数值积分及其应用

华罗庚　王　元

科学出版社

数 值 积 分 及 其 应 用

（“积分的近似計算”的修訂本）

华罗庚　王　元著

科　学　出　版　社

內 容 簡 介

本书分两部分，前一部分包括对古典的求积公式的重新处理；对实用調和分析的誤差及其应用的研究；对測量工作者常用的求容积与表面积的方法，作了数学加工与分析比較．第二部分为系統地总結近年来发展起来的用数論方法处理高維空間的数值积分的成果．这些理論目前已經达到了可以推广的阶段．不少实例說明了这些方法是极精密的．书中还談到了数論方法在数值計算的其他若干問題上的应用．

此书可供数学工作者及計算数学工作者之用，并可供地理、矿业及地质工作者参考．

数論积分及其应用

（"积分的近似計算"的修訂本）

华罗庚　王　元著

科学出版社出版（北京朝阳門大街117号）

北京市书刊出版业营业許可証出字第061号

中国科学院印刷厂印刷　新华书店总經售

1963年9月第一版　书号：2849　字数：134,000

1963年9月第一次印刷　开本：850×1168 1/32

（京）0001—3,000　印张：5 1/4

定价：0.90元

序

我們的小册子"积分的近似計算"，問世将近两年了．近二年来，在数論方法用于多重积分的数値計算及其应用方面，有了較大的进展．此小册子，由于是在这一分支刚开始发展时写的，現在看来，无論从內容及其对一些問題的看法上，都有必要加以增訂．又由于这次添加了一些数値积分法的应用，所以将书名改为"数値积分及其应用"．

这本书的写作开始于1958年，当时作者們在中国科学技术大学联合执教微积分課．本书的前一部分就是为了教学的需要而写的．有些想法虽然起源頗早，但一直到这次教課时才一同把它們整理了出来(見[1])．又由于需要找一些計算面积、容积(或体积)与表面积的实用方法，作者曾向地理、矿业与地質工作者們請教了他們常用的方法，并对这些方法作了数学的加工和检定，使之能够作为数学課程的教材．

数論方法在数値計算上的应用的研究，开始于1957年，由于作者一直是非常重視数論方法的实际应用，所以对这方面的总結与整理就构成了书的后一部分．

用古典的矩形公式来計算某些函数族上的函数的数値积分时，誤差依賴于积分的重数．詳細言之，固定分点的个数，則当积分的重数增加时，誤差亦随之而迅速增大，或者可以說，当要求数値积分有一定的精确度时，則分点的数目必須随着积分重数的增加而迅速增加．因此，用这一方法来处理高維空間的数値积分时，由于計算量十分巨大，是难于实現的．

近年来所发展起来的 Monte Carlo 方法是常用的計算多重积分的方法．用这种方法来計算数値积分，首先就是对被积函数进行一系列的随机抽样，然后取平均値，用它来計算积分．这种方法

的优点在于在机器上运算的手續簡便．收斂的速度虽然比矩形方法快些，但是由这一方法所能得到的只能是概率的誤差，而不是眞正的誤差．

数論方法处理多重积分的近似計算的理論基础在于数論中的一致分布理論，卽按照事先选定的最佳分布上的函数值所构成的单和来逼近多重积分，因而得到的誤差不再是概率的，而是肯定的．不仅如此，这些肯定的誤差竟比概率誤差还要精密，并且可以証明，对于某些函数族来說，这种逼近的誤差的主阶已經臻于至善了．不少数論中的著名原理与方法都能有效地用于这一問題，例如三角和的估值、丢番图逼近論以及連分数論等等．在本书中，我們介紹了 van der Corput, Hammersley 与 Halton 等人所发展起来的利用 r 进位小数来构造最佳一致分布点列的方法，及 Коробов 与 Бахвалов 等人所发展起来的所謂“极值系数法”．在书末还附了一个可供实际应用的“极值系数表”．在这一部分里也包括了作者的一些工作，例如二重积分的計算方法及极值系数法在插入法方面的应用等等．此外，在处理某些已有的結果的时候，也参加了我們自己的看法或簡化了証明．

在計算調和分析或用迭代法求解积分方程时，实际上就是将問題归結为一系列积分的計算問題．如果給了有限多个数据，用数值积分法来計算，要注意計算的項数需要恰到好处，有时項数計算多了，不仅浪費，反而会导致不精确的結果．又有一些偏微分方程，在某些条件下，也能将解答写成一个积分，本书将举例說明，有时用数值积分法来处理是不妥当的；而从这有限多个边界值出发，通过有限的方法（指数論与代数的方法）直接求出解的近似值来，反而能导致精确的結果．书中提供了两个最簡单的例子来闡明这一点，可以供作这方面进一步探討的参考．

因此，本书仅仅对数值积分及其应用的若干問題作一些討論，并未企图对数值計算作較全面的介紹．特别应該指出的是我国学者的貢献，例如赵訪熊关于近似求解代数方程的工作，閔嗣鶴、徐利治[2]关于数值积分的工作，还有关肇直[3]、卢文等把泛函分析用

到数值計算方面的工作等等.

我們衷心地感謝我国的地理、矿业与地質工作者，他們热情地帮助我們学会了一些实际应用的求面积、容积与表面积的方法. 还有木材厂的老工人，他們为我們提供了木材利用率的例子. 在小册子初版問世后，一直不断地收到讀者們的宝貴意見，特別是何祚庥同志，还为本书写了书評[4]. 再版的手稿，承蒙中国科学院計算技术研究所第三室的有关同志看过，并提出了很好的意見，对我們很有帮助.

最后，作者十分殷切地期望这本小册子再次問世后能得到更多的批評与帮助.

華罗庚　王　元

1963年5月15日于北京

目　　录

§ 1. Euler 求和公式及 Euler 函数

定理 1 (Euler). 命 $\varphi(x)$ 是有限閉区間 $[a,b]$ 內有連續微商的函数,則

$$\sum_{a<n\leqslant b}\varphi(n)=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

此处 $[\xi]$ 代表实数 ξ 的整数部分.

