

Programa del curso MA-2104  
Cálculo Superior

**Escuela a cargo del curso:** Matemática.

Carreras a las que pertenece el curso:

- **Grupo A:** Licenciatura en Ingeniería Electrónica, Licenciatura en Ingeniería Mecatrónica, Licenciatura Ingeniería en Computadores.
- **Grupo B:** Licenciatura en Ingeniería Ambiental, Licenciatura en Ingeniería en Construcción, Licenciatura en Ingeniería en Producción Industrial, Licenciatura en Mantenimiento Industrial.
- **Grupo C:** Licenciatura en Ingeniería Física.

## I parte: Aspectos relativos al plan de estudios

### 1 Datos generales

**Nombre del curso:** Cálculo Superior

**Código:** MA-2104

**Tipo de curso:** Teórico

**Electivo o no:** No

**N° de créditos:** 4

**N° horas de clase por semana:** 4

**N° horas extraclase por semana:** 8

**% de las áreas curriculares:** No aplica

**Ubicación en el plan de estudios:** Tercer semestre (grupo A), cuarto semestre (grupo B) y quinto semestre (grupo C)

**Requisitos:** MA-1103

**Correquisitos:** No tiene

**El curso es requisito de:** Ninguno

**Asistencia:** Libre

**Suficiencia:** Sí

**Posibilidad de reconocimiento:** Sí

**Vigencia del programa:** I semestre del 2025

## 2 Descripción general

El curso Cálculo Superior es el cuarto de la secuencia de cursos diseñados para brindar la formación matemática de las carreras de ingeniería que imparte el Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Es un curso teórico-práctico y en él se pretende dar una visión sobre el cálculo en varias variables. En la parte gráfica se hace un análisis de las secciones cónicas, la graficación de superficies y sólidos, el análisis y graficación del dominio de funciones en dos variables.

Luego, se trabaja con el cálculo diferencial y algunas de sus aplicaciones (plano y recta tangente, derivada direccional y optimización). En la parte de integración se aborda el cálculo de áreas y volúmenes. Y, finalmente, se introduce el cálculo vectorial con los temas de integral de línea, integral de superficie y algunas de sus aplicaciones.

## 3 Objetivos

### Generales:

1. Lograr que el estudiante adquiriera conceptos del Cálculo Diferencial e Integral de funciones en varias variables.
2. Lograr que el estudiante domine las técnicas fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral, en varias variables.
3. Lograr que el estudiante domine las técnicas fundamentales del cálculo vectorial.
4. Lograr que el estudiante adquiriera destrezas y habilidades en la resolución de ejercicios y problemas.
5. Fomentar en el estudiante una actitud crítica y creativa.
6. Lograr que el estudiante analice, interprete, explique, modele y resuelva problemas usando conceptos del Cálculo Diferencial e Integral en varias variables.
7. Lograr que el estudiante comprenda modelos matemáticos que respondan a problemas vinculados a la ciencia y la tecnología.
8. Fomentar en el estudiante el interés por la obtención de nuevos conocimientos.

### Específicos por tema:

1. Secciones cónicas:
  - 1.1) Comprender el concepto de lugar geométrico del plano.
  - 1.2) Dada la ecuación general  $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$ , identificar y graficar la sección cónica que representa.
2. Cálculo diferencial de funciones de varias variables.
  - 2.1) Conocer y comprender el concepto de función de varias variables.

- 2.2) Reconocer las ecuaciones de las superficies cilíndricas, de revolución y graficar dichas superficies.
  - 2.3) Reconocer las ecuaciones de las superficies cuádricas, identificar al tipo de superficie que corresponde y graficarla usando curvas de nivel y trazas sobre los planos coordenados.
  - 2.4) Graficar superficies de la forma  $Ax + By + Cz + D = 0$  usando curvas de nivel y trazos sobre los planos coordenados.
  - 2.5) Representar sólidos limitados por superficies.
  - 2.6) Conocer y comprender el concepto de derivadas parciales de funciones de varias variables.
  - 2.7) Calcular las derivadas parciales, de primer orden u orden superior, de funciones de varias variables, usando los teoremas correspondientes.
  - 2.8) Calcular las derivadas parciales en la resolución de problemas sobre rectas tangentes, plano tangente y recta normal a una superficie.
  - 2.9) Aplicar el concepto de derivadas parciales en la resolución de problemas sobre rectas tangentes, plano tangente y recta normal a una superficie.
  - 2.10) Aplicar la regla de la cadena para calcular las derivadas parciales de funciones compuestas.
  - 2.11) Aplicar el concepto de derivadas parciales en problemas que involucren razones de cambio.
  - 2.12) Determinar el gradiente y la derivada direccional.
  - 2.13) Determinar la máxima razón de cambio de funciones de varias variables.
  - 2.14) Determinar los máximos y los mínimos de una función de dos variables utilizando el criterio de las segundas derivadas.
  - 2.15) Determine los máximos y mínimos de funciones de varias variables sujetas a condiciones, utilizando multiplicadores de Lagrange.
  - 2.16) Resolver problemas que involucren los conceptos de máximos y mínimos de funciones de varias variables.
3. Integrales Dobles y Triples
    - 3.1) Calcular integrales dobles con coordenadas rectangulares por medio de integración iterada.
    - 3.2) Calcular áreas y volúmenes de regiones de sólidos mediante integrales dobles.
    - 3.3) Calcular integrales dobles en coordenadas polares.
    - 3.4) Calcular integrales triples mediante integración iterada.
    - 3.5) Calcular volúmenes, centros de masa y momentos de inercia usando integrales triples.
  4. Integral de línea e integral de superficie.
    - 4.1) Conocer y comprender el concepto de campo vertical.

