ESCUELA PROFESIONAL DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
UNIVERSIDAD NACIONAL DE SAN AGUSTIN DE AREQUIPA
DICIEMBRE 2024

Práctica Laboratorio 08

Eduardo G. Ruiz Mamani[1]

[1] *Escuela Profesional de Ciencia de la Computación, Universidad Nacional de San Agustín, Arequipa, Perú*

Resumen—Este trabajo presenta un análisis comparativo de diferentes métodos numéricos aplicados a la resolución de ecuaciones no lineales. Se utilizaron los métodos de bisección, Newton-Raphson, falsa posición y secante, además del método de Newton-Raphson para sistemas de ecuaciones. Los resultados demuestran que cada método tiene ventajas y limitaciones específicas dependiendo de las características de las funciones analizadas, destacando la importancia de seleccionar el enfoque más adecuado según el problema planteado. Asimismo, se evidencia que la precisión, eficiencia y robustez son factores clave en la elección del método.

Palabras clave—Ecuaciones no lineales, Método de la bisección, Newton-Raphson, Falsa posición, Método de la secante, Sistemas de ecuaciones

Abstract—This paper presents a comparative analysis of different numerical methods applied to the resolution of nonlinear equations. The bisection, Newton-Raphson, false position and secant methods were used, as well as the Newton-Raphson method for systems of equations. The results show that each method has specific advantages and limitations depending on the characteristics of the functions analyzed, highlighting the importance of selecting the most appropriate approach according to the problem at hand. It is also evident that precision, efficiency and robustness are key factors in the choice of method.

Keywords—Nonlinear equations, Bisection method, Newton-Raphson, False position, Secant method, Systems of equations

ACTIVIDADES

Aplicando los métodos de resolución para ecuaciones no lineales, resuelva las siguientes ecuaciones. La elección del método es libre:

1. $y = \ln(x-2)$.
2. $y = e^{-x}$.
3. $y = e^x - x$.
4. $y = (10e^{x/2})\cos(2x)$.
5. $y = x^2 - 2$.
6. $y = \sqrt{x-2}$.
7. $z = x\cos(y) + y\sin(x)$.
8. $y = \frac{2}{x}$.

Los scripts en Python y el informe final se encuentra en el siguiente repositorio: `https://github.com/EGRM23/fisica_computacional-2024/tree/main/lab08`

MARCO TEÓRICO

Los métodos utilizados para resolver ecuaciones no lineales incluyen:

Método de la Bisección

Este método se basa en el Teorema de Bolzano, que establece que si una función continua $f(x)$ cambia de signo en un intervalo $[a,b]$, entonces existe al menos una raíz en dicho intervalo. El método consiste en dividir el intervalo iterativamente en mitades hasta encontrar una aproximación de la raíz con una precisión deseada. La fórmula para calcular el punto medio es:

$$r = \frac{a+b}{2}. \tag{1}$$

El algoritmo evalúa el signo de $f(r)$ y decide si la raíz está en $[a,r]$ o $[r,b]$, repitiendo el proceso hasta cumplir un criterio de convergencia.

Método de Newton-Raphson

Este método utiliza una aproximación lineal de la función en torno a un punto inicial x_0 mediante su derivada. Se aplica iterativamente para refinar la aproximación a la raíz. La fórmula iterativa es:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}. \tag{2}$$

El método es muy eficiente cuando la función es diferenciable y la aproximación inicial está cerca de la raíz. Sin embargo, puede fallar si $f'(x_i) = 0$ o si la función tiene discontinuidades o múltiples raíces cercanas.

Método de la Falsa Posición

Este método, también conocido como Regula Falsi, combina la robustez de la bisección con la eficiencia de Newton-Raphson. Utiliza una línea recta que conecta los puntos a y b en el intervalo inicial para aproximar la raíz. La fórmula para la raíz aproximada es:

$$r = b - \frac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}. \tag{3}$$

Este método conserva uno de los extremos del intervalo inicial y ajusta el otro extremo en cada iteración, asegurando convergencia si $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Método de la Secante

El método de la secante es una versión modificada del método de Newton-Raphson que no requiere el cálculo explícito de la derivada. En su lugar, utiliza una aproximación numérica basada en dos puntos iniciales x_0 y x_1. La fórmula iterativa es:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_i - x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}. \tag{4}$$

Este método es especialmente útil cuando el cálculo de la derivada es complicado o costoso.

