

# Fiche de Révision - Probabilités

## 1. Fonction de densité

### Fonction de densité

Une **fonction de densité**  $f(x)$  pour une variable aléatoire continue  $X$  est définie par :

- $f(x) \geq 0$  pour tout  $x$ ,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = P(X \in \mathbb{R}) = 1$ .

La probabilité que  $X$  appartienne à  $[a, b]$  est donnée par :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

## 2. Fonction de répartition

### Fonction de répartition

La **fonction de répartition**  $F(x)$  est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

**Propriétés :**

- $F(x)$  est croissante,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$ ,
- $F(x)$  est continue pour une variable aléatoire continue.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ .

### 3. Probabilité pour une valeur spécifique

#### Valeur spécifique

Pour une variable aléatoire continue,  $P(X = a) = 0$ .

### 4. Indépendance de deux variables aléatoires

#### Indépendance de variables

Deux variables  $X$  et  $Y$  sont indépendantes si :

- $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$ ,
- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$ ,
- $X$  et  $Y$  indépendantes  $\implies \text{Cov}(X, Y) = 0$ .
- $\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \implies X$  et  $Y$  ne sont pas indépendantes.

### 5. Incompatibilité de deux événements

#### Incompatibilité

Deux événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles si :

$$A \cap B = \emptyset.$$

### 6. Espérance, variance, écart type

#### Espérance

**Espérance :**

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xP(X = x), & \text{discrète,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, & \text{continue.} \end{cases}$$

**Variance :**  $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ . **Écart type :**  $\sigma_X = \sqrt{\text{Var}(X)}$ .

## 7. Propriétés de l'espérance et de la variance

### Propriétés de l'espérance et de la variance

- $E(aX + b) = aE(X) + b$ ,
- $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$ .
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$ ,
- Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes :  $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ .

## 8. Covariance et corrélation

### Covariance et corrélation

**Covariance :**

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

**Corrélation :**

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

La covariance est une application symétrique et bilinéaire.

## 9. Probabilité conditionnelle

### Probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{si } P(B) > 0.$$

## 10. Min et Max de deux variables

### Min et Max de deux variables

- $P(\min(X, Y) \leq a) = 1 - P(X > a)P(Y > a)$ ,
- $P(\max(X, Y) \leq a) = P(X \leq a)P(Y \leq a)$ .

## 12. Combinaison de lois normales

### Combinaison de lois normales

$X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$  et  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$  et considérons  $Z = aX + bY$  avec  $a, b \in \mathbb{R}$  :

- Si  $X$  et  $Y$  indépendantes, alors

$$Z \sim \mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2).$$

- Si  $X$  et  $Y$  non-indépendantes, alors

$$Z \sim \mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\text{Cov}(X, Y)).$$

## 13. Somme de deux binomiales

### Somme de deux binomiales

Si  $X \sim B(n, p)$  et  $Y \sim B(m, p)$ , alors :

$$X + Y \sim B(n + m, p).$$

## 14. Relation entre indépendance et covariance

### Indépendance et covariance

$X$  et  $Y$  indépendantes  $\implies \text{Cov}(X, Y) = 0$ .

$\text{Cov}(X, Y) = 0 \implies X$  et  $Y$  **pas nécessairement indépendantes**.

$\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \implies X$  et  $Y$  **non indépendantes** (contraposée).

## 15. Fonction paire et espérance

### Fonction paire et espérance

**Fonction paire** :  $f(-x) = f(x)$ .

## 16. Probabilité par symétrie

### Probabilité par symétrie

**Espérance d'une densité paire :**

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx. = 0$$

## 17. Formules importantes

### Formules importantes

**Formule de Bayes :**

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

**Formule des probabilités totales :**

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

## 18. Primitives et dérivées usuelles

### Primitives et dérivées usuelles

#### Dérivées usuelles :

1.  $(x^n)' = nx^{n-1}$  pour  $n \neq 0$ .
2.  $(e^x)' = e^x$ .
3.  $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$  pour  $x > 0$ .
4.  $(\sin(x))' = \cos(x)$ ,  $(\cos(x))' = -\sin(x)$ .
5.  $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ .

#### Primitives usuelles :

1.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  pour  $n \neq -1$ .
2.  $\int e^x dx = e^x + C$ .
3.  $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$  pour  $x > 0$ .
4.  $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$ ,  $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$ .
5.  $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$ .

## 19. Intégration par parties

### Intégration par parties

$$\int u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)] - \int u(x)v'(x) dx.$$

## 20. Loi de Poisson pour une approximation binomiale

### Loi de Poisson et binomiale

La loi de Poisson est particulièrement adaptée pour modéliser des événements rares dans de grandes populations, ce qui correspond aux conditions suivantes :

- Les événements se produisent de manière indépendante.
- Le nombre d'événements dans un intervalle de temps donné suit une distribution discrète.
- L'intensité des événements est constante au fil du temps.

Approximation valide si  $n \geq 30$ ,  $p \leq 0.1$  et  $np < 15$ .

## 21. Formule de De Morgan

### Formule de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

## 22. Système complet d'événements

### Système complet d'événements

Un système complet d'événements est un ensemble d'événements  $\{B_i\}$  tels que :

- $B_i \cap B_j = \emptyset$  si  $i \neq j$  (mutuellement exclusifs),
- $\bigcup_i B_i = \Omega$  (exhaustifs).

## 23. Formule des probabilités totales

### Formule des probabilités totales

Si  $\{B_i\}$  est un système complet d'événements, alors :

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

## 24. Formule de Bayes

### Formule de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \quad \text{où } P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

## 25. $P(A \cup B)$ si $A$ et $B$ sont incompatibles

### $P(A \cup B)$ incompatibles

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{si } A \cap B = \emptyset).$$

## 26. $P(A \cup B)$ si $A$ et $B$ sont indépendants

### $P(A \cup B)$ indépendants

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

## 27. $P(A \cap B)$ si $A$ et $B$ sont incompatibles

### $P(A \cap B)$ incompatibles

$$P(A \cap B) = 0 \quad (\text{si } A \cap B = \emptyset).$$

## 28. $P(A \cap B)$ si $A$ et $B$ sont indépendants

### $P(A \cap B)$ indépendants

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

## 29. Différence entre lois binomiale et binomiale négative

### Loi binomiale vs binomiale négative

- **Loi binomiale** : Nombre de succès dans  $n$  essais indépendants avec probabilité  $p$  de succès à chaque essai.
- **Loi binomiale négative** : Nombre d'essais nécessaires pour obtenir  $r$  succès.

Utilisation :

- Loi binomiale :  $n$  fixé, succès aléatoires.
- Loi binomiale négative : Succès fixes, essais aléatoires.

## 30. Lois usuelles discrètes et continues

### Lois discrètes et continues

**Lois discrètes :**

- **Uniforme discrète** : Probabilités égales pour  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ .
- **Binomiale** :  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$ .
- **Poisson** :  $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ .

**Lois continues :**

- **Uniforme continue** :  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  pour  $x \in [a, b]$ .
- **Exponentielle** :  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$  pour  $x \geq 0$ .
- **Normale** :  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ .