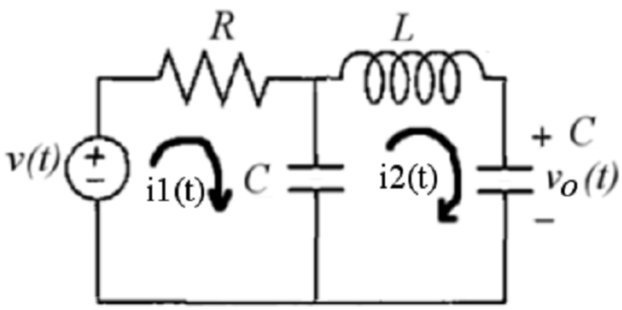
1º EE – Servomecanismo - Resolução

1.



Pede-se para calcular $V_0(s)/V(s)$:

Malha 1: (R + 1/Cs)I1 – (1/Cs)I2 = Vi (1)

Malha 2: -(1/Cs)I1 + (Ls + 1/Cs + 1/Cs)I2 = 0 (2)

De (2):

I1 = (2 + LCs^2)I2 (3)

(3) em (1):

(R + 1/Cs)(2 + LCs^2)I2 – (1/Cs)I2 = Vi

Assim:

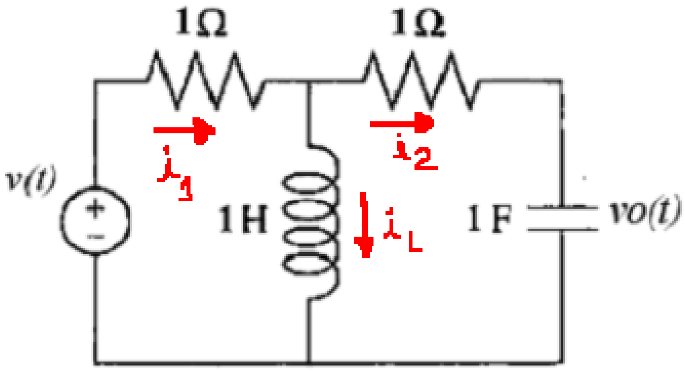
$$\frac{I_2}{V_i} = \frac{Cs}{LRC^2s^3 + LCs^2 + 2RCs + 1}$$

Como: V0 = (1/Cs)I2 ⇒ I2 = CsV_0

Logo:

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{1}{LRC^2s^3 + LCs^2 + 2RCs + 1}$$

2. Representação Estado Espaço



Temos dois elementos com relações não lineares entre seus parâmetros (um capacitor e um indutor). Logo, temos um sistema de ordem 2. As variáveis de estado escolhidas são i_L e v_C.

$$\begin{cases} L\dfrac{di_L}{dt} = v_L \\ C\dfrac{dv_C}{dt} = i_C \end{cases}$$

Da malha 1 (esquerda):

$v = v_R + v_L \Rightarrow v = i_1 + v_L \Rightarrow v_L = -i_1 + v$ (1)

$i_1 = i_L + i_2$ (2)

(2) em (1):

$v_L = -i_1 + v \Rightarrow v_L = -(i_L + i_2) + v \Rightarrow v_L = -i_L - i_2 + v$ (3)

Da malha 2 ($v_o = v_c$):

$v_L = v_R + v_C \Rightarrow v_L = i_2 + v_C \Rightarrow i_2 = v_L - v_C$ (4)

(4) em (3):

$v_L = -i_L - i_2 + v \Rightarrow v_L = -i_L - (v_L - v_C) + v \Rightarrow v_L = -i_L - v_L + v_C + v$

$\Rightarrow 2v_L = -i_L + v_C + v \Rightarrow v_L = -\tfrac{1}{2}i_L + \tfrac{1}{2}v_C + \tfrac{1}{2}v$ (5)

$i_C = i_2 \Rightarrow i_C = v_L - v_C$

De (5):
$i_C = v_L - v_C \Rightarrow i_C = -\tfrac{1}{2}i_L + \tfrac{1}{2}v_C + \tfrac{1}{2}v - v_C \Rightarrow i_C = -\tfrac{1}{2}i_L + \tfrac{1}{2}v_C + \tfrac{1}{2}v - v_C$

$\Rightarrow i_C = -\tfrac{1}{2}i_L - \tfrac{1}{2}v_C + \tfrac{1}{2}v$ (6)

Assim, temos, de (5) e (6):

$$\begin{bmatrix} i_L' \\ v_C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} v$$ (Equações de Estado)

Equação de Saída:

$$y = v_0 = v_C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

Observações:

1) A representação Estado-Espaço <u>tem que ser:</u> as Equações de Estado E a Equação de Saída. Sem a Equação de Saída, não está correto.

