高等数学 A（2）复习题参考答案

一、空间解析几何

1. (1) $\pm\frac{1}{\sqrt{62}}\left(-2,3,7\right)$；（2）$0$；（3）$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{6}},\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{6}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{6}}$

2. $S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{\sqrt{59}}{2}$

3. 面积为$\sqrt{30}$

4. （1）$\left|\vec{a}+b\right|=\sqrt{13}$；　（2）30

5. $z=3-2\left(x^2+y^2\right)$

6. $2\left(x-1\right)+3\left(y+3\right)-\left(z-2\right)=0$

7. $d=\frac{4}{\sqrt{2}}$

8. $\frac{\pi}{4}$

9. $\frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-5}{0}$

10. $\frac{x-2}{5}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-4}{-1}$

11. $\frac{\pi}{4}$

12.6(x-1)+4(y-2)-7(z-3)=0)

二、多元函数微分学

1．求极限

(1) 2　(2) 1/2　(3) 2　(4) e^{-1}　(5) 0

2．求全微分、全导数、偏导数

（1）$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin(1+y^2)$，$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^x\cos(1+y^2)$，

$$dz=e^x\sin(1+y^2)dx+2ye^x\cos(1+y^2)dy；$$

（2）$\frac{dy}{dx}=-2\sin(2x)f_1^{'}+e^xf_2^{'}$；

（3）$\frac{\partial z}{\partial x}=2f_1^{'}+y\cos xf_2^{'}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=-f_1^{'}+\sin xf_2^{'}$；

（4）$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2 z}{e^z-xy^2}$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2xyz}{e^z-xy^2}$。

3．求切线方程、切平面方程、法线及法平面方程

（1）切线方程为$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{1}$，法平面方程为$2x+z=0$.

（2）切平面方程为$3(x-2)+2(y-3)-z=0$，法线方程为$\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{-1}$.

（3）法线方程：$\frac{x+3}{1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$.

4. 求方向导数与梯度

（1）沿梯度方向 $gragf(1,1)=\vec{i}+\vec{j}$ 的方向导数最大，方向导数最大值为$\left|gradf(1,1)\right|=\sqrt{2}$.

（2）方向导数的最大值为$\left|gradu\right|=\frac{\sqrt{6}}{2}$，方向导数沿 $gradu=\left\{\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right\}$ 达到最大值；

方向导数$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-1\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}$。

5．求函数极值、应用拉格朗日乘数法求实际最值问题

（1）解得驻点$(0,0),(0,2),(2,0),(2,2)$，$f(0,0)=1$为极大值；$(0,2)$和$(2,0)$不为极值点；

$f(2,2)=-7$ 为极小值。

（2）$z\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$为极大值。

(3) $(1,\frac{2}{\sqrt{3}},3\sqrt{3})$，最大值为 6.

（4）所求点为$M(-\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{6}{\sqrt{14}})$。

（5）$x=15$，　$y=10$.

三、重积分与应用

1．二重积分计算与应用

（1）$\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^\pi d\theta\int_0^1\rho^2 d\rho=\frac{\pi}{3}$

（2）$\iint\limits_D xdxdy=\int_0^1 xdx\int_{x^2}^x dy=\frac{1}{12}$

（3）$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy = \int_0^1 dy\int_{y^2}^{y} \frac{\sin y}{y}dx = \int_0^1 (\sin y - y\sin y)dy = 1-\sin 1$

（4）$\int_{-1}^1 dx\int_0^2 \left|y-2x^2\right|dy = 2\int_0^1 dx\int_0^2 \left|y-2x^2\right|dy$

$= 2\int_0^1 dx\int_0^{2x^2} \left(2x^2 - y\right)dy + 2\int_0^1 dx\int_{2x^2}^2 \left(y-2x^2\right)dy = \frac{44}{15}$

（5）$\iint\limits_D (1+x+y)dxdy = \iint\limits_D dxdy = 3\pi$

（6）由对称性：$\bar{x}=0$，$M=\pi$，$M_x = \int_{-1}^1 dx\int_0^{2\sqrt{1-x^2}} ydy = \frac{8}{3}$，$\bar{y} = \frac{8}{3\pi}$，质心为$(0,\frac{8}{3\pi})$

（7）$A = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则$A = \iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy + A\iint\limits_D dxdy \Rightarrow A = \frac{8\pi}{1-4\pi}$

2．三重积分计算与应用

（1）$\iiint\limits_\Omega 2x\,dv = \int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} 2xdz = \frac{1}{12}$

（2）$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} dx\int_0^1 d\rho\int_0^{1-\rho} \rho^2 \rho dz = \frac{1}{10}\pi$

（3）$\iiint\limits_\Omega (z-\sqrt{x^2+y^2})dv = \int_0^{2\pi} dx\int_0^1 d\rho\int_0^1 (z-\rho)\rho dz = -\frac{1}{6}\pi$

