Fiche Méthodes - SM202

Un recueil de méthodes pour accompagner les révisions d'Algèbre Linéaire (module SM202)

Doryan Denis

2022-2023

Table des matières

1 Systèmes linéaires 2
1.1 Trouver le nombre de solutions d'un système linéaire . . . 2
1.2 Trouver l'ensemble des solutions d'un système linéaire . . . 3

2 Espaces vectoriels 4
2.1 Démontrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel . . . 4
2.2 Déterminer si une famille est libre, génératrice ou une base . . . 5
2.3 Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée . . . 6
2.4 Former une base à partir d'une famille de vecteurs . . . 6
2.5 Déterminer la dimension d'un espace vectoriel . . . 7

3 Applications linéaires 9
3.1 Démontrer qu'une application est linéaire . . . 9
3.2 Construire la matrice associée à une application linéaire . . . 10
3.3 Déterminer une base de l'image et du noyau d'une application linéaire . . . 10
3.4 Montrer l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application linéaire . . . 11

4 Matrices 13
4.1 Réaliser le produit de deux matrices . . . 13
4.2 Trouver l'inverse d'une matrice . . . 14
4.3 Résoudre un système linéaire grâce à une matrice inverse . . . 16

5 Déterminants 17
5.1 Calculer le déterminant avec le développement de Laplace . . . 17
5.2 Calculer le déterminant avec la méthode du pivot de Gauss . . . 18

6 Changements de bases 19
6.1 Construire la matrice de passage d'une base à une autre . . . 19
6.2 Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base . . . 19
6.3 Déterminer la matrice associée à une application linéaire dans une nouvelle base . . . 20

7 Diagonalisation d'endomorphismes 22
7.1 Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme . . . 22
7.2 Déterminer la multiplicité algébrique et géométrique d'une valeur propre . . . 23
7.3 Trouver D et P tels que $M = P^{-1}DP$ . . . 24

1 Systèmes linéaires

Acquis d'apprentissage

- Appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour déterminer la forme échelonnée réduite de toute matrice
- Déterminer le nombre des solutions d'un système linéaire
- Déterminer l'ensemble de toutes les solutions d'un système linéaire.

1.1 Trouver le nombre de solutions d'un système linéaire

Méthode

Avant d'échelonner la matrice, si on remarque un <u>lien de proportionnalité</u> entre des lignes mais que leurs solutions respectives ne le sont pas, alors le système n'admet <u>aucune solution</u>.
Sinon, échelonner la matrice sans la réduire et conclure :

- Diagonale de pivots → Unique solution
- Variable libre → Infinité de solutions
- Ligne de 0 avec solution non-nulle associée → Pas de solution

Exemple d'application n°1

On a le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \xLeftrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 8 \\ \frac{7}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

La matrice est maintenant échelonnée, on en déduit que le système possède une $\boxed{\text{infinité de solutions}}$.

Exemple d'application n°2

On a le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -3 & -6 \\ 3 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 4 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que L_1 et L_4 sont proportionnelles, or -7 et 2 ne le sont pas, donc le système n'admet $\boxed{\text{aucune solution}}$.

Exemple d'application n°3

On a le système linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_2}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow -\frac{1}{2}L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 3 \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

La matrice est maintenant échelonnée, on en déduit que le système possède une $\boxed{\text{unique solution}}$ car il y a un pivot à chaque ligne et à chaque colonne, et il n'y a pas de ligne de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : (a)$ avec $a \neq 0$.

1.2 Trouver l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Méthode

Évidemment, on conclut immédiatement s'il n'y a pas de solution.
Sinon, on réduit la matrice après l'avoir échelonnée. Une fois cela fait, si l'on a une unique solution alors il suffit de lire la colonne à droite de la matrice échelonnée.
S'il y a une infinité de solutions, alors on exprime les variables en fonction de la variable libre en notant un paramètre réel.