- 4.2) Conocer y comprender el concepto de ecuación paramétrica de una curva.
- 4.3) Conocer y comprender el concepto de integral de línea.
- 4.4) Calcular integrales de línea.
- 4.5) Aplicar las integrales de línea a problemas que involucren los conceptos de masa de un alambre de densidad variable, trabajo realizado por una fuerza y longitud en un arco de curva.
- 4.6) Determinar si una integral de línea dada es independiente de la trayectoria de integración y aplicar este resultado para calcular integrales.
- 4.7) Conocer y aplicar el teorema de Green.
- 4.8) Conocer y comprender el concepto de integral de superficies.
- 4.9) Calcular integrales de superficie.
- 4.10) Aplicar la integral de superficie a problemas que involucren el flujo de un campo vectorial a través de una superficie y al cálculo del área de una de una superficie.
- 4.11) Conocer y comprender los conceptos de divergencia y rotación.
- 4.12) Conocer y aplicar el teorema de la divergencia.
- 4.13) Conocer y aplicar el teorema de Stokes.

### Relación de los objetivos con el atributo de graduados

**Nota:** *Simbología del atributo* → **CI**: Conocimiento de ingeniería. *Simbología en el nivel de desarrollo* → **I**: Inicial, **M**: Intermedio, **A**: Avanzado.

Objetivos del curso	Atributos	Nivel de desarrollo por alcanzar
1. Lograr que el estudiante adquiriera destrezas y habilidades en la resolución de ejercicios y problemas.	CI	I
2. Lograr que el estudiante analice, interprete, explique, modele y resuelva problemas usando conceptos del Cálculo Diferencial e Integral en varias variables.	CI	I
3. Lograr que el estudiante comprenda modelos matemáticos que respondan a problemas vinculados a la ciencia y la tecnología.	CI	I

## 4 Contenidos

### 1. Secciones Cónicas (6 horas <sup>1</sup>)

- 1.1) Lugar geométrico del plano.
- 1.2) Ecuación general y gráfico de:
  - 1.2.a) Círculo.
  - 1.2.b) Elipse.

<sup>1</sup>El número de horas que se enuncia en cada contenido es aproximado.

- 1.2.c) Parábola.
- 1.2.d) Hipérbola.

## 2. Cálculo diferencial de funciones de varias variables (24 horas)

- 2.1) Definición de una función de dos o más variables.
- 2.2) Representación de superficies.
  - 2.2.a) De revolución.
  - 2.2.b) Cilíndricas.
  - 2.2.c) Cuádricas.
  - 2.2.d) Planos.
- 2.3) Representación de sólidos limitados por superficies.
- 2.4) Límite y continuidad de una función de dos variables.
- 2.5) Derivadas parciales de funciones de varias variables.
- 2.6) Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables.
- 2.7) Derivadas parciales de funciones definidas implícitamente.
- 2.8) Rectas tangentes a una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .
- 2.9) Plano tangente a una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .
- 2.10) Recta normal a una superficie en  $\mathbb{R}^3$ .
- 2.11) Derivadas parciales de orden superior.
- 2.12) Derivadas parciales de funciones compuestas.
- 2.13) Derivada direccional. Gradiente.
- 2.14) Máximos y mínimos de funciones de 2 o 3 variables.
  - 2.14.a) Criterio de las segundas derivadas parciales para determinar máximos o mínimos de funciones de dos variables.
  - 2.14.b) Método de los multiplicadores de Lagrange para obtener máximos o mínimos.

