Fiche Méthodes - SM301

Un recueil de méthodes pour accompagner les révisions de Probabilités

Doryan Denis

2023-2024

Table des matières

1 Espace probabilisé

1.1 Dénombrement et combinatoire

Cette sous-section est extraite d'une fiche disponible en anglais sur Moodle *ainsi que du* cours d'Yvan Monka.

Dénombrement des p-uplets

Étant donné n objets, le nombre de p-uplets (collection ordonnée d'objets) est de n^p. Cela comporte un intérêt à l'ordre et il y a des éléments répétés (avec remise).

Exemple

Il y a 26^3 mots composés de 3 lettres de l'alphabet.

Permutations de n objets

Étant donné n objets, on peut les disposer de $n!$ façons.

Exemple

Il y a 10! façons de disposer ou de permuter ces 10 lettres : ABCDEFGHIJ.

Arrangement de p objets prélevés sur n objets

Étant donné n objets, nous aimerions ranger p objets choisis parmi n objets. Cet arrangement comporte un intérêt dans l'ordre et il n'y a pas de répétition (chaque objet ne peut être observé qu'une seule fois, sans remise).
Nous avons

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

façons de réaliser un tel arrangement.

Exemple

Nous pouvons écrire

$$A_{26}^3 = 26 \times 25 \times 24 = 15600$$

mots composés de 3 lettres distinctes parmi les 26 lettres de l'alphabet.

Combinaison de p objets choisis parmi n objets

Étant donné n objets, nous aimerions choisir p objets parmi n objets. Ce choix ne s'intéresse pas à l'ordre et ne comporte pas d'éléments répétés (sans remise).
Nous avons

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

façons de faire ce choix.

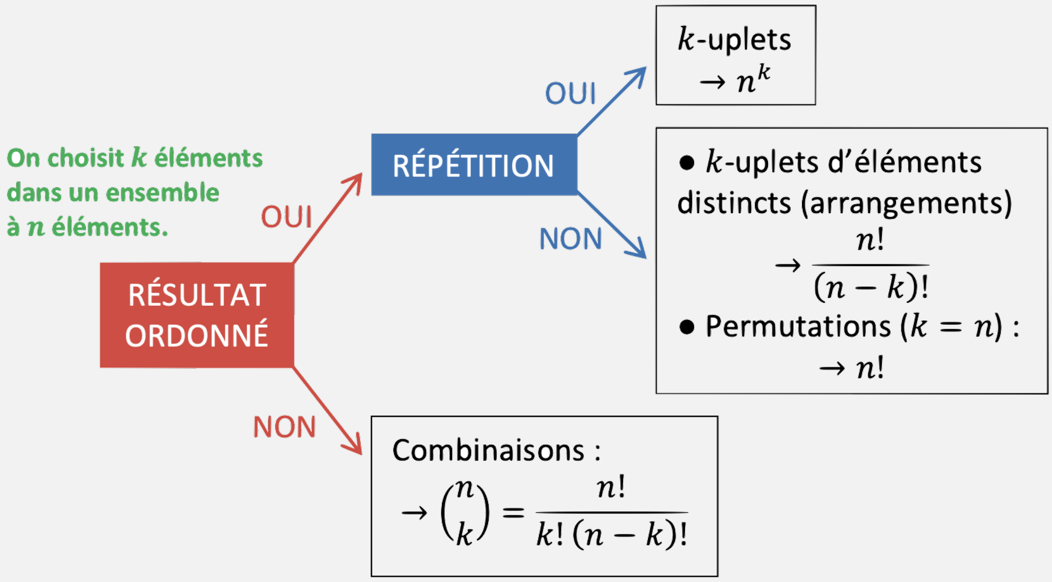
Exemple

Il y a

$$C_{26}^3 = \binom{26}{3} = \frac{26!}{3!(23)!} = 2600$$

sous-ensembles de 3 lettres distinctes dans l'alphabet de 26 lettres.

