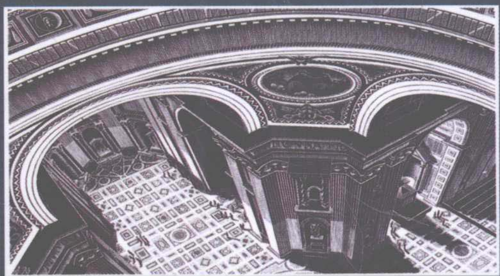
俄罗斯数学精品译丛

俄罗斯组合分析问题集



● 刘培杰数学工作室 组织编译
● 叶思源 编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

ELUOSI ZUHE FENXI WENTI JI

ELUOSI ZUHE FENXI WENTI JI

俄罗斯
组合分析问题集

叶思源　编译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书是一本问题集。这些问题与下列数学有关:组合数学、离散数学与信息论的数学部分的一系列表示为“数字形式”的问题,包括纠错码理论、离散几何、组合学中的概率等。我们着重介绍由 Г.П.Егорычев 所提出的计算组合和的方法,并将这个方法作为书中各篇的主要分析工具。

本书可以作为离散数学与信息论课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

俄罗斯组合分析问题集/叶思源编译.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2010.9

(俄罗斯数学精品译丛)

ISBN 978-7-5603-3083-9

Ⅰ.①俄… Ⅱ.①叶… Ⅲ.①组合分析 Ⅳ.①O157.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 174749 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传　　真 0451-86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 肇东粮食印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张 10.75 字数 130 千字
版　　次 2011 年 1 月第 1 版 2011 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3083-9
定　　价 48.00 元

目　录

绪　论

众所周知,许多人认为组合分析的构成是相当不确定的,它的各项内容与不同问题的解法仅仅与神秘的"组合型"定义相关.通常,在组合学中有"世代相传的从属关系"的问题,这些问题没有明晰的表达式,但是,即使放弃对离散对象明确的尊重,这些不良性质也不是它们的本性.问题在于:作为众多数学论证与数学结果的基础的"组合性引理",是以充分初等水平语言表述的,它却具有深刻的数学内容.例如以不同形式表示的 Hall 引理或 Ramsey 定理.同样流传下列的看法:组合学的各种问题是"繁难的",因为它们既没有纳入一般理论的范围,也不容许清楚地形式化.这类结论有一部分是正确的,它们共同建立整体地认识事物的某些世界观的基础.这里想补充说明的是:当今许多组合问题明确地具有可以见得到的实用意义,因此,并不需要别的广告式的宣传.最后,特别指出:无论按实际效益的原则或按任何其他外在的标准来说,企图将组合问题分为"重要的"与"不很重要的",其结果的影响一定是消极的.

在本书中将组合分析分为几篇来写,有时,以下列方式划分已经是相当充分的:

- 组合和;
- 生成函数,估值与其他事项;
- 组合内容的数论问题;
- n 维单位立方体的几何;
- 布尔函数;
- 有限集的组合学;
- 字与序列的组合学;
- 概率内容的组合学;
- 综合题

我们在上述每一篇中都提供一套不同难度的问题,这些问题具有独创性和

趣味性.作者在对下列大学的大学生和研究生的教学中使用过其中一部分问题:莫斯科物理技术研究所,以 Н.Э.Бауман 命名的国立莫斯科工业大学,以 М.В.Ломоносов 命名的国立莫斯科大学,以及德国与美国的众多大学.其余的问题是“从属的”,它们是研究工作所得.当然,其中若干问题来自不同的课本与教材.

现在着重详细介绍每一篇的内容.

组合和 在组合分析领域中,组合和是众多源自不同范围的研究的必然产物,与组合分析相关的选题确定的部分构成了独立的篇章.本书在这篇里选出两个著名的方面:①组合恒等式;②组合和的渐近估值.

第一篇的问题大多数与组合和的计算及组合恒等式的证明有关.同时,只要有可能,我们处处尽力将 Г.П.Егорычев 在参考文献[1]所提出的系数方法作为技术手段使用,这与我们的下列观点有关:目前,对于组合和的工作,Егорычев 公式是最广博的,而且是强有力的手段.

在第一篇中论述 Егорычев 公式,并给出一系列的例子说明它的作用.我们还利用一系列特殊函数:Bessel 函数、Кравчук 多项式、Bernoulli 数与 Bernoulli 多项式等.因而这就相当大地扩展了求组合和的可能范围.在这里,我们假设读者已经熟悉复变函数的基础知识(Cauchy 公式、留数).

组合内容的数论问题 本篇基本上包括数论中要求“在一定程度上计算”的问题,问题的答案为显式,或为某个生成函数的形式.本篇还有与数列稠密相关的问题,这些是独创的安排.

n 维单位立方体的几何 众所周知,n 维单位立方体,即长度为 n 的二元组,是构造和研究各种组合模型的通用的材料,集合的离散理论、编码理论、布尔函数等都与它有关.本篇中包含与 B^n 中各点、球、区间相互位置的度量属性有关的问题,一部分问题就属于编码理论.我们还运用以下概念:群码、校验矩阵、码距等.

布尔函数 本篇包含相当传统的材料,它们与下列内容有关:布尔函数的不同表达式、布尔函数的已知的分类、布尔多项式等.本篇与标准的篇章的最大不同在于其中与以下内容有关的问题:Post 定理及布尔函数在不同基底的表达式的复杂性.

字与序列的有限集的组合学 本篇的问题全部都是组合学的典型问题,而

问题的表述却不是简单与平常的.因此,其中许多问题的解答并非肤浅的,而是要求一定的机敏性.在这里,可能要从与寻常的方法距离很远的地方才找到所需的解法,这就使得问题别具魅力.

组合学与概率 组合学的许多问题的提法与解答,从概率的角度来考虑都是有益的.清楚地认识这一事实是组合分析近三四十年重要的成果之一.本篇所提出的问题一定能够显示在组合学中应用概率工具的多样性,而且是富有成果的.

综合题 本篇是各类问题的万花筒,这些问题涉及以下数学题材:离散几何、数论、组合学的改编过的问题等.我们对其中大部分问题都提供了足够详细的解答.

本书中用到的组合学的所有概念在充分的程度上是标准的,而且都可以在参考文献[1]~[8]中找到.

1.组合求和

在本篇,我们基本上沿用参考文献[1]中引入的记号.设 $H_K = \{f(z)\}$,这里

$$f(z) = \sum_{i=0}^{k} \frac{a'_i}{z^i} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i^n \cdot z^i, a'_k \neq 0$$

那么有

$$\operatorname*{coef}_z \{f(z)\} = a'_1 \tag{1}$$

换句话说,算子 $\operatorname*{coef}_z \{f(z)\}$ 由在集合 H 上定义的形式幂级数所确定,对这个幂级数可以进行通常的加法、乘法、叠加与求逆,以及级数的求导与求积分运算.

从式(1)可知,如果

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

则

$$a_n = \operatorname*{coef}_z \{f(z) z^{-n-1}\} \tag{2}$$

1.关于系数的运算规则

系数消去法则　如果

$$\operatorname*{coef}_u \{f_1(u) u^{-n-1}\} = \operatorname*{coef}_u \{f_2(u) u^{-n-1}\} \quad n = 0,1,\cdots \tag{3}$$

则 $f_1(u) = f_2(u)$,其中相等是指形式幂级数 $f_1(u)$ 与 $f_2(u)$ 的系数对应相等.

线性性质

$$\alpha \operatorname*{coef}_u \{f_1(u) u^{-n-1}\} + \beta \operatorname*{coef}_u \{f_2(u) u^{-n-1}\} = \operatorname*{coef}_u \{(\alpha f_1 + \beta f_2) u^{-n-1}\} \tag{4}$$

变量替换法则

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \operatorname*{coef}_u \{f(u) u^{-n-1}\} = f(z) \tag{5}$$

微分法则

$$n \operatorname*{coef}_u \{f(u) u^{-n-1}\} = \operatorname*{coef}_u \{f'(u) u^{-n}\} \quad n = 0,1,\cdots \tag{6}$$

积分法则

$$\frac{1}{n+1}\underset{u}{coef}\{f(u)u^{-n-1}\} = \underset{u}{coef}\left\{\left[\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right]u^{-n-2}\right\} \tag{7}$$

当级数 $f(z)$ 在零点的邻域内收敛的时候，$\underset{z}{coef}\{f(z)\}$ 就是函数 $f(z)$ 在零点的留数，即

$$\underset{z=0}{res}f(z) = \underset{z}{coef}\{f(z)\} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{|z|<\rho} f(z)\mathrm{d}z \tag{8}$$

其中 ρ 是充分小的正数.

我们可以列出下列的公式表，本篇将会经常用到这些公式

$$\begin{aligned}
&\underset{u}{coef}\{(1+u)^n u^{-k-1}\} = \binom{n}{k}\\
&\underset{u}{coef}\{(1-u)^{-n} u^{-n-1}\} = (-1)^k\binom{-n}{k} = \binom{n+k-1}{k}\\
&\underset{u}{coef}\{\mathrm{e}^{\alpha u} u^{-n-1}\} = \frac{\alpha^n}{n!}\\
&\underset{u}{coef}\{\ln(1-u) u^{-n-1}\} = -\frac{1}{n}\\
&\underset{u}{coef}\{(1-4u)^{-\frac{1}{2}} u^{-n-1}\} = \binom{2n}{n}
\end{aligned} \tag{9}$$

很多时候，我们会使用如下记号

$$a_n = \underset{z^n}{coef}\{f(z)\}$$

2.应用系数方法计算组合和的例子

例 1 计算下列组合和

$$S_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\binom{n+r}{r} \tag{10}$$

利用式(9) 和线性性质，由式(10) 得

$$S_n = \sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n+r}u^{-r-1}\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\binom{n}{r}\left(\frac{1+u}{u}\right)^r\right\} =$$

$$\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\right\}\cdot\left(1-\frac{1+u}{u}\right)^n=(-1)^n\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\right\}=$$
$$(-1)^n$$

例 2 令
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\binom{n+k}{2k}$$
应用式(9),将 S_n 表示为如下形式
$$S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}2^{2k}\operatorname*{coef}_{u}\{(1+u)^{n+k}u^{-2k-1}\}$$
然后,运用线性性质并对几何级数求和得
$$S_n=(-1)^n\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{4(1+u)}{u^2}\right)^k\right\}=$$
$$(-1)^n\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\cdot\frac{1-(-1)^{n+1}\left(\frac{4(1+u)}{u^2}\right)^{n+1}}{1+\frac{4(1+u)}{u^2}}\right\}=$$
$$(-1)^n\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{u(1+u)^n}{(u+2)^2}\right\}+4^{n+1}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{2n+1}}{u^{2n+1}(u+2)^2}\right\}\tag{11}$$
式(11)中的第一项等于零,这是因为 $u=0$ 不是花括号中函数的奇点.接下来要求函数
$$\varphi(u)=\frac{(1+u)^{2n+1}}{u^{2n+1}(u+2)^2}$$
在点 $u=0$ 的留数.因为"直接"从高阶极点计算比较困难,所以利用通常的标准的方法,包括运用下列定理:函数 $\varphi(u)$ 关于包括 $u=\infty$ 在内的它的所有奇点的留数之和为零.在所给的条件下,这些点是 $u_1=0,u_2=-2,u_3=+\infty$.因为 $\varphi(u)$ 是有理函数,而且分子的阶数比分母的阶数大 2,因此,$\operatorname*{res}_{u=u_3}\varphi(u)=0$.由此可知,函数 $\varphi(u)$ 在零点的留数等于函数 $\varphi(u)$ 在点 $u_2=-2$ 的留数的相反数.现在要做的计算是不难的,即
$$\operatorname*{res}_{u=-2}\varphi(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{(1+u)^{2n+1}}{u^{2n+1}}\right)_{u=-2}=-\frac{2n+1}{4^{n+1}}\tag{12}$$
最后得到
$$S_n=2n+1$$

例 3 求和

$$S = \sum_{k=i}^{N-n+i} \binom{k}{i} \binom{N-k}{n-i} \tag{13}$$

作代换 $k - i = r$,得

$$S = \sum_{r=0}^{N-n} \binom{i+r}{i} \binom{N-i-r}{n-i} \tag{14}$$

因为
$$\binom{i+r}{i} = \binom{i+r}{r} = (-1)^r \binom{-(i+1)}{r}$$

所以从式(14)得

$$S = \sum_{r=0}^{\infty} \underset{u}{coef}\{(1-u)^{-(i+1)}u^{-r-1}\} \underset{v}{coef}\{(1+v)^{N-i-r}v^{-N+n+r-1}\} \tag{15}$$

在式(15)中求和的上标可以是无限的,这是因为当 $r \geqslant N - n + 1$ 时有

$$\underset{v}{coef}\{(1+v)^{N-1-r}v^{-(N-n)+r-1}\} = 0$$

其次,由于线性性质

$$S = \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N-i}}{v^{N-n+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{v}{1+v}\right)^r \underset{u}{coef}\{(1-u)^{-(i+1)}u^{-r-1}\}\right\} \tag{16}$$

根据积分法则,我们从式(16)得

$$S = \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N-i}}{v^{N-n+1}} \cdot \left(1 - \frac{v}{1+v}\right)^{-(i+1)}\right\} =$$
$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N+1}}{v^{N-n+1}}\right\} = \binom{N+1}{N-n} = \binom{N+1}{n+1}$$

第二种解法

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \underset{u}{coef}\{(1+u)^k u^{-k+i-1}\} \underset{v}{coef}\{(1+v)^{N-k}v^{-n+i-1}\} =$$
$$\underset{u}{coef}\left\{u^{i-1} \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^N}{v^{n-i+1}}\right\} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{1+u}{u(1+v)}\right]^k\right\} =$$
$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{N+1}}{v^{n-i+1}} \underset{u}{coef}\left\{\frac{u \cdot u^{i-1}}{uv\left(1 - \frac{1}{uv}\right)}\right\}\right\}$$

因为
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{i-1}}{1 - \frac{1}{uv}}\right\} = \underset{u}{coef}\left\{u^{i-1}\left(1 + \frac{1}{uv} + \cdots + \left(\frac{1}{uv}\right)^i + \cdots\right)\right\} = \frac{1}{v^i}$$

所以
$$S = \operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{N+1}}{v^{n+2}}\right\} = \binom{N+1}{n+1}$$

问　题

证明下列组合恒等式:

1. $\sum\limits_{k=0}^{m} 4^k \binom{m+k}{2k}\binom{n}{m+k} = \binom{2n}{2m}$,当 $n \geqslant m$ 时.

2. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. $\sum\limits_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-4)^{-i}\binom{n-i}{i} = \frac{n+1}{2^n}$.

4. $\sum\limits_{k=0}^{m} \binom{2m+1}{2k}\binom{n+k}{2m} = \binom{2n+1}{2m}$,当 $n \geqslant m$ 时.

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

6. $\sum\limits_{i=0}^{j} (-1)^i \binom{j}{i}\binom{n-i-1}{j-1} = 0$.

7. $\sum\limits_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i}\binom{n-i}{r} = \begin{cases} \binom{n-m}{r-m} & \text{当 } r \geqslant m \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } r < m \text{ 时} \end{cases}$.

8. $\sum\limits_{k=0}^{r} (-1)^k \binom{r}{k}\binom{s+k}{n} = \begin{cases} (-1)^r\binom{s}{n-r} & \text{当 } n \geqslant r \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } n < r \text{ 时} \end{cases}$.

9. $\sum\limits_{s=0}^{k} (-1)^s \binom{k}{s}\binom{n-s}{k} = \begin{cases} 0 & \text{若 } n-k+1 \leqslant 0 \\ 1 & \text{若 } n-k+1 > 0 \end{cases}$.

10. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{p}{2}\right]} (-1)^k \binom{p-k}{k}\binom{2(p-k)}{p-k} = 2^p$.

11. $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k+n} \binom{p+qk}{n}\binom{n}{k} = q^n$.

12. $\sum\limits_{k=0}^{M} (-1)^{k+m} \binom{n}{k}\binom{n}{2m-k} = \binom{n}{m}$,其中 $M = \min\{2m, n\}$.

13. $\sum_{k=r}^{s}(-)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{s}{k}=\begin{cases}1 & 当\ s=r\ 时\\ 0 & 当\ s\neq r\ 时\end{cases}.$

14. $\sum_{s=0}^{2k}(-1)^{s}\binom{p+2k-s}{p}\binom{p+s}{p}=\binom{p+k}{k}.$

15. $\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k}\binom{r}{k}\binom{s-kt}{r}=t^{r}.$

16. $\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}=\binom{n-1}{m-1},n\geqslant m.$

17. $\sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s}=\binom{n+k-1}{k}.$

18. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{n+si}{si}=(-s)^{n}.$

19. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{m+i}{i}=\begin{cases}(-1)^{n}\binom{m}{m-n} & 若\ m\geqslant n\\ 0 & 若\ m<n\end{cases}.$

20. $\sum_{i=0}^{n}i^{2}\binom{n}{i}^{2}=n^{2}\binom{2(n-1)}{n-1}.$

21. $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{k}\binom{n-k}{m-k}\binom{p}{k}=\begin{cases}\binom{n-p}{m} & 若\ n-p\geqslant m\\ 0 & 若\ n-p<m\end{cases}.$

22. $\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k+m}\binom{m}{k}\binom{n+p+k}{p+k}=\begin{cases}\binom{n+p}{m+p} & 若\ n\geqslant m\\ 0 & 若\ n<m\end{cases}.$

23. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\binom{n+k}{m}=\begin{cases}(-1)^{n}\binom{n}{m-n} & 若\ m\geqslant n\\ 0 & 若\ m<n\end{cases}.$

24. $\sum_{k=0}^{n-m}(-2)^{-k}\binom{n}{m+k}\binom{n+m+k}{k}=\begin{cases}(-1)^{p}2^{-2p}\binom{n}{p} & 当\ n\equiv m(\mathrm{mod}\ 2)\ 时\ 其中\ n-m=2p\\ 0 & 当\ n\neq m(\mathrm{mod}\ 2)\ 时\end{cases}$

25. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}\binom{2n+k}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-k}=(-1)^{n}\binom{2n}{n}.$

26. $\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}=4^{n}$.

27. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{m}\binom{k}{m+p}=\begin{cases}\binom{n+1}{2m+p+1} & 若\ n>2m+p-1\\ 0 \quad 若\ n\leqslant 2m+p-1\end{cases}$

28. $\sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]}(-1)^{k}\binom{p-k}{k}\binom{2(p-k)}{p-k}=2^{p}$.

29. $\sum_{k=0}^{2n}(-1)^{k}2^{-k}\binom{2n}{k}\binom{2k}{k}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

30. $\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^{k}2^{-k}\binom{2n+1}{k}\binom{2k}{k}=0$.

31. $\sum_{k=0}^{n}2^{k}\binom{2n-k}{n}=2^{2n}$.

32. $\sum_{k=0}^{m}4^{k}\binom{m+k}{2k}\binom{n}{m+k}=\binom{2n}{2m}$,当 $n\geqslant m$ 时.

33. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}=(-1)^{n}$.

34. $\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2i}{i}\binom{2k-2i}{k-i-1}=2^{2k}-\binom{2k+1}{k}$.

35. $\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{n}{i+1}=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{\frac{n-1}{2}} & 若\ n\equiv 1(\bmod 2)\\ 0 \quad 若\ n\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}$.

36. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{m+i-1}{p}=\begin{cases}(-1)^{n}\binom{m-1}{p-n} & 若\ p\geqslant n\\ 0 \quad 若\ p<n\end{cases}$.

37. $\sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s}=\binom{n+k-1}{k}$.

38. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k}}{k+1}=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x(n+1)}$.

39. $\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^{2}\binom{n+k}{2p}=\binom{n}{p}^{2}$.

40. $\sum_{i=0}^{n}\binom{i+r}{r}\binom{2n-i-r}{n-r}=\binom{2n+1}{n}$.

41. $\sum_{k=0}^{n}\binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n}=\binom{r}{m}\binom{s}{n}$.

42. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}\binom{k}{q}=\begin{cases}\binom{n}{q}\binom{q}{n-p} & \text{若 } p+q-n\geqslant 0\\ 0 & \text{若 } p+q<n\end{cases}$.

43. $\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i}\binom{2m}{i}\binom{3m-2i}{2m}=2^{2m-1}+\frac{1}{2}\binom{2m}{m}$.

44. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{j}=\begin{cases}0 & \text{若 } 0\leqslant j<n\\ n! & \text{若 } j=n\end{cases}$.

45. $\sum_{\lambda=0}^{r}\binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{r-\lambda}\binom{n-r}{r-\lambda}=\binom{n}{r}^{2}$,当 $2r\leqslant n$ 时.

46. $\sum_{s=0}^{n}2^{s}\binom{2n-s}{n}=2^{2n}$.

47. $\sum_{n=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}\binom{n}{r}\frac{r^{n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{m}(-1)^{n}\frac{n!}{n+1}$.

48. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\binom{n}{i}\binom{k+i}{m}=\begin{cases}(-1)^{n}\binom{k}{m-n} & \text{若 } m\geqslant n\\ 0 & \text{若 } m<n\end{cases}$.

49. $\sum_{i=0}^{n}(-1)^{m+n+i}3^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n+2i}{m-n+i}=\begin{cases}(-1)^{k}\binom{n}{k} & \text{当 } m=3k \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } m\neq 0 \pmod 3 \text{ 时}\end{cases}$.

50. $\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{\binom{n}{j}}{j}=\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$.

51. $\sum_{2k\geqslant j}^{2k\leqslant n}\binom{n}{2k}\binom{2k}{j}=\binom{n}{j}2^{n-j-1}$.

52. $\sum_{i=0}^{n}i\binom{n}{i}p^{i}q^{n-i}=np$,其中 $p+q=1$.

53. $\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\binom{n}{i}p^{i}q^{n-i}=\frac{1}{p(n+1)}$,其中 $p+q=1$.

54. $\sum\limits_{i=0}^{n} i^2\binom{n}{i}p^i q^{n-i} = npq + (np)^2$，其中 $p + q = 1$.

55. $\sum\limits_{n\geqslant 2i}\binom{n-i}{i}(-pq)^i = \dfrac{p^{n+1} - q^{n+1}}{p-q}$，其中 $p, q \geqslant 0, p + q = 1, p \neq \dfrac{1}{2}$.

56. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k - np)^2 p^k q^{n-k} = npq$.

57. $\sum\limits_{s=0}^{n-k}\sum\limits_{r=0}^{n-k-s}\binom{n-k}{s}\binom{n-k-s}{r} = 3^{n-k}$.

58. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\dfrac{\binom{2k}{k}}{4^k} = \dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n} = \binom{n-\frac{1}{2}}{n}$.

59. $\sum\limits_{k=0}^{r}\binom{r-k}{m}\binom{s+k}{n} = \binom{r+s+1}{m+n+1}$，当 $n \geqslant s$ 时.

60. $\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r-k}{m}\binom{s}{k-t} = (-1)^t\binom{r-t-s}{r-t-m}$.

61. $\sum\limits_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\binom{p+i}{m+n} = \binom{p}{m+n-k}\binom{p+k-n}{k}$.

1.1 若干基本组合恒等式的推广

为了计算后面引入的组合和公式，从组合恒等式(问题 62) 开始，我们利用基本的多项式恒等式(9) 的某些推广，伽玛函数与贝塔函数，以及这些函数之间熟知的关系式

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_m)^n = \sum_{\sum\limits_{i=1}^{m} t_i = n}\frac{n!}{t_1!\,t_2!\cdots t_m!}x_1^{t_1}x_2^{t_2}\cdots x_m^{t_m}$$

当 $\mathrm{Re}x > 1$ 时

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-z}z^{x-1}\mathrm{d}z$$

当 $\mathrm{Re}\ x > 0, \mathrm{Re}\ y > 0$ 时

$$\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t \tag{17}$$

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

例 4 证明恒等式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\frac{\binom{n}{k}}{x+k}=\frac{1}{x\binom{n+x}{x}}$$

当 $x>0$ 时.

证 因为当 $x>0$ 时, $\frac{1}{x+k}=\int_{0}^{1}t^{x+k-1}\mathrm{d}t$, 所以

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\int_{0}^{1}t^{x+k-1}\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}t^{x-1}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}t^{k}\right\}\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}t^{x-1}(1-t)^{n}\mathrm{d}t$$

由式(17)得

$$\int_{0}^{1}t^{x-1}(1-t)^{n}\mathrm{d}t=\mathrm{B}(x,n+1)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(n+1)}{\Gamma(x+n+1)}=\frac{1}{x\frac{(x+n)!}{(x)!n!}}=\frac{1}{x\binom{n+x}{x}}$$

例 5 计算和式

$$S=\sum_{m=n}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)\cdots(m+p)} \tag{18}$$

解 经过简单的变换可得

$$S=\frac{1}{p!}\sum_{m=n}^{\infty}\frac{(m-1)!p!}{(m+p)!}=\frac{1}{p!}\sum_{m=n}^{\infty}\int_{0}^{1}x^{m-1}(1-x)^{p}\mathrm{d}x=\frac{1}{p!}\int_{0}^{1}(1-x)^{p}\left\{\sum_{m=n}^{\infty}x^{m-1}\right\}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{p!}\int_{0}^{1}(1-x)^{p}\frac{x^{n-1}}{1-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{p!}\int_{0}^{1}(1-x)^{p-1}x^{n-1}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{p!}\mathrm{B}(n,p)=\frac{1}{p!}\cdot\frac{\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(n+p)}=$$

$$\frac{1}{p!}\cdot\frac{(n-1)!(p-1)!}{(n+p-1)!}=$$

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot(n-1)\cdot n(n+1)\cdot\cdots\cdot(n+p-1)}=$$

$$\frac{1}{p}\cdot\frac{1}{n(n+1)\cdots(n+p-1)}$$

例 6 证明恒等式

$$\sum_{j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n}(-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_n-1}\frac{(j_1+j_2+\cdots+j_n-1)}{j_1!j_2!\cdots j_n!}=\frac{1}{n}\tag{19}$$

证 为了避免在式(19)中求和指标过于复杂带来的不便,我们利用如下技术性的方法.考虑公式

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{j_1+2j_2+\cdots+nj_n}}{u^{n+1}}\right\}=\begin{cases}1 & 若\ j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n\\ 0 & 若\ j_1+2j_2+\cdots+nj_n\neq n\end{cases}\tag{20}$$

利用式(20),可以将式(19)左端表示为如下形式

$$S_n=\sum_{j_1+2j_2+\cdots+nj_n=n}(-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_n-1}\frac{(j_1+j_2+\cdots+j_n-1)!}{j_1!j_2!\cdots j_n!}=$$
$$\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{j_1+\cdots+j_n-1}\frac{(j_1+\cdots+j_n-1)!}{j_1!\cdots j_n!}\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{j_1+2j_2+\cdots+nj_n}}{u^{n+1}}\right\}\tag{21}$$

在式(21)中求和指标已经相互独立,并且每一个指标从零变化到无穷.于是从式(21)得到

$$S_n=\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j_1+j_2+\cdots+j_n=s}(-1)^{j_1+\cdots+j_n-1}\frac{(j_1+j_2+\cdots+j_n-1)!}{j_1!\cdots j_n!}\right\}\cdot$$
$$u^{j_1+2j_2+\cdots+nj_n}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\sum_{j_1+\cdots+j_n=s}\frac{s!}{j_1!\cdots j_n!}u^{j_1}u^{2j_2}\cdots u^{nj_n}\right\}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{s}\sum_{j_1+\cdots+j_n=s}\frac{s!}{j_1!\cdots j_n!}(u)^{j_1}(u^2)^{j_2}\cdots(u^n)^{j_n}\right\}\tag{22}$$

利用多项式的展开公式,可以计算式(22)内部的和

$$\sum_{j_1+\cdots+j_n=s}\frac{s!}{j_1!\cdots j_n!}(u)^{j_1}(u^2)^{j_2}\cdots(u^n)^{j_n}=(u+u^2+\cdots+u^n)^s=\left[\frac{(1-u^n)u}{1-u}\right]^s\tag{23}$$

现在应用式(9),有

$$-\frac{1}{s}=\underset{v}{coef}\{\ln(1-v)v^{-s-1}\}\tag{24}$$

从式(22),(23)和(24)得出

$$S_n = \underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\sum_{s=1}^{\infty}\left[-\frac{(1-u^n)u}{1-u}\right]^s \underset{v}{coef}\{\ln(1-v)v^{-s-1}\}\right\} \tag{25}$$

按变量替换法则,由式(25)有

$$\sum = \underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\ln\left[1+\frac{(1-u^n)u}{1-u}\right]\right\} = \underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\ln\frac{1-u^{n+1}}{1-u}\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\ln(1-u^{n+1})\right\} - \underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\ln(1-u)\right\} = \frac{1}{n}$$

因为

$$\ln(1-u^{n+1}) = -u^{n+1} - \frac{u^{2(n+1)}}{2} - \cdots$$

所以

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\ln(1-u^{n+1})\right\} = 0$$

问　题

62.求和$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{2k+1}$.

证明下列恒等式:

63. $\sum_{s=0}^{n}\binom{n+s}{s}\binom{n-s+q}{q}2^{-s} = \frac{(2n+q)!!}{n!q!!}$.

64. $\sum_{n=a}^{\infty}\binom{n}{a}^{-1} = \frac{a}{a-1}$,当 $a>1$ 时.

65. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{p}{k+p} = \binom{n+p}{p}^{-1}$.

66. $\sum_{k=1}^{n}k\cdot k! = (n+1)!-1$.

67. $\sum_{\substack{p+q+r=n\\ p,q,r\geqslant 0}}\alpha^p\beta^q\gamma^r = \frac{\alpha^{n+2}(\beta-\gamma)-\beta^{n+2}(\alpha-\gamma)+\gamma^{n+2}(\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}$.

68. $\sum_{\substack{\sum_{i=1}^{m}k_i=n\\ k_i\geqslant 0}}\alpha_1^{k_1}\alpha_2^{k_2}\cdots\alpha_m^{k_m} = \sum_{i=1}^{m}\frac{\alpha_i^{n+m-1}}{\prod_{s\neq i}(\alpha_s-\alpha_i)}$.(所有 α_i 两两不相等)

69. $\sum_{t_1+t_2+\cdots+t_k=j}\frac{j!}{t_1!t_2!\cdots t_k!} = k^j$.

70. $\sum_{k=0}^{n} \frac{(n)_k}{(m)_k} = \frac{m+1}{m-n+1}$，当 $m \geqslant n$ 时.

71. $\sum_{t_1+t_2+\cdots+t_m=n, t_i \geqslant 1} \frac{n!}{t_1!\cdots t_m!} = \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m-r}\binom{m}{r} r^n$.

72. $\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (m-k)^m = m!$.

73. $\sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} \sum_{t_1+t_2+\cdots+t_r=n, t_i \geqslant 1} \frac{n!}{t_1!t_2!\cdots t_r!} = k^n$.

74. $2n\sum_{i=k}^{c} (-1)^i 2^{-2i} \binom{n-i}{i}\binom{i}{k} = \begin{cases} (-1)^k \binom{n+1}{n-2k} & \text{当 } 2k \leqslant n \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } 2k > n \text{ 时} \end{cases}$，其中

$$c = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{若 } n \equiv 0 \pmod 2 \\ \frac{n-1}{2} & \text{若 } n \equiv 1 \pmod 2 \end{cases}.$$

75. $\int_0^1 (1+z)^p (1-z)^q \mathrm{d}z = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \sum_{i=0}^{p} \binom{p+q+1}{p-i}$，$p,q$ 为自然数.

1.2 换元法

考虑下面的例子

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \binom{n+1}{n-k}$$

通过标准的变换得

$$S_n = \operatorname*{coef}_u \left(\frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{u}{2}} \right) = -2 \operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}} \frac{1}{u-2} \right\}$$

进而有

$$\operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}} \frac{1}{u-2} \right\} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|u|<\rho} \frac{1}{u-2} \left(\frac{u}{u+1} \right)^{-n-1} \mathrm{d}u$$

作替换 $\frac{u}{(1+u)} = z$，并经标准的计算得

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|u|<\rho} \frac{1}{u-2} \left(\frac{u}{u+1} \right)^{-n-1} \mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|z|<\rho} \frac{1}{(3z-2)(1-z)} z^{-n-1} \mathrm{d}z$$

利用部分分式

$$\frac{1}{(3z-2)(1-z)}=\frac{3}{3z-2}+\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\left[1-\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}\right]$$

并应用留数定理,最后得到

$$S_n=2\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}-1\right]$$

为了计算 S_n 作变量替换是必要的,这是因为分子与分母的阶数之差为1,所以不可能通过“直接的”方式(极点的阶数非常高)和间接的方式去计算 $\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}}\frac{1}{u-2}\right\}$. 和前面一样,我们不研究与这里出现的所有的级数收敛性有关的问题,因为结论是显然的.

1.3 斯特林数,伯努利数,斐波那契数

以下给出的恒等式将用于研究经典的正交多项式、斯特林数、伯努利数和斐波那契数.我们给出必要的定义,基本的表达式和公式.

定义 将伯努利数 $B_k,k=0,1,2,\cdots$,定义为如下分解式的系数

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{2}+\sum_{k=2}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}$$

或者使用我们用过的记号

$$B_n=n!\underset{u}{coef}\left\{\frac{u}{e^u-1}u^{-n-1}\right\}$$

例7 求和 $S_n=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^j}{k+1}\binom{k}{j}j^n$.

解 因为

$$-\frac{1}{k+1}=\underset{u}{coef}\{\ln(1-u)u^{-k-2}\}$$

$$\binom{k}{j}(-1)^j=\underset{v}{coef}\{(1-v)^k v^{-j-1}\}$$

$$\frac{j^n}{n!}=\underset{w}{coef}\{e^{jw}w^{-n-1}\}$$

所以有

$$S_n = -n!\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{coef}_u\{\ln(1-u)u^{-k-2}\}\sum_{j=0}^{k}\operatorname*{coef}_v\{(1-v)^k v^{-j-1}\}\frac{j^n}{n!} =$$

$$-n!\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{coef}_u\Big\{\ln(1-u)u^{-k-2}\sum_{j=0}^{k}\operatorname*{coef}_v\{(1-v)^k v^{-j-1}\}\operatorname*{coef}_w[e^{jw}w^{-n-1}]\Big\} =$$

$$-n!\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{coef}_u\{\ln(1-u)u^{-k-2}\}\operatorname*{coef}_w\Big\{\frac{1}{w^{n+1}}\sum_{j=0}^{k}(e^w)^j\Big\}\operatorname*{coef}_v\{(1-v)^k v^{-j-1}\} =$$

$$-n!\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{coef}_u\{\ln(1-u)u^{-k-2}\}\operatorname*{coef}_w\Big\{\frac{(1-e^w)^k}{w^{n+1}}\Big\} =$$

$$-n!\operatorname*{coef}_w\Big\{\frac{1}{w^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}(1-e^w)^k\operatorname*{coef}_u\Big\{\frac{\ln(1-u)}{u}u^{-k-1}\Big\}\Big\} =$$

$$-n!\operatorname*{coef}_w\Big\{\frac{1}{w^{n+1}}\frac{\ln[1-1+e^w]}{1-e^w}\Big\} = n!\operatorname*{coef}_w\Big\{\frac{w}{e^w-1}w^{-n-1}\Big\} = B_n$$

问　　题

证明下列恒等式：

76. 证明 $B_{2n+1}=0$，当 $n\geqslant 1$ 时.

77. 证明：

a) $\sum_{k=0}^{n}B_k\binom{n+1}{k}=0$;

b) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k+j}}{k+1}\binom{k}{j}(k-j)^n=B_n$.

设 $\varphi_n(z)$ 是由下列关系式所确定的伯努利多项式

$$t\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)}{n!}t^n$$

78. 证明：

a) $\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)=nz^{n-1}$;

b) $\sum_{i=1}^{m-1}i^n=\frac{\varphi_{n+1}(m)}{n+1}$;

c) $\varphi_n(z)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}B_kz^{n-k}$.

79.证明:

a) $\sum_{k=0}^{n} B_{2k+2}\binom{2n+2}{2k+2} = B_{2n+2} + n$;

b) $\sum_{k=0}^{n} B_k\binom{n}{k} = B_n$;

c) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k B_k\binom{n}{k} = (-1)^n B_n + n$.

1.4 克拉夫丘克(Кравчук)多项式

定义 克拉夫丘克多项式 $\varphi_s(n,i)$ 由下列关系式给出

$$(1+x)^{n-i}(1-x)^i = \sum_{s=0}^{n} \varphi_s(n,i)x^s$$

或者用算子 $\underset{u}{coef}$ 表示为

$$\varphi_s(n,i) = \underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-i}(1-u)^i u^{-s-1}\}$$

显然,克拉夫丘克多项式是二项式系数的推广,而且在 $i=0$ 时它就化为二项式系数,即 $\varphi_s(n,0) = \binom{n}{s}$.克拉夫丘克多项式是一种经典的正交多项式,它在编码理论和组合分析中有广泛的应用.

问　　题

证明下列含有克拉夫丘克多项式的恒等式:

80. a) $\varphi_s(n,i) = (-1)^s \varphi_s(n,n-i)$;

b) $\sum_{s=0}^{t} \varphi_s(n,i) = \varphi_t(n-1,i-1)$;

c) $\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s}\varphi_s(n,i) = \varphi_n(2n,i)$;

d) $\sum_{s=0}^{n} \varphi_s^2(n,i) = (-1)^i \varphi_n(2n,2i)$;

e) $\sum_{s=0}^{n} (-1)^s\binom{n}{s}\varphi_s(n,i) = (-1)^n \varphi_n(2n,n+i)$;

f) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\varphi_s(n,i)=\begin{cases}2^n & 若\ s=0\\ 0 & 若\ s\neq 0\end{cases}$.

81. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2\varphi_s(n,i)=(-1)^s\binom{n}{s}\varphi_n(2n,s)$.

82. $\sum_{i=0}^{n}\varphi_s(n,i)\varphi_i(n,s)=2^n$.

83. $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\varphi_r(n,i)\varphi_s(n,i)=2^n\binom{n}{r}\delta_s^r$,其中 δ_s^r 为克罗内克(Kronecker) 符号,即

$$\delta_s^r=\begin{cases}1 & 若\ s=r\\ 0 & 若\ s\neq r\end{cases}$$

84. $\sum_{s=0}^{k}\binom{n-k+s}{n-k}\binom{n-k}{k-s}=\varphi_k(-1,n-k)$.

85. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{n-j}\varphi_k(n,i)=2^j\binom{n-i}{j}$.

86. $\sum_{j=0}^{m}(-2)^j\binom{n-j}{k-j}\binom{m}{j}=\varphi_k(n,m)$,当 $k\leqslant n$ 时.

87. $\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}\binom{n-r}{s-2k}=\frac{1}{2}\binom{n+2m-r}{s}+\frac{1}{2}\varphi_s(n-r+m,2m)$.

88. $\sum_{j=0}^{q}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-k}{2q-2j}=\varphi_{2q}(n+k,k)$.

89. $\sum_{j=0}^{q}\binom{k}{2j}\binom{n-k}{2q-2j}=\frac{1}{2}\binom{n}{2q}+\frac{1}{2}\varphi_{2q}(n,k)$.

90. $\sum_{s=0}^{n}\frac{\varphi_s(n,i)}{s+1}=\frac{1}{(n+1)\binom{n}{i}}\left[2^{n+1}-\sum_{k=0}^{i}\binom{n+1}{k}\right]$.

