

## 上海电力大学《线性代数》2021-2022学年 第一学期期末考试试卷

### 一、填空题(每小题 3 分, 共 18 分)

1. 已知  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $A_{ij}$  为代数余子式, 则  $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} =$  \_\_\_\_\_.

2. 非零三阶方阵  $A$  满足  $A^2 = O$ , 则其秩  $R(A) =$  \_\_\_\_\_.

3. 三阶方阵  $A$  的特征值为 1, 2, -3, 则行列式  $|A^* + 4E| =$  \_\_\_\_\_.

4. 设  $A$  为三阶正交矩阵,  $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ , 则内积  $(A\alpha, A\alpha) =$  \_\_\_\_\_.

5. 已知二次型  $f(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$  正定, 则  $t$  应满足条件 \_\_\_\_\_.

6. 已知  $R^2$  中一组基 (I) 为  $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ , 另一组基 (II) 为  $\beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\beta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , 则由 (I) 到 (II) 的过渡矩阵为 \_\_\_\_\_.

### 二、解答题 (共 66 分)

1. (10 分) 已知四阶方阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 0 & 12 & 0 \end{bmatrix}$ , 求  $A$  的行列式。

2. (10 分) 已知向量组  $\alpha_1 = (1 \ 2 \ 3 \ 4)$ ,  $\alpha_2 = (5 \ 6 \ 7 \ 8)$ ,  $\alpha_3 = (9 \ 10 \ 11 \ 12)$ ,  $\alpha_4 = (13 \ 14 \ 15 \ 20)$ , 求向量组的秩并找出其所有的极大无关组。

3. (10 分) 已知矩阵  $X$  满足方程  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ , 求矩阵  $X$ 。

4. (12 分) 已知线性方程组 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 + ax_4 = b \end{cases}$$
, 请回答下列问题:

- (1) 方程组是否可能有唯一解, 为什么? 当参数  $a, b$  满足什么条件时, 方程组无解?
- (2) 当参数  $a, b$  满足什么条件时, 方程组有无穷多解? 请求出此条件下方程组的解集。

5. (12 分) 已知二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3$ ,

- (1) 写出二次型的矩阵;
- (2) 用可逆线性替换将该二次型化为规范形, 写出所做的线性替换及变换后的规范形。

6. (12 分) 2016 年初成都市的人口总数为 1600 万, 其中市区人口 560 万, 郊区人口 1040 万。经过调查发现, 成都市每年有 3% 的市区人口搬到郊区, 有 5% 的郊区人口搬到市区。现假设成都市的总人口保持不变且每年的迁移规律都一样, 用  $\alpha_0 = \begin{pmatrix} 560 \\ 1040 \end{pmatrix}$  (单位: 万人) 表示 2016 年初的人口分布,  $n$  年以后的人口分布为二维列向量  $\alpha_n$ , 请回答下列问题:

- (1)  $\alpha_1$  与  $\alpha_0$  的关系为  $\alpha_1 = A\alpha_0$ , 求二阶方阵  $A$  并求出 2017 年初的人口分布  $\alpha_1$ ;
- (2) 猜测若干年后成都市人口分布的规律 (即  $n$  足够大时  $\alpha_n$  的极限情况) 并证明你的结论。

### 三、证明题 (共 16 分)

1. (8 分) 已知  $\eta_0$  为非齐次线性方程组  $AX = \beta$  的一个解,  $X_1, X_2$  为其导出组的基础解系,

$\eta_1 = \eta_0 + X_1$ ,  $\eta_2 = \eta_0 + X_2$ , 证明  $\eta_0, \eta_1, \eta_2$  为  $AX = \beta$  解集的极大无关组。

2. (8 分) 已知  $n$  阶方阵  $A$  满足  $A^2 - 2A - 3E = O$ ,  $A$  不是数量矩阵, 请判断  $A$  是否可对角化并证明你的结论。

