de aproximadamente 0.5%.

Exemplo 5: Seja uma força dada pela seguinte expressão:

$$f(x) = x^2 + e^x\,.$$

Temos de calcular o trabalho realizado sobre um corpo de massa m, para levar este corpo de uma posição $x = 0$ metros até outra posição $x = 2$ metros.

Solução: O trabalho realizado por uma força sobre um corpo é dado por:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} f(x) \, dx\,.$$

No nosso caso, temos que $x_0 = 0 \; e \; x_1 = 2\,m$. Logo, temos de calcular a integral abaixo:

$$W = \int_0^2 (x^2 + e^x)\, dx\,.$$

Iremos resolver este problema aplicando o método de Simpson com $n = 2$, ou seja, com 4 subintervalos, logo:

$$h = \frac{(b-a)}{2n} = \frac{(2-0)}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\,.$$

Obtemos então:

$$W = \int_0^2 (x^2 + e^x)\, dx \cong \frac{h}{3}[f(0) + 4f(0.5) + 2f(1) + 4f(1.5) + f(2)]\,.$$

Como feito anteriormente, temos $x_i = x_0 + ih$. Por conseguinte, a função $f(x_i) = {x_i}^2 + e^{x_i}$ é calculada para cada um desses pontos e apresentada na tabela abaixo:

x_i	$f(x_i) = {x_i}^2 + e^{x_i}$
0	1.0
0.5	1.8987213
1	3.7182818
1.5	6.7316891
2	11.389056

Substituindo os valores da tabela acima no método de Simpson, teremos:

$$W \cong \frac{1}{6}[1.0 + 4 \cdot 1.8987213 + 2 \cdot 3.7182818 + 4 \cdot 6.7316891 + 11.389056]\,,$$

cujo resultado é

$$W \cong 9.0578768\, J\,.$$

Esse valor pode ser comparado com o cálculo exato, $9.05572\, J$ (joules), resultando em um erro percentual de aproximadamente 0.02%.

O método dos trapézios e o método de Simpson são os mais utilizados na prática devido a sua fácil construção computacional; de qualquer maneira, o método de Simpson, não raro, dá uma aproximação melhor que o método dos trapézios. Existem outros métodos mais sofisticados para integração numérica, como, por exemplo, o Método de Gauss-Legendre, o qual é aplicado quando temos um problema complexo e também necessitamos de uma precisão mais alta nos resultados.

Outro método utilizado é o Método de Monte Carlo, bastante adequado quando a função possui oscilações de altas frequências, ou mesmo, quando se trata de integrações de ruídos aleatórios.

Material Complementar

Para conhecer e se informar um pouco mais sobre a integração numérica, visite o site:

https://goo.gl/LbaiFH

E para complementar sua leitura, visite também:

https://goo.gl/4347BK

https://goo.gl/GPHyQg

Depois de ler o material e informar-se sobre o assunto, vamos pôr em prática esses conhecimentos nas atividades!

Bom trabalho!

Referências

RUGGIERO, M.A.G. & LOPES, V.L.R. **Cálculo Numérico: Aspectos Teóricos e Computacionais**. 2ª Edição. São Paulo: Editora Makron Books, 1998.

SPERANDIO, D., MENDES, J.T. & SILVA, L.H.M. **Cálculo Numérico: Características Matemáticas e Computacionais dos Métodos Numéricos**. São Paulo: Editora Pearson, 2003.

HUMES, A.F.P.C., MELO, I.S.H., YOSHIDA, L.K. & MARTINS, W.T. **Noções de Cálculo Numérico**. São Paulo: Editora McGraw Hill, 1984.

BURDEN, R.L. & FAIRES, J.D. **Análise Numérica**. São Paulo: Editora Pioneira Thomson Learning, 2003.

BARROS, I.Q. **Introdução ao Cálculo Numérico.** São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1972.

STEINBERG, A. & WINTERLE, P. **Álgebra Linear.** Editora Pearson Makron Books, 1987.

PISKOUNOV, N. **Cálculo Diferencial e Integral**, **Vols. I e II.** Porto: Lopes da Silva Editora, 1983.

SPIGEL,R.M. **Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas,** São Paulo: Makron Books dos Brasil Ltda, 1973.

GRADSHTEYN, I.S. & RYZHIK, I.M. **Table of Integrals, Series and Products.** 7ª Edição. San Diego: Elsevier Inc., 2007.