91. $\sum_{s=0}^{n}\frac{\varphi_s(n,i)}{\binom{n}{s}}=\begin{cases}\frac{n+1}{2(i+1)} & 若\ i\equiv 0 \pmod 2\\ 0 & 若\ i\equiv 1 \pmod 2\end{cases}$.

定义 第 Ⅰ 类斯特林(Stirling)数 $S_1(m,n)$ 与第 Ⅱ 类斯特林数 $S_2(m,n)$ 由下列关系式定义,即

$$(w)_m = w(w-1)\cdots(w-m+1) = \sum_{n=0}^{m} S_1(m,n)w^n, S_1(0,0) = 1$$

$$S_1(m,n) = coef\{(w)_m w^{-n-1}\}$$

$$w^m = \sum_{n=0}^{m} S_2(m,n)(w)_n, S_2(0,0) = 1$$

证明下列关于斯特林数的表达式:

92. $S_1(m,n) = m!\operatorname*{coef}_{w,v}\{(1+v)^w w^{-m-1} v^{-n-1}\}$.

93. $S_1(m,n) = \dfrac{m!}{n!}\operatorname*{coef}_{w}\{[\ln(1+w)]^n w^{-m-1}\}$.

94. $S_2(m,n) = \dfrac{m!}{n!}\operatorname*{coef}_{w}\{(e^w-1)^n w^{-m-1}\}$.

证明恒等式:

95. $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^{p+k}}{p!} S_1(p,k)p^k = \binom{2p-1}{p}$.

96. $\displaystyle\sum_{k=r}^{n} B_{k-r} S_1(n-r,k-r) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{n-r}\cdot(n-r)!}{n-r+1} & 若\ n \geqslant r-1 \\ 0 & 若\ n \leqslant r-2 \end{cases}$.

97. $\displaystyle\sum_{n=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\frac{n!}{j}\binom{m}{n-j}S_2(m,n) = m^m$.

98. $\displaystyle(-1)^{n+1}S_1(n,k) = \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant i_{n-k}\leqslant n-1} i_1 i_2\cdots i_{n-k}$.

99. $\displaystyle\sum_{k=0}^{3n}(-1)^k\binom{3n+k+1}{2k+1} = (-1)^n$.

2. 生成函数,估值与其他事项

设 Z 是形式变量,将幂级数

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n$$

称为数列$\{a_n\}$, $n = 0,1,2,\cdots$,的一般生成函数.

例如,若 $a_n = 1$,则

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n \tag{26}$$

显然,当 $|Z| < 1$ 时,式(26) 可能"转化为" 如下形式

$$f(Z) = \frac{1}{1-Z}$$

可以将它解释为相应数列的"紧缩的" 表示形式,在前文我们已经以下列形式使用过

$$a_n = \underset{z}{coef}\{f(Z)Z^{-n-1}\} \tag{27}$$

问　　题

求出以下数列的生成函数:

100. $a_n = \dfrac{\lambda^{2n}}{n!}$.

101. $a_n = \dfrac{1}{n}$.

102. $a_n = (-1)^n \dfrac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$.

103. $a_n = \dbinom{2n}{n} \lambda^n$.

找出下列以求和形式给出的数列的生成函数. 在寻找这些生成函数时,下列的恒等式常常是有用的,即

$$\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}Z^n = Z^k(1-Z)^{-(k+1)}$$

当 $|Z|<1$ 时.

104. $a_n = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}$.

105. $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}$.

106. $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k}$.

107. $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\frac{e^{-\lambda k}}{k!}$.

108. $a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\binom{k}{n-i}\frac{1}{2i+1}$.

109. $a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\binom{p}{i}p^{n-i}$.

110. $a_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i\binom{p}{i}\lambda^{n-i}$.

借助于以上所得的生成函数可以得到相应数列的"精确的"表达式或估值.

111. $\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

112. $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\binom{n}{k}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \sim \ln n$.

113. $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\binom{p}{i}p^{n-i} \sim e^{-1}p^n$.

证明下列渐近估值:

114. $\sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k^{\lambda}} \sim \frac{2^{n+\lambda}}{n^{\lambda}}$,当 $\lambda =$ 常数时.

115. $\sum\limits_{v=0}^{n}\binom{n}{r+kv} \sim \frac{2^n}{k}$,当 $0 \leqslant r \leqslant k$ 时.

116. $n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$.

117. $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{n^k} \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$.

118. $\sum\limits_{k=0}^{k}\frac{n!}{(n-k)!} \sim \mathrm{e}\cdot n$.

119. $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k k!\binom{n}{k} \sim \frac{1}{\mathrm{e}}n!$.

120. 设 $\varphi(x)$ 是下凸函数,$p,q \geqslant 0$,且 $p+q=1$,则

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\varphi(k)p^k q^{n-k} \geqslant \varphi(np)$$

121. 依次证明以下结论:

a) 函数$\binom{x}{t}$关于 x 是下凸的;

b) 若 $\varphi(x)$ 为凸函数,则$\binom{\varphi(x)}{t}$也是凸函数;

c) $\sum\limits_{i=1}^{r}\binom{x_i}{t} \geqslant r\binom{\frac{N}{r}}{t}$,其中 $N=\sum\limits_{i=1}^{r}x_i$.

122. 证明下列与斐波那契数$\{F_n\}$有关的恒等式:

a) $\sum\limits_{k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 2)}\binom{n}{k}5^{\frac{k-1}{2}} = F_n$;

b) $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n-k-1}{k} = F_n$;

c) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = F_{2n}$.

123. 证明

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}\cos^{2n}x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}$$

124.证明渐近等式

$$\int_0^{\pi} \sin^{2n} x \, \mathrm{d}x \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

125.设

$$A_m = \sum_{\substack{p+q=m \\ p,q\geqslant 1}} \frac{1}{pq}$$

证明:

a) $\sum_{m=1}^{\infty} A_m z^m = \ln^2(1-z)$;

b) $A_m \sim \frac{2}{m}\ln m$.

以下的渐近关系式将前面给出的结果作了一些推广

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2^k}{k} \sim (-1)^n \frac{2^{n+1}}{3n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n}{k}}{k^2} \sim \frac{1}{2}\ln^2 n$$

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{n}{i} < 2\binom{n}{t} \quad t \leqslant \frac{n}{6}$$

$$\frac{2^{nH(p)}}{\sqrt{2n}} < \binom{n}{k} < 2^{nH(p)} \quad p = \frac{k}{n}, k \in [0, n]$$

$$H(p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi n\lambda\mu}}\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}\mathrm{e}^{\left(\frac{1}{12\lambda n}+\frac{1}{12\mu n}\right)} < \binom{n}{\lambda n} < \frac{1}{\sqrt{2\pi n\lambda\mu}}\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n} \quad \lambda, \mu > 0, \lambda + \mu = 1$$

3.组合内容的数论问题

本篇给出在一定程度上与自然数的性质有关的问题,其中大部分问题的解答要根据将自然数分解为素数乘积的唯一性定理,以及应用素数的分析性质与组合性质.

以下总是以 $\pi(x)$ 表示不超过 x 的素数的个数;以 $\tau(n)$ 表示 n 的全部因子的个数;以 $\sigma(n)$ 表示 n 的全部因子之和;以 $\varphi(n)$ 表示小于 n 且与 n 互素的自然数的个数.

问　　题

126.证明下列关系式.

若 $n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$,则有:

a) $\tau(n) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$;

b) $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{n}\dfrac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$;

c) $\prod_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$;

d) $\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$;

e) $\sum_{d|n}\varphi(d) = n$.

127.设 $n! = 2^{\alpha_1}3^{\alpha_2}\cdots$ 为 $n!$的关于素数幂的乘积的标准分解式,证明

$$\alpha_p = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

128.求所有小于 n 且与 n 互素的自然数之和.

129.求下列方程的解的个数

$$H.O.K.(x,y) = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$$

其中 $H.O.K.(x,y)$ 表示 x 与 y 的最小公倍数.

130. 证明 $\sum_{k=1}^{n}\tau(k)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{n}{k}\right]$.

131. 证明下列与函数 $\pi(n)$ 有关的不等式:

a) $\sum_{n\leqslant p_i\leqslant 2n} p_i < 2^{2n}$;

b) $\pi(2n)-\pi(n) < c\frac{n}{\ln n}$, 其中 c 是与 n 无关的常数;

c) $\pi(n) < c_1\frac{n}{\ln n}$.①

132. 设

$$\binom{n}{k}=\prod_{p\leqslant n}p^{v_p}$$

求证:

a) $p^{v_p}\leqslant n$;

b) $\binom{n}{k} < n^{\pi(n)}$.

133. 试从上述问题推导出关于 $\pi(n)$ 的估值式

$$c_2\frac{n}{\ln n} < \pi(n) < c_1\frac{n}{\ln n}$$

其中, c_1, c_2 是与 n 无关的常数.

134. 求证满足方程

$$x_1+2x_2=n$$

的非负整数向量 (x_1,x_2) 的个数等于 $\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{4}[1+(-1)^n]$.

135. 设 $(a,b)=1$.

求证满足方程

$$ax+by=n$$

的非负整数向量 (x,y) 的个数 $Z(n)$ 渐近地 $(n\to\infty)$ 等于 $\frac{n}{ab}$.

136. 求证满足方程

$$\sum_{i=1}^{m}x_i=n$$

---

① c_1 是与 n 无关的常数——编校注.

的非负整数向量的个数 $Z_m(n)$ 等于$\binom{m+n-1}{n}$.

137. 求证,满足方程

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = n$$

的正整数向量的个数 $Z_m^1(n)$ 等于$\binom{n-1}{m-1}$.

138. 证明下列恒等式:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \frac{x^n}{1-x^n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(n) \frac{z^n}{(1-z)^n} = \frac{z}{(1-z)^2}$.

139. 证明下列与黎曼函数 $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 有关的恒等式:

a) $\zeta(s) = \prod\limits_{p} (1-p^{-s})^{-1}$;

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(n) n^{-s} = [\zeta(s)]^2$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sigma(n) n^{-s} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$.

140. 设 p_1 和 p_2 都是素数($i = 1,2$),而 $J(N)$ 是方程 $p_1 + p_2 = N$ 的解的个数,求证 $J(N) = \int_0^1 S^2(t) e^{-2\pi i N t} dt$,其中 $S(t) = \sum\limits_{p \leqslant N} e^{2\pi i t p}$.

141. 求证函数 $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ 在区域 $res\ s > 1$ 内没有零点.

142. 设数 n 的无序分拆的个数为 $p(n)$,且 $p(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p(n) x^n$,求证

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1-x^i)^{-1}$$

143. 证明恒等式

$$\frac{xp'(x)}{p(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \sigma(n) x^n$$

其中函数 $p(x)$ 的定义参见问题 142,而 $\sigma(n)$ 为 n 的所有因子之和.

下面的例子是数论的结果与组合学的结果相结合的产物.

设
$$R_n = \sum_{k=1}^{n} \tau(k)\binom{n}{k}$$
利用问题 138 的 a) 可以得到
$$R_n = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) \underset{n}{coef}\{(1+u)^n u^{-n+k-1}\} = \underset{n}{coef}\left\{\frac{(1+n)^n}{u^{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\tau(k)u^k\right\} =$$
$$\underset{n}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u^k}{1-u^k}\right\} = \sum_{k=1}^{\infty}\underset{n}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\sum_{s=0}^{\infty}u^{ks}\right\} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}\binom{n}{ks}$$
另一方面
$$\sum_{s=1}\binom{n}{ks} = \sum_{s=1}^{\infty}\underset{v}{coef}\{(1+v)^n v^{-n+ks-1}\} = \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n+1}}\sum_{s=1}^{\infty}v^{ks}\right\} =$$
$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n+1}}\frac{v^k}{1-v^k}\right\} = -\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n+1}}\frac{\sqrt{(1-v^k)-1}}{1-v^k}\right\} =$$
$$-\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n+1}}\right\} + \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n+1}(1-v^k)}\right\} =$$
$$-1-\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n+1}(v-1)(v-\xi_2)\cdots(v-\xi_n)}\right\} =$$
$$-1+\frac{2^n}{k}+\sum_{i=2}^{n}\frac{(1+\xi_i)^n}{\xi^{n+1}(1+\xi_i+\cdots+\xi_i^{k+1})}$$
在以上的推导中,我们运用了显而易见的关系式
$$\frac{x^k-1}{x-1} = 1+x+\cdots+x^{k-1} \quad x = 1,\xi_2,\cdots,\xi_{k-1}$$
其中 ξ_i 是 1 的 k 次根.最后得到
$$R_n = 2^n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - n + \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=2}^{k}\frac{(1+\xi_i)^n}{\xi_i^{n+1}(1+\xi_i+\cdots+\xi_i^{k+1})}$$
可以证明,对于 R_n 有如下形式的渐近表达式
$$R_n \sim 2^n \ln n$$

对于自然数的数列 $A = \{a_k\}$,以 $A(n)$ 表示该数列中不超过 n 的项的个数.将数 $d(A) = \overline{\lim_{n}}\frac{A(n)}{n}$ 称为自然数数列 $A = \{a_k\}$ 的密度.

对于数列 $A = \{a_k\}, B = \{b_k\}$,将数列 $C = A + B = \{c \mid c = a + b, a \in$

$A, b \in B\}$ 称为这两个数列 A 与 B 之和.

144.求公差为 d 的等差数列的密度.

145.求素数集合的密度.

146.证明密度 $d(A)$ 具有下列性质,即

$$d(A+B) \geqslant d(A)+d(B)-d(A)d(B)$$

147.证明不等式:

a) $d\left(\sum_{i=1}^{k}\right)A_i \geqslant 1-\prod_{i=1}^{k}(1-d(A_i))$;

b) $d(kA) \geqslant 1-(1-d(A))^k$,其中 $kA \overset{\text{def}}{=} A+A_1+\cdots+A_k$.

148.以 $A(n)$ 与 $B(n)$ 分别表示数列 A 与 B 中不超过数 n 的项的个数.求证:若 $A(n)+B(n)>n-1$,则 $n \in A+B$.

149.证明:若 $d(A)>0$,则对充分大的 k,数列 (kA) 包含全部自然数级数.

150.求下列各数的末位数字:

a) 2^n;

b) 3^n.

151.证明数列 $x_n=\{n\lg 2\}$ 构成单位圆上处处稠密集.

152.证明 $2^n(n=1,2,\cdots)$ 的十进制分解式可以从数字的任何组合开始.

153.将以数 r 的幂除尽 p 的最高幂次记为 $E_p(r)$,证明

$$E_p(m!)=\frac{m-S_m}{p-1}$$

其中 S_m 为 m 的 p 进制表达式中所有"数字"之和.

154.沿用上题的记号,证明

$$E_p\left[\binom{n}{j}\right]=\frac{S_j+S_{n-j}-S_n}{p-1}$$

155.证明:

若 $q=p^s$,且 $0 \leqslant k \leqslant q$,则

$$\binom{q+m}{k} \equiv (-1)^k\binom{m+k-1}{k} \pmod p$$

156.证明:

若 $q=p^s$,且 $0 \leqslant k \leqslant q$,则

$$\binom{q-m}{k} \equiv \binom{m}{k} \pmod p$$

157.当 $q = p^m$ 时,证明恒等式

$$(x-a)^{q-1} \equiv x^{q-1} + x^{q-2}a + \cdots + a^{q-1} \pmod p$$

158.当 $0 \leqslant j \leqslant p-1$,且 p 为素数时,证明

$$\binom{p-1}{j} \equiv (-1)^j \pmod p$$

159.设 p 为素数,在按 mod p 的计数体系中,自然数 n 和 k 具有如下表达形式

$$n = \sum n_i p^i, k = \sum k_i p^i$$

其中,$0 \leqslant k_i, n_i \leqslant p$.求证

$$\binom{n}{k} \equiv \binom{n_0}{k_0}\binom{n_1}{k_1} \cdots \pmod p$$

(Lucas 定理).

160.求下列多面体中整点的个数

$$\sum_{i=1}^{t} x_i = n \quad 0 \leqslant x_i \leqslant c, i = 1,2,\cdots,t$$

161.设 $m > 0, (a,m) = 1, b$ 为整数,求证

$$\sum_{x=1}^{m} \left\{ \frac{ax+b}{m} \right\} = \frac{m-1}{2}$$

162.求证:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \tau(k) = 2 \sum\limits_{0<x\leqslant\sqrt{n}} \left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2$;

b) $\sum\limits_{k=1}^{k} \tau(k) = n\ln n + (2\gamma - 1)n + O(\sqrt{n})$,其中 γ 为欧拉常数.

163.证明:

a) $\sum\limits_{d\mid n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & 若\ n = 1 \\ 0 & 若\ n > 1 \end{cases}$;

b) $\varphi(n) = n \sum\limits_{d\mid n} \frac{\mu(d)}{d}$.

164.证明:

a) $\sum_{k=1}^{n}\varphi(k) = \sum_{d=1}^{n}\mu(d)S(n,d)$,其中 $S(n,d) = \sum_{i=1}^{[n|d]} i$;

b) $\sum_{k=1}^{n}\varphi(k) = \frac{3}{\pi^2}n^2 + o(n\ln n)$.

165. 证明恒等式

$$\ln\zeta(s) = s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\mathrm{d}x$$

其中 $\zeta(s)$ 是黎曼 ζ 函数,$\pi(x)$ 是不大于 x 的素数的个数.

4. n 维单位立方体的几何

今后，E^n 都是表示长度为 n 的二元数列的集合，即长度为 n 的二元组的集合，也就是 n 维单位立方体的顶点的集合．这时，E^n 是按模 2 分类加法运算下的 Abel 群，并且是被称为由两个元素 $\{0,1\}$ 构成的域与汉明(Hamming) 距离

$$\rho(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} | \alpha_i - \beta_i |$$

生成的线性距离空间，其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1,\cdots,\beta_n)$．

同时，E^n 是带有数积

$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})_2 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i$$

的欧几里得空间．这里 $\sum$ 表示按模 2 加法．

一般地，在解决与集合 E^n 有关的组合问题时，我们都会用到上述关于 E^n 的观点．

将 E^n 中具有 k 个单位坐标的点的子集 E_k^n 称为 E^n 的第 k“层”立方体．

$\| x \|$ 表示点 $x \in E^n$ 的汉明重量，或者简称为“重量”，这是指这个点的单位坐标的个数．

$\overline{S}_n^t(\boldsymbol{a})$ 表示中心在点 $\boldsymbol{a} \in E^n$，半径为 t 的球面．

$S_n^t(\boldsymbol{a})$ 表示中心在点 $\boldsymbol{a} \in E^n$，半径为 t 的球．

$A(n,d)$ 表示 E^n 中任何两点间距离不小于 d 的点的最大个数．

$B(n,d)$ 表示 E^n 中任何两点间距离不大于 d 的点的最大个数．

问　　题

166．求：

a) 在球 $S_n^t(\boldsymbol{a})$ 内的点的个数；

b) 球 $S_n^t(\boldsymbol{a})$ 的两点之间的最大距离和最小距离;

c) 在条件 $\|\boldsymbol{a}\| = S$ 下,球面 $\overline{S}_n^t(\boldsymbol{a})$ 上的点与球 $S_n^t(\boldsymbol{a})$ 上的点的最大重量和最小重量;

d) 在条件 $\|\boldsymbol{a}\| = S$ 下,在球 $S_n^t(\boldsymbol{a})$ 内重量为 k 的点的个数.

167. 求在第 k 层立方体 E_k^n 中点的最大距离与最小距离.

168. 在 E^n 内的两个半径为单位长的球的交集中可以包含多少个点?

169. 当 $\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = r$ 时,求两个球 $S_n^t(\boldsymbol{a})$ 与 $S_n^t(\boldsymbol{b})$ 的交集中的点的个数.

170. 找出与在第 k 层立方体 E_k^n 中所有的点都等距的点,这样的点有多少个?

171. 在 E^n 中满足下列条件的点的最大个数是多少?

a) 任何两点的距离为奇数;

b) 任何两点的距离为偶数.

172. 求证:

在 E^n 中任何两个 k 维子空间是等距的;

在 E^n 中的 k 维区间与立方体 E^k 是等距的.

173. 求证:在 E^n 中可以找到不超过 $\left[\frac{2^n}{S_n^t}\log_2 S_n^t\right]$ 个半径为 t 的球来覆盖立方体的所有顶点.

174. 设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E^n$ 且 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = r$. 又设 E^n 中与点对 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 等距的点的个数为 t_r. 求证:当 r 为奇数时,$t_r = 0$;当 r 为偶数时,$t_r = \binom{r}{\frac{r}{2}}2^{n-r}$.

175. 证明 $\max\limits_r t_r = 2^{n-1}$.(其中 t_r 的定义见问题 174)

176. 设 $M \subseteq E^n$,函数 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 在 M 上的值的集合为 $\rho(M)$. 证明:若对于子集 $M,N \subseteq E^n$ 满足条件 $\rho(M) \cap \rho(N) = \varnothing$,则 $|M|\cdot|N| \geqslant 2^n$.

177. 证明不等式 $A(n,2t+1)\cdot B(n,2t) \leqslant 2^n$.

178. 证明不等式:

a) $A(n,2t+1) \leqslant \dfrac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{t}\binom{n}{i}}$;

b) $A(n,d) \leqslant 2^{n-d+1}$;

c) $A(n,2t+1) \geqslant \dfrac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{2t}\binom{n}{i}}$.

179. 求证:若 $M \subseteq E^n$ 且 $|\rho(M)| = 1$,则 $|M| \leqslant n+1$.

180. 求证:若 $M \subseteq E^n$ 且 $|M| > 2^{n-1}$,则在 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中的所有数字都可能出现在 M 的两点间的距离中.

181. 是否可以将集合 E^n 分解为两个不相交的子集的并,即 $E^n = A \cup B$,使得 $\rho(A) \cap \rho(B) = \varnothing$.

182. 设 $\boldsymbol{M} = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_s\} \subseteq E^n, \boldsymbol{a}_i = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in})$ 且 $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{s\times n}$ 为 (0,1) 矩阵.证明

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant S} \rho(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \sum_{i}^{n} k_i (S - k_i)$$

其中 k_i 为矩阵 A 的第 i 列中的 1 的个数.

183. 证明关系式:

a) $\sum\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E^n} \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = n2^{2n-2}$;

b) $\sum\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E_k^n} \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = n\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}$;

c) $\sum\limits_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in S_t^n(\alpha)} \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = nS_{n-1}^{t-1}(S_n^{t-1} + n + 1)$,其中 $S_n^r = \sum\limits_{i=0}^{r}\binom{n}{i}$.

184. 求证:第 p 层 E_p^n 与第 q 层 E_q^n 中所有点的距离之和为

$$\binom{n}{p}\binom{n}{q}\left[p + q - \frac{2pq}{n}\right]$$

4.1 纠错码

在编码理论中常常用到下列概念和记号:

将集合 E^n 的任意子集称为一个码.

将空间 E^n 的任何 k 维子空间称为 (n,k) 码.

设 G 是 (n,k) 码,将与 G 正交的 $(n,n-k)$ 码记为 G^*.通常将 G^* 称为 G 的对偶码.

对于子空间 G 的任意一组基,以这组基为行向量组成矩阵的形式,将这个矩阵称为码 G 的生成矩阵.

将码 G 的正交子空间 G^* 的生成矩阵称为码 G 的校验矩阵.

将 G 中任意两点间距离的最小值称为集合 $G \subseteq E^n$ 的码距或最小距离.通常将它记为 $d(G)$.

设 G 中距离为 i 的点对的个数为 A_i,将数组 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 称为集合 $G \subseteq E^n$ 的谱.

设以 G 中的点为中心,以自然数 t 为半径的若干个球恰好能覆盖 E^n 中的整个立方体,将满足这个条件的最小的 t 称为码 $G \subseteq E$ 的覆盖半径.把这个半径记为 $t(G)$.

把数 n, k, d 称为码 G 的参数.将在码 $G \subseteq E^n$ 中具有最小距离 $d = 2t + 1$ 的点的个数的最大值记为 $A(n, d)$.

把以所有长度等于 m 的非零二进制数组作为列的 $(2^m - 1) \times m$ 阶矩阵记为 $\boldsymbol{H}_m$.

设码 V 的距离为 $d = 2t + 1$,若以 V 内的点为中心,以 t 为半径的球包含了整个集合 E^n,则称码 V 是完备的.

问　　题

185.写出下列 (n, k) 码的生成矩阵和校验矩阵:

a) (n, n) 码 E^n;

b) $(n, n-1)$ 码,它的所有点都有偶数的重量.

186. a) 设 $\boldsymbol{H}$ 是 (n, k) 码 G 的校验矩阵,求证:$d(G) = d$ 的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的任何 $d-1$ 个列是线性无关的,而且具有这个性质的最大的数为 d.

b) 求证:具有校验矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的 (n, k) 码的覆盖半径等于 t 的充分必要条件是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的任何个数的列之和都可以表示为这个矩阵的不多于 t 个列之和,并且具有这个性质的最小数为 t.

187.设 $\boldsymbol{B}$ 是 (n, k) 码 G 的生成矩阵,它的所有非零行构成矩阵 $\boldsymbol{A}$.求证:等式 $\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ 成立(这里,认为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 准确到行的置换).

188.设 G 是任意的 (n, k) 码,用一个 $(2^k \times n)$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示 G 的点,求证 $\boldsymbol{A}$

的每一个非零列恰好包含 2^{k-1} 个 1.

189. 求:

a) 码 G_m 的基本参数,使它的校验矩阵为 $\boldsymbol{H}_m$.

b) 码 G_m^* 的基本参数.

190. 设 G 是任意的 (n,k) 码,证明下列不等式:

a) $d(G) \leqslant n-k+1$;

b) $d(G) \leqslant \dfrac{n}{2} \times \dfrac{2^k}{2^k-1}$.

191. 求证:

a) $A(n,2)=2^{n-1}$;

b) $A(n,3)=\dfrac{2^n}{n+1}, n=2^m-1$;

c) $A(n,2t+1) \geqslant \dfrac{2^n}{\sum\limits_{i=0}^{2t}\binom{n}{i}}$.

192. 证明函数 $A(n,d)$ 的下列"一般"性质

$$A(n,2t+1)=A(n+1,2t+2)$$
$$A(n,d) \leqslant 2A(n-1,d)$$

193. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in E^n$,求:

a) E^n 中与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交的向量的个数;

b) E^n 中满足如下条件的非零向量的最小的个数:这些向量中至少有一个与 E^n 中每个向量正交.

194. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in E^n$ 且 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=r$. 求证:与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交,重量为 s 的向量 $\boldsymbol{x} \in E^n$ 的个数等于$\dfrac{1}{2}\left[\binom{n}{s}+\varphi_s(n,r)\right]$,其中 $\varphi_s(n,r)$ 是克拉夫丘多项式(参看 1.4 节).

195. 求证:分别与 (n,k) 码 V 和 V^* 对应的特征函数 $f(x)$ 和 $f^*(x)$ 满足关系式

$$f^*(x)=\frac{1}{2^k}\sum_{y \in E^n} f(y)(-1)^{(x,y)_2}$$

196. 证明马克 - 威廉姆斯公式

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i=\frac{1}{2^{n-k}}\sum_{i=0}^{n} b_i(1+x)^{n-i}(1-x)^i$$

其中,$\{a_1\cdots a_n\}\{b_1\cdots b_n\}$ 是分别与 (n,k) 码 V 和 $(n,n-k)$ 码 V^* 对应的谱.

197.求汉明码的谱(问题189).

198.求满足下列条件的“扩展的”汉明码的谱:它的校验矩阵 $\boldsymbol{H}'_m$ 包含所有长度为 m 的列.

199.设 $V\subseteq E^n$ 且 $V(z)$ 是集合 V 的重量函数,即 $V(z)=\sum\limits_{x\in V}z^{\|x\|}$.求:

a) 立方体 E^n 的重量函数;

b)“奇偶性计数器”的重量函数

$$V^+=\{\boldsymbol{x}\mid\|\boldsymbol{x}\|\equiv 0(\bmod 2)\}$$

c) 在 E^n 内的 k 维区间的重量函数.

200.求证:中心在点 $\boldsymbol{a}\in E^n$,半径为 r 的球面 S 的重量函数可以表示为下列形式

$$V_{n,r}(z)=\underset{u}{coef}\{(z+u)^s(1+zu)^{n-s}u^{-r-1}\}$$

201.考虑线性算子 $L_r[f]$,它作用在阶数不超过 n 的多项式线性空间 D^n 上,它在 z^s 上的值由下式给出

$$L_r[z^s]=\underset{u}{coef}\{(z+u)^s(1+zu)^{n-s}z^{-r-1}\}$$

证明算子 $L_r[f]$ 的下列性质:

a) $L_r[f]=\underset{u}{coef}\left\{(1+zu)^nf\left(\dfrac{z+u}{1+zu}\right)u^{-r-1}\right\}$;

b) 函数 $f_{n,i}(z)=(1+z)^{n-i}(1-z)^i(i=0,1,\cdots,n)$ 是算子 $L_r[f]$ 的特征函数,则

$$L_r[f_{n,i}(z)]=\varphi_r(n,i)f_{n,i}(z)$$

其中 $\varphi_r(n,i)$ 为克拉夫丘克多项式;

c) 若 $M_t=\sum\limits_{r=0}^{t}L_r$,则 $M_t[f_{n,i}(z)]=\varphi_t(n-1,i-1)f_{n,i}(z)$;

d) 线性算子 $M_t[f]$ 的秩不小于 $n-t+1$.

202.设 V 为 E^n 中的完备码,它有距离 $d=2t+1$,证明:

a) 对于任何点 $a\in E^n$,码 $\{V+a\}$ 是完备的;

b) 可以选择 $t+1$ 个点 a_i 使得码 $\{V+a\}$ 的重量函数是线性无关的;

c) 若 $V(2)$ 是码 V 的重量函数,那么 $M_t[V(z)]=(1+z)^n$;

d) 线性算子 M_t 的亏量等于 t;

e) 从 i 开始的克拉夫丘克多项式 $\varphi_t(n-1, i-1)$ 在区间 $[1, n]$ 有 t 个不同的整根(Ллойда 定理).

203. 求:

a) 空间 E^n 的 k 维子空间的个数;

b) 空间 E^n 的包含给定点 $\boldsymbol{\alpha} \in E^n$ 的 k 维子空间的个数.

5. 布尔函数

将 $E^n \to \{0,1\}$ 的任何映射称为布尔(Boole)函数.每一个布尔函数可以用下列方式给出:表、在任何基中的公式、或其他的方法.有相当多的问题与布尔函数有关.我们举出其中两个问题:布尔函数“精简的”表示,求以公式给定的布尔函数的零点的个数.我们将自变量不多于 n 个的所有布尔函数的集合记为 P_z^n.

我们将研究布尔函数的两种“形式的”表达式:析取范式(ДНФ)与热加尔金(Жегалкина)多项式或布尔多项式.

5.1 析取范式

这种表达式与基$\{\cdot, \vee, -\}$(合取,析取,非)及下列显式相联系,即

$$f(x_1x_2\cdots x_n) = \bigvee_{f(\sigma_1\cdots\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_n^{\sigma_n} \qquad (*)$$

这里,如往常一样,$x^\sigma = \begin{cases} x & 若\ \sigma = 1 \\ \bar{x} & 若\ \sigma = 0 \end{cases}$.

可以按 $f(x_1\cdots x_n)$ 的值的表直接作出式($*$),并将它称为完全析取范式(СДНФ).将式($*$)中每一个加项称为析取项,每一个这样的项对应于 E^n 的顶点的子集,在这些顶点上它取值为 1(单位元的集合).

例 1 研究下列 2 个变量的函数

x_1	x_2	$f(x_1, x_2)$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

这个函数 $f(x_1, x_2)$ 的完全析取范式是

$$f(x_1x_2)=\overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2$$

另一方面容易看出

$$f(x_1x_2)=x_1 \vee x_2$$

在几何上,函数 $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\cdots x_k^{\sigma_k}$ 的单位元集合是立方 E^n 的 $n-k$ 维区间(子立方体).

例 2 区间 $\overline{x}_1x_2$ 在 E^3 中是一维的,它由点(010),(011)组成.在立方体 E^2 中这个区间是零维的,而且由一点(01)组成.

以析取范式给出的函数 $f(x_1\cdots x_n)$ 的单位元集合 N_f,在几何上就是这个析取范式的析取项所表示的区间的并.显然,将布尔函数表示为析取范式的形式不是唯一的,而且,析取范式形式的布尔函数"精简的"表达式问题在于根据简化所选择的指标得出最"简单的"公式.

5.2 热加尔金(Жегалкина)多项式

将布尔函数表示为热加尔金多项式形式的含义是指它在基($\wedge,\oplus$)上的表达式,即将它写成 $f(x_1\cdots x_n)=\sum x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ 的形式,如前面那样,$\sum$ 表示模 2 加法.在多项式的合取表达式中,通常将 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$ 称为单项式.

例 3 若 $f(x_1x_2)=x_1 \vee x_2$,则 $f(x_1x_2)=x_1+x_2+x_1x_2$.

有许多方法将布尔函数表示为热加尔金多项式的形式,其中最明显的是利用

$$x_1 \vee x_2 = x_1+x_2+x_1x_2$$

$$\overline{x}=1+x$$

例 4 设 $$f(x_1x_2)=x_1 \vee x_2\overline{x}_2$$

那么

$$f(x_1x_2)=x_1+(x_1\overline{x}_2)+x_1(x_1\overline{x}_2)=x_1+x_1(1+x_2)+x_1(1+x_2)=x_1$$

与布尔函数的析取范式形式的表达式不同,布尔函数的热加尔金多项式形式是唯一的(参看问题 219).与热加尔金多项式相关的一个有意义的问题是求布尔多项式的零点的个数.

定义 1 若对于 $i=1,2,\cdots,n$,有 $\alpha_i \geqslant \beta_i$,则称二进制组 $a=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 大于二进制组 $b=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$.

“小于”与“不可比较”的定义是上述概念的简单推论.我们在形式上将确定的次序写成 $a \geqslant b$ 或 $a \leqslant b$.

若从关系式 $a \leqslant b$ 得出不等式 $f(a) \leqslant f(b)$,则称布尔函数 $f(x_1 \cdots x_n)$ 是单调的.

没有非的合取与析取是单调的布尔函数的简单的例子,即

$$x_1 \vee x_2 \cdots \vee x_n, x_1 x_2 \cdots x_n$$

定义 2 若函数 $f(x_1 \cdots x_n)$ 满足 $f(x_1 x_2 \cdots x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1 \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n)$,则称它是自对偶的.

定义 3 若对于对称群 S_n 的任何置换 σ,布尔函数 $f(x_1 \cdots x_n)$ 都满足 $f(x_1 x_2 \cdots x_n) = f(x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n)})$,则称它是对称的.

基本的对称布尔多项式是“最简单的”对称函数,即

$$\sigma_k(x_1 \cdots x_n) = \sum_{1 \leqslant i_1 \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

问　　题

204. 写出 2 个变量的所有布尔函数,其中有多少个是:

a) 单调的;

b) 自对偶的;

c) 对称的.

205. 函数 $f(x_1 \cdots x_n)$ 在唯一的一组 $a = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ 取值为零,试作出它的某个析取范式.

206. 求下列布尔函数在完全析取范式中的基本的合取的个数:

a) $f(x_1 \cdots x_n) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i$;

b) $\sigma_k^{\vee}(x_1 \cdots x_n) = \bigvee_{1 \leqslant i_1 \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$;

c) $(\bigvee_{i=1}^{n} x_i)(\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x}_i)$.

207. 将下列函数表示为热加尔金多项式的形式:

a) $x_1 \vee x_2 \cdots \vee x_n$;

b) $x_1 x_2 \cdots x_n \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n$;

c) 当且仅当 $\|x\| \equiv 0(\bmod 2)$ 时,$f(x_1\cdots x_n)=0$.

208.设 N_f 是在 E^n 中给定的 k 维区间 N 的集合,求在 N_f 中的布尔函数的个数.

209.对于函数 $f(x_1\cdots x_n)$,若点 $a\in N_f$,如果在与 a 相邻的所有点上有 $f(x_1\cdots x_n)=0$,则称点 a 是“孤立的”.

设 $s(f)$ 是函数 $f(x_1\cdots x_n)$ 的孤立点的个数,求证:

a) $s(f(x_1\cdots x_n))\leqslant 2^{n-1}$;

b) 存在函数 f 使得 $s(f)=2^{n-1}$;

c) $\bar{s}_n=\dfrac{1}{2^{2^n}}\sum\limits_{f\in P_2^n}s(f)=\dfrac{1}{2}$.

210.证明:在 E^n 中 k 维区间的个数等于 $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}2^{n-k}$.

211.求:

a) 在 E^n 中所有区间的总数;

b) $\max\limits_k\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}2^{n-k}$.

212.在 E^n 中的两个区间如果它们没有公共点,则称这两个区间是“平行的”.

设 $S=\{N_i\}$ 是任一组两两平行的 k 维区间组.

a) 求证 $|s|\leqslant 2^{n-k}$;

b) 作出一个有 2^{n-k} 个两两平行的区间的组.

213.证明:E^n 中包含给定的 p 维区间的 k 维区间的个数等于 $\begin{pmatrix}n-p\\n-k\end{pmatrix}$.

214.设点 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in E^n$ 且 $\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=t$.又设 E^n 中同时包含点 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的 k 维区间的个数为 $m_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,求证

$$m_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}n-t\\k-t\end{pmatrix}$$

215.设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}\subseteq E^n$,而且各点 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 都是矩阵 $\boldsymbol{A}=(d_{ij})$ 的行.若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中一定包含 0 与 1 的列的个数为 $d(\boldsymbol{A})$.求证:E^n 中同时包含点

$\{a_1\cdots a_m\}$ 的 k 维区间的个数等于$\binom{n-d(A)}{k-d(A)}$.

注:自然将数 $d(A)$ 称为在集合$\{a_1,\cdots,a_m\}$ 中的广义距离.

216.设 $f(x_1\cdots x_n)$ 是单调的布尔函数,f_s 是这个函数在层 E_s^n 上的单位的个数.求证:

a)$(s+1)f_{s+1}\geqslant(n-s)f_s, s=0,1,\cdots,n-1$;

b)若 $\overline{f}_s(n)=\dfrac{1}{\binom{n}{s}}\sum\limits_{x\in E_s^n}f(x_1\cdots x_n)$,则$\overline{f_{s+1}}(n)\geqslant\overline{f}_s(n)$.

217.证明:若布尔多项式 $p(x_1\cdots x_n)$ 是单调函数,那么在 p 中的单项式的个数一定为奇数.

218.设 $\Psi(n)$ 是依赖于 n 个变量的单调函数的个数,求证:

a)$\Psi(1)=3,\Psi(2)=6,\Psi(3)=20$;

b)$\Psi(n)\geqslant 2\binom{n}{\frac{n}{2}}$;

c)$\Psi(n)<2^{2^{n-1}}$.

219.证明:布尔函数的热加尔金多项式的表达式是唯一的.

220.求下列多项式的零点的个数:

a)$\sigma_2(x_1,x_2\cdots x_n)=\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

b)$\rho_1(x_1,\cdots,x_n)=x_1+x_1x_2\cdots x_n$;

c)$\rho_2(x_1,\cdots,x_n)=x_1+x_2x_3\cdots x_n$;

d)$\rho_3(x_1,x_2,\cdots,x_{2k})=x_1x_2+x_3x_4+\cdots+x_{2k-1}x_{2k}$;

e)$\rho_4(x_1,\cdots,x_n)=1+x_1+x_1x_2+x_1x_2x_3+\cdots+x_1x_2\cdots x_n$.

221.求 n 个变量的 k 次多项式的个数.

222.求恰好有 m 个单项式的 n 个变量的 k 次多项式的个数.

