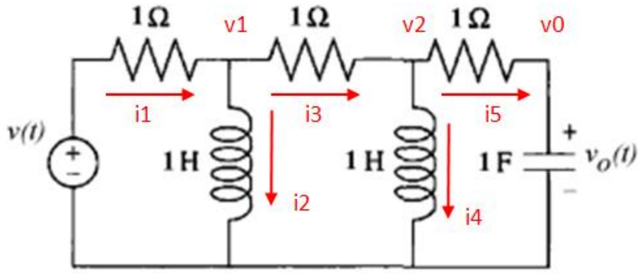
Servomecanismo - 2ª Chamada – 2023.2

Resolução

1.



$$\frac{di_2}{dt} = v_1$$
$$\frac{di_4}{dt} = v_2$$
$$\frac{dv_o}{dt} = i_5$$

Assim, as variáveis de estado consideradas são: i_2, i_4 e v_0.

Malha externa: $-v + i_1 + i_3 + i_5 + v_o = 0$

Como $i_3 = i_1 - i_2$ e $i_5 = i_3 - i_4$, então:

$$-v + i_1 + (i_1 - i_2) + (i_3 - i_4) + v_o = 0$$

$\Rightarrow$ $-v + i_1 + (i_1 - i_2) + ((i_1 - i_2) - i_4) + v_o = 0$

$\Rightarrow$ $i_1 = \frac{2}{3} i_2 + \frac{1}{3} i_4 - \frac{1}{3} v_o + \frac{1}{3} v_i$

$\Rightarrow$ $v_1 = v_i - i_1 = -\frac{2}{3} i_2 - \frac{1}{3} i_4 + \frac{1}{3} v_o + \frac{2}{3} v_i$

Como:

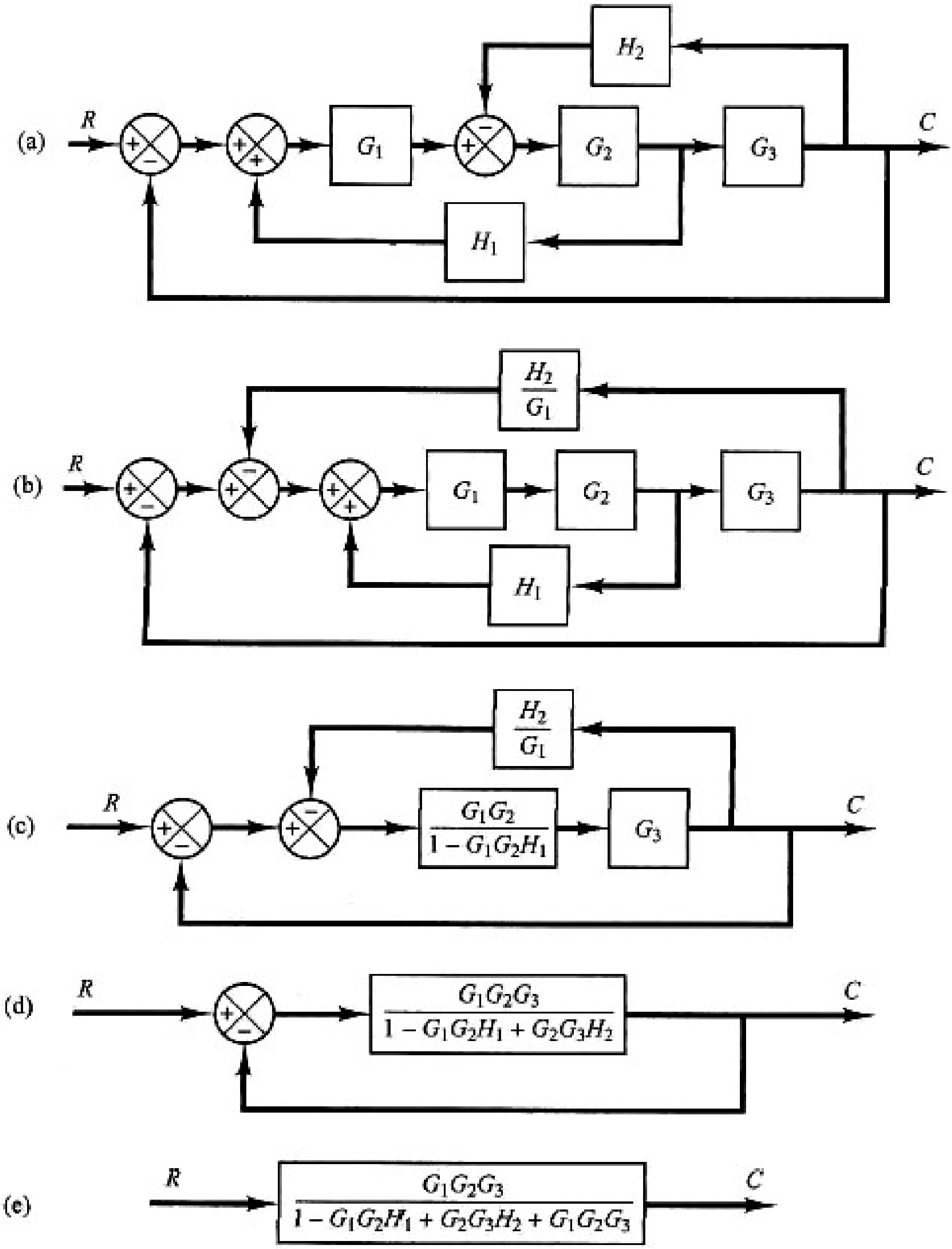
$i_3 = i_1 - i_2 = -\frac{1}{3} i_2 + \frac{1}{3} i_4 - \frac{1}{3} v_o + \frac{1}{3} v_i$ e $i_5 = i_3 - i_4 = -\frac{1}{3} i_2 - \frac{2}{3} i_4 - \frac{1}{3} v_o + \frac{1}{3} v_i$