証. 1) 如果 $[a]+1>[b]$, 則 $[a]=[b]$, 这公式变为

$$0=\int_a^b\varphi(x)dx+\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx+$$
$$+\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

卽

$$\int_a^b\left(x-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)+$$
$$+\left(b-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\int_a^b\varphi(x)dx.$$

这就是部分积分公式的直接推理.

2) 假定 $[a]+1\leqslant[b]$, 則

$$\int_a^b[x]\varphi'(x)dx=\int_{[a]+1}^{[b]}[x]\varphi'(x)dx+\int_a^{[a]+1}[x]\varphi'(x)dx+$$
$$+\int_{[b]}^b[x]\varphi'(x)dx=$$
$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n\int_n^{n+1}\varphi'(x)dx+\int_a^{[a]+1}[a]\varphi'(x)dx+\int_{[b]}^b[b]\varphi'(x)dx=$$
$$=\sum_{n=[a]+1}^{[b]-1}n(\varphi(n+1)-\varphi(n))+[a](\varphi([a]+1)-\varphi(a))+$$

$$+[b](\varphi(b)-\varphi([b]))=$$

$$=-\sum_{n=[a]+1}^{[b]}\varphi(n)-[a]\varphi(a)+[b]\varphi(b).$$

又由部分积分可知

$$\int_a^b\left(x-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=\left(b-\frac{1}{2}\right)\varphi(b)-\left(a-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)-$$

$$-\int_a^b\varphi(x)dx,$$

因此

$$\int_a^b\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\varphi'(x)dx=\sum_{n=[a]+1}^{[b]}\varphi(n)-\int_a^b\varphi(x)dx-$$

$$-\left(a-[a]-\frac{1}{2}\right)\varphi(a)+\left(b-[b]-\frac{1}{2}\right)\varphi(b),$$

即明所欲証.

我們現在用 Euler 求和公式来研究，当 n 充分大时，$n!$ 的漸近情況.

1) 命 $\varphi(x)=\log x$, $a=1$, $b=n$ (整数),则得

$$\sum_{1\leqslant m\leqslant n}\log m=\int_1^n\log x dx+\int_1^n\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}+$$

$$+\frac{1}{2}\log n. \tag{1}$$

由于

$$\left|x-[x]-\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{1}{2}$$

及

$$\int_\xi^{\xi+1}\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)dx=0\quad(\xi\text{ 为实数}),$$

故由第二中值公式可知积分

$$\int_1^\infty\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)\frac{dx}{x}$$

收斂,因此由(1)可知

$$\log n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+C+\gamma_n,$$

此处

$$C = 1 + \int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{dx}{x},$$

$$\gamma_n = -\int_n^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{dx}{x},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{e^{-n} n^{n+1/2}} = e^C = C_1. \tag{2}$$

我們称公式(2)为 Stirling 公式.

2）現在我們来进一步定出 C. 由 Wallis 公式

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdots(2n)\cdot(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

可知

$$\frac{(2^n n!)^4}{(2n)!^2(2n+1)}(1 + o(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

以(2)式代入得

$$\frac{C_1^4(2^n n^{n+1/2} e^{-n})^4}{C_1^2((2n)^{2n+1/2} e^{-2n})^2(2n+1)}(1 + o(1)) = \frac{\pi}{2},$$

$$\frac{C_1^2 n}{2(2n+1)}(1 + o(1)) = \frac{\pi}{2}.$$

命 $n\to\infty$ 得

$$C_1 = \sqrt{2\pi}.$$

同时我們也算出了

$$\int_1^\infty \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log 2\pi - 1.$$

因为經常用到,我們引进符号

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$$

并且用归納法来定义 Euler 函数 $b_l\ (l = 1, 2, \cdots)$.

定义. (i) $b_l(x)$ 是以 1 为周期的函数,也就是

$$b_l(x + 1) = b_l(x).$$

(ii) $\displaystyle\int_0^x b_l(y)dy = b_{l+1}(x) - b_{l+1}(0).$

由周期性显然得出

$$\int_0^1 b_l(y)dy = 0.$$

我們得先說明一下，这样，函数 $b_l(x)$ 就完全定义了. 由 (ii) 可知如果 $b_l(x)$ 完全定义了，$b_{l+1}(x)$ 仅差一常数，也就完全定义了. 这一常数可由 $b_{l+2}(x)$ 的周期性来决定.

我們現在算出前几个 $b_l(x)$ 来. 周期旣然是 1，我們不妨假定 $0 < x < 1$，由

$$b_2(x) - b_2(0) = \int_0^x \left(t - \frac{1}{2}\right)dt = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2},$$

即

$$b_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + b_2(0).$$

由

$$0 = \int_0^1 b_2(x)dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + b_2(0)x \Big|_0^1 = -\frac{1}{12} + b_2(0),$$

即当 $0 < x < 1$ 时

$$b_2(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

由于 $b_2(x)$ 的周期性，可一般地有

$$b_2(x) = \frac{(x-[x])^2}{2} - \frac{x-[x]}{2} + \frac{1}{12}.$$

同法可以推得

$$b_3(x) = \frac{1}{6}(x-[x])^3 - \frac{1}{4}(x-[x])^2 + \frac{1}{12}(x-[x]),$$

$$b_4(x) = \frac{1}{24}(x-[x])^4 - \frac{1}{12}(x-[x])^3 + \frac{1}{24}(x-[x])^2 - \frac{1}{720}.$$

讀者可以再算一两个例子以資熟練.