223.若多项式 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 满足

$$p(x_1,\cdots,x_n)=u(x_1,\cdots,x_n)v(x_1,\cdots,x_n)$$

其中,u,v 为多项式且 $u\neq p,v\neq p$,则称 p 为可约的.求:

a) 布尔多项式不可约的准则;

b) n 个变量的不可约多项式的个数.

224. 求:

a) n 个变量的对称的布尔函数的个数;

b) n 个变量的自对偶函数的个数.

225. 证明:每一个对称的布尔函数可以用唯一的方式表示为以下的形式

$$f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{i=0}^{n} \gamma_i \sigma_i(x_1,\cdots,x_n)$$

其中 $\sigma_i(x_1,\cdots,x_n)$ 是第 i 个初等对称多项式,且 $\gamma_i = \{0,1\}$.

226. 设线性方程组 $L_i(x_1,\cdots,x_n) = d_i, i = 1,2,\cdots,m$,秩为 r,求它的解的个数.

227. 求下列方程的解的个数

$$\bigwedge_{i=1}^{k} L_i(x_1,\cdots,x_n) = 0$$

其中 $L_i(x_1,\cdots,x_n)$ 为线性函数.

228. 设 s 为下列方程组的解的个数

$$f_i(x_1,\cdots,x_m) = 0 \quad i = 1,2,\cdots,n$$

且 N 为如下方程的解的个数

$$\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(x_1,\cdots,x_m) = 0$$

其中左端为 $n + m$ 元函数.

证明关系式

$$s \times 2^n + (2^m - s)2^{n-1} = N$$

229. 求证:方程组

$$f_i(x_1,\cdots,x_m) = 0 \quad i = 1,2,\cdots,n$$

的解的个数等于下列方程的解的个数

$$1 + (1 + f_1)(1 + f_2)\cdots(1 + f_n) = 0$$

230. 对于布尔函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$,如果存在非零向量 $\boldsymbol{h} \in E^n$,使得对所有 $\boldsymbol{x} \in E^n$ 成立 $f(\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x})$,则称 f 为周期函数.

求解下列问题:

a) 证明:n 个变量的布尔函数不可能有多于 2^{n-1} 个不同的周期;

b) 作出恰好有 2^{n-1} 个周期的函数;

c) 证明:对称的布尔函数只可能以向量 $h=(1,1,\cdots,1)$ 为周期;

d) 写出使初等对称多项式 $\sigma_2(x_1,\cdots,x_n)$ 为周期函数的所有的 n 值;

e) 求出使多项式 $\sigma_k(x_1,\cdots,x_n)$ 为周期函数的条件.

231. 设 $S=\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}$ 是满足下列条件的布尔函数的集合:它们在规定的点 $x\in E^n$ 取零值的函数的个数为 t,而且 t 与 x 无关.将集合 S 中的函数的根的最大个数记为 $r(s)$.

证明不等式

$$r(s)\geqslant\frac{t\times 2^n}{N}$$

232. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 为"线性化的"布尔函数,即 f 表示为如下形式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=L_1\times L_2\times\cdots\times L_m$$

其中 $L_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是线性布尔多项式.

求使 f 为自对偶函数应满足的条件.

233. 证明以下等式

$$f(x_1,\cdots,x_n)=x_n[f(x_1,\cdots,x_{n-1},1)+f(x_1,\cdots,x_{n-1},0)]+f(x_1,\cdots,x_{n-1},0)$$

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}}f(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)(x_1+\overline{\alpha_1})\cdots(x_n+\overline{\alpha_n})$$

6. 有限集的组合学

这一篇是一组与有限集的子集系相关的问题，这一类问题是组合分析的重要组成部分，而且得到广泛的研究. 如平常那样，这一部分的问题的表述极其简单，而解答往往并不是肤浅的.

记号：

A 表示有限集合；

2^A 表示集合 A 的所有子集的系；

$\binom{A}{k}$ 表示集合 A 的所有 k 个元素的子集的系；

$|A|$ 表示集合 A 的元素的个数.

如果没有特别的说明，将所述问题的"解"理解为"有序的"解.

问　　题

234. 求证：

a) $|2^A| = 2^{|A|}$；

b) $\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{|A|}{k}$；

c) 若 $x \subseteq A$，则 $2^{X} = 2^{A} \setminus 2^{X}$.

235. 求下列方程的解的个数：

a) $X \cup Y = A$，其中 $X, Y \in 2^A$；

b) $X \cup Y = A$，其中 $X, Y \in 2^A$，$X \cap Y = \varnothing$；

c) $X \cup Y = A$，其中 $X, Y \in \binom{A}{k}$.

236. 求下列方程的解的个数：

a) $X \cap Y = a$，其中 $X, Y, a \in 2^A$；

b) $X \cap Y \neq \varnothing$,其中 $X, Y \in 2^A$;

c) $X \cap Y \neq \varnothing$,其中 $X \in \binom{A}{p}, Y \in \binom{A}{q}$.

237. 求下列方程组的解的个数:

a) $X \cup Y = A$;

b) $X \cap Y = b$,其中 $b \subseteq A$.

238. 求下列方程的解的个数:

a) $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k = a$,其中 $X_i, a \in A$;

b) $X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_k = a$,其中 $X_i, a \in A, X_i \neq \varnothing, i = 1,2,\cdots,k$.

239. 设 $a \in 2^A$.求"不等式"$a \subseteq X \cup Y$ 的解,其中 $X, Y \in 2^A$.

240. 设 $V^* = \{V_1,\cdots,V_k\}$ 为集合 A 的满足条件 $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k = \varnothing$ 的子集系.证明这个子集系的个数等于 $(2^k - 1)^{|A|}$.

241. 设 $V^* = \{V_1,\cdots,V_k\}$ 为集合 A 的满足条件 $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_k \neq \varnothing$ 的子集系.求这个系的个数.

242. 设 $V = \{V_1, V_2,\cdots,V_k\}$ 为集合 A 的满足下列条件的子集系:其中任意两个子集有不空的交集.证明:$k \leqslant 2^{|A|-1}$.

243. 设 $V = \{V_1, V_2,\cdots,V_k\} \subseteq 2^A$,且 V 至少满足下列性质中的一项:

a) $V_i \not\subset V_j, i,j = 1,2,\cdots,k$;

b) $V_i \neq V_j \cup V_s, i,j,s = 1,2,\cdots,k$;

c) $V_i \neq V_j \cup V_s, i,j,s = 1,2,\cdots,k$.

求证:$k \leqslant \binom{|A|}{\frac{|A|}{2}}$.

244. 证明:若 $V = \{V_1, V_2,\cdots,V_k\} \subseteq 2^A$ 且 $|V_i \cap V_j| \leqslant r$,则 $k \leqslant \sum_{i=0}^{r+1} \binom{|A|}{i}$.

245. 设 $V = \{V_1, V_2,\cdots,V_k\} \subseteq 2^A$, $|V_i \cap V_j| = r, i,j = 1,\cdots,k$.

证明:$k \leqslant |A|$.

246. 设

$$V = \{V_1, V_2,\cdots,V_k\} \subseteq 2^A$$

$$|V_i| \equiv 1 \pmod 2) \quad i = 1, \cdots, k$$

$$|V_i \cap V_j| \equiv 0 \pmod 2) \quad i, j = 1, \cdots, k$$

证明：$k \leqslant |A|$.

247. 设 $$V = \{V_1, V_2, \cdots, V_k\} \subseteq 2^A$$

且 $$V_i \cap V_j = \varnothing \quad i, j = 1, 2, \cdots, k$$

证明：$k \leqslant |A|$.

248. 设 $$V = \{V_1, V_2, \cdots, V_k\} \subseteq 2^A$$

且

$$V_i \cap V_j \neq \varnothing$$

$$V_i \cap V_j \cap V_r = \varnothing \quad i, j, r = 1, \cdots, k$$

证明不等式 $k \leqslant \left[\dfrac{1 + \sqrt{8n + 1}}{2}\right]$，其中 $n = |A|$.

并作出基数为 $\left[\dfrac{1 + \sqrt{8n + 1}}{2}\right]$ 的族 V.

249. 设 $A = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 为任意的集合，子集系

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$$

其中 $X_i \in 2^A, i = 1, \cdots, m$，若满足 $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{m} X_i$，则称 X 为 A 的一个覆盖.

证明集合 A 的覆盖的个数满足不等式

$$2^{2^n} - \sqrt{2^{2^n}} < m(A) < 2^{2^n}$$

7. 字与序列的组合学

这一篇的问题是十分著名的论题，它们与下列学科有着广泛**的联系：数学的语言学、自动机理论**、编码理论，以及离散数学的其他分支.

字母表 $A = \{a_1a_2\cdots a_m\}$，指任何有限的集合.

字母表 A 上的字指任何的序列 $b = b_1b_2b_3\cdots$，其中 $b_i \in A$.

字 $\boldsymbol{a} = \{b_1\cdots b_k\}$ 的长度，这是指在字 a 中字母的个数，即 $|\boldsymbol{a}| = k$.

字 $\boldsymbol{a} = \{b_1\cdots b_k\}$ 的片断，是指序列 $\{b_1b_2\cdots b_k\}$ 的任何子序列.

字 $\boldsymbol{a} = \{b_1\cdots b_k\}$ 的子字，是指形式如 $b_sb_{s+1}\cdots b_{s+l}$ 的片断.

二进制字或二元字，这是指在字母表 $\{0,1\}$ 上的字.

字 q **的组**，指由相同的字母组成的任何最大的子字.

例 1 设 $A = \{0,1,2\}$，且 $a = (0111220010)$，那么子字 0,111,22,00,1,0 都是字 a 的组.

字 a 与 b 的最大公共子字(a,b)（Наибольшим общим подсловом(a,b) для слов a и b），**指作**为两个字 a 与 b 的片段的最大长度的字.

将这个字的长度记为 $d(a,b)$.

字 a 与 b 的最小公共长字(a,b)（Наименьшим общим надсловом(a,b) для слов a и b），**指包**含 a 与 b 两个字作为片段的最小长度的字.**将这个字的长度记为** $D(a,b)$.

$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$**表示在**字 U 中，片断 V 出现的次数.

例 2 $\begin{pmatrix} ab & ab \\ & ab \end{pmatrix} = 3$，$\begin{pmatrix} aab & baa \\ & aba \end{pmatrix} = 8$.

问　　题

250. 设字母表是 $A = \{a_1,\cdots,a_n\}$，求：

a) 在字母表 A 上长度为 n 的字的个数;

b) 长度为 n,在指定的位置 j 上包含指定的字母 a_i 的字的个数;

c) 长度为 n,包含指定的字母 $a_i \in A$ 的字的个数;

d) 长度为 n,且不包含接连相同字母的二元($m = 2$)字的个数;

e) 长度为 n,且含有指定的长度为 k 的片段的二元字的个数.

251. 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是二元字. 证明:

a) 以 $\| a \|$ 表示在字 a 中 1 的个数,那么在字 a 中形如(11)的片段的个数等于$\binom{\| a \|}{2}$.

b) 在字 a 中形如(01)的片段的个数等于$\sum\limits_{i=1}^{n} i\alpha_i - \binom{\| a \| + 1}{2}$.

252. 设 $A = \{1, 2, \cdots, m\}$,字 $a = (a_1 a_2, \cdots, a_n)$ 在字母表 A 上,如果 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n$,则称字 a 是单调的. 求在字母表 A 上长度为 n 的单调字的个数.

253. 求:

a) 长度为 n,恰好有 k 个组的二元字的个数;

b) 长度为 n,恰好有 k 个单位组的二元字的个数;

c) 在字母表 $\{a_1 \cdots a_m\}$ 上长度为 n,恰好有 k 个组的字的个数.

254. 设 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为二元字,求:

a) 字 a 的片段的总数;

b) 字 $a = (\underbrace{11\cdots1}_{k}\underbrace{0\cdots0}_{n-k})$ 的不同的片段的个数;

c) 字 $a = (\underbrace{0\cdots0}_{t_1}\underbrace{1\cdots1}_{t_2}\underbrace{0\cdots0}_{t_3})$ 的不同的片段的个数.

255. 设 a 是长度为 n 的二元字:

a) 求字 a 的长度为 $n-1$ 的不同的片段的个数;

b) 在长度为 n 的所有字的集合上,这个量的极值是什么?

256. 求在字 $\varepsilon_n = (1010\cdots10)$ 中长度为 $n-2$ 的不同的片段的个数.

257. 对已知的长度为 n 的二元字 a 恰好"增加"一个字母,问可以得到多少个长度为 $n+1$ 的不同的字?

258. 将二元字 $a = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 n-通用的,这是指所有长度为 n 的

二元字都被 a 所包含作为 a 的片段.证明:任何 n - 通用字的长度不小于 $2n$.并作出长度为 $2n$ 的 n - 通用字.

259.将在字母表 $A=\{1,2,\cdots,k\}$ 上的字 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为 k - 通用的,这是指数字 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的任何排列都是 a 的片断.

求解下列问题:

a) 作出长度最小的 3 - 通用字与 4 - 通用字;

b) 证明:任何 k - 通用字的长度 n 不小于 $\binom{k+1}{2}$;

c) 作出长度不大于 k^2 的 k - 通用字.

260.设 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=n$.证明下列结论:

a) $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})+D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=2n$;

b) 函数 $\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})-n$ 是 E^n 上的一个度量.

261.将二元字的集合 B 称为前缀集,这是指 B 中的任何一个字都不是这个集合中其他字的开端.

设在集合 B 中长度为 i 的字的个数是 l_i,证明不等式 $\sum_i l_i\cdot 2^{-i}\leqslant 1$.

262.设 A 为字母表,而 A^* 是在字母表 A 上的字的满足下述条件的任一个集合:使得任何一个字 $a\in A^*$ 都不是另一个字 $b\in A^*$ 的片断.证明:A^* 为有限集合.

8. 概率内容的问题

这一篇提供带有明显概率特色的组合问题，在离散数学内以及它的许多应用中，这类问题都有十分广泛的发展. 组合分析与概率论的联系是十分深刻与多种多样的. 与本书前面的例行做法一样，我们不再引述概率论的任何初始的定义与基本的事实，期望在这个领域(为数不多的)读者已熟悉相应的内容.

问　　题

263. 求从 E^n 中随机选择的向量具有汉明重量为 k 的概率.

264. 求 E^n 中的向量的汉明重要的"平均值".

265. 设 $S_n^t(\alpha)$ 是在 E^n 中以 α 为球心，半径等于 t 的固定的球体，随机地选择一个半径为 1 的球，求这个球与球 $S_n^t(\alpha)$ 相交的概率.

266. 求下列平均距离：

a) 在立方体 E^n 的各点之间；

b) 在层 E_k^n 的各点之间；

c) 在球体 $S_n^t(\alpha)$ 的各点之间.

267. 从 E^n 中随机地选出 2 个向量，在下列条件下求这两个向量正交的概率：

a) 在域 $F_2 = \{0,1\}$ 上；

b) 在实数域上.

268. 设 ξ 为随机变量，它平均地分布在所有点对 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E^n$ 的集合上，并且等于向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ (在实数域上) 的数积.

证明下列结论：

a) $P_k = P\{\xi = k\} = \dfrac{\dbinom{n}{k}}{4^n} \cdot 3^{n-k}$；

b) $\sum_{k=0}^{n} P_k \cdot z^k = \frac{(z+3)^n}{4^n}$;

c) $M\xi = \frac{n}{4}$;

d) $D\xi = \frac{3n}{16}$.

269. 设 ξ 为随机变量，它平均地分布在所有点对 x, y 的集合上，其中 $\boldsymbol{x} \in E_p^n$，而 $\boldsymbol{y} \in E_q^n$，并且等于向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$（在实数域上）的数积. 记 $a_{p,q}(k) = P\{\xi = k\}$.

证明下列结论：

a) $\sum_{k=0}^{n} a_{p,q}(k) z^k = \frac{1}{2\pi \cdot i} \binom{n}{p} \oint_{|u|<\rho} \frac{(1+z \cdot u)^p \cdot (1+u)^{n-p}}{u^{q+1}} du$;

b) $a_{p,q}(k) = \frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{q-k}}{\binom{n}{q}}$;

c) $D\xi = \frac{p \cdot q}{n}$;

d) $D\xi = \frac{p \cdot q}{n(n-1)} \cdot \left(n + \frac{p \cdot q}{n} - (p+q)\right)$.

提示：建议从点 a 开始所有计算.

270. 设 $\varphi(A, B)$ 为随机变量，它等于：

a) 两个集合的交 $A \cap B$ 的基数，其中 $A, B \in 2^C$，且 $C = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$;

b) 两个集合的并 $A \cup B$ 的基数，其中 $A, B \in 2^C$，且 $C = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$;

c) 集合 $A \cap B$ 的基数，其中 $A \in \binom{C}{p}$ 且 $B \in \binom{C}{p}$.

求以上的随机变量的分布及一阶矩与二阶矩.

271. 求在立方体 E^n 中随机选择的两个顶点是可比较的概率.

272. 求长度为 n 的二元字系列的个数的分布、数学期望与方差.

273. 对于二元字的单位系列的个数求它的分布、数学期望与方差.

274. 求 $(n \times n)$ 维的随机 $(0,1)$ 矩阵在域 $F_2 = \{0,1\}$ 上是非退化的概率.

275. 设 ξ 为随机变量，它均匀地分布在 $(m \times n)$ 阶二元矩阵的集合上，而且等于矩阵的零列的个数.

证明：

a) $P_k(m,n)=P\{\xi=k\}=\binom{n}{k}\left(\frac{(2^m-1)^{n-k}}{2^{m\cdot n}}\right)$；

b) $M_\xi=\frac{n}{2^m}$；

c) 若 $2^m-1=\alpha\cdot n$，这里 α 与 n 无关，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}P_k(m,n)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$，其中 $\lambda=\alpha^{-1}$.

276. 以随机的方式将半径为 t 的 s 个球"抛"在立方体 E^n 上，求立方体的"无覆盖的"点的"平均"数.（若点 $a\in E^n$ 没有进入所抛的任一个球内，则称这个点为"无覆盖的"）

277. 在立方体 E^n 中以随机的方式选出 S 个点，求不包含这 S 个点中任何一点的 k 维区间的个数的"平均数".

278. 在立方体 E^n 的第 r 层以随机的方式选出 λ_r 个点，其中 $r=0,1,\cdots,n$. 将这些点作为参数 $\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的函数，求不包含这 $n+1$ 个点中任何一点的众多 k 维区间的"平均数".

279. 求在 n 阶二元矩阵类上的各积和式的"平均"值.

280. 设 n 阶矩阵的元素取三个值：0，1，2，求在这一类矩阵上的各积和式的"平均"值.

281. 求自然数 n 的因子个数的"平均值".

282. 求自然数 n 的各因子的"平均的"和数.

283. 设 $S(n)=\frac{\sigma(n)}{n}$，证明 $\overline{S}(n)=\frac{\pi^2}{6}+o(1)$.

284. 求：

a) n 个变量的热加尔金多项式的所有根的平均数；

b) n 个变量的 k 次热加尔金多项式的所有根的平均数.

9. 综合题

本篇收集的一些问题,它们的内容在上列各篇之中.不过,其中一些也可以确定为单纯的代数问题、数论问题,或“纯粹的”组合学问题等.

问　　题

285. 求下列$(m \times n)$维二元矩阵的个数:

a) 没有零列;

b) 恰好有 k 个零列;

c) 有 1 个零行和 1 个零列;

d) 恰好有 p 个零行和 q 个零列.

286. 求下列$(m \times n)$维二元矩阵的个数:它的每一行的汉明重量等于 k.

287. 求下列$(m \times n)$维二元矩阵的个数:它的每一行的汉明重量为 k,而且零列的个数等于 r.

288. 求下列$(m \times n)$维二元矩阵的个数:它的每一行与每一列恰好有一个 1.

289. 将二元矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零列的个数称为这个矩阵的重量,并将它记为 $W(\boldsymbol{A})$.

求:

a) 重量为 k 的$(m \times n)$矩阵的个数;

b)$(m \times n)$矩阵的“平均的”重量;

c) 汉明重量为 k 的矩阵的“平均的”重量.

290. 设 $\boldsymbol{E}_n$ 为 n 阶单位阵,$\boldsymbol{\alpha}_{si}$ 是 $\boldsymbol{E}_n$ 的重量为 i 的$(s \times n)$阶子阵,证明

$$
\| \boldsymbol{\alpha}_{si} \| = \left\| \begin{matrix} \binom{n}{0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \binom{n}{1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{matrix} \right\|
$$

291. 设 $\boldsymbol{Q}_n$ 是 n 阶(0,1) 方阵的类,它的元素按行或按列都是不减的. 证明 $| \boldsymbol{Q}_n | = \binom{2n}{n}$.

292. 写出整数的加法群的所有子群.

293. 当$(m,n) = 1$时,求整数方程 $x^m = y^n$ 全部的解.

294. 考虑线性丢番图方程 $ax + by = 1$,其中 a,b,x,y 都是整数. 设(x_0,y_0)是这个方程的任一个解. 证明:方程的解集可以表示为下面序列的形式

$$x_n = x_0 - bn$$

$$y_n = y_0 - an$$

其中 n 为任意的整数.

295. 考虑环 $Z(\sqrt{2})$,它的元素形式为 $a + b\sqrt{2}$,其中 a,b 为整数. 求:

a) 环的可逆元素;

b) 佩尔(Pell) 整数方程 $x^2 - 2 \cdot y^2 = 1$ 的所有解.

296. 证明:当且仅当 n 能整除 m 时,多项式 $x^n - 1$ 能整除多项式 $x^m - 1$.

297. 证明:在整数集上的线性型 $ax + by$ 的正的最小值为(a,b),其中 a,b 是整数.

298. 证明:在以坐标原点为圆心,半径为 n 的圆内的整点的个数渐近地等于 $\pi\sqrt{n}$.

299. 求线性方程组

$$
\begin{cases} x_{ij} + x_{jk} = x_{ik} \\ x_{ij} = x_{ji} \end{cases} \quad i,j = 1,2,\cdots,n
$$

的所有解.

300. 证明：如果矩阵 $\boldsymbol{A} = (r_{ij})$ 满足下列条件：对于任何置换

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

成立关系式 $\sum\limits_{i=1}^{n} r_{i\sigma(i)} =$ 常数，那么存在一组 $2n$ 个数 $\{U_i\}\{V_j\}$，使得当 $i,j = 1, 2\ \cdots, n$ 时，成立 $r_{ij} = U_i + V_j$.

301. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 为区间 $[1, n]$ 中符合下述条件的自然数：使得所有和数 $a_i + a_j$ 两两不相等. 证明以下结论：

a) $m \leqslant 2\sqrt{n} + 1$;

b) 若 $m^3 + m < n$，那么集合 $\{a_1, \cdots, a_m\}$ 可以"扩充"：还可用区间 $[1, n]$ 中的数补充到该集合中去.

302. 设 $S = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是正数的集合. 考虑这些数的各种可能的和数的集合（不限制加项的个数）. 证明：从这些和数中可以选出的不相等的数不少于 $\binom{n+1}{2}$ 个.

303. 设 $S = \{1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leqslant n\}$ 为某一个自数集合. 如果所有和数 $\sum\limits_{a_i \in H \subseteq S} a_i$ 是两两不相等的，则称集合 S 为差异集. 证明下列结论：

a) $k < \log_2 n + \log_2 \log_2 n + o(1)$;

b) 当 $k = [\log_2 n] + 1$ 时，存在差异集.

304. 当 $1 \leqslant k \leqslant n$ 时，设 $0 \leqslant a_k \leqslant 1$. 考虑形如 $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i a_i$ 的所有可能的和数，这里 $\xi_i = \{\pm 1\}$. 证明：在长度为 2 的任意区间的"内部"，这样的和数的个数不大于 $\binom{n}{\frac{n}{2}}$.

305. 设 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 为平面上的 n 个点，且 $D = \max\limits_{i,j} \rho(A_i, A_j)$，$d = \min\limits_{i,j} \rho(A_i, A_j)$.

证明：$\dfrac{D}{d} > \dfrac{\sqrt{n} - 1}{2}$.

306. 在平面上给定 n 个点，证明：顶点在这些点上的最短的折线没有自交

性.

307. 考虑任意的实数矩阵 $A = (a_{ij})$ 及下述变换 $T_k(A)$：将 A 的 k 行或 k 列的数字同时改变符号. 求证：应用若干次这样的变换之后可以得到这样的矩阵 A'：其中所有行的元素之和或所有列的元素之和是非负的.

308. 设 $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{2^k})$ 是以 $\alpha_i = \{\pm 1\}$ 为元素的任意向量，T_a 是下述变换

$$T(\boldsymbol{a}) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{2^k})$$

其中，$\beta_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2, \beta_3 = \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \cdots, \beta_{2^k} = \alpha_{2^k-1} \cdot \alpha_{2^k}$，且 $\beta_1 = \alpha_{2^k} \cdot \alpha_1$. 然后，按归纳法定义

$$T^m(\boldsymbol{a}) = T(T^{m-1}(\boldsymbol{a})), T(\boldsymbol{a}) = T^1(\boldsymbol{a})$$

证明存在这样的数 n，使得 $T^n(\boldsymbol{a}) = (11\cdots1)$.

309. 考虑方程组

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \cdot x_j \equiv 0 (\bmod q_i) \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

其中 α_{ij} 为整数，而 $x_j = \{0, 1\}$.

证明：若 $n \geqslant (q_1 \cdots q_m)^2$，则这个方程组可解.

310. 设 M 为有限集合，G 为 M 到自身的某个变换群. 对于每一个变换 $T \in G$，以 $N(T)$ 表示变换 T 的“不动”点的个数. 设 $r(G)$ 为由在集合 M 上的群 G 所确定的轨道（可迁集合）的个数. 证明

$$r(G) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{\tau \in G} N(T)$$

通常将这个结果称为伯恩赛德（Burnside）引理.

311. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in E^n$，而且 T 为在 E^n 中的“位移”变换，即

$$T(x_1, \cdots, x_n) = (x_n, x_1, \cdots, x_{n-1})$$

求这个变换的“长度”与轨道的个数.

312. 设 $P_n = \{2, 3, 5, \cdots\}$ 为开始的 n 个素数，且 $P_n = A \cup B$，其中 $A \cap B = \varnothing$.

证明：差值 $Q = \left| (\prod_{p \in A} p)^s - (\prod_{p \in B} p)^r \right|$ 具有下列性质：或者 $Q = 1$，或者对于任意的自然数 S 与 r，及对于将 P_n 任意分解为两个集合都有 $Q \geqslant P_{n+1}$.

313. 设 Z_n 为凸的 n 角形,其中任三条对角线都不相交于一点. 证明:对角线的交点个数等于$\binom{n}{4}$.

314. 证明不等式$\sum_{s=1}^{n-1}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant n-1}\frac{1}{i_1 i_2\cdots i_s}=\frac{n}{2}$.

10. 答案与解法

1. 由题,有

$$\sum_{k=0}^{m} 4^k \binom{m+k}{2k}\binom{n}{m+k} = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k \cdot \underset{u}{coef}\{(1+u)^{m+k}u^{-2k-1}\} \times$$

$$\underset{v}{coef}\{(1+v)^n v^{-m-k-1}\}$$

因为 $coef\left\{\dfrac{(1+u)^{m+k}}{u^{2k+1}}\right\} = 0$,当 $k > m$ 时.

其次

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4^k \underset{u}{coef}\{(1+u)^{m+k}u^{-2k-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^n v^{-m-k-1}\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{4(1+u)}{u^2}\right]^k \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^m}v^{-k-1}\right\}\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\cdot\frac{\left[1+\dfrac{4(1+u)}{u^2}\right]^n}{\left[\dfrac{4(1+u)}{u^2}\right]^m}\right\} = \frac{1}{4^m}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(u+2)^{2n}}{u^{2(n-m)+1}}\right\} = \binom{2n}{2m}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2k}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{8}\right)^k coef\{(1-4n)^{-\frac{1}{2}}u^{-k-1}\} = \left(1+4\cdot\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

3. 由题,有

$$\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-4)^{-i}\binom{n-i}{i} = \sum_{i=0}^{\infty}(-4)^{-i}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-k}u^{-n+2i-1}\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\sum_{i=0}^{\infty}\left[-\frac{u^2}{4(1+u)}\right]^i\right\} = 4\ \underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}(u+2)^2}\right\}$$

因为函数

$$\varphi(u)=\frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}(u+2)^2}$$

为有理函数,而且分母的次数比分子的次数高 2 次,所以它在无穷远点的留数 $\varphi(u)$ 为零.应用解析函数关于它的所有奇点的留数之和等于零的定理,我们得知 $\varphi(n)$ 在零点的留数等于 $\varphi(u)$ 在点 $u=-2$ 的留数的相反数.

其次,因为

$$\operatorname*{res}_{u=-2}\varphi(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[\frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}}\right]_{u=-2}=-\frac{n+1}{2^{n+2}}$$

所以
$$\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}(u+2)^2}\right\}=\frac{n+1}{2^{n+2}}$$

因此
$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-4)^{-i}\binom{n-i}{i}=\frac{n+1}{2^n}$$

4.首先注意到

$$\binom{2m+1}{2k}=\binom{2m+1}{2m-2k+1},\binom{n+k}{2m}=(-1)^{n+k}\binom{-(2m+1)}{n+k-2m}$$

经过简单的变换得到

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1}{2k}\binom{n+k}{2m}=$$

$$\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{2m+1}}{v^{2m+1}}\sum_{k=0}^{\infty}(v^2)^k\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1-u)^{-(2m+1)}}{u^{n-2m}}u^{-k-1}\right\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{2m+1}}{v^{2m+2}}\cdot\frac{(1-v^2)^{-(2m+1)}}{v^{2n-4m}}\right\}=$$

$$\binom{-(2m+1)}{2n-2m+1}(-1)^{2n-2m+1}=\binom{2n+1}{2m}$$

当 $n\geqslant m$ 时.

5.应用微分法则得

$$\sum_{k=0}^{n}k\binom{u}{k}^2=\sum_{k=0}^{n}k\binom{u}{k}\operatorname*{coef}_{u}\{(1+u)^n u^{-k-1}\}=$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\operatorname*{coef}_{u}\{n(1+u)^{n-1}(u^{-k})\}=$$

$$n \cdot \underset{u}{coef}\left\{(1+u)^{n-1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{u^k}\right)\right\} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$$

6. 由题,有

$$\sum_{i=0}^{j}(-1)^i\binom{j}{i}\binom{n-i-1}{j-1} = \sum_{i=0}^{j}\underset{u}{coef}\{(1-u)^j u^{-i-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{n-i-1}v^{-j}\} =$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n-1}}{v^j}\sum_{i=0}^{j}\left(\frac{1}{1+v}\right)^i \underset{u}{coef}\{(1-u)^j u^{-j-1}\}\right\} =$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n-j-1}}{v^0}\right\} = 0$$

7. 将和数写成下列形式

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\binom{n-i}{r} = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-i}u^{-r-1}\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{r+1}}\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m}{i}\left(\frac{1}{1+u}\right)^i\right\}$$

然后按上述的方式作标准的计算.

8. 由题,有

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\binom{s+k}{n} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \underset{u}{coef}\{(1+u)^r u^{-r+k-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{s+k}v^{-n-1}\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^r}{u^{r+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^s}{v^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[u(1+v)]^k\right\}\right\} =$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^s}{v^{n+1}}\ \underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^r}{u^{r+1}}\cdot\frac{1}{1+u(1+v)}\right\}\right\}$$

其次

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^r}{u^{r+1}}\cdot\frac{1}{1+u(1+v)}\right\} = \frac{1}{1+v}\underset{r}{coef}\left\{\frac{(1+u)^r}{u^{r+1}}\cdot\frac{1}{u+\frac{1}{1+v}}\right\} =$$

$$-\frac{1}{1+v}\cdot\frac{\left(1-\frac{1}{1+v}\right)^r}{\left(-\frac{1}{1+v}\right)^{r+1}} = (-1)^r v^r$$

由此得出

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\binom{s+k}{n}=(-1)^r\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^s}{v^{n-r+1}}\right\}=$$

$$\begin{cases}(-1)^r\binom{s}{n-r} & \text{当 } n-r\geqslant 0 \text{ 时}\\ 0 \quad \text{当 } n<r \text{ 时}\end{cases}$$

9.由题,有

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\binom{k}{s}\binom{n-s}{k}=$$

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^s\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^k u^{-s-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{n-s}v^{-n+s+k-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n-k+1}}\sum_{s=0}^{k}\left(-\frac{v}{1+v}\right)^s\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^k u^{-s-1}\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{n-k}}{v^{n-k+1}}\right\}$$

10.因为
$$\binom{p-k}{k}\binom{2(p-k)}{p-k}=\binom{p}{k}\binom{2(p-k)}{p-2k}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]}(-1)^k\binom{p-k}{k}\binom{2(p-k)}{p-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{coef}_u\{(1-u)^p u^{-k-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{2(p-k)}u^{-p+2k-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{2p}}{v^{p+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{v^2}{(1+v)^2}\right]^k\operatorname*{coef}_u\{(1-u)^p u^{-k-1}\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(2v+1)^p}{v^{p+1}}\right\}=2^p$$

11.由题,有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+n}\binom{p+qk}{n}\binom{n}{k}=$$

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^{p+qp}u^{-k-1}\}=$$

$$(-1)^n\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^p}{u^{n+1}}[1-(1+u)^q]^n\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^p q^n}{u}\left[1+\frac{q-1}{2}u+\cdots+u^q\right]^n\right\}=q^n$$

12. 由题,有

$$\sum_{k=0}^{\min(2m,n)}(-1)^{k+m}\binom{n}{k}\binom{n}{2m-k}=$$

$$(-1)^m\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\underset{u}{coef}\{(1+k)^n u^{-2m+k-1}\}=$$

$$(-1)^m\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-u^2)^n}{u^{2m+1}}\right\}=(-1)^{2m}\binom{n}{m}=\binom{n}{m}$$

13. 作代换

$$\binom{k}{r}\binom{s}{k}=\binom{s}{r}\binom{s-r}{k-r}$$

并做通常的计算即得.

14. 作代换

$$\binom{p+s}{p}=(-1)^s\binom{-(p+1)}{s}$$

与

$$\binom{p+2k-s}{p}=(-1)^s\binom{-(p+1)}{2k-s}$$

得到

$$\sum_{s=0}^{2k}(-1)^s\binom{p+2k-s}{p}\binom{p+s}{p}=$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\underset{u}{coef}\{(1-u)^{-(p+1)}u^{-s-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{-(p+1)}v^{-2k+s-1}\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{-(p+1)}}{v^{2k+1}}\sum_{s=0}^{\infty}v^s\,\underset{u}{coef}\{(1-u)^{-(p+1)}\}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1-v^2)^{-(p+1)}}{v^{2k+1}}\right\}=\binom{p+k}{k}$$

15. 在作简单的变换后得到

$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r}{k}\binom{s-kt}{r}=\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^s}{v^{r+1}}\left[1-(1+v)^{-t}\right]^r\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{s-rt}}{v^{2+1}}\left[(1+v)^t-1\right]\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{s-rt}}{v}\left[t+\binom{t}{2}v+\cdots\right]^{r}\right\}=t^{r}$$

16. 作代换$\binom{2k}{k}$后，应用积分法则得到

$$\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}=\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\binom{n+k}{m+2k}\operatorname*{coef}_{u}\{(1-4u)^{-\frac{1}{2}}u^{-k-1}\}=$$

$$\sum(-1)^{k}\binom{n+k}{m+2k}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\left(\int_{0}^{u}(1-4x)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\right)u^{-k-2}\right\}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-m}(-1)^{k}\binom{n+k}{n+2k}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{1-\sqrt{1-4u}}{2}u^{-k-2}\right\}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\operatorname*{coef}_{v}\{(1+v)^{n+k}v^{-m-2k-1}\}\ \operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{1-\sqrt{1-4u}}{2u}u^{-k-1}\right\}$$

因为当 $n\geqslant m$ 时，假设最后的和号的上指标为无穷，因此，当 $k\geqslant n-m$ 时成立

$$\operatorname*{coef}_{v}\{(1+v)^{n+k}v^{-m-2k-1}\}=0$$

然后

$$\sum_{k=0}^{n-m}\frac{(-1)^{k}}{k+1}\binom{n+k}{m+2k}\binom{2k}{k}=$$

$$\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{n}}{v^{m+1}}\sum\left(-\frac{1+v}{v^{2}}\right)^{k}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{1-\sqrt{1-4u}}{2u}u^{-k-1}\right\}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{n-1}}{v^{m-1}}\left[\sqrt{\frac{(v+2)^{2}}{v^{2}}}-1\right]\right\}=\binom{n-1}{m-1}$$

17. 作代换$\binom{n+s-1}{s}=(-1)^{s}\binom{-n}{s}$后得到

$$\sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}(-1)^{s}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s}=$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\operatorname*{coef}_{u}\{(1+u)^{n}u^{-k+2s-1}\}\ \operatorname*{coef}_{v}\{(1-v)^{-n}v^{-s-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1-u)^{-n}}{u^{k+1}}\right\}=\binom{n+k-1}{k}$$

18. 经过简单的变换以后，得

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{-i}\binom{n}{i}\binom{n+si}{si}=\sum_{i=0}^{n}\operatorname*{coef}_{u}\{(1-u)^{n}u^{-i-1}\}\ \operatorname*{coef}_{v}\{(1+v)^{n+si}v^{-n-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n+1}}\sum_{i=0}^{n}((1+v)^s)^i\operatorname*{coef}_u\{(1-u)^n u^{-i-1}\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{n+1}}[1-(1+v)^s]^n\right\}=(-s)^n$$

19. 经过常用的变换以后，得

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+i}{i}=\sum_{i=0}^{n}\operatorname*{coef}_u\{(1-u)^n u^{-i-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{m+i}v^{-m-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^m}{v^{m+1}}(-v)^m\right\}=(-1)^n\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^m}{v^{m-n+1}}\right\}$$

20. 因为 $$i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1}$$

所以 $$\sum_{i=0}^{n}i^2\binom{n}{i}^2=n^2\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}^2=n^2\sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}^2=n^2\binom{2(n-1)}{n-1}$$

21. 基本的表达是

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n-k}{m-k}\binom{p}{k}=\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^{n-k}u^{-n+m-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n-m+1}}\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{p}{k}\left(\frac{1}{1+u}\right)^k\right\}$$

以后的是一般例行的计算.

22. 标准的计算.

23. 标准的计算.

24. 由题，有

$$\sum(-2)^{-k}\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^n u^{-m-k-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{n+m+k}v^{-n-m+1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{n+m}}{v^{n+m+1}}\sum_{k=0}^{n-m}\left(-\frac{1+v}{2}\right)^k\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^m}u^{-k-1}\right\}\right\}$$

以下是常规的计算.

25. 首先注意到$\binom{2n+k}{2k}\binom{2k}{k}=\binom{2n+k}{2n}\binom{2n}{k}$，然后有

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n+k}{2k}\binom{2k}{k}2^{2n-k}=$$

$$\sum_{k=0}^{2n} 2^{2n-k} \operatorname*{coef}_u\{(1-u)^{2n}u^{-k-1}\} \operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{2n+k}v^{-2n-1}\} =$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{2^{2n}(1+v)^{2n}}{v^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{1+v}{2}\right)^k \operatorname*{coef}_u\{(1-u)^{2n}u^{-k-1}\}\right\} = (-1)^n\binom{2n}{n}$$

26.利用下列表达式

$$\binom{2k}{k} = \operatorname*{coef}_u\{(1-4u)^{-\frac{1}{2}}u^{-k-1}\}$$

$$\binom{2n-2k}{n-k} = \operatorname*{coef}_v\{(1-4v)^{-\frac{1}{2}}v^{-n+k-1}\}$$

以下的计算是标准的.

