Fiche Méthodes - SM302

Un recueil de méthodes pour accompagner les révisions de Fonctions de Plusieurs Variables

Doryan Denis

2023-2024

Table des matières

1 Introduction aux fonctions de plusieurs variables

1.1 Déterminer le domaine de définition d'une fonction

Méthode

Le domaine de définition est l'ensemble de toutes les valeurs pouvant être les images d'une fonction de plusieurs variables. Dans une fonction de deux variables, il s'agira d'un ensemble de points définis dans $\mathbb{R}^2$. Pour une fonction de trois variables, ce seront des valeurs définies dans $\mathbb{R}^3$.

Pour trouver le domaine de définition d'une fonction, il faut donc trouver l'ensemble des valeurs permises. On procède selon les étapes suivantes :

1. On définit toutes les conditions que la fonctions doit remplir pour être définie. Il s'agira généralement de distinguer les valeurs possibles pour un dénominateur, à l'intérieur d'un ln ou d'une racine carrée.
2. On modifie chacune de ces conditions afin de pouvoir les interpréter graphiquement. Il est ainsi nécessaire de connaître les différentes équations particulières (cercle, parabole, hyperbole...) détaillées en remarque.
3. On représente toutes les conditions sur un même graphique pour montrer le domaine de définition.

Remarque : Équations de surfaces usuelles

• **Cercle**
L'équation d'un cercle de centre (x_0, y_0) et de rayon R s'écrit :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

• **Parabole verticale**
L'équation d'une parabole verticale d'extremum (x_0, y_0) s'écrit :

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

Où :
- Si $a < 0$ alors l'extremum est un maximum
- Si $a > 0$ alors l'extremum est un minimum

• **Parabole horizontale**
L'équation d'une parabole verticale d'extremum (x_0, y_0) s'écrit :

$$x = a(y - y_0)^2 + x_0$$

Où :
- Si $a < 0$ alors l'extremum est un maximum
- Si $a > 0$ alors l'extremum est un minimum

• **Ellipse**
L'équation d'une ellipse de centre (x_0, y_0) avec une longueur a selon x et une longueur b selon y s'écrit :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

• **Hyperbole horizontale**
L'équation d'une hyperbole horizontale de centre (x_0, y_0) s'écrit :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Elle a pour sommets : $S_1 = (x_0 - a, y_0)$ et $S_2 = (x_0 + a, y_0)$.
Elle a pour asymptotes : $y_1 = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$ et $y_2 = -\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$.

• **Hyperbole verticale**
L'équation d'une hyperbole verticale de centre (x_0, y_0) s'écrit :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = -1$$

Elle a pour sommets : $S_1 = (x_0, y_0 - b)$ et $S_2 = (x_0, y_0 + b)$.
Elle a pour asymptotes : $y_1 = \frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$ et $y_2 = -\frac{b}{a}(x - x_0) + y_0$.

• **Sphère**
L'équation d'une sphère de centre (x_0, y_0, z_0) et de rayon R s'écrit :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

• **Ellipsoïde**
L'équation d'une ellipsoïde de centre (x_0, y_0, z_0) avec les semi-axes principaux a, b et c s'écrit :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1$$

Exemple d'application n°1

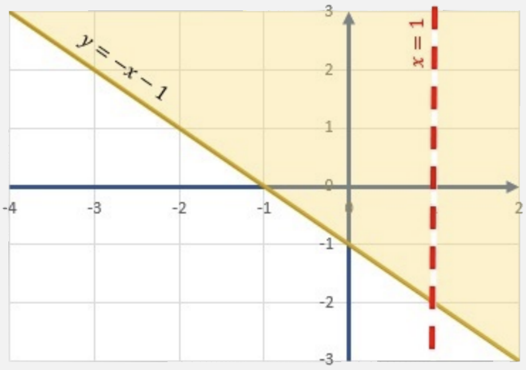
Déterminer et représenter le domaine de définition de la fonction

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{x + y + 1}}{x - 1}$$

Le dénominateur de f ne doit pas être égal à zéro et la quantité en dessous de la racine carrée doit être positive. Par conséquent, le domaine de f est

$$D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x + y + 1 \geq 0, \ x \neq 1\}$$

L'inégalité $x + y + 1 \geq 0$ peut être réécrite $y \geq -x - 1$ qui représente les points du plan sur ou au-dessus de la droite $y = -x - 1$ tandis que $x \neq 1$ signifie les points ayant leur du plan sur ou au-dessus de la droite $y = -x - 1$ tandis que $x \neq 1$ signifie que les points ayant leur abscisse égale à un doivent être exclus. On peut représenter le domaine comme suit :



Exemple d'application n°2

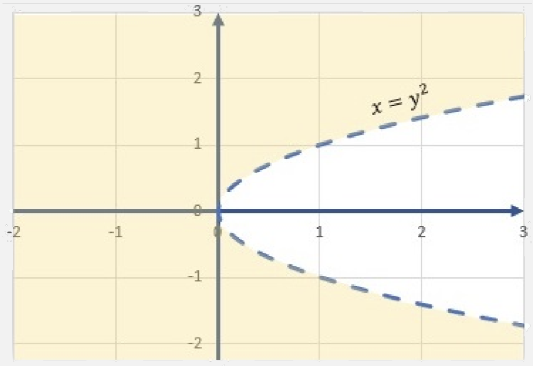
Déterminer et représenter le domaine de définition de la fonction

$$g(x, y) = x \ln(y^2 - x)$$

La fonction g ne peut prendre des valeurs que lorsque $y^2 - x > 0$, ce qui représente les points situés à gauche de la parabole $x = y^2$. Son domaine peut être donné par

$$D_g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ / \ y^2 > x\}$$

On peut représenter le domaine comme suit :



1.2 Déterminer les courbes de niveau d'une fonction de deux variables

Méthode

La courbe de niveau d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est l'ensemble des points $(x, y) \in I$ tels que $f(x, y) = k$ où $k \in \mathbb{R}$. Cela revient à réaliser une coupe horizontale de la surface produite par cette fonction et représenter l'intersection sur un plan en deux dimensions.