§ 2. 梯形法、矩形法与 Simpson 法

假定 $f(x)$ 是一个在 $[\alpha, \beta]$ 内定义了的函数，以后如果用到几次微商，便假定 $f(x)$ 有几次微商。我們用 Euler 求和公式来推出普通数值积分的梯形法、矩形法与 Simpson 法。

1. 梯　形　法

在 Euler 求和公式中取

$$\varphi(x) = f\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right), \ a = 0, \ b = n \ (n \text{ 是自然数}).$$

記

$$y_l = f\left(\alpha + l\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

如此则得

$$\sum_{0<l\leqslant n} f\left(\alpha + l\frac{\beta-\alpha}{n}\right) = \int_0^n f\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx + \frac{1}{2}f(\beta) - \\ -\frac{1}{2}f(\alpha) + \frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n \left(x - [x] - \frac{1}{2}\right) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

换变数 $\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n} = t$，则得

$$\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0 + y_n) = \frac{n}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(t)dt + \\ + \frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_1(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

也就是

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0+y_n)\right) = \\ = -\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n b_1(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \qquad (1)$$

这个式子説明，求积分的梯形法的誤差是可以用积分形式表出来的．現在把誤差表达得更清楚些．用部分积分可知

$$\int_0^n b_1(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx = b_2(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n -$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{12}(f'(\beta) - f'(\alpha)) - \frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{12}\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx -$$

$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n b_2(x) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$= -\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n \left(b_2(x) - \frac{1}{12}\right) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

因此得出

$$\int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0 + y_n)\right) =$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 \int_0^n \left(b_2(x) - \frac{1}{12}\right) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \quad (2)$$

梯形法余項 (1) 須假定 $f(x)$ 有一次微商，而 (2) 假定了 $f(x)$ 有二次微商；梯形法余項我們用

$$R_t = \int_\alpha^\beta f(t)dt - \frac{\beta-\alpha}{n}\left(\sum_{l=1}^{n-1} y_l + \frac{1}{2}(y_0 + y_n)\right)$$

来表它．

定理 1． 如果 $|f''(x)| \leqslant M \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$，則

$$|R_t| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{12n^2}.$$

証． 由 (2) 可知

$$|R_t| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 \int_0^n \left|b_2(x) - \frac{1}{2}\right| \left|f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 M \int_0^n \left|b_2(x) - \frac{1}{12}\right| dx =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2} M \int_0^1 \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{12n^2}.$$

定理 2. 如果 $f'(x)$ 是单調遞減非負函数，則

$$|R_t| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2}{8n^2} f'(\alpha).$$

証. 由 (1) 及第二中値公式可知

$$|R_t| = \left| \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 \int_0^n b_1(x) f'\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx \right| =$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2 f'(\alpha) \left| \int_0^{\xi} b_1(x) dx \right|.$$

由

$$\left| \int_0^{\xi} b_1(x) dx \right| \leqslant \frac{1}{8}$$

可得定理。

如果积分的区間較长，这估計比以前的好些。

2. 矩 形 法

取

$$\varphi(x) = f\left(\alpha + \left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = n - \frac{1}{2},$$

幷記

$$y_{l+\frac{1}{2}} = f\left(\alpha + \left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right),$$

則得

$$\sum_{-\frac{1}{2} < l \leqslant n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha + \left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right) =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} f\left(\alpha + \left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx +$$

$$+ \frac{\beta-\alpha}{n} \int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x) f'\left(\alpha + \left(x + \frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx.$$

换变数

$$\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}=t,$$

则得

$$\sum_{l=0}^{n-1} y_{l+\frac{1}{2}}=\frac{n}{\beta-\alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt+\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)\times$$
$$\times f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

命

$$R_r=\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt-\frac{\beta-\alpha}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_{l+\frac{1}{2}}$$

代表矩形法的余項,則

$$R_r=-\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \quad (3)$$

部分积分得

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_1(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$
$$=b_2(x)f'\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Bigg|_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}-$$
$$-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_2(x)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$
$$=-\frac{1}{24}(f'(\beta)-f'(\alpha))-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} b_2(x)\times$$
$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx=$$
$$=-\frac{\beta-\alpha}{n}\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_r=\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}\left(b_2(x)+\frac{1}{24}\right)\times$$
$$\times f''\left(\alpha+\left(x+\frac{1}{2}\right)\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx. \quad (4)$$

定理 3. 如果 $|f''(x)| \leqslant M \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$，則

$$|R_r| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3 M}{24n^2}.$$

証. 由 (4) 可知

$$|R_r| \leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 M \int_{-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \left| b_2(x) + \frac{1}{24} \right| dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 Mn \int_0^1 \left| b_2(x) + \frac{1}{24} \right| dx =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{n^2} M \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{8}\right) dx =$$

$$= \frac{(\beta-\alpha)^3}{24n^2} M.$$

定理 4. 如果 $f'(x)$ 是單調遞減非負函数，則

$$|R_r| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2 f'(\alpha)}{8n^2}.$$

証. 于 (3) 上用第二中値公式可知

$$|R_r| = \frac{(\beta-\alpha)^2 f'(\alpha)}{n^2} \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\xi} b_1(x)\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\beta-\alpha)^2 f'(\alpha)}{8n^2}.$$

3. Simpson 法

命

$$R_s = \frac{1}{3} R_t + \frac{2}{3} R_r,$$

則得

$$R_s = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \frac{\beta-\alpha}{6n}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i + 4\sum_{i=0}^{n-1} y_{i+\frac{1}{2}}\right),$$

而且 Simpson 公式的余項 [由 (2) 与 (4)] 為

$$R_s = \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3 \int_0^n \left(\frac{b_2(x)}{3} - \frac{1}{36} + \frac{2b_2(x-\frac{1}{2})}{3} + \frac{1}{36}\right) \times$$

$$\times f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^3\int_0^n\left(b_2(x) + 2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

如果 $f^{\mathrm{IV}}(x)(\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$ 存在，由部分积分可得

$$\int_0^n\left(b_2(x) + 2b_2\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$= -\frac{\beta-\alpha}{n}\int_0^n\left(b_3(x) + 2b_3\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f'''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx$$