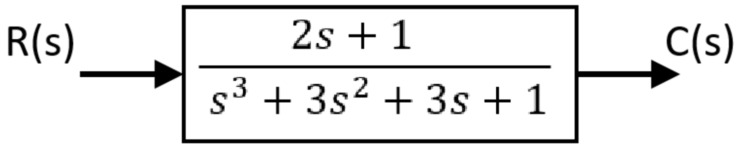
2) A representação é no TEMPO. Não pode ser feita na frequência!

3.

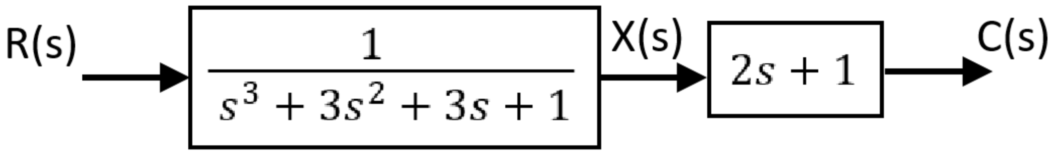
a) (1,5 Ponto) Função de Transferência -> Estado-Espaço:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s+1}{s^3+3s^2+3s+1}$$

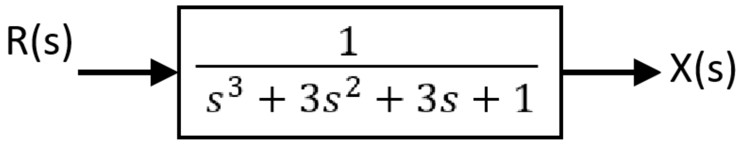
A função de transferência deve ser quebrada em dois blocos semelhante ao que foi visto em aula.



Dividindo:



(I)



Ou seja:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3+3s^2+3s+1}$$

$R(s) = X(s)(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)$

Pela transformada inversa de Laplace, considerando condições iniciais nulas:

$r(t) = x'''(t) + 3x''(t) + 3x'(t) + x(t)$ (1)

Com isso, temos essas variáveis de estado:

$x_1 = x$
$x_2 = x'$
$x_3 = x''$

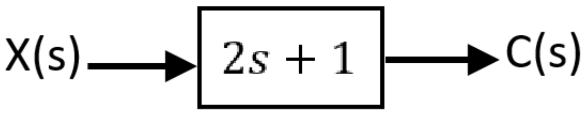
Como precisamos das variáveis e de suas derivadas, temos:

$x_1 = x \Rightarrow x_1' = x' = x_2$
$x_2 = x' \Rightarrow x_2' = x'' = x_3$
$x_3 = x'' \Rightarrow x_3' = x''' = -3x''(t) - 3x'(t) - x(t) + r(t)$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x1' \\ x2' \\ x3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

(II) Para a segunda parte do diagrama de blocos:



C(s)/X(s) = 2s + 1 ⇒ C(s) = X(s)(2s + 1) ⇒ C(s) = 2sX(s) + X(s)

Pela transformada inversa:

c(t) = 2x'(t) + x(t) = $2x_2 + x_1 = x_1 + 2x_2$

Ou, na forma matricial:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

b) (1,5 Ponto) Estado-Espaço -> Função de Transferência:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} r \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = 10c$$

Assim, só é preciso calcular um termo da matriz adjunta para encontrar a matriz inversa (c). O resultado final é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 2s + 3}$$

4.

a) Considere um sistema de segunda ordem subamortecido com tempo de pico (Tp) de 1 seg e tempo de acomodação (Ts) de 1 seg. Apresente **os polos** do sistema que tem esses tempo de pico e de acomodação.

$$Tp = \frac{\pi}{Imag} = 1 \Rightarrow Imag = \pi$$

$$Ts = \frac{4}{Real} = 1 \Rightarrow Real = 4$$

Logo, os polos são: -4 ± j3,1415

Observando que a parte real precisa ser negativa para termos um sistema subamortecido. Se positiva, haveria um crescimento da exponencial.

b) Apresente a resposta no tempo (c(t)) desse sistema, quando é inserida uma entrada degrau unitário. Não precisa calcular os coeficientes de cada termo.

$$c(t) = K_1 + K_2 e^{-4t}(cos\ 3{,}1415t + \phi)$$

onde $\phi = tg^{-1}$(Real/Imag) = tg^{-1}(4/3,1415)

Nas duas letras, *Real* é a parte real do polo, enquanto *Imag* é a parte imaginária do polo.