0.1.1. 1 Seja $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \mathbf{w\ termina\ com\ ab}\}$

0.1.1.1. i) Dê uma AFD que reconheça L

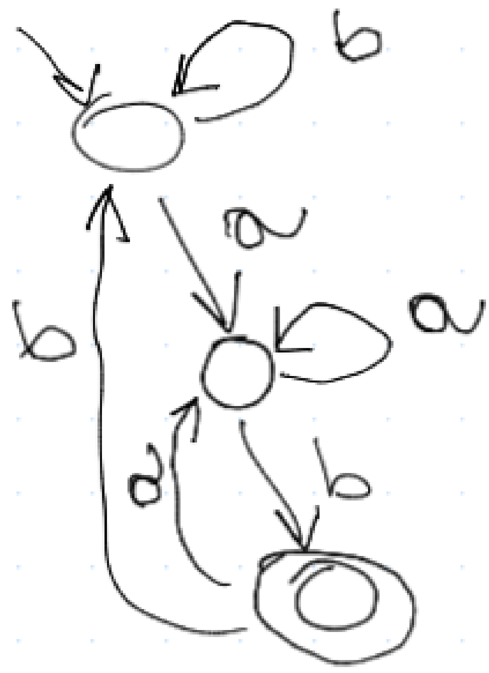

Figure 1:

0.1.1.2. ii) Prove por indução sobre w que para toda $w \in \{a, b\}^*$ o AFD aceita sse $w \in L$ $\Rightarrow$ ida

O AFD aceitar implica em $w \in L$

Para o caso base temos que $\boldsymbol{w = \mathrm{ab}}$ e de fato partindo do estado inicial após duas transições a palavra é aceita.

Para a hipótese indutiva suponha que $\boldsymbol{w = \Sigma^n \mathrm{ab}}$ é aceito pelo AFD.

Devemos provar que para $\boldsymbol{w = \Sigma^{n+1} \mathrm{ab}}$ tambem deverá ser aceito.

note que podemos separar a cadeia $\boldsymbol{w}$ em

$$w = \Sigma \Sigma^n \mathrm{ab}$$

tal que $\boldsymbol{w_1 = \Sigma}$ e $\boldsymbol{w_2 = \Sigma^n \mathrm{ab}}$

$\boldsymbol{w_1 = b}$

nesse casos temos que se encontra no estado inicial e portanto a segunda cadeia será aceita visto que $\boldsymbol{\Sigma^n}$ **ab** é aceita partindo do estado inicial.

$\boldsymbol{w_1 = a}$

Logo há 3 possíveis estados para $\boldsymbol{\Sigma^{n+1}}$, analisemo-os

- Se for o primeiro estado então pelo caso base temos que será aceita

- Se for o segundo caso estado então ocorerrá uma transição para o mesmo estado e outra para o estado de aceitação, logo será aceita
- Se for o terceiro estado então ocorrerá uma transição para o segundo estado e depois para o estado de aceitação, loge será aceita

como para todos estados será aceita então $\boldsymbol{a\Sigma^n}\mathbf{ab}$ será aceito

e como $\boldsymbol{\Sigma^{n+1}}\mathbf{ab}$ será aceito então está provada a hipotése indutiva e para $\boldsymbol{\Sigma^m}\mathbf{ab}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$ é aceita a palavra que pertence a linguagem de $\boldsymbol{L}$ logo o AFD aceitar implica em $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}$

$\Longleftarrow$ **volta**

Se $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{L}$ então o AFD aceita

Suponha que $\boldsymbol{w}$ esteja em $\boldsymbol{L}$ logo tem a forma $\boldsymbol{\Sigma^m}\mathbf{ab}, \boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$ pela definição de $\boldsymbol{L}$.

após ler Σ^m caracteres o AFD só pode estar em 3 possíves estados, analisemo-os

- Se o primeiro então ocorre uma função de transição para o segundo estado e depois uma outra para estado de aceitação, logo AFD aceita
- Se o segundo então ocorre uma função de transição que faz o AFD permanecer no mesmo estado e uma segunda função de transição para chegar no estado de aceitação, logo AFD aceita
- Se o terceiro então ocorre uma função de transição para o segundo estado e uma segunda transição para estado de aceitação, logo AFD aceita w

como AFD aceita toda cadeia da forma Σ^mab então se $w \in L \Rightarrow \text{w será aceita pelo AFD}$

como provamos a ida e a volta para tal proposição então é um caso de se e somente se $\square$

0.1.2. iii) Dê uma gramatica regular que gera L

$$= S \to Aab$$
$$= A \to Aa \mid Ab \mid \epsilon$$

0.1.3. A derivada de uma linguagem $L \subseteq \Sigma^*$ com respeito a um símbolo $a \in \Sigma$ é definida da seguinte forma

$$\frac{dL}{da} = \{w \in \Sigma^* \mid aw \in L\}$$

a derivada contem todas as cadeias que podem ser obtidas tomando uma cadeia em L que começa com um a e remove-se a(Cadeias que não começam com a são completamente removidas) Mostre que se L for regular então a operação de derivada tambem será regular.

0.1.4. 4. Seja G a graática livre de contexto G com as seguintes produções

$$S \to aS \mid Sb \mid a \mid b$$

0.1.4.1. a) Dê um autômato com pilha que reconheça L.