Exemple d'application n°1

On a le système linéaire échelonné et réduit suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

On lit directement la solution ici (unique car diagonale de pivots).
La solution du système linéaire est : $\boxed{S = \{(1,2,3)\}}$

Exemple d'application n°2

On a le système linéaire échelonné et réduit suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

On remarque qu'il y a une variable libre (la 4ème colonne), on exprime donc les solutions du système en fonction de cette dernière (faire attention au signe et ne pas oublier qu'il faut autant de composantes dans la solution que de variables dans l'équation, ici 4 composantes).
Les solutions du système sont : $\boxed{S = \{(-8, 3+t, 6+2t, t), t \in \mathbb{R}\}}$

2 Espaces vectoriels

Acquis d'apprentissage

- Déterminer si un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel
- Déterminer si un vecteur peut être écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs
- Déterminer si un vecteur peut être écrit comme combinaison linéaire d'autres vecteurs
- Déterminer si une famille de vecteurs est une famille génératrice
- Déterminer si une famille de vecteurs est une famille libre
- Déterminer si une famille de vecteurs est une base
- Calculer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée
- Extraire une base d'une famille génératrice
- Compléter une famille libre pour former une base
- Trouver la dimension d'un espace vectoriel

2.1 Démontrer qu'un sous-ensemble est un sous-espace vectoriel

Méthode

Il faut vérifier si le sous-ensemble est stable par addition interne et par multiplication externe. Ou bien montrer qu'il est stable pour toute combinaison linéaire (plus rapide).
Pour montrer que ce n'est pas un sous-espace vectoriel, un contre-exemple suffit.

Exemple d'application n°1

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions f telles que $f(1) = 0$ est-il un sous-espace vectoriel ?

Soient f et g deux fonctions telles que $f(1) = g(1) = 0$. Soit $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$.
Alors $h(1) = \alpha f(1) + \beta g(1) = \alpha \times 0 + \beta \times 0 = 0$ donc h s'annule en 1.
Ainsi, l'ensemble des fonctions qui s'annulent en 1 est stable par combinaison linéaire et forme un sous-espace vectoriel.

Exemple d'application n°2

Le sous-ensemble suivant est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?

$$E = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Prenons $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ avec $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1$. Or, $2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ d'où $2^2 + 0^2 + 0^2 = 4 \neq 1$.
Donc E n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Déterminer si une famille est libre, génératrice ou une base

Méthode

Si elle n'est pas donnée, on crée la matrice associée à l'espace vectoriel étudié (généralement dans la base canonique).
Si la matrice a plus de lignes que de colonnes, alors la famille n'est pas génératrice. Si elle a plus de colonnes que de lignes, alors la famille n'est pas libre.
Si la matrice est carrée, alors on l'échelonne (sans la réduire) pour conclure :

- Un pivot par ligne → Famille génératrice
- Un pivot par colonne → Famille libre
- Diagonale de pivots → Base

Exemple d'application n°1

On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivante :

$$\mathcal{F} = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \}$$

On échelonne la matrice associée à cette famille pour conclure.

$$mat(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[L_1 \leftrightarrow L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 + 2L_2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xleftrightarrow[L_4 \leftarrow -\frac{1}{8} L_4]{} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

On remarque que la forme échelonnée de $mat(\mathcal{F})$ possède un pivot par ligne et par colonne (encadrés en rouge), par conséquent $\boxed{\text{cette famille est une base}}$.

Exemple d'application n°2

On considère la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivante :

$$\mathcal{F} = \{\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\1\\5\\-2\end{pmatrix}\}$$

La matrice associée à $\mathcal{F}$ possède plus de lignes que de colonnes, elle ne peut donc pas être génératrice. On note v_1, v_2 et v_3 les trois vecteurs de $\mathcal{F}$ dans l'ordre précédent. On remarque que $3v_1 - 2v_2 = v_3$ donc cette famille est liée (non libre).

2.3 Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base donnée

Méthode

Par définition, trouver les coordonnées d'un vecteur u d'un espace E dans une base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$ de E revient à trouver les coeffients réels x_1, x_2 et x_3 tels que $u = x_1b_1 + x_2b_2 + x_3b_3$.
Pour cela, on résout simplement un système linéaire et les solutions seront les coordonnées recherchées.

Exemple d'application

On a les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$b_1 = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix}2\\-5\\-3\end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix}1\\-6\\2\end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix}3\\-13\\2\end{pmatrix}$$

Trouver les coordonnées de b_4 dans la base $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

On résout le système linéaire associé et on obtient la forme échelonnée réduite suivante (on épargne les calculs détaillés) :

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\4 & -5 & -6\\1 & -3 & 2\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}3\\-13\\2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}\frac{1}{17}\\\frac{9}{17}\\\frac{30}{17}\end{pmatrix}$$

On a donc $b_4 = \frac{1}{17}b_1 + \frac{9}{17}b_2 + \frac{30}{17}b_3$. Ainsi, $\boxed{Coord_{\mathcal{B}}(b_4) = \begin{pmatrix}\frac{1}{17}\\\frac{9}{17}\\\frac{30}{17}\end{pmatrix}}$

2.4 Former une base à partir d'une famille de vecteurs

Méthode

On construit une matrice contenant d'abord les vecteurs formant la famille libre puis les vecteurs de la base canonique de l'espace vectoriel de cette famille.
Puis on échelonne afin de déterminer la place des pivots : on rajoute à la famille les vecteurs de la base canonique qui contiennent des pivots pour former une base.

