Analyse 1

Bily Sasorith

Année 2022/2023 - L1R

Table des matières

Chapitre 1

Suites numériques

Principe. Le raisonnement par récurrence est un raisonnement possible dans le cas où l'on veut démontrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel supérieur à un entier n_0 donné.

Structure : le raisonnement par récurrence comporte trois étapes :
- **Initialisation** : on vérifie que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie
- **Hérédité** : pour tout entier $n \geq 0$, on démontre que si P_n est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : on peut alors affirmer que pour tout $n \geq n_0, P(n)$ est vraie

Exemple. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx$

Dans ce cas, la propriété $\mathcal{P}_n$ est : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx$ *et* $n_0 = 0$.

- ***Initialisation*** *: Pour n = 0, on a :*

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &= 1+0\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

$\mathcal{P}(0)$ *est vérifiée.*

- ***Hérédité*** *: On suppose que* $(1+x)^n \geq 1+n, \forall n \in \mathbb{N}$ *fixé* $, \forall x \in \mathbb{R}^+$.
  Montrons que $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$

  On a :

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x)\\ &\geq (1+nx)(1+x)\\ &\geq 1+x+nx+nx^2\\ &\geq 1+(n+1)x\end{aligned}$$

  Donc $\mathcal{P}(n)$ *est héréditaire*

- ***Conclusion*** *:* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, (1+x)^n \geq 1+nx$

1.1 Généralités

1.1.1 Définitions et mode de génération

Définition 1.1. On appelle suite numérique toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$

Remarque. Une suite peut éventuellement être définie à partir d'un certain rang, c'est-à-dire pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.

Notations. : Soit la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ définie pour tout entier n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.

— Pour tout $n \geq n_0$, u_n est le terme de rang n de la suite u

— La suite u est généralement notée $(u_n)_{n\geq n_0}$ ou (u_n)

— u_{n_0} est le terme initial de la suite u

Remarque (mode de génération d'une suite)**.**

— La suite u_n peut-être définie de manière explicite s'il existe une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ telle que :

$$\forall n \geq n_0, u_n = f(n)$$

Exemple. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 2$, par $u_n = ln(1+\dfrac{1}{n})$

On a alors $u_5 = f(5) = ln(1+\dfrac{1}{5}) = ln(\dfrac{6}{5})$

— La suite (u_n) peut être définie par récurrence s'il existe une fonction f déifnie sur $\mathbb{R}$ ou sur une partie de $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} = f(u_n)$$

Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = (n+1)u_n$

$$\begin{aligned} On\ a\ alors\ u_1 &= (0+1)u_0 = u_0 = 1 \\ u_2 &= 2u_1 = 2 \times 1 = 2 \end{aligned}$$

1.1.2 Monotonie d'une suite numérique

Définition 1.2.

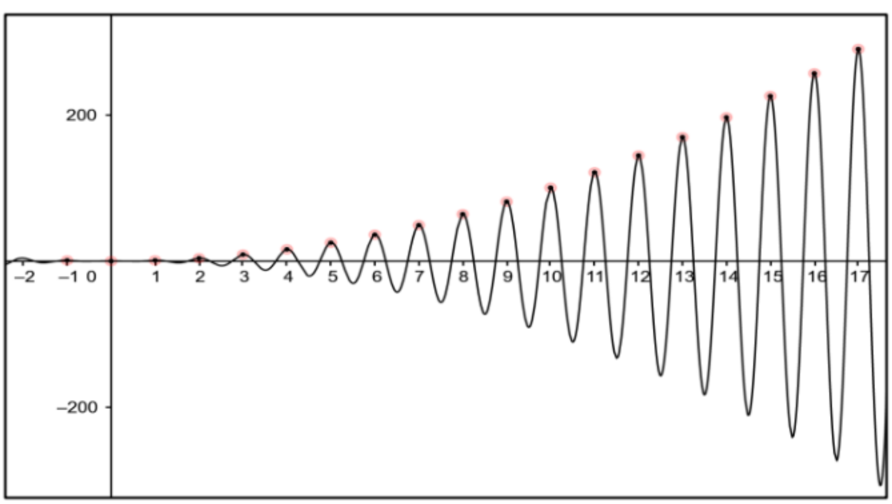
- La suite (u_n) est croissante si : $\forall n \geq n_0, u_n \leq u_{n+1}$
- La suite (u_n) est décroissante si : $\forall n \geq n_0, u_n \geq u_{n+1}$
- La suite (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante

En pratique : on a les propriétés suivantes :

- (u_n) est croissante $\Leftrightarrow \forall n \geq n_0, u_{n+1} - u_n \geq 0$
- (u_n) est décroissante $\Leftrightarrow \forall n \geq n_0, u_{n+1} - u_n \leq 0$
- Si (u_n) est une suite strictement positive : (u_n) est croissante $\Leftrightarrow \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$
- Si (u_n) est une suite explicite définie par la fonction f :
  f est croissante (resp. décroissante) sur $[n_0, +\infty[\Rightarrow (u_n)$ est croissante (resp. décroissante)

Mise en garde : la réciproque de cette propriété est fausse :

On considère la suite u définie pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 cos(2n\pi)$



1.1.3 Suites bornées

Définition 1.3.

- La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \leq M$.
  Le nombre M est un **majorant** de la suite (u_n)
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq n_0, u_n \geq m$.
  Le nombre m est un **minorant** de la suite (u_n)
- La suite (u_n) est **bornée** si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

Remarque : si une suite est majorée ou minorée, elle possède une infinité de majorants ou de minorants.

1.2 Suites arithmétiques, suites géométriques

1.2.1 Suites arithmétiques

Définition 1.4. Soit $r \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) est **arithmétique de raison r** si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$$

Propriété 1. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p + (n-p)r$$

Propriété 2. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(n-p+1)(u_p+u_n)}{2}$$

1.2.2 Suites géométriques

Définition 1.5. Soit $q \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) est **géométrique de raison q** si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = q u_n$$

Propriété 1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, u_n = u_p q^{n-p}$$

Propriété 2. Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2, \sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

1.3 Comportement en l'infini d'une suite numérique

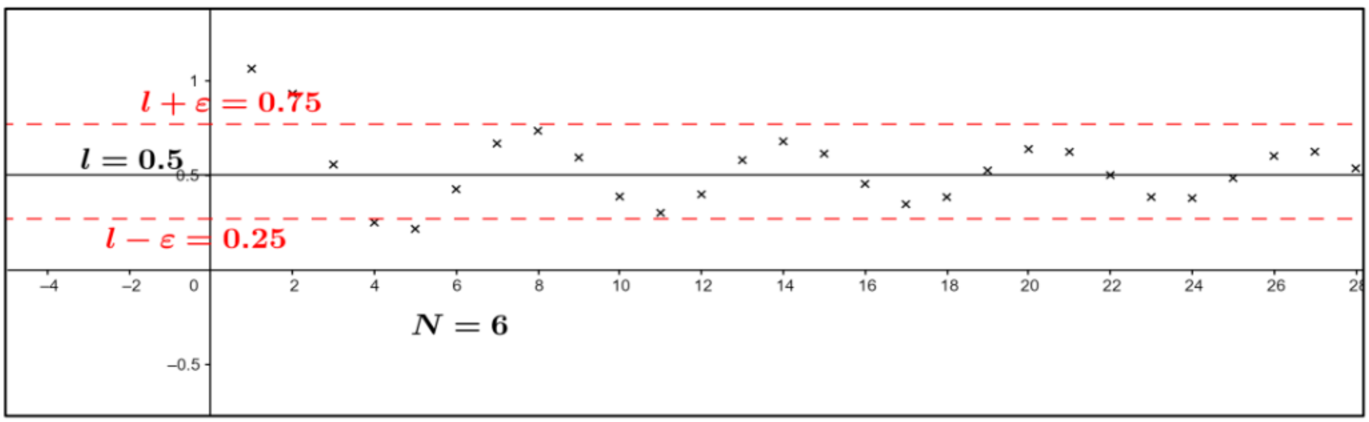
1.3.1 Convergence d'une suite numérique

Définition 1.6. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) **converge** vers ℓ ou **est convergente** vers ℓ si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - \ell| < \varepsilon$$

Le nombre ℓ est appelé **limite** de la suite (u_n).
Toute suite qui n'est pas convergente est **divergente**.

Exemple. $u_n = 0,5 + \dfrac{sin(n)}{1,5\sqrt{(n)}}$ $\qquad \ell = 0,5 \quad \varepsilon = 0,25$



Propriété 1.1. Toute suite convergente possède une limite unique. On note alors, si ℓ est la limite de la suite (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la suite (u_n) possède deux limites distinctes ℓ et ℓ'. On peut supposer que $\ell < \ell'$.

- (u_n) a pour limite ℓ, donc d'après la définition, en prenant $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{2} > 0$, il existe un entier N tel que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N, |u_n - l| < \frac{\ell' - \ell}{2} \Rightarrow -\frac{\ell' - \ell}{2} &< u_n - \ell < \frac{\ell' - \ell}{2} \\ \Rightarrow \ell - \frac{\ell' - \ell}{2} &< u_n < \ell + \frac{\ell' - \ell}{2} \\ \Rightarrow \frac{3\ell - \ell'}{2} &< u_n < \frac{\ell' + \ell}{2} \end{aligned}$$

- (u_n) a pour limite ℓ', donc d'après la définition, en prenant $\varepsilon = \dfrac{\ell' - \ell}{2} > 0$, il existe un entier N' tel que :

$$\begin{aligned} \forall n \geq N', |u_n - l'| < \frac{\ell' - \ell}{2} \Rightarrow -\frac{\ell' - \ell}{2} &< u_n - \ell' < \frac{\ell' - \ell}{2} \\ \Rightarrow \ell' - \frac{\ell' - \ell}{2} &< u_n < \ell' + \frac{\ell' - \ell}{2} \\ \Rightarrow \frac{\ell + \ell'}{2} &< u_n < \frac{3\ell' - \ell}{2} \end{aligned}$$

- Ainsi, en posant $\forall n \geq N'' = max\{N, N'\}$, on a :
  $\forall n \in N''$, $u_n < \dfrac{\ell' + \ell}{2} < u_n$ ce qui est absurde. On a donc nécessairement $\ell = \ell'$.

$\square$

Définition 1.7. La suite (u_n) diverge vers $+\infty$ ou a pour limite $+\infty$ si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$$

On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Définition 1.8. La suite (u_n) diverge vers $-\infty$ ou a pour limite $-\infty$ si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall A < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n < A$$

On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

1.3.2 Limites et opérations

Les propriétés figurant sur cette feuille sont également valables dans le cas de limites de fonctions. F.I signifie "forme indéterminée", ie forme ne permettant pas de conclure ℓ et ℓ' désignent des réels.

Limites et somme

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n) =$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
Et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

Limites et produit

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$	ℓ	$\ell>0$ $ou+\infty$	$\ell<0$ $ou-\infty$	$\ell>0$ $ou+\infty$	$\ell<0$ $ou-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$	$\ell*\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I

Limites et inverse

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$	$\ell\neq0$	$\pm\infty$	0^+	0^-
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{u_n}$	$\dfrac{1}{\ell}$	0	$+\infty$	$-\infty$

Limites et quotient

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)$	ℓ	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	0	$\pm\infty$
Et si $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n)$	$\ell'\neq0$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-	0	$\pm\infty$
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	F.I

1.3.3 Théorèmes de comparaison

Propriété 1.2. Soit deux suites (u_n) et (v_n)

$$\left.\begin{array}{l}\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

Exemple. Soit (u_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2 + (-1)^n n - 3$.