$\left(\text{此处用了 } b_3(0) = 0,\ b_3\left(\frac{1}{2}\right) = 0\right)$

$$= -\frac{\beta-\alpha}{n}\left(b_4(x) + 2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f'''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)\Big|_0^n +$$

$$+\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x) + 2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f^{\mathrm{IV}}\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{n}\frac{1}{960}(f'''(\alpha) - f'''(\beta)) +$$

$$+\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x) + 2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)f^{\mathrm{IV}}\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx =$$

$$= \left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^2\int_0^n\left(b_4(x) + 2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{960}\right)f^{\mathrm{IV}}\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx,$$

即

$$R_s = \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{n}\right)^5\int_0^n\left(b_4(x) + 2b_4\left(x-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{960}\right)\times$$

$$\times f^{\mathrm{IV}}\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right)dx.$$

定理 5. 如果 $|f^{\mathrm{IV}}(x)| \leqslant M \quad (\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$，则

$$|R_s| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^5 M}{180 \cdot 2^4 \cdot n^4}.$$

證. 由于

$$\int_0^n \left| b_4(x) + 2b_4\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{960} \right| dx =$$

$$= n\left(\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{24} + \frac{1}{720} - \frac{(x+\frac{1}{2})^4}{12} + \right.\right.$$

$$+ \frac{(x+\frac{1}{2})^3}{6} - \frac{(x+\frac{1}{2})^2}{12} + \frac{1}{360} + \frac{1}{960}\Bigg)dx +$$

$$+ \int_{\frac{1}{2}}^1\left(-\frac{x^4}{24} + \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{24} + \frac{1}{720} - \frac{(x-\frac{1}{2})^4}{12} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{(x-\frac{1}{2})^3}{6} - \frac{(x-\frac{1}{2})^2}{12} + \frac{1}{360} + \frac{1}{960}\right)dx\right) =$$

$$= n\left(\frac{6}{180 \cdot 2^6} + \frac{6}{180 \cdot 2^6}\right) = \frac{3n}{180 \cdot 2^4},$$

故得定理。

定理 6. 如果 $f''(x)$ 是单調非負遞減函数，則

$$|R_s| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{324n^3} f''(\alpha).$$

証. 由

$$\int_0^{\frac{1}{2}} b_2(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}\right)dx = 0$$

及对 $0 < \eta < \frac{1}{2}$，常有

$$\left| \int_0^\eta \left(b_2(x) + 2b_2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^\eta \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12} + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{6}\right) dx \right| =$$

$$= \left| \int_0^\eta \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x}{2}\right) dx \right| = \left| \frac{\eta^3}{2} - \frac{\eta^2}{4} \right| \leqslant \frac{1}{108}.$$

由

$$R_s = \frac{(\beta-\alpha)^3}{3n^3}\int_0^n \left(b_2(x) + 2b_2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right) f''\left(\alpha + x\frac{\beta-\alpha}{n}\right) dx$$

及第二中值公式可得

$$|R_s| \leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{3n^3} f''(\alpha) \left| \int_0^\xi \left(b_2(x) + 2b_2\left(x - \frac{1}{2}\right) \right) dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(\beta-\alpha)^3}{324n^3} f''(\alpha),$$

即得定理 6.

附記 1. Euler 公式所包括的,实际上远不止以上的三个方法(請参看[5]).

附記 2. 这方法的优点在于我們能把余項(誤差)用积分形式表出. 因之,我們可以用各种不同的方法进行估計,而以上的把絕对值拿进去,把上界拿出来,这是最簡单的估計方法. 它所給出的結果也就是普通书上所給出的誤差. 特别在处理具体問題时,应該根据被积分函数的特殊性,而对誤差項加以細致的处理. 因而往往可能得到較佳的結果.

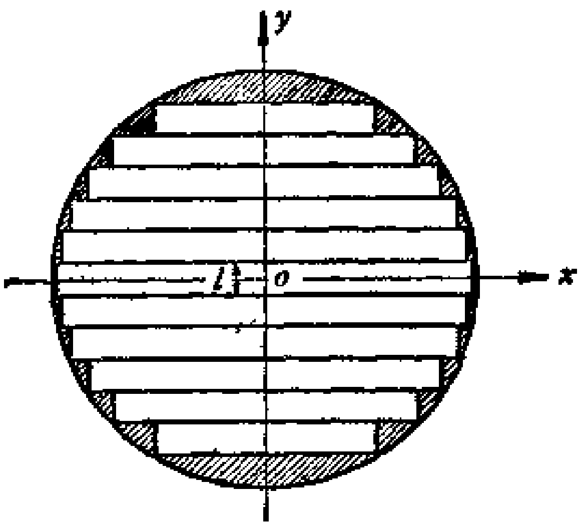

图 1

例如有半径为 R 的圓往体木料,欲切成与柱体等高而厚度为 l 的长方形木板,試求木材的利用率.

显然,木材的利用率卽木料的横切面的利用率. 命

$$h_i = \sqrt{R^2 - \left(i + \frac{1}{2}\right)^2 l^2},$$

則木板的横切面的总面积为

$$\sigma = 4l \sum_{i=0}^{\left[\frac{R}{l} - \frac{1}{2}\right]} h_i - 2l\sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}.$$

在 Euler 公式中,命

$$\varphi(x) = \sqrt{R^2 - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 l^2},\ a = -\frac{1}{2} \text{ 及 } b = \left[\frac{R}{l} - \frac{1}{2}\right],$$

则

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} h_i = \int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\,dx -$$

$$-\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\,dx +$$

$$+\frac{1}{2}\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}.$$

由于

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\,dx =$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\,dx -$$

$$-\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\,dx =$$

$$=\frac{\pi R^2}{4l}-\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\,dx.$$

因此废料的横切面的总面积为

$$\pi R^2-\sigma = 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}-2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}+$$

$$+4l\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}} \sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\,dx +$$

$$+4l\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]} b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\,dx.$$