Résumé



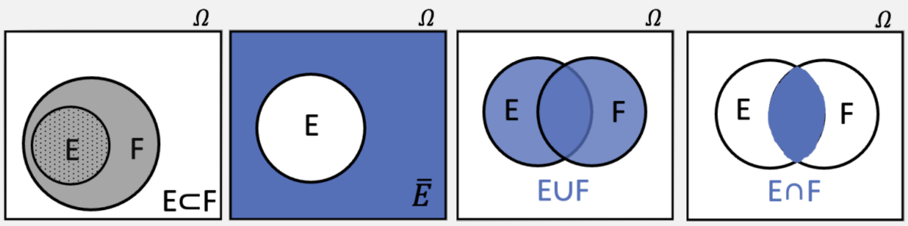
1.2 Théorie des ensembles

Généralités élémentaires sur les ensembles

Soient E et F deux ensembles contenus dans un ensemble Ω. Il existe 4 opérations élémentaires sur les ensembles :

- Le sous-ensemble : $E \subset \Omega$
- Le complémentaire : $\overline{E} = \{x \in \Omega | x \notin E\}$
- L'union : $E \cup F = \{x \in \Omega | (x \in E) \text{ ou } (x \in F)\}$
- L'intersection : $E \cap F = \{x \in \Omega | (x \in E) \text{ et } (x \in F)\}$

On peut les représenter par les 4 schémas ci-dessous :



On peut aussi associer ces opérations à des connecteurs logiques, comme indiqué ci-dessous :

Connecteurs logiques	**Opérations sur les ensembles**	**Réalisation d'évènements**
ET	Intersection $E \cap F$	les deux évènements se réalisent
OU	Union $E \cup F$	au moins un des deux évènements se réalise
NON	Complémentaire $\overline{E}$	E ne se réalise pas
$\Longrightarrow$	Sous-ensemble $E \subset F$	Chaque fois que E se réalise, F se réalise aussi

Propriétés des opérations sur les ensembles

- **Commutativité** de $\cup$ et $\cap$
- **Associativité** de $\cup$ et $\cap$
- **Idempotence** de $\cup$ et $\cap$
- $\emptyset$ est l'**élément neutre** de $\cup$ et Ω est l'**élément neutre** de $\cap$
- Ω est l'**élément absorbant** de $\cup$ et $\emptyset$ est l'**élément absorbant** de $\cap$
- $\cup$ est **distributive** sur $\cap$ et inversement
- **Loi de De Morgan** : $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F}$ et $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F}$.

1.3 Fonction de probabilité

Définition d'une probabilité (pour un mathématicien)

Soit Ω un univers fini ou dénombrable.
On désigne par $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω. Une fonction de probabilité sur Ω est une fonction $P : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ telle que :

- $\forall E \subset \Omega, 0 \leq P(E) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- **Additivité** : pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements deux à deux incompatibles, on a :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Propriétés élémentaires

Soit (Ω, P) un espace probabilisé. On a les caractéristiques suivantes :

- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$
- $E \subset F \Rightarrow P(E) \leq P(F)$
- $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

Exemple d'application n°1

Soient A et B deux évènements de l'ensemble Ω tels que $P(A) = 1/2$, $P(A \cup B) = 3/4$ et $P(\overline{B}) = 5/8$.
Calculer $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ et $P(\overline{A} \cup \overline{B})$.

• On commence par déterminer $P(B)$, pour cela on passe par le complémentaire : $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$.
On en déduit $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{8}}$.

• On utilise le passage au complémentaire :
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{3}{4} = \boxed{\frac{1}{4}}$

• On utilise (aussi) le passage au complémentaire :
$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$

Exemple d'application n°2

Dans une population de 2000 nouveau-nés :

- 1040 sont des garçons,
- 50 présentent un ictère (maladie),
- 30 sont des garçons et présentent un ictère

On note respectivement G et I les évènements "être un garçon" et "présenter un ictère".

a) Calculer $P(G)$, $P(I \cup G)$, $P(I \cap \overline{G})$, $P(G \cap \overline{I})$.

b) Quelle est la probabilité de ne pas être un garçon et de ne pas présenter d'ictère ?

c) Les évènements I et G sont-ils compatibles ?