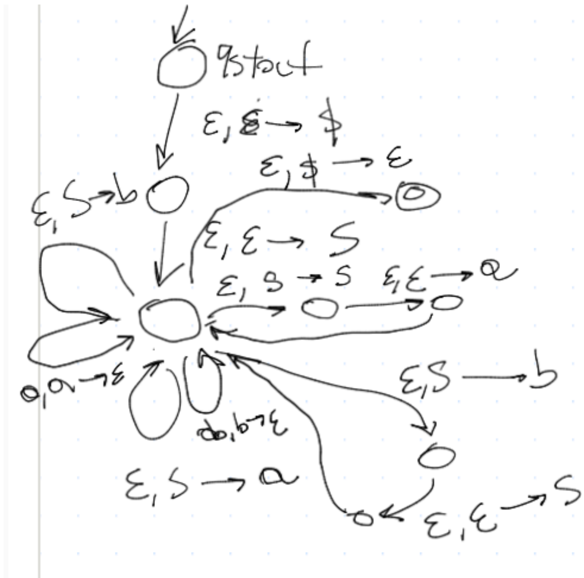

Figure 2:

0.1.4.2. b) G é ambígua? Em caso positivo dê exemplo de uma cadeia que tenha duas derivações mais à esquerda (ou mais à direita) distintas.

Não é ambígua note que ambiguidade implica em $|w_1| = |w_2|$ via indução temos que

para o caso base $|W_1| = 1$ então $W = a, W = b$ e só há uma maneira de produzir essas cadeias logo para $|W| = 1$ é não ambigua

considerando agora hipótese indutiva $|W| = n$ é não ambígua provemos que $|W + 1|$ tambem não será ambigua.

sabemos que $|W|$ por hipótese é não ambígua a adição de um novo símbolo possibilita que tenhamos apenas uma única regra de produção sendo aplicada $S \to a$ ou $S \to b$

- Como não há nenhuma outra sequência de aplicação de regras de produção então essas são as únicas maneiras de gerar uma sequência de caracteres de tamanho 1
- Logo como as cadeias geradas de tamanho 1 são distintas então $|W + 1|$ deverá ser gerado de maneira não ambígua visto que a aplicação das N primeiras regras de produção resulta numa cadeia não ambígua.

0.1.4.3. c) Diga se G é linear, regular , linear á direita ou linear á esquerda, justificado suas respostas

não pode ser linear à direita visto que $S \to aS$ contradiz a condição de todas regras de produção terem um único não terminal a direita. não pode ser linear à esquerda visto que $S \to Sb$ contradiz a condição de todas as regras de produção terem um único não terminal a esquerda. deverá ser linear visto que todas as regras apresentam um único terminal ou nenhum.

0.1.5. 5 Use o lema do bombeamento para mostra que :

0.1.5.1. i) $L_1 = \{www \mid w \in \{a, b\}^*\}$ não é regular

Suponha que L_1 seja regular então

- $(\forall n \geq 0), xy^n z \in L$
- $|xy| \leq p$ onde p é o tamanho máximo que a cadeia xy possa atingir e ser ainda bombeada
- $|y| \geq 1$ isto é y não pode ser cadeia vazia

Suponha a seguinte estrutura

$x = w, y = w, z = w$

aplicando o lema do bombeamento teríamos para $p = 2|w|$

e que a cadeia ww^2w deveria ser aceita, visto que as três condições anteriores foram satisfeitas, no entanto claramente não pertence a w visto que $|xy^2z| = 4|w|$ e $y \in L \Rightarrow |y| = 3\ |w|$ logo a linguagem não é regular.

0.1.5.2. ii) $L_2 = \{0^n \# 0^{2n} \# 0^{3n} | n \geq 0\}$ não é livre do contexto

Se $\boldsymbol{L_2}$ é livre de contexto, então

$|\boldsymbol{vy}| \geq \mathbf{0}$
$\forall \boldsymbol{i} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{uv^ixy^iz} \in \boldsymbol{L_2}$
$|\boldsymbol{vxy}| \leq \boldsymbol{p}$

considere a seguinte estrutura

$u = 0^n, v = \#, x = 0^{2n}, y = \#, z = 0^{3n}$

de acordo com o lema do bombeamento para linguagems livres de contexto temos que a seguinte cadeia deverá pertencer a L_2

$0^n \#^p 0^{2n} \#^p 0^{3n}$

mas notamos que não é o caso visto que há excesso do símbolo $\#$ e portanto a linguagem não deverá ser livre de contexto por falhar a condição 2.

0.1.6. 3 Suponha que já tenha sido demonstrado que a linguagem $L_1 = \left\{0^{n^3}1^n \mid n \geq 0\right\}$ não é regular. Usando as propriedados de fechamento da classe de linguagens regulares mostre que a seguinte linguagem tambem não será regular

$$L_2 = \{a^k b c^l \mid k, l \geq 0 \land k \neq l^3\}$$

se é regular então deverá ser fechada para complemento, mas note que

$$\overline{L_2} = \{a^k b c^l \mid k, l < 0 \lor k = l^3\}$$

para que essa linguagem seja aceita então $k, l < 0$ ou $k = l^3$ consideramos a segunda possibilidade

gora considere a seguinte palavra aceita por $L_1 = 0^{l^3}1^l$ e considere agora que o alfabeto de $L_2 = \{0, 1\}$ assim teríamos que $0^{l^3}1^l \in \overline{L_2}$ com $b = \epsilon$ então $\overline{L_2}$ é não regular visto que contem uma cadeia que não pode ser reconhecida por AFD's e consequentemente como o complemento é não regular e esperava-se ser regular, via propriedade de fechamento das linguages regulares, deduzimos que L_2 é não regular.