27.标准的计算.

28.首先注意到

$$\binom{p-k}{k}\binom{2(p-k)}{p-k} = \binom{p}{k}\binom{2(p-k)}{p-2k}$$

其次有

$$\sum_{k=0}^{[\frac{p}{2}]}(-1)^k\binom{p-k}{k}\binom{2(p-k)}{p-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{coef}_u\{(1-u)^p u^{-k-1}\} \operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{2(p-k)}v^{-p+2k-1}\} =$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{2p}}{v^{p+1}} \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{v^2}{(1+v)^2}\right]^k \operatorname*{coef}_v\{(1-u)^p u^{-k-1}\}\right\} =$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(2v+1)^p}{v^{p+1}}\right\} = 2^p$$

29.我们有

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k 2^{-k}\binom{2n}{k}\binom{2k}{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{2n} 2^{-k} \operatorname*{coef}_u\{(1-u)^{2n}u^{-k-1}\} \operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{2k}v^{-k-1}\} =$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{1}{v}\sum_{k=0}^{2n}\left[\frac{(1+v)^2}{2v}\right]^k \operatorname*{coef}_u\{(1-u)^{2n}u^{-k-1}\}\right\} =$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v^2)^{2n}}{2^{2n}v^{2n+1}}\right\} = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$$

30.在通常的计算后得到

$$\sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k 2^{-k}\binom{2n-1}{k}\binom{2k}{k}=$$

$$\sum_{k=0}^{2n+1}2^{-k}\operatorname*{coef}_u\{(1-u)^{2n+1}u^{-k-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{2k}v^{-k-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{1}{v}\sum_{k=0}^{2n+1}\left[\frac{(1+v)^2}{2v}\right]^k\operatorname*{coef}_u\{(1-u)^{2n+1}v^{-k-1}\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{1}{v}\left(1-\frac{(1+v)^2}{2v}\right)^{2n+1}\right\}=-\frac{1}{2^{2n+1}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v^2)^{2n+1}}{v^{2n+2}}\right\}=0$$

其中因为$(1+v^2)^{2n+1}$的展开式中只有 v 的偶次项.

31.在标准的计算后得到

$$\sum_{k=0}^{n}2^k\binom{2n-k}{n}=\sum_{k=0}^{\infty}2^k\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^{2n-k}u^{-n+k-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{2n}}{u^{n+1}}(1-u)^{-1}\right\}=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i}=2^{2n}$$

32.我们有

$$\sum_{k=0}^{m}4^k\binom{m+k}{2k}\binom{n}{m+k}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}4^k\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^{m+k}u^{-m+k-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+v)^n v^{-m-k-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^m}{u^{m+1}}\sum_{k=0}^{\infty}[4n(1+u)]^k\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^n}{v^m}v^{-k-1}\right\}\right\}=$$

$$\frac{1}{4^m}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(2u+1)^{2n}}{u^{2m+1}}\right\}=\binom{2n}{2m}$$

33.利用如下表达式

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^{n+k}u^{-n+k-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+4v)^{-\frac{1}{2}}v^{-k-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}[u(u+1)]^k\operatorname*{coef}_v\{(1+4v)^{-\frac{1}{2}}v^{-k-1}\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}[1+4u(1+u)]^{-\frac{1}{2}}\right\}=\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}(2u+1)}\right\}$$

运用前面所提出的想法,我们求得函数 $\varphi(u)=\dfrac{(1+u)^n}{u^{n+1}(2u+1)}$ 在点 $u=0$ 的留数等于

$$-\operatorname*{res}_{u=-\frac{1}{2}}\varphi(u)=\frac{-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}=(-1)^n$$

34.利用式(9),我们得到

$$\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2i}{i}\binom{2k-2i}{k-i-1}=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\operatorname*{coef}_u\{(1-4u)^{-\frac{1}{2}}u^{-i-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{2k-2i}v^{-k+i}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{2k}}{v^k}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{v}{(1+v)^2}\right]^i\operatorname*{coef}_u\{(1-4u)^{-\frac{1}{2}}u^{-i-1}\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{2k+1}}{v^k(1-v)}\right\}=\sum_{i=0}^{k-1}\binom{2k+1}{i}=2^{2k}-\binom{2k+1}{k}$$

35.标准的计算.

36.经过简单的计算得到

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{n}{i}\binom{m+i-1}{p}=\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{m-1}}{u^{p+1}}[1-(1+u)]^n\right\}=$$

$$(-1)^n\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{m-1}}{u^{p-n+1}}\right\}=\begin{cases}\dbinom{m-1}{p-n} & \text{若 } p-n\geqslant 0\\ 0 \quad \text{若 } p<n\end{cases}$$

37.经过标准的计算得到

$$\sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s}=$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{k+1}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{n-1}}{v^n}\cdot\frac{1}{1-u^2(1+v)}\right\}\right\}=$$

$$-\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+v)^{n-1}}{u^{k+3}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{n-1}}{v^n}\cdot\frac{1}{v-\dfrac{1-u^2}{u^2}}\right\}\right\}$$

(如上面曾经指出过那样)借助于留数,运用通常的方法,计算在括号内的系数

得

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n-1}}{v^n}\cdot\frac{1}{v-\dfrac{1-u^2}{u^2}}\right\}=-\frac{\left(1+\dfrac{1-u^2}{u^2}\right)^{n-1}}{\left(\dfrac{1-u^2}{u^2}\right)^{n}}=\frac{u^{2n}(1-u^2)^{-n}}{u^{2n-2}}$$

于是最后得出

$$\sum_{s=0}^{[\frac{k}{2}]}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s}=\underset{u}{coef}\left\{\frac{1+u^n}{u^{k+3}}\cdot\frac{u^{2n}(1-u^2)^{-n}}{u^{2n-2}}\right\}=\binom{n+k-1}{k}$$

38. 由题,有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^k}{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\int_0^1 z^k\mathrm{d}z=\int_0^1(1+zx)^n\mathrm{d}z=\frac{(1+x)^{n+1}-1}{x(n+1)}$$

39. 由题,有

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2\binom{n+k}{2p}=\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2\underset{u}{coef}\{(1+n)^{n+k}u^{-2p-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{2p+1}}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2(1+u)^k\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{2p+1}}\sum\binom{p}{k}(1+u)^k\underset{v}{coef}\{(1+v)^pv^{-k-1}\}\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{2p+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^p}{v}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}\left(\frac{1+v}{v}\right)^k\right\}\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{2p+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^p}{v}\left(1+\frac{1+u}{v}\right)^p\right\}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n(1+u+v)^p}{u^{2p+1}}\right\}$$

其次

$$(1+u)^n[u+(1+v)]^p=(1+u)^n\sum_{s=0}^{p}\binom{p}{s}u^s(1+v)^{p-s}=$$

$$\sum_{i,s}\binom{n}{i}\binom{p}{s}u^{i+s}(1+v)^{p-s}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{s=0}^{p}\binom{n}{i}\binom{p}{s}u^{i+s}(1+v)^{p-s}$$

因此

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n(1+u+v)^p}{u^{2p+1}}\right\}=\underset{u^{2p}}{coef}\left\{\sum_{i,s}\binom{n}{i}\binom{p}{s}u^{i+s}(1+v)^{p-s}\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n}{i}\binom{p}{2p-i}(1+v)^{i-p}$$

于是有

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^p}{v^{p+1}}\ \underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n(1+u+v)^p}{u^{2p+1}}\right\}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{\sum\limits_{i=0}^{p}\binom{n}{i}\binom{p}{2p-i}(1+v)^{i}}{v^{p+1}}\right\}=\sum_{i=0}^{p}\binom{n}{i}\binom{p}{2p-i}\binom{i}{p}$$

因为

$$\binom{n}{i}\binom{i}{p}=\binom{n}{p}\binom{n-p}{i-p}$$

所以

$$\sum_{i=p}^{2p}\binom{n}{i}\binom{p}{2p-i}\binom{i}{p}=\binom{n}{p}\sum_{i=p}^{2p}\binom{n-p}{i-p}\binom{p}{2p-i}$$

设 $i-p=r$,得到

$$\sum_{i=p}^{2p}\binom{n-p}{i-p}\binom{p}{2p-i}=\sum_{r=0}^{p}\binom{n-p}{r}\binom{p}{p-r}=\binom{n}{p}$$

最后的结果是

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2\binom{n+k}{2p}=\binom{n}{p}^2$$

40.因为

$$\binom{i+r}{r}=(-1)^i\binom{-(r+1)}{i},\binom{2n-i-r}{n-r}=(-1)^{n-i}\binom{-(n-r+1)}{n-i}$$

所以

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{i+r}{r}\binom{2n-i-r}{n-r}=(-1)^n\sum_{i=0}^{n}\binom{-(r+1)}{i}\binom{-(n-r+1)}{n-r}=$$

$$(-1)^n\underset{u^n}{coef}\{(1+u)^{-(r+1)}(1+u)^{-(n-r+1)}\}=(-1)^n\underset{u^n}{coef}\{(1+u)^{-n-2}\}=$$

$$(-1)^n\binom{-n-2}{n}=\binom{2n+1}{n}$$

41.应用式(9),得出

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{m-r+s}{k}\binom{n+r-s}{n-k}\binom{r+k}{m+n}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{m-r+s}u^{-k-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{n+r-s}v^{-n+k-1}\}\times$$

$$\underset{v}{coef}\{(1+w)^{r+k}w^{-m-n-1}\}=\underset{w}{coef}\left\{\frac{(1+w)^{r}}{w^{m+n+1}}\ \underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n+k-s}}{v^{n+1}}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\sum_{k=0}^{\infty}[v(1+w)]^{k}\ \underset{u}{coef}\{(1+u)^{m-r+s}u^{-k-1}\}\right\}\right\}=$$

$$\underset{w}{coef}\left\{\frac{(1+w)^{r}}{w^{m+n+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+w)^{n+r-s}}{v^{n+1}}[1+v(1+w)]^{m-r+s}\right\}\right\}=$$

$$\underset{w}{coef}\left\{\frac{(1+w)^{r}}{w^{m+n+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n+r-s}}{v^{n+1}}\sum_{i=0}^{m-r+s}\binom{m+r+s}{i}(1+v)^{m-r+s-i}(vw)^{i}\right\}\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{m-r+s}\binom{m-r+s}{i}\underset{w}{coef}\left\{\frac{(1+w)^{r}}{w^{m+n-i+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{m+n-i}}{v^{n-i+1}}\right\}\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{\min\{n,m-r+s\}}\binom{m-r+s}{i}\binom{m+n-i}{n-i}\binom{r}{m+n-i}$$

因为
$$\binom{m+n-i}{n-i}\binom{r}{m+n-i}=\binom{r}{m}\binom{r-m}{n-i}$$

最后得到

$$\sum_{i=0}^{\min\{n,m-r+s\}}\binom{m-r+s}{i}\binom{m+n-i}{n-i}\binom{r}{m+n-i}=$$

$$\binom{r}{m}\sum_{i=0}^{n}\binom{m-r+s}{i}\binom{r-m}{n-i}=\binom{r}{m}\binom{s}{n}$$

42. 因为
$$\binom{n}{k}\binom{k}{p}=\binom{n}{p}\binom{n-p}{k-p}$$

所以，当 $p\geqslant n-q$ 时有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n+k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}\binom{k}{q}=$$

$$(-1)^{n}\binom{n}{p}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\underset{u}{coef}\{(1+k)^{n-p}u^{-k+p-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+u)^{k}v^{-k+q-1}\}=$$

$$(-1)^{n}\binom{n}{p}\underset{v}{coef}\left\{v^{q-1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1+v}{v}\right)^{k}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n-p}}{u^{-p}}u^{-k-1}\right\}\right\}=$$

$$(-1)^n\binom{n}{p}\underset{v}{coef}\left\{v^{q-1}\frac{\left(1-\frac{1+v}{v}\right)^{n-p}}{\left(-\frac{1+v}{v}\right)^{-p}}\right\}=$$

$$(-1)^n\binom{n}{p}\underset{v}{coef}\left\{\frac{(-1)^{n-p}(-1)^p(1+v)^p}{v^{n-p}v^p}v^{q-1}\right\}=$$

$$\binom{n}{p}\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^p}{v^{n-p+1}}\right\}=\binom{n}{p}\binom{p}{n-q}=\binom{n}{q}\binom{q}{n-p}$$

而当 $p<n-q$ 时,上式右端为0.

43.我们给出这个问题的详细的答案.因为这个解法大致适用于处理“双重的”系数的情形.

首先将左端改写为等价的形式,并应用标准的公式得

$$\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{2m}{i}\binom{3m-2i}{2m}=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\binom{2m}{i}\binom{3m-2i}{m-2i}=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\underset{n}{coef}\{(1-u)^{2m}u^{-i-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{3m-2i}v^{m-2i-1}\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{3m}}{v^{m+1}}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{v^2}{(1+v)^2}\right]^i\underset{u}{coef}\{(1-u)^{2m}u^{-i-1}\}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{3m}}{v^{m+1}}\left[1-\frac{v^2}{(1+v)^2}\right]^{2m}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{3m}(2v+1)^{2m}}{v^{m+1}(1+v)^{4m}}\right\}=\underset{v}{coef}\left\{\frac{(2v+1)^{2m}(1+v)^{-m}}{v^{m+1}}\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{2m}{i}2^i\binom{-m}{m-i}=\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}2^i\binom{2m-i-1}{m-i}\binom{2m}{i}$$

然后,我们再一次应用紧缩和数的系数的方法得到

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\binom{2m-i-1}{m-i}\binom{2m}{i}2^i=\sum_{i=0}^{\infty}2^i\binom{2m}{i}\underset{u}{coef}\{(1-u)^{2m-i-1}u^{-m+i-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-u)^{2m-1}}{u^{m+1}}\sum_{i=0}^{2m}\left(\frac{2u}{1-u}\right)^i\binom{2m}{i}\right\}=\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-u)^{2m-1}}{u^{m+1}}\left[1+\frac{2u}{1-u}\right]^{2m}\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-u)^{2m-1}(1+u)^{2m}}{u^{m+1}(1-u)^{2m}}\right\}=\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{2m}}{u^{m+1}}(1-u)^{-1}\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{2m}{m-i}=2^{2m-1}+\frac{1}{2}\binom{2m}{m}$$

44. 应用式(9)，得出

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}k^{j}=(-n)^{n}j!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\frac{k^{j}}{j!}=$$

$$(-1)^{n}j!\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\binom{n}{k}\underset{u}{coef}\{e^{uk}u^{-j-1}\}=$$

$$(-1)^{n}j!\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{j+1}}\sum(-1)^{k}\binom{n}{k}(e^{u})^{k}\right\}=$$

$$(-1)^{n}j!\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-e^{u})^{n}}{u^{j+1}}\right\}=j!\underset{u}{coef}\left\{\frac{\left(1+\frac{u}{2}+\cdots\right)^{n}}{u^{j-n+1}}\right\}=$$

$$\begin{cases}0 & 若\ 0\leqslant j<n\\ n! & 若\ j=n\end{cases}$$

45. 因为

$$\binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{r-\lambda}=\binom{n}{r}\binom{r}{\lambda}$$

所以

$$\sum_{\lambda=0}^{r}\binom{n}{\lambda}\binom{n-\lambda}{r-\lambda}\binom{n-r}{r-\lambda}=\binom{n}{r}\sum_{\lambda=0}^{r}\binom{r}{\lambda}\binom{n-r}{r-\lambda}=\binom{n}{r}^{2}$$

当 $2r\leqslant n$ 时.

46. 将左端写为下列等价的形式

$$\sum_{s=0}^{n}2^{s}\binom{2n-s}{n}=\sum_{s=0}^{\infty}2^{s}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{2n-s}u^{-n+s-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{2n+1}}{u^{n+1}(1-u)}\right\}=\sum_{i=0}^{n}\binom{2n+1}{i}=2^{2n}$$

47. 因为

$$\sum_{n=1}^{m}\sum_{r=1}^{n}(-1)^{r}\binom{n}{r}\frac{r^{n}}{n+1}=\sum_{n=1}^{m}\frac{n!}{n+1}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{n}{r}\frac{r^{n}}{n!}=$$

$$\sum_{n=1}^{m}\frac{n!}{n+1}\sum_{r=0}^{n}(-1)^{r}\binom{n}{r}\underset{u}{coef}\{e^{ur}u^{-n-1}\}=\sum_{n=1}^{m}\frac{n!}{n+1}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-e^{n})^{n}}{u^{n+1}}\right\}$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-e^{u})^{n}}{u^{n+1}}\right\}=(-1)^{n}$$

这样就得出答案.

48.标准的计算.

49.作简单的变换,得到

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n+m+i}3^{n-i}\binom{n}{i}\binom{n+2i}{m-n+i}=$$

$$(-1)^{m+n}3^{n}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{n}}{u^{m-n+1}}\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{(1+u)^{2}}{3u}\right]^{-i}\operatorname*{coef}_{v}\{(1-v)^{n}v^{-i-1}\}\right\}=$$

$$(-1)^{m+n}3^{n}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{n}(u^{2}-u+1)^{n}}{3^{n}u^{m+1}}(-1)^{n}\right\}=$$

$$(-1)^{m}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(u^{3}+1)^{n}}{u^{m+1}}\right\}=\begin{cases}0 & \text{若 } m\not\equiv 0(\text{mod } 3)\\ (-1)^{k}\dbinom{n}{k} & \text{若 } m=3k\end{cases}$$

50.因为

$$\frac{1}{j}=\int_{0}^{1}z^{j-1}\mathrm{d}z$$

所以

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^{j+1}\binom{n}{j}}{j}=-\int_{0}^{1}\left\{\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}\binom{n}{j}z^{j}-1\right\}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\int_{0}^{1}\frac{(1-z)^{n}-1}{(1-z)-1}\mathrm{d}z=$$

$$\int_{0}^{1}\left\{\sum_{i=0}^{n-1}(1-z)^{i}\right\}\mathrm{d}z=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{0}^{1}(1-z)^{i}\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{j}$$

51.因为

$$\binom{n}{2k}\binom{2k}{j}=\binom{n}{j}\binom{n-j}{n-2k}$$

所以

$$\sum_{2k\geqslant j}^{2k\leqslant n}\binom{n}{2k}\binom{2k}{j}=\binom{n}{j}\sum_{2k\geqslant j}^{2k\leqslant n}\binom{n-j}{n-2k}=\binom{n}{j}2^{n-j-1}$$

52.借助于微分法则的标准的计算.

53.借助于积分法则的标准的计算.

54.应用微分法则两次或运用下列公式

$$i\binom{n}{i}=n\binom{n-1}{i-1}$$

55.在标准的计算后得到

$$\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-i}{i}(-pq)^{i}=\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}}\cdot\frac{1}{u^{2}(pq)+u+1}\right\}$$

因为 $$u^2(pq)+u+1=pq\left(u+\frac{1}{p}\right)\left(u+\frac{1}{q}\right)$$
所以,求出函数
$$\varphi(u)=\frac{(1+u)^{n+1}}{u^{n+1}\left(u+\frac{1}{p}\right)\left(u+\frac{1}{q}\right)}$$
在点 $u_1=-\frac{1}{p}$ 与 $u_2=-\frac{1}{q}$ 的留数就得到所求的结果.

56. 标准的计算.

57. 标准的计算.

58. 利用下列表达式
$$\binom{2n}{n}=\underset{u}{coef}\{(1-4u)^{-\frac{1}{2}}u^{-n-1}\}$$

59. 由题,有
$$\sum_{k=0}^{r}\binom{r-k}{m}\binom{s+k}{n}=$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{r-k}u^{-r+k+m-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{s+k}v^{-n-1}\}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^r}{u^{r-m-1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^s}{v^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{u(1+v)}{1+u}\right]^k\right\}\right\}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^r}{u^{r-m+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^s}{v^{n+1}\left[1-\frac{u(1+v)}{1+v}\right]}\right\}\right\}=$$
$$-\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{r+1}}{u^{r-m+2}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^s}{v^{n+1}\left(v-\frac{1}{u}\right)}\right\}\right\}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{r+1}}{u^{r-m+2}}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{u}\right)^s}{\left(\frac{1}{u}\right)^{n+1}}\right\}=\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{r+s+1}}{u^{r+s-m-n+1}}\right\}=$$
$$\binom{r+s+1}{r+s-m-n}=\binom{r+s+1}{m+n+1}$$

60. 由题,有
$$\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\binom{r-k}{m}\binom{s}{k-t}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \operatorname*{coef}_u\{(1+u)^{r-k}u^{-m-1}\} \operatorname*{coef}_v\{(1+v)^s u^{-k+t-1}\} =$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^r}{u^{m+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{1+u}\right)^k \operatorname*{coef}_v\{v^t(1+v)^s v^{-k-1}\}\right\} =$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^r}{u^{m+1}}\left(1-\frac{1}{1+u}\right)^s\left(-\frac{1}{1+u}\right)^t\right\} = \operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{r-s-t}}{u^{m-s+1}}\right\}(-1)^t =$$

$$(-1)^t\binom{r-s-t}{m-s} = (-1)^t\binom{r-s-t}{r-t-m}$$

61.应用式(9),得到

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{k-i}\binom{p+i}{m+n} =$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^u u^{-k+i-1}\} \operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{p+i}v^{-m-n-1}\} =$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{k+1}} \operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^p}{v^{m+n+1}}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}[u(1+v)]^i\right\}\right\} =$$

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{k+1}} \operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^p}{v^{m+n+1}}[1+u(1+v)]^m\right\}\right\} =$$

$$\sum\binom{m}{i}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{n+i}}{u^{k-m+i+1}} \operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^p}{v^{n+i+1}}\right\}\right\} =$$

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n+i}{k-m+i}\binom{p}{n+i}$$

因为
$$\binom{p}{n+i}\binom{n+i}{k-m+i} = \binom{p}{m+n-k}\binom{p+k-m-n}{p-n-i}$$

所以

$$\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n+i}{k-m+i}\binom{p}{n+i} =$$

$$\binom{p}{m+n-k}\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{p+k-m-n}{p-n-i} =$$

$$\binom{p}{m+n-k}\binom{p+k-m}{p-n} =$$

$$\binom{p}{m+n-k}\binom{p+k-n}{k}$$

62.因为
$$\frac{1}{2k+1}=\int_0^1 z^{2k}\mathrm{d}z$$

所以
$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n}{k}}{2k+1}=\int_0^1\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(z^2)^k\right\}\mathrm{d}z=\int_0^1(1-z^2)\mathrm{d}z$$

作替换 $1-z^2=v$ 后,得到

$$\int_0^1(1-z^2)^n\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\int_0^1 v^n(1-v)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(n+1,\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

63.作初等变换

$$\binom{n+s}{s}\binom{n-s+q}{q}=\binom{n}{s}\frac{(2n+s)!}{(n!)^2q!}\frac{(n+s)!(n-s+q)!}{(2n+q)!}=$$

$$\binom{n}{s}\frac{(2n+q)!}{(n!)^2q!}\frac{\Gamma(n+s+1)\Gamma(n-s+q+1)}{\Gamma(2n+q+1)}=$$

$$\binom{n}{s}\frac{(2n+q+1)!}{(n!)^2q!}\int_0^1 x^{n+s}(1-x)^{n-s+q}\mathrm{d}x$$

其次

$$\int_0^1\left\{\sum_{s=0}^{n}\binom{n}{s}\left[\frac{x}{2(1-x)}\right]^s\right\}x^n(1-x)^{n+q}\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^1\frac{(2-x)^n}{2^n(1-x)^n}x^n(1-x)^{n+q}\mathrm{d}x=\frac{1}{2^n}\int_0^1(2-x)^nx^n(1-x)^q\mathrm{d}x$$

作代换 $1-x=y$ 与 $y^2=z$ 得 $\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$,而且进一步有

$$\int_0^1(2-x)^nx^n(1-x)^q\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1(1-z)^nz^{\frac{q-1}{2}}\mathrm{d}z=\frac{\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(n+\frac{q+1}{2}+1\right)\cdot 2}$$

因为

$$\Gamma\left(n+1+\frac{q+1}{2}\right)=\left(n+\frac{q+1}{2}\right)\left(n+\frac{q+1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)=$$

$$\frac{(2n+q)(2n+q+1)\cdots q}{2^{n+1}}\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)$$

所以,所求的和等于

$$\frac{(2n+q+1)!}{n!q!(2n+q)(2n+q+1)\cdots q}=\frac{(2n+q)!!}{n!(q)!!}$$

64.利用特殊函数,得到

$$\binom{n}{a}^{-1}=\frac{a!(n-a)!}{n!}=\frac{\Gamma(a+1)\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n+1)}=a\frac{\Gamma(a)\Gamma(n-a+1)}{\Gamma(n+1)}=$$

$$a\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{n-a}\mathrm{d}x$$

由此得出

$$\sum_{n=a}^{\infty}\binom{n}{a}^{-1}=a\int_0^1\frac{x^{a-1}}{(1-x)^a}\left\{\sum_{n=a}^{\infty}(1-x)^n\right\}\mathrm{d}x=a\int_0^1\frac{x^{a-1}}{(1-x)^a}\frac{(1-x)^a}{x}\mathrm{d}x=\frac{a}{a-1}$$

65.由题,有

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{p}{k+p}=p\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^1 z^{k+p-1}\mathrm{d}z=p\int_0^1 z^{p-1}(1-z)^n\mathrm{d}z=$$

$$p\mathrm{B}(p,n+1)=p\frac{\Gamma(p)\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)}=p\frac{(p-1)!n!}{(n+p)!}=\binom{n+p}{n}^{-1}$$

66.证明这个恒等式的最简单的方法自然是归纳法.而我们却应用前面已经用过的方法.首先利用Γ函数变换左端

$$\sum_{k=0}^{n}k\cdot k!=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s}\left[\sum_{k=0}^{n}ks^k\right]\mathrm{d}s=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s}\left[\frac{s^{n+1}-s}{s-1}\right]\mathrm{d}s$$

设 $\Psi(s)=\dfrac{s^{n+1}-s}{s-1}$,然后分部积分得

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s}s\Psi'(s)\mathrm{d}s=s\mathrm{e}^{-s}\Psi(s)\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}[\mathrm{e}^{-s}-s\mathrm{e}^{s}]\Psi(s)\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s}(s-1)\Psi(s)\mathrm{d}s=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s}s^{n+1}\mathrm{d}s-\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-s}s\mathrm{d}s=(n+1)!-1$$

67.利用“消除约束差异”的方法得

$$\sum_{\substack{p+q+r=n\\p,q,r\geqslant 0}}\alpha^p\beta^q\gamma^r=\sum_{p,q,r\geqslant 0}\alpha^p\beta^q\gamma^r\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{u^{p+q+r}}{u^{n+1}}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\sum_{p=0}^{\infty}(\alpha u)^{p}\sum_{q=0}^{\infty}(\beta u)^{q}\sum_{r=0}^{\infty}(\gamma u)^{r}\right\}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\cdot\frac{1}{(1-\alpha u)(1-\beta u)(1-\gamma u)}\right\}$$

随后是简单的.去计算函数

$$f(u)=\frac{[(1-\alpha u)(1-\beta u)(1-\gamma u)]^{-1}}{u^{n+1}}$$

在点 $u_1=\dfrac{1}{\alpha},u_2=\dfrac{1}{\beta},u_3=\dfrac{1}{\gamma}$ 的留数,这些留数之和,并确定 $f(u)$ 在点零的留数,或同样地计算 $\underset{u}{coef}\{f(u)\}$.

68. 与上一例类似地处理.

69. 利用多项式恒等式.

70. 将左端写成下列形式

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(n)_k}{(m)_k}=(m+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!(m-k)!}{(m+1)!}=$$
$$(m+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 z^k(1-z)^{m-k}\mathrm{d}z=$$
$$(m+1)\int_0^1(1-z)^m\left[1+\frac{z}{1-z}\right]^n\mathrm{d}z=$$
$$(m+1)\int_0^1(1-z)^{m-n}\mathrm{d}z=\frac{m+1}{m-n+1}$$

71. 如前面一样,“消除在求和号指标上的限制差异”得

$$\sum_{\substack{t_1+t_2+\cdots+t_m=n\\ t_i\geqslant 1}}\frac{n!}{t_1!\,t_2!\cdots t_m!}=n!\sum_{t_j\geqslant 1}\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{t_i!}\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{t_1+t_2+\cdots+t_m}}{u^{n+1}}\right\}=$$
$$n!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\prod_{i=1}^{m}\sum_{t_j\geqslant 1}\frac{u^{t_j}}{t_i!}\right\}=n!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{(\mathrm{e}^u-1)^m}{u^{n+1}}\right\}=$$
$$n!\sum_{r=0}^{m}\binom{m}{r}(-1)^{m-r}\underset{u}{coef}\left\{\frac{\mathrm{e}^{ur}}{u^{n+1}}\right\}=\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}r^n$$

72. 替换求和的指标 $m-k=r$ 得

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}(m-k)^m=m!\sum_{r=0}^{m}(-1)^{m-r}\binom{m}{r}\frac{r^m}{m!}=$$

$$m!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{m+1}}(e^{n}-1)^{m}\right\}=m!$$

73.如上面一样处理得

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sum_{\substack{\sum\limits_{i=1} n_i=n\\ n_i\geqslant 1}}\frac{n!}{n_1!\cdots n_r!}=\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}\sum_{n_i\geqslant 1}\frac{n!}{n_1!\cdots n_r!}\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{\sum\limits_{i=1}^{r} n_i}}{u^{n+1}}\right\}=$$

$$n!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\sum_{n_1\geqslant 1}\frac{u^{n_1}}{n_1!}\cdots\sum_{n_r\geqslant 1}\frac{u^{n_r}}{n_r!}\right\}=n!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(e^{u}-1)^{r}\right\}=$$

$$n!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}e^{uk}\right\}=k^{n}$$

74.由题,有

$$L=\sum_{i=k}^{c}(-1)^{i}2^{-2i}\binom{n-i}{i}\binom{i}{k}$$

$$c=\begin{cases}\dfrac{n}{2} & 若\ n\ 为偶数\\[2mm] \dfrac{n-1}{2} & 若\ n\ 为奇数\end{cases}$$

$$L=\sum_{i=k}^{\infty}(-1)^{i}4^{-i}\,\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-i}u^{-n+2i-1}\}\times$$

$$\underset{v}{coef}\{(1+v)^{i}v^{-k-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n}}{u^{n+1}}\,\underset{v}{coef}\left\{\frac{1}{v^{k+1}}\sum_{i=k}^{\infty}\left[-\frac{u^{2}(1+v)}{4(1+u)}\right]^{i}\right\}\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n}}{u^{n+1}}\,\underset{v}{coef}\left\{\frac{1}{v^{k+1}}\,\frac{(-1)^{k}u^{2k}(1+v)^{k}}{4^{k}(1+u)^{k}\left[1+\dfrac{u^{2}(1+v)}{4(1+u)}\right]}\right\}\right\}=$$

$$\frac{(-1)^{k}}{4^{k-1}}\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n-k+1}}{u^{n-2k+3}}\,\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{k}}{v^{k+1}}\,\frac{1}{\left[v-\left(-1-\dfrac{4(1+u)}{u^{2}}\right)\right]}\right\}\right\}$$

其次

$$T=\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{k}}{v^{k+1}}\,\frac{1}{\left[v-\left(-1-\dfrac{4(1+u)}{u^{2}}\right)\right]}\right\}=-\underset{v_0=-1-\frac{4(1+u)}{u^{2}}}{res}\left\{\frac{(1+v)^{k}}{v^{k+1}[v-v_0]}\right\}=$$

$$\frac{(1+v_0)^{k}}{v_0^{k+1}}$$

由此得出

$$L=\frac{(-1)^{k+1}}{4^{k-1}}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{n-k+1}}{u^{n-2k+3}}(-1)^k\frac{4^k(1+u)^k}{u^{2k}}\frac{u^{2k+2}}{(u+2)^{2k+2}}(-1)^{k+1}\right\}=$$

$$4(-1)^k\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{n+1}(u+2)^{-2k-2}}{u^{n-2k+1}}\right\} \qquad (*)$$

进一步得到

$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{n+1}(u+2)^{-2k-2}}{u^{n-2k+1}}\right\}=\sum_{s=0}^{n-2k+1}\binom{n+1}{s}\binom{-2k-2}{n-2k-s}2^{-2k-2-(n-2k-s)}=$$

$$\sum_{s=0}^{n-2k+1}\binom{n+1}{s}2^{s-n-2}(-1)^{n-2k-s}\binom{2k+2+n-2k-s-1}{n-2k-s}=$$

$$\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\sum_{s=0}^{n-2k+1}(-1)^s2^s\binom{n-s+1}{n-2k-s}\binom{n+1}{s}=$$

$$\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\sum_{s=0}^{\infty}2^s\operatorname*{coef}_u\{(1-u)^{n+1}u^{-s-1}\}\operatorname*{coef}_v\{(1+v)^{n-s+1}v^{-n+2k+s-1}\}=$$

$$\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{n+1}}{v^{n-2k+1}}\sum_{s=0}^{\infty}\left[\frac{2v}{1+v}\right]^s\operatorname*{coef}_u\{(1-u)^{n+1}u^{-s-1}\}\right\}=$$

$$\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1+v)^{n+1}}{v^{n-2k+1}}\left(1-\frac{2v}{1+v}\right)^{n+1}\right\}=$$

$$\frac{(-1)^n}{2^{n+2}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{(1-v)^{n+1}}{v^{n-2k+1}}\right\}=\frac{(-1)^{2n-2k}}{2^{n+2}}\binom{n+1}{n-2k}$$

于是,从式(*)得到

$$L=\frac{(-1)^k}{2^n}\binom{n+1}{n-2k}\quad 2k\leqslant n$$

75. 由题,有

$$\int_0^1(1+z)^p(1-z)^q\mathrm{d}z=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\int_0^1(1-z)^qz^i\mathrm{d}z=\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\mathrm{B}(q+1,i+1)=$$

$$\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\frac{\Gamma(q+1)\Gamma(i+1)}{\Gamma(i+q+2)}=p!q!\sum_{i=0}^{p}\frac{1}{(p-i)!(i+q+1)!}=$$

$$\frac{p!q!}{(p+q+1)!}\sum_{i=0}^{p}\binom{p+i+1}{p-i}$$

76. 考虑函数

$$\Psi(x)=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}=1+\sum_{k=2}^{\infty}B_k\frac{x^k}{k!}$$

容易验证：$\Psi(x)=\dfrac{x(e^x+1)}{2(e^x-1)}$ 与 $\Psi(-x)=+\Psi(x)$，即函数 $\Psi(x)$ 都是偶函数.

由此得出

$$1+\sum_k B_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}=\sum_k B_{2k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}=$$
$$1+\sum_k B_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!}+\sum_k B_{2k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

即
$$\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k+1}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}\equiv 0$$

77. a) 因为

$$z=(e^z-1)(\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{z^k}{k!})=(z+\frac{z^2}{2!}+\cdots)(\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{z^k}{k!})$$

使这个恒等式两边的 z^n 的系数相等，得到

$$(\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{z^k}{k!})(\sum_{s=0}^{\infty}\frac{z^s}{(s+1)!})=1$$

便得出所要求的结果.

b) 借助于式(9) 变换左端，得

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\frac{(-1)^{k+j}}{k+1}\binom{k}{j}(k-j)^n=$$
$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\underset{u}{coef}\{e^{u(k-j)}u^{-n-1}\}=$$
$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\underset{u}{coef}\left\{\frac{e^{uk}}{u^{n+1}}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(e^{-u})^j\right\}=$$
$$n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(e^u-1)^k}{u^{n+1}}\right\}$$

因为
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(e^u-1)^k}{u^{n+1}}\right\}=0\quad k>n$$

所以

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(e^u-1)^k}{u^{n+1}}\right\}=$$
$$-\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(e^u-1)^k\underset{v}{coef}\{\ln(1-v)v^{-k-2}\}\right\}=$$

$$-\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\frac{\ln(e^u)}{1-e^u}\right\}=\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{u}{e^u-1}u^{-n-1}\right\}=\frac{B_n}{n!}$$

这就是所要证明的结果.

78. a) 因为
$$t\frac{e^{t(z+1)}-1}{e^t-1}=te^{tz}+t\frac{e^{tz}-1}{e^t-1}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\varphi_n(z+1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\varphi_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n+1}z^n}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(z)+nz^{n-1}]\frac{t^n}{n!}$$

由此得出

$$\varphi_n(z+1)=\varphi_n(z)+nz^{n-1}$$

b) 从这个关系式同样得到

$$\varphi_n(z+1)-\varphi_n(z)=nz^{n-1}$$
$$\varphi_n(z)-\varphi_n(z-1)=n(z-1)^{n-1}$$
$$\varphi_n(2)-\varphi_n(1)=n\cdot 1^{n-1}$$
$$\vdots$$

由此得出当 $z+1=m$,且 $n=n+1$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{m-1}i^n=\frac{\varphi_{n+1}(m)}{n+1}$$

c) 因为

$$\frac{t}{e^t-1}(e^{tz}-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(z)}{n!}t^n$$
$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{t^k}{k!}$$
$$e^{tz}-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^kz^k}{k!}$$

于是,通过比较两端 t^n 的系数便得到所求的结果.

79. a) 因为按上一个问题有

$$\sum_{k=1}^{j-1}k^{2n}=\frac{\varphi_{2n+1}(j)}{2n+1}=\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\binom{2n+1}{s}B_sj^{2n+1-s}$$

于是在改变求和次序后得到

$$R=\sum_{j=2}^{2n+1}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}\binom{2n+1}{j}\sum_{k=1}^{j-1}k^{2n}=$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}B_s\binom{2n+1}{s}(2n-s)!\sum_{j=2}^{2n+1}(-1)^{j-1}\binom{2n+1}{j}\frac{j^{2n-s+1}}{(2n-s)!}$$

因为

$$\sum_{j=2}^{2n+1}(-1)^{j-1}\binom{2n+1}{j}\frac{j^{2n-s}}{(2n-s)!}=$$

$$-\sum_{j=2}^{2n+1}(-1)^{j}\binom{2n+1}{j}\underset{u}{coef}\{e^{uj}u^{-2n+s-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{2n+1-s}}\sum_{j=2}^{2n+1}(-1)^{j}\binom{2n+1}{j}(e^{u})^{j}\right\}=$$

$$-\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{2n-s+1}}\left[(1-e^{u})^{2n+1}-1-\binom{2n+1}{1}e^{u}\right]\right\}\binom{2n+1}{1}$$

其次

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{2n-s+1}}(1-e^{u})^{2n+1}\right\}=\underset{u}{coef}\left\{u^{s}\left(1+\frac{u}{2!}+\frac{u^{2}}{3!}+\cdots\right)^{2n+1}\right\}(-1)^{2n+1}=0$$

因此

$$\sum_{j=2}^{2n+1}(-1)^{j-1}\binom{2n+1}{j}\frac{j^{2n-s}}{(2n-s)!}=\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{2n-s+1}}\right\}+\binom{2n+1}{1}\frac{1}{(2n-s)!}$$

由此得出

$$R=\frac{1}{(2n+1)}\sum_{s=0}^{2n}B_s\binom{2n+1}{s}(2n-s)!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{2n-s+1}}\right\}+$$

$$\sum_{s=0}^{2n}B_s\binom{2n+1}{s}=\frac{1}{2n+1}B_{2n}\binom{2n+1}{2n}=B_{2n}$$

其中由于问题 77. a) 有

$$\sum_{s=0}^{2n}B_s\binom{2n+1}{s}=0$$

对于本题 b) 与 c) 的推导是标准的推理.

