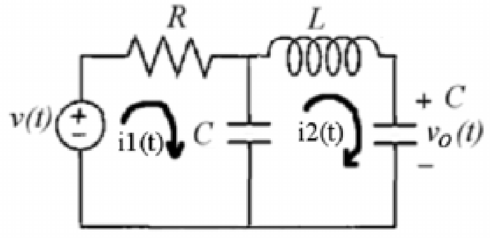
### 0.1.1. 1. Pede-se para calcular $\frac{V_{o(s)}}{V(s)}$

1.




Aplicando análise nodal, temos

$$1.\frac{V - V_i}{R} = \frac{V_i}{\frac{1}{sC}} + \frac{V_o}{\frac{1}{sC}}$$

$$1.1\frac{V - V_i}{R} = (sC)V_i + (sC)V_o$$

$$2.\frac{V_o}{\frac{1}{sC}} = \frac{V_i - V_o}{sL}$$

$$2.1(sC)V_o = \frac{V_i - V_o}{sL}$$

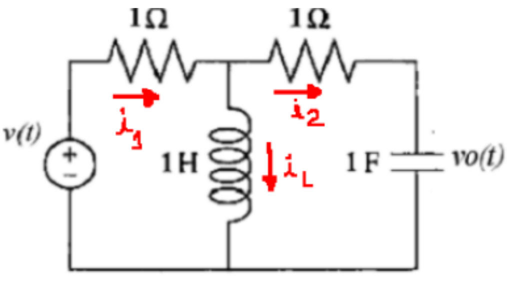
e isolando $V_i$ temos

$$3.V_i = V_o(1 + s^2CL)$$

e substituindo 3 em 1.1

$$\begin{aligned}
4.(V - V_i) &= (sCR)(V_i + V_o) \\
4.2V &= (sCR)(V_i + V_o) + V_i \\
4.3V &= V_i(1 + sCR) + V_o(sCR) \\
4.4V &= (V_o(1 + s^2CL))(1 + sCR) + V_o(sCR) \\
4.5V &= V_o(1 + sCR + s^2CL + s^3C^2RL + sCR) \\
4.6V &= V_o(1 + 2sCR + s^2CL + s^3C^2RL) \\
4.7\frac{V_o}{V_s} &= \frac{1}{1 + 2sCR + s^2CL + s^3C^2RL}
\end{aligned}$$

### 0.1.2. 2. Equação estado espaço




Como temos dois componentes de circuitos reativos então será necessário 2 variáveis de estado espaço.

$$X = \begin{pmatrix} i_l \\ v_c \end{pmatrix}$$

e temos as seguintes relações

$$1.(v - v_l) = i_l + (v_l - v_c)$$
$$2.(v_l - v_c) = c\frac{dv_c}{dt}$$

note que via substituição podemos isolar $v_l$ em 2 e substitutir em 1 de tal forma que 1 fica em função da entrada e $v_c$ que é variável de estado.

$$3.v_l = \dot{v_c} + v_c$$
$$3.1.(v - (\dot{v_c} + v_c)) = i_l + ((\dot{v_c} + v_c) - v_c)$$
$$3.2.(v - (\dot{v_c} + v_c)) = i_l + \dot{v_c}$$
$$3.3.v - v_c - i_l = 2\dot{v_c}$$
$$3.4.\dot{v_c} = i_l\left(-\frac{1}{2}\right) + v_c\left(-\frac{1}{2}\right) + v\left(\frac{1}{2}\right)$$

e como $\boldsymbol{\dot{i_l} = v_l}$, temos

$$4.1\dot{i_l} = \left(i_l\left(-\frac{1}{2}\right) + v_c\left(-\frac{1}{2}\right) + v\left(\frac{1}{2}\right)\right) + v_c$$
$$4.2\dot{i_l} = i_l\left(-\frac{1}{2}\right) + v_c\left(\frac{1}{2}\right) + v\left(\frac{1}{2}\right)$$

e teremos portanto a seguinte representação matricial.

