Bon…Comment faire concrètement ?

application linéaire f : matrice

Pour prouver qu'une famille est **libre/ liée :**

On **échelonne** la matrice puis…

1-directeur dans chaque **colonne** ?	Une **ligne** composée de « **0** » ?
Si oui…	Si oui…
Famille libre	**Famille liée**

I : matrice unitaire (1 1 1 ..)

M - nI : on multiplie I par n et on la soustrait à M

> Rappel :
>
> **BASE** = Une famille libre **ET** génératrice

Pour prouver qu'une famille est **génératrice :**

On **échelonne** la matrice puis…

1-directeur dans chaque **ligne** ?

Si oui…

Famille génératrice

vecteur → colonne

A.B : nb colone A
nb ligne B

A.B = ligne (..) de A x colonne(..) de B

Pour prouver la **dimension** d'un **sous espace vectoriel** :

1) On **échelonne** la matrice
2) On regarde le nombre « **n** » de **colonne** où il y a un **1-directeur**

⇨ Ça sera donc de **dimension n, R^n**

Pour prouver qu'un vecteur f appartient à un **sous espace vectoriel** :

Exemple : Soit F=Vect (f1, f2, f3) déterminer si f4 appartient à F :

1) On pose à **gauche** nos vecteurs connus, soient **f1, f2, f3**
2) On pose à **droite** le vecteur qu'on « cherche » soit **f4**

$$\begin{pmatrix} f1 & f2 & f3 \\ | & | & | \\ | & | & | \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} f4 \\ | \\ | \end{pmatrix}$$

3) On **échelonne** et on **réduit**

Si : $\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \end{array}\right) : \left(\text{Un réel / un nombre}\right)$ **=> IMCOMPATIBLE** donc ça n'appartient **PAS** !

Pour prouver que (f1, …, f5) est une base de $\mathbf{R^4}$:

Tout simplement, la **famille de vecteurs** contient **plus** de **vecteurs** que la **dimension** de $\mathbf{R^4}$,

=> donc ce n'est **PAS** une **base**

Pour prouver si M (une matrice) est inversible :

Il suffit de dire que « tous les **termes** de la **diagonale** sont **non-nuls** donc **inversible** »

Puis…

Pour inverser une matrice :

1) On pose notre **matrice** et les vecteurs **y** *(par des y_1, y_2, …y_n)*

$$\left(\begin{array}{c} \\ M \\ \\ \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{array}\right)$$

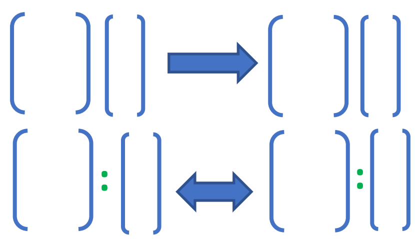
On **échelonne** et on **réduit**… Attention, on n'oublie PAS de changer la colonne y pendant nos calculs.

- ⇨ Puis on prend notre colonne y, la finale

(Après avoir échelonné et réduit)

- ⇨ *Ce qui nous donnera notre **matrice inverse** M^{-1} (en prenant les coefficients devant les y)*

Rappel :



Calcul du noyau

Ker(A)={x€R^n, AX=0}   (car il y a **n** colonnes)

AX=0, où A= notre matrice

X=$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

1) On échelonne et réduit au max notre matrice
2) On multiplie notre matrice finale par le vecteur X (ex : $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \end{cases}$)
3) On résout notre système d'équation qui dépend d'un seul paramètre (ex : $\begin{cases} x = 2z \\ y = -3z \\ z = z \end{cases} \iff z\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R}$)
4) On peut donc écrire $\ker A = \{(2,-3,1)z,\ z\in\mathbb{R}\}$ $= \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Calcul de **l'image**

Avec A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Im(A)=Vect($\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$)   l'espace engendré par les colonnes de la matrice

Il faut savoir si ces vecteurs sont libres ?