（4）$V = \iiint\limits_\Omega dv = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi d\phi\int_0^2 r^2 dr = \frac{16}{3}\pi(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$

（5）$\iiint\limits_\Omega z\left(x^2+y^2\right)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho^2}^{\rho} z\rho^2 dz = \frac{\pi}{24}$

（6）　$M = \iiint\limits_\Omega 2dv = 2\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^1 \rho d\rho\int_{\rho^2}^{\sqrt{2-\rho^2}} dz = 4\pi\left[\frac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{12}\right]$

（7）$\iiint\limits_\Omega (1+x^2y)dv = \iiint\limits_\Omega dv = \int_0^{2\pi} d\theta\int_0^2 \rho d\rho\int_0^3 dz = 12\pi$

四、曲线、曲面积分

1．求第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

（1）$\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds = 2\pi e^2$

（2）$\int_L (x+y)ds = \sqrt{5}\int_0^1 3xdx = \frac{3}{2}\sqrt{5}$

（3）$\int_\Gamma (x+y+z)ds = \int_0^1 (3+6t)\sqrt{1+4+9}dt = 6\sqrt{14}$

2．求第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

（1）$\int_L (x^2-y^2)dx = \int_0^2 (x^2-x^4)dx = \frac{2}{15}$

（2）$\int_\Gamma xdx+ydy+zdz = \int_0^1 \left((t+1)+2(2t+1)+3(3t+1)\right)dt = 13$

3．应用格林公式

（1）$\oint_L (1+x^2+y^3)dx+(x-x^3+y^3)dy = \iint_D \left(1-3x^2-3y^2\right)dxdy$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \left(1-3\rho^2\right)\rho d\rho = -20\pi$

（2）设 l 为从点 $B(-a,0)$ 到点 $A(a,0)$ 的直线段，

$$\int_{L+l} (1+3x-y^2\cos x)dx+(x-2y\sin x-2y^2)dy = \iint_D \left(1-2y\cos x+2y\cos x\right)dxdx = \frac{\pi a^2}{2}$$

$$\int_l (1+3x-y^2\cos x)dx+(x-2y\sin x-2y^2)dy = \int_{-a}^a (1+3x)dx = 2a$$

$$\int_L (1+3x-y^2\cos x)dx+(x-2y\sin x-2y^2)dy = \frac{\pi a^2}{2}-2a$$

4．求第一类曲面积分（对面积的曲面积分）

（1）$S = \iint_\Sigma dS = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+4x^2+4y^2}dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho = \frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$

（2）$\iint_\Sigma (x+y+z)dS = \iint_\Sigma zdS = \iint_D \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$

$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^2 d\rho = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

（3）$\iint_\Sigma (6x+3y+2z)dS = 18\iint_D \sqrt{1+9+\frac{9}{4}}d\sigma = 567$

5．求第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）

（1）$\iint\limits_{\Sigma} z^3 dxdy = \iint\limits_{D} (x^2+y^2)^3 dxdy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (\rho^2)^3 \rho d\rho = \dfrac{\pi}{4}$

（2）$\oiint\limits_{\Sigma} y^2 dydz + z^2 dzdx + (x+y+e^z)dxdy = \iiint\limits_{\Omega} e^z dxdydz$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho d\rho \int_\rho^1 e^z dz = e\pi - 2\pi$ 。

五、无穷级数

1．判断下列级数的敛散性

（1）绝对收敛；（2）条件收敛；　（3）绝对收敛；（4）收敛；（5）收敛

2. 绝对收敛

3. $f(x) = e^{2x+1} = e^{2(x-1)+3} = e^3 e^{2(x-1)} = e^3 \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n!}(2(x-1))^n, (x \in R)$

4. $\dfrac{x}{x+1} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{4^{n+1}}(x-3)^n$， $x \in (-1,7).$

5. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3x+2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^n - \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{x-1}{3}\right)^n\right], (-1 < x < 3)$

6. $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$

$$= \ln 3 + \ln 4 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}\left[\left(\frac{x-2}{3}\right)^{n+1} + \left(\frac{x-2}{4}\right)^{n+1}\right], (-1 < x \le 5)$$

7. 收敛域为$[-4,4)$；$s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{4^n(n+1)} = \int_0^x \dfrac{4}{4-x} dx = 4(\ln 4 - \ln(4-x)), x \in [-4,4)$

8. 收敛域为$(-3,3)$；$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{nx^{n-1}}{3^n} = -\left(\dfrac{x}{3+x}\right)' = -\dfrac{3}{(x+3)^2}, (-3,3)$

9. $s(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}, & x = 2 \\ f(x), & x \ne 2 \end{cases}$

10. 所给的函数延拓为周期函数时，每一点都连续，且傅里叶级数为余弦级数：

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \cdots\right), x \in [-\pi, \pi]$$

其中系数 $a_1 = -\dfrac{4}{\pi}.$