Exemple d'application

Utiliser la base canonique de $\mathbb{R}^5$ pour compléter la famille $\mathcal{F}$ suivante afin de former une base de $\mathbb{R}^5$.

$$\mathcal{F} = \{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \}$$

La forme échelonnée de la matrice contenant les vecteurs de $\mathcal{F}$ et ceux de la base canonique de $\mathbb{R}^5$ est :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 10 & -3 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Les coefficients en bleu sont les pivots dans la matrice échelonnée. Il y a un pivot dans les 4ème et 6ème colonnes, qui correspondent respectivement aux 1er et 3ème vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^5$.

Il faut donc ajouter les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ à la famille $\mathcal{F}$ pour former une base de $\mathbb{R}^5$.

2.5 Déterminer la dimension d'un espace vectoriel

Méthode

On regarde les liens entre les vecteurs (soit directement, soit en échelonnant la matrice associée et déterminer la place des pivots) pour déterminer une base de cet espace : la dimension de l'espace est le nombre de vecteurs de cette base par définition.

Exemple d'application n°1

Déterminer la dimesion de l'espace vectoriel $E = Vect(\mathcal{F})$ avec :

$$\mathcal{F} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \}$$

On remarque que $f_3 = f_1 + f_2$ donc $Vect(\mathcal{F}) = Vect(\mathcal{F} \setminus \{f_3\})$ et que $f_4 = 2f_1 + f_2$ donc $Vect(\mathcal{F}) = Vect(\mathcal{F} \setminus \{f_4\})$.
Ainsi, les vecteurs f_1 et f_2 forment une base de E donc $\boxed{dim(E) = 2}$.

Exemple d'application n°2

Déterminer la dimension de E l'espace des solutions du système homogène suivant :

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

En résolvant ce système, nous obtenons la forme échelonnée et réduite suivante de la matrice associée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il y a deux variables libres (les 2ème et 5ème colonnes ne possèdent pas de pivot) donc on exprime les solutions en fonction de ces dernières.
Les solutions du système homogène sont donc $S = \{(-x_2 - x_5, x_2, -x_5, 0, x_5)\}$.

Nous pouvons réécrire ces dernières de la manière suivante : $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $E = Vect(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. Ainsi, $\boxed{dim(E) = 2}$.

3 Applications linéaires

Acquis d'apprentissage

- Déterminer si une application $f : A \to B$ est linéaire
- Déterminer si une application linéaire est injective/surjective/bijective
- Déterminer l'image et le noyau d'une application linéaire
- Trouver la dimension et une base du noyau d'une application linéaire
- Trouver la dimension et une base de l'image d'une application linéaire

3.1 Démontrer qu'une application est linéaire

Méthode

Par définition, il faut vérifier si l'image d'une combinaison linéaire de deux vecteurs appartenant à la base de départ forme une combinaison linéaire des images. C'est-à-dire :

$$\forall (u_1, u_2) \in A^2, \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, f(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha f(u_1) + \beta f(u_2)$$

Pour montrer qu'une application n'est pas linéaire, un contre-exemple suffit.

Exemple d'application n°1

Déterminer si l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ 0 \\ x + 2y \end{pmatrix}$ est linéaire.

Soient u_1 et u_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ avec $u_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \alpha f(u_1) + \beta f(u_2) &= \alpha \begin{pmatrix} 2x + y \\ 0 \\ x + 2y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2x' + y' \\ 0 \\ x' + 2y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\alpha x + \alpha y \\ 0 \\ \alpha x + 2\alpha y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta x' + \beta y' \\ 0 \\ \beta x' + 2\beta y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\alpha x + \alpha y + 2\beta x' + \beta y' \\ 0 \\ \alpha x + 2\alpha y + \beta x' + 2\beta y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(\alpha x + \beta x') + \alpha y + \beta y' \\ 0 \\ 2(\alpha y + \beta y') + \alpha x + \beta x' \end{pmatrix} \\
&= f(\alpha u_1 + \beta u_2)
\end{aligned}$$

Ainsi, par définition, f est une application linéaire.