---

a) On connaît :

- $P(G) = \frac{1040}{2000} = \boxed{0{,}52}$
- $P(I) = \frac{50}{2000} = 0,025$
- $P(I \cap G) = \frac{30}{2000} = 0,015$

Cherchons maintenant, à partir de ces informations, les trois probabilités restantes demandées.
$P(I \cup G) = P(I) + P(G) - P(I \cap G) = 0,025 + 0,52 - 0,015 = \boxed{0{,}53}$

On a $I = (I \cap \overline{G}) \cup (I \cap G)$ et $(I \cap \overline{G}) \cap (I \cap G) = \emptyset$ donc d'après le principe d'additivité $P(I) = P(I \cap G) + P(I \cap \overline{G})$ d'où $P(I \cap \overline{G}) = P(I) - P(I \cap G) = 0,025 - 0,015 = \boxed{0{,}01}$

On a $G = (G \cap \overline{I}) \cup (G \cap I)$ et $(G \cap \overline{I}) \cap (G \cap I) = \emptyset$ donc d'après le principe d'additivité $P(G) = P(G \cap I) + P(G \cap \overline{I})$ d'où $P(G \cap \overline{I}) = P(G) - P(G \cap I) = 0,52 - 0,015 = \boxed{0{,}505}$

b) La question revient à calculer $P(\overline{G} \cap \overline{I})$. En utilisant la loi de De Morgan, on constate que $P(\overline{G} \cap \overline{I}) = P(\overline{G \cup I})$. Or, on sait que $P(\overline{G \cup I}) = 1 - P(G \cup I)$ et que $P(G \cup I) = 0,53$.
Donc on a $P(\overline{G \cup I}) = 1 - P(G \cup I) = 1 - 0,53 = \boxed{0{,}47}$

c) Deux évènements sont incompatibles si leur intersection est l'ensemble vide, c'est-à-dire que la probabilité de cette intersection soit égale à 0. Or, d'après l'énoncé, on a $P(I \cap G) = 0,015 \neq 0$ donc $\boxed{\text{les évènements } I \text{ et } G \text{ sont compatibles}}$.

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Formules élémentaires

Formule d'une probabilité conditionnelle

Soient E et F deux évènements de Ω tels que F ne soit pas impossible. Alors, la probabilité de E sachant F (ou probabilité conditionnelle de E en F), notée $P(E|F)$ ou $P_F(E)$, est définie par :

$$P_F(E) = P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

Une relation intéressante à utiliser est celle des évènements contraires :

$$P(E|F) + P(\overline{E}|F) = 1$$

Appliquer la propriété de multiplication

Soient E_1 et E_2 deux évènements possibles. Alors on a la relation suivante :

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2|E_1)P(E_1)$$

Désormais, soient E_1, E_2 et E_3 trois évènements possibles. Alors on a la relation suivante ;

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_3|E_1 \cap E_2)P(E_2|E_1)P(E_1)$$

Dans le cas général d'une famille d'évènements possibles E_1, E_2, ..., E_n, alors on a la relation suivante :

$$P(\bigcap_{1\leq i\leq n} E_i) = P(E_n|\bigcap_{1\leq i\leq n-1} E_i)P(E_{n-1}|\bigcap_{1\leq i\leq n-2} E_i)...P(E_2|E_1)P(E_1)$$

Exemple d'application

Une urne contient p boules rouges, q boules jaunes, r boules bleues, et s boules vertes, avec $p \geq 2$. On tire successivement 5 boules de l'urne.
Quelle est la probabilité de tirer dans l'ordre deux boules rouges, une boule jaune, une boule bleue, et une boule verte sans remise des boules dans l'urne ?

