Chapitre 3 : Séries de Fourier

* Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est T-périodique si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ est appelé la pulsation associée à la période T

* Soit f T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

On a : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+T}^{b+T} f(x)dx$

[$\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$

* Soit f T-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

f impaire $\Rightarrow$ $\int_0^T f(x)dx = 0$

* Série de Fourier :

Soit f T-périodique continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

Ses coefficients de Fourier trigonométriques sont :

* $a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx$
* $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(n\omega x)dx$

, $b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(n\omega x)dx$

avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La série de Fourier de f est :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t))$$

- Si la fonction est paire, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = 0$
- Si la fonction est impaire, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = 0$

* Théorème de Dirichlet :

Soit f T-périodique, et $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Alors, $\forall t \in \mathbb{R}$, la Série de Fourier de f converge et :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos(n\omega t) + b_n\sin(n\omega t)) = \frac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$$

où $f(t+0)$ désigne la limite à droite en 0 de f, et $f(t-0)$ la limite à gauche.

* Théorème de Parseval :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$, T-périodique et continue par morceaux.

On a : $\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$

Remarques :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\sin(n\pi) = 0$ et $\cos(n\pi) = (-1)^n$

Méthode :

Calculer la série de Fourier :

- On confirme la continuité de la fonction
- On vérifie la parité de la fonction
- On calcule les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n

Déterminer la convergence de la série de Fourier :

- On étudie la continuité de la fonction, sa dérivabilité et sa continuité par morceaux
- On applique le théorème de Dirichlet

Calculer les sommes liées aux séries de Fourier :

- Appliquer le théorème de Dirichlet ou de Parseval
- Calcul de sommes (Chap 2)