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq (-1)^n \leq 1 \Leftrightarrow -n & \leq (-1)^n n \leq n \\ \Leftrightarrow n^2 - n - 3 \leq u_n & \leq n^2 + n - 3\end{aligned}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} n^2 + n - 3 = +\infty$
donc d'après le théorème de comparaison $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Propriété 1.3. Soit deux suites (u_n) et (v_n)

$$\left.\begin{array}{l}\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$$

Théorème 1.1 (Théorème des gendarmes)**.**
Soit trois suites (u_n), (v_n) et (w_n). Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{l}\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, u_n \leq v_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = \ell\end{array}\right\} \Rightarrow (v_n) \text{ converge et } \lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$$

Propriété 1.4.

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$
- $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq 1$, la suite (q^n) n'a pas de limite

1.4 Convergence et monotonie

Théorème 1.2 (Théorème de convergence monotone)**.**

- Si la suite (u_n) est croissante et majorée par M, alors elle est convergente et sa limite est inférieure ou égale à M.
- Si la suite (u_n) est décroissante et minorée par m, alors elle est convergente et sa limite est supérieure ou égale à m.

Théorème 1.3.

- Si la suite (u_n) est croissante et non majorée, alors elle est divergente vers $+\infty$.
- Si la suite (u_n) est décroissante et non minorée, alors elle est divergente vers $-\infty$.

Démonstration. La suite (u_n) n'est pas majorée donc $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, u_N > A$.
Or, la suite (u_n) est croissante, donc $\forall n \geq N, u_n \geq u_N > A$.
Donc $\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n > A$.
Donc la suite (u_n) est divergente vers $+\infty$.

□

Exemple. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in N, u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$.

- ***Initialisation*** : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2}$ *donc* $1 \leq u_0 \leq u_1 \leq 2$
- ***Hérédité*** *: Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$*
  Et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2$

$$\begin{aligned}
1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2 &\Rightarrow 2 \leq 2u_n \leq 2u_{n+1} \leq 4 \\
&\Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{2u_{n+1}} \leq \sqrt{4} \\
&\Rightarrow 1 \leq \sqrt{2} \leq \sqrt{2u_n} \leq \sqrt{2u_{n+1}} \leq 2 \\
&\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 2
\end{aligned}$$

- ***Conclusion*** *: Donc $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 2$*

  La suite est croissante et majorée, elle est convergente. Soit ℓ sa limite.

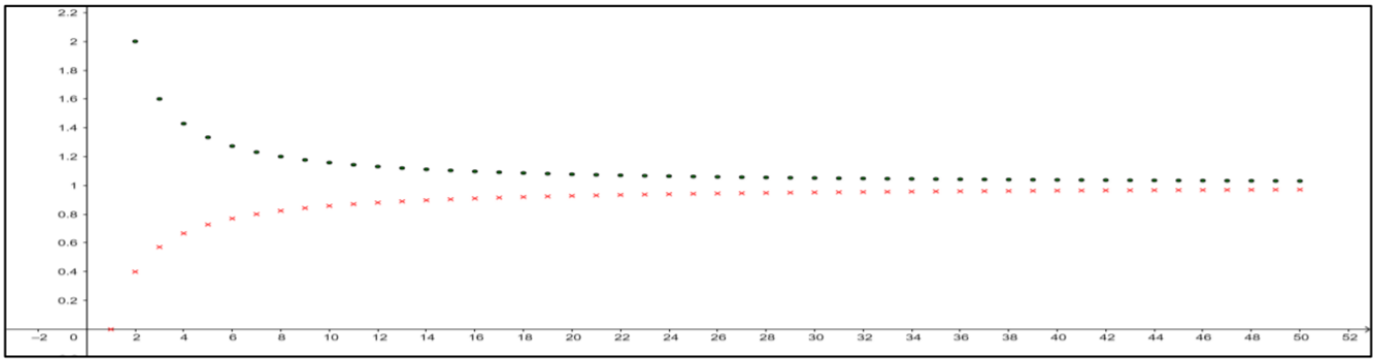
$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell = \sqrt{2\ell} &\Rightarrow \ell^2 = 2\ell \\
&\Rightarrow \ell(\ell - 2) \\
&\Rightarrow \ell = 0 \text{ ou } \ell = 2
\end{aligned}$$

Or, la suite est minorée par 1 donc $\ell = 2$.

1.5 Suites adjacentes

Définition 1.9. Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = 0$



Théorème 1.4. Deux suites sont adjacentes convergent vers la même limite

Démonstration. Soit deux suites (u_n) et (v_n) adjacentes.

- Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$
  On considère la suite (w_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n - u_n$.
  $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} - w_n = v_{n+1} - u_{n+1} - (v_n - u_n) = v_{n+1} - v_n - (u_{n+1} - u_n) \leq 0$ car (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante. Donc la suite (w_n) est décroissante.
  Or, la suite (w_n) converge vers 0 donc elle est positive donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n \geq 0$ donc $v_n \geq u_n$

- On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$
  Donc la suite (u_n) est croissante et majorée par (par v_0) et la suite (v_n) est décroissante et minorée (par u_0) donc ces deux suites sont convergentes vers respectivement ℓ et ℓ'

- On en déduit, par opération que (w_n) converge vers ℓ' - ℓ. Donc, par unicité de la limite, $\ell = \ell$'.

$\square$

Exemple. On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\forall n \leq 1, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad et \quad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

- $\forall n \geq 1, u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$

  Donc (u_n) est une suite croissante.

- *Pour tout $n \geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+1} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)^2}{n(n+1)^2} \\ &= -\frac{1}{n(n+1)^2} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

  Donc (v_n) est une suite décroissante.

- $\lim_{n \to +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

  Donc (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes qui convergent vers la même limite

Chapitre 2

Fonctions d'une variable réelle

Dans ce chapitre, si nécessaire, on considère le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2.1 Généralités

2.1.1 Définitions

Définition 2.1. On appelle fonction d'une variable réelle, notée f, toute application d'une partie de $\mathbb{R}$, appelée ensemble de définition de la fonction f et notée D_f, dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.2. Soit f une fonction d'une variable réelle. On appelle graphe ou courbe représentative de la fonction f l'ensemble des points du plan noté C_f défini par :

$$C_f = \{(x, y), x \in D_f\}$$

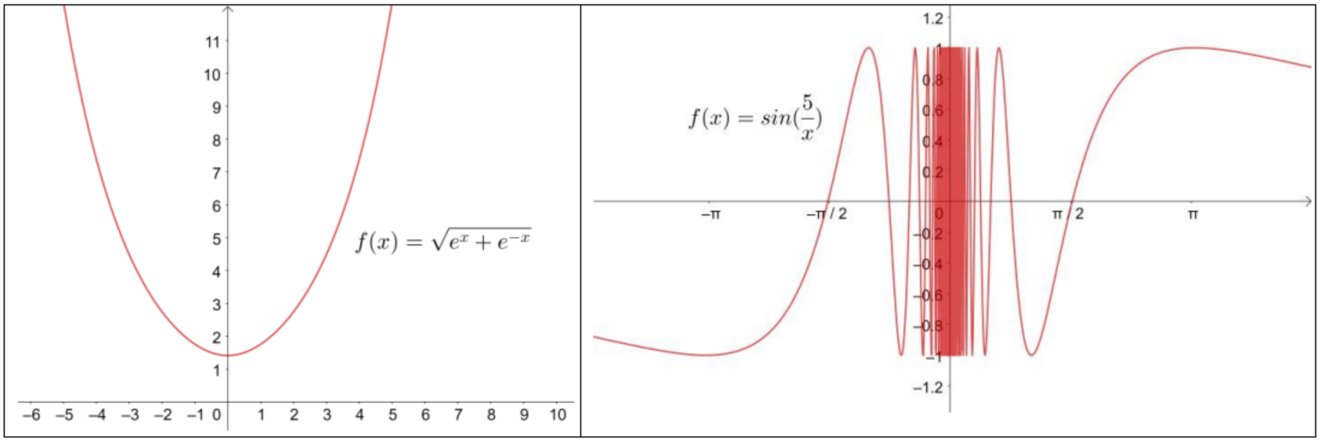
2.1.2 Périodicité et parité

Définition 2.3. Soit f une fonction d'une variable réelle

1. La fonction f est paire si et seulement si
   - $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
   - $\forall x \in D_f, f(-x) = f(x)$
2. La fonction f est impaire si et seulement si :
   - $\forall x \in D_f, -x \in D_f$
   - $\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x)$

Propriété 2.1.

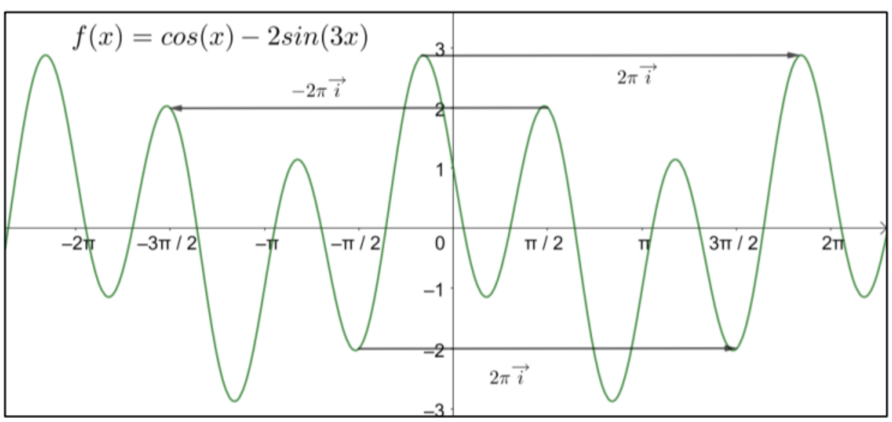
- La fonction f est paire si et seulement si C_f est symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$
- La fonction f est impaire si et seulement si C_f est symétrique par rapport à l'origine O.



Définition 2.4. Soit f une fonction d'une variable réelle, soit T un réel positif non nul. La fonction f est périodique de période T ou est T-périodique si et seulement si :

- $\forall x \in D_f, x + T \in D_f$
- $\forall x \in D_f, f(x + T) = f(x)$

Propriété 2.2. Soit f une fonction T-périodique.
C_f se déduit du graphe de la restriction de f à tout intervalle de longueur T par translation du vecteur $kT\vec{i}, k \in \mathbb{Z}$



Propriété 2.3. Soit f une fonction d'une variable réelle.

- Si f est paire ou impaire, il suffit d'étudier f sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$
- Si f est T-périodique, il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur T.
- Si f est paire ou impaire et T-périodique, il suffit d'étudier f sur $D_f \cap [0, \dfrac{T}{2}]$.