1) On ecrit une relation de liaison entre ces vecteurs (ex : $a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} a+b+c=0 \\ 2a+b-c=0 \end{cases}$ $\iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \ker(A)$
2) On pose une relation de liaison (a=…, b=…, c=…) $a=2,\ b=-3,\ c=1$
   $2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
3) On les multiplie à nos vecteurs, si c'est = au vecteur nul
   calcul $\begin{matrix} 2 - 3 + 1 \\ 4 - 3 - 1 \end{matrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   ⇨ Ils ont une **relation de liaison** mais Ils ne sont **PAS LIBRES**
4) **Image de A** $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ car on peut exprimer le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en fonction des deux autres
5) Nos deux vecteurs sont **libres** car ils ne sont **PAS colinéaires** (=pas le meme coef de propo rtionnalité)
   $\begin{matrix} 1 \text{ et } 1 = 1 \\ 2 \text{ et } 1 = 2 \end{matrix}$ = libre c'est une base de l'image

Calcul du **rang** (*voir ci-dessus*)

6) Le rang de A Rang(A) = 2 (car 2 vecteurs libres)

Injective / Surjective

Resume : Injective / surjective

Soit une matrice A application linéaire f_A $\mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}^n$.

INJECTIVE	SURJECTIVE
✓ f_A est injective si et seulement si, la matrice échelonnée et réduite de A montre autant de **Variables directrices** que de colonnes (c'est à dire **AUCUNE Variable libre**)	✓ f_A est surjective si et seulement si la matrice échelonnée et réduite de A montre autant de **Variables directrices** que de ligne
✗ si colonnes > ligne, f ne peut pas être injective	✗ si ligne > colonne f ne peut pas être surjective
– Si noyau = 0	Image de f de même dimension que la matrice de départ

Pour trouver le **déterminant**

DETERMINANT

matrice carrée (2x2)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ le determinant } = ad - bc$$

matrice (3x3)

-> Règle de Sarrus.

ex :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{pmatrix}$$

dans l'ordre on fait la 1 puis "-" des produits (3 par 3)

$$\underbrace{\_\times\_ + \_\times\_ + \_\times\_}_{\text{d'un sens}} \underbrace{- \_\times\_ - \_\times\_ - \_\times\_}_{\text{d'un autre}} = \det$$

ici, le det(A) = −18

matrice quelconque (4)

peut importe la matrice :

1) On echelonne pour avoir une matrice triangulaire

2) On multiplie les coefs de la diagonale.

ex : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -3/2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = 1 \times 4 \times (-3/2) = -6$$

$(-1)^{i+j}$ avec i ligne et j colonne

matrice quelconque (2)

ex :

$$A = \begin{pmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}0 & {}^{+}-1 \\ {}^{-}2 & {}^{+}3 & {}^{-}5 \\ {}^{+}4 & {}^{-}1 & {}^{+}3 \end{pmatrix}$$

prenons :

$$(-0)\times\begin{vmatrix}2&5\\4&3\end{vmatrix} + (+3)\times\begin{vmatrix}1&-1\\4&3\end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix}1&-1\\2&5\end{vmatrix}$$

det(A) = 14

1) on associe des signes comme un damier

2) on prend la colonne qui à le + de "0" ou la ligne (si c'est trop dûre, on peut échelonner pour avoir plus de "0")

3) On prend un par un les 3 coefs en supprimant la ligne et la colonne du coef

4) Nous avons donc les coefs restants qui forment une matrice carrée. (ad - bc)

⚠ pour la matrice carrée, on ne prend pas en compte les signes uniquement les coefs.

Le mineur et cofacteur

- *mineur* de $a_{i,j}$, le déterminant noté $\Delta_{i,j}$, de la matrice extraite de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne de A,
- *cofacteur* de $a_{i,j}$, le scalaire $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.