由于

$$\left|4l\int_{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}^{\frac{R}{l}-\frac{1}{2}}\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\,dx-\right.$$

$$\left.-2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}$$

及

$$\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}dx\right|+$$

$$+\left|\int_{\lambda}^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}dx\right|=$$

$$=I+J,$$

得

$$\pi R^2-\sigma\leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}+$$

$$+2l\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2l^2}+4l(I+J).$$

由第二中值公式可知

$$I=\left|\int_{-\frac{1}{2}}^{\lambda}b_1(x)\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2l^2}}dx\right|=$$

$$=\frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}\left|\int_\mu^\lambda b_1(x)dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{8\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}.$$

又由 $|b_1(x)|\leqslant\frac{1}{2}$ 得

$$J\leqslant\frac{1}{2}\left|\int_\lambda^{\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]}\frac{l^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}dx\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{R^2-\left(\left[\frac{R}{l}-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}\right),$$

因此

$$\pi R^2-\sigma\leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}+$$

$$+\frac{l}{2}\cdot\frac{l^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}}+2l\sqrt{R^2-\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)^2 l^2}.$$

取

$$\lambda=-\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2}{l^2}+\frac{1}{16}},$$

得

$$\pi R^2-\sigma\leqslant 2l\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}+$$

$$+ 4l\sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4R^2}{l^2}+\frac{1}{16}} - \frac{1}{8}\right)^2 l^2}.$$

数值計算．取 $R = 20$ 公分，$l = 2.2$ 公分，則得

$$\frac{\pi R^2 - \sigma}{\pi R^2} < \frac{121 \cdot 528}{12 \cdot 56}\% < 10\%,$$

故木材利用率大于 90%。

§ 3. 求曲綫的长度

从現在起，我們将介紹实际工作部門所常用的曲綫求长，求面积，求体积，求表面积的一些方法.

我們可以借助于曲綫仪以求曲綫的长度. 当手边沒有曲綫仪时，我們介紹以下的方法.

先用两脚的距离为 1 个单位（例如 1 公分）的两脚規来量，最后的零头可以粗估一下，得到长度 l_1. 再用脚距为 2 个单位的两脚規去量，得到长度 l_2.

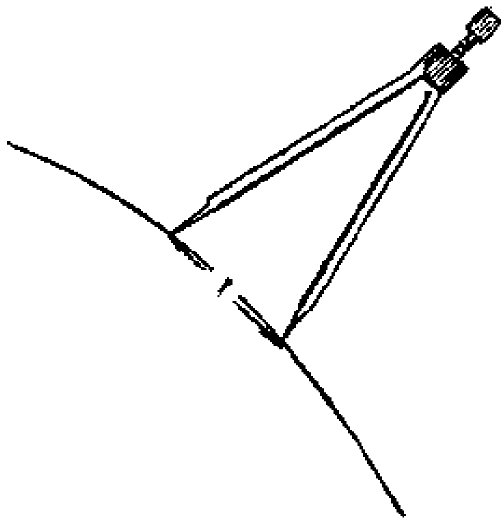

图 2

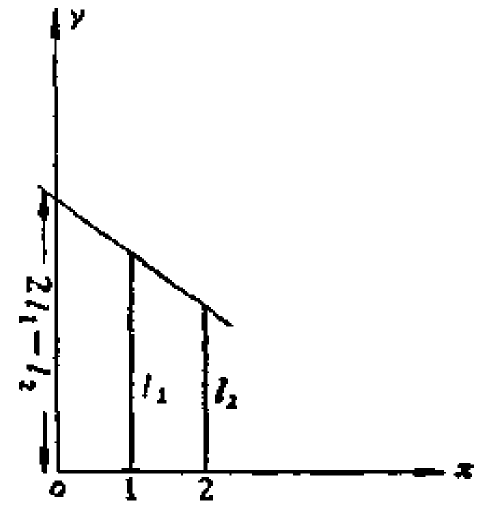

图 3

在 (x, y) 平面上面，以 x 軸表示两脚規的脚距，y 軸表示以两脚規量得的曲綫的长度. 于是通过两点 $(1, l_1)$ 与 $(2, l_2)$ 可以作一条直綫

$$\frac{y - l_1}{x - 1} = \frac{l_2 - l_1}{1}.$$

当 $x = 0$ 时，$y = 2l_1 - l_2$.

数 $2l_1 - l_2$ 可以作为曲綫长度的近似值. 这是在具体应用时

最常用的方法，称为外插法。

一般說来，每量一次，我們就在 (x, y) 平面上得到一点，其中 x 表示量曲綫的两脚規的脚距，y 表示用它量得的曲綫的长度，假如我們一共量了 n 次，共得 n 点：

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n),$$
$$0 < x_1 < \cdots < x_n.$$

現在发生这样的問題，如何由这 n 点来估計曲綫的长度呢？在这里我們介紹两个办法。

1. 迴归直綫法

作直綫

$$y = ax + b,$$

使諸点 $(x_i, y_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 与这条直綫的縱坐标的离差的平方和最小，即使

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2$$

最小。

将 S 展开，并凑平方，得

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n} y_i^2 + a^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + nb^2 - 2a \sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \\ &\quad + 2ab \sum_{i=1}^{n} x_i - 2b \sum_{i=1}^{n} y_i = \\ &= n\left(b + \frac{1}{n} a \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) a^2 + \\ &\quad + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2\right) - \\ &\quad - 2a\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i\right) = \end{aligned}$$

$$= n(b + ax_0 - y_0)^2 + A\left(a - \frac{B}{A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{A},$$

此处

$$x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$$y_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i,$$

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 > 0,$$

$$B = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0),$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - y_0)^2.$$

因此,当

$$a = \frac{B}{A}, \quad b = y_0 - ax_0$$

时,S 取最小值. 此时直綫是

$$y - y_0 = r\frac{\sigma_{y_0}}{\sigma_{x_0}}(x - x_0), \tag{1}$$

此处

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)(y_i - y_0)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2 \sum_{j=1}^{n}(y_j - y_0)^2}},$$

$$\sigma_{x_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)^2}{n}}, \quad \sigma_{y_0} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - y_0)^2}{n}}.$$

称直綫 (1) 为迴归直綫. r, σ_{x_0} 与 σ_{y_0} 則分别被称为相关系数, 全部 x_i 的均方差及全部 y_i 的均方差.