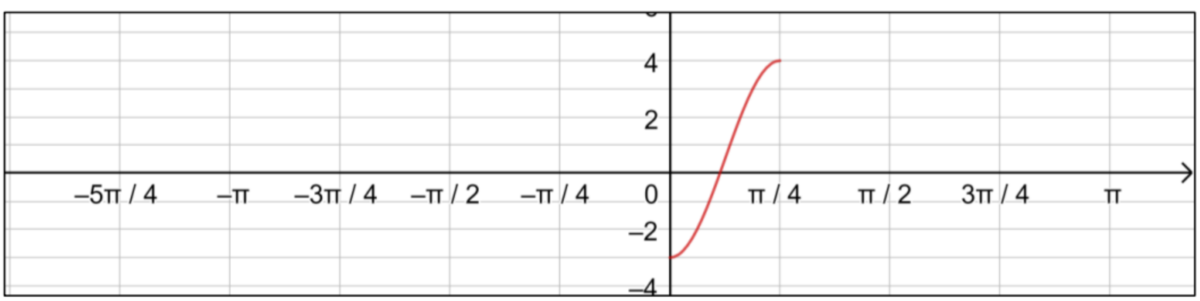
Exemple. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = sin^2(2x) - 3cos(4x)$.
Montrons que f est une fonction $\frac{\pi}{2}-$périodique et paire.

- *Montrons que f est paire :*

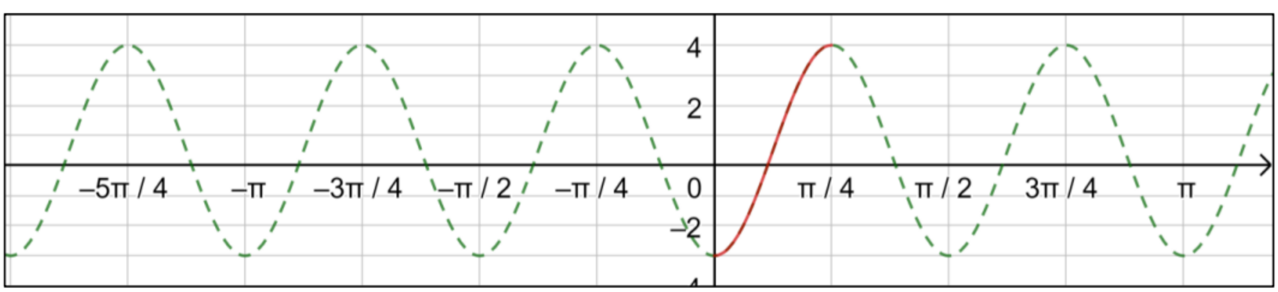
$$\begin{aligned} f(-x) &= sin^2(-2x) - 3cos(-4x) \\ &= -sin^2(2x) - 3cos(4x) \text{ car } sin(-x) = -sin(x) \\ &= sin^2(2x) - 3cos(4x) \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \textit{donc } f \textit{ est paire.} \end{aligned}$$

- *Montrons que f est $\frac{\pi}{2}$-périodique :*

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{\pi}{2}\right) &= sin^2\left(2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) - 3cos\left(4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= sin^2\left(2x+\frac{2\pi}{2}\right) - 3cos\left(4x+2\pi\right) \\ &= sin^2(2x) - 3cos(4x) \\ &= f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \textit{donc } f \textit{ est } \frac{\pi}{2}\textit{-périodique .} \end{aligned}$$



On donne ci-dessus la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$.



On obtient la courbe de f sur $\mathbb{R}$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées et par translation

2.1.3 Composition de fonctions

Définition 2.5. Soit f et g deux fonctions d'une variable réelle telles que $\forall x \in D_f, f(x) \in D_g$. On appelle fonction composée de f suivie de g, la fonction notée $g \circ f$ définie sur D_f par :

$$\forall x \in D_f, g \circ f(x) = g[f(x)]$$

On peut schématiser par : $g \circ f : x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)] = g \circ f(x)$

Remarque. La composition des fonctions n'est pas commutative i.e $g \circ f \neq f \circ g$.

Exemple. Soit la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 1$

- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$
- *On peut définir sur R, la fonction* $g = ln \circ f$ *par :*

$$\forall x \in R, g(x) = ln(f(x)) = ln(3x^2 + 1)$$

- *On peut définir sur* $]0, +\infty[$*, la fonction* $g = f \circ ln$ *par :*

$$\forall x > 0, h(x) = f(ln(x)) = 3ln^2(x) + 1$$

Exemple. Soit la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + 2$

On peut définir sur $]-2, +\infty[, g = ln \circ f$ *par :*

$$\forall x > -2, g(x) = ln(x + 2)$$

Exemple. Soit la fonction f définie par $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{ln(x^2 + 1)}$

Soit u, v, w *les fonctions définies par* $u(x) = x^2 + 1$*,* $v(x) = ln(x)$ *et* $w(x) = \sqrt{x}$
On a $f = w \circ v \circ u$

2.1.4 Fonctions réciproques

Définition 2.6. Soit f une fonction définie sur un ensemble E à valeurs dans un ensemble F. On dit que f est une bijection de E sur F si tout élément de F possède un unique antécédent par f dans E, c'est-à-dire si :

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \text{ tel que } f(x) = y$$

.

Définition 2.7. Soit f une bijection de E sur F. Alors il existe une unique notée f^{-1}, appelée bijection réciproque de f, définie sur F à valeurs dans E, telle que

$$\forall x \in F, f \circ f^{-1}(x) = x \text{ et } \forall x \in E, f^{-1} \circ f(x) = x$$

Exemple.

- La fonction $x \Rightarrow x^2$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et sa bijection réciproque est la fonction racine carrée.
- La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $]0; +\infty[$ et sa bijection réciproque est la fonction logarithme népérien.

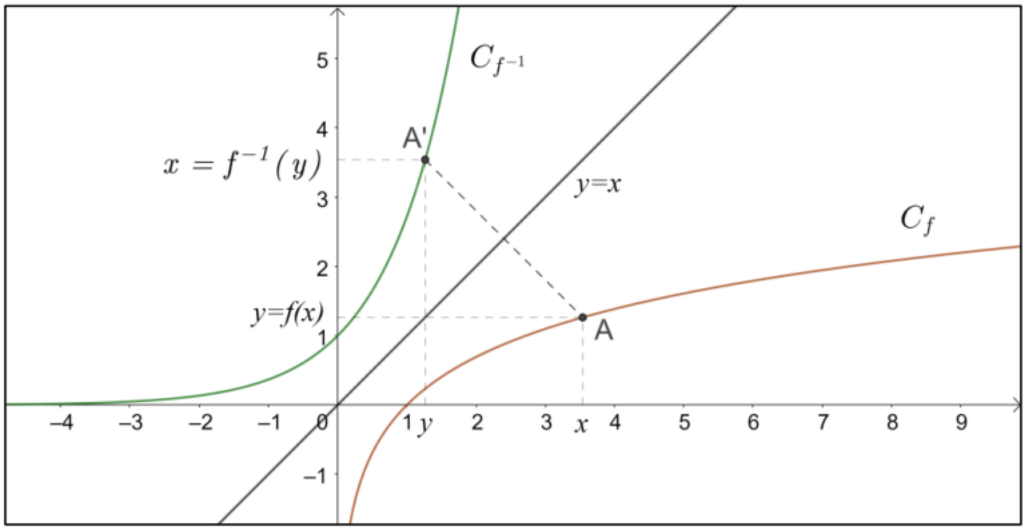
Exemple. Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = ln(x^2 + 1)$.

Montrons que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et déterminons sa bijection réciproque :

$$\begin{aligned}\forall y \in [0, +\infty[, f(x) = y &\Leftrightarrow ln(x^2 + 1) = y \\ &\Leftrightarrow x^2 + 1 = e^y \\ &\Leftrightarrow x^2 = e^y - 1 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{e^y - 1}\end{aligned}$$

Donc f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[, f^{-1}(x) = \sqrt{e^y - 1}$

Propriété 2.4. Dans un repère orthonormé, la courbe d'une bijection et de sa bijection réciproque sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

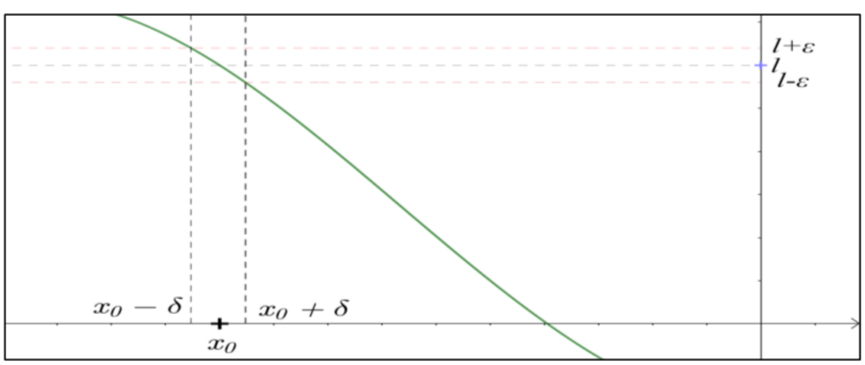


2.2 Limites et continuité d'une fonction d'une variable réelle

2.2.1 Limites d'une fonction

Dans la suite du chapitre, on considère des fonctions d'une variable réelle définies sur des intervalles. On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$. Si I désigne un intervalle ouvert du type $]a, b[$, on note $\overline{I} = [a, b]$. Par extension, on note, par exemple, $\overline{[a, +\infty[} = [a, +\infty[\cup \{+\infty\}$

On donne ci-dessous les différentes définitions. Ces définitions ne sont pas à connaître, elles sont fastidieuses et d'usage très malaisées. Le point essentiel est de comprendre le concept puis de savoir l'utiliser à l'aide des différentes propriétés.



]

Définition 2.8 (Limite en un point).
Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cap \overline{D_f}$.

- Soit ℓ in $\mathbb{R}$. La fonction a pour limite ℓ en x_0 si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ pour x proche de x_0 ie :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
- La fonction f a pour limite $+\infty$ en x_0, si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient $f(x)$ pour x proche de x_0 i.e :
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A$$
- La fonction f a pour limite $-\infty$ en x_0, si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient $f(x)$ pour x proche de x_0 i.e :
$$\forall A < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < A$$

Remarque. On définit de manière semblable le concept de limite à droite et de limite à gauche en x_0 en restreignant les valeurs de x à $x > x_0$ ou $x < x_0$.

Définition 2.9 (Limite en l'infini).
On suppose que la fonction f est définie au voisinage de $+\infty$, ie D_f contient un intervalle de la forme $]A, \infty[$.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. La fonction f a pour limite ℓ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient $f(x)$ pour x assez grand ie :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x > \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
- La fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]A, +\infty[$ contient $f(x)$ pour x assez grand ie :
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x > \delta \Rightarrow f(x) > A$$
- La fonction f a pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A[$ contient $f(x)$ pour x est assez grand ie :
$$\forall A < 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D_f, x > \delta \Rightarrow f(x) < A$$

Remarque. On définit de manière semblable le concept de limite en $-\infty$.

Propriété 2.5. Il y a unicité de la limite. On note alors de manière semblable aux suites la limite.

2.2.2 Propriétés

Toutes les propriétés énoncées dans les sections 1.3.2 et 1.3.3 du chapitre précédent restent vraies, quelque soit le type de limite.

Propriété 2.6.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cap \overline{D_f}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \Leftrightarrow$ La droite d'équation $x = x_0$ est une asymptote verticale à C_f.
- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x) = \ell \Leftrightarrow$ la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à C_f.