Exemple d'application n°2

Déterminer si l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}^n, g(x) = 2$ est linéaire.

Nous avons $g(x) = 2$; c'est-à-dire, par exemple, que $g(2) = 2$. Or $2 \times g(1) = 2 \times 2 = 4 \neq 2$ donc l'application n'est pas stable par multiplication externe. Ainsi, f n'est pas une application linéaire.

3.2 Construire la matrice associée à une application linéaire

Méthode

D'abord, pour construire une matrice nous avons besoin de deux bases. Nous prenons en priorité les bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée (par souci de simplicité).
La matrice associée à l'application linéaire dans ces deux bases est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la base d'arrivée des images des vecteurs de la base de départ par l'application linéaire.

Exemple d'application

On considère l'application linéaire $T = \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ "translation de 1" définie par $T(P)(X) = P(X-1)$.
Donner la matrice associée à T dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

La base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ est définie par $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$. On a :

- $T(1)(X) = 1$
- $T(X)(X) = X - 1$
- $T(X^2)(X) = (X-1)^2 = X^2 - 2X + 1$
- $T(X^3)(X) = (X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1$

On peut donc construire la matrice associée à T :

$$\boxed{\mathrm{mat}_{\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Remarque

Pour mieux comprendre comment cette matrice est construite, l'idée est ici que chaque ligne est un vecteur de la base d'arrivée (ici $\mathbb{R}_3[X]$) et dans chaque colonne on cherche pour chaque image des vecteurs de la base de départ (également $\mathbb{R}_3[X]$) le nombre de fois qu'il y a le vecteur de la ligne courante.
Par exemple, pour la troisième colonne qui correspond à $T(X^2)$, on a 1 fois le vecteur 1, -2 fois le vecteur X et 1 fois le vecteur X^2. D'où les coefficients de cette colonne dans la matrice précédemment formée.

3.3 Déterminer une base de l'image et du noyau d'une application linéaire

Méthode

On construit la matrice associée à l'application linéaire f puis on échelonne.

- Les colonnes de la matrice initiale contenant des pivots dans la forme échelonnée forment une base de l'image.
- Pour trouver une base du noyau, on résout le système linéaire homogène $f(X) = 0$ pour exprimer les solutions en fonction des variables libres (si elles existent, sans quoi le noyau serait vide) : les vecteurs de la combinaison linéaire créée forment une base du noyau.

Exemple d'application

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trouver une base de l'image et du noyau de f.

• On remarque que les colonnes 1, 3 et 5 sont les mêmes et que les colonnes 2 et 4 sont les mêmes. Ce qui revient à dire, de manière plus rigoureuse, que $C_1 = C_3$, $C_1 = C_5$ et $C_2 = C_4$ ce qui fait 3 liens.

On a donc $Im(f) = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ car les colonnes 1 et 2 ne sont pas proportionnelles.

• Pour déterminer une base du noyau, il faut résoudre le système linéaure suivant :

$$f(X) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a $\boxed{Ker(f) = Vect(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})}$.

Remarques

• Concernant la base de l'image, on aurait très bien pu utiliser la forme échelonnée de $mat(f)$. Ici, on trouve des liens et à chaque lien nous pouvons "supprimer" un vecteur parmi ceux à comparer entre-eux. On réalise cela jusqu'à n'avoir plus que des vecteurs non proportionnels entre eux (pas de combinaison linéaire possible) : ce sont eux qui forment la base de l'image.
• Pour le système linéaire résolu pour trouver une base du noyau, on a remarqué que les lignes 1 et 3 étaient les mêmes et que les lignes 2 et 4 étaient les mêmes, on peut donc remplacer les lignes 3 et 4 (ou 1 et 2, cela revient au même) par des lignes de 0.

3.4 Montrer l'injectivité, la surjectivité, la bijectivité d'une application linéaire

Méthode

Soit on crée une démonstration en se basant sur les définitions (comme ce sont des équivalents on démontre dans un sens puis dans l'autre, en supposant un membre de l'équivalence comme vrai à chaque fois), soit on construit la matrice associée que l'on échelonne. Dans ce cas :

- Un pivot par ligne $\rightarrow$ Application surjective
- Un pivot par colonne $\rightarrow$ Application injective
- Diagonale de pivots $\rightarrow$ Application bijective

Exemple d'application

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

$$\begin{aligned} mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que la matrice, une fois échelonnée, contient un pivot par ligne donc f est surjective. En revanche, elle ne contient pas de pivot à chaque colonne, f n'est donc pas injective et par conséquent pas bijective non plus.

