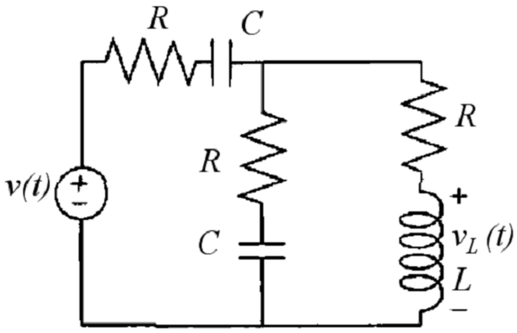
1º EE 2023.2 – Servomecanismo - Resolução

1. $V_L(s)/V(s) = ?$



Malha 1 (da esquerda)**:** $I_1(R + 1/Cs + R + 1/Cs) – I_2(R + 1/Cs) = V$ (1)

Malha 2 (da direita)**:** $- I_1(R + 1/Cs) + I_2(R + 1/Cs + R + Ls) = 0$ (2)

$V_L = Ls.I_2 \Rightarrow I_2 = V_L/Ls$ (3)

De (2):

$I_1 = I_2(2R + 1/Cs + Ls)[1/(R + 1/Cs)]$ (4)

(4) em (1):

$I_1.2(R + 1/Cs) – I_2(R + 1/Cs) = V$

$I_2(2R + 1/Cs + Ls)[1/(R + 1/Cs)].2(R + 1/Cs) – I_2(R + 1/Cs) = V$

$I_2(4R + 2/Cs + 2Ls - R - 1/Cs) = V$

$I_2(3R + 1/Cs + 2Ls) = V$

$I_2(3RCs + 1 + 2LCs^2)/Cs = V$ (5)

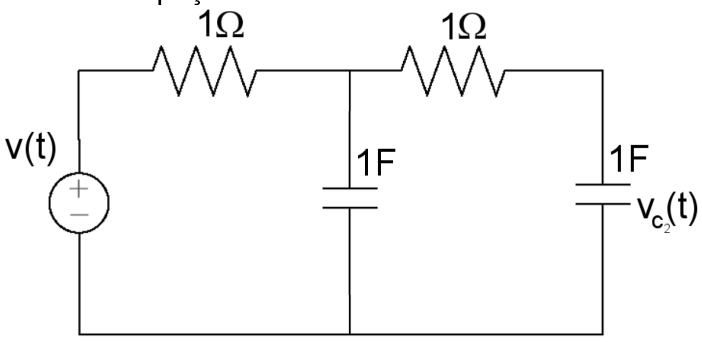
(3) em (5):

$(V_L/Ls)(3RCs + 1 + 2LCs^2)/Cs = V$

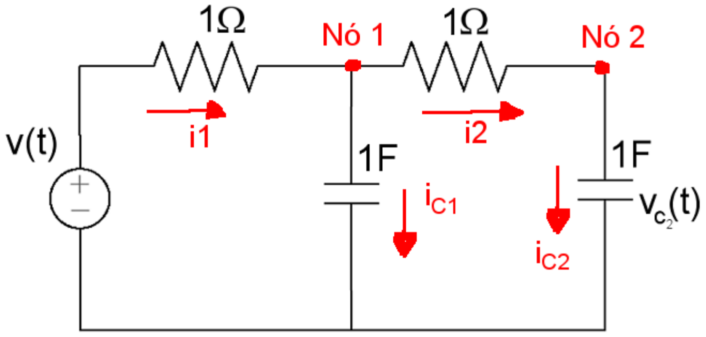
Logo:

$V_L/V = LCs^2/(2LCs^2 + 3RCs + 1)$

2. Representação Estado Espaço



Registrando os nós e as correntes:



Temos dois elementos com relações não lineares entre seus parâmetros (dois capacitores). Logo, temos um sistema de ordem 2. As variáveis de estado escolhidas são V_{C1} e v_{C2}.

$$\begin{cases} C1\frac{dv_{C1}}{dt} = i_{C1} \\ C2\frac{dv_{C2}}{dt} = i_{C2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = i_{C1} \\ \frac{dv_{C2}}{dt} = i_{C2} \end{cases}$$

Nó 1:

$i_1 = i_2 + i_{C1}$ (1)

Nó 2:

$i_2 = I_{C2}$ (2)

A tensão no resistor da malha da esquerda é dada por:

$v_{R1} = v - v_{C1} = 1.i_1$

A tensão no resistor da malha da direita é dada por:

$v_{R2} = v_{C1} - v_{C2} = 1.i_2$

De (1):

$i_{C1} = i_1 - i_2 = v - v_{C1} - v_{C1} + v_{C2} = -2v_{C1} + v_{C2} + v$

De (2):

$i_{C2} = i_2 = v_{C1} - v_{C2}$

Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_{C1}}{dt} = -2v_{C1} + v_{C2} + v \\ \dfrac{dv_{C2}}{dt} = v_{C1} - v_{C2} \end{cases}$$

A saída é a tensão v_{C2}.

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} v_{C1}' \\ v_{C2}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} v \qquad \text{(Equações de Estado)}$$

Equação de Saída:

$$y = v_{C2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C1} \\ v_{C2} \end{bmatrix}$$

Observações:

1) A representação Estado-Espaço <u>tem que ser:</u> as Equações de Estado E a Equação de Saída. Sem a Equação de Saída, não está correto.