$\Rightarrow$ $v_2 = i_5 + v_o = -\frac{1}{3} i_2 - \frac{2}{3} i_4 + \frac{2}{3} v_o + \frac{1}{3} v_i$

Ou seja:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} v \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

2.



3.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+2)(s+4)}.$$

$Kp = \lim_{s\to 0} G(s)$ $Kv = \lim_{s\to 0} sG(s)$ $Ka = \lim_{s\to 0} s^2G(s)$

$e_{degrau}(\infty) = 1/(1 + Kp)$ $e_{rampa}(\infty) = 1/Kv$ $e_{parábola}(\infty) = 1/Ka$

$$\lim_{s\to 0} sG(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(s+2)(s+4)} = \frac{K}{8}$$

Como foi calculado o Kv, o erro é dado por 1/Kv. Assim:

$e_{rampa}(\infty) = 1/Kv = 0,16$

$8/K = 16/100 \Rightarrow K = 50$

O sistema é do tipo I, pois tem Kv = constante.

4.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)}$$

Assíntotas:

$\sigma = (-4 - 0)/2 = -2$
$\theta = (2K + 1)\pi/2 = \pi/2,\ 3\pi/2$

$\xi = 0,5 \Rightarrow \cos\theta = 0,5 \Rightarrow \theta = 60°$

Pontos de Entrada/Saída:

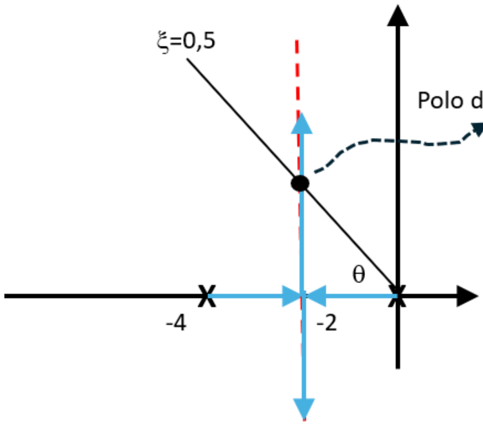
$$K = \frac{-1}{\frac{1}{s(s+4)}} = s(s+4) = s^2 + 4s$$

$$\frac{dK}{ds} = 0 \Rightarrow 2s + 4 = 0 \Rightarrow s = -2$$

Com está entre dois polos, é ponto de saída.

Precisa disso para fazer o desenho correto do Lugar das Raízes e estimar o ponto de operação.

Esboço do lugar das raízes:



Considerando que as assíntotas saem na vertical do mesmo ponto de saída do lugar das raízes, não haverá cruzamento como eixo imaginário.

