第22卷第6期 高等数学研究 Vol. 22, No. 6
2019年11月 STUDIES IN COLLEGE MATHEMATICS Nov., 2019

doi: 10.3969/j.issn.1008-1399.2019.06.002

一类函数的分部积分规律(一)

高 翔
(西北大学 生命科学学院，陕西 西安 710069)

摘 要 对于正整数指数幂与指数函数、正弦、余弦、双曲正弦、双曲余弦的乘积的不定积分，运用分部积分法，进行讨论，根据它们的运算特征找出规律，得出可以直接求得结论的普遍公式.

关键词 分部积分法；连续积分

中图分类号 O172.2 **文献标识码** A **文章编号** 1008-1399(2019)06-0003-02

Common Rules for Some Integrals Using Integration by Parts(Ⅰ)

GAO Xiang
(Faculty of Life Science, Northwest University, Xi'an, Shanxi, 710069, PRC)

Abstract We conclude some common rules for using integration by parts to evaluate integrations with integrands to be the products of powerfunction, exponential function, sine and cosine functions, and hyperbolic sine and hyperbolic cosine functions.

Keywords integration by parts, continuous integral

在积分$\int x^n\varphi(x)\mathrm{d}x$中，若$\varphi(x)$为基本初等函数，$\mathrm{e}^x$，$\sin x$，$\cos x$和$\sinh x$，$\cosh x$等时，这个积分会有什么样的特征呢?我们先从$\varphi(x)=\cos x$的情况谈起.

采用分部积分法[1]. 令$u=x^n$，$v'=\cos x$，则$u'=nx^{n-1}$，$v=\int\cos x\mathrm{d}x$. 于是

$$\int x^n\cos x\mathrm{d}x=x^n\int\cos x\mathrm{d}x-n\int x^{n-1}\mathrm{d}x\left(\int\cos x\mathrm{d}x\right),$$

后一个积分中，令$u_1=x^{n-1}$，$v_1'=\int\cos x\mathrm{d}x$，则$u_1'=(n-1)x^{n-2}$，$v_1=\int\mathrm{d}x\int\cos x\mathrm{d}x$，从而

$$\int x^n\cos x\mathrm{d}x=x^n\int\cos x\mathrm{d}x-nx^{n-1}\int\mathrm{d}x\int\cos x\mathrm{d}x+n(n-1)\int x^{n-2}\mathrm{d}x\left(\int\mathrm{d}x\int\cos x\mathrm{d}x\right)$$

对后一项积分继续进行下去，最后有：

$$\begin{aligned}&\int x^n\cos x\mathrm{d}x\\&=x^n\int\cos x\mathrm{d}x-(x^n)'\int\mathrm{d}x\int\cos x\mathrm{d}x+\\&\quad(x^n)''\int\mathrm{d}x\int\mathrm{d}x\int\cos x\mathrm{d}x+\cdots+\\&\quad(-1)^k(x^n)^{(k)}\underbrace{\int\mathrm{d}x\cdots}_{k\text{个}}\int\cos x\mathrm{d}x+\cdots+\\&\quad(-1)^n n!\underbrace{\int\mathrm{d}x\cdots}_{n\text{个}}\int\cos x\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当$n=2k+1$，$(k\in N)$时，式中最后一项积分为$-n!\cos x$，故

$$\int x^n\cos x\mathrm{d}x=$$
$$x^n\sin x+(x^n)'\cos x-(x^n)''\sin x-(x^n)'''\cos x+(x^n)^{(4)}\sin x+(x^n)^{(5)}\cos x-\cdots-n!\cos x+C$$

当$n=2k$，$(k\in N)$时，式中最后一项积分为$n!\sin x$，故

收稿日期：2019-04-04 **修改日期**：2019-07-22
作者简介：高翔(2000－)，女，福建省连江市，本科在读，Email：1455341349@qq.com.