当 $x = 0$ 时,由 (1) 可得

$$y = y_0 - r\frac{\sigma_{y_0}}{\sigma_{x_0}}x_{1}. \tag{2}$$

这可以作为曲綫长度的近似值.

2. Lagrange 插值法

我們确定一条形如

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \tag{3}$$

的曲綫,使之通过 $(x_i, y_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$.

这样的曲綫的构造方法如下:先求一条曲綫 $y = f(x)$ 使

$$f(x_1) = 1,\ f(x_2) = \cdots = f(x_n) = 0.$$

这多項式以 $x_2, \cdots, x_n$ 为根,所以

$$f(x) = A(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

以 $x = x_1$ 代入,得

$$A = \frac{1}{(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)},$$

因此

$$f(x) = \frac{(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)}.$$

由此可知

$$\begin{aligned} y = y_1 &\frac{(x - x_2)\cdots(x - x_n)}{(x_1 - x_2)\cdots(x_1 - x_n)} + \\ &+ y_2\frac{(x - x_1)(x - x_3)\cdots(x - x_n)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)\cdots(x_2 - x_n)} + \cdots + \\ &+ y_n\frac{(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_n - x_1)\cdots(x_n - x_{n-1})} \end{aligned} \tag{4}$$

就是通过点 $(x_i, y_i)(1 \leqslant i \leqslant n)$ 的 $n-1$ 次曲綫. 公式(4)被称为 Lagrange 公式.

当 $x = 0$ 时,由(4)得

$$y = (-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\frac{y_i\prod\limits_{j=1}^{n}x_j}{x_i\prod\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}. \tag{5}$$

这可以作为曲綫长度的近似値。

附記 1. 从理論上講,在实驗中得来的总只有有限多个数据,它表达了自变量与因变量的一些关系. 我們可以用上面两个方法来构造一条直綫或一条曲綫,用来近似地表示自变量与因变量的关系.

§4. 求 面 积

我們可以借助于求积仪以求面积. 当手边沒有求积仪时，我們介紹以下两法.

1. 平行綫法

作一批等距离的平行綫，假定距离是 d. 这一批平行綫被图形所截取的长度是 $l_1, l_2, \cdots$. 这些长度的总和乘以 d 就可以用来作为这图形的面积. 在这里一条的面积是用 $\frac{1}{2}(l_1 + l_2)d$ 来計算的. 这实际上就是梯形公式的应用.

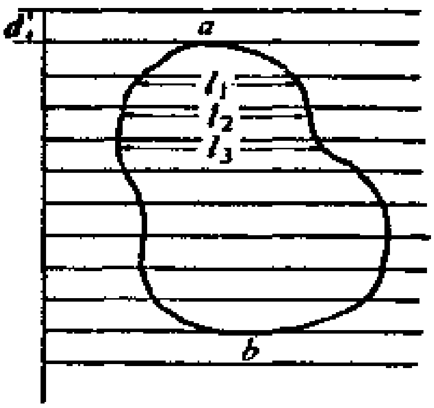

图 4

当然还可以用 $\frac{1}{3}(l_1 + 4l_2 + l_3)d$ 来代表两条的面积. 这对应于 Simpson 公式.

如果預先具备一张印有等距离 d 的平行綫的透眀紙，那就更方便了；将透明紙蒙在图紙上，使透明紙的某两条綫切于欲求面积的图形的边界. 例如图 4 中切于 a 点与 b 点，我們就可以在透明紙的上面，用尺或曲綫仪等来量这一批平行綫被图形截取的綫段的长度了.

为了减少誤差，把平行綫法按几种不同的方向，算出結果，再把这些結果求平均值，这样就能得到較为可靠的結果.

当面积不大，而边界又相当复杂时，用这一方法是不够好的.

这一方法可以用来求图形的重心. 作平行于 oy 軸的一批等距离 d 的直綫，这些直綫将图形截成 n 条. 用上面的方法求出每一条的面积，設它們的面积依次为 $s_1, s_2, \cdots, s_n$. 設 s_i 所在的条带的中綫至 oy 軸的距离为 x_i，則图形的重心至 oy 軸的距离等于

$$x_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} s_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} s_i}.$$

同法可以求出图形的重心至 ox 軸的距离 y_0.

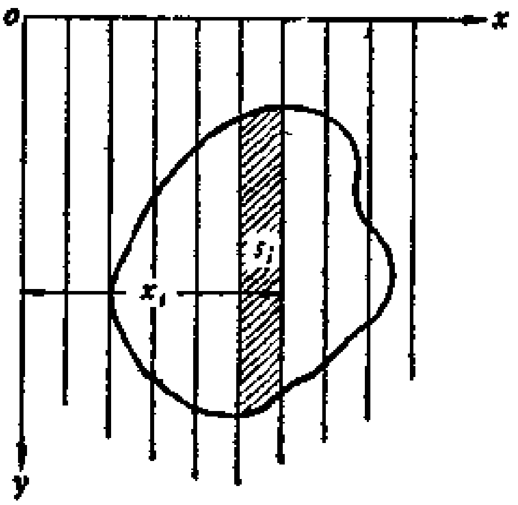

图 5

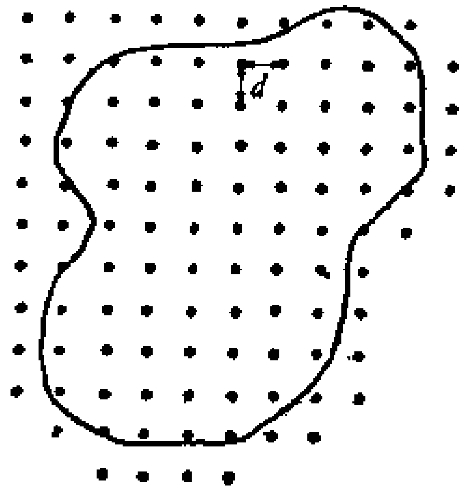

图 6

2. 方 格 法

作边长为 d 的方格，把格子点落在图形内的个数乘以 d^2，就可以用来作为面积的近似值. 我們当然也可以在图形上按等距离摆上一批棋子，然后計算一下棋子数，便可以得出面积.