Sistemas de Ecuaciones No Lineales

Para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, se generaliza el método de Newton-Raphson mediante el uso de la matriz Jacobiana J, que contiene las derivadas parciales de las funciones involucradas. La fórmula iterativa para dos ecuaciones es:

$$\begin{bmatrix} x_{i+1} \\ y_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} - J^{-1} \begin{bmatrix} f_1(x_i, y_i) \\ f_2(x_i, y_i) \end{bmatrix}, \tag{5}$$

donde J^{-1} es la inversa del Jacobiano evaluado en el punto (x_i, y_i). Este enfoque requiere que J sea invertible en cada iteración y que las aproximaciones iniciales sean cercanas a la solución.

METODOLOGÍA

Para resolver las ecuaciones no lineales planteadas, se utilizó un enfoque sistemático que combina análisis visual y resolución numérica. En primer lugar, se generaron gráficos para cada ecuación utilizando un rango adecuado de valores de x, lo que permitió identificar el comportamiento general de las funciones. Este análisis visual ayudó a detectar singularidades, discontinuidades, cambios de signo y regiones donde las raíces eran evidentes. Los gráficos se almacenaron como archivos numerados (por ejemplo, `equacion_1.png`, `equacion_2.png`) y se encuentran disponibles en la carpeta `graficos_funciones`.

Con base en el comportamiento observado en los gráficos, se seleccionaron los métodos numéricos más adecuados para abordar cada ecuación. En general, para ecuaciones con discontinuidades o cambios de signo evidentes se prefirieron métodos robustos como la bisección o la falsa posición, mientras que para funciones suaves y diferenciables se usaron los métodos de Newton-Raphson y la secante. Una vez seleccionado el método, las ecuaciones fueron resueltas iterativamente hasta alcanzar una tolerancia de error pequeña (e.g., $\varepsilon = 10^{-6}$), garantizando la precisión de los resultados.

A continuación, se detalla el método utilizado para resolver cada ecuación:

- **Ecuación 1:** $y = \ln(x-2)$. El gráfico muestra una discontinuidad en $x = 2$. Se utilizó el método de la bisección en el intervalo $[2{,}1, 10]$.
- **Ecuación 2:** $y = e^{-x}$. El gráfico es suave y diferenciable, por lo que se empleó el método de Newton-Raphson.
- **Ecuación 3:** $y = e^x - x$. Se observó que la derivada se anula cerca de $x = 0$. Se intentó con Newton-Raphson, pero no convergió.
- **Ecuación 4:** $y = (10e^{x/2})\cos(2x)$. Debido a la oscilación observada en el gráfico, se utilizó el método de falsa posición en el intervalo $[-2, 2]$.
- **Ecuación 5:** $y = x^2 - 2$. El gráfico muestra una raíz en $x = \pm\sqrt{2}$. Se utilizó el método de Newton-Raphson.
- **Ecuación 6:** $y = \sqrt{x-2}$. El gráfico presenta una discontinuidad en $x = 2$. Se aplicó el método de la secante.
- **Ecuación 7:** $y = x\cos(y) + y\sin(x)$. Se observó comportamiento no lineal complejo, por lo que se empleó el método de Newton-Raphson para sistemas en (x, y).
- **Ecuación 8:** $y = \frac{2}{x}$. El gráfico muestra una asíntota vertical en $x = 0$. Se utilizó el método de la bisección.

Finalmente, los resultados obtenidos fueron validados para garantizar que cumplieran con las propiedades de las funciones y los métodos seleccionados.

Gráficos de las Ecuaciones

En las siguientes figuras se presentan los gráficos correspondientes a las ocho ecuaciones analizadas, donde se puede observar su comportamiento característico:

RESULTADOS

1. $y = \ln(x-2)$: $x = 3{,}0$.
2. $y = e^{-x}$: $x = 12{,}5$.
3. $y = e^x - x$: No tiene solución por derivada nula.
4. $y = (10e^{x/2})\cos(2x)$: $x = 0{,}7854$.
5. $y = x^2 - 2$: $x = 1{,}4142$.
6. $y = \sqrt{x-2}$: $x = 2{,}0$.
7. $z = x\cos(y) + y\sin(x)$: $(x, y) = (0{,}0, 0{,}0)$.
8. $y = \frac{2}{x}$: $x = 1{,}4142$.

