MODELISATION MATHEMATIQUE

L2-SM401 2e Semestre 2021-2022

Formulaire /Résumé de Cours

d.g

1. Equations non linéaires

<u>Méthode de la dichotomie</u>

Recherche de solutions de l'équation $f(x) = 0$, connaissant un encadrement initial :

- initialisation par $[x_0, x_1]$ contenant un zéro simple, puis
- répéter:

  $x_{n+1} \leftarrow \dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}$,

  si $f(x_n)f(x_{n+1}) \leqslant 0$

  faire $x_{n-1} \leftarrow x_{n+1}$

  sinon

  faire $x_n \leftarrow x_{n+1}$
- jusqu'à $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

<u>Méthode de Newton-Raphson</u>

Recherche de solutions de l'équation $f(x) = 0$, connaissant une estimation initiale :

- initialisation par x_0 approximation d'un zéro simple, puis :
- itérer

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

- jusqu'à $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$.

<u>Méthode de Newton à 2 variables</u>

Recherche de solutions de l'équation $F(x, y) = 0$, où $F(x, y) = [(f(x, y), g(x, y)] \in \mathbb{R}^2$, connaissant une estimation initiale :

- initialisation par (x_0, y_0) approximation d'un zéro simple, puis :
- itérer

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} - (DF^{-1})_{(x_n,y_n)} \cdot \begin{pmatrix} f(x_n, y_n) \\ g(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

- jusqu'à $\max(|x_{n+1} - x_n| , |y_{n+1} - y_n|) < \varepsilon$.

2. Equations différentielles ordinaires (e.d.o)

• *SCHEMAS EXPLICITES*

Un schéma à 1 pas explicite est la donnée d'une suite récurrente à 1 pas :

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h_n\phi(t_n, y_n, h_n) \\ y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

approximant la solution $y(t)$ de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \ t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0 \ \text{"condition initiale"} \end{cases}$$

où $h_n = t_{n+1} - t_n$ est le pas à l'étape n , l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$ ayant été discrétisé à l'aide des $N + 1$ points $t_0, t_1, ...t_N = t_0 + T$
et où
$\phi : [t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application "méthode associée au schéma".
On a donc $y_n \approx y(t_n), \forall n = 0$ à N.

Dans la pratique on utilise souvent une discrétisation régulière et on note $h_n = h = \dfrac{T}{N}$

• QUELQUES *SCHEMAS A 1 PAS EXPLICITES CLASSIQUES*

Schéma d'Euler (explicite)

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n) \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Schéma de Heun ("trapèze amélioré")

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n, y_n)) \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$

Schéma point milieu ("Euler amélioré")

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h[f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n))] \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$

• SCHEMAS IMPLICITES

Si y_{n+1} est présent au 2e membre on dit que le schéma est implicite.
Il faut alors à chaque étape résoudre une équation implicite pour calculer y_{n+1}.

Schéma d'Euler implicite

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1}) \\ y_0 \ \text{ donné} \end{cases}$$

Schéma des trapézes implicite ("Crank-Nicolson")

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n, y_n) + f(t_{n+1}, y_{n+1}))] \\ y_0 \text{ donné} \end{cases}$$

3. Erreurs Numériques

Propagation des erreurs

Si x est une valeur numérique et $\widetilde{x}$ une approximation de x, on pose $x = \widetilde{x} + e_x$.

Alors e_x est l'erreur absolue sur x et $\dfrac{e_x}{\widetilde{x}}$ est l'erreur relative sur x.

On a les relations suivantes (qui permettent de suivre la propagation des erreurs lors du calcul d'une expression utilisant les opérateurs arithmétiques, connaissant l'erreur initiale sur les données) :

$$
\begin{aligned}
e_{x+y} &= e_x + e_y \\
e_{x-y} &= e_x - e_y \\
e_{xy} &= e_x\widetilde{y} + e_y\widetilde{x} \\
e_{\frac{x}{y}} &= \frac{e_x\widetilde{y} - e_y\widetilde{x}}{\widetilde{y}^2} \\
e_{x^n} &= n\widetilde{x}^{n-1}e_x
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\frac{e_{x+y}}{\widetilde{x+y}} &= \frac{e_x}{\widetilde{x}}\frac{\widetilde{x}}{\widetilde{x+y}} + \frac{e_y}{\widetilde{y}}\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x+y}} \\
\frac{e_{x-y}}{\widetilde{x-y}} &= \frac{e_x}{\widetilde{x}}\frac{\widetilde{x}}{\widetilde{x-y}} - \frac{e_y}{\widetilde{y}}\frac{\widetilde{y}}{\widetilde{x-y}} \\
\frac{e_{xy}}{\widetilde{xy}} &= \frac{e_x}{\widetilde{x}} + \frac{e_y}{\widetilde{y}} \\
\frac{e_{\frac{x}{y}}}{\widetilde{\left(\frac{x}{y}\right)}} &= \frac{e_x}{\widetilde{x}} - \frac{e_y}{\widetilde{y}} \\
\frac{e_{x^n}}{\widetilde{(x^n)}} &= n\frac{e_x}{\widetilde{x}}
\end{aligned}
$$

Formules mal conditionnées, erreur de cancellation

■ Si $\varepsilon << x$, la quantité $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+\varepsilon}$ sera évaluée à 0 par l'arithmétique de la machine ("erreur de troncature").

