Chapitre 2 : Séries numériques

* Une série numérique est une <u>somme</u> de suites.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ S_n = \sum_{k=m_0}^{n} u_k$

S_n est appelée une somme partielle de rang n de la série.

* Si la suite S_n converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, $STG(u_n)$ converge et est égal à ℓ. $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \ell$

* Exemples fondamentaux :

• Série géométriques : On appelle série géométrique de raison q la série de terme général q^n.

$STG(q^n)$ converge ssi $-1 < q < 1$ et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

• Série de Riemann : $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle série de Riemann la série de terme général $\frac{1}{n^\alpha}$.

Une série de Riemann est convergente ssi $\alpha > 1$.

Cas particulier : la série harmonique, $STG(\frac{1}{n})$ diverge.

• Série télescopiques : une série de terme général s'écrit sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n)$.

• Série exponentielles : $a \in \mathbb{R}$. On appelle série exponentielle la série de terme général $\frac{a^n}{n!}$.

$\forall a \in \mathbb{R}$, la série exponentielle converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

* Si $STG(u_n)$ converge, (u_n) converge vers 0
* Si $STG(u_n)$ et $STG(v_n)$ convergent vers ℓ et ℓ', $(u_n + v_n)$ converge vers $\ell + \ell'$.

→ Si l'une des deux diverge, la somme diverge.

→ Si les deux séries divergent, on ne peut rien dire

* Soit f une fonction et $\mathcal{D}_f = [0; +\infty[$. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$.

Si f est décroissante et $\lim_{n \to +\infty} f(n) = 0$, alors $STG(u_n)$ et $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ ont la même nature.

* Si $STG(|u_n|)$ converge, $STG(u_n)$ est absolument convergente.
* Inégalité triangulaire : $\left|\sum_{k=0}^{n} u_k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |u_k|$

* Une série convergente qui n'est pas absolument convergente est appelée série semi-convergente. ⚠ Inégalité triangulaire

---

Série à termes positifs :

* Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ ont la même nature

* Si $u_n \leqslant v_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge.
* Si $u_n \leqslant v$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge, $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge.
* Si $u_n \underset{+\infty}{=} o(v_n)$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge

* Règle de Cauchy

$k = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{u_n}$

Si $k < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et si $k > 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge

* Règle de d'Alembert

$k = \lim_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$

Si $k < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et si $k > 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge

* Une série alternée est une série avec un terme général de la forme : $u_n = (-1)^n a_n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geqslant 0$.
* Une série alternée (u_n) converge ssi (a_n) est décroissante et converge vers 0.

* Calcul de somme d'une série numérique :

• Série exponentielle :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

• Série géométriques et dérivées :

$$\forall q \in]-1;1[: \sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n q^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Vérifier cours

$$? \left[\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)\boxed{(n-1)} q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}\right.$$

Méthode :

<u>Démontrer la convergence :</u>

- Calculer la limite de S_n (si elle est réelle, $STG(u_n) = \lim_{n \to +\infty} S_n$ et converge)
- Si besoin, calculer la limite de S_n pour différentes valeurs de n
- Par encadrement
- Par équivalence
- Par négligeabilité
- (Par Développements Limités)
- Critère de Riemann
- Règle de Cauchy (Série à termes positifs) → notamment si $\sqrt[n]{}$
- Règle de D'Alembert (Série à termes positifs) → notamment si $n!$
- Par identification (suite géométrique, exponentielle ...)

<u>Pour calculer une série :</u>

- Calculer la limite de S_n
- Calcul de somme (changement de variable ...)
- Identification (suite géométrique, exponentielle ...)