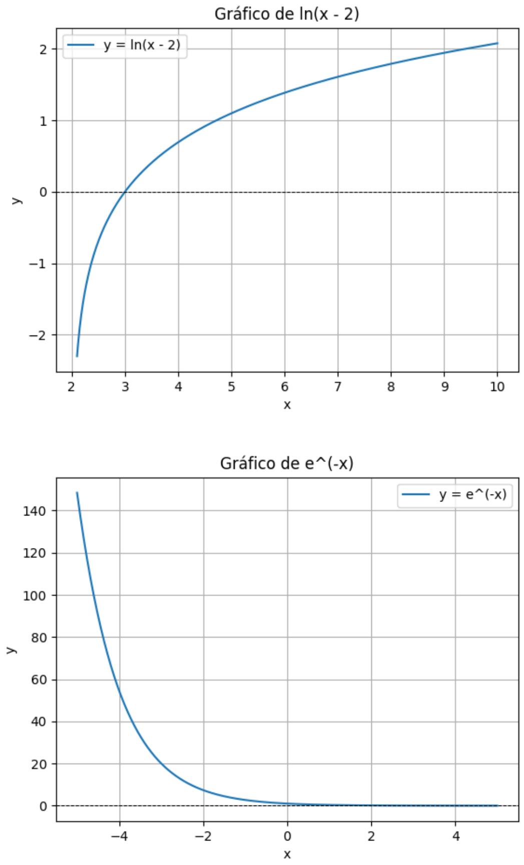

Fig. 1: Gráficos de las ecuaciones 1 y 2.

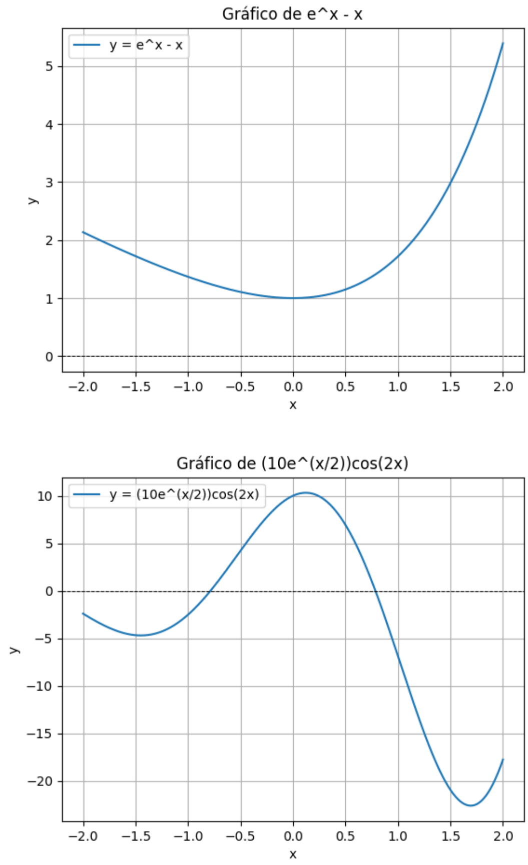

Fig. 2: Gráficos de las ecuaciones 3 y 4.

ANÁLISIS

Los resultados obtenidos son consistentes con las propiedades de cada método, permitiendo observar sus fortalezas y limitaciones en diferentes escenarios. El método de la bisección destacó por su robustez y garantía de convergencia en ecuaciones como $y = \ln(x-2)$ y $y = \frac{2}{x}$, ya que la función cambia de signo en un intervalo dado. Este método es confiable, aunque relativamente lento, especialmente en comparación con otros métodos más avanzados.

El método de Newton-Raphson mostró ser altamente eficiente en ecuaciones como $y = e^{-x}$ y $y = x^2 - 2$, siempre que la derivada no se anule y la aproximación inicial esté cerca de la solución. Sin embargo, su falta de robustez quedó evidenciada en la ecuación $y = e^x - x$, donde la derivada nula impidió que el método progresara, destacando la necesidad de analizar previamente las características de la función.

El método de la falsa posición ofreció un rendimiento intermedio al combinar la confiabilidad de la bisección con una mayor velocidad en algunos casos, como $y = (10e^{x/2})\cos(2x)$. No obstante, su eficiencia puede verse comprometida en funciones asimétricas, ya que las iteraciones no siempre se distribuyen uniformemente.

El método de la secante, al no requerir el cálculo explícito de la derivada, fue útil en casos como $y = \sqrt{x-2}$. Aunque presenta sensibilidad a errores en las aproximaciones iniciales, es una alternativa menos costosa en términos computacionales cuando el cálculo de derivadas es complicado.

En el caso de sistemas de ecuaciones no lineales, el método de Newton-Raphson para sistemas, apoyado en la matriz Jacobiana, permitió resolver $z = x\cos(y) + y\sin(x)$ con precisión. Sin embargo, este enfoque requiere un análisis cuidadoso de las derivadas parciales y una aproximación inicial adecuada, además de que depende de la invertibilidad del Jacobiano en cada iteración.