Il faut donc plutôt l'écrire $\dfrac{\varepsilon}{x(x+\varepsilon)}$ qui même pour ε très petit sera non nul.

■ Même phénomène avec $\sqrt{x^2+\varepsilon} - x$ qui doit être remplacé par $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{x^2+\varepsilon}+x}$ (obtenu en multipliant numérateur et dénominateur par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2+\varepsilon}+x$)

■ Résolution de l'équation du 2e degré $ax^2 + bx + c = 0$, avec $4ac << b^2$:

Les formules classiques donnent :
$x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
$x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,
avec $\sqrt{b^2 - 4ac}$ évalué à b (erreur de troncature).

Ainsi :
▶ si $b > 0$, x_1 est évalué à 0
▶ si $b < 0$, x_2 est évalué à 0.

Il faut donc plutôt calculer :
▶ si $b < 0$, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ puis $x_2 = \dfrac{c}{a}\dfrac{1}{x_1}$
▶ si $b > 0$, $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ puis $x_1 = \dfrac{c}{a}\dfrac{1}{x_2}$

4. Interpolation polynômiale

Base de Lagrange

Si $(x_0, x_1, ...x_n)$ sont $n+1$ abscisses toutes distinctes, la famille des $(n+1)$ polynômes (tous de degrés n) :

$$l_k(x) = \frac{\prod\limits_{i \neq k, i=0}^{n} (x - x_i)}{\prod\limits_{i \neq k, i=0}^{n} (x_k - x_i)}, \ k = 0 \text{ à } n,$$

est la base "de Lagrange associée aux abscisses $x_0, x_1, ...x_n$ " de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_{n+1}$ des polynômes de degré $\leq n$.

Alors, si $(y_0, y_1, ...y_n)$ sont $n+1$ ordonnées, $P(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + ... + y_n l_n(x)$ est l'unique polynôme passant par les $n+1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ...(x_n, y_n)$.

Polynôme d'interpolation d'une fonction

En particulier si f est une fonction définie sur $[a, b]$ et les $x_i \in [a, b]$,$\forall i = 0$ à n, il existe un unique polynôme P de degre $\leq n$ vérifiant $P(x_i) = f(x_i)$,$\forall i = 0$ à n, "polynôme d'interpolation de f, aux abscisses $(x_0, x_1, ...x_n)$"

Base de Newton

Si $(x_0, x_1, ...x_n)$ sont $n+1$ abscisses toutes distinctes, les $(n+1)$ polynômes :

$$1, \ x - x_0, \ (x - x_0)(x - x_1) \ , (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2), ..., (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

sont une base "de Newton" de l'espace vectoriel $\mathcal{P}_{n+1}$, des polynômes de degré $\leq n$.

On en déduit la méthode algorithmique des différences divisées, de calcul du polynôme d'interpolation passant par les $n+1$ points $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ...(x_n, y_n)$.

Erreur d'interpolation polynomiale

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a, b])$ et P son polynôme d'interpolation aux abscisses $(x_0, x_1, ...x_n)$, alors l'erreur $E(x) = f(x) - P(x)$ commise en x en approximant f par P est donnée par :

$$E(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n) \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}$$

où ξ est un point dans le plus petit intervalle fermé contenant $x_0, x_1, ...x_n$ et x.

Cas des abscisses équidistantes : majoration de l'erreur d'interpolation polynomiale

Avec les notations précédentes, et si $\forall i = 0$ à $n-1$, $x_{i+1} - x_i = \dfrac{b-a}{n} = h$, alors :

$$|E(x)| \leqslant \frac{h^{n+1}}{4(n+1)} \max_{a \leqslant \xi \leqslant b} \left| f^{(n+1)}(\xi) \right|, \forall x \in [a, b].$$

Abscisses de Tchebychev de meilleure interpolation sur $[a, b]$

Ce sont les points

$$x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}, \ k = 0 \text{ à } n.$$

En particulier pour $[a, b] = [-1, +1]$, ce sont les zéros du polynôme T_{n+1} défini par :

$$T_{n+1}(x) = \cos[(n+1) Arc \cos(x)] \quad , \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

"polynôme de Tchebychev de degré $n+1$"