80. a) 从 $\varphi_s(n,i)$ 的定义得

$$(1+z)^{n-i}(1-z)^{i}=\sum_{s=0}^{n}\varphi_s(n,i)z^{s}$$

$$(1-z)^{n-i}(1+z)^{i}=\sum_{s=0}^{n}(-1)^{s}\varphi_s(n,i)z^{s}$$

其次

$$(1-z)^{n-i}(1+z)^{i}=(1+z)^{n-(n-i)}(1-z)^{n-i}=\sum_{s=0}^{n}\varphi_s(n,n-i)z^s$$

即

$$\varphi_s(n,n-i)=(-1)^s\varphi_s(n,i)$$

b) 可得

$$\sum_{s=0}^{t}\varphi_s(n,i)=\sum_{s=0}^{t}\operatorname*{coef}_{z}\{(1+z)^{n-i}(1-z)^{i}z^{-s-1}\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+z)^{n-i}(1-z)^{i}}{z}\sum_{s=0}^{t}(z^{-1})^{s}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+z)^{n-i}(1-z)^{i}}{z}\,\frac{1-z^{-t-1}}{1-z^{-1}}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+z)^{n-i}(1-z)^{i}}{z-1}\right\}-\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+z)^{n-i}(1-z)^{i}}{(z-1)z^{t+1}}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+z)^{n-i}(1-z)^{i-1}}{z^{i+1}}\right\}=\varphi_t(n-1,i-1)$$

c) 与上面类似.

d) 可得

$$\sum_{s=0}^{n}\varphi_s^2(n,i)=$$

$$\sum_{s=0}^{n}\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{n-i}(1-u)^{i}}{u}\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{n-i}(1-v)^{t}}{v}\sum_{s=0}^{n}(uv)^{-s}\right\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{(1+u)^{n-i}(1-u)^{i}}{u}\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{n-i}(1-v)^{i}}{v}\,\frac{1-(uv)^{-n-1}}{1-(uv)^{-1}}\right\}\right\}=$$

$$-\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+u)^{n-i}(1-u)^{i}}{u^{n+1}}\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{n-i}(1-v)^{i}}{v^{n+1}}\right\}\right\}=$$

$$-\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+u)^{n-i}(1-u)^{i}}{u^{n+2}}\operatorname*{coef}_{v}\left\{\frac{(1+v)^{n-i}(1-v)^{i}}{v^{n+1}(v-\frac{1}{u})}\right\}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+u)^{n-i}(1-u)^{i}}{u^{n+2}}\,\frac{\left(1+\frac{1}{u}\right)^{n-i}\left(1-\frac{1}{u}\right)^{i}}{\left(\frac{1}{u}\right)^{n+1}}\right\}=$$

$$\operatorname*{coef}_{n}\left\{\frac{(1+u)^{n-i}(1-u)^{i}}{u}\,\frac{(1+u)^{n-i}(1-u)^{i}}{u^{n}}\right\}=(-1)^{i}\varphi_n(2n,2i)$$

e) 标准的计算结果.

f) 标准的计算结果.

81. 由题,有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^{2}\varphi_s(n,i)=$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\underset{u}{coef}\{(1+u)^n u^{-i-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{n-i}(1-v)^i v^{-s-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{s+1}}\left[1+\frac{(1-v)}{u(1+v)}\right]^n\right\}\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{[v(u-1)+(u+1)]^n}{v^{s+1}}\right\}\right\}=$$

$$\binom{n}{s}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{2n-s}(u-1)^s}{u^{n+1}}\right\}=(-1)^s\binom{n}{s}\varphi_n(2n,s)$$

82. 标准的计算结果.

83. 由题,有

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\varphi_r(n,i)\varphi_s(n,i)=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{r+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^n}{v^{s+1}}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left[\frac{(1-u)(1-v)}{(1+u)(1+v)}\right]\right\}\right\}=$$

$$2^n\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{r+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+uv)^n}{v^{s+1}}\right\}\right\}=\binom{n}{s}2^n\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^s}{u^{r+1}}\right\}=2^n\binom{n}{r}\delta_{s,r}$$

84. 因为 $$\binom{n-k+s}{n-k}=(-1)^{n-k}\binom{-(s+1)}{n-k}$$

所以

$$\sum_{s=0}^{k}\binom{n-k+s}{n-k}\binom{n-k}{k-s}=\sum_{s=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{-(s+1)}{n-k}\binom{n-k}{k-s}=$$

$$\sum_{s=0}^{\infty}\underset{u}{coef}\{(1-u)^{-(s+1)}u^{-n+k-1}\}\ \underset{v}{coef}\{(1+v)^{n-k}v^{-k+s-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-u)^{-1}}{u^{n-k+1}}\ \underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n-k}}{v^{k+1}}\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{v}{1-u}\right)^s\right\}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n-k}}{v^{k+1}}\ \underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-u)^{-1}}{u^{n-k+1}}\ \frac{1}{1-\frac{v}{1-u}}\right\}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n-k}}{v^{k+1}}\ \underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n-k+1}(1-u-v)}\right\}\right\}=$$

$$\underset{v}{coef}\left\{\frac{(1+v)^{n-k}(1-v)^{-1-(n-k)}}{v^{k+1}}\right\}=\varphi_k(-1,n-k)$$

85. 由题,有

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{n-j}\varphi_k(n,i)=\sum_{k=0}^{n}\varphi_k(n,i)\ \underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-k}u^{-j+k-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{j+1}}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{u}{1+u}\right)^k\varphi_k(n,i)\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{j+1}}\left(1+\frac{u}{1+u}\right)^{n-i}\left(1-\frac{u}{1+u}\right)^{i}\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(2u+1)^{n-i}}{u^{j+1}}\right\}=2^j\binom{n-i}{j}$$

86. 由题,有

$$\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{n-j}{k-j}\binom{m}{j}=$$

$$\sum_{j=0}^{m}(-2)^j\binom{m}{j}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-j}u^{-k+j-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{k+1}}\left(1-\frac{2u}{1+u}\right)^m\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n-m}(1-u)^m}{u^{k+1}}\right\}=$$

$$\varphi_k(n,m)$$

87. 由题,有

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}\binom{n-r}{s-2k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m}{2k}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-r}u^{-s+2k-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n-r}}{u^{s+1}}\ \frac{(1+u)^{2m}+(1-u)^{2m}}{2}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\binom{n+2m-r}{s}+\frac{1}{2}\varphi_s(n-r+2m,2m)$$

88. 由题,有

$$\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-k}u^{-2q+2j-1}\}=\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n-k}}{u^{2q+1}}(1-u^2)^k\right\}=$$

$\varphi_{2q}(n+k,k)$

89. 由题,有

$$\sum_{j=0}^{q}\binom{k}{2j}\binom{n-k}{2q-2j}=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{2j}\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-k}u^{-2q+2j-1}\}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n-k}}{u^{2q+1}}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{2j}u^{2j}\right\}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n-k}}{u^{2q+1}}\frac{(1+u)^{k}+(1-u)^{k}}{2}\right\}=$$
$$\frac{1}{2}\binom{n}{2q}+\frac{1}{2}\varphi_{2q}(n,k)$$

90. 由题,有

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{\varphi_s(n,i)}{s+1}=\int_0^1\{\sum_{s=0}^{n}\varphi_s(n,i)z^s\}\mathrm{d}z=\int_0^1(1+z)^{n-i}(1-z)^i\mathrm{d}z$$

以下利用问题75.

91. 由题,有

$$\sum_{s=0}^{n}\frac{\varphi_s(n,i)}{\binom{n}{s}}=(n+1)\sum_{s=0}^{n}\varphi_s(n,i)\int_0^1(1-z)^s z^{n-s}\mathrm{d}z=$$
$$(n+1)\int_0^1\left\{z^n\sum_{s=0}^{n}\varphi_s(n,i)\left(\frac{1+z}{z}\right)^s\right\}\mathrm{d}z=$$
$$(n+1)\int_0^1 z^n\left(1+\frac{1-z}{z}\right)^{n-i}\left(1-\frac{1-z}{z}\right)^i\mathrm{d}z=$$
$$(n+1)\int_0^1 z^n\frac{1}{z^{n-i}}(2z-1)^i\frac{1}{z^i}\mathrm{d}z=(n+1)\int_0^1(2z-1)^i\mathrm{d}z=$$
$$\frac{n+1}{2}\int_{-1}^1 y^i\mathrm{d}y=\frac{n+1}{2(i+1)}[1-(-1)^{i+1}]$$

92. 因为
$$\binom{\omega}{m}=\frac{(\omega)_m}{m!}$$
所以,从
$$\binom{\omega}{m}=\underset{v}{coef}\{(1+v)^{\omega}v^{-m-1}\}$$
得到
$$S_1(m,n)=\underset{\omega}{coef}\left\{m!\,\omega^{-n-1}\binom{\omega}{m}\right\}=m!\underset{\omega,v}{coef}\{(1+v)^{\omega}\omega^{-m-1}v^{-n-1}\}$$

93. 从上一个问题得出

$$S_1(m,n) = m!\,\underset{v}{coef}\{v^{-m-1}\,\underset{\omega}{coef}\{e^{\omega\ln(1+v)}\omega^{-n-1}\}\} =$$

$$m!\,\underset{v}{coef}\left\{v^{-m-1}\frac{\ln^n(1+v)}{n!}\right\} = \frac{m!}{n!}\,\underset{v}{coef}\{\ln^n(1+v)v^{-m-1}\}$$

94. 与上一题类似.

95. 因为 $$S_1(p,k) = \underset{u}{coef}\{(u)_p u^{-k-1}\}$$

所以

$$\sum_{k=0}^{p}\frac{(-1)^{p+k}}{p!}S_1(p,k)p^k = \frac{(-1)^p}{p!}\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{(u)_p}{u}\cdot\frac{1-\left(-\frac{p}{u}\right)^{k+1}}{1-\left(-\frac{p}{u}\right)}\right\} =$$

$$\frac{(-1)^p}{p!}\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{(u)_p}{u+p}\right\} + \frac{1}{p!}\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{(u)_p}{u^{p+1}(u+p)}p^{p+1}\right\} =$$

$$\frac{p^{p+1}}{p!}\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{(u)p}{u^{p+1}(u+p)}\right\} = -\frac{(-1)^{p+1}}{p!}\cdot\frac{(-p)(-p-1)\cdots(-p-p+1)}{1} =$$

$$\frac{1}{p!}\cdot\frac{p(p+1)\cdots(2p-1)}{1} = \binom{2p-1}{p}$$

96. 因为

$$B_{r-k} = (k-r)!\,\underset{v}{coef}\left\{\frac{v}{e^v-1}v^{-k+r-1}\right\}$$

$$S_1(n-r,k-r) = \frac{(n-r)!}{(k-r)!}\,\underset{u}{coef}\{[\ln(1+u)]^{k-1}u^{-n+r-1}\}$$

所以

$$\sum_{k=r}^{n}B_{k-r}S_1(n-r,k-r) =$$

$$(n-r)!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{n-r+1}}\frac{1}{[\ln(1+u)]^r}\sum_{k=0}^{\infty}[\ln(1+u)]^k\,\underset{v}{coef}\left\{\frac{v^{r+1}}{e^v-1}v^{-k-1}\right\}\right\} =$$

$$(n-r)!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{\ln^{r+1}(1+u)}{u^{n-r+1}\ln^r(1+u)[1+u-1]}\right\} = (n-r)!\,\underset{u}{coef}\left\{\frac{\ln(1+u)}{u^{n-r+2}}\right\} =$$

$$\begin{cases}(-1)^{n-r}(n-r)! & 若\ n-r+1\geqslant 0\\ 0 & 若\ n\leqslant r-2\end{cases}$$

97. 因为 $$S_2(m,n) = \frac{m!}{n!}\,\underset{v}{coef}\{(e^v-1)^n v^{-m-1}\}$$

所以

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}n!\frac{1}{j}\binom{m}{n-j}S_2(m,n)=$$

$$\sum_{n=0}^{m}\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{1}{j}n!S_2(m,n)\underset{u}{coef}\{(1+u)^m u^{-n+j-1}\}=$$

$$m!\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\underset{v}{coef}\left\{\frac{1}{v^{m+1}}\sum_{n=0}^{m}(\mathrm{e}^v-1)^n\underset{u}{coef}\{u^j(1+u)^m u^{n-1}\}\right\}=$$

$$m!\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j}\underset{v}{coef}\left\{\frac{(\mathrm{e}^v-1)^j\mathrm{e}^{vm}}{v^{m+1}}\right\}=$$

$$m!\underset{v}{coef}\left\{\frac{\mathrm{e}^{vm}}{v^{m+1}}\sum_{j=1}^{\infty}(\mathrm{e}^v-1)^j\underset{\omega}{coef}\{\ln(1+\omega)\omega^{-j-1}\}\right\}=$$

$$m!\underset{v}{coef}\left\{\frac{\mathrm{e}^{vm}}{v^{m+1}}\ln(\mathrm{e}^v)\right\}=m!\underset{v}{coef}\left\{\frac{\mathrm{e}^{vm}}{v^m}\right\}=m^m$$

98.因为
$$(\omega)_m=\sum S_1(m,n)\omega^n$$
所以,$S_1(m,n)$是多项式$(\omega)_m$中的ω^n的系数,这个多项式的根是$0,1,\cdots,m-1$.接着是应用韦达(Vieta)定理.

99.由题,有

$$S_n=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{3n+k+1}{2k+1}=$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\underset{u}{coef}\{(1+u)^{3n+k+1}u^{-3n+k-1}\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{3n+1}}{u^{3n+1}}\frac{1}{u^2+u+1}\right\}=$$

$$-\frac{(1+u_1)^{3n+1}}{u_1^{3n+1}(u_1-u_2)}-\frac{(1+u_2)^{3n+1}}{u_2^{3n+1}(u_2-u_1)}=$$

$$\frac{1}{(u_2-u_1)}\left[\left(\frac{1+u_1}{u_1}\right)^{3n+1}-\left(\frac{1+u_2}{u_2}\right)^{3n+1}\right]$$

因为
$$u^2+u+1=\frac{u^3-1}{u-1}$$
所以,u_1与u_2都是1的三次根.其次

$$\frac{1+u_1}{u_1}=\frac{u_1(1+u_1)}{u_1^2}=-\frac{1}{u_1^2}$$

由此得出

$$\left(\frac{1+u_1}{u_1}\right)^{3n+1} = (-1)^{n+1}\frac{1}{u_1^{6n+2}}$$

$$\left(\frac{1+u_2}{u_2}\right)^{3n+1} = (-1)^{n+1}\frac{1}{u_2^{6n+2}}$$

这就是说

$$S_n = \frac{(-1)^{n+1}}{u_2-u_1}\left(\frac{1}{u_1^2}-\frac{1}{u_2^2}\right) = \frac{(-1)^{n+1}(u_2+u_1)}{(u_2u_1)} = (-1)^n$$

100. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda''}{n!}Z^n = e^{\lambda z}$.

101. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{Z^n}{n} = -\ln(1-z)$.

102. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(\lambda z)^{2n}}{(2n)!} = \cos\lambda z$.

103. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}z^n \operatorname*{coef}_n\{(1-4u)^{-\frac{1}{2}}u^{-n-1}\} = (1-4z)^{-\frac{1}{2}}$.

104. 由题,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n = \sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{k=0}^{\infty}k\binom{n}{k} =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}k\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}z^n =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}kz^k(1-z)^{-(k+1)} = \frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{\infty}k\left(\frac{z}{1-z}\right)^k =$$

$$\frac{z}{(1-z)^2}\sum_{k=1}^{\infty}k\left(\frac{z}{1-z}\right)^{k-1} = \frac{z}{(1-2z)^2}$$

105. 由题,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k+1}z^k(1-z)^{-(k+1)} =$$

$$\frac{1}{1-z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k\int_0^1 x^k\mathrm{d}x =$$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1-z-xz} = -\frac{1}{z}\ln(1-z-zx)\Big|_0^1 =$$

$$\frac{1}{z}\ln\frac{1-z}{1-2z}$$

106.由题,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nz^n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}z^k(1-z)^k=$$

$$\frac{1}{z-1}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k}\left(\frac{z}{1-z}\right)^k=$$

$$\frac{1}{1-z}\ln\left(1+\frac{z}{1-z}\right)=\frac{1}{1-z}\ln(1-z)$$

107.由题,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda k}}{k!}\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}z^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda k}}{k!}z^k(1-z)^{-(k+1)}=$$

$$\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{e^{-\lambda}z}{1-z}\right)^k\frac{1}{k!}=\frac{1}{1-z}\exp\left(\frac{e^{-\lambda}z}{1-z}\right)$$

108.由题,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n=\sum_{n=0}^{\infty}z^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\binom{k}{n-i}\frac{1}{2i+1}=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\sum_{n+1}^{k+i}z^n\binom{k}{n-i}=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\sum_{n=i}^{k+i}z^n\underset{u}{coef}\{(1+u)^ku^{-n+i-1}\}=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^k}{u^{1-i}}\sum_{n=i}^{k+i}\left(\frac{z}{u}\right)^n\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^k}{u^{1-i}}\frac{\left(\frac{z}{u}\right)^i-\left(\frac{z}{u}\right)^{k+i+1}}{1-\frac{z}{u}}\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\underset{u}{coef}\left\{\frac{\frac{z^i}{u}-\frac{z^{k+i+1}}{u^{k+2}}}{1-\frac{z}{u}}(1+u)^k\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}\underset{u}{coef}\left\{(1+u)^k\left[\frac{z^i}{u-z}-\frac{z^{k+i+1}}{u^{k+1}(u-z)}\right]\right\}=$$

$$-\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^iz^{k+i+1}}{2i+1}\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^k}{u^{k+1}(u-z)}\right\}=$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^iz^{k+i+1}}{2i+1}\frac{(1+z)^k}{z^{k+1}}=(1+z)^k\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^iz^i}{2i+1}=$$

$$(1+z)^k\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i z^i}{2i+1}$$

其次

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i z^i}{2i+1}=\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i z^i\int_0^1 x^{2i}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+zx^2}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{\sqrt{z}}\int_0^{\sqrt{z}}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\arctan\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

109. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\dfrac{(1-z)^p}{1-pz}$.

110. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\dfrac{(1-z)^p}{1-\lambda z}$.

111.若

$$a_n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\binom{u}{k}}{k+1}$$

于是,如以上所证明的

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\frac{1}{z}\ln\frac{1-z}{1-2z}$$

其次

$$-\frac{\ln(1-2z)}{z}+\frac{\ln(1-z)}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}z^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2^{n+1}-1}{n+1}\right)z^n$$

这就是所要的结果.

112.若

$$a_n=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\binom{n}{k}}{k}$$

那么,正如上面所证明的

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n z^n=\frac{1}{1-z}\ln(1-z)$$

其次

$$\frac{1}{1-z}\ln(1-z)=-(1+z+z^2+\cdots)\left(z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\right)=$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}z^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

又因为

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\ln n+C+o(1)$$

由此得出

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln n$$

113.从前面已经证明的恒等式(问题 109)

$$\varphi_p(z)=\sum_{m=0}^{\infty}t_m z^m=\frac{(1-z)^p}{1-pz}\quad |z|<1$$

其中

$$t_m=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{p}{i}p^{m-i}\quad z=\frac{x}{p}$$

我们得到

$$\varphi_p\left(\frac{x}{p}\right)=\frac{\left(1-\frac{x}{p}\right)^p}{1-x}$$

因此

$$\lim_{p\to\infty}\varphi_p\left(\frac{x}{p}\right)=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

因为

$$\frac{e^{-x}}{1-x}=(1+x+x^2+\cdots)\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r x^r}{r!}=\sum_{m=0}^{\infty}x^m\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^r}{r!}$$

于是,由此得出

$$\frac{e^{-x}}{1-x}=\sum_{m=0}^{\infty}d_m x^m$$

其中

$$d_m=\sum_{r=0}^{m}\frac{(-1)^r}{r!}$$

$$\lim_{m\to\infty}d_m=e^{-1}$$

因为

$$\varphi_p\left(\frac{x}{p}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{t_m}{p^m}\right)x^m$$

因此,从分析中已知的定理得

$$\lim_{m\to\infty}\frac{t_m}{p^m}=e^{-1}$$

114.从伯恩斯坦(Bernstein)定理,对于在[0,1]上任何连续函数 $f(x)$ 得到

关系式

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)\to f(x)\qquad n\to\infty$$

对函数 $f(x)=\frac{1}{x^{\lambda}}(\lambda>0)$ 关于点 $x=\frac{1}{2}$ 应用这个定理的证明(作不多的修改)便得到

$$\frac{n^{\lambda}}{2^{h}}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{-\lambda}\to 2^{\lambda}$$

当 $n\to\infty$ 时.

115. 设
$$S_k=\sum_{v=0}^{n}\binom{n}{k+kv}$$

那么

$$S_k=\sum_{v=0}^{\infty}\underset{u}{coef}\{(1+u)^n u^{-n+r+kv-1}\}=\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^u}{u^{n-r+1}}\sum_{v=0}^{\infty}(u^k)^v\right\}=$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^u}{u^{n-r+1}}\frac{1}{1-u^k}\right\}$$

因为在条件 $r<k$ 下有

$$\deg[(1-u)^k u^{n-r+1}]\geqslant n+2$$

所以

$$\underset{u=\infty}{res}f(u)=\underset{u=\infty}{res}\frac{(1+u)^n}{(1-u^k)u^{n-r+1}}=0$$

由此得出

$$S_k=\underset{u=0}{res}f(u)=\sum_{\zeta_s=1}^{k}\underset{u=\zeta_s}{res}\frac{(1+u)^n}{(u^k-1)u^{n-k+1}}$$

其中 ζ_s 为 1 的 k 次根.

随后

$$|1+\zeta_s|=\left|1+\cos\frac{2\pi s}{k}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi s}{k}\right|=\left|2\cos^2\frac{\pi s}{k}+2\mathrm{i}\sin\frac{\pi s}{k}\cos\frac{\pi s}{k}\right|=$$
$$2\left|\cos\frac{\pi s}{k}\right|\left|\cos\frac{\pi s}{k}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi s}{k}\right|=2\left|\cos\frac{\pi s}{k}\right|$$

而且

$$\underset{u=1}{res}\frac{(1+u)^n}{(u^k-1)u^{n-r+1}}=\frac{(1+u)^n}{(1+u+\cdots+u^{k-1})u^{n-r+1}}\bigg|_{u=1}=\frac{2^n}{k}$$

由此得出

$$\left|\sum_{\zeta\neq 1}\underset{\zeta}{res}\frac{(1+u^n)}{(u^k-1)u^{n-r+1}}\right|<\frac{(k-1)2^n\cos^n\frac{\pi s}{k}}{\min\limits_s|\zeta'_s-1|}<c(k)2^n\cos^n\frac{\pi}{k}=o(2^n)$$

116. 利用 Γ 函数,再作置换 $t=nz$ 得到

$$n!=\int_0^\infty e^{-t}t^n\mathrm{d}t=n^{n+1}\int_0^\infty e^{[-z+\ln z]n}\mathrm{d}z$$

在点 $z_0=1$ 的邻域内展开函数 $\varphi(z)=-z+\ln z$ 得

$$\varphi(z)=-1-\frac{(z-1)^2}{2}+o((z-1)^3)$$

由此得出

$$n!\sim\frac{n^{n+1}}{e^n}\int_0^\infty e^{-\frac{(z-1)^2n}{2}}\mathrm{d}z$$

作代换 $(z-1)\sqrt{\frac{n}{2}}=t$ 后得到

$$J_n=\int_0^\infty e^{-\frac{(z-1)^2}{2}n}\mathrm{d}z=\sqrt{\frac{2}{n}}\int_{-\sqrt{\frac{n}{2}}}^\infty e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$\lim_{n\to\infty}J_n\sqrt{\frac{n}{2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

然后,如果

$$J=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

那么

$$J^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2}\mathrm{d}v=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(u^2+v^2)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

转向极坐标 $u=r\cos\theta,v=r\sin\theta$ 后,得到

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial r}&\frac{\partial u}{\partial\theta}\\\frac{\partial v}{\partial r}&\frac{\partial v}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix}=r$$

$$J^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = 2\pi\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r = \pi\int_0^{\infty} e^{-x}\mathrm{d}x = -\pi e^{-x}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

因此,最后得出

$$n! \sim \frac{n^{h+1}}{e^n}\sqrt{\frac{2}{n}}\sqrt{\pi} = \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

117.设

$$J_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k!}{n^k}$$

然后,利用 Γ 函数得到

$$J_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\binom{n}{k}}{n^k}\right)\int_0^{\infty} e^{-t}t^k\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t}\left[1+\frac{t}{n}\right]^n\mathrm{d}t$$

为了估计积分,作代换 $z = 1 + \frac{t}{n}$,得

$$J_n = ne^n\int_1^{\infty} e^{[-z+\ln z]n}\mathrm{d}z$$

在点 $z_0 = 1$ 的邻域内展开函数 $\varphi(z) = -z + \ln z$ 得

$$\varphi(z) = -1 - \frac{1}{2}(z-1)^2 + O(z^3)$$

由此得出

$$J_n \sim n\int_1^{\infty} e^{-\frac{n}{2}(z-1)^2}\mathrm{d}z = n\int_0^{\infty} e^{-\frac{nx^2}{2}}\mathrm{d}x$$

考虑到等式

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

最后得到 $J_n \sim \sqrt{\frac{\pi n}{2}}$.

118.在初等的变换后得到

$$J_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^{\infty} e^{-t}t^k\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-t}(1+t)^n\mathrm{d}t = e\int_1^{\infty} e^{-z}z^n\mathrm{d}z =$$

$$e\int_0^{\infty} e^{-z}z^n\mathrm{d}z - e\int_0^{1} e^{-z}z^n\mathrm{d}z = e\cdot n! - e\int_0^{1} e^{-z}z^n\mathrm{d}z$$

因为第二个积分是有界的，于是得到求证的结果.

119. 因为

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k!\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\int_0^{\infty} l^{-t}t^k\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}(1-t)^n\mathrm{d}t$$

其他的部分与前面的例子一样.

120. 因为从问题 52 得

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}kp^kq^{n-k}=np$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}=1$$

于是，所求的不等式是如下关于凸函数的詹森(Jensen)不等式的推论

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi(x_i)\geqslant\varphi\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_ix_i\Big)$$

当 $\alpha_i=\binom{n}{i}p^iq^{n-i}$ 时.

121. a) 为了证明函数 $\binom{x}{t}$ 关于变量 x 的凸性，只要证明多项式

$$f(x)=x(x-1)\cdots(x-t+1)$$

当 $x\geqslant t$ 时的凸性便足够了.

我们有

$$f'(x)=\sum_{i=1}^{t}f_i(x)$$

$$f_i(x)=\prod_{s\neq i}(x-s)$$

其次

$$f'_i(x)=f_i(x)\sum_{s\neq i}\frac{1}{x-s}$$

$$f''_i(x)=\sum_{i=1}^{t}f'_i(x)=\sum_{i=1}^{t}f_i(x)\sum_{s\neq i}\frac{1}{x-s}$$

由此“直接”得出当 $x\geqslant t$ 时，$f''(x)\geqslant 0$.

b) 注意到：若函数 $\varphi(x)$ 是凸的，那么函数 $\binom{\varphi(x)}{t}$ 也是凸的.

事实上,由于函数$\binom{y}{t}$的凸性,我们有

$$\lambda\binom{\varphi(x)}{t}+(1-\lambda)\binom{\varphi(y)}{t}\geqslant\binom{\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)}{t}$$

现在,利用$\binom{y}{t}$关于y的单调性与$\varphi(x)$的凸性,得

$$\lambda\binom{\varphi(x)}{t}+(1-\lambda)\binom{\varphi(y)}{t}\geqslant\binom{\lambda\varphi(x)+(1-\lambda)\varphi(y)}{t}\geqslant$$
$$\binom{\varphi[\lambda x+(1-\lambda)y]}{t}$$

c) 利用关于函数

$$\varphi(x)=\binom{x}{t}$$

的詹森不等式得

$$\binom{\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}x_i}{t}\leqslant\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{r}\binom{x_i}{t}$$

这就是所要证明的结果.

122. a) 设
$$S_n=\sum_{k\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 2)}\binom{n}{k}5^{\frac{k-1}{2}}$$

则有

$$S_n=\sum_{s=0}\binom{n}{2s+1}5^s=\sum_{s=0}^{\infty}5^s\operatorname*{coef}_u\{(1+u)^n u^{-n+2s}\}=$$
$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^n}{u^n}\cdot\frac{1}{1-5u^2}\right\}$$

利用下列公式

$$S_n=\operatorname*{res}_{u=0}f(u),\ \operatorname*{res}_{u=\infty}f(u)=0$$

求出函数

$$f(u)=\frac{(1+u)^n}{u^n}\cdot\frac{1}{1-5u^2}$$

的留数便完成全部证明.

b) 如果
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-k-1}{k}$$
那么
$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-k-1}u^{-k-1}\} =$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^{n-1}}{u}\cdot\frac{1-\left[\frac{1}{u(1+u)}\right]^{n+1}}{1-\frac{1}{u(1+u)}}\right\} =$$
$$-\underset{u}{coef}\left\{\frac{u}{u^{n+1}(u^2+u-1)}\right\}$$
得到答案
$$F_n = \underset{u}{coef}\left\{\frac{u}{1-u^2-u}u^{-n-1}\right\}$$

c) 因为
$$\sum_{k=0}^{\infty} F_k \underset{u}{coef}\{(1+u)^n u^{-n+k-1}\} = \underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\sum_{k=0}^{\infty}F_k u^k\right\} =$$
$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+u)^n}{u^{n+1}}\cdot\frac{u}{(1-u-u^2)}\right\}$$
设
$$f(u) = \frac{(1+u)^n}{u^{n+1}(1-u-u^2)}$$
那么
$$\underset{u=\alpha_1}{res} f(u) = -\frac{(1+\alpha_1)^n}{\alpha_1^n(\alpha_1-\alpha_2)}$$
$$\underset{u=\alpha_2}{res} f(u) = -\frac{(1+\alpha_2)^n}{\alpha_2^n(\alpha_2-\alpha_1)}$$
其中，α_1,α_2 是方程 $u^2+u-1=0$ 的根.

因为
$$\alpha_1(1+\alpha_1) = \alpha_2(1+\alpha_2) = 1$$
所以
$$\underset{u=\alpha_1}{res} f(u) = -\frac{1}{\alpha_1^{2n}(\alpha_1-\alpha_2)}$$
$$\underset{u=\alpha_2}{res} f(u) = -\frac{1}{\alpha_2^{2n}(\alpha_2-\alpha_1)}$$

最后得到

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}F_k = -\operatorname*{res}_{u=\alpha_1} f(u) - \operatorname*{res}_{u=\alpha_2} f(u) = \operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{1}{u^{2n+1}}\cdot\frac{u}{1-u-u^2}\right\} = F_{2n}$$

123. 因为
$$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$
所以

$$\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\,dx = \int_0^{\pi}\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2n}dx =$$

$$\frac{1}{4^n}(-1)^n\int_0^{\pi}\left\{\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}e^{ikx}\cdot e^{-ix(2n-k)}\right\}dx =$$

$$\frac{1}{4^n}(-1)^n\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\int_0^{\pi}e^{2ix(k-n)}dx =$$

$$\frac{1}{4^n}(-1)^n\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}\int_0^{\pi}e^{2ix(k-n)}dx = \frac{\pi}{4^n}\binom{2n}{n}$$

因此,对于整数 m 有

$$\int_0^{\pi}e^{2xim}dx = \begin{cases}\pi & 若\ m=0\\ 0 & 若\ m\neq 0\end{cases}$$

类似地计算出第二个积分.

124. 设
$$J_n = \int_0^{\pi}\sin^{2n}x\,dx = \int_0^{\pi}e^{2n\cdot\ln\sin x}dx$$

在点 $x=\frac{\pi}{2}$ 的邻域内将函数 $f(x)=\ln\sin x$ 展开为泰勒(Taylor)级数得

$$f(x) = -\frac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{2} + O\left(\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

然后作代换$\sqrt{n}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=y$ 后得

$$J_n\int_0^{\pi}e^{-n\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}}e^{-y^2}dy$$

因为
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi}$$

所以
$$J_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

125. a) 根据柯西公式有

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m z^m = \sum_{m=1}^{\infty} z^m \sum_{p,q\geqslant 1} \frac{1}{pq} \operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{u^{p+q}}{u^{m+1}} \right\} = \operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{1}{u} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{z}{u} \right)^m \sum_{p=1}^{\infty} \frac{u^p}{p} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{u^q}{q} \right\} =$$

$$\operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{1}{u} \frac{z}{u\left(1 - \frac{z}{u}\right)} \ln^2(1-u) \right\} =$$

$$\operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{z \ln^2(1-u)}{u(u-z)} \right\} = \operatorname*{coef}_u \left\{ \ln^2(1-u) \left[\frac{1}{u-z} - \frac{1}{u} \right] \right\} =$$

$$\operatorname*{coef}_u \left\{ \frac{\ln^2(1-u)}{u-z} \right\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|u|<\rho} \frac{\ln^2(1-u)}{u-z} \mathrm{d}u = \ln^2(1-z)$$

b) 因为
$$\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} = \ln m + c + o(1)$$

所以
$$A_m = \sum_{p=1}^{m-1} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{m-p} \right) \sim \frac{2}{m} \ln m$$

第二种解法:利用$\{A_m\}$的导函数得

$$\sum_{m=1}^{\infty} m A_m z^{m-1} = -2 \frac{\ln(1-z)}{1-z} = 2\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} z^s \right)$$

比较上式两端 z^{m-1} 的系数得

$$m A_m = 2 \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k} \sim 2 \ln m$$

126. a) 如果
$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

那么,n 的每一个因子具有下列形式

$$d = p_1^{x_1} p_2^{x_2}, \cdots, p_k^{x_k}$$

其中$0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i$.因此,$n$的因子的个数等于其坐标满足不等式$0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i$的向量$(x_1, x_2, \cdots, x_k)$的个数,即等于$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)$.

b) 关于因子之和成立下列表达式

$$G(n) = \sum_{0\leqslant x_i\leqslant \alpha_i} p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_k^{x_k} = \sum_{0\leqslant x_1\leqslant \alpha_1} p_1^{x_1} \sum_{0\leqslant x_2\leqslant \alpha_2} p_2^{x_2} \cdots \sum_{0\leqslant x_k\leqslant \alpha_k} p_k^{x_k} =$$

$$\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}$$

c) 若 d 为 n 的因子,那么$\frac{n}{d}$ 也是 n 的因子.由此得出

$$\prod_{d|n} d = \prod_{d|n} \frac{n}{d}$$

$$\left(\prod_{d|n} d\right)^2 = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$$

这就是所要证明的.

d) 为了得出 $\varphi(n)$,应当从区间$[1,n]$上的全部自然数里排除能被素数$\{p_1, p_2,\cdots,p_k\}$中某一个所整除的自然数.

若 J_r 为p_r 的倍数的集合,那么

$$\left|\bigcup_{r=1}^{k} J_r\right| = \sum_{r=1}^{k} |J_r| - \sum_{r<s} |J_r \cap J_r| + \cdots +$$
$$(-1)^t \sum_{1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_t\leqslant k} \left|J_{r_1} \cap J_{r_2} \cap \cdots \cap J_{r_t}\right| \cdots$$

因为
$$\left|J_{r_1} \cap J_{r_2} \cap \cdots \cap J_{r_t}\right| = \frac{n}{p_{r_1} \cdot p_{r_2} \cdot \cdots \cdot p_{r_t}}$$

所以
$$\left|\bigcup_{r=1}^{k} J_r\right| = \sum_{i=1}^{k} \frac{n}{p_i} - \sum_{i<j} \frac{n}{p_i p_j} - \cdots$$

最后有

$$\varphi_n = n - \left|\bigcup_{r=1}^{k} J_r\right| = n - \sum \frac{n}{p_i} + \sum \frac{n}{p_i p_j} + \cdots =$$
$$n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

这就是所要证明的.

e) 从上述公式容易验证:若$(m,n) = 1$,那么

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

由此得出

$$\sum_{d|n}\varphi(d) = \sum_{\{x_1\cdots x_k\}} \varphi(p_1^{x_1})\cdots\varphi(p_k^{x_k}) = \sum_{x_1=0}^{\alpha_1}\varphi(p_1^{x_1})\sum_{x_2=0}^{\alpha_2}\varphi(p_2^{x_2})\cdots\sum_{x_k=0}^{\alpha_k}\varphi(p_k^{x_k})$$

因为

$$\sum_{s=0}^{t}\varphi(p^s) = 1 + (p-1) + p(p-1) + p^2(p-1) + \cdots + p^{s-1}(p-1) =$$
$$1 + (p-1)\cdot\frac{p^s - 1}{p-1} = p^s$$

所以
$$\sum_{d\mid n}\varphi(d)=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}=n$$

127.将在区间[1,n]内满足下列条件的自然数的个数记为 l_s^p:在这个自然数的标准分解式中素数 p 的次数为 s.那么

$$\alpha_p=\sum_{s=1}^{\infty}sl_s^p$$

因为在区间[1,n]中可以被 p^s 整除,但不能被 p^{s+1} 整除的自然数的个数为 l_s^p,所以,为了求 l_s^p 应当将在[1,n]中能被 p^s 整除的数的个数减去能被 p^{s+1} 整除的数的个数,即

$$l_s^p=\left[\frac{n}{p^s}\right]-\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]$$

其次

$$\alpha_p=\sum_{s=1}^{\infty}s\left[\frac{n}{p^s}\right]-\sum_{s=1}^{\infty}s\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]$$

在第二个和数的指标中作置换 $s+1=k$ 后得到

$$\alpha_p=\sum_{k=1}^{\infty}k\left[\frac{n}{p^k}\right]-\sum_{k=2}^{\infty}(k-1)\left[\frac{n}{p^k}\right]=$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}k\left[\frac{n}{p^k}\right]-\sum_{k=2}^{\infty}k\left[\frac{n}{p^k}\right]+\sum_{k=2}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]=$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$$

128.若$(s,n)=1$,则$(n-s,n)=1$.于是,可以将区间[1,n]内符合条件$(s,n)=1$的每一个数 s 与符合这个条件的数 $n-s$ 对应起来,这样就将所有小于 n 而且与 n 互素的数划分为互不相同的数对$(s,n-s)$,由此得出

$$\sum_{(n,k)=1}k=[s+(n-s)]\frac{\varphi(n)}{2}=\frac{n\cdot\varphi(n)}{2}$$

129.设
$$x=p_1^{u_1}p_2^{u_2}\cdots p_k^{u_k},y=p_1^{v_1}p_2^{v_2}\cdots p_k^{v_k}$$
于是,x 与 y 的最小公倍数为

$$[x,y]=p_1^{\max(u_1,v_1)}\cdots p_k^{\max(u_k,v_k)}$$

而且,全部问题化为求下列方程组的解的个数

$$\max(u_s,v_s)=\alpha_s$$

其中 $s = 1,2,\cdots,k$.因为其中每一个方程的解的个数为$(2\alpha_s + 1)$,所以,解的总数等于$\prod_{s=1}^{k}(2\alpha_s + 1)$.