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x =$$

$$x^n \sin x + (x^n)' \cos x - (x^n)'' \sin x - (x^n)''' \cos x + (x^n)^{(4)} \sin x + (x^n)^{(5)} \cos x - \cdots + n! \sin x + C$$

整理得

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x = p_n \sin x + p_n' \cos x + C$$

式中

$$p_n = x^n - (x^n)'' + (x^n)^{(4)} + \cdots + (-1)^k (x^n)^{(2k)} + \cdots = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} (-1)^k (x^n)^{(2k)}$$

且由于 $\sin x = \int \cos x \mathrm{d}x, \cos x = \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)'$，故

$$\int x^n \cos x \mathrm{d}x = p_n \int \cos x \mathrm{d}x + p_n' \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)' \qquad (1)$$

其实，上述方法也可以用数学归纳法证明：

证明　当 $n=1$ 时，有

$$\int x \cos x \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x = p_1 \int \cos x \mathrm{d}x + p_1' \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)'$$

其中

$$p_1 = \sum_{i=0}^{\left[\frac{1+1}{2}\right]} (-1)^i (x^1)^{(2i)} = x, \quad p_1' = 1$$

当 $n=2$ 时，

$$\int x^2 \cos x \mathrm{d}x = (x^2 - 2x) \cos x + 2x \sin x = p_2 \int \cos x \mathrm{d}x + p_2' \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)'$$

其中

$$p_2 = \sum_{i=0}^{\left[\frac{2+1}{2}\right]} (-1)^i (x^2)^{(2i)} = x^2 - 2, \quad p_2' = 2x$$

假设当 $2 \leqslant n \leqslant k$ 时，有

$$\int x^k \cos x \mathrm{d}x = p_k \int \cos x \mathrm{d}x + p_k' \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)'$$

成立，其中 $p_k = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (-1)^i (x^k)^{(2i)}$.

则当 $n = k+1$ 时，得

$$\int x^{k+1} \cos x \mathrm{d}x = x^{k+1} \sin x - (k+1) \int x^k \sin x \mathrm{d}x$$

$$= x^{k+1} \sin x + (k+1) \left(x^k \cos x - k \int x^{k-1} \cos x \mathrm{d}x\right)$$

$$= x^{k+1} \int \cos x \mathrm{d}x + (k+1) x^k \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)' - k(k+1) \left(p_{k-1} \int \cos x \mathrm{d}x + p_{k-1}' \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)'\right)$$

$$= (x^{k+1} - k(k+1) p_{k-1}) \int \cos x \mathrm{d}x + (k+1)(x^k - k p_{k-1}') \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)'$$

由归纳假设，

$$x^{k+1} - k(k+1) p_{k-1} = x^{k+1} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^i ((k+1) k x^{k-1})^{(2i)} = x^{k+1} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^i ((x^{k+1})'')^{(2i)}$$

$$= x^{k+1} - \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} (-1)^i (x^{k+1})^{(2i+2)} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{(k+1)+1}{2}\right]} (-1)^i (x^{k+1})^{(2i)} = p_{k+1}$$

故有

$$\int x^{k+1} \cos x \mathrm{d}x = p_{k+1} \int \cos x \mathrm{d}x + p_{k+1}' \left(\int \cos x \mathrm{d}x\right)'$$

即(1)式对一切正整数 n 成立.

同理可以得到下面的公式：

1. $\int x^n \sin x \mathrm{d}x = p_n \int \sin x \mathrm{d}x + p_n' \left(\int \sin x \mathrm{d}x\right)'$

2. $\int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = q_n \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - q_n' \left(\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x\right)'$

3. $\int x^n \sinh x \mathrm{d}x = q_n \int \sinh x \mathrm{d}x - q_n' \left(\int \sinh x \mathrm{d}x\right)'$

4. $\int x^n \cosh x \mathrm{d}x = q_n \int \cosh x \mathrm{d}x - q_n' \left(\int \cosh x \mathrm{d}x\right)'$