Propriété 2.7. Soit $a \in \overline{D_f}$. Si la fonction f possède une limite finie en a, alors la fonction f est bornée au voisinage de a.

Remarque. La réciproque est fausse : les fonctions sinus et cosinus sont bornées sur $\mathbb{R}$ (par -1 et 1), or ces fonctions ne possèdent pas de limite en l'infini.

Propriété 2.8. Soit a, b et ℓ trois éléments quelconques de $\overline{\mathbb{R}}$. Soit f et g deux fonctions telles que f soit définie au voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et g soit définie au voisinage de b et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = \ell$. Alors on a $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = \ell$.

Quelques limites remarquables à connaître :

◇ Croissances comparées :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{et} \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty, \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0, \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0, \lim_{x \to 0} xln(x) = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \to +\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \to 0} x^n ln(x) = 0$$

◇ Limites et taux de variations :

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{cosx - 1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1 + x)}{x} = 1$$

Exemple.

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{3x+1}{x-1}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} 3x+1 = 4 \\ \lim_{x \to 1^+} x-1 = 0^+ \end{aligned}\right\} \textit{par quotient} \lim_{x \to 1^+} \frac{3x+1}{x-1} = +\infty$$

Exemple.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2+x+1} = \frac{e^x}{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} \times \times \frac{1}{(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = +\infty \textit{ par c.comparée}$$

Exemple.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{ln(2+\frac{1}{x})}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} 2+\frac{1}{x} = 2 \\ \lim_{y \to 2} ln(y) = ln(2) \end{aligned}\right\} \textit{par composition} \lim_{x \to +\infty} ln\left(2+\frac{1}{x}\right) = ln(2)$$

Puis, $\lim_{z \to ln(2)} \sqrt{z} = \sqrt{ln(2)}$

Donc $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{ln(2+\frac{1}{x})} = \sqrt{ln(2)}$

Exemple.

$$\lim_{x \to +\infty} x \times ln(1+\frac{2}{x})$$

On pose $X = \frac{2}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0.$

$\lim_{X \to 0} \frac{2}{X} \times ln(1+X) = 2 \lim_{X \to 0} \frac{ln(1+X)}{X} = 2 \times 1 = 2$

Donc $\lim_{x \to +\infty} x \times ln(1+\frac{2}{x}) = 2$

2.2.3 Continuité d'une fonction d'une variable réelle

Définition 2.10. Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que la fonction f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

Remarque. On peut bien sûr définir la notion de continuité à droite ou à gauche en remplaçant la notion de limite par la notion de limite à droite ou à gauche dans la définition précédente

Définition 2.11. Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est continue en tout point de I, on dit que f est continue sur I.

Propriété 2.9. Les fonctions de références (polynômes, exponentielle, logarithme, sinus et cosinus) sont continues sur leur ensemble de définition.

Propriété 2.10. La somme, le produit, l'inverse, le quotient, la composée de fonctions continues sont continus

2.2.4 Théorèmes fondamentaux

Théorème 2.1 (Le théorème du point fixe)**.**
Soit (u_n) une suite définie par récurrence telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ et si la fonction f est continue en ℓ, alors le nombre ℓ vérifie : $f(\ell) = \ell$.

Théorème 2.2 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I, soit $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$.

$$\forall y \in [f(a), f(b)]\, w, \exists c \in [a, b], f(c) = y$$

Théorème 2.3 (Théorème de la bijection)**.**
Toute fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I est une bijection de I sur $f(I)$ de plus sa bijection réciproque est continue sur $f(I)$.

Exemple.

- La fonction tangente, notée tan est continue et dérivable sur $\left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ comme quotient et

$$\begin{aligned}
\forall x \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \Big(tan(x)\Big)' &= \left(\frac{sin(x)}{cos(x)}\right)' \\
&= \frac{(sin(x))'cos(x) - sin(x)(cos(x))'}{cos^2(x)} \\
&= \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{cos^2(x)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

  Donc la fonction tan est continue et strictement croissante sur $\left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

- $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tan(x) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{sin(x)}{cos(x)} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} tan(x) = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{sin(x)}{cos(x)} = -\infty$

  Donc la fonction tan est une bijection de $\left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
- Sa bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée $arctan$.

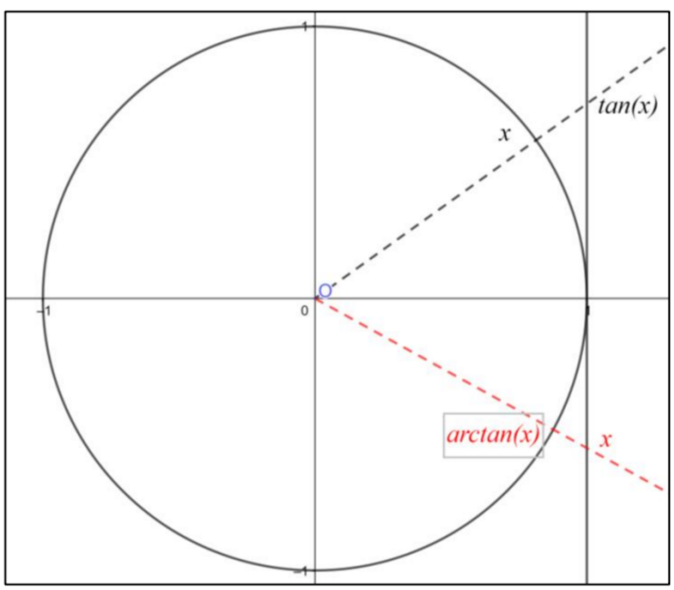


FIGURE 2.1 – La fonction arctangente

2.3 Dérivabilité d'une fonction d'une variable réelle

2.3.1 Dérivabilité d'un point

Définition 2.12. Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel a. On dit que f est dérivable en a, s'il existe un réel ℓ, appelé nombre dérivé de f en a tel que l'une des deux propriétés équivalentes suivantes soit vérifiée :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$$

Remarque. On définit de manière semblable la notion de dérivabilité à droite ou à gauche en a.

Propriété 2.11. Toute fonction dérivable en un point est continue en ce point

Remarque. La réciproque de cette propriété est fausse : la fonction racine carré n'est pas dérivable en 0 alors qu'elle est continue en 0.

Propriété 2.12. Soit f une fonction dérivable en a et de nombre dérivé ℓ. C_f possède au point d'abscisse a une tangente de coefficient directeur ℓ.

De plus, dans le cas où f n'est pas dérivable en a mais où $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$, C_f possède au point d'abscisse a une tangente ou une demi-tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque. On définit de manière semblable la notion de demi-tangente à droite ou à gauche.

2.3.2 Dérivabilité sur un intervalle, fonction dérivée

Définition 2.13. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en tout point de I. Alors on dit que f est dérivable sur I et on note f' la fonction définie sur I qui à tout élément de x de I associe le nombre dérivé de f en x. Cette fonction est appelée fonction dérivée de f.

Propriété 2.13. La somme, le produit, l'inverse, le quotient de deux fonctions dérivables sur un intervalle I sont dérivables sur I. Voir ci-dessous pour les formules :

f	f'
$f(x) = mx + p$	$f'(x) = m$
$f(x) = x^n$ avec $n \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = sin(x)$	$f'(x) = cos(x)$
$f(x) = cos(x)$	$f'(x) = -sin(x)$
$f(x) = tan(x)$	$f'(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$
$f(x) = arctan(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

f	f'
$u + v$	$u' + v'$
ku avec $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$u \circ v$	$v' \times u' \circ v$
$u^n, n \in \mathbb{R}^*$	$nu'u^{n-1}$
$ln\|u\|$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$

Propriété 2.14. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et soit g une fonction dérivable sur J. Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g' \circ f(x)$$

Démonstration. Soit $a \in I$, posons $r(h) = \dfrac{g \circ f(a+h) - g \circ f(a)}{h}$ avec h > 0.

$$r(h) = \frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} \times \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Par hypothèse f est dérivable en a, donc $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

On pose $A = f(a)$ et $X = f(a+h)$:

- $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$ car f est continue en a donc $\lim\limits_{h \to 0} X = A$
- Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{f(a+h) - f(a)} = \lim\limits_{X \to A} \dfrac{g(X)) - g(A)}{X - A} = g'(A) = g'(f(a))$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g \circ f(a+h) - g \circ f(a)}{h} = f'(a) \times g'(f(a)) = f'(a) \times g' \circ f(a)$
Donc la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (g \circ f)'(x) = f'(x) \times g' \circ f(x)$.

□

Exemple. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

Soit $f = u \circ v$ *où* $u(x) = \sqrt{x}$ *et* $v(x) = x^2 + 1$.
La fonction u *est dérivable sur* $[1, +\infty[$. *La fonction* v *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* $[1, +\infty[$, *donc la fonction* f *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \Big(u(v(x))\Big)' = v'(x) \times u'(v(x)) = 2x \times \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Propriété 2.15. Soit f une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J, dérivable sur I et de dérivée ne s'annulant pas sur I. Alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$\forall x \in J, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemple. On a vu la définition de la fonction $arctan$. La fonction tan est dérivable sur $]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ et bijection de $]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Donc sa réciproque $arctan$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\textit{Or, } \forall x \in \left]\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \Big(tan(x)\Big)' = \frac{1}{cos^2(x)} = \frac{cos^2(x) + sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 + \frac{sin^2(x)}{cos^2(x)} = 1 + tan^2(x).$$

$$\textit{Alors, } \forall x \in \mathbb{R}, \Big(arctan(x)\Big)' = \frac{1}{1 + tan^2(arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Chapitre 3

Étude locale et asymptotique

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous nous plaçons dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, à valeurs réelles, définies sur des intervalles ou des unions d'intervalles. Nous désignerons par $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble des nombres réels auquel on adjoint $+\infty$ et $-\infty$. Ainsi on a l'égalité : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty; +\infty\}$

3.1 Négligeabilité

3.1.1 Définition, premiers exemples

Définition 3.1. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est négligeable devant g en a et on note $f = o(g)$ s'il existe une fonction ε définie au voisinage de a et vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ telle que, au voisinage de a, :

$$f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

Par la suite, on considérera des fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$

Exemples.

- En l'infini, si $n > p, x^p = o(x^n)$
- En 0, si $n > p, x^n = o(x^p)$
- En $+\infty$, $ln(x) = o(x^a)$ où a désigne un réel strictement positif.
- En $+\infty$, si $a > 0, x^a = o(e^x)$
- $f = o(1) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$

Remarque. Les points 3 et 4 correspondent aux limites de croissances comparées

3.1.2 Propriétés

Propriété 3.1. Si g ne s'annule pas au voisinage de a, on a l'équivalence suivante :

$$f = o(g) \Longleftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} f = o(g) &\Leftrightarrow \text{Il existe } \varepsilon \text{ définie au voisinage de } a \text{ vérifiant } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0 \\ &\quad \text{telle que au voisinage de } a, f(x) = g(x)\varepsilon(x) \\ &\Leftrightarrow \text{Comme g ne s'annule pas au voisinage de } a, \frac{f(x)}{g(x)} = \varepsilon(x) \\ &\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \end{aligned}$$

□

Propriété 3.2. Si en a, $f = o(g)$ et $g = o(h)$, alors $f = o(h)$.