130.设

$$\xi_k^d = \begin{cases} 1 & 若\ d\ 能够整除\ k \\ 0 & 若\ d\ 不能整除\ k \end{cases}$$

因为$\sum_{k=1}^{n}\xi_k^d$等于在区间$[1,n]$中能被 d 整除的数的个数,所以

$$\tau(k) = \sum_{d=1}^{k}\xi_k^d$$

$$\sum_{k=1}^{n}\tau(k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{d=1}^{k}\xi_k^d = \sum_{d=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^d = \sum_{d=1}^{n}\frac{n}{d}$$

131.a) 考虑二项式系数

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)(2n-1)\cdots(n+1)}{n!}$$

在区间$[n,2n]$中而且在$\binom{2n}{n}$之列的每一个元素仅仅是一次幂,因此

$$\prod_{n<p_i<2n}p_i < \binom{2n}{n} < 2^{2n}$$

b) 从 a) 直接得出

$$n^{\pi(2n)-\pi(n)} < 2^{2n}$$

或

$$\pi(2n) - \pi(n) < c\,\frac{2n}{\ln n}$$

将这个不等式应用 k 次,得到

$$\pi(2n) - \pi(n) < c\,\frac{2n}{\ln n}$$

$$\pi(n) - \pi(\frac{n}{2}) < c\,\frac{\ln n}{\ln\frac{n}{2}}$$

$$\pi(\frac{n}{2^{k+1}}) - \pi(\frac{n}{2^k}) < c\,\frac{n}{2^{k-1}\ln\frac{n}{2^{k-1}}}$$

选择参数 $k = [\frac{1}{2}\log_2 n]$ 并利用明显的不等式 $\pi(x) < x$,得出所求的结果.

c) 设
$$\binom{n}{k}=\prod_{p\leqslant n}p^{v_p}$$
因为$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$,于是由问题 127 可知以下关系式成立,即
$$v_p=\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{p^i}\right]-\left[\frac{k}{p^i}\right]-\left[\frac{n-k}{p^i}\right]\right)$$
因为有不等式
$$[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1$$
所以在圆括号内的表达式等于零或等于 1. 又因为
$$\left[\frac{n}{p^i}\right]=0\quad 当\ p^i>n\ 时$$
所以,在这个和数中不等于零的项的个数不大于
$$\left[\frac{\ln n}{\ln p}\right]$$
即 $v_p<\dfrac{\ln n}{\ln p}$,这意味着 $p^{v_p}<n$,这就是求证的结果.

132. 从上一个问题得
$$\binom{n}{k}\leqslant\prod_{p\leqslant n}p^{v_p}\leqslant n^{\pi(n)}$$
对 k 求和得到
$$2^n<(n+1)n^{\pi(n)}$$

133. 将前一个问题所得的不等式经过简单的计算便得到本题的结果.

134. 设满足方程 $x_1+2x_2=n$ 的非负的整数向量的个数为 $z(n)$,那么有
$$z(n)=\sum_{(x_1,x_2)}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{U^{x_1+2x_2}}{U^{n+1}}\right\}=\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{U^{n+1}}\sum_{x_1=0}^{\infty}U^{x_1}\sum_{x_2=0}^{\infty}U^{2x_2}\right\}=$$
$$\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{U^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-U}\cdot\frac{1}{1-U^2}\right\}$$
因为
$$\frac{1}{(1-u)(1-u^2)}=\frac{1}{4(1-u)}+\frac{1}{4(n+1)}+\frac{2}{(1-u)^2}$$
而且
$$\frac{1}{(1-u)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)u^k$$
那么有

$$\frac{1}{(1-u)(1-u)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}(k+1)+\frac{1}{4}(1+(-1)^k)u^k\right]$$

由此得出

$$z(n)=\frac{1}{2}(n+1)+\frac{1}{4}[1+(-1)^n]$$

135.如前面的问题一样处理,得出公式

$$z(n)=\operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{1}{u^{n+1}}\frac{1}{1-u^a}\frac{1}{1-u^b}\right\}$$

为了求出函数

$$f(u)=\frac{1}{u^{n+1}\cdot(u^a-1)(u^b-1)}$$

在零的留数,应当根据留数定理,去求函数 $f(u)$ 在满足下列方程的各点的留数之和

$$u^a-1=0$$

$$u^b-1=0 \tag{$*$}$$

因为 a 与 b 互素,所以这些方程有唯一的公共根 $u_1=1$,于是,函数 $f(u)$ 在点 $u_1=1$ 有二重极点;在上列方程的根有单极点,并且在 $u=\infty$ 处的留数为零.因此

$$z(n)=-\sum_{i=1}^{a+b-1} res\ u=u_1f(u)$$

其中,$u_1=1,u_2,u_3,\cdots,u_{a+b+1}$ 为方程($*$)的全部根.

其次

$$res_{u_1}f(u)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{1}{u^{n+1}(1+u+\cdots+u^{a-1})(1+u+\cdots+u^{b+1})}\bigg|_{u=1}=$$

$$-\frac{n+1}{ab}-\frac{\binom{a}{2}}{a^2b}-\frac{\binom{b}{2}}{b^2a}\approx-\frac{n}{ab}$$

不难看出,在其余的点 u_i 上,留数是与 n 无关的复数.因此,留数的和按模是有界的,由此得出

$$z(n)\sim\frac{n}{ab}$$

(在问题 115 的解答中有更详细的类似的论述).

136.与前面类似得出

$$z_m(n)=\sum_{\{x_1,\cdots,x_m\}}\underset{u}{coef}\{u^{\sum_{i=1}^{m}x_i}\}=\underset{n}{coef}\left\{\frac{(1-n)^{-m}}{u^{n+1}}\right\}=$$

$$(-1)^n\binom{-m}{n}=\binom{m+n-1}{n}$$

137.解法与上一题相同.

138.a)使用记号

$$\xi_n^d=\begin{cases}1 & \text{如果 } d \text{ 是 } n \text{ 的因子}\\ 0 & \text{如果 } d \text{ 不是 } n \text{ 的因子}\end{cases}$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sum_{d=1}^{n}\xi_n^d=\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x^n\xi_n^d=\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}x^{kd}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{x^d}{1-x^d}$$

这就是所要证明的.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}G(n)x^n=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sum_{d=1}^{n}d\xi_n^d=\sum_{d=1}^{\infty}d\sum_{n=1}^{\infty}x^n\xi_n^d=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{dx^d}{1-x^d}.$

c) $\displaystyle S=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)=\frac{z^n}{1-z^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)\sum_{k=1}^{\infty}z^{kn}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi(n)z^{kn}.$

当 $kn=m$ 时,对于上面定义的函数 ξ_n^d 得出

$$S=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{m}{k}\right)z^m\xi_m^k=\sum_{m=1}^{\infty}z^m\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{m}{n}\right)\xi_m^k=\sum_{m=1}^{\infty}z^m\sum_{d\mid m}\varphi(x)=\sum_{m=1}^{\infty}mz^m=$$

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}z^k\right)'=\left(\frac{1}{1-z}\right)'=\frac{z}{(1-z)^2}$$

139.a)这是著名的欧拉(Euler)公式.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\tau(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{d=1}^{\infty}\xi_n^d=\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_n^d}{n^s}=\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^sd^s}=\sum_{d=1}^{\infty}\frac{1}{d^s}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^s}=$

$\varphi^2(s)$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma(n)}{n^s}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\sum_{d=1}^{\infty}d\xi_n^d=\sum_{d=1}^{\infty}d\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^sd^s}=\varphi(s-1)\varphi(s).$

140.因为

$$S^2(t)=\sum_{p_1p_2\leqslant N}\mathrm{e}^{-2\pi it(p_1+p_2)}$$

$$\int_0^1 e^{2\pi itm}dt = \begin{cases} 1 & 当\ m = 0\ 时 \\ 0 & 当\ m \neq 0\ 时 \end{cases}$$

那么证明由对下列函数逐项积分完成

$$S^2(t)e^{-2\pi iNt}$$

141. 由于欧拉恒等式

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

又因为当 $s > 1$ 时级数 $\sum_p \frac{1}{|p^s|}$ 收敛，所以上式右端函数在区域 $res\ s > 1$ 内是解析的. 因此，$\zeta(s)$ 在这个区域内没有零点.

142. 将其坐标满足方程 $\sum_{i=1}^{n} x_i = n$ 的每一个向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 与数组 $y_1, y_2, \cdots$，对应，其中 y_i 是向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标，由此得出

$$\sum_{k=1}^{\infty} ky_k = n$$

为了求得这个方程的解的个数，我们如前面一样处理. 若 $p(n)$ 为所求的个数，那么

$$p(n) = \sum_{\{y_1 y_2 \cdots\}} \underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{\sum_{k=1}^{\infty} ky_k}}{u^{k+1}}\right\} = \underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{k+1}} \sum_{y_1=0}^{\infty} u^{y_1} \sum_{y_2=0} u^{2y_2} \cdots\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{k+1}}(1-u)^{-1}(1-u^2)^{-1}\cdots\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{k+1}}\prod_{i=1}^{\infty}(1-u^i)^{-1}\right\}$$

由此得出

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \underset{u}{coef}\left\{\prod_{i=1}^{\infty}(1-u^i)^{-1}u^{-n-1}\right\} = \prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}$$

143. 从上一个问题得到

$$\ln p(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\ln(1-x^k), \frac{p'(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{kx^{k-1}}{1-x^k}$$

运用问题 138. b)，或直接由此得出

$$\frac{xp'(x)}{p(x)} = \sum_{k=1}^{\infty} k(x^k + x^{2k} + \cdots) = \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{s=1}^{\infty} x^{ks} = \sum_{n=1}^{\infty}\sigma(n)x^n$$

144.这个密度等于$\frac{1}{d}$.

145.这个密度等于零.

146.设$A(n)$是序列$A=\{a_i\}$的不超过n的项的数目.若$a_1<a_2<\cdots<a_k<a_{k+1}\cdots$,如果能够降低对$C$中位于$a_k$与$a_{k+1}$之间的元素数目的估值,那么就可以降低序列$C=A+B$中的元素个数的估值.注意到在集合$a_k+1$,$a_k+2,\cdots,a_k+l=a_{k+1}-1$中来自$C$的元素的数目等于来自属于$B$的$\{1,2,\cdots,l\}$中的元素的数目.按定义这个数目为$B(l)$,而$|l|$是区间$(a_k,a_{k+1})$的长度,由此得到估值$C(n)\geqslant A(n)+\sum\limits_{s=1}B(|l_s|)$,其中和数取自不含$A$的元素的所有区间$(a_k,a_{k+1})$从这个不等式与密度的定义得到估值

$$C(n)\geqslant A(n)+\beta\sum_s l_s$$

注意到在集合$\bigcup l_s$中包含来自$[1,n]$的全部的数,而不包含在A中的数,即

$$A(n)+\sum|l_s|=n$$

由此得出

$$C(n)\geqslant A(n)+\beta[n-A(n)]=A(n)(1-\beta)+\beta n\geqslant\alpha(1-\beta)n+\beta n$$

或

$$\frac{C(n)}{n}\geqslant\alpha+\beta-\alpha\beta$$

147.简单的归纳法.

148.若$n\in A$或$n\in B$,那么全部得证.

若不是这样,那么

$$A(n)=A(n-1)$$

$$B(n)=B(n-1)$$

即

$$A(n-1)+B(n-1)>n-1$$

如果

$$A(n-1)=r$$

$$B(n-1)=s$$

那么由此得出

$$r+s>n-1$$

设

$$A \cap [1, n-1] = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$$

$$B \cap [1, n-1] = \{b_1, b_2, \cdots, b_s\}$$

考虑两个集合

$$a, a_2, \cdots, a_r$$

$$n - b_1, n - b_2, \cdots, n - b_s$$

这两个集合都在区间$[1, n-1]$内,又从不等式$r + s > n - 1$可知它们有公共点.由此得出 $a_p = n - b_q$,即

$$n = a_p + b_q \in A + B$$

149.设 $d(A) = \alpha > 0$,从问题 147 得到:对于充分大的 k 成立

$$\alpha(kA) \geqslant 1 - (1 - \alpha)^k > \frac{1}{2}$$

选择这样的 k,那么对 $B = kA$ 有

$$B(n) > \frac{1}{2}n > \frac{1}{2}(n - 1)$$

即
$$B(n) + B(n) > n - 1$$

或者由上一个问题有 $n \in 2B$.因为 n 是任意数,所以$\{2kA\}$ 产生全部自然数级数.

150. a) 若 $n \equiv 0 (\bmod 4)$,则 $2^n = 2^{4k} = (|16|)^k$,而且 2^n 的末位为 6.类似地研究 $n \equiv 1,2,3 (\bmod 4)$ 的情形.

b) 与以上情形类似.

151.考虑数列 $a_n = \{n\lg 2\}$,其中$\{\quad\}$表示一个数的分数部分.数列 a_n 的所有项都是不同的,而且都在区间$[0,1]$内.若不是这样,设数列中有两项相等,将它们记为 $a_p = a_q$,那么有 $p\lg 2 = r + q\lg 2$,其中 r 为自然数.或 $\lg 2 = \frac{r}{p - q}$,这与 $\lg 2$ 为无理数相矛盾.

152.若 2^n 从数列 M 开始,那么对某些 n 与 k 成立不等式

$$10^k M < 2^n < 10^k (M + 1) \qquad (*)$$

将上式取对数后得到

$$\lg M + K \leqslant n\lg 2 \leqslant \lg(M + 1) + K$$

考虑数列

$$T_n = (n\lg 2)_{\text{mod } 1}$$

因为这个数列的所有点都是不同的,所以对某个 p 与 q 成立

$$T_{p+q} - T_q < \lg\left(1 + \frac{1}{M}\right)$$

其次,在数列 $T_p, T_{p+q}, T_{p+2q}, \cdots$ 中,任何相邻的点的距离都等于 $q\lg 2$. 因此,这些点中的一个点落在长度小于 $\lg\left(1 + \frac{1}{M}\right)$ 的区间中. 因而不等式(*)成立.

153. 从问题 127 得到

$$Ep(m!) = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\right]$$

如果
$$m = \sum_u b_u p^u$$

那么
$$\left[\frac{m}{p^i}\right] = \sum_{u \geqslant 1} b_u p^{u-i}$$

将这些等式相加起来得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^i}\right] = \sum_{u=1} b_u \sum_{i=1}^{u} p^{u-i} = \sum_u b_u \frac{p^u - 1}{p - 1} =$$

$$\frac{1}{p-1}\left[\sum_u b_u p^u - \sum_u b_u\right] = \frac{m - S_m}{p - 1} \qquad (*)$$

154. 与上一题类似求解.

155. 因为

$$\binom{q+m}{k} = \underset{u}{coef}\{(1+u)^{q+m}u^{-k-1}\}$$

$$(1+u)^q \equiv 1 + u^q \pmod p$$

所以,从 $q \geqslant k+1$ 得

$$\binom{q+m}{k}_{\text{mod } p} = \underset{u}{coef}\{[(1+u)^q(1+u)^m u^{-k-1}]_{\text{mod } p}\} =$$

$$\underset{u}{coef}\{(1+u)^m u^{-k-1}\}_{\text{mod } p} + \underset{u}{coef}\{(1+u)^m u^{q-k-1}\} =$$

$$\underset{u}{coef}\{(1+u)^m u^{-k-1}\}_{\text{mod } p} = \binom{m}{k}_{\text{mod } p}$$

156. 解法类似于上一题.

157. 因为

$$(x-a)^{q-1}=\frac{(x-a)^{q-1}}{x-a}\equiv\frac{x^q-a^q}{x-a}=x^{q-1}+x^{q-2}a+\cdots+a^{q-1}(\bmod p)$$

于是全部得到证明.

158. 在上一题中令 $a=1$ 即得.

159. 因为

$$n=\sum a_ip^i$$

所以,从等式

$$(1-x)^p\equiv 1+x^p(\bmod p)$$

得到

$$(1+x)^n\equiv\prod(1+x^{p^i})^{a_i}$$

比较上式左、右两端 x^m 的模 p 系数,并考虑到等式

$$m=\sum b_ip^i$$

于是得到

$$\binom{n}{m}\equiv\binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\cdots$$

160. 使用前面用过的记号并假设所求的点的个数等于 $N_n(c)$,我们有

$$N_n(c)=\sum_{\{x_1x_2\cdots x_t\}}\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{\sum_{i=1}^{t}x_i}}{u^{n+1}}\right\}=\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-u^{c+1})^t}{u^{n+1}(1-u)^t}\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1-u)^{-t}(1-u^{c+1})^t}{u^{n+1}}\right\}=$$

$$\sum_t(-1)^i\binom{-t}{i}\binom{t}{n-(c+1)i}(-1)^{n-(c+1)i}=$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-(c+1)i}\binom{t+i-1}{i}\binom{t}{n-(c+1)i}$$

161. 若 x“跑遍”集合$\{1,2,\cdots,m\}$,那么函数 $ax+b(\bmod m)$ 当$(a,m)=1$ 时“跑遍”同样的值集,因此

$$\sum_{x=1}^{m}\left\{\frac{ax+b}{m}\right\}=\sum_{r=1}^{m}\frac{r}{m}=\frac{m-1}{2}$$

162. a) 考虑双曲线 $xy=n$,因为

$$\sum_{k=1}^{n}\tau(k)=\sum_{\alpha=1}^{n}\left[\frac{n}{\alpha}\right]=\sum_{k=1}^{n}\sum_{xy=k}1$$

那么所求的和数的左端等于在双曲线 $xy = n$ 上的整点的个数.从图象(图1)可以看出,所求的个数可以通过在下列区域内的点的个数来表示

$$0 < x \leqslant \sqrt{n}, 0 < y \leqslant \frac{n}{x}$$

$$0 < y \leqslant \sqrt{n}, 0 < x \leqslant \frac{n}{y}$$

$$0 < x \leqslant \sqrt{n}, 0 < y \leqslant \sqrt{n}$$

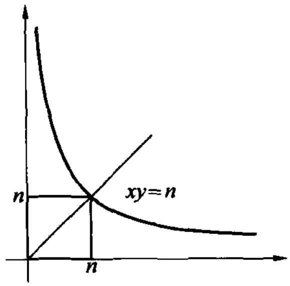


图 1

由此得出

$$\sum_{k=1}^{n} \tau(k) = 2 \sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}} \left[\frac{n}{x}\right] - [\sqrt{n}]^2$$

b) 从上述公式与关系式容易得出

$$\sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}} \left[\frac{n}{x}\right] = n \sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}} \frac{1}{x} - \sum_{0<x\leqslant\sqrt{n}} \left\{\frac{n}{x}\right\} = n(\ln\sqrt{n} + \gamma) - O(\sqrt{n})$$

163. a) 如果 n 有 k 个单因子,那么

$$\sum_{d\mid n} \mu(d) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} = \begin{cases} 1 & 若\ k = 0 \\ 0 & 若\ k \geqslant 1 \end{cases}$$

164. a) 从公式

$$\varphi(n) = n \prod_{p\mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

直接得出.

b) $\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{d\mid k} \frac{\mu(d)}{d}$.

设

$$\xi_k^d = \begin{cases} 1 & 当\ d \mid k\ 时 \\ 0 & 当\ d \nmid k\ 时① \end{cases} \qquad (*)$$

那么
$$\sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu(d)}{d} \sum_{k=1}^{n} k\xi_k^d$$

其次
$$\sum_{k=1}^{n} k\xi_k^d = d + 2d + 3d + \cdots + \frac{n}{d} d = S(n,d)d$$

① 译者注:原书这里误为 $d \mid k$.

因为
$$S(n,d)=\frac{n^2}{2d^2}+O(n\ln n)$$
而且
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{d=1}^{n}\frac{\mu(d)}{d^2}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^2}\right)^{-1}=\varphi(2)=\frac{6}{\pi^2}$$
所以有
$$\sum_{k=1}^{n}\varphi(k)=\frac{3n^2}{\pi^2}+O(n\ln n)$$

165. 应用欧拉恒等式有
$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_p\left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$
$$\ln\zeta(s)=-\sum_{n=2}^{\infty}[\pi(n)-\pi(n-1)]\ln(1-n^{-s})=$$
$$-\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\{\ln(1-n^{-s})-\ln(1-(n+1)^{-s})\}$$
在最后的情形中我们运用标准的“分部求和法”，即
$$\sum_{k=2}^{\infty}(a_k-a_{k-1})b_k=\sum_{k=2}^{\infty}a_kb_k-\sum_{k=1}^{\infty}a_kb_{k+1}=$$
$$-a_1b_2+\sum_{k=2}^{\infty}a_k(b_k-b_{k+1})$$
因为对于连续可微函数 $\varphi(x)$ 有
$$\varphi(n+1)-\varphi(n)=\int_n^{n+1}\varphi'(x)\mathrm{d}x$$
因此，当 $\varphi(x)=\ln(1-x^{-s})$ 时得到
$$\ln\varphi(s)=\sum_{n=2}^{\infty}\pi(n)\int_n^{n+1}\frac{s}{x(x^s-1)}\mathrm{d}x=s\sum_{n=2}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\mathrm{d}x$$
上式中考虑到函数 $\pi(x)$ 在区间 $[n,n+1]$ 上为常数. 随后得
$$\ln\varphi(n)=s\int_2^{\infty}\frac{\pi(x)}{x(x^s-1)}\mathrm{d}x$$

166. a) 设 π 为对称群 S_n 的任一个置换，它将点 $\boldsymbol{a}\in E^n$ 置换为点 $\boldsymbol{b}\in E^n$，于是 $|S_n^t(\boldsymbol{a})|=|S_n^t(\boldsymbol{b})|$. 由此得出：所求的个数与球的中心无关，因此
$$|S_n^t(\boldsymbol{a})|=|S_n^t(0)|=\sum_{i=0}^{t}\binom{n}{i}=S_n^t$$

b) 最小距离等于 1，而最大距离以下列方式确定

$$d_{\max}=\begin{cases}2t & \text{当 } t\leqslant\dfrac{n}{2}\text{ 时}\\ 2(n-t) & \text{当 } t>\dfrac{n}{2}\text{ 时}\end{cases}$$

c) 若在半径为 r 的"球面"上的最小重量是 $d_n^0(s,r)$，而最大的重量是 $D_n^0(s,r)$，那么

$$d_n^0(s,r)=|r-s|$$

$$D_n^0(s,r)=\begin{cases}s+r & \text{当 } s+r\leqslant n\text{ 时}\\ 2n-(s+r) & \text{当 } s+r>n\text{ 时}\end{cases}$$

对于球体 $S_n^r(\boldsymbol{a})$，对应的量 $d_n(s,r)$ 与 $D_n(s,r)$ 具有下列形式

$$d_n(s,r)=\begin{cases}0 & \text{如果 } r\geqslant s\\ s-r & \text{如果 } r<s\end{cases}$$

$$D_n(s,r)=\begin{cases}s+r & \text{当 } s+r<n\text{ 时}\\ n & \text{当 } s+r\geqslant n\text{ 时}\end{cases}$$

d) 若重量为 k 的点 $x\in E^n$ 在开始的 s 个位置上有 i 个坐标为 1，而在其余 $n-s$ 个位置上有 $k-i$ 个坐标为 0，那么在条件 $\boldsymbol{a}=\underbrace{11\cdots1}_{s\text{个}1}\underbrace{0\cdots0}_{n-s\text{个}0}$ 下

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=s+k-2i$$

由此得出：在球体 $S_n^t(\boldsymbol{a})$ 中重量为 k 的点的个数以如下求和的形式来表示

$$\sum_{i=\delta}^{\min(s,k)}\binom{s}{i}\binom{n-s}{k-i}$$

其中求和号的下指标 δ 由约束 $2\delta\geqslant s+k-t$ 所确定.

167. 答案是

$$\max_{x,y\in E_k^n}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{cases}2k & \text{当 } k\leqslant\dfrac{n}{2}\text{ 时}\\ 2(n-k) & \text{当 } k>\dfrac{n}{2}\text{ 时}\end{cases}$$

$$\min_{x,y\in E_k^n}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=2$$

168. 只有 2 个.

169. 设第一个球的球心在零，去求在以点 $\boldsymbol{b}=(\underbrace{11\cdots1}_{r\text{个}1}\underbrace{0\cdots0}_{n-r\text{个}0})$ 为球心的第二

个球内重量为 k 的点的数目.若点 x 的前 r 个坐标中有 i 个是 1,在其余的 $n-r$ 个坐标中有 $k-i$ 个是 1,那么它与点 b 的距离等于 $r+k-2i$.因此,在球 $S_n^t(0)$ 与球 $S_n^t(\boldsymbol{b})$ 的交集中的点的个数由下列公式给出

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{i=\delta}^{r}\binom{r}{i}\binom{n-r}{k-i}$$

其中指标 δ 由条件 $r+k-t\leqslant 2\delta$ 所确定.

170. 这样的点有两个:$(11\cdots1)$,$(00\cdots0)$.

171. a)2.

b)2^{n-1}.

172. 考虑"位移"变换

$$M \to M \oplus a$$

其中 $a\in E^n$.

173. 设球心在 E^n 的点的 s 个球的各种位置是 $M_1,M_2,\cdots,M_{\binom{2n}{s}}$.我们去求下述位置的个数:在这些位置上,固定的点 $a\in E_n$ 没有被覆盖.这个个数等于

$$\binom{2^n-S_n^t}{s}$$

因此,没有被覆盖的点的平均数由下式表示

$$\delta_n(s)=\frac{2^n}{\binom{2^n}{s}}\binom{2^n-S_n^t}{s}$$

要寻找的球的个数不超过$\min\limits_s\{s+\delta_n(s)\}$,选择 $s=\left[\dfrac{2^n}{S_n^t}\right]$便得到所要求的个数.

174. 按下列的形式选择点 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in E^n$,即

$$\boldsymbol{x}=(\underbrace{11\cdots1}_{r个1}\ \underbrace{0\cdots0}_{n-r个0})$$

$$\boldsymbol{y}=(\underbrace{00\cdots0}_{r个0}\ \underbrace{0\cdots0}_{n-r个0})$$

如果

$$\|\boldsymbol{a}\|=m$$

且

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{a})$$

那么

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = r + m - 2q$$
$$\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{a}) = m$$

其中 q 为点 $\boldsymbol{a}$ 的前 r 个坐标中数字 1 的个数.由此得出 $q = \frac{r}{2}$.满足上述条件的点 $\boldsymbol{a}$ 的个数等于

$$\binom{r}{q}\binom{n-r}{m-q} = \binom{r}{\frac{r}{2}}\binom{n-r}{m-\frac{r}{2}}$$

因此,所求的点的个数是

$$\sum_m \binom{r}{\frac{r}{2}}\binom{n-r}{m-\frac{r}{2}} = \binom{r}{\frac{r}{2}}2^{n-r}$$

175.若 $t_r = \binom{r}{\frac{r}{2}}2^{n-r}$,那么 $\frac{t_{2r+2}}{t_{2r}} = \frac{2r+1}{2r+2} < 1$ 且 $t_0 = \max\limits_r t_r = 2^{n-1}$,另一方面,若 $\boldsymbol{x} = (1,1,0,\cdots,0)$,$\boldsymbol{y} = (0,0,\cdots,0)$,且 $\boldsymbol{z} = (1,0,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$,那么有

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) = \rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = 1 + \sum_{i=3}^{n}\alpha_i$$

类似地,若 $\boldsymbol{W} = (0,1,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$,那么 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{W}) = \rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{W})$.因此,“Z型”与“W型”的点的总数等于 $2^{n-2}+2^{n-2} = 2^{n-1}$.由此得出,所求的最大值实际上等于 2^{n-1}.

176.设 $\boldsymbol{N} = \{V_1,V_2,\cdots,V_k\}$,研究集合 $M + V_i = \{\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{x}\in M\}$.这些集合的个数等于 $|\boldsymbol{N}| = K$,而且它们两两不相交.否则,若 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}_j$,那么 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| = \|\boldsymbol{v}_i+\boldsymbol{v}_j\|$.由此得出 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\rho(\boldsymbol{N})$,这与条件相矛盾.因此,各集合 $M + V_i$ 不相交,这意味着 $K|M|\leqslant 2^n$,这就是所要证明的.

177.利用上一题.

178.a) 取半径等于 t 的球为集合 N(问题 176).

b) 取 E^n 中 $d-1$ 维区间作为集合 N(问题 176).

179.设 $M = \{\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k\}$ 且 $\rho(\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A}_j) = d$,$i,j = 1,2,\cdots,k$.不失一般性可以认为 $\boldsymbol{a}_1 = (\underbrace{0,0,\cdots,0}_{n})$.计算向量组 $\{\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3,\cdots,\boldsymbol{a}_k\}$ 的克莱姆(Cramer)行列式,可以证明它们是线性无关的.

180. 设 $M \subseteq E^n$ 且 $\boldsymbol{a} \notin R(M)$,取任意点 $\boldsymbol{b} \in E^n$ 并要求 $\|\boldsymbol{b}\| = d$. 考虑集合 $M + \boldsymbol{b}$. 集合 M 与 $M + \boldsymbol{b}$ 不相交. 这是因为在相反的情形会对某些 i, j 成立等式 $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{b}$,这里 $M = \{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n\}$. 由此得出 $\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{b}$,而且意味着 $\rho(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \|\boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{a}_j\| = \|\boldsymbol{b}\| = d, d \in R(M)$. 这与条件相矛盾. 因此 $M \cap (M + \boldsymbol{b}) = \varnothing$,这表示 $2m \leqslant 2^n$,这就是所要证明的.

181. 设 $E^n = M_1 \cup M_2$,其中 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$. 如果 $|M_1| > 2^{n-1}$,那么根据问题 179 有 $R(M_1) = \{1, 2, \cdots, n\}$,从而 $R(M_1) \cap R(M_2) \neq \varnothing$,这样一来,$|M_1| = |M_2| = 2^{n-1}$,这是因为根据问题 179,$d_{\min}(M_1) \leqslant 2$ 且 $d_{\min}(M_2) \leqslant 2$,但这时由于 $d_{\min}(M_1) = 2$,以致其中一个集合没有立方体 E^n 的任何一个顶点. 如果我们现在考虑某条一次通过 E^n 的所有顶点的通路(E^n 的哈密顿通路),那么这条通路的顶点有一半属于 M_1,而另一半属于 M_2. 于是 M_1 是“奇偶性计数器”,而 M_2 是 M_1 的补集. 但是在这些集合的某两个集合里,有距离为 2 的点. 因此,所求的分解是不可能的.

182. 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$“按列”的集合 M 的点之间的距离之和为

$$
\begin{aligned}
2\sum_M \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= \sum_M \|\boldsymbol{x}\| + \sum_M \|\boldsymbol{y}\| - 2\sum_M (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \\
&2s\sum_{i=1}^n k_i - 2\sum_M \Big(\boldsymbol{x}, \sum_M \boldsymbol{y}\Big) = \\
&2s\sum_{i=1}^n k_i - 2\sum_{x \in M}^n (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{k}) = 2s\sum_{i=1}^n k_i - 2(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k}) = \\
&2\sum_{i=1}^n k_i(s - k_i)
\end{aligned}
$$

这就是所要证明的(其中 $\boldsymbol{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$).

183. a) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列恰好包含 2^{n-1} 个 1(参考上一个问题)并利用上题的公式.

b) 证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一列恰好包含 $\binom{n-1}{k-1}$ 个 1.

c) 将坐标原点作为球 a 的中心. 并将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行“分解”为层 $E_0^n, E_1^0, \cdots, E_t^n$①,然后利用问题 183. b) 的结果.

① 译者注:原文这里误为 E_n^t.

184.运用显然的等式

$$\sum_{\substack{x\in E_p^n\\ y\in E_q^n}}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{x,y\in E_p^n\cup E_q^n}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\sum_{x,y\in E_q^n}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\sum_{x,y\in E_q^n}\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

并利用上一个问题的结果.

185.例如,检验矩阵可选为

$$\boldsymbol{H}_n=\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

而生成矩阵可选为

$$\boldsymbol{A}_n=\begin{pmatrix}1&1&&\\ \vdots&\vdots&\ddots&\\ 1&1&\cdots&1\end{pmatrix}$$

186.a) 按定义,当且仅当 $\boldsymbol{VH}^T=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{V}\in G$.该等式与下式等价

$$\sum_{i=1}^{n}V_i\boldsymbol{h}_i=\boldsymbol{0}\qquad(*)$$

其中 $\boldsymbol{V}=(V_1,\cdots,V_n)$,而 $\boldsymbol{h}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的列.

在等式(*)中,非零系数的个数等于点 $\boldsymbol{V}$ 的汉明重量,这是因为 $d(G)=\min\limits_{V\neq 0}\|\boldsymbol{V}\|$.

b) 设 $\boldsymbol{a}\in E^n$ 且 $\boldsymbol{a}$ 被某些以点 $\boldsymbol{y}\in G$ 为中心,t 为半径的球所"覆盖",那么

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$$

其中 $\|\boldsymbol{x}\|\leqslant t$.

由此得出

$$\boldsymbol{aH}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{x})\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{xH}^{\mathrm{T}}$$

这个等式的左端是矩阵 $\boldsymbol{H}$ 的各列的任何线性组合,矩阵 $\boldsymbol{H}$ 中有不多于 t 列在矩阵 $\boldsymbol{xH}^{\mathrm{T}}$ 中.

现在设 $\boldsymbol{x}$ 是 E^n 的任意一点,从条件可知,存在这样的点 $\boldsymbol{V}\in E^n$,满足 $\|\boldsymbol{V}\|\leqslant t$,使得

$$\boldsymbol{xH}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{VH}^{\mathrm{T}}$$

或

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V})\boldsymbol{H}^T=\boldsymbol{0}$$

因此,$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{V}\in G$.这个式子意味着,可以用变换的方法将任何一点 $\boldsymbol{x}\in E^n$"转

为”点 $\boldsymbol{V}$,而且这些变换不多于 t 种,即 $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{b}) \leqslant t$,这就是所要证明的.

187. 设 $\boldsymbol{h}_1,\boldsymbol{h}_2,\cdots,\boldsymbol{h}_k$ 为矩阵$\boldsymbol{H}$ 的列,而 $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_k$ 为矩阵$\boldsymbol{B}$ 的行.那么有

$$\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \begin{Vmatrix} \sum_{i=1}^{k} h_1^{(i)}\boldsymbol{a}_i \\ \sum_{i=1}^{k} h_2^{(i)}\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{k} h_k^{(i)}\boldsymbol{a}_k \end{Vmatrix}$$

其中
$$h_i = (h_1^{(i)},\cdots,h_k^{(i)})$$

由此得出,矩阵 $\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}$ 的各行都是码 G 的基行的所有非零线性组合,即

$$\boldsymbol{H}_k^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$$

这就是所要证明的.

188. 设 $\boldsymbol{I}_s$ 是矩阵$\boldsymbol{A}$ 的第 s 列,那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的在$\boldsymbol{I}_s$ 列为零的行构成$\boldsymbol{A}$ 的子群,因为这个子群只有一个陪集,所以它的指标等于 2,这就是所要证明的.

189. a) 应用问题 186 的判别准则容易证明:$d(G_m) = 3$.其次,矩阵 $\boldsymbol{H}_m$ 的“行”秩等于 m,这意味着码 G_m 的维等于$n - m = 2^m - m - 1$,即

$$|G_m| = 2^{n-m} = \frac{2^n}{n+1}$$

由问题186可知码 G_m 的覆盖半径等于1,这是因为 $\boldsymbol{H}_m$ 包含了所有长度为m 的非零的列.

b) 由问题187有 $\boldsymbol{A}_m^* = \boldsymbol{H}_m^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}_m$.因为 $\boldsymbol{A}_m^*$ 为对称矩阵,所以从问题188得出:矩阵 $\boldsymbol{A}_m^*$ 的每一行包含 $2^{m-1} = \dfrac{n+1}{2}$ 个 1,这意味着 $d(G_m^*) = \dfrac{n+1}{2}$.

于是,码 G_m^* 的参数为

$$n = 2^m - 1,\ |G_m^*| = n+1,\ d(G_m^*) = \frac{n+1}{2}$$

($\boldsymbol{A}_m^*$ 为码 G^* 的非零的点的集合).

190. (n,k)码 G 的校验矩阵的秩等于$n-k$.如果这个码有最小的距离 d,由于问题 186 可知,这个矩阵的任意 $d-1$ 列是线性无关的,这意味着 $d-1 \leqslant n-$

k,这就是所要证明的.

b) 从问题 188 推断出来.

191. 纠错码理论的经典的结果.

192. 如果码 G 有最小的距离 $d = 2t + 1$,那么,"添加"一个坐标,可以从 G 作出具有相同基数但具有距离 $d = 2t + 2$ 的码.

193. a) 所求的个数等于下列各方程的解向量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in E^n$ 的个数

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \tag{$*$}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$.

如果 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$,有许多方法可以证明这个数等于 2^{n-1}.我们运用其中一个方法(并不是最简短的,但可能是最有效的).

设方程($*$)的解的所求的个数为 Z,考虑数

$$N = \sum_{x_1, \cdots, x_n} (-1)^{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}$$

显然有

$$N = Z - (2^n - Z) = 2Z - 2^n$$

另一方面,因为 $(-1)^t = 1 - 2t$,若 $t = \{0,1\}$,那么

$$N = \sum_{\{x_1, \cdots, x_n\}} (1 - 2\alpha_1 x_1)(1 - 2\alpha_2 x_2)\cdots(1 - 2\alpha_n x_n) =$$

$$\sum_{x_1}(1 - 2\alpha_1 x_1)\sum_{x_2}(1 - 2\alpha_2 x_2)\cdots\sum_{x_n}(1 - 2\alpha_n x_n) =$$

$$2^n(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\cdots(1 - \alpha_n)$$

由此得出公式

$$Z = 2^{n-1} + 2^{n-1}(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\cdots(1 - \alpha_n)$$

从这个公式便可以推导出答案.

b) 这些向量的个数等于 3,即

$$\boldsymbol{V}_1 = (1,0,0,\cdots,0), \boldsymbol{V}_2 = (0,1,0,\cdots,0), \boldsymbol{V}_3 = (1,1,0,\cdots,0)$$

194. 如上题那样处理,我们得到

$$N = \sum_{\|\boldsymbol{x}\| = s} (-1)^{(\alpha, x)} = \sum_{\{x_1, \cdots, x_n\}} [1 - 2\alpha_i x_i] \operatorname*{coef}_{u}\left\{\frac{u^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{u^{s+1}}\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{s+1}}\sum_{x_1}(1-2\alpha_1x_1)u^{x_1}\cdots\sum_{x_n}(1-2\alpha_nx_n)u^{x_n}\right\}=$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{s+1}}\prod_{i=1}^{n}[(1+u)-2\alpha_iu]\right\}$$

因为 $\|\boldsymbol{\alpha}\|=r$,所以

$$\prod_{i=1}^{n}[(1+u)-2\alpha_iu]=(1+u)^{n-r}(1-u)^r$$

由此得出

$$N=\underset{U}{coef}\left\{\frac{1}{u^{s+1}}(1+u)^{n-r}(1-u)^r\right\}=\varphi_s(n,r)$$

另一方面,因为

$$N=z-\left[\binom{n}{s}-z\right]=2z-\binom{n}{s}$$

其中 z 为所求的与 $\boldsymbol{\alpha}$ 正交的向量的个数,于是最后得到

$$z=\frac{1}{2}\left[\varphi_s(n,r)+\binom{n}{s}\right]$$

195.按定义有

$$\frac{1}{2^k}\sum_{y\in E^n}f(y)(-1)^{(x,y)_2}=\frac{1}{2^k}\sum_{y\in V}(-1)^{(x,y)_2}$$

如果 $x\in V^*$,那么 $(x,y)=0$,而且和数等于1;$x\notin V^*$,那么我们考虑所有满足条件 $(x,y)=0$ 的 $y\in V$.这个集合 $Z_x\subseteq V$,而且是其中的子群,它的基数是 $\frac{|V|}{2}=2^{k-1}$.由此得出,如果 $x\notin V^*$,那么

$$\frac{1}{2^k}\sum_{y\in V}(-1)^{(x,y)_2}=\frac{1}{2^k}\sum_{y\in Z_x}(-1)^{(x,y)_2}+\frac{1}{2^k}\sum_{y\in \overline{Z_x}}(-1)^{(x,y)_2}=\frac{2^{k-1}}{2^k}-\frac{2^{k-1}}{2^k}=0$$

这里 $\overline{Z_x}$ 是子群 Z_x 的陪集.