## 3. Integrales Dobles y Triples (14 horas)

- 3.1) Integrales dobles en coordenadas rectangulares.
- 3.2) Integrales iteradas.
- 3.3) Integrales dobles en coordenadas polares.
- 3.4) Área de una región plana.
- 3.5) Integral triple en coordenadas rectangulares.
- 3.6) Aplicaciones de integral doble en:
  - 3.6.a) Cálculo de áreas.
  - 3.6.b) Cálculo de volúmenes.
- 3.7) Aplicaciones de la integral triple en:

3.7.a) Cálculo de volúmenes.

3.7.b) Masa de un sólido.

3.7.c) Momentos de inercia.

**4. Integral de línea e integral de superficie (20 horas)**

4.1) Definición de campo vectorial y de campo escalar.

4.2) Ecuación paramétrica de una curva:

4.2.a) en el plano.

4.2.b) en el espacio.

4.3) Integral de línea

4.3.a) a lo largo de una curva.

4.3.b) respecto a la longitud de arco.

4.4) Propiedades de las integrales de línea.

4.5) Aplicaciones:

4.5.a) Masa de un alambre de densidad variable.

4.5.b) Trabajo realizado por una fuerza variable.

4.6) Condición necesaria y suficiente para que una integral de línea sea independiente del camino de integración.

4.7) Teorema de Green.

4.8) Integral de superficie para un campo vectorial y para un campo escalar.

4.9) Aplicaciones

4.9.a) flujo de un campo vectorial a través de una superficie.

4.9.b) área de una porción de superficie.

4.10) Divergencia y rotacional.

4.11) Teorema de la divergencia.

4.12) Teorema de Stokes.

## II parte: Aspectos operativos

### 5 Metodología de enseñanza y aprendizaje

Para el desarrollo del curso el profesor hará una exposición teórica de los temas y presentará ejemplos ilustrativos para complementar la teoría. Durante las clases debe buscarse la participación activa de los estudiantes. Adicionalmente, el docente debe estimular el uso de programas computacionales como Geogebra o sitios en línea de interés como Wolfram Alpha, con el objetivo de que con dicho apoyo se logre que los estudiantes comprendan mejor los conceptos, y no solo enfocarse en aspectos meramente prácticos.

De los estudiantes se espera una participación activa durante cada una de las clases, formulando preguntas y participando constantemente. El estudiante deberá dedicar tiempo extraclasses al estudio y solución de ejercicios de la práctica, así como el desarrollo de cada una de las guías semanales que la Cátedra diseñó como apoyo al trabajo asincrónico.

### 6 Evaluación

La evaluación del curso se desarrolla mediante la siguiente distribución:

- Tres exámenes parciales con un valor del 70 % de la nota final del curso, todos con la misma ponderación.
- Quices, tareas u otros con un valor del 30 % de la nota final del curso, los cuales quedan a criterio de cada profesor. Se realizarán un mínimo de 6 evaluaciones de este tipo.

Con respecto al atributo “Conocimiento de ingeniería”, este se fomentará mediante uno de los ejercicios de alguno de los tres exámenes parciales y será el mismo para todos los grupos de Cálculo Superior.

El curso se aprueba con una nota final mayor o igual que 70. El estudiante con nota final menor o igual que 55 reprueba el curso. El estudiante con nota final igual que 60 o 65 tiene derecho a presentar un examen de reposición (en el que se puede evaluar cualquier contenido del curso). Si el estudiante aprueba el examen (con nota mayor o igual a 70), entonces aprueba el curso con una nota final igual a 70; en caso contrario, la nota final será igual a la que tenía antes de realizar el examen de reposición.

Adicionalmente, deben ser tomadas en cuenta las siguientes consideraciones:

- Las fechas de las pruebas parciales, de las pruebas extraordinarias y del examen de reposición, en conjunto con el periodo en que estas serán aplicadas, estarán disponibles con suficiente anticipación en la Comunidad de Cálculo Superior TEC-Digital. La Coordinación procurará siempre recordar, mediante una noticia en el TEC-Digital, sobre cada una de dichas pruebas; sin embargo, es responsabilidad de cada estudiante revisar con anticipación la información publicada en la Comunidad de Cálculo Superior.
- El reclamo de resultados de una prueba ante el profesor, según lo dispuesto en el artículo 72 del Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico



de Costa Rica y sus reformas, deberá ser presentado dentro de los tres días hábiles posteriores a la entrega de los resultados al grupo. Los otros recursos deberán respetar los plazos definidos en el mismo artículo. Toda apelación sobre los resultados de una prueba debe realizarse en los plazos y mediante los procedimientos establecidos en la reglamentación institucional vigente.