Exemple. En $+\infty$, si $a > 0, ln(x) = o(x^a)$ et $x^a = o(e^x)$ donc $ln(x) = o(e^x)$.

Propriété 3.3.

- Si en $a, f = o(g)$ et si $h = o(g)$, alors $f + h = o(g)$
- Si en $a, f = o(g)$ et si $h = o(k)$, alors $fh = o(gk)$
- Si en $a, f = o(g)$ et si k est un réel, alors $kf = o(g)$
- Si en a, $f = o(g)$, alors pour toute fonction k définie au voisinage de $a, kf = o(gk)$

Démonstration. Point 4

$f = o(g)$ donc il existe ε définie au voisinage de a vérifiant $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$
telle que au voisinage de a, $f(x) = g(x)\varepsilon(x)$.

Donc au voisinage de a, $k(x)f(x) = k(x)g(x)\varepsilon(x)$.
Or, $\lim\limits_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$ donc $kf = o(kg)$ □

Exemple. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-7x^3 + 5ln(x)}{e^x}$

En $+\infty, x^3 = o(e^x)$ donc $-7x^3 = o(e^x), ln(x) = o(e^x)$ *donc* $-7x^3 + 5ln(x) = o(e^x)$
Et $\dfrac{-7x^3 + 5ln(x)}{e^x} = o(1)$
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-7x^3 + 5ln(x)}{e^x} = 0$

3.2 Fonctions équivalentes

3.2.1 Définition : premiers exemples

Définition 3.2. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que f est équivalente à g en a et on note $f \underset{a}{\approx} g$ si en a, $f - g = o(g)$.

Propriété 3.4. Si $f \underset{a}{\approx} g$, alors $g \underset{a}{\approx} f$.

Propriété 3.5. Si $g \neq 0$ au voisinage de a, alors
$f \underset{a}{\approx} g$ est équivalent à $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f \underset{a}{\approx} g &\Leftrightarrow f - g = o(g) \\
&\Leftrightarrow f = g + o(g) \\
&\Leftrightarrow \frac{f}{g} = 1 + \frac{o(g)}{g} \\
&\Leftrightarrow \frac{f}{g} = 1 + o\frac{g}{g} \\
&\Leftrightarrow \frac{f}{g} = 1 + o(1) \\
&\Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1
\end{aligned}$$

□

Exemples.

— $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \underset{\infty}{\approx} a_n x^n$ (si $a_n \neq 0$)

— $\sin x \underset{0}{\approx} x$

— $\tan x \underset{0}{\approx} x$

— $\cos x - 1 \underset{0}{\approx} -\dfrac{x^2}{2}$

— $\ln(1+x) \underset{0}{\approx} x$

— $\ln(x) \underset{1}{\approx} x - 1$

— $e^x - 1 \underset{0}{\approx} x$

— $\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\approx} \alpha x$

Remarque. Les points 2, 4, 5, 7 correspondent aux limites remarquables vues dans le chapitre précédent.

3.2.2 Propriétés

Transitivité

Propriété 3.6. Si $f \underset{a}{\approx} g$ et si $g \underset{a}{\approx} h$, alors $f \underset{a}{\approx} h$.

Lien avec les limites

Propriété 3.7. Si $f \underset{a}{\approx} g$, alors f et g ont même comportement en a, en particulier, f et g ont, si elles existent, même limite en a

Propriété 3.8. Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}^*$, alors $f \underset{a}{\approx} \ell$.

Propriété 3.9. $f \underset{a}{\approx} 0 \Leftrightarrow$ la fonction f est nulle au voisinage de a

Opérations

Propriété 3.10. Si $f \underset{a}{\approx} g$ et si $h \underset{a}{\approx} k$, alors $fh \underset{a}{\approx} gk$

Démonstration. Si $f \underset{a}{\approx} g$ et si $h \underset{a}{\approx} k$, alors $f = g + o(g)$ et $h = k + o(k)$ donc :

$$\begin{aligned} fh &= (g + o(g))(k + o(k)) \\ &= gk + go(k) + ko(g) + o(g)o(k) \\ &= gk + o(gk) \\ &\underset{a}{\approx} gk \end{aligned}$$

□

Propriété 3.11. Si $f \underset{a}{\approx} g$ alors $\dfrac{1}{f} \underset{a}{\approx} \dfrac{1}{g}$.

Propriété 3.12. Si $f \underset{a}{\approx} g$ et si $h \underset{a}{\approx} k$, alors $\dfrac{f}{h} \underset{a}{\approx} \dfrac{g}{k}$

Propriété 3.13. Si au voisinage de a, $f = o(g)$, alors $f + g \underset{a}{\approx} g$

Exemple. Equivalent en 0 de $\dfrac{\cos(x)-1}{(e^x-1)^2}$

$$\left.\begin{array}{r} cos(x)-1 \underset{0}{\approx} -\dfrac{x^2}{2} \\ e^x-1 \underset{0}{\approx} x \Rightarrow (e^x-1)^2 \underset{0}{\approx} x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{cos(x)-1}{(e^x-1)^2} \underset{0}{\approx} -\frac{x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2}$$

Exemple. Equivalent en $+\infty$ de $\left(3x^2+2x+1\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right)$

- $3x^2+2x+1 \underset{+\infty}{\approx} 3x^2$
- $Posons\ X = \dfrac{2}{x^2}.\ Si\ x \to +\infty\ alors\ X \to 0.\ Et\ en\ 0,\ ln(1+X) \underset{0}{\approx} X$
- $Donc\ en\ +\infty,\ ln(1+\dfrac{2}{x^2}) \underset{+\infty}{\approx} \dfrac{2}{x^2}$
- $Donc\ en\ +\infty,\ (3x^2+2x+1)ln(1+\dfrac{2}{x^2}) \underset{+\infty}{\approx} 3x^2 \times \dfrac{2}{x^2} = 6$
- $Donc\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(3x^2+2x+1\right)\ln\left(1+\dfrac{2}{x^2}\right) = 6$

Remarque.

1 On ne peut ni ajouter, ni soustraire d'équivalents.

2 On ne peut composer des équivalents.

Exemple. En $+\infty$, a-t-on $e^{x^2+x} \approx e^{x^2}$?

- $En\ +\infty,\ x^2+x \underset{+\infty}{\approx} x^2$
- $\dfrac{e^{x^2+x}}{e^{x2}} = e^x$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty \neq 1\ donc\ e^{x^2+x}\ n'est\ pas\ équivalent\ en\ +\infty\ à\ e^{x^2}.$

3.3 Formule de Taylor-Young

Théorème 3.1. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On suppose en outre que f est n fois dérivables sur $[a, b]$ et est $n+1$ fois dérivable en a. Alors, pour tout x appartenant à $[a, b]$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o(x-a)^n$$

Cette formule est appelée formule de Taylor-Young à l'ordre n au voisinage de a.

Exemple. Formule de Taylor-Young appliquée à la fonction $f(x) = e^{2x}$ en a $= 0$ à l'ordre 3

f est infiniment dérivable en tout point, écrivons la formule de Taylor-Young a *l'ordre 3 au voisinage de 0.*

$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2e^{2x}, f''(x) = 4e^{2x}, f^{(4)}(x) = 8e^{2x}$

D'où $f(x) = f(0) + xf'(0) + \dfrac{x^2}{2!}f''(0) + \dfrac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + o(x^3)$

Au voisinage de $0, e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

3.4 Développements limités.

3.4.1 Définition et existence

Définition 3.3. Soit f une fonction définie sur un voisinage V_a du réel a, soit $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f possède un développement limité à l'ordre n en a, en abrégé $DL_n(f; a)$ s'il existe un polynôme P_n de degré n au plus tel que si

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$$

Alors, pour tout $x \in V_a$ on a :

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-a)^n\right)$$

Le polynôme P_n s'appelle la partie régulière du développement limité. On a : $a_0 = f(a)$.

Exemple. $DL_3(e^{2x}; 0) = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$

Remarque. Toute fonction polynôme possède un développement limité à n'importe quel ordre en tout point.

Théorème 3.2. Soit f une fonction définie sur un voisinage V_a du réel a

- Elle possède un DL à l'ordre 0 en a si et seulement si elle est continue en a.
- Elle possède un DL à l'ordre 1 en a si et seulement si elle est dérivable en a.
- Si f est n fois dérivables sur V_a et est $n+1$ fois dérivable en a, alors elle possède un DL à l'ordre n en a et on :

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + o\left((x-a)^n\right).$$

Remarque. Il existe des fonctions admettant un DL à l'ordre n en a sans être n fois dérivables en a

Exemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) &= x^2 + x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) &= 0 \end{cases}$$

- *En* $0, -1 \leq sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ *donc* $|x| \leq xsin\left(\frac{1}{x}\right) \leq |x|$ *donc* $\lim_{x\to 0} xsin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$
- $xsin\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)$ *et* $f(x) = x^2 + x^2 o(1) = x^2 + o(x^2)$
  donc f admet un DL à l'ordre 2 en 0.
- $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x + x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *donc* $\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ *et f est dérivable en* 0,
  avec $f'(0) = 0$
- $\forall x \neq 0, f'(x) = 2x + 3x^2 sin\left(\frac{1}{x}\right) - xcos\left(\frac{1}{x}\right)$
- $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 2 + 3xsin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *or,* $cos\left(\frac{1}{x}\right)$ *n'a pas de limite en* 0
  donc $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}$ *n'a pas de limite en* 0 *et* f *n'est pas deux fois dérivables en* 0.

3.4.2 Propriétés

— Si f possède un DL d'ordre n en a, celui-ci est unique.

— Si une fonction paire (respectivement impaire) possède un DL d'ordre n en a, sa partie régulière est paire (respectivement impaire).

— Troncature : Si f possède un DL d'ordre n en a dont la partie régulière est

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \ldots + a_n(x - a)^n$$

Alors f possède un DL à tout ordre p inférieur ou égal à n de partie régulière

$$P_p(x) = a_0 + a_1(x - a) + \ldots + a_p(x - a)^p$$

.

3.4.3 Exemples de développements limités.

Tous les développements limités suivants sont au voisinage de 0 et existent à n'importe quel ordre.

Fonctions	Développements limités à l'ordre n au voisinage de $x = 0$
$\dfrac{1}{1+x}$	$1 - x + x^2 - \ldots\ldots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right)$
$\dfrac{1}{1-x}$	$1 + x + x^2 + \ldots\ldots + x^n + o\left(x^n\right)$
$(1+x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o\left(x^n\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \ldots - (-1)^n \dfrac{x^n}{n} + o\left(x^n\right)$
$\ln(1-x)$	$-\left(x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^n}{n}\right) + o\left(x^n\right)$
e^x	$1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o\left(x^n\right)$
$\sin x =$	$x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$
$\cos x =$	$1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n}\right)$

Remarque. Ces développements limités peuvent s'obtenir par la formule de Taylor-Young.

3.4.4 Détermination pratique d'un développement limité

La formule de Taylor-Young, bien que permettant en théorie d'obtenir de nombreux développements limités, est en pratique d'un usage très malcommode. Nous utiliserons plutôt les développements limités usuels ainsi que les propriétés énoncées ci-après.