Désignons par N le nombre total de boules dans l'urne.
On note les évènements suivants :

- R_i = "on tire une boule rouge à la i-ème position"
- J_i = "on tire une boule jaune à la i-ème position"
- B_i = "on tire une boule bleue à la i-ème position"
- V_i = "on tire une boule verte à la i-ème position"

On cherche à calculer $P(R_1 \cap R_2 \cap J_3 \cap B_4 \cap V_5)$. D'après la propriété de multiplication :

$$\begin{aligned} P(R_1 \cap R_2 \cap J_3 \cap B_4 \cap V_5) &= P(V_5|R_1 \cap R_2 \cap J_3 \cap B_4) \times P(B_4|R_1 \cap R_2 \cap J_3) \times P(J_3|R_1 \cap R_2) \\ &\quad \times P(R_2|R_1) \times P(R_1) \\ &= \frac{s}{N-4} \times \frac{r}{N-3} \times \frac{q}{N-2} \times \frac{p}{N-1} \times \frac{p}{N} \end{aligned}$$

Au numérateur, on indique le nombre de boules de chaque couleur présent dans l'urne. Au dénominateur, on retranche au nombre total de boules celles déjà tirées au moment du tirage d'une certaine boule.

Appliquer la formule des probabilités totales

Soit $\mathcal{A} = \{A_1, ..., A_n\}$ un système complet d'évènements (c'est-à-dire un ensemble où l'union de tous les évènements forme l'univers Ω) et E un évènement quelconque. Alors, on a

$$P(E) = \sum_{i=1}^{n} P(E|A_i)P(A_i)$$

Exemple d'application

Lors de ses vacances d'été, M. Zalamea a passé 40 % de son temps à Quito (évènement Q), 20 % à Bogota (évènement B), 20 % à la plage au bord de l'océan Pacifique (évènement Pac) et 20 % à Paris (évènement P). Il en a profité pour écrire le polycopié de Probabilités.
On note l'évènement Pl = "il pleut" et on sait que $P(Pl|P) = \frac{1}{10}$, $P(Pl|B) = \frac{1}{3}$, $P(Pl|Pac) = \frac{4}{5}$ et $P(Pl|Q) = \frac{1}{3}$.
Calculer la probabilité qu'il pleuvait lorsque le paragraphe de cours sur les probabilités totales a été écrit.

Les évènements $\{Q, B, P, Pac\}$ forment un système complet d'évènements. On utilise donc la formule des probabilités totales :

$$P(Pl) = \underbrace{\frac{4}{10} \times \frac{1}{3}}_{\text{Quito}} + \underbrace{\frac{1}{5} \times \frac{1}{3}}_{\text{Bogota}} + \underbrace{\frac{1}{5} \times \frac{1}{10}}_{\text{Paris}} + \underbrace{\frac{4}{5} \times \frac{1}{5}}_{\text{Pacifique}} = \boxed{38\ \%}$$

Appliquer la formule de Bayes

D'habitude, $P(E|F)$ avec E la conséquence et F la cause. La formule de Bayes permet de "retourner" la formule de la probabilité conditionnelle.
On a besoin d'un système complet d'évènements (SCE) $\{F_i\}$. On a :

$$P(F_1|E) = \frac{P(F_1 \cap E)}{P(E)} = \frac{P(E|F_1) \times P(F_1)}{\underbrace{\boxed{\sum_i P(E|F_i)P(F_i)}}_{\text{probabilités totales}}}$$

Exemple d'application

Dans un hôpital, le personnel soignant réalise des tests pour une maladie. On note les évènements M = "être malade" et $+$ = "être positif au test".
On dispose des données suivantes :

- Le test est efficace à 95 % pour les patients malades
- Il y a 1 % de faux-positifs (test positif mais patient non malade)
- 0,05 % des patients sont porteurs de la maladie

Étant donné que le résultat de mon test est positif, quelle est la probabilité que je sois malade ?