式中

$$q_n = x^n + (x^n)'' + (x^n)^{(4)} + \cdots + (x^n)^{(2k)} + \cdots + n!$$

对于 $\int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$ 的逐次积分，可以将该式直接表示为

$$\int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x (x^n - (x^n)' + (x^n)'' - (x^n)''' + \cdots + (-1)^k (x^n)^{(k)} + \cdots + (-1)^n n!),$$

考虑到和上述公式形式上的统一，将该式表示为

$$\int x^n \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = q_n \int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x - q_n' \left(\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x\right)'.$$

通过以上讨论，一些繁杂的积分过程可以运用简便的算术步骤计算. 例题：

(下转第17页)

将上述两个式子相加可得

$$2I_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+C_1+C_2$$

所以

$$I_1=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+C$$

例 14[5]　求$\int\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　记

$$I_1=\int\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

则

$$I_1+I_2=\int\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\int(1-\cos x\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\int\left(1-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{4}\cos 2x+C_1$$

$$I_1-I_2=\int\frac{\sin^3 x-\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{(\sin x-\cos x)(1+\sin x\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\cos 2x(1+\sin x\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\frac{\cos 2x\left(1+\frac{1}{2}\sin 2x\right)}{1+\sin 2x}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{2}\sin 2x}{1+\sin 2x}\mathrm{d}\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{1+\sin 2x}\right)\mathrm{d}\sin 2x$$

$$=-\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{4}\ln|1+\sin 2x|+C_2$$

两式相加除以 2 得

$$I_1=\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\cos 2x-\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\ln|1+\sin 2x|+C$$

综上，通过典型例子分析给出了求不定积分的六种常用的方法和技巧. 在学习不定积分的计算方法时我们要善于总结和归纳，熟练掌握各种方法和技巧，并融会贯通，这样才能为积分学后续的学习打下良好的基础.

参考文献

[1]　同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 5 版. 北京：高等教育出版社. 2001.

[2]　陈仲. 高等数学竞赛题解析教程[M]. 南京：东南大学出版社. 2016.

[3]　同济大学数学系. 硕士研究生入学考试数学复习与解题指南[M]. 上海：同济大学出版社. 2017.

[4]　刘坤琳. 谭泽光. 微积分(上)[M]. 北京：清华大学出版社. 2006.

[5]　聂宏. 祝丹梅. 刘晶. 大学生数学竞赛分类解析[M]. 北京：化学工业出版社. 2005.

[6]　李小斌. 朱佑彬. 不定积分的一个注记[J]. 高等数学研究，2018(6)：13-15.

(上接第 4 页)

①

$$\int x^5 e^x\mathrm{d}x=q_n\int e^x\mathrm{d}x-q_n'\left(\int e^x\mathrm{d}x\right)'$$

$$=(x^5+20x^3+120x)e^x-(5x^4+60x^2+120)e^x+C$$

②

$$\int x^5\cos x\mathrm{d}x=p_n\int\cos x\mathrm{d}x+p_n'\left(\int\cos x\mathrm{d}x\right)'$$

$$=(x^5-20x^3+120x)\int\cos x\mathrm{d}x+(x^5-20x^3+120x)'\left(\int\cos x\mathrm{d}x\right)'$$

$$=(x^5-20x^3+120x)\sin x+(5x^4-60x^2+120)\cos x+C$$

③

$$\int x^4\sin x\mathrm{d}x=p_n\int\sin x\mathrm{d}x+p_n'\left(\int\sin x\mathrm{d}x\right)'$$

$$=-(x^4-12x^2+24)\cos x+(4x^3-24x)\sin x+C$$

④

$$\int x^3\cosh x\mathrm{d}x=q_n\int\cosh x\mathrm{d}x-q_n'\left(\int\cosh x\mathrm{d}x\right)'$$

$$=(x^3+6x)\sinh x-(3x^2+6)\cosh x+C$$

参考文献

[1]　同济大学数学系. 高等数学(上册)[M]. 7 版 北京：高等教育出版社，2014.