L'idée fondamentale est d'analyser la structure de la fonction à développer afin d'y repérer des DL classiques (voir liste précédente), puis de réaliser des développements de chaque élément constituant la fonction et enfin de remplacer dans la fonction chacun de ceux-ci par son DL, la règle générale étant que chaque DL doit être à l'ordre voulu pour le DL complet.

Se rajoute à cette idée fondamentale l'utilisation de changements de variable mais ceux-ci doivent être «validés » par la localisation des nouvelles variables en 0 afin de pouvoir utiliser les DL classiques.

Ainsi, contrairement aux équivalents, il n'y a aucun interdit, la méthode n'étant qu'une substitution.

Opérations

Si on connaît les développements limités de deux fonctions f et g en un même point a, à deux ordres n et n' éventuellement différents, on peut obtenir les développements limités en a, à l'ordre $\min(n, n')$ de :

- $f + g$, en additionnant les parties régulières tronquées à l'ordre $\min(n, n)$
- $f \times g$ en multipliant les parties régulières et en tronquant leur produit à l'ordre $\min(n; n')$
- Si f est dérivable en a, f' en dérivant la partie régulière. Le développement obtenu est alors à l'ordre $n - 1$
- En intégrant la partie régulière entre a et x, on obtient le développement limité à l'ordre $n + 1$ de $\int_a^x f(t)dt$

Exemple. Déterminer $DL_4\left(3e^{2x} - \cos(3x); 0\right)$

- *Posons* $X = 2x$. X $\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $\mathrm{e}^X = 1 + X + \dfrac{X^2}{2!} + \dfrac{X^3}{3!} + \dfrac{X^4}{4!} + o(X^4)$

  En remplaçant X *par* $2x$, *on obtient :* $\mathrm{e}^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + \dfrac{4}{3}x^3 + \dfrac{2}{3}x^4 + o(x^4)$
- *De même,* $cos(3x) = 1 - \dfrac{9}{2}x^2 + \dfrac{27}{8}x^4 + o(x^4)$
- $$\begin{aligned} 3e^{2x} - cos(3x) &= 3\left[1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right] - \left[1 - \frac{9}{2}x^2 + \frac{27}{8}x^4 + o(x^4)\right] \\ &= 2 + 6x + \frac{3}{2}x^2 + 4x^3 - \frac{11}{8}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Exemple. $DL_3(\sqrt{1+2x}\ln(1+x);0)$

- *Posons* $X = 2x$. X $\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $\sqrt{1+X} = (1+X)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}X+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{3!}X^3+o(X^3)$

  En remplaçant X *par* $2x$*, on obtient :* $\sqrt{1+X} = 1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)$

- $ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$

- $$\begin{aligned}\sqrt{1+2x}\ln(1+x) &= \left(1+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+o(x^3)\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)\\ &= x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)\end{aligned}$$

Exemple. $DL_2\left(\frac{1}{2\sqrt{1+x}};0\right)$

- *Soit* $f(x) = \sqrt{1+x}.f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}$

- $f(x) = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)$

- *Donc par dérivation,* $\frac{1}{2\sqrt{1+x}} = f'(x) = \frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+\frac{3}{16}x^2+o(x^3)$

- *On aurait également pu observer que* $f(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}$

Exemple. $DL_{10}(\arctan(x);0)$

- $arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $arctan(x) - arctan(0) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

  donc $arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt.$

- *En* 0, $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+o(x^5).$

- *Posons* $x = t^2$. *Si* $x \xrightarrow[t\to 0]{} 0$*, on a* $\frac{1}{1+t^2} = 1-t^2+t^4-t^6+t^8+o(t^9).$

- $$\begin{aligned}arctan(x) = \int_0^x(1-t^2+t^4-t^6+t^8)dt+o(x^10) &= x+\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+o(x^3)\\ &= \left[t-\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}-\frac{t^7}{7}+\frac{t^9}{9}\right]_0^x+o(x^{10})\\ &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}+o(x^{10})\end{aligned}$$

Composition

Si f possède un développement limité à l'ordre n en a et si g possède un développement limité à l'ordre n en $f(a)$, alors $g \circ f$ possède un développement limité à l'ordre n en a obtenu en substituant $f(x)$ à x dans le développement de g et en tronquant à l'ordre n.

Exemple. $DL_4(\ln(\cos(x)); 0)$

- $cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) \quad donc \quad ln((cos(x)) = ln\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)$
- $On\ pose \quad X = -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).\ X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\ et\ ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + o(X^4)$
- $X^2 = \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right)^2 = \frac{x^4}{4} + o(x^4)\ car \quad X^3 = o(x^4)\ et\ X^4 = o(x^4)$
- $$\begin{aligned} Donc\ ln(cos(x)) &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + o(x^4) \end{aligned}$$

Exemple. $DL_2\left(e^{\sqrt{1+x}}; 0\right)$

- $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\ donc\ e^{\sqrt{1+x}} = e^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} = e^1 e^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)}$
- $On\ pose \quad X = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4).\ X \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0\ et\ e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2!} + o(X^2)$
- $X^2 = \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right)^2 = \frac{x^2}{4} + o(x^2)$
- $$\begin{aligned} Donc\ e^{\sqrt{1+x}} &= e^{1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} = e^1 e^{\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)} \\ &= e + \frac{ex}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Conséquences. Développement limité de l'inverse d'une fonction et d'un quotient de deux fonctions :

— Si f ne s'annule pas en a et si f possède en a un développement limité à l'ordre n du type

$$f(x) = f(a) + a_1(x-a) + \ldots + o\left((x-a)^n\right)$$

On peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(a)\left[1 + \frac{a_1(x-a)}{f(a)} + \ldots + \frac{o\left((x-a)^n\right)}{f(a)}\right]$$

Puis on peut développer la fonction $\frac{1}{f}$ en a en utilisant la composée de la fonction $x \mapsto \frac{a_1(x-a)}{f(a)} + \ldots + \frac{o\left((x-a)^n\right)}{f(a)}$ et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$

— Si g ne s'annule pas en a, on peut développer $\frac{f}{g}$ en observant que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$.

Exemple. $DL_5(\tan(x);0)$

- $tan(x) = \dfrac{sin(x)}{cos(x)} = \dfrac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}$

1 Par composition : $tan(x) = \left[x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)\right] \dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}$

  - *Soit* $X = \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$. X $\xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $1\frac{}{1+X=1-X+X^2-X^3+X^4-X^5+o(X^5)}$
  - $X^2 = \left[-\dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)\right]^2 = \dfrac{x^4}{4} + o(x^5)$ *car* $X^3 = X^4 = X^5 = o(x^5)$
  - *Donc* $\dfrac{1}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} = 1 + \dfrac{x^2}{2!} - \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^4}{4} + o(x^5) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^5)$
  - *Donc* $tan(x) = \left[x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + o(x^5)\right]\left[1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o(x^5)\right]$
    $$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

2 Par division selon les puissances croissantes :

$$\begin{array}{r|l}
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2}
- \left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24}\right) & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5) \\ \cline{1-1}
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + o(x^5) & \\
- \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6}\right) & \\ \cline{1-1}
\frac{2x^5}{15} + o(x^5) & \\
- \frac{2x^5}{15} & \\ \cline{1-1}
o(x^5) &
\end{array}$$

Exemple. $DL_2\left(\frac{\sqrt{1+x}-1}{\ln(1+2x)}; 0\right)$

3.5 Applications.

3.5.1 Recherche de limites

Exemple. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right)$

- *On est confronté à une forme indéterminée*
- *L'utilisation des équivalents n'est pas permise (somme cf 3.2.2)*
- $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{sin^2(x)} = \frac{sin^2(x) - x^2}{x^2 sin^2(x)} \underset{0}{\approx} \frac{sin^2(x) - x^2}{x^2 \times x^2} = \frac{sin^2(x) - x^2}{x^4}$
- *Développons à l'ordre 4 en 0 le numérateur :*
  - $sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \Rightarrow sin^2(x) = x^2 - \frac{2x^4}{3!} + o(x^4) = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$
  - *Donc* $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{sin^2(x)} \underset{0}{\approx} \frac{x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - x^2}{x^4} = -\frac{1}{3} + o(1)$
  - *Donc* $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = -\frac{1}{3}$

3.5.2 Étude locale d'une fonction

Propriété 3.14. Si une fonction f admet en a un développement limité à l'ordre n de la forme $f(x) = f(a) + a_1(x-a) + \ldots + o\left((x-a)^n\right)$, avec $n > 2$, alors on a :

- $f'(a) = a_1$
- La tangente à C_f au point d'abscisse a a pour équation $y = f(a) + a_1(x-a)$.
- La position relative de C_f et de sa tangente au point d'abscisse a est donnée par le signe du premier terme non nul d'ordre strictement supérieur à 1 (voir exemples).

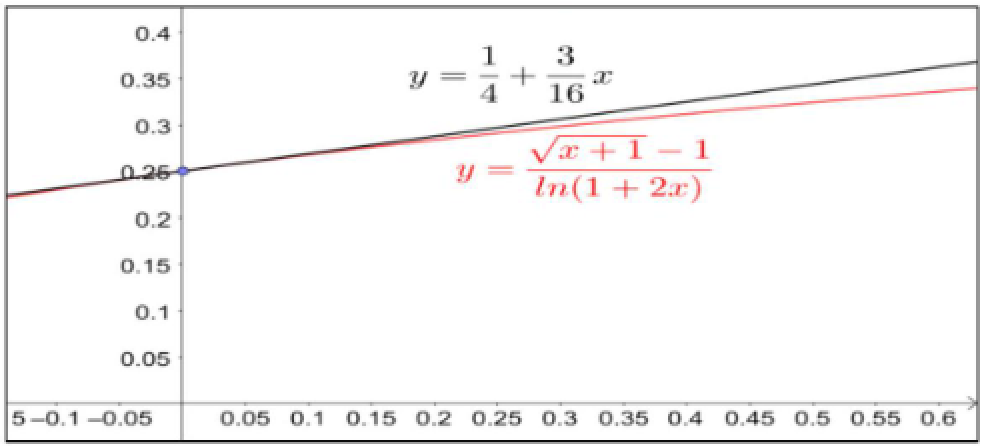


FIGURE 3.1 – Étude locale en 0 de $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\ln(1+2x)}$

3.5.3 Étude asymptotique

De la même manière, il est possible de réaliser une étude asymptotique en l'infini d'une fonction définie au voisinage de l'infini, c'est-à-dire déterminer sa limite, une équation d'une asymptote éventuelle ainsi que la position relative de celle-ci avec la courbe de la fonction.