Pour trouver les courbes de niveau d'une fonction, on doit donc résoudre l'équation $f(x, y) = k$ et identifier la nature de cette équation en s'appuyant sur celles présentées en remarque précédemment.

Exemple d'application

Déterminer les courbes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = 9 - x^2 - y^2$$

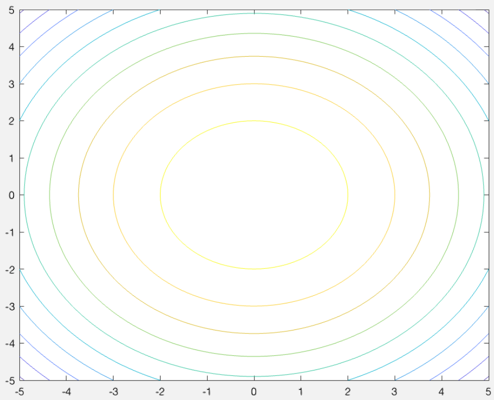
Géométriquement, si nous prenons n'importe quel plan horizontal qui coupe un hémisphère, la ligne d'intersection sera un cercle. sera un cercle. Les cercles centrés sur 0 seront alors les courbes de niveau de l'hémisphère.
Pour trouver cela mathématiquement, il faut résoudre l'équation $f(x, y) = k$, pour toute constante k :

$$\begin{aligned} f(x, y) = k &\Leftrightarrow 9 - x^2 - y^2 = k \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 9 - k \end{aligned}$$

• Pour $k = 0$: $x^2 + y^2 = 9$
$\to$ C'est une équation d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 3.

• Pour $k = 1$: $x^2 + y^2 = 8$
$\to$ C'est une équation d'un cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.

On a ainsi les courbes de niveau suivantes :



2 Limites et continuité

2.1 Déterminer l'existence et la valeur de la limite d'une fonction

Méthode

Pour prouver que la limite d'une fonction $f : I \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en (x_0, y_0) existe, il faut procéder par étapes.

1. Essayer de trouver la limite par remplacement direct de (x, y) par (x_0, y_0) dans la fonction.
   $\to$ Si l'on trouve une **valeur finie ou** $+\infty$ **ou** $-\infty$ alors la limite existe et <u>c'est terminé</u> ! Sinon, dans le cas d'une forme indéterminée, on passe à l'étape suivante.

2. Essayer de trouver la limite selon différentes directions passant par le point (x_0, y_0). Par exemple, on essaye avec $y = 0$, $x = 0$, $x = y$, $x = y^2$, $y = x^2$, $y = mx$...
   $\to$ Si l'on obtient **deux limites différentes selon deux directions différentes**, alors la limite n'existe pas et <u>c'est terminé</u> ! Dans le cas contraire, on passe à l'étape suivante.

3. Avec l'étape précédente, on a observé une certaine valeur ℓ revenir à chaque direction testée. Nous pouvons alors pencher pour le fait que cette limite puisse exister. Nous allons donc chercher à le prouver : on montre que $|f(x, y) - \ell| \to 0$ lorsque $(x, y) \to (x_0, y_0)$.
   Pour cela, on peut utiliser trois approches différentes :

   - **Majoration** : Trouver une fonction $g(x, y)$ tel que $|f(x, y) - \ell| \leq g(x, y)$ pour laquelle la limite en (x_0, y_0) peut être facilement trouvée.
   - **Directions sur le domaine entier** : Réaliser à nouveau l'étape précédente mais cette fois-ci en considérant des directions couvrant l'entièreté du domaine de définition. Par exemple, considérer $y \geq x$ puis $y < x$.
   - **Coordonnées polaires** : On réalise le changement de variables suivant :

   $$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

   $\to$ Si la limite de cette fonction lorsque $r \to 0$ est indépendante de θ vaut ℓ, alors la limite existe et vaut l. Si la limite dépend de θ, alors la limite n'existe pas. <u>C'est terminé</u> !

Remarque : Direction $y = mx$

On peut adopter une stratégie de recherche plus générale lors de l'étape des directions en étudiant la direction $y = mx$ où $m \in \mathbb{R}$. En effet, si jamais on trouve que la valeur de la limite dépend de m, alors on peut directement conclure que la limite n'existe pas car les limites sont différentes selon les différents chemins. Nous n'avons pas besoin d'étudier une nouvelle direction. Si la valeur est finie, alors évidemment cela compte comme le résultat d'une certaine direction.

Exemple d'application n°1

Étudier la limite de $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$.

La fonction f est définie en tout point de $\mathbb{R}^2$ sauf en $(0, 0)$, donc $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$.