$$\begin{pmatrix} \dot{i_l} \\ \dot{v_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_l \\ v_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} v(t)$$

e para saída $\boldsymbol{v_o}$ que é $v_o = v_c$, temos

$$y = v_o = v_c = (0 \;\; 1)\begin{pmatrix} i_l \\ v_c \end{pmatrix}$$

### 0.1.3. 3. Função de transferência para equaçã estado espaço

**3.**

a) (1,5 Ponto) Função de Transferência -> Estado-Espaço:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2s + 1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$

lembrar que é necessário tratar primeiro da função de transferência com numerador 1 isto é em dois blocos onde o primeiro tem a seguinte função de transferência

$$1.\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1}$$
$$1.1.Y(s)(s^3 + 3s^2 + 3s + 1) = R(s)$$
$$1.2.\frac{dy^3}{dt} + 3\frac{dy^2}{dt} + 3\frac{dy^1}{dt} + y = r$$

aplicando o seguinte mapeamento para as variáveis de estado

$$\begin{aligned}
&y = x_1, \\
&\frac{dy^1}{dt} = x_2 = \dot{x_1} \\
&\frac{dy^2}{dt} = x_3 = \dot{x_2} \\
&\frac{dy^3}{dt} = x_4 = \dot{x_3} = r - \left(3\frac{dy^2}{dt} + 3\frac{dy^1}{dt} + y\right) = r - (3x_3 + 3x_2 + x_1)
\end{aligned}$$

assumindo r como entrada, temos portanto a seguinte representação matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} r$$

temos agora a seguinte função de transferência, onde $Y(s)$ é a entrada

$$2.\frac{C(s)}{Y(s)} = 2s + 1$$

$$2.1.c = 2\frac{dy^1}{dt} + y$$

$$2.2c = 2x_2 + x_1$$

e portanto a saída é

$$c(t) = (1 \;\; 2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

### 0.1.4. Conversão de estado espaço para função transferencia

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} r \qquad y = [1 \quad 0 \quad 0]\mathbf{x}$$

para chegar na formula desejada lembremos que a equação estado espaço e da forma e aplicando a transformada de Laplace temos

$$\begin{aligned}
&\dot{X} = AX + BU \\
&Y = CX + DU \Rightarrow \\
&sX = AX + BU \\
&Y = CX + DU
\end{aligned}$$

vamos isolar X

$$
\begin{aligned}
&X(Is - A) = BU \\
&X = (Is - A)^{-1}BU \\
&Y = C\Big((Is - A)^{-1}BU\Big) + DU \\
&\frac{Y}{U} = C(Is - A)^{-1}B + D
\end{aligned}
$$

temos então

$$
\begin{aligned}
&1. Is = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{pmatrix} \\
&2. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\
&3. Is - A = \begin{pmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s & -1 \\ 3 & 2 & s+5 \end{pmatrix} \\
&4. C(Is - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +\begin{pmatrix} s & -1 \\ 2 & s+5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & s+5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & s+5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & 0 \\ 3 & s+5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ +\begin{pmatrix} 0 & s \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} s & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

note que apenas a linha 1 da matriz não é nula e mais ainda que apenas o último termo de tal linha é não nulo, logo temos $10\frac{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ s & -1 \end{pmatrix}}{\det(Is-A)^{-1}}$ e daí para calcular determinante, temos que

$$
\det(Is - A)^{-1} = s\begin{vmatrix} s & -1 \\ 2 & s+5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & s+5 \end{vmatrix} = s(s^2 + 5s + 2) - (-1)(3) = (s^3 + 5s^2 + 2s + 3)
$$

e portanto a função transferência é:

$$
\frac{Y}{U} = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 2s + 3}
$$

### 0.1.5. 4. Considere um sistema de segunda ordem subamortecido com tempo de pico $T_p$ de 1s e tempo de acomodação $T_s$ de 1s. Apresente os polos do sistema que tem esses tempo de pico de acomodação.