Sendo θ = 60º, podemos calcular o polo dominante para o sistema sem compensação:

tg 60 = X / 2

onde X é a coordenada no eixo imaginário. Assim:
$\sqrt{3} = X/2 \Rightarrow X = 2\sqrt{3} \cong 3{,}4$

Logo, o polo dominante está em -2 + j3,4

Com isso, temos:

Ts = 4/2 = 2 segundos

O requisito foi ter uma redução do Ts pela metade. Assim, o novo Ts = 1 segundo, o que implica que a nova parte real é igual a 4. Com isso, com ξ constante, temos:

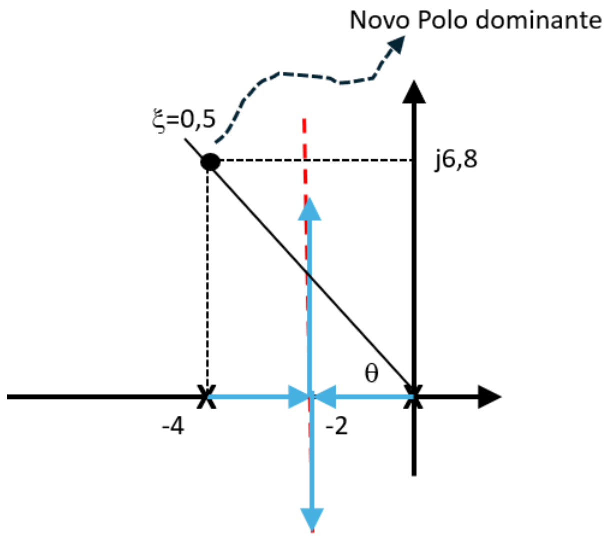
$\xi{,}\omega n = 4 \Rightarrow \omega n = 8$ rad/seg

Com isso, a parte imaginária deve ser:

$\omega n\sqrt{(1 - \xi^2)} = 8.\sqrt{0{,}75} = 8.\sqrt{(3.25/100)} = 8.(5/10)\sqrt{3} = 4\sqrt{3} \cong 6{,}8$

O novo polo dominante para o sistema compensado é: -4 ± j6,8.

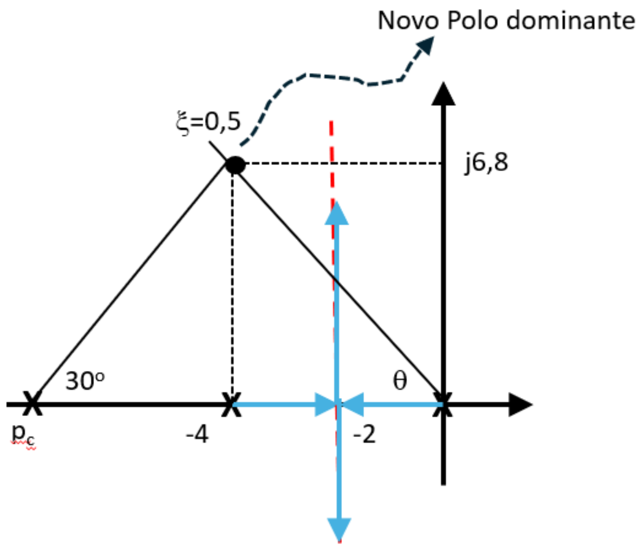
Precisamos checar se esse ponto faz parte do lugar das raízes. No caso, será fácil porque teremos os ângulos já estão presentes. Observe o novo polo no lugar das raízes:



O ângulo que o novo polo faz com o polo em -4 é de 90º e o ângulo que faz com o polo na origem é de 60º (já calculado pelo ξ). Assim, temos:

$\Sigma\angle zeros - \Sigma\angle polos = -(90 + 60) = -150$

Assim, precisamos de algum termo com contribuição angular de -30º para ter um múltiplo ímpar de 180º. Dessa forma, precisamos de um novo polo (pois entra com valor negativo).



$tg\ 30 = 4\sqrt{3}/(p_c - 4) \Rightarrow \sqrt{3}/3 = 4\sqrt{3} / (p_c - 4) \Rightarrow p_c = 16$

Voltou o valor da parte imaginária para ser em função de $\sqrt{3}$ para ficar mais fácil a simplificação.

Todos os cálculos foram realizados sem calculadora.