Listado General de Fórmulas Matemáticas

Emiliano Gutiérrez Luengas

Octubre 2022

1 Vectores

a $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n)$

Propiedad Distributiva de la multiplicación: Propiedad que explica que un vector $\vec{V} \in R^n$ multiplicado por un escalar λ es igual a cada componente del vector ultiplicado por el escalar. En pocas palabras, el escalar es multiplicado por cada elemento que compone al vector.

a $(\lambda_1, \lambda_2) = \lambda_1(1, 0) + \lambda_2(0, 1)$ tal que $\lambda_1, \lambda_2 \in R^2$
$\Rightarrow (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i \Leftrightarrow (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i = 0$
tal que $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in R$

Combinación lineal de un vector en R^n: Descomposición de un vector en R^n en n vectores unitarios, multiplicados cada uno por un λ, así generalizando la forma de un vector en R^n.

a Sean $\vec{v}, \vec{u}$ vectores en R^n, entonces $\vec{v} \cdot \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} v_i u_i$

Producto punto: Operación dada entre vectores en R^n tal que el resultado de dicha da un escalar. La operación en cuestión es "entrada por entrada", sumando el resultado del producto. En otras palabras, se multiplican los elementos correspondientes y luego se suman los resultados.

a Sean $\vec{v}, \vec{u}$ vectores en R^3, entonces $\vec{v} \times \vec{u} = [(v_y u_z - v_z u_y)\hat{i} - (v_x u_z - v_z u_x)\hat{j} + (v_x u_y - v_y u_x)\hat{k}]$

Producto cruz: Operación entre vectores en R^3 cuyo fin es producir otro vector. Se utiliza el método de cofactores para obtener tres determinantes de 2x2, que son multiplicadas por los vectores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$. En pocas palabras, es una multiplicacion entre escalares y vectores unitarios.

a Sean $\vec{v}, \vec{u}, \vec{r}$ vectores en R^3, entonces $\vec{r} \cdot (\vec{v} \times \vec{u}) = (r_x \cdot (\vec{v} \times \vec{u})_x) + (r_y \cdot (\vec{v} \times \vec{v})_y) + (r_z \cdot (\vec{v} \times \vec{u})_z)$

Triple producto escalar: operación entre tres vectores, cuya finalidad es obtener un escalar. Primeramente, para poder realizar el producto punto (ya que este sólo se puede realizar entre vectores), se realiza el producto cruz con los primeros vectores $\vec{u}, \vec{v}$. Una vez realizado, se multiplica cada componente del vector $v \vec{\times} u$ por la componente correspondiente de $\vec{r}$, para luego sumar los resultados.

2 Matrices

b Sean $A, B \in M_{nxm}$, entonces $A + B = a_i j + b_i j$

Suma entre dos matrices: La suma entre matrices puede ser definida como la suma "entrada por entrada", denotada generalmente como $a_i j$. Como la suma entre elementos es exclusiva para los elementos que comparten la misma columna y el mismo renglón, no es posible realizar sumas entre matrices que no tengan la misma cantidad de renglones y columnas.

b Sean $A \in M_{nxm}, B \in M_{mxr}$, entonces $AB = \sum_{k}^{m} a_{ik} b_{kj}$, donde $AB \in M_{nxr}$

Multiplicación entre dos matrices: La multiplicaci"on entre matrices puede ser definida como la suma de la multiplicación "entrada por entrada" del renglón de la primera por la columna de la segunda. En pocas palabras, se multiplica el elemento del renglón con el elemento de la columna correspondiente, para luego sumar el resultado. Por ejemplo $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} ... a_{1m}b_{m1}$. Una vez completada la suma, se realiza la misma operación, pero con la siguiente columna de la segunda matriz, hasta haber realizado la operación con todas las columnas. Seguido de esto, se realiza la misma operación, pero ahora con el segundo renglón de la primera, hasta haber multiplicado cada columna de la segunda por cada renglón de la primera.