- Las fechas y hora de aplicación de los exámenes parciales, así como la metodología de cómo será aplicadas las pruebas, les serán comunicadas oportunamente. Según lo dispuesto en el artículo 10 del Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico de Costa Rica y sus reformas, los representantes estudiantiles deben velar por el cumplimiento de sus responsabilidades académicas por sobre otro tipo de actividad.
- Toda comunicación vía TEC-Digital o correo electrónico, es de carácter oficial.
- Para conocer aspectos específicos de los derechos y deberes de los estudiantes se recomienda consultar el Reglamento del Régimen Enseñanza-Aprendizaje del Tecnológico de Costa Rica y sus reformas.

## Sobre EMERGENCIAS en el TEC

Al reportar una emergencia debe: indicar la dirección exacta donde se está presentando dicha emergencia, especificar la naturaleza de la emergencia, e indicar su nombre completo y número telefónico. Dependiendo de las instalaciones en que se encuentre (Cartago, San Carlos, Alajuela, San José o Limón) se tiene un número telefónico distinto y horarios específicos (de lunes a viernes), los cuales se le detallarán a continuación. En todos los casos, fuera del horario indicado deberá reportar la emergencia al 911.

- **Cartago:** de 07:30 a 19:30, llamar al 2550-9111 (o bien, a alguna de las extensiones: 9111 o 39111).
- **San Carlos:** de 07:00 a 16:00, llamar al número 2401-3090.
- **San José:** lunes, miércoles y viernes de 07:30 a 15:30, martes y jueves de 07:30 a 19:30, llamar al número 2550-9082.
- **Limón:** de 07:30 a 16:30, llamar al número 2550-9393.
- **Alajuela:** lunes y viernes de 13:00 a 17:00, martes y jueves de 08:00 a 17:00, llamar al número 2430-5730.

## 7 Bibliografía

### Obligatoria

- Mora, W. (2020). *Cálculo en Varias Variables. Visualización Interactiva* (2° ed.). Revista digital Matemática, Educación e Internet. Disponible .

### Complementaria

- Larson, R, Hostetler, R. y Edwards, B. (2005). *Cálculo II* (8° Ed.). McGraw-Hill Interamericana.
- Stewart, J. (2012). *Cálculo de varias variables* (7° Ed.). Cengage Learning.
- Thomas, G. (2005). *Cálculo varias variables* (11° Ed.). Pearson.

## Software y sitios de interés

- Geogebra: <http://www.geogebra.org/>
- Wolfram Alpha: <http://www.wolframalpha.com/>
- Symbolab: <https://es.symbolab.com/solver>

## 8 Profesores

Grupo	Profesor y correo	Sede <sup>2</sup>	Ofici / ext <sup>3</sup>	Consulta <sup>4</sup>
3	Jorge Monge Fallas(CO) jomonges@itcr.ac.cr	Cartago	I-01 2703	M: 07:30–9:20 V: 07:30–9:20
2	Juan José Fallas Monge jfallas@itcr.ac.cr	Cartago	II-33 2034	M: 07:30–11:30 V: 7:30 a 9:20
90	Manuel Calderón Solano <sup>5</sup> mcalderon@itcr.ac.cr	Cartago	II-10 2003	K: 9:00 a 10:00 M: 14:00 a 15:00 J: 9:00 a 10:00 V: 14:00 a 15:00
5	Emmanuel Soto Cascante <sup>6</sup> esoto@itcr.ac.crr	Cartago	02 2435	M: 15:00 a 17:00 J: 15:00 a 17:00
1 y 4	Emmanuelle Parra Rodríguez emaparra@itcr.ac.cr	Cartago	I-05 2016	M: 9:30–10:30 V: 9:30–11:30
50	Carlos Guillén Pérez <sup>7</sup> ceguillen@itcr.ac.cr	San Carlos	ECNE-07 24013056	V: 9:30 a 11:30 V: 12:30 a 14:30
6	Luis Fernando Mora Picado lmora@itcr.ac.cr	Cartago	I-04 2010	V: 9:30 a 11:30

<sup>2</sup>En Cartago, las oficinas que comienzan con I quedan en el primer piso del edificio de la Escuela de Matemática, mientras que oficinas que comienzan con II en el segundo piso.

<sup>3</sup>La extensión indicada corresponde a la secretaría de la Escuela de Matemática en Cartago, a la cual debe anteponer 2550.

<sup>4</sup>La consulta puede ser virtual o presencial. En caso de ser virtual, el profesor debe definir el medio por

---

el cual brindará la consulta en el horario establecido. Si fuera presencial, la atención al estudiante será en la oficina del docente en el horario respectivo.

<sup>5</sup>La consulta se realiza en la sede de Alajuela

<sup>6</sup>La consulta es virtual mediante la plataforma zoom. Se puede unir utilizando el siguiente enlace:

<sup>7</sup>La consulta se realiza en la sede de San Carlos