D'après l'énoncé, on connaît les probabilités suivantes :

- $P(+|M) = 0,95$
- $P(+|\overline{M}) = 0,01$

Pour déterminer la probabilité demandée, c'est-à-dire $P(M|+)$, on passe par la formule de Bayes :

$$P(+|M) = \frac{P(+|M) \times P(M)}{P(+|M) \times P(M) + P(+|\overline{M})P(\overline{M})} = \frac{0,95 \times 0,0005}{0,95 \times 0,0005 + 0,01 \times 0,9995} \approx \boxed{4,5\ \%}$$

2.2 Évènements indépendants

Interpréter l'indépendance de deux évènements

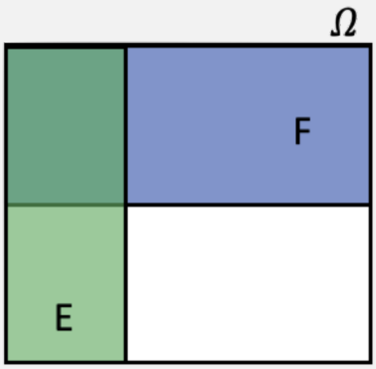
Deux évènements sont indépendants si la probabilité de l'un ne donne aucune information sur la probabilité de l'autre. De manière plus formelle, on utilise les deux interprétations mathématiques suivantes. Soit (W, P) un espace probabilisé et E et F deux évènements. On dit que E et F sont indépendants si

$$P(E \cap F) = P(E)P(F)$$

Si E et F sont des évènements possibles, ceci est équivalent à demander

$$P(E|F) = P(E) \text{ ou } P(F|E) = P(F)$$

On peut représenter l'indépendance par ce schéma :



Une proposition intéressante à propos de l'indépendance est la suivante :

$$E \text{ et } F \text{ indépendants} \Leftrightarrow E \text{ et } \overline{F} \text{ indépendants}$$

Exemple d'application

Soient Ω l'ensemble des entiers naturels compris entre 1 et 12 (inclus), $A \subset \Omega$ formé des nombres pairs et $B \subset \Omega$ formé des multiples de 3.
A et B sont-ils indépendants ? En déduire $P(A|B)$ et $P(B|A)$.

On a $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ donc $Card(A) = 6$. On en déduit $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$.
On a $B = \{3; 6; 9; 12\}$ donc $Card(B) = 4$. On en déduit $P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
On a $A \cap B = \{6; 12\}$ donc $Card(A \cap B) = 2$. On en déduit $P(A \cap B) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(\Omega)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.
Or, comme $P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(A \cap B)$ alors A et B sont bien indépendants.

Les deux évènements étant indépendants, alors on en déduit que $P(A|B) = P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B|A) = P(B) = \frac{1}{3}$.

3 Variables aléatoires discrètes

3.1 Définitions de base

Notion de variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction sur un espace probabilisé.

Exemples

• Sur l'ensemble des étudiants du groupe A, la pointure de chacun (de même pour leur taille, leur poids...).
• La somme sur une paire de dés.

Le support d'une variable aléatoire est l'ensemble des valeurs possibles pour X.
Une variable aléatoire est discrète si le support $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.

Opérations sur les variables aléatoires

• $\mathbb{R}^\Omega$ est un espace vectoriel (somme interne, multiplication externe)
• Multiplication interne (Algèbre)
• Composition : $\Omega \xrightarrow{X} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Système complet d'évènements associé à X

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et X une variable aléatoire discrète sur Ω. On note :

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}$$

Loi de probabilité de X

Fonction de probabilités pour $X(\Omega)$.

3.2 Couples de variables aléatoires discrètes

Loi de probabilité conjointe

$P(X = x, Y = y)$
Relation entre X et Y ?

Couple de variables aléatoires discrètes indépendantes

$\forall x \in X(\Omega), \forall y \in Y(\Omega), P(X = x, Y = y) = P(X = x) \times P(Y = y)$

3.3 Espérance, Variance, Écart-Type

Espérance

C'est une "moyenne".