Tout d'abord, pour adopter une stratégie plus générale, approchons $(0, 0)$ le long de n'importe quelle ligne non verticale passant par l'origine : $y = mx$, où $m \in \mathbb{R}$. Ainsi,

$$f(x, y) = f(x, mx) = \frac{mx^2}{x^2 + (mx)^2} = \frac{mx^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{m}{(1 + m^2)}$$

Donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \frac{m}{(1 + m^2)} \text{ selon l'axe de } y = mx$$

La limite dépend de m selon la valeur de m, alors les limites sont différentes le long de différents chemins. Ainsi la limite n'existe pas.

Remarque : Techniques de majoration

• **Fonctions trigonométriques** : $cos(x,y) \leq 1$ et $sin(x,y) \leq 1$

• **Fonctions polynomiales** : $x^2 \leq x^2 + y^2$ et $y^2 \leq x^2 + y^2$

• **Valeurs absolues** : $|x| \leq \sqrt{x^2+y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$
On peut également utiliser l'inégalité triangulaire : $|x+y| \leq |x| + |y|$
Une autre majoration utile est : $2|xy| \leq x^2 + y^2$

• **Quotient** : Majorons $\frac{A}{B}$ avec $A \geq 0$ et $B > 0$.
On majore A, soit $A \leq M$. On minore B, soit $B \geq N$ avec $N > 0$. Alors, $\frac{A}{B} \leq \frac{M}{N}$.
On peut par exemple dire que $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} \leq 1$

Exemple d'application n°2

Étudier la limite de $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$.

La fonction f est définie en tout point de $\mathbb{R}^2$ sauf en $(0,0)$, alors $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

Nous remarquons que, en prenant la limite le long de n'importe quelle ligne $y = mx$ ou d'une parabole passant par $(0,0)$, nous obtenons la même limite, qui est 0. Nous commençons donc à suspecter que la limite pourrait exister et doit bien-sûr être égale à 0.

Pour prouver que la limite existe, nous devons démontrer qu'elle est la même le long de n'importe quel chemin. Par conséquent, selon la définition, si la limite est ℓ, nous pouvons prouver que l'expression $|f(x,y) - \ell|$ tend vers 0 (ou finalement est bornée supérieurement par une fonction qui tend vers 0). Dans notre cas, $f(x,y) = \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ alors,

$$|f(x,y) - 0| = |\frac{3x^2y}{x^2+y^2}|$$

Cependant, comme $x^2 \leq x^2 + y^2$ ($y^2 \geq 0$), alors,

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1 \Rightarrow |\frac{3x^2y}{x^2+y^2}| \leq 3|y| \overset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent, la limite existe en $(0,0)$ et est égale à 0.

Exemple d'application n°3

Étudier la limite de $f(x,y) = \frac{x^2(y-1)^2}{x^2+(y-1)^2}$ quand (x,y) tend vers $(0,1)$.

La fonction f est définie si et seulement si $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $x \neq 0$ et $y \neq 1$. On a donc $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}/x \neq 0, y \neq 0\}$.

Effectuons un changement de variables. Posons $Y = y - 1$, ce qui revient à étudier $\lim\limits_{(x,Y)\to(0,0)} \frac{x^2Y^2}{x^2+Y^2}$.
Nous effectuons le passage aux coordonnées polaires en posant :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ Y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

On obtient :

$$f(r,\theta) = \frac{r^2\cos^2(\theta)r^2\sin^2(\theta)}{r^2\cos^2(\theta) + r^2\sin^2(\theta)} = \frac{r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)}{r^2\underbrace{(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}_{=1}} = r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)$$

Donc on a

$$\lim_{r\to 0} f(r,\theta) = \lim_{r\to 0} r^2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = 0$$

Cette limite ne dépend pas de θ donc elle existe et est égale à 0.

2.2 Étudier la continuité d'une fonction

Méthode

Une fonction $f : D_f \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue en un point $(a_1, a_2) \in D_f$ si et seulement si la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(a_1,a_2)} f(x,y)$ existe et est égale à $f(a_1,a_2)$.
Connaissant cette définition, cela revient à déterminer une limite comme vu dans la méthode précédente. Si l'on a une fonction définie en deux cas distincts dont un qui affecte une valeur finie à un cas problématique (dénominateur valant 0 par exemple), alors on fera attention à bien regarder si la limite trouvée, si elle existe, est bien égale à la valeur indiquée pour le cas problématique dans la définition de la fonction étudiée.

Exemple d'application n°1

Étudier la continuité de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{xy}) & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

Calculons la limite de f lorsque $(x,y) \to (0,0)$. On a $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq 0, y \neq 0\}$.
On a la majoration suivante : $|\sin(\frac{1}{xy})| \leq 1$. Et comme $(x^2+y^2) \geq 0$:

$$|(x^2+y^2)\sin(\frac{1}{xy})| = (x^2+y^2) \times |\sin(\frac{1}{xy})| \leq x^2+y^2$$

Or, comme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$, alors on a d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{xy}) = 0 = f(0,0)$$

On en déduit que f est continue en $(0,0)$.

Remarque : Prolongement par continuité

Étant donnée une fonction f de deux variables définie sur un ouvert sauf en un point (a_1,a_2). Si la limite de f en (a_1,a_2) existe et est égale à ℓ alors on peut définir une fonction $\widetilde{f}$ appelée le prolongement par continuité de f en (a_1,a_2). Cette fonction sera donnée par

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{si } (x,y) \neq (a_1,a_2) \\ \ell & \text{si } (x,y) = (a_1,a_2) \end{cases}$$

Ainsi, dans l'exemple précédent, f forme bien un prolongement par continuité de la fonction $h(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{xy})$ car on a vérifié ce "cas problématique" avec l'étude de la continuité.