如果預先具备一张印有边长为 d 的正方形角点的透明紙，就更加方便了；将透明紙蒙在图形上，然后数一下落在图中的点数卽可.

为了減少誤差，可以按不同的方向，計算几次，然后取其算术平均.

这个方法虽然簡单，但其精确度往往是比較高的，所以用得也頗广泛. 用这个方法算出的面积的誤差，与图形的周界有关. 在平面上引入直角坐标，我們有次之定理.

定理 1 (M. V. Jarnik)[6]. 命 l 表示一有长的簡单的閉曲綫的长度，而以 A 表示曲綫所围成的区域的面积，N 为曲綫内部所含

的整点的个数，则当 $l \geqslant 1$ 时

$$|A-N|<l.$$

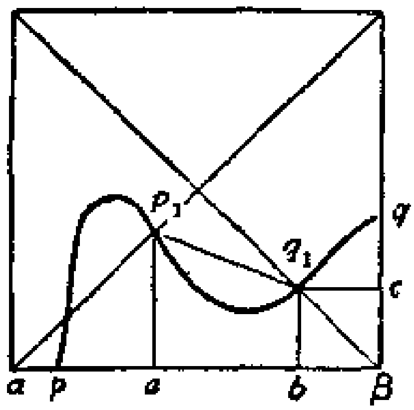

图 7

在証明之前，先証下面两个引理。

引1. 在边长为 1 的正方形中，任作一連續曲綫 C，C 的两个端点在正方形的周界上，若 C 与正方形的两对角綫相交，則曲綫 C 的长度 l 必不小于 1。

証. 假若 C 的两个端点在正方形的一对对边上，則显然 $l \geqslant 1$. 若 C 的端点在正方形的二邻边上，如图 7，易見

$$l \geqslant \overline{\alpha p_1}+\overline{p_1 q_1}+\overline{q_1 c} \geqslant$$
$$\geqslant \overline{\alpha a}+\overline{ab}+\overline{b\beta}=\overline{\alpha\beta}=1.$$

至于 C 的两个端点在同一个边上的情形，可以用同法証之。引理証完。

引2. 在边长为 1 的正方形中，任作一不通过正方形中心的連續曲綫 C，C 的两端点在正方形的周界上。曲綫 C 将正方形分为两部分，命 Δ 为其中不包含正方形中心的一部分，則 Δ 的面积必小于 C 的长度。

証. 今分別考慮以下各种情形（如图 8）。

命 p, q 表示曲綫 C 的端点，P 为正方形的中心，A, l 各表 Δ 的面积及曲綫 C 的长度，則在前两种情形中，从 C 上任何一点到直綫 $\alpha\beta$ 的距离必不能大于 l，故 Δ 完全落在一个边长为 1 与 l 的矩形中，因此 $A<l$. 在后三种情形中，由引 1 可知 $l \geqslant 1$，所以有 $A<1 \leqslant l$. 故得引理。

定理 1 的証明. 以 I 表示曲綫所围成的区域，在平面上作网，以直綫

$$x=m+\frac{1}{2},\ y=n+\frac{1}{2}\ (m, n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

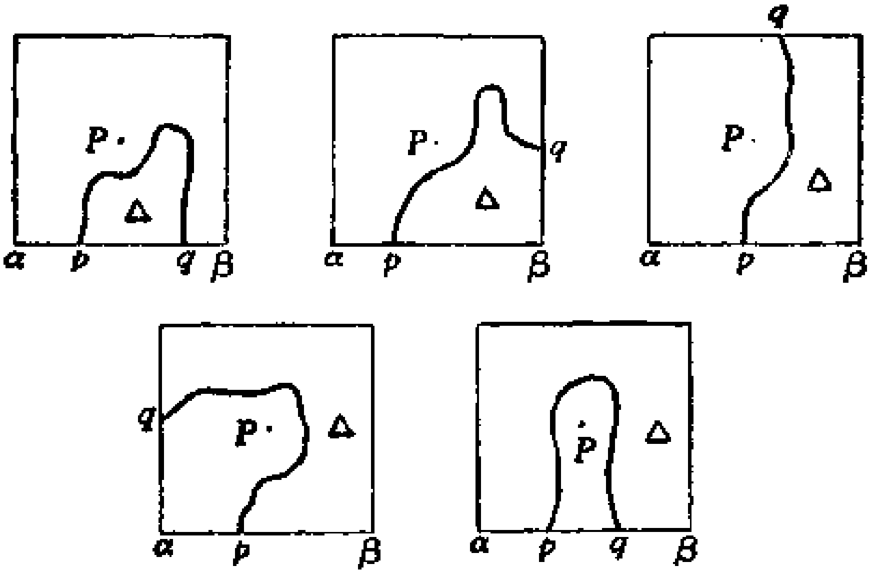

图 8

为經緯,网眼为边长为 1 的正方形. 以 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_k$ 表示所有这些小正方形之含有 I 的一部分周界者,而以 C_i 表示有长曲綫之在 Q_i 中的部分,以 Ω_i 表示 Q_i 与 I 的共通部分,而定义

$$N_i = \begin{cases} 1, & \text{若 } \Omega_i \text{ 中有整点}, \\ 0, & \text{若 } \Omega_i \text{ 中无整点}. \end{cases}$$

又以 A_i 表示 Ω_i 的面积, l_i 表示 C_i 的长度,于是若能証明

$$|A_i - N_i| < l_i,$$

便得定理.