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x)$$

Propriétés :

- $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est une application linéaire : $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y)$
- Théorème du transfert : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $Y = g(X)$, alors $E(Y) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x)P(X = x)$

Variance et Écart-Type

Elle mesure la dispersion.

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2$$

Propriétés :

- $V(\alpha X + a) = \alpha^2 V(X)$
- Elle n'est pas linéaire : $V(X+Y) \neq V(X) + V(Y)$ sauf si X et Y sont indépendantes.

L'écart-type de X $\sigma(X)$ vaut :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

On l'utilise pour avoir les mêmes unités que X.

3.4 Couples de variables

Covariance

Signification : En moyenne, une augmentation de X entraîne-t-elle une augmentation de Y ?

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

Propriétés :

- X et Y indépendants $\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$
  Contraposée : $Cov(X,Y) \neq 0 \Rightarrow X$ et Y ne sont pas indépendants
- $Cov(\alpha X_1 + \beta X_2, Y) = \alpha Cov(X_1, Y) + \beta Cov(X_2, Y)$: la covariance est bilinéaire et symétrique

Coefficient de corrélation

$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

Cette valeur est sans unités.

3.5 Lois usuelles discrètes

Loi uniforme

Toutes les valeurs de X sont équiprobables.
Lorsque $X(\Omega) = [1, n]$, on a : $P(X = k) = \frac{1}{n}$, $E(X) = \frac{n+1}{2}$, $V(X) = \frac{n^2 1}{12}$.

Loi de Bernouilli

Variable aléatoire X tel que $X(\Omega) = [0, 1]$.
Notons le succès $P(X = 1) = p$, $E(X) = p$ et $V(X) = p - p^2 = p(1-p)$.

Loi binomiale

Premier point de vue : Répétitions indépendantes et identiques de d'évènements de Bernouilli. On fixe le nombre de répétitions n et on compte le nombre de succès X. P est la probabilité de réussite.

Deuxième point de vue : $X = \sum_{k=1}^{n} K_k$ avec $X_k \sim \mathcal{B}(p)$ et les X_i indépendants.

$$\forall k \leq n, P(X = k) = \underbrace{\binom{n}{k}}_{\text{choisir } k \text{ éléments parmi } n} \times \underbrace{p^k}_{\text{probabilité de victoire}} \times \underbrace{(1-p)^{n-k}}_{\text{probabilité de perdre}}$$

On a : $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$

Loi binomiale négative

Répétitions indépendantes et identiques de d'évènements de Bernouilli. Ce qui change est que l'on compte le nombre de répétitions n et on fixe le nombre de succès r. P est la probabilité de réussite. (Le point de vue d'une somme n'est plus valable ici)
On a $X \sim \mathcal{B}(r, p)$.

$$P(N = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r}$$

On a : $E(N) = \frac{r}{p}$ et $V(N) = \frac{r(1-p)}{p^2}$

Loi de Poisson

C'est une approximation de la loi binomiale pour des évènements rares et beaucoup de répétitions. On a $X(\Omega) = N$).

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \text{ car } \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{\lambda}$$

On a : $E(X) = V(X) = \lambda$
Lien précis avec la binomiale : $\lim\limits_{\substack{n \to +\infty \\ p \to 0 \\ np \to \lambda}} \mathcal{B}(n, p) = \mathcal{P}(\lambda)$

4 Variables aléatoires continues

4.1 Fonctions de probabilité et de répartition

Analogie : Discret et Continu

En passant du domaine discret au continu, alors :

- La probabilité en un point $P(X = a)$ est remplacée par la probabilité dans un intervalle $P(a < X < b)$ (les symboles inférieurs peuvent aussi être inférieurs ou égaux)
- La probabilité en un point $P(X = a)$ est remplacée par la densité en un point $f(x)$

Pour obtenir $P(X = a)$ à partir de $f(x)$, alors on réalise une intégrale de la fonction (et on dérive $P(X = a)$ pour réaliser l'inverse).