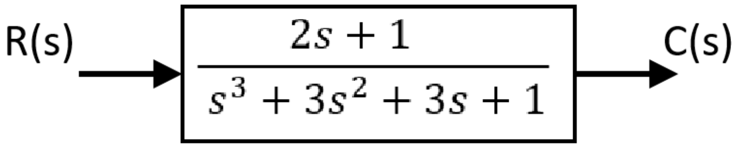
2) A representação é no TEMPO. Não pode ser feita na frequência, nem feita na frequência e depois passada para o tempo porque depende da definição das variáveis de estado!

3.

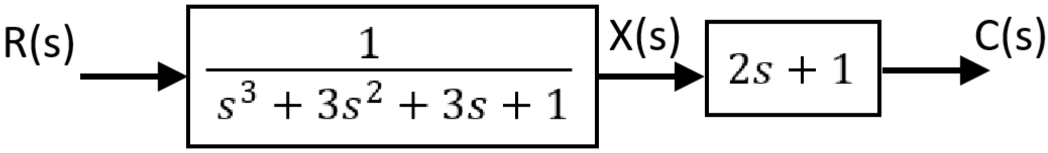
a) (1,5 Ponto) Função de Transferência -> Estado-Espaço:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

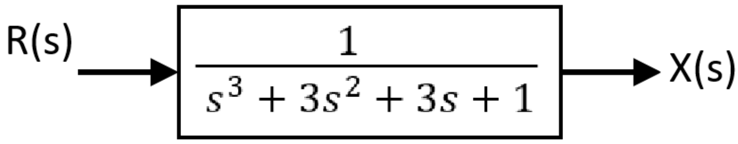
A função de transferência deve ser quebrada em dois blocos semelhante ao que foi visto em aula.



Dividindo:



(I)



Ou seja:

$$\frac{X(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

$R(s) = X(s)(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)$

Pela transformada inversa de Laplace, considerando condições iniciais nulas:

$r(t) = x'''(t) + 3x''(t) + 3x'(t) + x(t)$ (1)

Com isso, temos essas variáveis de estado:
$x_1 = x$
$x_2 = x'$
$x_3 = x''$

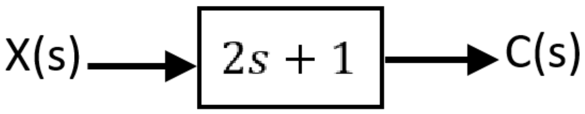
Como precisamos das variáveis e de suas derivadas, temos:

$x_1 = x \Rightarrow x_1' = x' = x_2$
$x_2 = x' \Rightarrow x_2' = x'' = x_3$
$x_3 = x'' \Rightarrow x_3' = x''' = -3x''(t) - 3x'(t) - x(t) + r(t)$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x1' \\ x2' \\ x3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(t)$$

(II) Para a segunda parte do diagrama de blocos:



C(s)/X(s) = 2s + 1 ⇒ C(s) = X(s)(2s + 1) ⇒ C(s) = 2sX(s) + X(s)

Pela transformada inversa:

c(t) = 2x'(t) + x(t) = $2x_2 + x_1 = x_1 + 2x_2$

Ou, na forma matricial:

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix}$$

b) (1,5 Ponto) Estado-Espaço -> Função de Transferência:

$$\boldsymbol{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & -2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

Seja:

$$(sI - A)^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} = 10(c + i)$$

Assim, só é preciso calcular dois termos da matriz inversa. Considerando:

$$A^{-1} = \frac{ADJ(A)}{DET(A)}$$

Teremos:

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 5 & 3 & s + 2 \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{ADJ(sI - A)}{DET(sI - A)}$$

Det(sI – A) = $s^3 + 2s^2 + 3s + 5$

$$\text{Adj(sI – A)} = \begin{bmatrix} a & b & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{vmatrix} \\ d & e & f \\ g & h & \begin{vmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ d & e & f \\ g & h & s^2 \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(1 + \ s^2)}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5} = \frac{10s^2 + 10}{s^3 + 2s^2 + 3s + 5}$$

4.

a) Considere um sistema de segunda ordem subamortecido com polos em -4 ± j7,75. Calcule Tp e Ts. Se o coeficiente de amortecimento (ξ) é 0,5, qual o valor de ω_n?

$Tp = \frac{\pi}{Imag} = \frac{\pi}{7{,}75} \Rightarrow Tp = 0{,}4\ seg$ (Poderia apenas deixar indicada a divisão com π)

$$Ts = \frac{4}{Real} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow T_S = 1\ seg$$

A parte real é dada por $\xi.\omega_n$, assim, se ξ = 0,5:

$\xi.\omega_n = 4 \Rightarrow 0{,}5.\omega_n = 4 \Rightarrow \omega_n = 8$ rad/seg

b) Quais deveriam ser os novos polos desse sistema, se precisássemos diminuir o tempo de acomodação pela metade, mantendo o coeficiente de amortecimento em 0,5?

O novo Ts seria 0,5 seg. Como ele é inversamente proporcional à parte real do polo, diminuir o tempo de acomodação pela metade implica em dobrar a parte real que passaria a ser 8.

Novo Ts = 4/8 = 0,5 seg

Como a parte real é dada por $\xi.\omega_n$ e ξ permanece igual a 0,5, teríamos:

$\xi.\omega_n = 8 \Rightarrow 0{,}5.\omega_n = 8 \Rightarrow \omega_n = 16$ rad/seg

Com isso, a parte imaginária passa a ser:

$\omega_n.\sqrt{(1 - \xi^2)} = 16.\sqrt{(1 - 0{,}5^2)} = 16.\sqrt{0.75}$ (Poderia deixar assim indicado)

A parte imaginária é 13,85 (calculando). Logo, os novos polos estão em:

-8 ± j13,85