

Fiche de Révision - Probabilités

1. Fonction de densité

Fonction de densité

Une **fonction de densité** $f(x)$ pour une variable aléatoire continue X est définie par :

- $f(x) \geq 0$ pour tout x ,
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = P(X \in \mathbb{R}) = 1$.

La probabilité que X appartienne à $[a, b]$ est donnée par :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. Fonction de répartition

Fonction de répartition

La **fonction de répartition** $F(x)$ est donnée par :

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Propriétés :

- $F(x)$ est croissante,
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$,
- $F(x)$ est continue pour une variable aléatoire continue.
- $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$.

3. Probabilité pour une valeur spécifique

Valeur spécifique

Pour une variable aléatoire continue, $P(X = a) = 0$.

4. Indépendance de deux variables aléatoires

Indépendance de variables

Deux variables X et Y sont indépendantes si :

- $P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$,
- $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$,
- X et Y indépendantes $\implies \text{Cov}(X, Y) = 0$.
- $\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \implies X$ et Y ne sont pas indépendantes.

5. Incompatibilité de deux événements

Incompatibilité

Deux événements A et B sont incompatibles si :

$$A \cap B = \emptyset.$$

6. Espérance, variance, écart type

Espérance

Espérance :

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xP(X = x), & \text{discrète}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx, & \text{continue}. \end{cases}$$

Variance : $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. **Écart type :** $\sigma_X = \sqrt{Var(X)}$.

7. Propriétés de l'espérance et de la variance

Propriétés de l'espérance et de la variance

- $E(aX + b) = aE(X) + b,$
- $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y).$
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X),$
- Si X et Y sont indépendantes : $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y).$

8. Covariance et corrélation

Covariance et corrélation

Covariance :

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Corrélation :

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

La covariance est une application symétrique et bilinéaire.

9. Probabilité conditionnelle

Probabilité conditionnelle

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad \text{si } P(B) > 0.$$

10. Min et Max de deux variables

Min et Max de deux variables

- $P(\min(X, Y) \leq a) = 1 - P(X > a)P(Y > a),$
- $P(\max(X, Y) \leq a) = P(X \leq a)P(Y \leq a).$

12. Combinaison de lois normales

Combinaison de lois normales

$X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et considérons $Z = aX + bY$ avec $a, b \in \mathbb{R}$:

- Si X et Y indépendantes, alors

$$Z \sim \mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2).$$

- Si X et Y non-indépendantes, alors

$$Z \sim \mathcal{N}(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2 + 2ab\text{Cov}(X, Y)).$$

13. Somme de deux binomiales

Somme de deux binomiales

Si $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$, alors :

$$X + Y \sim B(n + m, p).$$

14. Relation entre indépendance et covariance

Indépendance et covariance

X et Y indépendantes $\implies \text{Cov}(X, Y) = 0$.

$\text{Cov}(X, Y) = 0 \implies X$ et Y **pas nécessairement indépendantes**.

$\text{Cov}(X, Y) \neq 0 \implies X$ et Y **non indépendantes** (contraposée).

15. Fonction paire et espérance

Fonction paire et espérance

Fonction paire : $f(-x) = f(x)$.

16. Probabilité par symétrie

Probabilité par symétrie

Espérance d'une densité paire :

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x) dx. = 0$$

17. Formules importantes

Formules importantes

Formule de Bayes :

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}.$$

Formule des probabilités totales :

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

18. Primitives et dérivées usuelles

Primitives et dérivées usuelles

Dérivées usuelles :

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour $n \neq 0$.
2. $(e^x)' = e^x$.
3. $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ pour $x > 0$.
4. $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$.
5. $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

Primitives usuelles :

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ pour $n \neq -1$.
2. $\int e^x dx = e^x + C$.
3. $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$ pour $x > 0$.
4. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$, $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$.
5. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$.

19. Intégration par parties

Intégration par parties

$$\int u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)] - \int u(x)v'(x) dx.$$

20. Loi de Poisson pour une approximation binomiale

Loi de Poisson et binomiale

La loi de Poisson est particulièrement adaptée pour modéliser des événements rares dans de grandes populations, ce qui correspond aux conditions suivantes :

- Les événements se produisent de manière indépendante.
- Le nombre d'événements dans un intervalle de temps donné suit une distribution discrète.
- L'intensité des événements est constante au fil du temps.

Approximation valide si $n \geq 30$, $p \leq 0.1$ et $np < 15$.

21. Formule de De Morgan

Formule de De Morgan

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

22. Système complet d'événements

Système complet d'événements

Un système complet d'événements est un ensemble d'événements $\{B_i\}$ tels que :

- $B_i \cap B_j = \emptyset$ si $i \neq j$ (mutuellement exclusifs),
- $\bigcup_i B_i = \Omega$ (exhaustifs).

23. Formule des probabilités totales

Formule des probabilités totales

Si $\{B_i\}$ est un système complet d'événements, alors :

$$P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

24. Formule de Bayes

Formule de Bayes

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)P(B)}{P(A)} \quad \text{où } P(A) = \sum_i P(A|B_i)P(B_i).$$

25. $P(A \cup B)$ si A et B sont incompatibles

$P(A \cup B)$ incompatibles

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (\text{si } A \cap B = \emptyset).$$

26. $P(A \cup B)$ si A et B sont indépendants

$P(A \cup B)$ indépendants

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

27. $P(A \cap B)$ si A et B sont incompatibles

$P(A \cap B)$ incompatibles

$$P(A \cap B) = 0 \quad (\text{si } A \cap B = \emptyset).$$

28. $P(A \cap B)$ si A et B sont indépendants

$P(A \cap B)$ indépendants

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

29. Différence entre lois binomiale et binomiale négative

Loi binomiale vs binomiale négative

- **Loi binomiale** : Nombre de succès dans n essais indépendants avec probabilité p de succès à chaque essai.
- **Loi binomiale négative** : Nombre d'essais nécessaires pour obtenir r succès.

Utilisation :

- Loi binomiale : n fixé, succès aléatoires.
- Loi binomiale négative : Succès fixes, essais aléatoires.

30. Lois usuelles discrètes et continues

Lois discrètes et continues

Lois discrètes :

- **Uniforme discrète** : Probabilités égales pour $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.
- **Binomiale** : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.
- **Poisson** : $P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$.

Lois continues :

- **Uniforme continue** : $f(x) = \frac{1}{b-a}$ pour $x \in [a, b]$.
- **Exponentielle** : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$.
- **Normale** : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.