4 Matrices

Acquis d'apprentissage

- Calculer la somme et le produit de deux matrices quand c'est possible
- Interpréter les calculs de matrices en termes d'application linéaires
- Déterminer si une matrice carrée est inversible
- Trouver l'inverse d'une matrice inversible.
- Utiliser les matrices inversibles pour résoudre des équations matricielles et des systèmes linéaires
- Trouver la transposée d'une matrice
- Calculer la trace d'une matrice

4.1 Réaliser le produit de deux matrices

Méthode

Dans les deux cas suivants, le produit de deux matrices n'est possible que s'il y a autant de colonnes dans la première que de lignes dans la deuxième.

- Cas 1 : Multiplier une matrice par un vecteur colonne

  On réalise la somme des produits associant chaque colonne n de la première matrice au coefficient de la ligne n du vecteur colonne. La formule générale est la suivante :

$$MX = x_1C_1 + x_2C_2 + ... + x_nC_n$$

- Cas 2 : Multiplier deux matrices

  On réalise la somme décrite par la formule suivante :

$$(MN)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} M_{ik}N_{kj}$$

  Il est recommandé, pour ne pas s'emmêler les pinceaux, d'utiliser la méthode visuelle utilisée dans le deuxième exemple d'application ci-dessous.

Exemple d'application n°1

On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{24}(\mathbb{R})$ et les vecteurs

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits Nu, Nv et Nw.

$$Nu = 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$
$$Nv = 0 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$Nw = 1 \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exemple d'application n°2

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Quand cela est possible, calculer les produits AB, AC, BA, BC, CA, CB.

Les produits AC, BA et BC ne sont pas possibles (il n'y a pas autant de colonnes dans la première matrice que de lignes dans la deuxième).

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ CA = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}} \end{array}$$

$$\begin{array}{rc} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ CB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \boxed{\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}} \end{array}$$

4.2 Trouver l'inverse d'une matrice

Méthode

Si l'on remarque un ou plusieurs liens entre les lignes et/ou colonnes de la matrice que l'on cherche à inverser ou qu'elle n'est pas carrée, alors cette dernière n'est pas inversible (on conclut directement si tel est le cas).
Dans le cas contraire, soit on applique la formule immédiate pour les matrices 2×2 ou alors l'algorithme de Gauss en même temps à deux matrices : sur la matrice que l'on cherche à inverser et sur la matrice identité du même ordre que la matrice étudiée. À la fin la matrice d'origine est échelonnée et l'autre correspond à la matrice inverse

Exemple d'application

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible ou pas et trouver l'inverse de celles qui sont inversibles.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice A n'est pas inversible car $L_2 = 2L_1$.
La matrice C n'est pas inversible car elle possède une colonne nulle (dès lors on peut trouver facilement un lien, par exemple $C_2 = 0C_1$).
La matrice D n'est pas inversible car $C_3 = C_1 + C_2$.
La matrice E n'est pas inversible car $C_1 = -C_3$.

On a $det(B) = 2 \times (-4) - 2 \times (-3) = -8 + 6 = -2$, donc :

$$B^{-1} = \frac{1}{det(B)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer l'inverse de la matrice F, on applique l'algorithme du pivot de Gauss en même temps aux deux matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_4}]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_2 \leftrightarrow L_4 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_4}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_3}]{} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xleftrightarrow[\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 - L_4}]{} \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

La matrice encadrée est la matrice inverse de F, on la note F^{-1}.

Remarque

Pas de panique si la formule du déterminant d'une matrice 2×2 ne vous dit rien, on va la voir dans le prochain chapitre !

4.3 Résoudre un système linéaire grâce à une matrice inverse

Méthode

D'après le cours, on a $MX = B \Leftrightarrow X = M^{-1}B$. On utilise cette relation pour aller plus vite lors de la résolution d'un système linéaire à condition que M soit inversible.