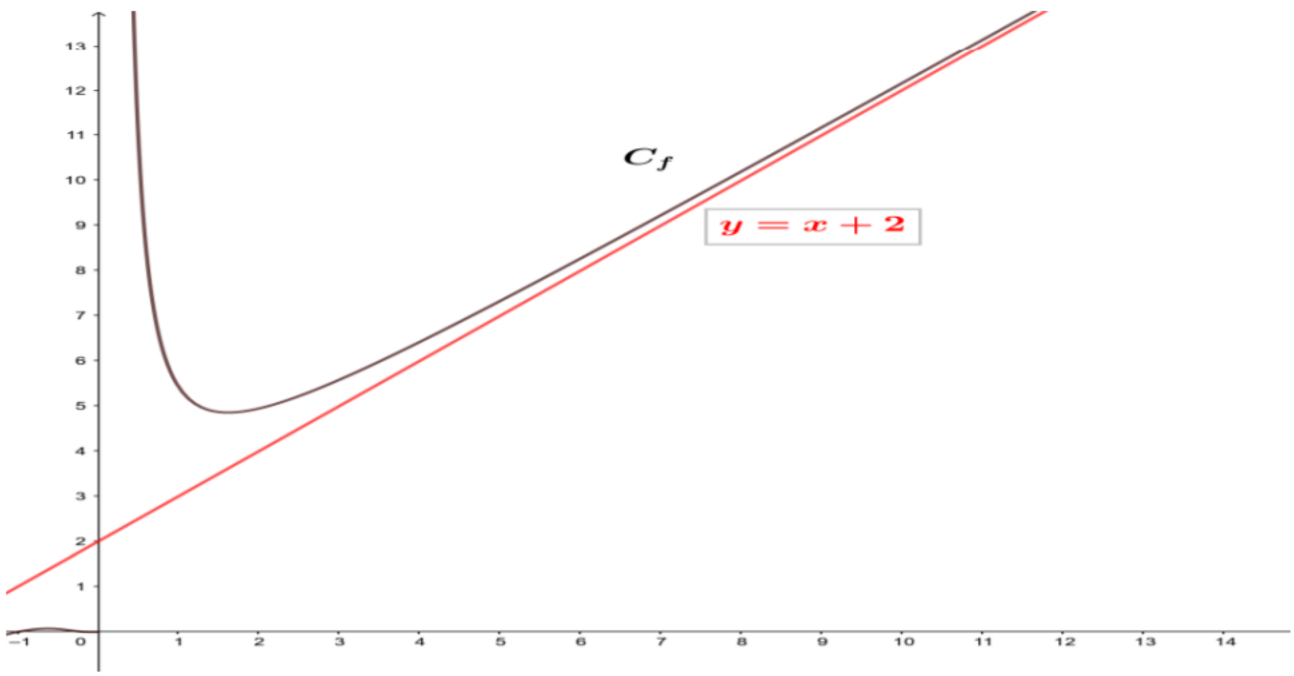
L'idée est de réaliser un développement en l'infini de la fonction. Un tel développement est appelé développement asymptotique.

Méthode

- Changement de variable pour se ramener à 0
- Développement limité
- Retour à la variable initiale

Exemple. Étude asymptotique de $f(x) = (x+1)e^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$

- *On conserve le terme polynomial qui est déjà développé*
- *On pose* $X = \frac{1}{x}$. *Si* $X \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $e^X = 1+X+\frac{X^2}{2}+o(X^2)$ d'où $e^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- *Donc* $f(x) = (x+1)\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x+2+\frac{3}{2x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$
- *Attention : on est en* $+\infty$ *donc plus la puissance est petite, plus le terme est négligeable.*
- *Donc* $f(x) = x+2+\frac{3}{2x}+o(\frac{1}{x})$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
- $\Delta : y = x+2$ *est l'asymptote à* C_f *en* $+\infty$
- *En* $+\infty$, $\frac{3}{2x} > 0$ *donc* C_f *est au dessus de* Δ *en* $+\infty$



Chapitre 4

Intégrale de Riemann

4.1 Intégrale de Riemann d'une fonction continue positive sur un segment.

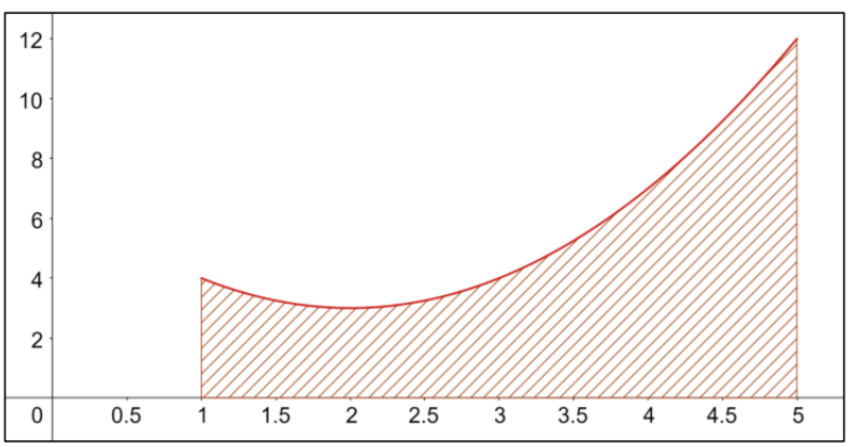
4.1.1 Définition

Définition 4.1. Soit a et b deux réels tels que $a < b$, soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$ le nombre égal à l'aire du domaine délimité par la courbe de f, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, aire exprimée en unités d'aire $u.a.$

On le note :

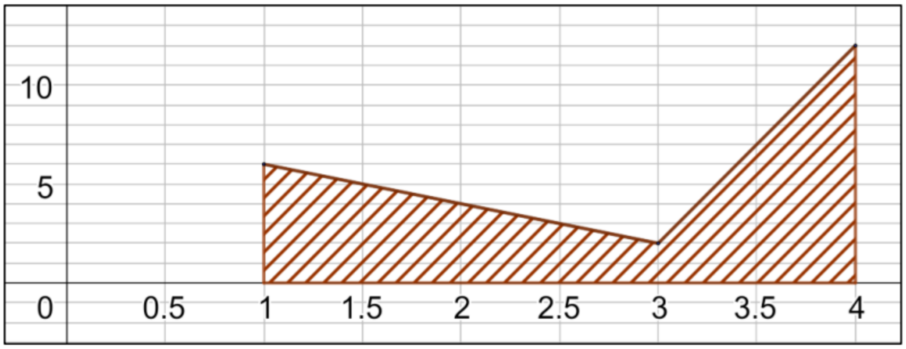
$$\int_a^b f(x)dx$$



Remarque : la variable x est une variable muette, on peut la remplacer par n'importe quel symbole autre que f, a, b.

Exemple. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) & = -2x+8 \text{ si } 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) & = 10x-28 \text{ si } 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$



4.1.2 Lien entre intégrale et primitive

Définition 4.2. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de la fonction f sur l'intervalle I toute fonction F dérivable sur I telle que :

$$\forall x \in I, F'(x) = f(x).$$

Propriété 4.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f possède une primitive sur I, alors f possède une infinité de primitive sur I de la forme $F+k$, où $k \in \mathbb{R}$

Exemple. Déterminons une primitive F de f

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1 \qquad F(x) =$$

$$f(x) = x\left(x^2+1\right)^{10} \qquad F(x) =$$

$$f(x) = \frac{4x}{x^2+1} \qquad F(x) =$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^5} = \qquad F(x) =$$

Propriété 4.2. Soit f une fonction possédant une primitive sur I ; soit x_0 un élément de I et y_0 un réel quelconque. Il existe une unique primitive de f sur I prenant la valeur y_0 en x_0.

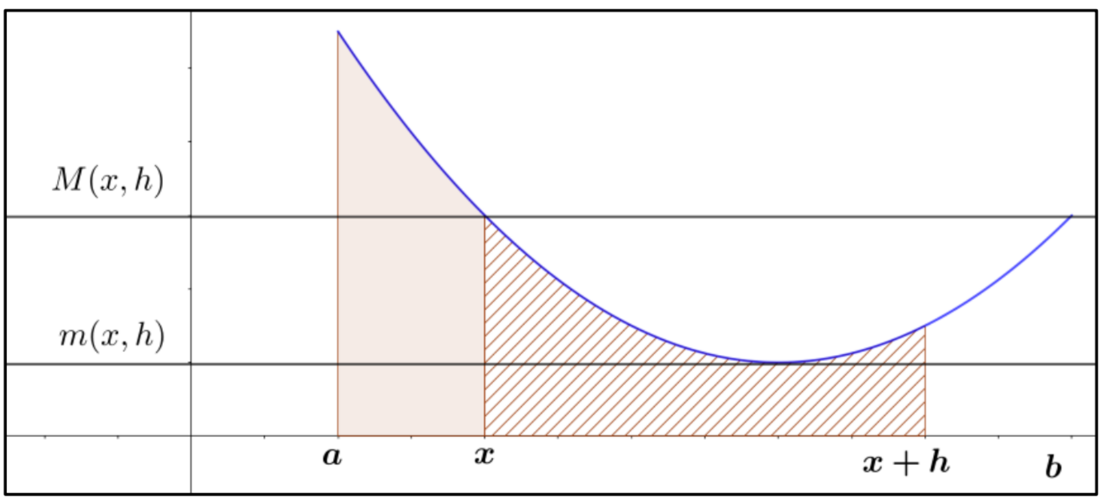
Exemple. Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3}{x}-2x$

Théorème 4.1. Soit f une fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$.
La fonction F définie sur $[a;b]$ par :

$$\forall x \in [a;b], F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

est une primitive de f sur $[a;b]$

Démonstration. □



Théorème 4.2. Soit f une fonction continue et positive sur $[a;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. On a alors :

$$\int_a^b f(t)dt=[F(t)]_a^b=F(b)-F(a)$$

Exemple.

$$\int_0^1 \left(3t^2+4t+5\right)dt=\left[t^3+2t^2+5t\right]_0^1=8-0=8$$

4.2 Intégrale de Riemann d'une fonction continue.

4.2.1 Définition

Propriété 4.3. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives sur cet intervalle.

Définition 4.3. Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit F une primitive de la fonction f sur I. Soit a et b deux éléments de I. On appelle intégrale de f entre a et b le nombre :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

4.2.2 Propriétés

Propriété 4.4 (Linéarité)**.**
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ alors, pour tout réel λ, on a l'égalité suivante :

$$\int_a^b (f(x) + \lambda g(x))\, dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda \int_a^b g(x)dx$$

Propriété 4.5 (Positivité)**.**
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Propriété 4.6 (Croissance)**.**
Soit f et g deux fonctions continues sur $[a;b]$ telles que $\forall x \in [a;b], f(x) \leq g(x)$.
Alors on a :

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Propriété 4.7 (Inégalité de la moyenne)**.**
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$ bornée, c'est-à-dire telle qu'il existe deux réels m et M vérifiant :

$$\forall x \in [a;b], \quad m \leq f(x) \leq M$$

Alors on a l'inégalité suivante :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Proposition 4.1 (Inégalité triangulaire)**.**
Soit f une fonction continue sur $[a;b]$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Propriété 4.8 (Relation de Chasles)**.**
Soit f une fonction en escalier sur $[a;b]$ et c un réel appartenant à $[a;b]$.
On a alors l'égalité suivante :

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

Propriété 4.9 (Parité)**.**

Soit f une fonction en escalier sur $[-a;a]$ où $a > 0$.

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

4.3 Méthodes de calcul intégral

4.3.1 Par recherche de primitives

4.3.2 Par transformation de la fonction à intégrer

Cas des fractions rationnelles : par décomposition en éléments simples (voir annexe).

Exemple. Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2-3x+2} = \dfrac{N(x)}{D(x)}$

Exemple. Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{4}{x^3-x^2}$.

Exemple. Soit la fraction rationnelle $f(x) = \dfrac{4}{x^3+x}$

Cas des polynômes trigonométriques : par linéarisation.