Pour la matrice : $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ on a : $\Delta_{2,3} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$

En bref, le mineur est le déterminant qu'on trouve au fur et mesure qu'on change de coefficients de cette forme = $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{3,1} & a_{3,2} \end{vmatrix}$

A savoir que $\mathbf{a_{ij}}$, (**i**=ligne et **j**=colonne) , *par exemple :*

matrice quelconque (2)

ex :

$$A = \begin{pmatrix} {}^{+}1 & {}^{-}0 & {}^{+}-1 \\ {}^{-}2 & {}^{+}3 & {}^{-}5 \\ {}^{+}4 & {}^{-}1 & {}^{+}3 \end{pmatrix}$$

prenons :

$$(-0)\times\begin{vmatrix}2&5\\4&3\end{vmatrix} + (+3)\times\begin{vmatrix}1&-1\\4&3\end{vmatrix} + (-1)\times\begin{vmatrix}1&-1\\2&5\end{vmatrix}$$

det(A) = 14

1) on associe des signes comme un damier

2) on prend la colonne qui à le + de "0" ou la ligne (si c'est trop dûre, on peut échelonner pour avoir plus de "0")

3) On prend un par un les 3 coefs en supprimant la ligne et la colonne du coef

4) Nous avons donc les coefs restants qui forment une matrice carrée. (ad - bc)

⚠ pour la matrice carrée, on ne prend pas en compte les signes uniquement les coefs.

Le mineur de $\mathbf{a_{22}}$

Le mineur de $\mathbf{a_{12}}$

Le **cofacteur** est tout simplement, le **mineur*(-1)** $^{i+j}$

Système de Cramer

Pour matrice 2x2

Exemple 1

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 6 \\ 2x_1 + 4x_2 = 10 \end{cases}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 10 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = |A|} = \frac{-6}{-2} = 3 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = |A|} = \frac{-2}{-2} = 1$$

1) On pose au

Pour $\mathbf{x_1}$:
- Dénominateur => le déterminant de notre matrice 2x2
- Numérateur => *1ere colonne* = notre **b**
  2^e colonne = le **reste** de notre

Pour $\mathbf{x_2}$:
- Dénominateur => le déterminant de notre matrice 2x2
- Numérateur => *1ere colonne*= le **reste** de notre matrice
  2^e colonne= notre **b**

Pour matrice 3x3 et applicable à d'autres tailles

Exemple 2

Résoudre le système d'équations $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 7 \\ -3x_1 + x_3 = -8 \\ x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}}_{b}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 0 \\ -3 & -8 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = 4 \qquad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ -3 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{2}$$

Pour prouver qu'une matrice est linéairement indépendante

1) On prend nos vecteurs indépendants

Ex :

$$e_1\begin{pmatrix}5\\2\\-11\end{pmatrix},\ e_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ e_3\begin{pmatrix}-1\\0\\6\end{pmatrix}$$

2) On pose des scalaires **a, b, c** tels que **(a*e1) + (b*e2) + (c*e3) =0 (vecteur nul)**

3) **On les multiplie tel que :**

$$\begin{pmatrix}5a\\2a\\-11a\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b\\b\\2b\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-c\\0\\6c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

4) On pose notre système d'équation, tel que :

$$\begin{cases}5a+b-c=0\\2a+b=0\\-11a+2b+6c=0\end{cases}$$

5) On résout pour trouver a, b, c :

- Si a, b, c sont TOUS égale à 0 => LINEAIREMENT INDEPENDANTS
- Si a, b, c ne sont PAS égale à 0=> PAS LINEAIREMENT INDEPENDANTS

ATTENTION : On peut d'abord échelonner puis poser le système pour trouver a, b, c

Espace des colonnes d'une matrice

Je sais pas

Surjective : N'importe quel élément de l'ensemble d'arriver possède au moins un antécédent dans l'ensemble de départ

Injective : N'importe quel élément de l'ensemble de départ possède au plus une image dans l'ensemble d'arriver.

