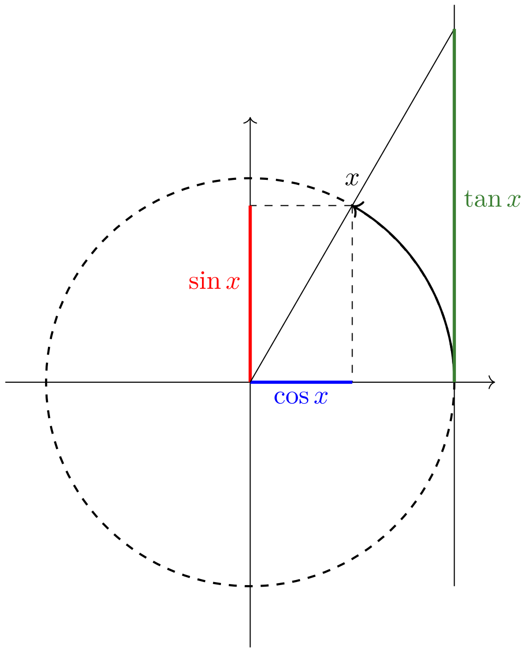
Fiches de Synthèse (V) — Trigonométrie

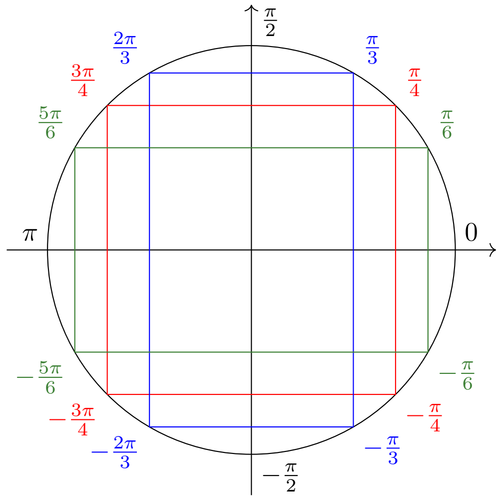
1. Le cercle trigonométrique

Définition géométrique des fonctions :



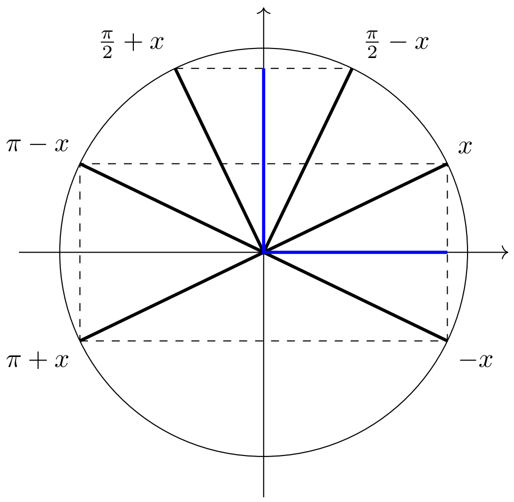
$$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$$

Valeurs remarquables à connaître :



θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Identités à savoir retrouver (I):



$$\cos(-x) = \cos(x) \ ; \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \ ; \quad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$
$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \ ; \quad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$
$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x) \ ; \quad \sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$
$$cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x) \ ; \quad \sin(\tfrac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$$

Identités à savoir retrouver (II):

$$\boxed{\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b}$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$
$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a$$

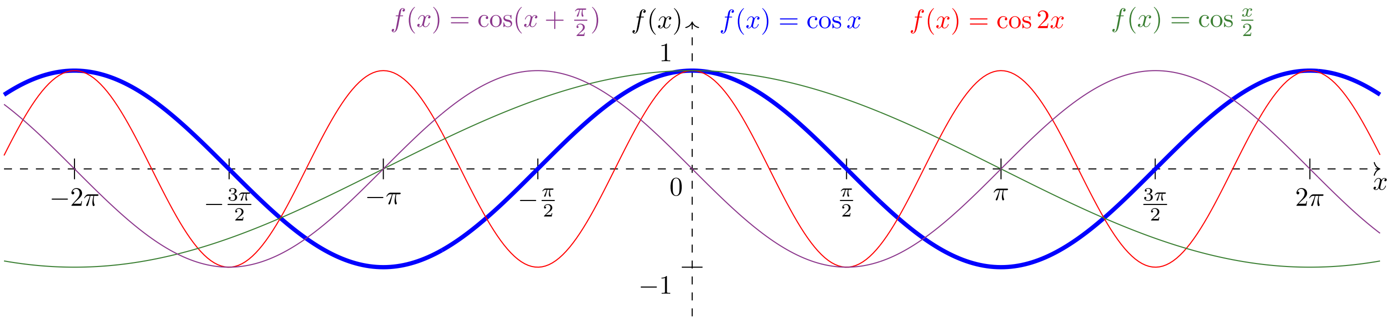
$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) + \cos(a+b)\big)$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\big(\cos(a-b) - \cos(a+b)\big)$$
$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b) - \sin(a-b)\big)$$

A partir de la première identité (ou de la deuxième), on retrouve toutes les autres!

2. Les fonctions sinus, cosinus et tangente

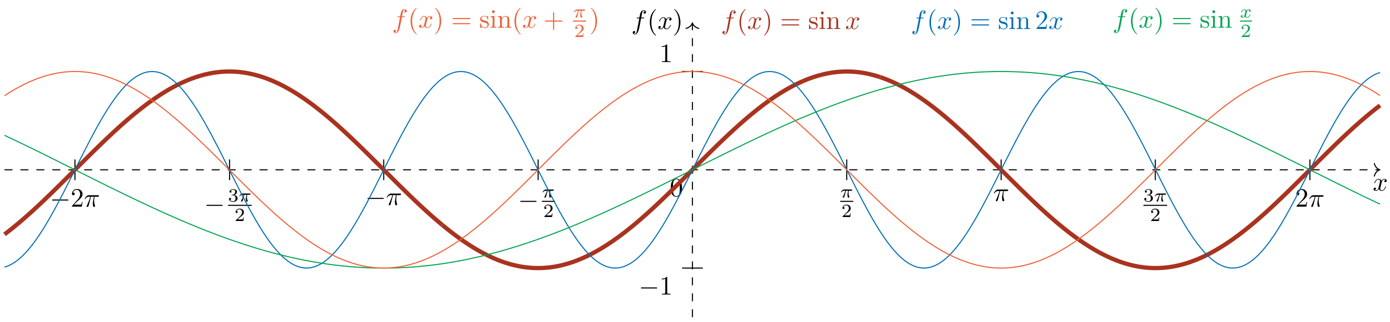
COSINUS

- définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$,
- fonction paire,
- $(\cos x)' = -\sin x$,
- $f(x) = \cos(ax+b)$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{|a|}$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0$.



SINUS

- définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$,
- fonction impaire,
- $(\sin x)' = \cos x$,
- $f(x) = \sin(ax+b)$ est périodique de période $\dfrac{2\pi}{|a|}$ où $a \in \mathbb{R}^*$.
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.



TANGENTE

- **n'est pas définie en** $-\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \ldots$
- définie, continue et dérivable sur
$$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\},$$
- fonction impaire,
- sur le domaine de définition,
$$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x},$$
- tan est périodique de période π,
- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$.