Exemple d'application

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 10x_4 = 10 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 = 9 \\ -2x_1 + 4x_2 - x_3 - 19x_4 = -22 \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 17x_4 = 19 \end{cases}$$

Écrivons ce système avec des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 10 \\ 1 & -1 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -1 & -19 \\ 2 & -2 & 2 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -22 \\ 19 \end{pmatrix}$$

On considère que nous avons vérifié que la première matrice était inversible et que nous avons réalisé les calculs nécessaire pour trouver son inverse.
La solution unique du système linéaire est :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -22 \\ 19 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -3 & 12 & -1 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -22 \\ 19 \end{pmatrix} \\ &= 10 \times \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 9 \times \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - 22 \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 19 \times \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -30 \\ -10 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 108 \\ -27 \\ 18 \\ -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -95 \\ 38 \\ -19 \\ 19 \end{pmatrix} \\ &= \boxed{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

5 Déterminants

Acquis d'apprentissage

- Calculer le déterminant de toute matrice carrée en utilisant le développement de Laplace
- Calculer le déterminant de toute matrice carrée en utilisant la méthode du pivot de Gauss
- Reconnaître si un problème peut être ramené à un calcul de déterminant

5.1 Calculer le déterminant avec le développement de Laplace

Méthode

On observe d'abord la matrice pour repérer la ligne ou la colonne contenant le plus de zéros, ou à défaut celle avec les coefficients les plus simples (pour ne pas s'emmêler les pinceaux lors des calculs).
Puis on déroule le développement de Laplace (voir le polycopié de cours pour la méthode détaillée) en faisant bien attention à l'alternance des signes jusqu'à tomber sur une somme ne contenant que des déterminants de matrices 2×2 : on sait alors que le déterminant de ce type de matrices vaut $ad - bc$, on applique directement cette formule.

Exemple d'application

Calculer les déterminants de chacune des matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

On surligne en bleu les lignes et/ou colonnes que l'on utilise pour dérouler le développement de Laplace pour chaque déterminant.

- $det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \times \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times (3 - 18) + 5 \times (18 + 12) = 15 + 150 = 165$
- $det(B) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \times (3 - 4) + 1 \times (0 - 1) = 1 - 1 = 0$
- $det(C) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 8 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -2 \times (1 \times \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}) = -2 \times (1 \times (14 + 8)) = -44$
- $det(D) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 8 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 0$

En effet, si l'on développe selon une ligne ou une colonne de 0, alors nécessairement le déterminant vaut 0.

5.2 Calculer le déterminant avec la méthode du pivot de Gauss

Méthode

Si la matrice de départ est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors le déterminant est égal au produit de tous les éléments sur la diagonale.
Si ce n'est pas le cas, on échelonne la matrice (sans la réduire) pour obtenir une matrice triangulaire supérieure en pesant à bien noter toutes les étapes.
Une fois cela fait, repérer les opérations élémentaires suivantes pour en déduire le déterminant de la matrice de départ :

- $L_i \leftrightarrow L_j \rightarrow$ Multiplication du déterminant par -1
- $L_i \leftarrow \alpha L_i \rightarrow$ Multiplication du déterminant par α
- $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j \rightarrow$ Déterminant non modifié

Remarque

Cette méthode est particulièrement utile dans le cas de matrices carrées de dimension supérieure ou égale à 5. Sinon il est généralement plus court d'utiliser le développement de Laplace pour des matrices carrées de dimension 4 ou moins.

Exemple d'application

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_5}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow -L_2 \\ L_3 \leftarrow -L_3 \\ L_4 \leftarrow -L_4 \\ L_5 \leftarrow -L_5}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donc $det(A) = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = \boxed{\text{-1}}$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 8 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_5 \\ L_2 \leftrightarrow L_3 \\ L_3 \leftrightarrow L_4 \\ L_4 \leftrightarrow L_5}}{\longleftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & -5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{pmatrix}$$

Donc $det(B) = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 50 = \boxed{1200}$

6 Changements de bases

Acquis d'apprentissage

- Trouver les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base étant données les coordonnées du même vecteur dans une vieille base
- Trouver la matrice représentative d'une application linéaire dans une nouvelle base étant donnée la matrice représentative de la même application linéaire dans une vieille base

6.1 Construire la matrice de passage d'une base à une autre

Méthode

La matrice de passage d'une base $\mathcal{A}$ à une base $\mathcal{B}$ est la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{A}$. Si cela est facile à réaliser, le faire directement.
Sinon, si l'on remarque que la matrice est plus facile à composer dans le sens inverse (passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{A}$) si la base $\mathcal{B}$ est la base canonique par exemple, dans ce cas il suffit de déterminer l'inverse de cette matrice pour "inverser le sens du passage" et retomber sur celui d'origine.

Exemple d'application

Soit $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On considère la famille

$$\mathcal{C} = \{c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$$

On sait que la famille $\mathcal{C}$ forme une base de $\mathbb{R}^4$. Construire la matrice de passage $P_{\mathcal{CB}}$.