196.设 V 是 (n,k) 码,它的谱为 $\{a_0a_1\cdots a_n\}$,V^* 是与 V 对偶的 $(n,n-k)$ 码,它的谱为 $\{b_0b_1\cdots b_n\}$.

如果 $\psi(b)$ 是给定在 E^n 上的生成函数,它只依赖于向量 $\boldsymbol{v}$ 的重量,即 $\psi(\boldsymbol{v})=\psi(\|\boldsymbol{v}\|)$,考虑到前面两个问题得出

$$\sum_{v\in V^*}\psi(v)=\sum_{i=0}^{n}b_i\psi(i)=\frac{1}{2^k}\sum_{v\in E^n}\psi(v)\sum_{v\in E^n}f_V(x)(-1)^{(v,x)}=$$

$$\frac{1}{2^k}\sum_{x}f_V(x)\sum_{v}\psi(v)(-1)^{(v,x)}=$$

$$\frac{1}{2^k}\sum_{x}f_V(x)\sum_{s=0}^{n}\psi(s)\sum_{\|v\|=s}(-1)^{(v,x)}=$$

$$\frac{1}{2^k}\sum_{s=0}^{n}\psi(s)\sum_{t=0}^{n}a_t\sum_{\substack{v\\ \|v\|=s\\ \|x\|=t}}(-1)^{(v,x)}=$$

$$\frac{1}{2^k}\sum_{s=0}^{n}\psi(s)\sum_{t=0}^{n}a_t\varphi_s(n,t)$$

其次,设 $\psi(s)=(1+z)^{n-s}(1-z)^s$,我们得到

$$\sum_{s=0}^{n}\psi(s)\sum_{t=0}^{n}a_t\varphi_s(n,t)=$$

$$\sum_{t=0}^{n}a_t\sum_{s=0}^{t}(1+z)^n\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^s\underset{u}{coef}\{(1+u)^{n-t}(1-u)^t u^{-s-1}\}=2^n\sum_{t=0}^{n}a_t z^t$$

197.因为在与汉明码对偶的码 V_m^* 中,所有非零的向量的重量为 $2^{m-1}=\frac{n+1}{2}$(根据问题 187),所以,码 V_m^* 的重量的生成函数具有下列形式

$$1+(2^m-1)z^{\frac{n+1}{2}}=1+nz^{\frac{n+1}{2}}$$

现在应用问题 196 的公式得到

$$\sum_{i=0}^{n}a_i z^i=\frac{1}{2^{n-k}}[(1+z)^n+n(1+z)^{\frac{n-1}{2}}(1-z)^{\frac{n+1}{2}}]$$

其中,$n=2^m-1,k=2^m-m-1$.

198.考虑矩阵

$$\boldsymbol{H}'_m=\begin{pmatrix}1&\cdots&0&0\\1&\cdots&0&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\1&\cdots&1&0\end{pmatrix}$$

以 $\boldsymbol{H}'_m$ 为生成矩阵的码 G_m 有下列参数:$n=2^m,k^*=m,a_{2^{m-1}}=2^m-1$.由马克 - 威廉公式,对于码 G_m^* 有

$$\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = \frac{1}{2^{n-k}}[(1+z)^n + (n-1)(1+z)^{\frac{n}{2}}(1-z)^{\frac{n}{2}}]$$

特别地,因为 $k = n - k^* = n - m$,所以 $a_1 = \frac{\binom{n}{1}}{2^{n-k}} = \frac{n}{2^m} = 1$,即恰好有一个重量为1的点在"扩展的"汉明码中.因此,在"扩展的"汉明码之间的最小距离等于1.

199.a) 如果 $V = E^n$,那么 $V(z) = (1+z)^n$.

b) 如果 V 为"奇偶性计数器",那么 $a_{2i} = \binom{n}{2i}$,这表示

$$V(z) = \frac{(1+z)^n - (1-z)^n}{2}$$

c) 如果 J_k 是 B^n 中的 k 维区间,那么在任何点 $\boldsymbol{x} \in J_k$,它的由区间 J_k 的方向 $\boldsymbol{a}$ 所确定的 $n-k$ 个坐标是固定的,而其余的 k 个坐标是任意的.因此

$$\|\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{z}\|$$

由此得

$$V(z) = z^{\|a\|}\sum_{s=0}^{k}\binom{k}{s}z^s = z^{\|a\|}(1+z)^k$$

200.设中心在点 $\boldsymbol{a}$ 且 $\|\boldsymbol{a}\| = s$,半径为 r 的球的重量函数是 $V_{n,r}(z)$,考虑到等式

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}) - 2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})$$

我们得到

$$V_{n,r}(z) = \sum_{\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=r} z^{\|x\|} = \sum_{s+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})-2(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})=r} z^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} = \sum_{x\in E^n} z^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}\underset{u}{coef}\left\{\frac{u^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})}}{u^{r-s+1}}\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{r-s+1}}\sum_{x\in E^n} z^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}u^{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{a})}\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{r-s+1}}\sum_{x_1} z^{x_1}u^{x_1(x_1-2a_1)}\cdots\sum_{x_n} z^{x_n}u^{x_n(x_n-2a_n)}\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{1}{u^{r-s+1}}(1+zu^{1-2a_1})\cdots(1+zu^{1-2a_n})\right\} =$$

$$\underset{u}{coef}\left\{\frac{(1+zu)^{n-s}\left(1+\frac{z}{u}\right)^s}{u^{r-s+1}}\right\} = \underset{u}{coef}\{(z+u)^s(1+zu)^{n-s}u^{-r-1}\}$$

201. a) 显然.

b) 因为
$$f_{n,i}\left(\frac{z+u}{1+zu}\right)=\frac{f_{n,i}(u)f_{n,i}(z)}{(1+zu)^n}$$
所以
$$L_r[f_{n,i}(z)]=\operatorname*{coef}_u\left\{(1+zu)^n f_{n,i}\left(\frac{z+u}{1+zu}\right)u^{-r-1}\right\}=$$
$$f_{n,i}(z)\operatorname*{coef}_u\{f_{n,i}(u)u^{-r-1}\}=f_{n,i}(z)\varphi_r(n,i)$$

c) 由问题 80. b) 有
$$M_t[f_{n,i}(z)]=f_{n,i}(z)\sum_{i=0}^{t}\varphi_r(n,i)=\varphi_t(n-1,i-1)f_{n,i}(z)$$

d) 因为
$$L_r[z^s]=\operatorname*{coef}_u\{(z+u)^s(1+zu)^{n-s}u^{-1-r}\}=\sum_{i=0}^{s}\binom{s}{i}\binom{n-s}{r-i}z^{s+r-2i}$$
所以算子 $M_t(f)$ 将 s 次多项式 f 变换为 $s+t$ 次多项式. 因此
$$z^k\xrightarrow{M_t}\psi_k(z)\quad k=0,1,\cdots,n-t$$
其中, $\psi_k(z)=M_t[z^k]$, 且 $\deg\psi_k(z)=t+k$. 这样一来, 算子 $M_t[f]$ 的值空间包含线性无关的多项式 $\psi_0(z),\psi_1(z),\cdots,\psi_{n-t}(z)$, 这表示 $M_t[f]$ 的秩不小于 $n-t+1$.

202. a) 集合 V 与 $\{V+\boldsymbol{a}\}$ 都是等距的.

b) 由于码 V 是完备的, 而且 $d(V)=2t+1$, 在以坐标原点为中心, 半径等于 t 的球中恰好有一个码点, 所以这个点的汉明重量不大于 t, 而且是码 V: $D_m(V)$ 的最小重量.

为了确定起见, 设 $\boldsymbol{v}=(1\underset{\delta}{1\cdots 1}0\cdots 0)$ 且 $\delta=D_m(\boldsymbol{v})$. 如果 $\boldsymbol{v}_i=(1\underset{i}{1\cdots 1}0\cdots 0)$, 且 $i<\delta\leqslant t$, 那么 $\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i\|=\delta-i$; 如果 $\boldsymbol{v}'\in V$, 那么
$$\|\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}_i\|=\|(\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i)\|\geqslant$$
$$\|\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{v}\|-\|\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}_i\|\geqslant 2t+1-\delta+i=$$
$$(t-\delta)+t+i+1\geqslant t+i+1>\delta$$
因此, 从满足 $D_m(V)=t$ 的码 V 出发, 可以作出完备码 $V_1,V_2,\cdots,V_t$, 且满足 $D_m(V_i)=t-i$. 同时, 码 V_i 的重量函数的最低次项是 z^{t-i}, 由此得出, 这些重量函数是线性无关的.

c) 如果 $V = \{a_1 a_2 \cdots a_m\} \subseteq E^n$,那么 $\bigcup\limits_{i=1}^{m} S'_n(a_i) = E^n$.这就意味着

$$M_t[V(z)] = (1+z)^n$$

这里 $V(z)$ 是完备码 V 的重量函数.

d) 设 $V_0(z), V_1(z), \cdots, V_t(z)$ 是在点 b 所作的完备码的重量函数.如果

$$y_k(z) = V_k(z) - V(z)$$

那么

$$M_t[y_k(z)] = 0 \quad k = 1,2,\cdots,t$$

因为函数 $y_k(z)$ 线性无关,所以算子 M_t 的核(亏量)的维数不小于 t,从问题201.d) 及关于线性算子 $v(M_t)$ 的秩与亏量的定理得不等式

$$v(M_t) \leqslant (n+1) - (n-t+1) = t$$

因此

$$v(M_t) = t$$

e) 因为算子 M_t 的特征函数 $f_{n,i}(z), i = 0,\cdots,n$,是线性无关的,所以算子 M_t 的秩等于 $n-t+1$,那么对于来自 $n+1$ 个特征函数的 t 来说,特征值 $\varphi_t(n-1, i-1)$ 应当等于零.

203. a) 设 $R(n,k)$ 是由 k 个线性无关的向量所组成的子集的全体,而 $\lambda(V^i)$ 是 k 维空间的基底的集合.

如果 $T(n,k)$ 是 E^n 的 k 维子空间的个数,那么

$$R(n,k) = \bigcup_{i=1}^{T(n,k)} \lambda(V^i) \qquad (*)$$

$$|R(n,k)| = \frac{(2^n - 2^0)\cdots(2^k - 2^{k-1})}{k!}$$

$$|\lambda(V^i)| = \frac{(2^k - 2^0)\cdots(2^k - 2^{k-1})}{k!}$$

其次

$$T(n,k) = \frac{|R(n,k)|}{|\lambda(V^i)|}$$

现在,从式($*$)得出

$$T(n,k) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(2^n - 2^i)}{(2^k - 2^i)}$$

b) 如果 $R^{\alpha}(n,k)$ 是由包含向量 $\boldsymbol{\alpha} \in E^n$ 的线性无关向量的 k 个子集所组成的族,而且 $\lambda^{\alpha}(V^i)$ 是空间的包含向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的基底的集合,那么

$$R^{\alpha}(n,k)=\bigcup_{i=1}^{t_k(\alpha)}\lambda^{\alpha}(V^i),T(n,k)=\prod_{i=0}^{k-1}\frac{2^n-2^i}{2^k-2^i}$$

其中,当 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ 时 $t_k(\boldsymbol{\alpha})$ 为包含向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的 k 维子空间的个数.从这个关系式得出

$$t_k(\boldsymbol{\alpha})=\prod_{i=1}^{k-1}\frac{(2^n-2^i)}{2^k-2^i}=\frac{2^k-1}{2^n-1}T(n,k)$$

如果 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$,那么

$$t_k(\boldsymbol{\alpha})=T(n,k),\ |\lambda^{\alpha}(V^i)|=\frac{(2^k-2)(2^k-2^2)\cdots(2^k-2^{k-1})}{(k-1)!}$$

204. a)6;b)4;c)8.

205. $x_1^{\bar{\alpha}_1}\vee x_2^{\bar{\alpha}_2}\vee\cdots\vee x_n^{\bar{\alpha}_n}$.

206. a)2^n-1.

b)$\sum\limits_{i=k}^{n}\binom{n}{i}$,这是因为每一个“单位的”组包含不少于 k 个 1.

c) 因为除了“0”与“1”以外,所有的点都是“单位的”,即答案为 2^n-2.

207. a)$1+(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$.

b)$1+\sigma_1+\sigma_2+\cdots+\sigma_{n-1}$.

c)$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$.

208. $2^{2^n-2^k}$.

209. 所有“孤立的”点的互相之间的距离不小于 2,由此得到 a) 与 b).

c) 如果

$$\zeta_{\alpha}^{f}=\begin{cases}1 & \text{如果 }\alpha\text{ 关于 }f\text{ 是“孤立的”点}\\0 & \text{在相反的情形}\end{cases}$$

那么

$$\bar{S}(n)=\frac{1}{2^{2^n}}\sum_f\sum_{\alpha}\zeta_{\alpha}^{f}=\frac{1}{2^{2^n}}\cdot2^n\cdot2^{2^n-(n+1)}=\frac{1}{2}$$

210. 为了给定 k 维区间,必须“挑选出”$n-k$ 个“方向”,即从 n 个坐标中选出 $n-k$ 个坐标,并且以 0 与 1“填满”这 $n-k$ 个坐标,我们有$\binom{n}{n-k}2^{n-k}$种方法可以做到这一点.

211. a) 3^n.

b) 当 $k=\left[\frac{n}{3}\right]$时达到所求的最大值.

212. a) 因为每一个 k 维区间包含 2^k 个点,所以 $|\delta|\cdot 2^k\leqslant 2^n$.

b) 固定 $n-k$ 个"方向",并且以任意的方法"填满"它们.

213. a) 为了得到全部"所需的"区间,必须从给定的区间 I_p 的 $n-p$ 个"方向"中"挑选出"$n-k$个区间,这些区间与包含 I_p 的k维区间相对应.即所求的个数等于$\binom{n-k}{n-p}$.

214. 设 I 是k 维区间,而且

$$\zeta_I^{x,y}=\begin{cases}1 & \text{如果一对 } x,y\in I\\ 0 & \text{如果不是上述情形}\end{cases}$$

其次,因为 $m_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=m_k(\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}))=m_k(t)$,所以

$$m_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{1}{\binom{n}{t}2^{n-1}}\sum_{(x,y)}\sum_{I}\zeta_I^{x,y}=\frac{1}{\binom{n}{t}2^{n-1}}\sum_{I}\sum_{(x,y)}\zeta_I^{x,y}$$

在这个表达式中,里面的和数等于在区间 I 内距离为t 的点对的个数,这个数字等于 $2^{k-1}\binom{k}{t}$,因此

$$m_k(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{\binom{n}{k}2^{n-k}2^{k-1}\binom{k}{t}}{2^{n-1}\binom{n}{t}}=\binom{n-t}{k-t}$$

215. 由直接的观察而得.

216. a) 考虑下列定义在一对(u,v)上的函数 $\lambda(u,v)$,即

$$\lambda(u,v)=\begin{cases}1 & \text{如果 } u<v,\text{且 } f(u)=1\\ 0 & \text{如果不是上述情形}\end{cases}$$

其中 $u\in E_s^n, v\in E_{s+1}^n$.

设 $$R=\sum_{u,v}\lambda(u,v)=\sum_{u}\sum_{v}\lambda(u,v)=(n-s)f_s$$

那么 $$R=\sum_{v}\sum_{u}\lambda(u,v)\leqslant(s+1)f_{s+1}$$

因为 $\lambda(u,v) \leqslant s+1$ 而且若 $f(u)=1$,那么 $f(v)=1$.

b) 前面的问题的推论.

217. 因为对于“非常数的”函数有 $p(11\cdots1)=1$,所以在多项式 $p(x_1\cdots x_n)$ 中单项式的个数应为奇数.

218. a) 直接的观察的结果.

b) 考虑在层 $E^n_{[\frac{n}{2}]}$ 上任意地给定的函数的集合 M_n,在这个层的“较高处”等于1;而在“较低处”等于0. 显然所有这些函数都是单调的,而且 $|M_n| = 2^{\binom{n}{[\frac{n}{2}]}}$.

c) 从问题 217 推出.

219. 结论从下列结果推出:布尔函数的个数等于热加尔金多项式的个数,以及表达的可能性.

220. a) 因为 $\sigma_2(x_1,\cdots,x_n)$ 是对称函数,所以 $\sigma_2(x_1,\cdots,x_n)=\sigma_2(\|\boldsymbol{x}\|)$,其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)$.

如果
$$\boldsymbol{x} = (\underbrace{11\cdots1}_{k}\,\underbrace{00\cdots0}_{n-k})$$

那么
$$\sigma_2(\boldsymbol{x}) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant k} x_i x_j = \binom{k}{2} \bmod 2$$

由此得出,所求的个数 $Z_2(n)$ 有下列的形式

$$Z_2(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[1-\binom{k}{2}\bmod 2\right] = 2^n - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{2}\bmod 2$$

其余的是查明:什么时候 $\binom{k}{2} \bmod 2 = 1$. 明显地,这只能在 $k \equiv 2(\bmod 4)$ 或 $k \equiv 3(\bmod 4)$ 两种情形下发生,因此

$$Z_2(n) = 2^n - \sum_{k=0}\binom{n}{4k+2} - \sum_{k=0}\binom{n}{4k+3}$$

考虑到问题 115,我们得到

$$Z_2(n) = 2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}-1}\left(\cos\frac{\pi n}{4} + \sin\frac{\pi n}{4}\right)$$

b) $2^{n-1}+1$.

c) 2^{n-1}.

d) 设
$$L_n = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2k-1}x_{2k}$$
那么有
$$L_n = L_{n-1} + x_{2n-1}x_{2n}$$
如果 L_n 的根的个数为 t_n,那么从前面的等式得到递推关系式
$$t_n = 3t_{n-1} + (2^{2(n-1)} - t_{n-1}) = 2^{2(n-1)} + 2t_{n-1} \qquad (*)$$
如果
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n, t_0 = 0$$
那么,利用式(*)得
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n [2^{2(n-1)+2t_{n-1}}] = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(4z)^n + 2z\sum_{n=1}^{\infty} t_{n-1}z^{n-1} = \frac{z}{1-4z} + 2zf$$
由此得出
$$f(z) = \frac{z}{(1-2z)(1-4z)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-4z} - \frac{1}{1-2z}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} z^k [2^{2n-1} + 2^{n-1}]$$
最后得到
$$t_n = 2^{2n-1} + 2^{n-1} \quad n = 1,2,\cdots$$
e) 设 $P(x_1,\cdots,x_n) = 1 + x_1 + x_1x_2 + \cdots + x_1x_2\cdots x_n$

那么 $P(x_1,\cdots,x_n) = 1 + x_1(1 + x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_2x_3\cdots x_n)$

如果多项式 $P(x_1,\cdots,x_n)$ 的根的个数为 t_n,那么从上述的关系式得到
$$t_n = 2^{n-1} - t_{n-1} \quad n = 3,4,\cdots \qquad (*)$$
而且 $t_1 = t_2 = 1$.

设
$$f = \sum_{n=1}^{\infty}(2^{n-1} - t_{n-1})z^n = \frac{z}{1-2z} - zf$$
那么,如上面那样
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n$$
因此
$$f(z) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1+z}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k\left(\frac{2^k + (-1)^{k+1}}{3}\right)$$
或者
$$t_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

221. $2^{S_n^k} - 2^{S_n^{k-1}}$,其中 $S_n^r = \sum_{t=0}^{r}\binom{n}{i}$.

222. $\binom{s_n^k}{m} - \binom{s_n^{k-1}}{m}$.

223. a) 设 $\quad P(x_1,\cdots,x_n) = u(x_1,\cdots,x_n)v(x_1,\cdots,x_n)$

那么

$$S_p^0 = S_u^0 \cup S_v^0$$

其中 S_f^0 是多项式 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的零点的集合.

由此得出,即使只有 2 个零值的多项式都是可约的.

剩下的只是描述全部有唯一的零点的多项式.如果这个零点有下列形式

$$\boldsymbol{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$$

那么

$$f(x_1\cdots x_n) = 1 + (1 + x_1 + \alpha_1)\cdots(1 + x_n + \alpha_n)$$

b) n 个变量的不可约的多项式的个数等于 2^n.

224. a) 2^{n+1}.

b) $2^{2^{n-1}}$.

225. 因为线性组合 $\sum\limits_{i=0}^{n}\gamma_i\sigma_i(x_1,\cdots,x_n)$ 与所有 n 个变量的对称函数是一样的,于是全部得到证明.

226. 2^{n-r}.

227. 方程组

$$\bigwedge_{i=1}^{k} L_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 0$$

的解的个数等于 $2^n - q(n)$,其中 $q(n)$ 为下列线性方程组的解的个数

$$L_i(x_1,x_2,\cdots,x_n) = 1 \quad i = 1,2,\cdots,k \tag{$*$}$$

而这个组的解的个数等于 2^{n-r},其中 r 为组($*$)的秩.因此,所求的个数等于 $2^n - 2^{n-r}$.

228. 方程

$$\sum_{i=1}^{n} y_i f_i(x_1,\cdots,x_m) = 0 \tag{$*$}$$

有 $n + m$ 个未知量.考虑两种情形:

a) 点 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 为下列方程组的解

$$f_i(x_1,\cdots,x_m) = 0 \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{$**$}$$

因此,任何 y_i 都满足方程(*),即在这种情形下,解的个数等于 2^nS.

b) 点$(x_1,x_2,\cdots,x_m)$不是方程组(**)的解.在这种情形下,线性方程

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_iy_i = 0$$

其中 $\alpha_i = f_i(x_1,\cdots,x_m)$,它的解的个数等于 2^{n-1}.

因此,在这种情形下方程(*)的解的个数等于$(2^m - s)2^{n-1}$,由此得出答案.

229.显然.

230.a) 如果 h_1,h_2 都是函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的周期,那么

$$f(x + h_1 + h_2) = f(x + h_2) = f(\boldsymbol{x})$$

而且函数 $f(\boldsymbol{x})$ 的周期的集合构成群,这是 E^n 的子群.因为

$$|E^n| = 2^n$$

所以全部得证.

b) 这个函数是 $f(x_1,\cdots,x_n)\sum_{i=1}^{n}x_i$.

c) 如果 $\boldsymbol{h}$ 是对称函数$f(x_1,\cdots,x_n)$的周期,那么对于任何置换 $\pi\in S_n$,由于 $f(x)$ 的对称性,我们有

$$f(\pi^{-1}(\boldsymbol{x} + \pi\boldsymbol{h})) = f(\boldsymbol{x} + \pi\boldsymbol{h})$$

同时有

$$f(\pi^{-1}(\boldsymbol{x} + \pi\boldsymbol{h})) = f(\pi^{-1}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = f(\pi^{-1}\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

因此,对于任何置换 $\pi\in S_n$,向量 $\pi\boldsymbol{h}$ 也是$f(\boldsymbol{x})$的周期.剩下的只要注意到如果 $\boldsymbol{h}\neq(11\cdots1)$,那么利用群 S_n 的加法与置换,可以产生整个群 E^n,即在这种情形有 $f(\boldsymbol{x})=$ 常数.

d) 因为对于 $\boldsymbol{h} = (h_1,\cdots,h_n)$ 有

$$\sigma_2(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = \sigma_2(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{n}x_i\Big(\sum_{j\neq i}h_j\Big) + \sigma_2(\boldsymbol{h})$$

所以从前述的问题得出周期性的条件

$$\binom{n}{2}\equiv 0(\bmod 2),\ n - 1\equiv 0(\bmod 2)$$

由此可知,条件 $\boldsymbol{h}\equiv 1(\bmod 4)$ 是使函数 $\sigma_2(x)$ 成为周期函数的充分必要条件.

e) 与上一题类似,对于 $\boldsymbol{h} = (h_1,\cdots,h_n)$,有

$$\sigma_k(x+\boldsymbol{h})=\sigma_k(x_1,\cdots,x_n)+\sum\lambda_i(h_1,\cdots,h_n)x_i+$$
$$\sum_{i<j}\lambda_{ij}x_ix_j+\cdots+\sigma_k(h_1,\cdots,h_n)$$

其中 $$\lambda_{i_1i_2,\cdots,i_s}=\sigma_{k-s}(h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_{n-s}})$$

而且 $$\{h_{j_1},h_{j_2},\cdots,h_{j_{n-s}}\}=\{h_1,h_2,\cdots,h_n\}\setminus\{h_{i_1},h_{i_2},\cdots,h_{i_s}\}$$

如果 $\boldsymbol{h}=(1,1,\cdots,1)$ 为 $\sigma_k(x)$ 的周期,那么

$$\binom{n-s}{n-k}\equiv 0(\mathrm{mod}\ 2)\quad s=0,1,\cdots,k-1$$

231.设函数 $f\in S$ 的根的个数为 $Z(f)$,那么有

$$r(s)\geqslant\frac{1}{N}\sum_{f\in S}Z(f)=\frac{1}{N}\sum_{x\in E^n}\sum_f[2^n-f(x)]=\frac{2^n}{N}t$$

等.

232.注意到函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的集合 N_f 与下列线性方程组的解集合相等

$$L_i(x_1,\cdots,x_n)=1\quad i=1,2,\cdots,m$$

如果在函数 L_i 中非零项的个数为 k_i,那么

$$L_i^*(x_1,\cdots,x_n)=\overline{L}_i(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)=L_i(x_1,\cdots,x_n)+(k_i)_{\mathrm{mod}\ 2}+1$$

因此,函数 f 的单位元的集合就是下列线性方程组的解集合

$$L_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(k_i)_{\mathrm{mod}\ 2}\quad i=1,2,\cdots,m$$

由此得出条件

$$(k_i)_{\mathrm{mod}\ 2}=1\quad i=1,2,\cdots,m$$

233.直接应用数学归纳法.

234.从直接的观察得出.

235.a) 设 $|A|=n$,那么所求的个数等于满足下列条件的 $2\times n$ 矩阵的个数:矩阵由 0 与 1 所组成,而且没有一列全部为 0.这样的矩阵的个数为 3^n.

b) 所求的个数等于满足下列条件的 $2\times n$ 矩阵的个数:矩阵没有全为 0 的列也没有全为 1 的列.即等于 2^n.

c) 我们可以有 $\binom{n}{k}$ 种方法选择 $2\times n$ 矩阵的第一行.在选择第二行时,我们必须单值地填满 $n-k$ 个位置,而且要考虑到在第二行中的 1 的总数应当等于 k,然后才可以任意地填满其余的 $n-(n-k)=k$ 行.因为我们已经用了 $n-k$

个 1,所以剩下 $k-(n-k)=2k-n$ 个 1. 因此,所求的选择第二行的方法的个数等于$\binom{k}{2k-n}$.

于是,答案为

$$\binom{n}{k}\binom{k}{2k-n}$$

236. a) 仍然设 $|A|=n$, $|a|=k$,那么所求的解的个数等于恰好有 k 个确定的单位列的 $2\times n$ 矩阵的个数,即 3^{n-k}.

b) 所求的个数等于至少有 1 个单位列的 $2\times n$ 矩阵的个数,即应从全部的矩阵的个数 4^n 减去没有单位列的矩阵个数,于是所求的个数为 4^n-3^n.

c) 所求的解的个数等于满足下列条件的 $2\times n$ 矩阵的个数:矩阵中有一行有 p 个 1,第二行有 q 个 1,而且至少还有一个单位列. 这种矩阵的补集由没有单位列的矩阵所组成. 在“补集”中的矩阵的个数等于

$$\binom{n}{p}\binom{n-p}{q}$$

因为第一行选自 E_p^n,而第二行选自 E_q^n,又考虑到这些行的“1”不是共有的,由此可知所求的矩阵的个数是

$$\binom{n}{p}\binom{n}{q}-\binom{n}{p}\binom{n-p}{q}=\binom{n}{p}\left[\binom{n}{q}-\binom{n-p}{q}\right]$$

237. 设 $|A|=n$, $|b|=k$,所求的个数等于满足下列条件的 $2\times n$ 矩阵的个数:矩阵中有固定的 k 个单位列,而其余 $n-k$ 个列既不是零列也不是单位列. 因此,所求的个数等于 $2^{n-k}=2^{|A|-|b|}$.

238. a) 所求的个数等于满足下列条件的 $k\times n$ 矩阵的个数:矩阵中可以“分出” $|a|=m$ 个非零列,而其余的列都是零列,这样的矩阵的个数等于 $(2^k-1)^{|a|}$.

b) 所求的个数等于满足下列条件的 $k\times n$ 矩阵的个数:矩阵没有零行,矩阵中可以“分出” $|a|=m$ 个非零列,而其余的列为零列. 为了得出这个个数,我们应当从问题 238. a) 的 $k\times n$ 矩阵总数减去至少有一个非零行的矩阵的个数. 因此,所求的个数是

$$(2^k-1)^m-\binom{k}{1}(2^{k-1}-1)^m+\binom{k}{2}(2^{k-2}-1)^m+\cdots$$

239. 设 $|A|=n,|q|=k$,那么所求的个数等于满足下列条件的 $2\times n$ 矩阵的个数:矩阵中可分出 k 个非零列,而其余 $n-k$ 列是任意的. 这样的矩阵的个数显然是 $3^k4^{n-k}=3^{|a|}4^{|A|-|a|}$.

240. 设 $|A|=n$,所求的个数等于没有单位列的 $k\times n$ 维矩阵的个数,因此答案是 $(2^k-1)^n$.

241. 设 $|A|=n$,所求的个数等于具有下述性质的 $k\times n$ 矩阵的个数:矩阵中至少有一个"单位列"(全部由 1 组成的列). 利用以上的问题的结果得到答案 $2^{kn}-(2^k-1)^n$.

242. 与组 $V=\{V_1V_2\cdots V_k\}$ 同时考虑组 $V^*=\{\bar V_1\bar V_2\cdots\bar V_k\}$. 显然有 $V\cap V^*=\varnothing$. 因此,$2k\leqslant 2^{|A|}$. 这就是所要证明的.

243. 注意到如果不满足 243. b) 与 c) 中每一个条件,那么就不满足 243. a) 的条件. 因此,只要证明如果 $V_i\notin V_j$,那么 $k\leqslant\left(\begin{array}{c}|A|\\ \frac{|A|}{2}\end{array}\right)$便足够了.

我们以标准的推理去证明这个不等式. 考虑集合 A 的下列的"链"$\{A_1\subseteq A_2\subseteq\cdots\subseteq A_s\}$,子集 A_i 的基数与子集 A_{i+1} 的基数相差 1. 不难看出,这样的链的长度为 $n+1$(从空集开始并以集 A 结束),而且这样的链的个数等于 $n!$.

如果 $|V|=k$,那么包含集合 V 的长度为 n 的链的个数等于 $k!(n-k)!$(其中 $k!$ 个是"向下"加入的,即由"位于"V 内的集合所组成的;而 $(n-k)!$ 个是"向上"加入的,即由"包含"V 的集合所组成的).

现在设 $\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 为满足条件 $A_i\notin A_j$ 的子集族,对于每一个 A_i,我们考虑包含集合 A_i 的长度为 n 的链集合 $S(A_i)$,注意到 $S(A_i)\cap S(A_j)=\varnothing$. 这是因为若某两个链相同,那么集合 A_i 与 A_j 将会处于包含状态.

按上述可知集合 $S(A_i)$ 的基数等于

$$|A_i|!(n-|A_i|)!$$

因此 $$\left|\bigcup_{i=1}^{m} S(A_i)\right| = \sum_{i=1}^{m}\left|S(A_i)\right| = \sum_{i=1}^{m}\left|A_i\right|!(n-|A_i|)! \leqslant n!$$

或者 $$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\binom{n}{|A_i|}} \leqslant 1$$

因为 $$\binom{n}{|A_i|} \leqslant \binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

然后从这些不等式推出问题的结论.

244.设 $$V^* = F_1 \cup F_2$$

其中

$$F_1 = \{V_i \mid |V_i| \leqslant r\}$$

$$F_2 = \{V_i \mid |V_i| \geqslant r+1\}$$

显然有

$$|F_1| \leqslant \sum_{i=0}^{r}\binom{n}{i}$$

对于每一个集合 V,我们以 $\sigma(V)$ 表示位于 V 内的所有 $r+1$ 个元素子集合的族.从问题的条件得到 $\sigma(V_i) \cap \sigma(V_j) = \varnothing$.

现在设

$$C = \bigcup_{i=1}^{F_2}\sigma(V_i)$$

因为按 F_2 的定义有 $|\sigma(V_i)| \geqslant 1$,所以显然得

$$|C| = \sum_{i=1}^{|F_2|}|\sigma(V_i)| \geqslant |F_2|$$

另一方面,根据 $C(V)$ 的定义,只有基数为 $r+1$ 的子集进入集合 C,即

$$|C| \leqslant \binom{n}{k+1}$$

考虑到上述不等式,由此得出

$$|F_2| \leqslant \binom{n}{r+1}$$

结果我们有

$$|V^*|=|F_1|+|F_2|\leqslant\sum_{i=0}^{r+1}\binom{n}{i}$$

这就是所要证明的.

245. 将每一个子集合 $V_i\in V^*$ 与两重向量 $\boldsymbol{a}_i=(\alpha_1\cdots\alpha_n)$ 作比较,我们从问题的条件得到向量组 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ 的下列性质

$$(\boldsymbol{a}_i,\boldsymbol{a}_j)=r$$

应用克莱姆矩阵,经过简单的推导,由此得出:各向量 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ 是线性无关的,即 $k\leqslant n=|A|$.

246. 如上一个问题一样处理,我们得出:向量组 $\{\boldsymbol{a}_i\}$ 的克莱姆矩阵有如下形式

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1k}\\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2k}\\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kk}\end{pmatrix}$$

其中 v_{ii} 为奇数,而矩阵的其余元素为偶数. 由此得出: $|\boldsymbol{A}|$ 为奇数,这表示 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,即各向量 a_i 是线性无关的,而且 $k\leqslant n$,这就是所要证明的.

248. 设 $V=\{V_1,V_2,\cdots,V_m\}$ 为所求的族,而且 $V_i\in A$,其中 $|A|=n$. 然后,由于问题的条件,在族 $V^2=\{V_i\cap V_j\}$ 中,任意两个子集合不相交. 为了估计族 V^2 的基数,我们注意到:如果

$$V_i\cap V_j=V_r\cap V_s$$

那么,从条件

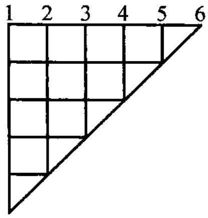
$$V_p\cap V_q\neq\varnothing$$

得

$$V_i\cap V_j\cap V_s\neq\varnothing$$

这与问题的条件相矛盾. 因此,族 V^2 的全部元素都是不相同的,而且其中每一个都是非空集合,从问题 247 的结论得 $\binom{m}{2}\leqslant n$,所要求的得证.

现在研究下列图式



以及由这个图式中的点所组成的"角"的集合(将这些集合中的一个记为 $*$),这个集合中的每一个由 m 个点所组成,其中 $m = m(n)$,将它定义为不等式 $\binom{m}{2} \leqslant n$ 的最大整数解.不难看出,族中任意两项恰好相交于 1 个元素,而任意三项则不相交.因为族的元素的个数等于 m,那么,在其中达到前述的上界.

249.设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 且 T_i 为 A 的所有不包含元素 a_i 的子集合的族.

如果 R 为 A 的所有不覆盖 A 的子集合的类,那么容易证明

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} T_i$$

其次,根据容斥公式得

$$|R| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} T_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |T_i| - \sum_{i=j} |T_i \cap T_j|$$

因为

$$|T_i| = 2^{2^{n-1}}, \ |T_i \cap T_j| = 2^{2^{n-2}}, \cdots$$

所以容易得到

$$|R| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \binom{n}{i} 2^{2^{n-i}}$$

如果 $\bar{R}$ 是所有覆盖 A 的族,那么

$$|\bar{R}| = 2^{2^n} - |R| = 2^{2^n} - n\sqrt{2^{2^n}} + O\left(\sqrt[4]{2^{2^n}} n^{c\log_2^n}\right)$$

251.a) 显然.

b) 设 t_{01} 为在字 a 中(01) 片段的个数,那么有

$$t_{01} = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (1 - a_i) a_j = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_j - \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_i a_j$$

其次

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \alpha_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j$$

其中 λ_j 为符合条件 $1 \leqslant i \leqslant j$ 的对(i, j) 的个数,即 $\lambda_j = j - 1$.因此

$$t_{01} = \sum_{j=1}^{n}(j-1)\alpha_j - \binom{\|\boldsymbol{a}\|}{2} = \sum_{j=1}^{n} j\alpha_j - \|\boldsymbol{a}\| - \binom{\|\boldsymbol{a}\|}{2} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} j\alpha_j - \frac{\|\boldsymbol{a}\|(\|\boldsymbol{a}\|+1)}{2}$$

252.每一个单调的字 α 都可以表示为下列形式

$$\alpha = 1^{x_1}2^{x_2}\cdots m^{x_m}$$

其中 $x_i \geqslant 0, i = 1,\cdots,m$,且$\sum_{i=1}^{m} x_i = n$.

因此,所求的字的个数等于下列方程的解的个数

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = n \quad x_i \geqslant 0$$

由此得到答案$\binom{n+m-1}{n}$.

253.a) 将每一个长度为 n 有 k 个组的二元字表示为下列形式

$$\alpha = \gamma^{t_1}\,\overline{\gamma}^{t_2}\cdots\gamma^{t_k}$$

其中

$$\overline{\gamma} = \begin{cases}1 & 如果\ \gamma = 0\\ 0 & 如果\ \gamma = 1\end{cases}$$

而且

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{k} t_i = n\\ t_i \geqslant 1\end{cases}$$

由此及问题 137 得出:所求的个数等于 $2\binom{n-1}{k-1}$.

b) 如果长度为 n 的字 a 有 k 个为 1 的组,那么这个字的组的总数可能是下列三个数之一:$2k-1, 2k, 2k+1$.同时,$2k-1$ 一组的所有的字都是从 1 开始,而 $2k+1$ 一组的所有字都是从 0 开始.因此,应用问题 253.a),对所求的个数 t_k^1 求得下列表达式

$$t_k^1(n) = t_{2k-1}(n) + 2t_{2k}(n) + t_{2k+1}(n) = \binom{n+1}{2k}$$

c) 在字母表 $M = \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$ 上由 k 个组而成的每一个字都具有下列

形式$\gamma_1^{t_1}\gamma_2^{t_2}\cdots\gamma_k^{t_k}$,其中 $t_i \geqslant 1(i = 1,2,\cdots,k)$.

在给定的容许的序列$(\gamma_1\gamma_2\cdots\gamma_k)$时,向量$(t_1t_2\cdots t_k)$的个数等于

$$t_k(n) = \binom{n-1}{k-1}$$

如果 $\gamma_i \in M$,而且 $\gamma_{i+1} \neq \gamma_i$,那么序列$(\gamma_1\gamma_2,\cdots,\gamma_k)$是容许的.由此得出:容许的序列的个数等于 $m(m-1)^{k-1}$.

答案:$m(m-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}$.