Exemple d'application n°2

Soit la fonction

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

Peut-on définir un prolongement de f pour avoir une fonction continue en $(1,1)$?

On a $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y, x \neq -y\}$. La fonction f est continue sur D_f car c'est le quotient de deux fonctions définies sur D_f. On peut simplifier l'expression de f comme suit :

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

Étudions la continuité de f au point $(1,1)$. On a

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2}$$

Cette limite existe et est finie donc f est prolongeable par continuité en $(1,1)$ et on note le prolongement de f par :

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) = \frac{x-y}{x^2-y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,1) \\ \frac{1}{2} & \text{si } (x,y) = (1,1) \end{cases}$$

3 Dérivées partielles et différentiabilité

3.1 Déterminer les dérivées partielles premières et secondes d'une fonction

Méthode

En pratique, pour déterminer la dérivée partielle première d'une fonction de deux variables $f(x,y)$, nous allons considérer les règles de calcul suivantes :

- Pour trouver $\frac{\partial f}{\partial x}$, considérer que y est une constante et dériver f par rapport à x.
- Pour trouver $\frac{\partial f}{\partial y}$, considérer que x est une constante et dériver f par rapport à y.

Puis on peut déterminer les dérivées secondes en dérivant une nouvelle fois l'expression que l'on vient de trouver selon une certaine variable. On aura donc, par exemple, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$ ou encore $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$.

Théorème de Schwartz

Ce théorème très important permet de simplifier les calculs des dérivées partielles secondes d'une fonction. Son énoncé est le suivant :

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées partielles secondes existent et sont continues sur un ouvert, alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$$

Exemple d'application

Calculer les dérivées partielles secondes de la fonction

$$f(x,y) = x^3 + xy^4 - 3y^2$$

On commence par calculer les dérivées partielles premières :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y^4$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4xy^3 - 6y$

Puis on en déduit les dérivées partielles secondes :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 + y^4) = 6x$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial y}(4xy^3 - 6y) = 12xy^2 - 6$
- D'après le théorème de Schwartz : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 + y^4) = 4y^3$

3.2 Déterminer les dérivées partielles premières en un point d'une fonction

Méthode

Dans le cas de l'étude d'une fonction définie par une extension en un point telles que celle vues pour le prolongement par continuité, alors on calcule les dérivées partielles en deux étapes.

1. On calcule les dérivées partielles premières de manière classique comme vu précédemment sur le domaine où la fonction est continue.
2. Au point (a_1, a_2) où la fonction est étendue (le "point problématique"), on utilise la définition d'une dérivée partielle qui est :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_1,a_2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1+h,a_2)-f(a_1,a_2)}{h} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,a_2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a_1,a_2+h)-f(a_1,a_2)}{h}$$

Exemple d'application

Calculer les dérivées partielles premières de la fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Tout d'abord, pour $(x,y)\neq(0,0)$, les dérivées partielles premières sont :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2)-2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^2}$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2)-2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2+xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

Maintenant, déterminons les dérivées partielles premières en $(0,0)$ de la fonction f :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x\times 0^3}{x^2+0^2}-0}{x} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{0\times y^3}{0^2+y^2}-0}{x} = 0$

3.3 Montrer si une fonction est différentiable en un point

Méthode

Étant donnée une fonction $f : \Omega\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues dans un voisinage de (a_1,a_2) alors f est différentiable en (a_1,a_2).

Dès lors que l'on a déterminé ces dérivées partielles grâce aux deux méthodes précédentes, on étudie leur continuité avec les limites comme vu dans la méthode 2.2 puis on peut en déduire la différentiabilité ou non de la fonction étudiée.

Exemple d'application

On reprend la fonction de l'exemple précédent :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Tout d'abord, on étudie la continuité en $(0,0)$ de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.
On commence par calculer $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en effectuant un passage aux coordonnées polaires. On

pose $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$ d'où :

$$f(x,y) = f(r,\theta) = \frac{r^5(\sin^5(\theta) - \cos^2(\theta)\sin^3(\theta)}{r^4} = r(\sin^5(\theta) - \cos^2(\theta)\sin^3(\theta)$$

Or, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{r\to 0} f(r,\theta) = 0$$

On a bien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ est continue en $(0,0)$.

Calculons désormais $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$. On utilise la méthode de la majoration :

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)| = |\frac{x(y^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^2}| \le |x| \times \frac{|y^4+3x^2y^2|}{|(x^2+y^2)^2|} \le \frac{|x||y^2||y^2+3x^2|}{(x^2+y^2)^2} \le |x|y^2|y^2+3x^2| \times \frac{1}{y^2} \le |x||y^2+3x^2|$$

Or, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |x||y^2+3x^2| = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
On a bien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est continue en $(0,0)$.

Ainsi, comme les dérivées partielles premières de f existent et sont continues en $(0,0)$, alors la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

3.4 Résoudre des équations aux dérivées partielles

Règle de la chaîne

1. Si f est une fonction de deux variables x et y ayant des dérivées partielles premières continues, et si x et y sont des fonctions dérivables de la variable t, alors

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

2. Si f est une fonction de deux variables x et y ayant des dérivées partielles premières continues, et si x et y sont des fonctions dérivables de deux autres variables u et v, alors

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Méthode

Pour résoudre une équation aux dérivées partielles, il faut la réécrire en utilisant la règle de la chaîne, et donc par conséquent utiliser un changement de variables.