Pour déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ vers la base $\mathcal{B}$, partons de la matrice de passage $P_{\mathcal{BC}}$ qui est facile à construire :

$$P_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Déterminer $P_{\mathcal{CB}}$ revient à calculer $(P_{\mathcal{BC}})^{-1}$. On applique la méthode vue précédemment et on obtient :

$$(P_{\mathcal{BC}})^{-1} = \begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 2 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\boxed{P_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 2 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}}$

6.2 Déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une nouvelle base

Méthode

On utilise les coordonnées du vecteur choisi v dans une première base $\mathcal{B}$ (si l'on peut la choisir, privilégier la base canonique) pour appliquer le théorème suivant :

$$Coord_{\mathcal{C}}(v) = P_{\mathcal{CB}} Coord_{\mathcal{B}}(v)$$

Exemple d'application

On considère le vecteur $a = 2b_1 + 3b_2 - b_3$. Donner les coordonnées de a dans les bases $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C} = \{c_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, c_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, c_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, c_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\-1\end{pmatrix}\}$.

Dans la base $\mathcal{B}$, la lecture des coordonnées de a est directe :

$$\boxed{\mathrm{Coord}_{\mathcal{B}}(a) = \begin{pmatrix}2\\3\\-1\\0\end{pmatrix}}$$

Pour les coordonnés de a dans la base $\mathcal{C}$, on utilise la matrice de passage $P_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ (construite dans l'exemple d'application précédent) :

$$\begin{aligned}
Coord_{\mathcal{C}}(a) = P_{\mathcal{C}\mathcal{B}} Coord_{\mathcal{B}}(a) &= \begin{pmatrix}2 & -2 & 1 & 1\\-1 & 1 & 0 & 0\\-1 & 2 & -1 & -1\\-1 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\-1\\0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\3\\6\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\\
&= \boxed{\begin{pmatrix}-3\\1\\5\\1\end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

6.3 Déterminer la matrice associée à une application linéaire dans une nouvelle base

Méthode

On utilise la matrice représentative de l'application linéaire dans deux bases originales (si l'on peut les choisir, privilégier les bases canoniques) pour appliquer le théorème suivant :

$$mat_{\mathcal{B}'\mathcal{A}'}(f) = P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} mat_{\mathcal{B}\mathcal{A}}(f) P_{\mathcal{A}'\mathcal{A}}$$

Dans un endomorphisme, on a la formule suivante :

$$mat_{\mathcal{A}'}(f) = (P_{\mathcal{A}\mathcal{A}'})^{-1} mat_{\mathcal{A}}(f) P_{\mathcal{A}\mathcal{A}'}$$

Exemple d'application

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont sa matrice canonique est

$$mat(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et l'on considère la famille

$$\mathcal{A} = \{a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$$

Déterminer $mat_{\mathcal{A}}(f)$.

Notons $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Alors on a la relation suivante :

$$mat_{\mathcal{A}}(f) = (P_{\mathcal{C}\mathcal{A}})^{-1} \, mat_{\mathcal{C}}(f) \, P_{\mathcal{C}\mathcal{A}}$$

On a $P_{\mathcal{C}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et on trouve $(P_{\mathcal{C}\mathcal{A}})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

On a donc

$$mat_{\mathcal{A}}(f) = (P_{\mathcal{C}\mathcal{A}})^{-1} \, mat_{\mathcal{C}}(f) \, P_{\mathcal{C}\mathcal{A}} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

.

7 Diagonalisation d'endomorphismes

Acquis d'apprentissage

- Calculer le polynôme caractéristique d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée et l'utiliser pour déterminer les valeurs propres
- Déterminer si un endomorphisme ou une matrice carrée est diagonalisable
- Trouver une base de vecteurs propres lorsque c'est possible
- Utiliser la diagonalisation pour calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} M^n X$, où M est une matrice carrée de taille n et $X \in \mathbb{R}^n$

7.1 Calculer le polynôme caractéristique d'une matrice carrée ou d'un endomorphisme

Méthode

On travaille dans le cas d'une matrice M (la méthode est la même pour un endomorphisme). On cherche $det(M - xI_n)$, ce qui revient au déterminant de la matrice M dont on soustrait x aux éléments diagonaux.
Le but est d'obtenir une forme factorisée de l'expression du déterminant afin de rapidement voir les racines et leurs multiplicités.

- Pour cela, l'idée est d'abord de créer un zéro avec des opérations élémentaires (généralement en alternant les opérations sur lignes et colonnes) dans l'espoir de trouver quelque chose à mettre en facteur.
- Puis on continue pour avoir le plus de zéros possible sur cette même ligne factorisée pour faciliter le développement de Laplace.