Théorème 4.3 (Formules d'Euler)**.**

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

Exemple. Soit $f(x) = \sin^2(2x)\cos(3x)$

4.3.3 Deux formules pour aller plus loin...

Théorème 4.4 (Formule d'intégration par parties)**.**
Soit u et v deux fonctions dérivables et de dérivées continues sur un intervalle $[a;b]$. On a la relation suivante :

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Exemple. Calcul de $I = \int_0^1 (2x+1)e^{-3x}dx$

Exemple. Calcul de $I = \int_1^2 \left(x^2+1\right)\ln(x)dx$

Théorème 4.5 (Formule de changement de variables)**.**
Soit ϕ une fonction dérivable, de dérivée continue sur $[a; b]$ et f une fonction continue sur l'intervalle $[\phi(a); \phi(b)]$ (ou l'inverse si $\phi(a) > \phi(b)$).

Alors on a la relation suivante :

$$\int_a^b (f \circ \phi)(x)\phi'(x)dx = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx$$

Exemple. Calcul de $I = \displaystyle\int_1^4 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}dx$

Chapitre 5

Equations différentielles linéaires du premier et du second ordre

5.1 Un exemple : modélisation de la loi de désintégration radioactive.

5.1.1 Description et loi de la Physique

L'expérience montre que le nombre de noyaux d'un corps radioactif qui se désintègrent pendant un intervalle de temps Δt à partir d'un instant t, rapporté au temps d'observation, est proportionnel au nombre de noyaux présents à l'instant t.

5.1.2 Modélisation mathématique

On appelle N la fonction qui, à chaque instant t, associe le nombre de noyaux encore présents, N_0 désignant le nombre initial de noyaux.

La loi physique peut donc se traduire par : $\dfrac{\Delta N(t)}{\Delta t} \approx -\lambda N(t)$

En faisant tendre Δt vers 0 , on obtient :

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t) \quad \text{ou encore : } N'(t) = -\lambda N(t)$$

Une telle équation est appelée **équation différentielle**.

5.2 Equations différentielles linéaires du premier ordre.

Définition 5.1. On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme :

$$y' + ay = b$$

où a et b désignent des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$, la fonction a étant non nul.

Définition 5.2. Soit une équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + ay = b \tag{E}$$

On appelle équation homogène associée à (E) l'équation différentielle :

$$y + ay = 0 \tag{H}$$

On dit aussi que (H) est une équation « sans» second membre.

Théorème 5.1.
Soit une équation différentielle homogène sur un intervalle I.

$$y' + ay = 0 \tag{H}$$

Les solutions de (H) sont les fonctions f définies sur I par :

$$f(t) = Ce^{-A(t)}$$

où A désigne une primitive sur I de la fonction a et C est une constante.

Exemple. Soit (H) : $y' + xy = 0$

Cas particulier important : si a est une constante, alors $f(t) = Ce^{-at}$.

5.3 Méthode de résolution de l'équation (E) : $y' + ay = b$

Théorème 5.2. Toute équation différentielle linéaire du premier ordre possède une infinité de solutions.
De plus, si on fixe une condition initiale, c'est-à-dire $y(x_0) = y_0$ où x_0 désigne un élément de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque, alors il y a unicité de la solution.

5.3.1 Méthode dite de *variation de la constante*

Principe : On cherche les solutions de (E) sous la forme $f(t) = C(t)e^{-A(t)}$.

Méthode :

$$\begin{aligned} f \text{ solution de (E)} &\Leftrightarrow f'(t) + a(t)f(t) = b(t) \\ &\Leftrightarrow -A'(t)C(t)e^{-A(t)} + C'(t)e^{-A(t)} + a(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow C'(t)e^{-A(t)} = b(t) \\ &\Leftrightarrow C'(t) = b(t)e^{A(t)} \end{aligned}$$

La fonction C est donc une primitive de la fonction $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$

Exemple. Soit (E) : $y' + xy = x$

5.3.2 Méthode de superposition

Théorème 5.3. Les solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre :

$$y' + ay = b \tag{E}$$

sont égales à une solution quelconque de l'équation homogène associée

$$y' + ay = 0 \tag{H}$$

à laquelle on ajoute une solution particulière de l'équation (E).

Exemple. Soit (E) : $y' + 2y = t^2$

Sous quelle forme chercher une solution particulière de (E) ?

Soit (E) $y' + ay = b(x)$ et soit g une solution particulière de (E).

- **Second membre polynomial**
  Si $b(x) = P(x)$ où P est un polynôme de degré n
  - Si $a = 0, g(x) = xQ(x)$ où Q est un polynôme de degré n
  - Si $a \neq 0, g(x) = Q(x)$ où Q est un polynôme de degré n

- **Second membre trigonométrique (cosinus et/ou sinus, pas la tangente)**
  Si $b(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x), g(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ où $A \in \mathbb{R}$ et $B \in \mathbb{R}$.
  Même si le second membre contient uniquement le sinus ou le cosinus, il faut prendre la solution particulière en tant que combinaison de sinus et de cosinus

- **Second membre sous forme d'un produit exponentiel et polynomial**
  Si $b(x) = e^{sx}P(x)$ où P est un polynôme de degré n
  - Si $a = -s, g(x) = e^{sx}xQ(x)$ où Q est un polynôme de degré n

    > **Exemple.** $y' + y = e^{-x} \Rightarrow g(x) = Cxe^{-x}$

  - Si $a \neq -s, g(x) = e^{sx}Q(x)$ où Q est un polynôme de degré n

    > **Exemple.** $y' + y = e^{2x} \Rightarrow g(x) = Ce^{-x}$

5.4 Equation du second ordre linéaire homogène à coefficients constants

Définition 5.3. On appelle équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants toute équation différentielle de la forme :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{H}$$

où a, b, c désignent des réels non nuls, avec $a \neq 0$.

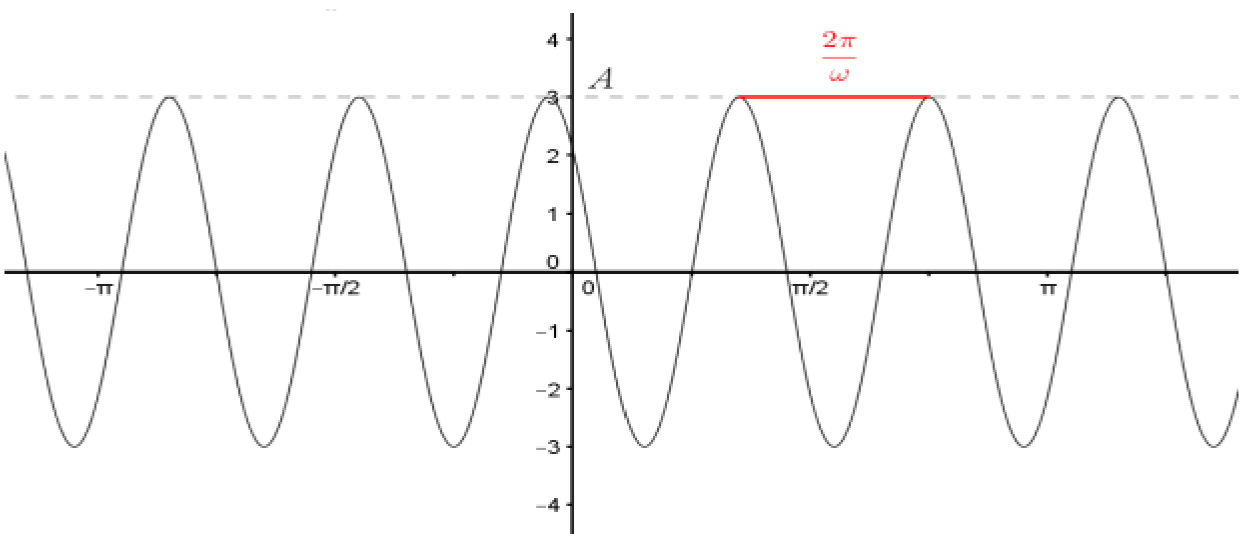
Théorème 5.4. Toute équation différentielle du second ordre homogène à coefficients constants possède une infinité de solutions. De plus, si on fixe deux conditions initiales, il y a unicité de la solution.

Méthode de résolution :

- On associe à (H) une équation du second degré appelée équation caractéristique :

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \qquad (E)$$

- On résout l'équation (E) dans $\mathbb{C}$
    - Si $\Delta > 0$, (E) possède deux solutions réels λ_1 et λ_2
      Les solutions de (H) sont de la forme : $f(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$, où A et B sont deux réels.
    - Si $\Delta = 0$, (E) possède une unique solution réelle λ_0
      Les solutions de (H) sont de la forme : $f(t) = (At + B)e^{\lambda_0 t}$, où A et B sont deux réels.
    - Si $\Delta < 0$, (E) possède deux solutions complexes conjuguées $\alpha + \mathrm{i}\beta$ et $\alpha - \mathrm{i}\beta$
      Les solutions de (H) sont de la forme : $f(t) = Ae^{\alpha t}\cos(\beta t + \varphi)$, où A et φ sont deux réels.
- Cas particulier important : Soit (H) : $y'' + \omega^2 y = 0$.
  Les solutions sont de la forme $f(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ où A est un réel positif et φ un réel quelconque.
  A est le maximum de f, $\dfrac{2\pi}{\omega}$ est la période de f.



Exemple. Soit $(H) : y'' + 3y' - 4 = 0$

Remarque : Dans le cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre avec second membre, on s'inspire des méthodes présentées dans la partie 5.3.

Théorème 5.5. Les solutions de l'équation différentielle linéaire du second ordre :

$$ay'' + by' + cy = d \qquad (E)$$

sont égales à une solution quelconque de l'équation homogène associée :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (H)$$

à laquelle on ajoute une solution particulière de l'équation (E).

Sous quelle forme chercher une solution particulière de (E) ?

Soit l'équation différentielle (E) : $ay'' + by' + cy = d(x)$, soit g une solution particulière de (E).

- Second membre sous forme d'un produit exponentiel et polynomial
  Si $d(x) = P(x)e^{sx}$ où P est un polynôme de degré n
  - Si s est une racine simple de l'équation caractéristique alors $g(x) = Q(x)e^{sx}$
    où Q est un polynôme de degré $n + 1$

    Exemple. $2y'' + y' - y = xe^{-x} \Rightarrow g(x) = \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) e^{-x}$
  - Si s n'est pas une racine de l'équation caractéristique, alors $g(x) = Q(x)e^{sx}$
    où Q est un polynôme de degré n

    Exemple. $2y'' + y' - y = 3e^{3x} \Rightarrow g(x) = Ce^{3x}$
  - Si s est racine double de l'équation caractéristique alors $g(x) = Q(x)e^{sx}$
    où Q est un polynôme de degré $n + 2$

    Exemple. $y'' - 2y' + y = 3e^{x} \Rightarrow g(x) = \left(\alpha x^2 + \beta x + \gamma\right) e^{x}$
- Second membre trigonométrique (cosinus et/ou sinus, pas la tangente)
  Si $d(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$

  Transformer ce second membre sous forme exponentielle en faisant appel aux formules d'Euler et utiliser le cas précédent.
  Même si le second membre contient uniquement le sinus ou le cosinus, il faut prendre la solution particulière en tant que combinaison de sinus et de cosinus

Exemple. Soit (E) : $y'' + y' + y = t^2$