L'objectif est de se ramener à une équation simple, que l'on peut résoudre instinctivement en primitivant une expression.
Par exemple, pour résoudre l'équation $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + xy^2$, cela revient à se demander si l'on peut trouver une fonction dont la dérivée vaut cette expression : on doit donc trouver une primitive à cette fonction selon x. Cela nous donne $f(x,y) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}y^2 + g(y)$ où $g(y)$ est une constante ou une fonction dépendant uniquement de y car en dérivant f selon x elle va disparaître de l'expression.

Exemple d'application n°1

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^2 solutions de

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0$$

On sait que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y))$ donc on commence par trouver une primitive de 0 selon y. Comme dit dans la méthode, il s'agit d'une constante ou d'une fonction dépendant uniquement de x, on a donc : $\frac{\partial}{\partial x} = g(x)$.

Désormais, nous avons besoin de trouver une fonction dont la dérivée selon x forme une fonction ne dépendant que de x. On en déduit donc que : $f(x,y) = G(x) + h(y)$ où $G(x)$ est la primitive de $g(x)$ et $h(y)$ une fonction dépendant uniquement de y. On a $G(x)$ qui est de classe C^2 (différentiable 2 fois) et $h(y)$ de classe C^1.

Exemple d'application n°2

Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 solutions de

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - 3\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

en utilisant le changement de variables : $u = 2x + y$ et $v = 3x + y$.

Transformons cette équation pour l'exprimer selon u et v afin de simplifier sa résolution. On utilise la règle de la chaîne :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x} = 2\frac{\partial f}{\partial u} + 3\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

On remplace dans l'équation d'origine et on obtient :

$$(2\frac{\partial f}{\partial u} + 3\frac{\partial f}{\partial v}) - 3(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}) = 0 \Rightarrow -\frac{\partial f}{\partial u} = 0 \Rightarrow f(x,y) = g(v) = g(3x+y)$$

4 Intégrales multiples

4.1 Résoudre une intégrale double sur un domaine rectangulaire

Méthode

Résoudre une intégrale double revient à résoudre deux intégrales simples itérées : l'une dépendant de x et l'autre de y. Cela revient ainsi à résoudre :

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy = \int_c^d [\int_a^b f(x,y)\, dx]\, dy$$

Dès lors, on utilise les techniques classiques d'intégration sur les domaines rectangulaires où les bornes sont faciles à déterminer.

Théorème de Fubini

En général, il s'avère que les deux intégrales itérées sont toujours égales ; c'est-à-dire que l'ordre d'intégration n'a pas d'importance. Le théorème suivant donne une méthode pratique pour évaluer une intégrale double en l'écrivant en intégrales itérées (dans l'un ou l'autre ordre).

Soit f une fonction $f : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue sur le rectangle $R = \{(x,y) \in \Omega / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, alors

$$\iint_R f(x,y)\, dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\, dxdy$$

De façon plus générale, ceci est vrai si on suppose que f est bornée sur $\mathbb{R}$, f est discontinue sur un nombre fini de courbes régulières et les intégrales itérées existent.

Exemple d'application

Calculer $I = \iint_R \cos(y)\sin(x)\ dydx$ sur $R = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos(y)\sin(x)}_{f(x,y)=f(x)\times g(y)}\ dydx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(y)dy \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)dx \\
&= [\sin(y)]_0^{\frac{\pi}{2}} \times [\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= (1-0) \times (0+1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

4.2 Résoudre une intégrale double sur un domaine borné

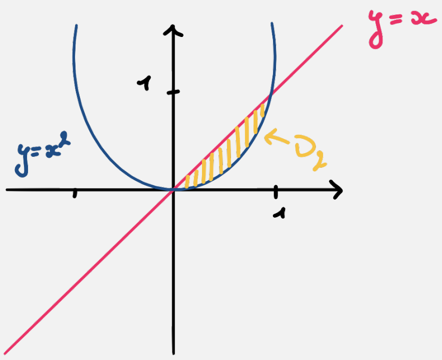
Méthode

L'objectif ici est de résoudre des intégrales dont une variable dépend de l'autre. Pour cela, on commence par représenter graphiquement le domaine d'intégration défini par les expressions qui le bornent. Puis on utilise le théorème de Fubini dont l'énoncé a été adapté ci-dessous pour utiliser les intégrations itérées. Il est parfois nécessaire de séparer le domaine de telle sorte que chaque sous-domaine puisse, au mieux, ne dépendre que d'une courbe pour faciliter le problème en utilisant la méthode des tranches verticales ou horizontales.

Exemple d'application

Calculer $I = \iint_D (x+y)\ dxdy$ où D est le domaine délimité par $y = x$ et $y = x^2$.