Une fois le polynôme caractéristique trouvé, on en déduit les racines de ce dernier : ce sont les valeurs propres de M qui forment son spectre. Si ce polynôme ne possède pas de racine réelle, alors M n'est pas diagonalisable.

Exemple d'application

Trouver les valeurs propres de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

On construit le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned}
P_A(X) = det(C - xI) = \begin{vmatrix} 4-X & -1 & 6 \\ 2 & 1-X & 6 \\ 2 & -1 & 8-X \end{vmatrix} &\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{=} \begin{vmatrix} 2-X & -2+X & 0 \\ 2 & 1-X & 6 \\ 2 & -1 & 8-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1-X & 6 \\ 2 & -1 & 8-X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2}{=} (2-X) \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 3-X & 1-X & 6 \\ 1 & -1 & 8-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X) \begin{vmatrix} 3-X & 6 \\ 1 & 8-X \end{vmatrix} \\
&= (2-X)((3-X)(8-X) - 6) \\
&= -(2-X)^2(X-9)
\end{aligned}$$

Donc les valeurs propres de A sont les racines de $P_A(X)$, c'est-à-dire 2 et 9.
On peut noter $\boxed{Spec(A) = \{2; 9\}}$.

7.2 Déterminer la multiplicité algébrique et géométrique d'une valeur propre

Méthode

Après avoir déterminé les valeurs propres de M, on en déduit leur multiplicité algébrique grâce à la forme factorisée du polynôme.
Puis on détermine la multiplicité géométrique de chaque valeur propre.

- On construit la matrice $M - nI$ où n est une valeur propre (ce qui revient à soustraire la valeur propre à tous les éléments diagonaux de M)
- On cherche des liens entre les colonnes de la matrice pour rapidement trouver le noyau de cette matrice, ou à défaut faire la méthode "classique" en échelonnant la matrice.

La dimension du noyau trouvé est la multiplicité géométrique de la valeur propre associée. Si cette dernière n'est pas égale à sa multiplicité algébrique, alors M n'est pas diagonalisable.

Exemple d'application

On reprend la matrice de l'exemple d'application précédent. Trouver les multiplicités algébriques et géométriques des valeurs propres de A. En déduire si cette matrice est diagonalisable.

Nous avons $Spec(A) = \{2; 9\}$ et d'après la forme factorisée de $det(C - xI)$ nous avons directement $\boxed{m_a(2) = 2}$ (car $(2 - X)$ est à la puissance 2) et $\boxed{m_a(9) = 1}$. Déterminons désormais les multiplicités géométriques les valeurs propres de A.

* Multiplicité géométrique de 2
On construit la matrice $A - 2I$:

$$C - 2I = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 = -2C_2$ et que $C_1 = \frac{1}{3}C_1$. On a donc $\boxed{m_g(2) = dim(Ker(C - 2I)) = 2}$ et $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}) = E_2$.

* Multiplicité géométrique de 9
On construit la matrice $A - 9I$:

$$C - 9I = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 6 \\ 2 & -8 & 6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On remarque que $C_1 + C_3 = -C_2 \Leftrightarrow 1C_1 + 1C_2 + 1C_3 = 0$. On a donc $\boxed{m_g(9) = dim(Ker(C - 9I)) = 1}$ et $Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = E_9$.

On a bien $m_a(2) = m_g(2)$ et $m_a(9) = m_g(9)$ donc $\boxed{\text{la matrice } A \text{ est diagonalisable}}$.

7.3 Trouver D et P tels que $M = P^{-1}DP$

Méthode

Si M est bien diagonalisable, alors on peut construire ces deux matrices à partir des informations précédentes.

- Construire la matrice D revient à écrire une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de M répétées autant de fois que leur valeur algébrique.
- Construire la matrice P revient à écrire les vecteurs formant les noyaux trouvés lors du calcul des multiplicités géométriques des valeurs propres. Il faut faire attention à bien placer ces vecteurs dans l'ordre où les valeurs propres ont été placées dans D.

Exemple d'application

On reprend toujours la même matrice A étudiée précédemment. Déterminer deux matrices D et P tels que $A = P^{-1}DP$.

On construit la matrice D à partir des valeurs propres de A et leurs multiplicités respectives. On a :

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Puis on construit la matrice P à partir des vecteurs composant les noyaux étudiés pour les multiplicités géométriques en gardant l'ordre pris pour construire D. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$