- La moyenne $\sum x_i P(X = x_i)$ est remplacée par $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx = E(X)$

Variable aléatoire continue

Attention ! Une variable aléatoire non discrète ne veut pas dire variable aléatoire continue !
X est une variable aléatoire continue s'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que

$$\forall B \subset \mathbb{R}, P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

Cette fonction respecte deux propriétés :

- $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$ (s'assurer que les probabilités ne dépassent par 1)
- $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ (s'assurer que les probabilités ne soient pas négatives)

La fonction $f(x)$ peut dépasser 1 car ce n'est pas une probabilité, toutefois une densité doit respecter cette condition.

Exemples

- Loi uniforme sur $[a, b]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Loi exponentielle

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ ce^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- Loi Gaussienne / Loi normale

$f(x) = ce^{-x^2}$

Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire, on appelle fonction de répartition, notée F_X, définie par

$$\forall a \in \mathbb{R}, F_X(a) = P(X \leq a)$$

Propriétés de F_X :

- F_X est croissante ($f_X \geq 0$)
- $\lim_{a \to -\infty} F_X(a) = 0$ ($P(X \leq -\infty) = 0$)
- $\lim_{a \to +\infty} F_X(a) = 1$ ($P(X \leq +\infty) = 1$)
- F_X est continue (dérivable, P(X = x) =0)
- $P(a \leq X \leq B) = F(b) - F(a)$

Lien entre F_X et f_X

- f_X est la dérivée de F_X
- F_X est la primitive de f_X telle que $\lim\limits_{+\infty} F_X = 1$

Exemple

Soit X une variable continue telle que $f_X(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Trouver la densité de $Y = \sqrt{|X|}$

Méthode : Passer par la fonction de répartition

1. Trouver le support de Y
2. Écrire l'évènement $\{Y \leq a\}$ en termes de X
3. Calculer la fonction de répartition $F_Y(a)$
4. En déduire en dérivant f_Y

1. $Y(\Omega) = [0,1]$

2. On a :
- Si $a \leq 0$, alors $\{Y \leq a\}$ est impossible.
- Si $a \geq 1$, alors $\{Y \leq a\}$ est certain.
- Si $a \in [0,1]$, $Y \leq a \Leftrightarrow \sqrt{|X|} \leq a \Leftrightarrow -a^2 \leq X \leq a^2$

3. On a :

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 0 \\ \int_{-a^2}^{+a^2} f_X(x)dx & \text{si } a \in [0,1] \\ 1 & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

Or, $\int_{-a^2}^{+a^2} (1-|x|)dx = 2\int_0^{a^2}(1-x)dx = 2a^2 - a^4 = a^2(2-a^2)$. Donc :

$$F_Y(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a \leq 0 \\ a^2(2-a^2) & \text{si } a \in [0,1] \\ 1 & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

4. Donc $f_Y(a) = \begin{cases} 0 \text{ si } a \notin [0,1] \\ 4(a-a^3) \end{cases}$

4.2 Couples de variables aléatoires continues

Fonction de répartition conjointe

Soient X et Y deux variables aléatoires quelconques. Le fonction de répartition conjointe $F_{X,X} = \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

$$F_{X,X}(a,b) = P(X \leq a, Y \leq b)$$

Cet objet contient toute information dont nous avons besoin sur X et Y.
- $F_X(x) = \lim\limits_{b\to+\infty} F_{X,Y}(x,b)$
- $P(X > a, Y > b) = 1 - P(\{X \leq a\} \cup \{Y \leq b\}) = 1 - P(X \leq a) - P(Y \leq b) + P(X \leq a, Y \leq B) = 1 - F_X(a) - F_X(b) + F_{X,Y}(a,b)$

Variables conjointement continues

On dit que X et Y sont conjointement continues s'il existe $f_{X,X} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que
- $f_{XY} \geq 0$
- $\forall E, F \subset \mathbb{R}, P(X \in E, Y \in F) = \int_E \int_F f_{X,X}(x,y)dydx$

Proposition

(X,Y) conjointement continues $\Rightarrow X$ est continue et Y est continue
La réciproque est fausse.