Commençons par représenter graphiquement le domaine D :



On a donc $0 \leq x \leq 1$ et $x^2 \leq y \leq x$. On résout :

$$\begin{aligned}
I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} (x+y)\ dydx &= \int_0^1 [xy + \frac{y^2}{2}]_{x^2}^{x}\ dx \\
&= \int_0^1 (x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2})\ dx \\
&= \int_0^1 (\frac{3x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2})\ dx \\
&= [\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10}]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}
\end{aligned}$$

4.3 Résoudre une intégrale double par un changement de variable

Définition générale du changement de variables

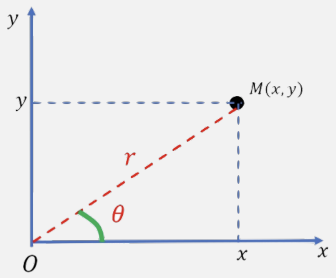
Par définition, lorsque l'on réalise un changement de variables, on change les bornes du domaine en considérant les nouvelles variables de dépendance, on remplace les variables initiales de la fonction à intégrer par les nouvelles et on multiplie cette nouvelle fonction par le déterminant de la matrice jacobienne. En somme, on a :

$$\iint_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint_{\Delta} g(u,v)|J_{\varphi}(u,v)|dudv \text{ où } J_{\varphi} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Méthode

Pour les domaines circulaires, il est très utile de réaliser un changement de variables en passant par les coordonnées polaires. Cela permet de se ramener à un domaine rectangulaire bien plus facile à étudier. On définit les coordonnées polaires comme suit :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

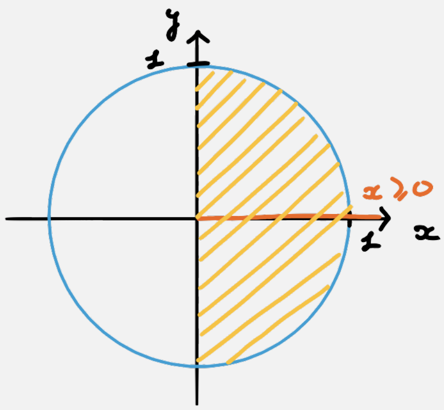


Dans dans le cas du passage aux coordonnées polaires, **le jacobien vaut simplement r**.

Exemple d'application

Calculer $I = \iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$.

Commençons par représenter graphiquement le domaine D :



On utilise les coordonnées polaires pour transformer un domaine circulaire en un domaine rectangulaire. On pose : $\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$ avec $r \in [0;1]$ et $\theta \in [0;\pi]$

On résout :

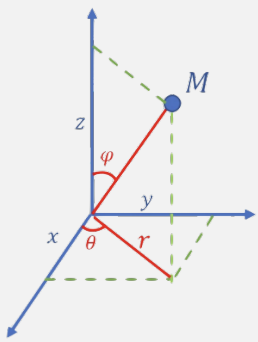
$$
\begin{aligned}
I = \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{1}{1+r^2\cos^2(\theta)+r^2\sin^2(\theta)}.r.d\theta dr &= \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{1}{1+r^2(\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta))}.r.d\theta dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{\pi} \frac{1}{1+r^2}.r.d\theta dr \\
&= \int_0^1 \frac{r}{1+r^2} dr \times [\theta]_0^{\pi} \\
&= \pi \times \int_0^1 \frac{\frac{1}{2}\times 2r}{1+r^2} dr \\
&= \pi \times \frac{1}{2} \times [\ln(1+r^2)]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{2}\ln(2)
\end{aligned}
$$

4.4 Résoudre des intégrales triples

Méthode

Sur un domaine rectangulaire, résoudre une intégrale triple revient à calculées des intégrales itérées en utilisant le théorème de Fubini. La méthode est analogue à celle présentée dans la section 4.1.
Pour les domaines sphériques, nous réalisons un changement de variables en passant par les coordonnées polaires pour faciliter le calcul des intégrales triples.
On définit les coordonnées sphériques comme suit :

$$
\begin{cases}
x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\
y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\
z = r\cos(\varphi)
\end{cases}
$$

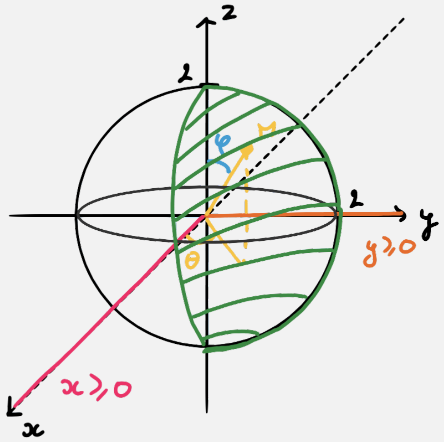


Dans dans le cas du passage aux coordonnées sphériques, **le jacobien vaut simplement $r^2\sin(\varphi)$**.

Exemple d'application

Calculer $I = \iiint_D xyz\ dxdydz$ où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

Commençons par représenter graphiquement le domaine D :



On utilise les coordonnées sphériques pour résoudre l'intégrale.

On pose : $\begin{cases} x = r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\varphi) \end{cases}$ avec $r \in [0;2]$, $\theta \in [0;\frac{\pi}{2}]$ et $\varphi \in [0;\pi]$

On résout :

$$\begin{aligned} I = \iiint_D xyz\ dxdydz &= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} r\cos(\theta)\sin(\varphi) r\sin(\theta)\sin(\varphi) r\cos(\varphi).r^2\sin(\varphi).d\varphi d\theta dr \\ &= \int_0^2 r^5 dr \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\sin(\theta)d\theta \times \int_0^{\pi} \sin^3(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi \\ &= [\frac{r^6}{6}]_0^2 \times [\frac{\sin^2(\theta)}{2}]_0^{\frac{\pi}{2}} \times [\frac{\sin^4(\varphi)}{4}]_0^{\pi} \\ &= \frac{64}{6} \times \frac{1}{2} \times 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

5 Convexité

5.1 Étudier la convexité d'une fonction de plusieurs variables

Méthode

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^2 sur Ω. Alors f est **convexe** sur Ω si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, la matrice hessienne $H_f(x)$ est **semi-définie positive**. De même, f est **concave** sur Ω si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, la matrice hessienne $H_f(x)$ est **semi-définie négative**.