Nota: El producto entre matrices no es conmutativo.

b Sea $A \in M_{nxn}$, entonces $AB = BA$ tal que $B = Idnxn$

Matriz Identidad: La matriz identidad puede ser visualizada como el neutro multiplicativo de las matrices cuadradas. Al ser multiplicada por otra matriz, independiente del orden, dará como resultado la matriz original. En otras palabras, el producto de una matriz cuadrada por la matriz identidad es conmutativo y su resultado es la matriz cuadrada inicial.

b Sea $A \in M_{3x3}$, entonces $|A| = \sum_{ijk}^{3} \epsilon_{ijk}\ a_{1i}a_{2j}a_{3k}$

Determinante de una matriz de 3x3: Operación en la cual se multiplican las entradas de la diagonal, sumados a la multiplicación de la diagonal inferior y así sucesivamente, restados por la suma de los productos de las "anti-diagonales".

Nota: La determinante es un valor que define a las matrices cuadradas y tiene varias funciones, tales como obtener la inversa de una función al multiplicar este por la matriz adjacente de la original (debe de ser una matriz cuadrada para que sea posible la operación).

b Sea $A \in M_{nxn}$, entonces $AA^{-1} = A^{-1}A = \frac{1}{|A|}(adjA) \cdot A = Idnxn$

Inverso multiplicativo: Matriz producto de la multiplicación de la adjacente de una matriz cuadrada por uno sobre la determinante de esta. Cuando es multiplicada por la matriz original, los elementos se cancelan y dan como resultado a la matriz identidad.

Nota: Esta operación es conmutativa, ya que al final produce la misma matriz, siendo esta la identidad.

3 Conjuntos

c $C = A \cup B = \{x|x \in A \vee x \in B\}$

Unión: La unión entre dos conjuntos A y B puede ser visto como un nuevo conjunto "C" que contiene todos los elementos de los conjuntos A y B. Los elementos repetidos no se tomarán en cuenta más de una vez, por lo que cada elemento es único con respecto a sus congéneres.

c $D = A \cap B = \{x|x \in A \wedge x \in B\}$

Intersección: La intersección entre dos conjuntos A y B puede ser visto como un nuevo conjunto "D" que contiene solamente los elementos que comparten A y B. Elementos que sólo sean contenidos por uno de los conjuntos son descartados, por lo que si los conjuntos no compartieran ningún elemento, su intersección sería el vacío.

c $A^c = \{x|x \notin A\} \Leftrightarrow U - A$

Conjunto complemento: El complemento de un conjunto A es descrito como todos los elementos 'x', tal que estos elementos no pertenezcan al conjunto A. En otras palabras, es un nuevo conjunto, denominado A^c, el cual contiene todos los elementos del Universo, a excepción de los elementos contenidos en A. Otra forma de verlo es el universo menos A.

c $(A \cup B)^c = (A^c \cap B^c)$

Ley de Morgan: Para este caso específico de las leyes de Morgan, se explica que el componente del conjunto "C", donde C es el conjunto formado por la unión de A y B, es lo mismo a la intersección de los conjuntos componente de A y B.

c $(AXB) = \{x, y|x \in A, y \in B\}$

Producto cartesiano: El producto cartesiano de conjuntos es la descripción multidimensional de varios conjuntos, donde cada uno maneja una variable diferente y, ergo, cada variable existe en una dimension diferente. Por ejemplo, el conjunto A trabaja con los valores en la recta X, mientras que B trabaja con los valores en la recta Y. Por lo tanto, no se puede operar directamente entre 'x' y 'y'.