CONCLUSIONES

La elección del método para resolver ecuaciones no lineales debe basarse en las características específicas del problema, como la continuidad, la derivabilidad y el intervalo de búsqueda. Mientras que el método de la bisección es el más robusto y asegura convergencia en una amplia gama de casos, su lentitud puede hacerlo inadecuado para problemas que requieren una alta eficiencia.

Por otro lado, métodos como Newton-Raphson y la secante ofrecen una mayor velocidad y precisión, pero exigen condiciones específicas para garantizar su éxito, como una buena aproximación inicial y la ausencia de derivadas nulas. La falsa posición, al combinar elementos de bisección y aproximación lineal, es una opción intermedia que equilibra robustez y velocidad.

Para sistemas de ecuaciones no lineales, el uso de matrices Jacobianas en el método de Newton-Raphson proporciona una herramienta poderosa para resolver problemas multidimensionales. Sin embargo, requiere un análisis detallado y mayor capacidad computacional.

En general, los resultados obtenidos demuestran que no existe un método universalmente superior, y la selección de-

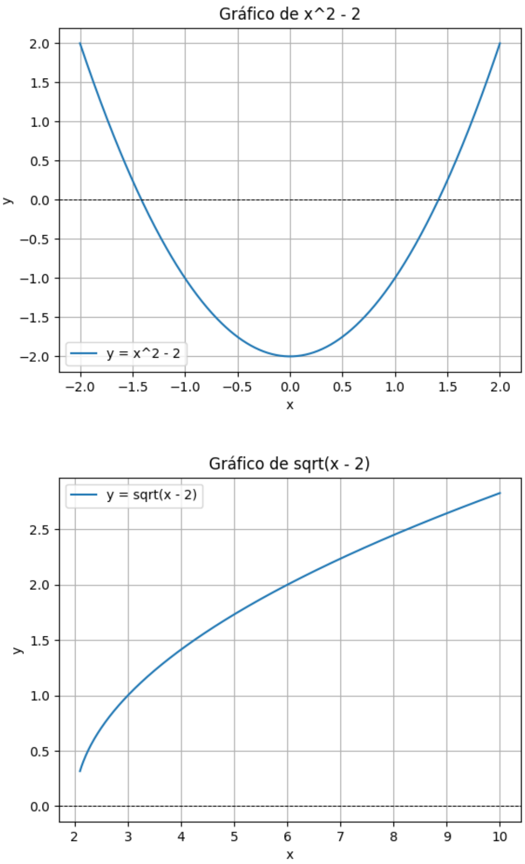

Fig. 3: Gráficos de las ecuaciones 5 y 6.

be ajustarse al problema y a las condiciones disponibles, destacando la importancia de combinar conocimientos teóricos con experimentación práctica para lograr soluciones óptimas.

REFERENCIAS

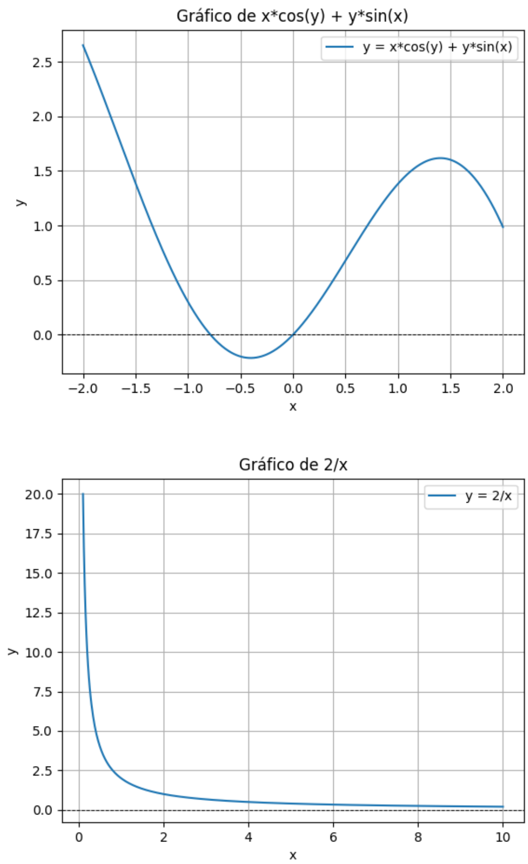

Fig. 4: Gráficos de las ecuaciones 7 y 8.