Pour rappel, les matrices hessiennes de dimensions 2 et 3 sont définies comme étant :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Pour montrer que la matrice est semi-définie positive ou négative, on utilise la caractérisation ci-dessous.

1. Pour $n = 2$ et A une matrice symétrique donnée par $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

   - A est semi-définie positive si et seulement si
   $$a \geq 0,\ c \geq 0,\ \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \geq 0$$
   - A est semi-définie négative si et seulement si
   $$a \leq 0,\ c \leq 0,\ \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix} \geq 0$$

2. Pour $n = 3$ et A une matrice symétrique donnée par $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$.

   - A est semi-définie positive si et seulement si
   $$a \geq 0,\ d \geq 0,\ f \geq 0, \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a & c \\ c & f \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} d & e \\ e & f \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} \geq 0$$
   - A est semi-définie négative si et seulement si
   $$a \leq 0,\ d \leq 0,\ f \leq 0, \begin{vmatrix} a & b \\ b & d \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a & c \\ c & f \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} d & e \\ e & f \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{vmatrix} \leq 0$$

Exemple d'application n°1

La fonction suivante est-elle convexe ? concave ?

$$f(x, y, z) = -x^2 - yz - 5y^2 + 4xy - z^2 + xz$$

---

f est une fonction polynomiale donc elle est de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$. On détermine d'abord les dérivées partielles premières de f :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = -2x + 4y + z$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -z - 10y + 4x$
- $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -y - 2z + x$

Puis on calcule les différentes dérivées partielles secondes pour former la hessienne de f :

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4 & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -10 & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = -1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -1 & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -2 \end{array}$$

On en déduit donc la hessienne suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

On regarde d'abord les signes des coefficients de la diagonale : $-2 < 0$ et $-10 < 0$. Ils sont tous négatifs, nous allons donc vérifier si la hessienne est semi-définie négative en calculant les déterminants suivants :

- $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 20 - 16 = 4 > 0$
- $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$
- $\begin{vmatrix} -10 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 20 - 1 = 19 > 0$
- $|Hess(f)| = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -10 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -10 \end{vmatrix}$

$$= 1 \times 6 - (-1) \times (-2) - 2 \times 4$$
$$= 6 - 2 - 8 = -4 \leq 0$$

Donc la hessienne de f est semi-définie négative. Ainsi, la fonction f est concave.

Remarque : Matrices définies négatives

On aurait pu aller plus vite dans la conclusion de l'exemple précédent. En effet, en vérifiant si une matrice 3×3 est semi-définie négative, on peut savoir si elle est définie négative (tout court). En effet, la caractérisation des matrices définies négatives indique que les déterminants de leurs mineurs principaux sont respectivement strictement négatif, strictement positif et strictement négatif.
Pour mieux comprendre, reprenons l'exemple précédent. Ses mineurs principaux, par définition, sont définis tels que :

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -10 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 4 & -10 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

On a calculé que $det(A_1) = -2 < 0$, $det(A_2) = 4 > 0$ et $det(A_3) = -4 < 0$ donc la matrice hessienne est bien définie négative. Or, une matrice définie négative est aussi semi-définie négative donc on peut d'ores et déjà conclure que f est concave.

Exemple d'application n°2

Soit la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$$

Déterminer le domaine où f est convexe.

On commence par calculer les dérivées partielles premières de la fonction :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 3x^2$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$

Les dérivées partielles secondes sont :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = 2+6x$
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)) = 2$
- D'après le théorème de Schwartz : $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)) = 0$

La matrice hessienne de f est donc :

$$\begin{pmatrix} 2+6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Or, f est convexe si et seulement si les valeurs propres, c'est-à-dire les valeurs de la diagonale dans une matrice diagonale, de $Hess(f)$ sont positives ou nulles. Ici, la matrice est directement diagonale. On remarque que $2 \geq 0$ et on cherche les solutions de l'inéquation $2+6x \geq 0 \Leftrightarrow 6x \geq -2 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$.

Ainsi, la fonction f est convexe sur le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus x \geq -\frac{1}{3}\}$.

5.2 Utiliser l'inégalité de Jensen

Méthode

À partir de la convexité d'une fonction, il est possible de démontrer certaines inégalités grâce à la propriété de Jensen définie comme suit.

Soient $n \in \mathbb{N}$ $(n \geq 2)$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors

$$\forall (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \forall (x_1, ..., x_n) \in I^n, f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$$

Exemple d'application

Utiliser la concavité de $\ln(x)$ pour montrer l'inégalité suivante :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}_+^3, x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$$

On sait que $f(x) = \ln(x)$ est concave, donc $-f(x) = -\ln(x)$ est convexe. On peut alors utiliser l'inégalité de Jensen.

