Chapitre I : Intégrales généralisées ou impropre

* f continue ou continue par morceaux sur $[a;b[$.

$\int_a^b f(t)dt$ converge ssi $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$ existe et est finie.

On a alors $\int_a^b f(t)dt = \lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)dt$

* f continue ou continue par morceaux sur $]a;b[$ et $c\in]a;b[$

$\int_a^b f(t)dt$ converge ssi $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent

et $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

* Fonctions de Riemann :

- f définie sur $]0;+\infty[$ par $t\mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, $\alpha\in\mathbb{R}$

- $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha}dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha>1$

  $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha<1$

* f continue ou continue par morceaux sur $[a;b[$

$\int_a^b f(t)dt$ est impropre ssi $f(t)$ converge.

* f continue ou continue par morceaux sur $[a;+\infty[$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\neq 0$, alors $\int_a^b f(t)dt$ diverge et est appelée intégrale faussement impropre

* Soit f continue ou continue par morceaux sur $]a;b]$.

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est finie, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge

* $a\in\mathbb{R}^+$ et f continue ou continue par morceaux sur $]-a;a[$

→ Si f est paire et $\int_{-a}^a f(t)dt$ converge, $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$

→ Si f est impaire et $\int_{-a}^a f(t)dt$ converge, $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

Fonctions strictement positives :

* f continue ou continue par morceaux sur $]a;b[$

Si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge, $\int_a^b f(t)dt$ absolument convergentes.

Méthode :

Démontrer la convergence :

→ On démontre que la fonction est continue ou continue par morceaux.

→ Si besoin ou apparent on démontre qu'elle est à valeur positives.

→ On démontre la convergence :

- Critère de Riemann
- Négligeabilité
- Equivalence
- Développements Limités
- Comparaison (cos et sin)
- Calcul de la limite de l'intégrale

Remarque : Avant chaque intégrale entre a et $+\infty$, faire la limite de la fonction ; si elle est différente de 0, il est inutile de calculer l'intégrale car elle divergera à coup sûr.

Dans certains cas (f continue ou continue par morceaux sur $]a;b[$)

- Changement de variable si nécessaire
- Étude aux deux bornes

Calculer l'intégrale ou la limite de l'intégrale :

- IPP
- Chasles
- Changement de variable