Variables indépendantes

X et Y sont indépendantes si

$$\underbrace{F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y)}_{\text{Pour tout type de variables}} \Leftrightarrow f_{X,Y} = f_X(x)f_Y(y)$$

On va utiliser plus souvent en pratique la définition suivante :

$$\forall B, B', P(X \in B, Y \in B') = P(X \in B) \times P(Y \in B)$$

Exemple

Un enfant fait tomber un ballon balle dans un mare parfaitement circulaire de rayon R. Ce ballon flotte sur la surface de la mare et bouge au gré des aléas météorologiques (pluie, vent). Calculer la densité de probabilité de X.

- **En utilisant les coordonnées cartésiennes**

On note (x,y) la position du ballon sur la mare et X et Y les variables aléatoires associées. X et Y sont conjointement continues et l'on a

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} \text{ si } x^2 + y^2 \leq R^2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Densité de probabilité de X :

$$f_x(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = \int_{-R}^{R} \frac{1}{\pi R^2}dy = \frac{2}{\pi R} = f_Y(y)$$

$f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$ donc les variables X et Y ne sont pas indépendantes

- **En utilisant les coordonnées polaires**

On a :

$$f_{D,\theta}(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi R^2} \text{ si } r \leq R \\ 0 \text{ si } r > R \end{cases}$$

[EXEMPLE À RÉFLÉCHIR...]

4.3 Lois usuelles

Loi uniforme

Si $X \sim \mathcal{U}([a,b])$, alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$ et $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Loi exponentielle

On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Sa densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ et $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

On a la proposition suivante : X est sans mémoire $\Leftrightarrow X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.
"Sans mémoire" : ce qui se passe dans le futur est indépendant de ce qu'il se passe dans le passé, la trajectoire future ne dépend que du présent.

$$\forall t, x \in \mathbb{R}, P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$$

Loi normale (ou loi Gaussienne)

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Sa densité est donnée par la formule suivante (pas à connaître par cœur) :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où μ est la moyenne et σ est l'écart-type.

Théorème central limite : X_i suit une loi de probabilités quelconque telle que $E(X_i) = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$; alors $\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} \underset{+\infty}{\rightarrow} \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

<u>En pratique</u> : Avec la loi normale, on ne peut pas trouver des valeurs exactes. On va donc toujours se ramener à $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ centrée-réduite.
Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on pose $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$. [SCHÉMAS DES GAUSSIENNES À REFAIRE]
Puis on écrit toutes les probabilités en fonction de $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_Z(x)dx$ (fonction de répartition centrée-réduite).

Exemple

Soit $X \sim \mathcal{N}(6, 4)$. Calculer $P(|X - 4| \leq 3 | X \geq 2)$.

On commence par poser $Z = \frac{X-6}{2}$. Z suit alors une loi normale centrée réduite.

De plus, on a

$$|X - 4| < 3 \Leftrightarrow -3 < X - 4 < 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{2} < Z < \frac{1}{2}$$

et aussi

$$X \geq 2 \Leftrightarrow Z \geq -2$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
P(|X-4|<3|X\geq 2) &= P(-\frac{5}{2}<Z<\frac{1}{2}|Z\geq -2)\\
&= \frac{P(\{-\frac{5}{2}<Z<\frac{1}{2}\}\cap\{Z\geq -2\}}{P(Z\geq -2)}\\
&= \frac{P(\{-2<Z<\frac{1}{2}\})}{P(Z\geq -2)}\\
&= \frac{\Phi(\frac{1}{2})-\Phi(-2)}{1-\Phi(-2)}\\
&= \frac{\Phi(\frac{1}{2})+\Phi(2)-1}{\Phi(2)}
\end{aligned}$$

En utilisant la table des valeurs de la fonction Φ, on trouve :

$$P(|X-4|<3|X\geq 2)\approx \frac{0.69146+0.97725-1}{0.97725}\approx 0.68428$$