Soit $(x,y,z) \in (\mathbb{R}_+^*)^3$ et $\lambda_i \in \mathbb{R}$ tel que $\sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_i = 1$.

$$\begin{aligned}
&-\ln(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z) \leq \lambda_1(-\ln(x)) + \lambda_2(-\ln(y)) + \lambda_3(-\ln(z)) \\
&\Leftrightarrow \ln(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z) \geq \lambda_1 \ln(x) + \lambda_2 \ln(y) + \lambda_3 \ln(z) \\
&\Leftrightarrow \ln(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z) \geq \ln(x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} z^{\lambda_3}) \\
&\Leftrightarrow e^{\ln(\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z)} \geq e^{\ln(x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} z^{\lambda_3})} \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z \geq x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} z^{\lambda_3})
\end{aligned}$$

On pose $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{3}$ d'où :

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z \geq x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x + y + z \geq 3(xyz)^{\frac{1}{3}}$$

On pose désormais : $x = x_1^3$, $y = y_1^3$ et $z = z_1^3$. Donc on obtient :

$$x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 \geq 3(x_1^3 y_1^3 z_1^3)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 \geq 3(xyz)$$

6 Extrema

6.1 Trouver les points critiques d'une fonction

Méthode

Pour déterminer les points critiques d'une fonction, on doit d'abord calculer ses dérivées partielles premières. Puis on regarde pour quelles valeurs elles sont égales à 0 : on répertorie tous les points possibles pour les conditions trouvées pour x et y.

Exemple d'application

Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$$

Déterminer les points critiques de f.

Dans le deuxième exemple d'application de la section 5.1, nous avons déterminé les dérivées partielles premières de f. On cherche ainsi l'ensemble des points solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3x^2 = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(2+3x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -\frac{2}{3} \\ y = 0 \end{cases}$$

La fonction f admet donc deux points critiques : $A(0;0)$ et $B(-\frac{2}{3};0)$.

6.2 Caractériser les points critiques d'une fonction de deux variables

Méthode

Dans le cadre de l'étude d'une fonction à deux variables, on peut appliquer un critère simple pour caractériser ses points critiques. Il s'agit du test de la dérivée seconde, ou critère des mineurs, énoncé ci-dessous.

On suppose que (a,b) est un point critique intérieur au domaine d'une fonction de deux variables f. On suppose que f est une fonction C^2. Soit

$$H_f(a,b) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$$

la matrice hessienne de f au point (a,b). Alors,

1. Si $AC - B^2 > 0$ et $A > 0$ alors f admet en (a,b) un minimum local.
2. Si $AC - B^2 > 0$ et $A < 0$ alors f admet (a,b) un maximum local.
3. Si $AC - B^2 < 0$ alors f admet en (a,b) un point selle.
4. Si $AC - B^2 = 0$ ce test ne permet pas de conclure, f peut avoir en ce point un maximum local, ou un minimum local, ou un point selle.

Exemple d'application

Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$$

Déterminer la nature des points critiques de f.

D'après l'exemple d'application précédent, la fonction f admet deux points critiques : $A(0;0)$ et $B(-\frac{2}{3};0)$. Appliquons le test de la dérivée seconde à ces points critiques en étudiant leurs matrices hessiennes respectives.

- En $A(0;0)$, on a $H_f(0;0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

On a $det(H_f(0;0)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4 > 0$ et $2 > 0$. On en déduit que f admet en A un **minimum local**.

- En $B(-\frac{2}{3};0)$, on a $H_f(-\frac{2}{3};0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

  On a $det(H_f(-\frac{2}{3};0)) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 0 = -4 < 0$. On en déduit que f admet en B un **point selle**.

6.3 Utiliser le lien entre convexité et extrema

Méthode : Déduction par la convexité

En règle générale, dans les exercices proposés vous aurez à faire l'étude de la continuité d'une fonction puis ensuite à étudier ses points critiques comme vu dans les deux méthodes précédentes. Cette étude peut alors être considérablement facilitée si l'on se trouve dans l'un des cas suivants.

Soit Ω un sous-ensemble convexe et ouvert de $\mathbb{R}^n$. Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction C^1. Alors,

1. Si f est (strictement) convexe, alors f admet un minimum (strict) global en a si et seulement si a est un point critique.
2. Si f est (strictement) concave, alors f admet un maximum (strict) global en a si et seulement si a est un point critique.

Exemple d'application

Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = -5x^2 - 5y^2 + 2xy + 3x + 3y + 1000$$

L'étude de la convexité de cette fonction montre qu'elle est concave. Déterminer la nature des points critiques de f.

On détermine les dérivées partielles premières de f :

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -10x + 2y + 3$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -10y + 2x + 3$

Les points critiques de f ont des coordonnées solutions du système suivant :

$$\begin{cases} -10x + 2y + 3 & = 0 \\ -10y + 2x + 3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2y+3}{10} \\ -10y + \frac{2y+3}{5} + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{2y+3}{10} \\ y & = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = \frac{3}{8} \\ y & = \frac{3}{8} \end{cases}$$

La fonction f admet donc un point critique en $(\frac{3}{8};\frac{3}{8})$. Comme f est concave d'après l'énoncé, alors il s'agit d'un maximum global.

Méthode : Déduction par les extrema

Il est possible dans le cas où une fonction admet un point selle d'en déduire directement sa convexité. En effet, vous avez identifié les différents points critiques avec les méthodes précédentes, et vous avez trouvé un point selle. Alors vous pouvez utiliser le résultat suivant du test de la dérivée seconde pour conclure :

- Si $H_f(a)$ est indéfinie ($Det(H_f(a)) \neq 0$ et ni semi-définie positive ni semi-définie négative), alors f admet un point selle en a.