

Test de primalité (tester si un entier n est premier).

On teste la division par tous les nombres premiers entre 2 et \sqrt{n} .

Ex: 139 premier?

$$11 < \sqrt{139} < 12$$

On vérifie si 139 divisible par 2, 3, 5, 7, 11.

Ce n'est pas le cas, donc 139 est premier.

Théorème 3.4: tout entier $n \geq 2$ s'écrit sous la forme d'un produit de nb premiers.

Ex: 150 \Rightarrow

$$150 / 3 = 50$$

$$50 / 2 = 25$$

$$25 / 5 = 5$$

$$5 / 5 = 1$$

$$\begin{aligned} 150 &= 3 \times 2 \times 5 \times 5 \\ &= 2^1 \times 3^1 \times 5^2 \end{aligned}$$

ou s'arrête ici

Théorème 3.5: Calculer le nb de diviseurs

Ex avec $150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$

$$|\text{Div}(150)| = (1+1) \times (1+1) \times (2+1)$$

$$= 2 \times 2 \times 3 = 12 \text{ diviseurs}$$

Div(150):

| | | |
|---------------------------------|----------------------------------|-----------------------------------|
| $2^0 \times 3^0 \times 5^0 = 1$ | $2^0 \times 3^0 \times 5^1 = 5$ | $2^0 \times 3^0 \times 5^2 = 25$ |
| $2^1 \times 3^0 \times 5^0 = 2$ | $2^1 \times 3^0 \times 5^1 = 10$ | $2^1 \times 3^0 \times 5^2 = 50$ |
| $2^0 \times 3^1 \times 5^0 = 3$ | $2^0 \times 3^1 \times 5^1 = 15$ | $2^0 \times 3^1 \times 5^2 = 75$ |
| $2^1 \times 3^1 \times 5^0 = 6$ | $2^1 \times 3^1 \times 5^1 = 30$ | $2^1 \times 3^1 \times 5^2 = 150$ |

$$\text{Div}(150) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50, 75, 150\}$$

$$|\text{Div}(150)| = 12$$

Calculer PGCD Plus grand commun diviseur

⚠ Si $A \in \text{Div}(B)$,
 $\text{PGCD}(A, B) = A$

1) Facteurs premiers

Ex: $\text{PGCD}(60, 150) = 60 \wedge 150$

$$60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \quad | \quad 150 = 2^1 \times 3^1 \times 5^2$$

On prend les diviseurs communs aux deux entiers,
et on prend la plus petite puissance.

$$60 \wedge 150 = \text{PGCD}(60, 150) = 2^1 \times 3^1 \times 5^1 \\ = 30$$

2) Euclide :

$$60 = 150 \times 0 + 60$$

$$150 = 60 \times 2 + 30$$

$$60 = 30 \times 2 + 0$$

On s'arrête lorsque le reste est nul
le pgcd est le reste précédent

$$\text{PGCD}(60, 150) = 30$$

PPCM Plus petit commun multiple

⚠ Si $A \in \text{Div}(B)$,
 $\text{ppcm}(A, B) = B$

Ex: $\text{ppcm}(150, 420)$

$$420 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7$$

$$= 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$$

$$150 = 2 \times 3 \times 5^2$$

$$= 2^1 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^0$$

$$\text{ppcm}(150, 420) = 2^2 \times 3^1 \times 5^2 \times 7^1 \\ 150 \vee 420 = 2100$$

Théorème 3.11 : Lien entre ppcm et pgcd

$$\text{pgcd}(a, b) \times \text{ppcm}(a, b) = ab$$