4 Divisibilidad y Congruencia

d Sea $m|a-b$, entonces $a \equiv b(modm)$

Congruencia de dos valores en módulo m: Dos valores son congruentes en módulo m si la resta de uno por el otro es divisible por m. Esto significa que comparten el mismo valor absoluto, en el caso específico de ese módulo.

d Sea $a \equiv b$ y $a-c \equiv b-d(modm)$, entonces $c \equiv d(modm)$

Siendo a y b congruentes en módulo m, se puede afirmar que si ambos valores son restados por un número fijo pero arbitrario, entonces seguirán siendo congruentes. De igual forma, si este valor arbitrario y fijo es congruente con un segundo elemento de igual caracter arbitrario y fijo en módulo m, entonces la resta con respecto a los elementos citados con anterioridad seguirá siendo congruente.

d Sea p primo, entonces $a^p \equiv a(modp)$ y $a^{p-1} \equiv 1(modp)$

Pequeño teorema de Fermat: El teorema establece que para un número primo 'p' cualquiera, si un número es elevado a dicho, ser'a congruente consigo mismo en módulo p. De igual forma, si el número es elevado al primo menos uno, entonces el número será congruente con 1. En otras palabras, un número elevado a p, menos si mismo elevado a 1 es divisible por p. Igualmente, ese número elevado a p-1 menos 1 es divisible por p.

d Sean $(a,b)=1$, entonces $ax+by=1$

Máximo Común Divisor: Número cuya característica es que es el mayor número que puede dividir a dos números arbitrarios, a y b, sin dejar un residuo o, en otras palabras, dar como resultado un número perteneciente a los racionales. La forma que adopta es la de a, multiplicado por un valor 'x', más b, multiplicado por un valor 'y', deben de dar como resultado 1.

d Sean $(a, b) = a \Leftrightarrow a|b$

Divisibilidad de un número por otro: Se puede afirmar que si a es un divisor de b, sin que la operación produzca un residuo, entonces el máximo común divisor entre ambos valores será el menor. De igual forma, el mayor número que puede dividir a ambos sin dejar un residuo es el valor menor entre los dos. Esto es igual a decir que, siendo a menor a b, se tiene que a por un valor k dará como resultado a b.

5 Dinámica y Cinemática

e $\vec{F} = m\vec{a}$

Segunda ley de Newton: Ley establecida por Isaac Newton que establece una relación entre la fuerza ejercida por un objeto con la masa y la aceleración de este. Al tratarse del producto de un escalar por un vector, la fuerza adoptará solamente la magnitud y sentido de la aceleración.

e $\vec{p} = m\vec{v}$

Momento: El momento es el producto de una operación entre escalar y vector, siendo estas la masa y la velocidad, respectivamente. La magnitud y el sentido del momento son heredados de la velocidad, ya que la masa no es un vector.

e $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{v}$

Derivada del desplazamiento: La primera derivada del desplazamiento con respecto al tiempo. Determina cuánto tiempo tarda un objeto en recorrer una distancia, siendo esto a su vez definido como la velocidad del objeto en cuestión. También es posible definirla como el radio de cambio de la distancia recorrida, por unidad de tiempo. Como el tiempo es un escalar, la velocidad hereda su magnitud y sentido del desplazamiento.

e $\frac{d}{dt}(\frac{dx}{dt}) = \frac{d^2x}{dt^2} = a$

Segunda derivada del desplazamiento: La segunda derivada del desplazamiento con respecto al tiempo. Determina cuánto tiempo tarda un objeto en cambiar su velocidad, siendo a su vez definido esto como la aceleración del objeto en cuestión. Igualmente, es posible definirlo como el radio de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. Al tratarse el tiempo de un escalar, la aceleración hereda su magnitud y sentido de la velocidad.

e $(x - x_0) = \frac{a(t)^2}{2} + v_0(t)$

Desplazamiento de un objeto en aceleración: Fórmula para el desplazamiento de un objeto acelerado, normalmente usada para hallar el desplazamiento de un objeto en caída libre, o que recorre una distancia de caracter parabólico. Suele considerarse principalmente a la aceleración ocasionada por la gravedad, mas es posible usarla para objetos artificialmente acelerados, pero requiere considerar la perdida de masa u otros elementos (caso particular de un cohete o un sistema de propulsión que utilice gasolina u otro elemento que produzca una reacción exotérmica).