254. a)$2^n - 1$.

b) 字 a 的每一个片段形如 1^x0^y,其中

$$0 \leqslant x \leqslant k$$
$$0 \leqslant y \leqslant n-k$$

因此,所求的片段的个数等于上列不等式组的自然数解的个数.而这些解的个数等于$(k+1)(n-k+1)$.

c) 所求的片段的个数等于形如 $0^{x_1}0^{x_2}0^{x_3}$,其中

$$0 \leqslant x_1 \leqslant t_1$$
$$1 \leqslant x_2 \leqslant t_2$$
$$0 \leqslant x_3 \leqslant t_3$$

或者形如 0^y,其中

$$0 \leqslant y \leqslant t_1 + t_3$$

第一类片段的个数等于

$$(t_1+1)(t_3+1)t_2$$

第二类片段的个数等于

$$(t_1+t_3+1)$$

片段的总数是这些数之和.

255. a) 若字 a 的长度是n,则 a 的长度为$n-1$ 的不同的片段的个数等于字 a 的组的个数.

b) 最小值等于 1,最大值为 n.

256. 设字 a 有下列形式

$$a = 1^{t_1}0^{t_2}\cdots 1^{t_s}$$

其中
$$\sum_{i=1}^{s} t_i = n - 2$$

去求使字 a 为字 ε_n 的片段的条件.为了使 $1^{t_1} \in \varepsilon_n$,应当"选取"字 ε_n 的 $2t_1 - 1$ 位,为了使 $1^{t_1}0^{t_2} \in \varepsilon_n$,应当取字 ε_n 的 $(2t_1 - 1) + (2t_2 - 1) = 2(t_1 + t_2) - 2$ 位,将这样的推导进行到"最后",我们得到使字 a 出现在 ε_n 内的下列条件

$$2(t_1 + t_2 + \cdots + t_s) - s \leqslant n$$

考虑到字 a 的长度,或者写成

$$2(n - 2) - s \leqslant n$$

因此,字 a 的组的个数应满足不等式

$$n - 4 \leqslant s \leqslant n - 2$$

即字 a 可能有 $n - 4, n - 3$ 个组或 $n - 2$ 个组.考虑到问题 254.a),对于这些字的个数得到表达式

$$\binom{n-3}{n-5} + \binom{n-3}{n-4} + \binom{n-3}{n-3} = \binom{n-2}{2} + 1$$

如果字 a 形如 $a = 0^{t_1}1^{t_2}\cdots 1^{t_s}$,那么类似的推导得到不等式

$$2(t_1 + t_2 + \cdots + t_s) - (s - 1) \leqslant n$$

$$n - 3 \leqslant s \leqslant n - 2$$

以及关于这种形式的字的个数的表达式

$$\binom{n-3}{n-4} + \binom{n-3}{n-3} = n - 2$$

答案:$\binom{n-1}{2} + 2$.

257.所求的个数等于满足下列条件的长度为 $n + 1$ 的字的个数,它包含了给定的长度为 n 的字 a 作为片段.由问题 251.b),这个数等于

$$\binom{n+1}{n} + \binom{n+1}{n+1} = n + 2$$

259.a) $l_2 = 3$ 与 $l_3 = 7$,这是因为字 $a = 1213121$ 是通用的.

b) 如果 $a_k = a_1a_2\cdots a_{n-(k-1)}a_{n-k}a_{n-k-1}\cdots a_n$ 是通用的字,那么长度为 $k - 1$ 的子字($a_{n-k-1}\cdots a_n$)不包含字母表 A 的任何一个字母,例如 1.

现在考虑长度为 k 且以 1 为结束的所有置换，它们都在字 $a' = a_1a_2\cdots a_{n-(k-1)}$ 中.因此,字 a' 包含了在字母表$A' = \{2,3,\cdots,k\}$上的所有置换,即它在这个字母表上是通用的,因而成立下列不等式

$$n-(k-1) \geqslant l_{k-1}$$

或

$$l_k \geqslant l_{k-1+(k-1)}$$

即

$$l_k \geqslant \binom{k+1}{2}$$

c) 字 $a_k = \underbrace{(12\cdots k)(12\cdots k)\cdots(12\cdots k)}_{k}$ 是 k 通用的.

260. a) 设 $A = a_1a_2a_3\cdots a_m$ 是包含两个字 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 作为片段的任意的字.我们首先在 A 中以黑色标记字 $\boldsymbol{a}$ 的字母,以白色标记字 $\boldsymbol{b}$ 的字母.按 $d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的定义,我们所得的两种标记的字母的个数不超过它们的总数,所以,计算被标记的字母的个数得到

$$2n - d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \leqslant m$$

如果字 A 有最小可能的长度,那么在 A 上标记所有字母,这表示

$$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = 2n - d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$$

b) 只需证明下列三角形不等式成立

$$\rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + \rho(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \geqslant \rho(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$$

或者,考虑到 $D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ 的定义,证明下列不等式成立

$$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + D(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) \geqslant D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}) + n$$

以(xy)表示包含 x 与 y 作为片段而且有最小长度的任意的字,考虑字

$$T = (\boldsymbol{ab})(\boldsymbol{bc})$$

现在从字 T 的第二个括号中排除 n 个与字 $\boldsymbol{b}$ 对应的字母,然后以下述的方式将其余的字母“分配”到第一个括号中去:使得片段 $\boldsymbol{bc}$ 在第一个括号中,这样操作的结果我们得到字 T',字 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 作为它所包含的片段.字 T' 的长度等于

$$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + D(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) - n$$

又因为 T' 包含 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{c}$,那么有

$$D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) + D(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) - n \geqslant D(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$$

这就是所要证明的.

261. 以 $T_n(b)$ 表示 E^n 中以字 $b \in B$ 开始的字的集合,按定义有

$$B : T_n(u) \cap T_n(v) = \varnothing$$

当 $u, v \in B$ 时.

其次,如果 $|u| = r$,那么

$$|T_n(u)| = 2^{n-r}$$

由此得出

$$\bigcup_{u \in B} T_n(u) \subseteq E^n$$

这意味着

$$\sum_i l_i \cdot 2^{n-i} \leqslant 2^n$$

这就是所要证明的.

262. $\dfrac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

264. $\bar{w} = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{x \in E^n} \| x \| = \dfrac{1}{2^n} \sum\limits_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \dfrac{n \cdot 2^{n-1}}{2^n} = \dfrac{n}{2}$.

265. 当 $t \leqslant n - 1$ 时,$p = \dfrac{S_n^{i+1}}{2^n}$;当 $t = n$ 时,$p = 1$.

266. a) $\bar{\rho} = \dfrac{1}{\binom{2^n}{2}} \sum\limits_{a_i, a_j \in E^n} \rho(a_i, a_j) = \dfrac{2^{n-1}}{\binom{2^n}{2}} n \cdot 2^{n-1} = \dfrac{n}{2} \cdot \dfrac{1}{1 - \frac{1}{2^n}}$.

b) 如问题 183. b) 那样得到

$$\sum_{a_i, a_j \in E^n k} \rho(a_i, a_j) = n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1}$$

由此得出

$$\bar{\rho} = \frac{1}{\binom{\binom{n}{k}}{2}} \sum_{a_i, a_j \in E^n k} \rho(a_i, a_j) = \frac{2^n\binom{n-1}{k-1}\binom{n-1}{k}}{\binom{n}{k}^2\left[1 - \frac{1}{\binom{n}{k}}\right]} =$$

$$2k\left(1 - \frac{k}{n}\right)\frac{1}{1 - \binom{n}{k}^{-1}} = 2k + o(1)$$

当 $k = o(\sqrt{n})$ 时.

c) 当 $t \geqslant 3$ 时,有

$$\bar{\rho} = \frac{2S_{n-1}^{t-1} \cdot S_n^{t-1}}{(S_n^t)^2} \cdot \frac{\left(1 + \frac{n+1}{S_n^{t-1}}\right)}{1 + (S_n^t)^{-1}} = \frac{2S_{n-1}^{t-1} \cdot S_n^{t-1}}{(S_n^t)^2} + o(1)$$

当 $t = o(n)$ 时,有

$$\bar{\rho} \approx 2\left(\frac{t}{n}\right)^2$$

267. a) 设

$$\xi_{x,y} = \begin{cases} 1 & 如果(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0 \\ 0 & 如果(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 1 \end{cases}$$

那么对所求的概率我们有如下表达式

$$P = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{x,y}\xi_{x,y} = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{x}\sum_{y}\xi_{x,y}$$

内部的和数等于线性布尔函数的零点的个数,即 2^{n-1},由此得 $P = \frac{1}{2}$.

b) 与上面类似得

$$P = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{x,y}\xi_{x,y} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\sum_{\substack{x \\ \|x\| = k}}\sum_{y}\xi_{x,y} = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^{n-k} = \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

268. 我们先求分布 $P_k = P(\xi = k)$ 的生成函数,有

$$F(z) = \frac{1}{4^n}\sum_{x,y}z^{(x,y)} = \frac{1}{4^n}\sum_{x,y}z^{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i} = \frac{1}{4^n}\sum_{x_1y_1}z^{x_1y_1}\cdots\sum_{x_ny_n}z^{x_ny_n} = \frac{(z+3)^n}{4^n}$$

由此得到

$$P_k = \frac{\binom{n}{k}}{4^n}3^{n-k}$$

其次 $$M\xi = F'(1) = \frac{n}{4}$$

又因为 $$D\xi = F''(1) + F'(1) - [F'(1)]^2$$

所以有 $$D\xi = \frac{3n}{16}$$

269. 如上例一样,先求分布 a_{pq} 的生成函数,我们有

$$F_{p,q}(z)=a_{p,q}(z)=\sum a_{p,q}z^k=\frac{1}{\binom{n}{p}\binom{n}{q}}\sum_{\substack{x\in E_p^n\\ y\in E_q^n}}z^{(x,y)}=$$

$$\frac{1}{\binom{n}{p}\binom{n}{q}}\sum_{x_i,y_i}z^{x_1y_1}\cdots z^{x_ny_n}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{u^{\sum_{i=1}^n x_i}}{u^{p+1}}\right\}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{v^{\sum_{i=1}^n y_i}}{v^{q+1}}\right\}=$$

$$\frac{1}{N}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{p+1}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{1}{v^{q+1}}\sum_{x_1y_1}z^{x_1y_1}u^{x_1}v^{y_1}\cdots\sum_{x_ny_n}z^{x_ny_n}u^{x_n}v^{y_n}\right\}\right\}=$$

$$\frac{1}{N}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{p+1}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{1}{v^{q+1}}(1+u+v+uvz)^n\right\}\right\}=$$

$$\frac{1}{N}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{p+1}}\operatorname*{coef}_v\left\{\frac{1}{v^{p+1}}[(1+u)+v(1+u)z]^n\right\}\right\}=$$

$$\frac{1}{N}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{p+1}}\binom{n}{q}(1+uz)^u(1+u)^{n-q}\right\}=$$

$$\frac{\binom{n}{q}}{N}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint_{|u|<p}\frac{(1+uz)^q(1+u)^{n-q}}{u^{p+1}}\mathrm{d}u$$

其中

$$N=\frac{1}{\binom{n}{p}\binom{n}{q}}$$

其次

$$a_{p,q}(k)=\frac{1}{\binom{n}{p}}\operatorname*{coef}_z\left\{\frac{1}{z^{k+1}}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{1}{u^{p+1}}(1+uz)^q(1+u)^{n-q}\right\}\right\}=$$

$$\frac{1}{\binom{n}{p}}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{n-q}}{u^{p+1}}\operatorname*{coef}_z\left\{\frac{(1+uz)^q}{z^{k+1}}\right\}\right\}=$$

$$\frac{1}{\binom{n}{p}}\operatorname*{coef}_u\left\{\frac{(1+u)^{n-q}}{u^{p+1}}\binom{q}{k}u^k\right\}=$$

$$\frac{\binom{q}{k}}{\binom{n}{p}}\binom{n-q}{p-k}$$

显然同样有

$$a_{p,q}(k)=\frac{\binom{p}{k}\binom{n-p}{q-k}}{\binom{n}{q}}$$

其次

$$M\xi = F'_{p,q}(1)=\frac{q}{\binom{n}{p}}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|u|<p}\frac{(1+u)^{n-1}}{u^{p-1}}\mathrm{d}u=$$

$$q\frac{\binom{n-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}=\frac{pq}{n}$$

而且
$$D\xi=\frac{pq}{n(n-1)}\left[n+\frac{pq}{n}-(p+q)\right]$$

我们从本例所得到的教益在于:可以用简单的代替变换与分析变换替代所有的“组合的”解法.

270.利用上一个问题及显然的公式

$$(A\cap B)=(X_A,X_B)$$
$$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$$

其中,X_A,X_B 是分别与子集合 A 和 B 相对应的特征(0,1)向量.

271.由 E^n 中可比较的顶点 x 与 y 组成的事件是以下两个事件之和

$$\{x\leqslant y\}与\{x\geqslant y\}$$

第一个事件的概率是二元 $2\times n$ 矩阵中没有形如$\binom{0}{1}$的列的概率,即$\left(\frac{3}{4}\right)^n$;第二个事件的概率是类似的.因此,当 $n\geqslant 2$ 时,所求的概率为 $2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

272.因为根据问题253①,长度为 n 而且正好有 m 个组的字的个数 $q_{m,n}=2\binom{n-1}{m-1}$,那么随机变量 ξ 的分布为

$$P_m=P\{\xi=m\}=\frac{\binom{n-1}{m-1}}{2^{n-1}}$$

这个随机变量的生成函数具有如下形式

$$F_n(z)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{n}P_m z^m=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{m=1}^{n}\binom{n-1}{m-1}\cdot z^m=\frac{z(1+z)^{n-1}}{2^{n-1}}$$

由此立即得到

$$M\xi=\frac{n+1}{2},D\xi=\frac{n-1}{4}$$

273.与上一题类似求解.

274.利用问题203.a),对于所求的概率 p_n,找到如下表达式

$$p_n=\frac{\prod_{i=0}^{n-1}(2^n-2^i)}{2^{n^2}}$$

275.有 k 个非零列的 $m\times n$ 矩阵的个数等于

$$\binom{n}{k}(2^m-1)^{n-k}$$

因此有

$$P_k(m,n)=\binom{n}{k}\frac{(2^m-1)^{n-k}}{2^{mn}}$$

其次

$$F_n(z)=\sum_{k=0}^{n}P_k(m,n)z^k=\frac{(2^m-1)^n}{2^{mn}}\left(1+\frac{z}{2^m-1}\right)^n$$

因为 $2^m-1=\alpha n$,所以 $\lim_{n\to\infty}F_n(z)=e^{z\cdot\alpha^{-1}}$.

这样一来,在所选择的条件下,极限分布 $P_k(m,n)$ 是泊松(Poisson)分布,其

① 译者注:原文这里错记为254.

中 $\lambda = \alpha^{-1}$,直接微分 $F_n(z)$ 便求得数学期望 $M\xi$.

276.研究 2^n 个随机变量 $\xi_i(i = 1,\cdots,2^n)$,即

$$\xi_i = \begin{cases}1 & \text{如果点 } a_i \in E^n \text{ 没有被半径为 } t \text{ 的“随机的”球所覆盖} \\ 0 & \text{如果 } a_i \text{ 是被覆盖的①}\end{cases}$$

如果我们“抛掷”s 个半径为 t 的球,那么 ξ_i 有如下分布

$$\xi_i = \begin{cases}1 & \text{以概率 } p = \dfrac{\dbinom{2^n - S_n^t}{s}}{\dbinom{2n}{s}} \\ 0 & \text{以概率 } q = 1 - p\end{cases}$$

如果“无覆盖”的点的总数为 ξ,那么有

$$\xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

而且

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} M\xi_i = 2^n \frac{\dbinom{2^n - S_n^t}{s}}{\dbinom{2^n}{s}}$$

277.与上题类似地得到

$$M\xi = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k} \frac{\dbinom{2^n - 2^k}{s}}{\dbinom{2^n}{s}}$$

278.具有给定限制的 s 个点的可能的排列总数等于

$$N_k = \begin{pmatrix}\dbinom{n}{0} \\ \lambda_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dbinom{n}{1} \\ \lambda_1\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}\dbinom{n}{n} \\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

其中 $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = s$.

---

① 原文这里误为“如果 a_i 是无覆盖的”.

将 k 维区间 L 的重量定义为在这个区间中具有最少个 1 的点的重量,即

$$\| L \| = \min\{ \| x \|, x \in L\}$$

现在注意到在 E^n 中重量为 r 的 k 维区间的个数 $a_{k,r}$ 等于

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{r}$$

事实上,区间 L 的重量是在这个区间的 $n-k$ 个"不动的"坐标的个数.因为选择"不动的"坐标的个数的方法有 $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$ 种,在这些坐标中选择 r 个 1 的方法有 $\binom{n-k}{r}$ 种,所以

$$a_{k,r} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r}$$

其次注意到,在重量为 r 的 k 维区间中,重量等于 q 的点的个数是 $\binom{k}{q-r}$.

现在去求固定的重量为 r 的 k 维区间 L 没有被选择的 s 个点所"刺穿"的概率.因为我们应当"在区间 L 外"选择这 s 个点,因此,所求的选择的个数等于

$$\prod_{q=0}^{n}\binom{b_{q,r}}{\lambda_q}$$

其中
$$b_{q,r} = \binom{n}{q} - \binom{k}{q-r}$$

由此得出,所求的概率 P_r 等于

$$P_r = \frac{1}{N_k}\prod_{q=0}^{n}\binom{b_{q,r}}{\lambda_q}$$

现在利用前一个问题的结果,最后对所求的数学期望得到下列表达式

$$M\xi = -\frac{\binom{n}{k}}{N_k}\sum_{r=0}^{n-k}\binom{n-k}{r}\prod_{q=0}^{n}\binom{\binom{n}{q}-\binom{k}{q-r}}{\lambda_q}$$

279.设 T_n 是以 $\{0,1\}$ 为元素的 n 阶方阵的集合,而且

$$\overline{per}(T_n) = \frac{1}{2^{n^2}}\sum_{A\in T_n} per(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{2^{n^2}}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{A\in T_n} a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

其中 $A=(a_{ij})\in T_n$，S_n 是 n 阶对称群.

显然,只有在条件

$$a_{1\sigma(1)}=a_{2\sigma(2)}=\cdots=a_{n\sigma(n)}=1$$

下,里面的和数等于 1.

满足上述条件的矩阵 $A=(a_{ij})$ 的个数为 2^{n^2-n},由此得出

$$\overline{per}(T_n)=\frac{n!}{2^{n^2}}2^{n^2-n}=\frac{n!}{2^n}$$

280. 重复以上的论断得

$$\overline{per}(Q_n)=\frac{1}{3^{n^2}}\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{A\in Q_n}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

这里 Q_n 是所求的以 $\{0,1,2\}$ 为元素的 n 阶方阵的集合.乘积 $a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ 取值 $0,1,2,2^2,2^3,\cdots,2^n$.这里,以 $\binom{n}{k}$ 种方法得到各个值 2^k.由此得出

$$\overline{per}(Q_n)=\frac{1}{3^{n^2}}n!\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\right)3^{n^2-n}=n!$$

281. 设

$$\xi_d^k=\begin{cases}1 & \text{如果 } d \text{ 是 } k \text{ 的因子}\\ 0 & \text{如果 } d \text{ 不是 } k \text{ 的因子}\end{cases}$$

那么有

$$\bar{\tau}(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\tau(k)=\frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_d^k=\frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}\left[\frac{n}{d}\right]$$

其次

$$\sum_{d=1}^{n}\left[\frac{n}{d}\right]<n(\ln n+c+o(1))$$

由此立即得出

$$\bar{\tau}(n)\approx\ln n$$

282. 与上面类似地得到

$$\bar{\sigma}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma(k)=\frac{1}{n}\sum_{d=1}^{n}d\left[\frac{n}{d}\right]$$

初等的计算证明了

$$\bar{\sigma}(n) = o(n)$$

283.按定义得

$$S(n) = \frac{\sigma(n)}{n}\sum_{d \mid n}\frac{1}{d}$$

其次有

$$\bar{S}(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} S(n)$$

$$\bar{S}(n) = \frac{1}{N}\sum_{d=1}^{n}\frac{1}{d}\left[\frac{N}{d}\right]$$

由此得出

$$\bar{S}(N) < \sum_{d=1}^{N}\frac{1}{d^2}, \bar{S}(N) > \sum_{d=1}^{N}\frac{1}{d^2} - \frac{1}{N}\sum_{d=1}^{N}\frac{1}{d}$$

于是
$$\bar{S}(N) = \frac{\pi^2}{6} + O\left(\frac{\ln(N)}{N}\right)$$
(同样可参看问题 139.c)).

284.a) 若多项式 $F(x_1\cdots x_n)$ 的单位的个数为 $N(F)$,那么有

$$\bar{N}(n) = \frac{1}{2^{2^n}}\sum_{F} N(F) = \frac{1}{2^{2n}}\sum_{\alpha\in E^n}\sum_{F} F(\alpha)$$

内部的和数等于在点 $\alpha \in E^n$ 取值为 1 的多项式的个数,这个数字等于下列关于 2^n 个未知量 $\{c_{i_1\cdots i_k}\}$ 的线性方程组的解的个数:其中

$$k = 0,\cdots,n$$

$$c_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i\alpha_i + \sum_{i<j} c_{ij}\, a_i\, \alpha_j \cdots = 1$$

这个方程有 2^{2^n-1} 个解,因此得到

$$\bar{N}(n) = 2^{n-1}$$

b) 我们去求次数不高于 k 而且在给定点 $a \in E^n$ 取值为 1 的多项式的个数.这个数字等于下列关于 $\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$ 个未知量的线性方程的解的个数

$$c_0 + \sum c_i\alpha_i + \cdots + \sum c_{i_1 i_2\cdots i_k}\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k} = 1 \qquad (*)$$

因此,它有 $2^{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}-1}$ 个解.在点 $\alpha \in E^n$ 的 k 次多项式的个数等于

$$A_n = 2^{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}-1} - 2^{\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}-1}$$

而 k 次多项式的总数等于

$$B_n = 2^{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}} - 2^{\sum_{i=0}^{k-1}\binom{n}{i}}$$

由此得出,所求的数学期望等于 2^{n-1}.

285. a) 因为长度为 m 的非零二元列的个数等于 2^m-1,因此,所求的矩阵的个数由表达式 $(2^m-1)^n$ 给出.

b) 与本题情形 a) 类似地推导,得到下列答案

$$\binom{n}{k}(2^m-1)^{n-k}$$

c) $mn2^{mn-m-n+1}$.

d) 以 $R_{m,n}^0$ 表示所有 $m\times n$ 维二元矩阵的集合,以 $A_{m,n}^0$ 表示 $R_{m,n}^0$ 中有零行的矩阵的集合,以 $B_{m,n}^0$ 表示 $R_{m,n}^0$ 中有零列的矩阵的集合.如果 $t_{m,n}$ 是 $R_{m,n}^0$ 中既没有零行,也没有零列的矩阵的个数,那么

$$t_{m,n} = 2^{mn} - |A_{m,n}^0 \cup B_{m,n}^0|$$

如果 L_i 是 $R_{m,n}^0$ 中第 i 行为零的矩阵的集合,而 L^j 是 $R_{m,n}^0$ 中第 j 列为零的矩阵的集合,那么有

$$A_{m,n}^0 = \bigcup_{i=1}^{m} L_i,\ B_{m,n}^0 = \bigcup_{j=1}^{n} L^j$$

其次

$$|L_{i_1}\cap L_{i_2}\cap\cdots\cap L_{i_k}| = 2^{mn-kn},\ |L^{j_1}\cap L^{j_2}\cap\cdots\cap L^{j_s}| = 2^{mn-sm}$$

$$|A_{m,n}^0| = 2^{mn}-(2^n-1)^m,\ |B_{m,n}^0| = 2^{mn}-(2^m-1)^n$$

因为 $|A_{m,n}^0\cup B_{m,n}^0| = |A_{m,n}^0| + |B_{m,n}^0| - |A_{m,n}^0\cap B_{m,n}^0|$

而且

$$\left|A_{m,n}^0\cap B_{m,n}^0\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{m}L_i\right)\cap\left(\bigcup_{j=1}^{n}L^j\right)\right| = \left|\bigcup_{i,j}(L_i\cap L^j)\right|$$

$$\left|(L_{i_1}\cap L_{i_2}\cap\cdots\cap L_{i_k})\cap(L^{j_1}\cap L^{j_2}\cap\cdots\cap L^{j_k})\right| = 2^{mn-k(m+n)+k^2}$$

所以 $$\left|A_{m,n}^0\cap B_{m,n}^0\right| = \sum_{k=1}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^{mn-k(m+n)+k^2}$$

从以上全部公式得到关于 $t_{m,n}$ 的下列表达式

$$t_{m,n}=(2^m-1)^n+(2^n-1)^m-2^{mn}+\sum_{k=1}(-1)^{k+1}\binom{m}{k}\binom{n}{k}2^{mn-k(m+n)+k^2}$$

现在去求恰好有 p 行为零与 q 列为零的矩阵的个数.不失一般性可以认为前面的 p 行与 q 列为零.每一个这样的矩阵有一个"角"是没有零行与零列的 $(m-p)\times(n-q)$ 矩阵.根据以上的证明可知,这些矩阵的个数等于 $t_{m-p,n-q}$,由此得出:恰好有 p 行为零与 q 列为零的矩阵的所求的个数表达为公式 $\binom{m}{p}\binom{n}{q}t_{m-p,n-q}$.

286. $\binom{n}{k}^m$.

287. $\binom{n}{r}\binom{n-r}{k}^m$.

288. $n!$.

295. 方程 $x^2-2y^2=1$ 的全部整数解 (x_n,y_n) 都可以作为下列表达式的有理分量与无理分量而求得

$$x_n+y_n\sqrt{2}=(2+3\sqrt{2})^n\quad n=\in\mathbf{Z}$$

298. 将每一个整点与面积为 1 的正方形相对应,这个整点位于正方形的西南角.同时,在半径为 $\sqrt{n}$ 的圆内的整点的个数 $m(n)$ 等于对应的正方形的个数,并且等于这些正方形面积之和.从几何上明显地看出:上述正方形并非完全位于起始的圆内,而且圆的某些部分没有被上述正方形所覆盖.但是,上述所有正方形都被包含在半径为 $R=\sqrt{n}+\sqrt{2}$ 的圆内,而且所有这些正方形完全覆盖半径为 $r=\sqrt{n}-\sqrt{2}$ 的圆,从这里对所求的量 $m(n)$ 得出下列双侧的界限

$$\pi(\sqrt{n}-\sqrt{2})^2<m(n)<\pi(\sqrt{n}+\sqrt{2})^2$$

从得到的不等式容易得出所求的渐近关系.

299. 这个组只有零解.

300. 设

$$S(\boldsymbol{\sigma})=\sum_{i=1}^{n}r_{i\sigma(i)}$$

为了解决问题,只要对 S_n 中所有具有下列性质的置换 $\boldsymbol{\sigma}$ 求出 $S(\boldsymbol{\sigma})$ 便足够了:它包含固定的元素 r_{uv},即 $\sigma(u)=v$.

301. 上界可以从以下“强有力的”考虑得出

$$\binom{m}{n} \leqslant 2n$$

下界可以从充分满足的程序得出.

303. 上界从以下“强有力的”考虑得出

$$2^k \leqslant kn$$

下界从考虑集合$\{1,2,2^2,\cdots,2^k\}$得到.

304①. 这是下列施佩纳(Sperner)引理的推论:关于 n 维单位立方体 B^n 的顶点两两没有包含关系的集系的个数.

305. 所有指定的点位于以这些点中任一点为中心,半径为 D 的圆内. 分别以点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为中心,半径为$\frac{d}{2}$ 的各个圆互不相交.

307②. 对已知的矩阵 $\boldsymbol{A}=(r_{ij})$ 进行问题所规定的变换只能得到有限多个不同的矩阵$\{\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_N\}$. 设矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 的所有元素之和为 $e(\boldsymbol{A}_i)$ 而且设

$$e(\boldsymbol{A})=\max_i e(\boldsymbol{A}_i)$$

而 $\boldsymbol{A}_k$ 是达到以上确定的最大值的矩阵中的一个.

结论:矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 的所有行元素之和与所有列元素之和都是非负的.

事实上,如果矩阵 $\boldsymbol{A}_k$ 的某一行元素之和为负,或某一列元素之和为负,那么改变对应的行或对应的列的所有元素的符号,我们就得到这样的矩阵 $\boldsymbol{A}'_k$,使得 $e(\boldsymbol{A}'_k)>e(\boldsymbol{A}_k)$,而导致矛盾.

309. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是元素为整数的任何矩阵,按 mod q_1“约化”$\boldsymbol{A}$ 的第一列的所有元素,等. 将所有同样的行归入一类以后,就把约化后的矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 的各行分为等价类. 从问题的条件及“强有力的”考虑得出各等价类 S_i 中至少有一类含有不少于 $v=q_1q_2\cdots q_m$ 行. 因为类 S_i 的每一列都是重复相同的元素,在类 S_i 中恰好选择 v 行,我们就得到给定组的解.

312. 对于数 Q 成立关系式$(Q,P_i)=1,i=1,2,\cdots,n$. 因此,如果 $Q\neq 1$,那

① E. Sperner定理为:集合 S 的所有 2^n 个组合的集合可以被划分成$\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$部分,使得任意杂置最多含有每一部分的一个组合.(原文为 Ein Satz Über Untermengen einer endlichen Menger(关于有限集子集的一个定理) Math. Zeitschrift, 27(1928), 544-548)

② 译者注:原文这里错为 306.

么 $Q \geqslant P_{n+1}$.

314①.所求的和等于下列的乘积

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n-1}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n}{n-1}=\frac{n}{2}$$

① 译者注:原文这里误为 315.

参考文献

[1] 叶戈雷切夫 Γ.Π. 组合和与生成函数方法[M].克拉斯诺亚尔斯克:国立克拉斯诺亚尔斯克大学出版社,1974.

[2] 组合分析:问题与练习[M].莫斯科:科学出版社,1982.

[3] 里奥诺丹丁.组合分析引论[M].莫斯科:外国文献出版社,1963.

[4] 霍尔 M.组合分析[M].莫斯科:外国文献出版社,1963.

[5] 加夫里诺夫 Γ.Π.,萨波远科 A.A.离散数学教程的问题与练习[M].莫斯科:科学出版社,1992.

[6] 比尔克戈夫 Γ.,巴尔季 T.现代实用代数[M].莫斯科:世界出版社,1976.

[7] 里奥诺丹丁.组合恒等式[M].莫斯科:科学出版社,1982.

[8] 马克 - 维尔杨斯 F.J.,斯洛恩 N.J.纠错码理论[M].莫斯科:交流出版社,1979.

⊙编后语

俄国诗人普希金说过:“人的影响短暂而微弱,书的影响则广泛而深远.”

刘培杰数学工作室又出新书了.照例,作为策划编辑和数学工作室的主持人在书后又要唠叨几句.

这本书稿来之不易,2007年莫斯科图书国际博览会上,人声鼎沸,宾客如织.耳边环绕着的都是听不懂的语言,对俄语一窍不通的笔者置身其间,像一只犬溜进了Shopping Mall中.犬粮一定是有的,但在哪个店中又被置于哪个架上是断然问不到的.这时候唯有依赖自己的嗅觉了.奇怪的是笔者也似乎具有这样的数学嗅觉.绕过文学、艺术、哲学等展台直奔一家小展台.上去就拿起了这本封面没有一点数学痕迹的书.

在互联网时代,有一个重要的概念,叫去中心化,就是说,人人都是那么回事,没有中心.

但数学不是这样.它的中心感极强,从早期的古希腊一直到近代的英国、德国、法国及至现代的美国,甚至会具体到某一个城市如德国的哥廷根.但不论世界数学首都怎样风水轮流转,始终有一个陪都存在,那就是俄罗斯.数学世界的目光始终不敢游离于俄罗斯之外,其根源就是它的原创性和其精英化特质.

英国一位科学家詹姆斯·洛夫洛克说过:“我希望人们意识到科学是一种属于精英的东西,只有少数极高天才的人才能创造出伟大的艺术和伟大的科学,西方宣扬的平等主义将会终结”.

科学特别是数学是特别不讲平等的.有些人天生就是数学的创造者.而有些人尽管不情愿也只能是数学的复制和传播者.另外绝大多数如我辈只能是心甘情愿地做数学的消费者.这是没有办法的事情,基因天注定.俄罗斯绝对是一个多产的创造者而我们沦为消费者已实属幸运.

牛顿是个十分严肃的人,从不大笑,据他的助手汉弗莱·牛顿(Humphrey Newton,与大科学家牛顿无亲戚关系)所说,他只见他的老板笑过一次.他说:“有一回他借一本欧几里得的著作给朋友看,他问那位朋友看了多少?喜不喜欢那个作者?朋友反过来用自己的问题去回答:“学这样的东西对我的一生有什么好处和用处?”牛顿听了开心地笑起来.(King's College Library. Cambridge. Keynes MS 135)

我们数学工作室“生不逢时”,诞生于物质至上的盛世.每出一本书都不免有些“心虚”,总要说服自己,出这样的书对社会是有好处的,对读者是有用处的,但前提是要有一个多元化的阅读环境和口味多样化的阅读者群体.

梁文道在接受《亚洲周刊》访问时曾说:“我梦想有一天,随便和一个杂货店老板攀谈,发觉他喜欢研究汪精卫;或者一位中学生说,他在研究香港的蝴蝶,人们把追求知识当做嗜好,没有特别理由,只为‘好玩’、‘过瘾’.”

这样的读书人的存在才会使我们的图书有生存的空间.虽然这本书是一本问题集,但在中国的考试中绝对用不上.对那些只想考试那点破事的人来说,不读也罢.但对那些读了许多中国出版的千篇一律的连例题、习题都似曾相识的组合书后仍心存不满的人倒是应该读一读.

陆友仁在《研北杂志》中云:“刘禹锡尝谓,翻讨书传,最为乐事,忽得一异书,如得奇货,好求怪僻难知之籍,穷其学之浅深,皆推其自出,有所不及见者,累

曰寻究,至忘寝食,必得而后已,故当时士大夫多以博洽推之."

这本书可算是一本异书,因为它是用分析的方法来研究组合学.这是俄罗斯组合学的一个特色(20世纪80年代初笔者曾在长春一家小书店买到过一本转译自俄文的英文版书《组合求和中的积分方法》风格十分类似).连翻译这本书的叶思源老先生都觉得有一定困难.叶先生是中山大学教授,早年的研究生,能译英、俄、法多国数学文献.为译此书特到图书馆借了一堆书恶补了一番.

在达恩顿的《启蒙运动的生意: < 百科全书 > 出版史》(1775—1800)中,受布迪厄"文学场"理论的启发而发现:"书籍是历史中的一种力量",但是不能单从销量上看问题.因为:"图书的消费只能被看做是读书公众的趣味和价值观不甚精确的指示器".

我们数学工作室的书在图书市场的处境是叫好不叫座.铁杆粉丝有一些但销量远不如教辅书,所以在开卷公司的调查中我们在全国仅排在第八位.但想想在今年上海书博会上,连编辑了近20年的《陈寅恪全集》尚卖不过某些烂书.心里又有什么不能平衡的呢?做此书的目的用《南方周末》记者李海鹏的话说:并非有什么特别原因,顶多是个"我喜欢".可是我觉得,这个"我喜欢"太重要了,它来自人性,又简单又无敌(李海鹏著《佛祖在一号线》,文化艺术出版社.北京,2010年,P39)

前麦肯锡全球董事合伙人冯唐博士曾对刚开始创业的年轻人建议:集中在你最喜欢的领域,别管行业,先自己体会自己,什么事儿自己做得最爽,就把那事儿当成首选.中国市场巨大,不怕你选的面窄,就怕你没有快感,做出的活儿不好.

活好不好,各有评价标准,有些行当难以统一,但数学是一个标准仅次于田径赛的标准高度统一的行当.如果不遇裁判作弊和观众口味改变,得到好评是意料当中的.一分钱一分货.用通常出版行业的定价标准去衡量,本书的定价偏高.但我们认为图书是精神产品,应以内容质量高低论价,不能以成本论价.

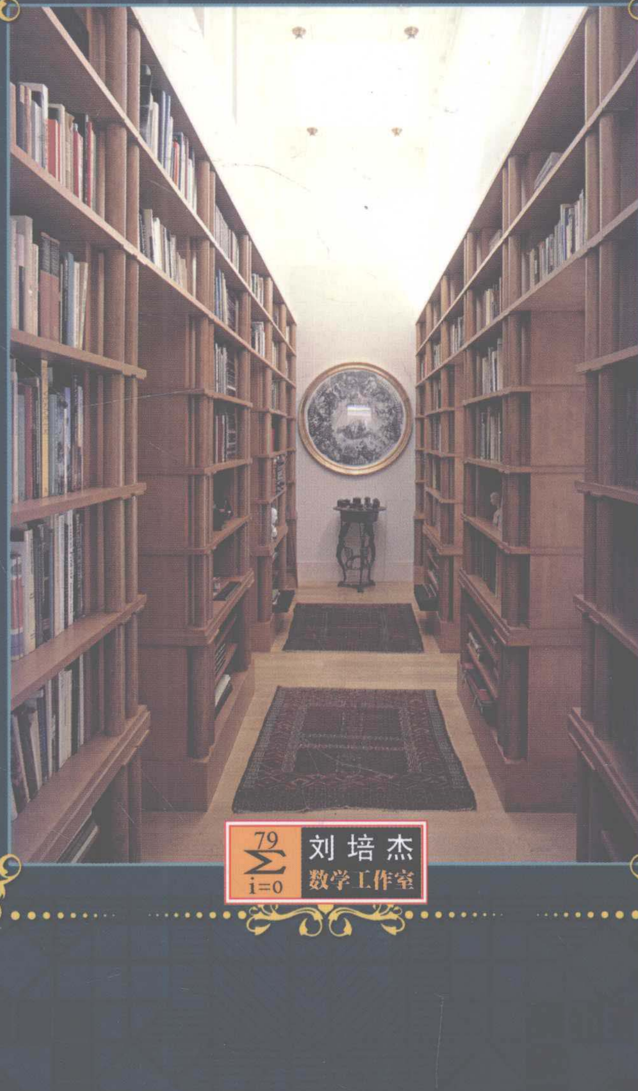
在英国洗一次车一般需用5英镑左右,但30岁的Gurcharn Sahota提供的全套洗车打蜡服务价格却是其他同行的上千倍——每次7 200英镑!究其原因,绝非Gurcharn天赋异禀,而是他提供的服务确实非同一般.洗车这种技术活儿到了Gurcharn手里,愣是变成了一门艺术.在他那儿,每辆车的平均清洗时间是250个

小时,使用的清洗剂多于100种,而且Gurcharn还要将所有清洗程序里里外外执行5遍.

有读者在网上评论说刘培杰数学工作室出版的图书价格很无耻.我们认为他应该是教辅类图书的读者,但选错了书.

在爱思唯尔文献出版公司的标志上,一位老人站在一棵葡萄藤缠绕的榆树下.榆树代表着知识之树,树下的老人代表着充满智慧的学者,树下还飘荡着的一句拉丁文,翻译成中文就是不孤独.整个标识传达出这样一个理念:文献出版让研究者不孤独.这也是我们的理念.愿爱数学之人都团结在一起.

刘培杰
2010年10月1日
于哈工大



刘培杰
数学工作室

哈尔滨工业大学出版社 **刘培杰数学工作室**

联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号
邮　　编：150006
联系电话：0451-86281378　13904613167
E-mail：lpj1378@yahoo.com.cn

ISBN 978-7-5603-3083-9

9 787560 330839 >

定价 48.00 元

上架建议：组合数学／数论