Injectif/Surjectif/bijectif ou isomorphisme

φ surjective	$\Leftrightarrow$	$(e_i)_{i \in I}$	génératrice
φ injective	$\Leftrightarrow$	$(e_i)_{i \in I}$	libre
φ bijective	$\Leftrightarrow$	$(e_i)_{i \in I}$	base

Quelques propriétés à connaitre ;

Rappel : Injectif, surjectif, bijectif

Soit une application f de A vers B.

i) tout element y de B possède au moins un antécédent

ii) si deux éléments x et x' de A ont la même image $f(x) = f(x')$ ils sont forcément égaux.

iii) si deux elements x et x' de A sont égaux alors leurs images $f(x)$ et $f(x')$ sont egales

iv) tout élément x de A possède une seule image $f(x)$

v) tout element y de B possède un et un seul antecedent x dans A

Soit une application f de A vers B

i) tout élement y de B possède au moins un antécédent
-> SURJECTIVITE.

ii) si 2 elements x et x' de A ont la même image $f(x) = f(x')$, ils sont forcement EGAUX
-> INJECTIVE

iii) si 2 éléments x et x' de A sont égaux alors leurs images $f(x)$ et $f(x')$ sont égales. banalité.

iv) tout element x de A possède une seule image $f(x)$
banalité

v) tout élement y de B possède un et un seul antecedent x dans A
-> BIJECTIVE.

Théorème du rang

Soit **A∈Mnp(R)** et l'**application linéaire f** de **matrice standard A**,

Alors ;

noyau

$$\boxed{\mathrm{rg}(f) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = p}$$

Mat ice de base R^{p}

$rg(f) = p - \dim(Ker(f))$

Somme de deux sous espaces vectoriels a l'aide d'une base

- On détermine une famille génératrice $(u_1, \ldots, u_p)$ de F et une famille génératrice $(v_1, \ldots, v_q)$ de G.

- La famille $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ est une famille génératrice de $F + G$.

- On extrait de $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q)$ une base de $F + G$.

Exemple :

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z = 0 \text{ et } 2x + y + z - t = 0\}$$

$$G = \{(a + 2b, a - b, a + 2b, a + 2b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$$(x, y, z, t) \in F \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z - t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = -t - z \\ z = z \\ t = t \end{cases}$$

En posant $u_1 = (1, -1, 0, 1)$ et $u_2 = (0, -1, 1, 0)$, la famille (u_1, u_2) est une famille génératrice de F.

$$G = \{(a+2b, a-b, a+2b, a+2b) : (a,b) \in \mathbb{R}\}$$
$$= \{a(1,1,1,1) + b(2,-1,2,2) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

En posant $v_1 = (1,1,1,1)$ et $v_2 = (2,-1,2,2)$, la famille (v_1, v_2) est une famille génératrice de G.

On cherche une base de F+G

Donc, pour $u_1 = (1,-1,0,1)$, $u_2 = (0,-1,1,0)$, $v_1 = (1,1,1,1)$ et $v_2 = (2,-1,2,2)$, la famille (u_1, u_2, v_1, v_2) est une famille génératrice de $F+G$. Est-ce une famille libre? Non!

$$v_2 = u_1 + u_2 + v_1.$$

(Non car on peut exprimer v2 en fonction de u1, u2, v1)

V2 sert a rien

On peut donc dire

La famille (u_1, u_2, v_1) est une famille génératrice de $F+G$.

La famille (u_1, u_2, v_1) est une famille génératrice de $F+G$. Est-ce une famille libre? Oui!

Donc (u_1, u_2, v_1) est une base de $F+G$.

Technique plus simple !

Si on a auparavant déterminé une base de $F \cap G$, on peut s'aider de la formule

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

pour savoir le nombre de vecteurs que doit comporter une base de $F+G$.