首先我們考虑整个 I 都在某一 Q 中的情形,因为 $l \geqslant 1$, 故易見定理成立. 因此我們可以不失普遍性地假定 I 并不整个地处在某一 Q 中,此时 C_i 为若干段曲綫之和,而这些曲綫段又将 Q_i 分为若干个部分 $D_i^{(s)}$.

若整点不在任何 $D_i^{(s)}$ 中, 亦即当整点在 C_i 上时, 有 $N_i = 0$, $0 < A_i < 1$, 而 $l_i \geqslant 1$. 故得定理.

若整点在某一 $D_i^{(s)}$ 中,以 $A_i^{(s)}$ 表示 $D_i^{(s)}$ 的面积;若 $D_i^{(s)}$ 不在 I 中, 此时 $N_i = 0$, $A_i \leqslant 1 - A_i^{(s)}$; 若 $D_i^{(s)}$ 在 I 中, 則 $N_i = 1$, 而 $1 - A_i \leqslant 1 - A_i^{(s)}$, 而由引 2 即得

$$1 - A_i^{(s)} < l_i,$$

于是得到定理.

§5. 求 容 积

我們常常会碰到計算容积的問題，例如求水庫容积，估算矿藏儲量等等，以下介紹一些常用的方法[7,8,9]。

1. 簡 易 方 法

这一段我們介紹一些不借助于等高綫图来估計容积的方法，例如計算某一水庫的容积．我們一共測得水庫 N 个点的深度 $h_1, h_2, \cdots, h_N$，又測出水庫的水平面的面积 B．則它的容积 V 可以用 B 乘以平均高度来計算，即

$$V = B\frac{\sum_{i=1}^{N} h_i}{N}. \tag{1}$$

有时公式(1)需要作适当的修正，例如我們一共測得了 N 个点的深度，其中有 K 个点位于水庫边上，那末就用

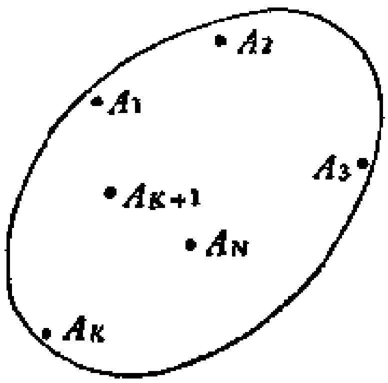

图 9

$$V = B\frac{\sum h - \frac{1}{2}\sum h_k}{(N-K)+\frac{1}{2}K} = B\frac{2\sum h - \sum h_k}{2N-K} \tag{2}$$

来計算容积，此处 $\sum h$ 为全部 N 个点的深度之和，而 $\sum h_k$ 为沿着水庫边上各点的深度之和．

这种修正的想法在于認为水庫边上的点的影响范围只有中間的点的一半．

更精确地考慮到每一点的影响范围問題，在估算矿藏儲量时，有下面的 Болдырев 最近地区法．

将每个勘探点与其相邻近的勘探点用直綫联接起来，这些直綫段的中垂綫相交而成的多边形就叫做这个勘探点的影响圈．圈內任一点至該勘探点的距离都比至其他勘探点的距离近，如图 10 所示．这样就把矿藏的水平投影面积划分成了若干个多边形之和，如图 11 所示．容积 V 就可以用下式

$$V=\sum_{i=1}^{N} B_i h_i \qquad (3)$$

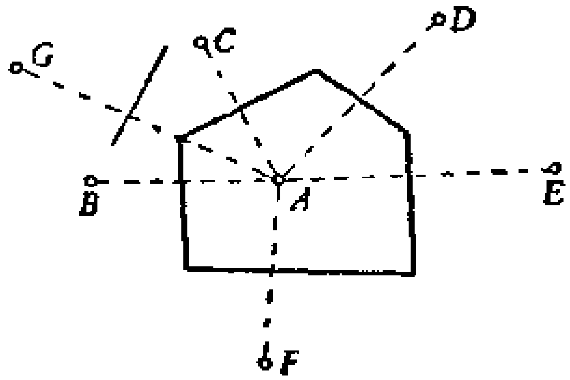

图 10

来計算，此处 h_i 为第 i 个勘探点所采得的厚度，而 B_i 則为第 i 个勘探点的影响圈的面积．

为了簡易地划出諸綫段的中点和中垂綫起見，常常采用图 12 所示的模板．

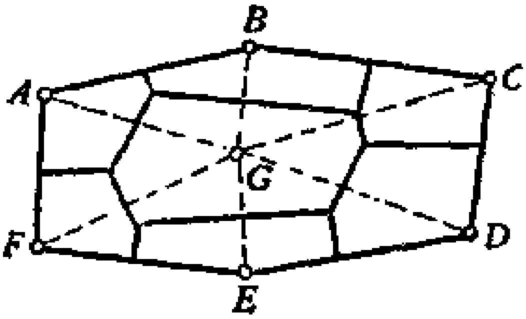

图 11

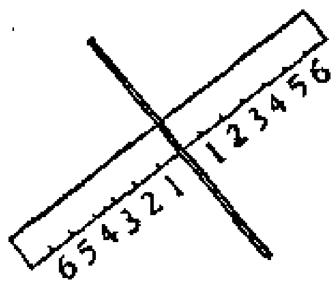

图 12

2. 借助于等高綫图的方法

假定沒有修水庫前，我們有一幅画了等高綫的地形图，高程差是 h，地图上的一圈，实际上便是一定高程的水平面．下面我們介紹几种借助于等高綫图来估計容积的方法．

(i) Соболевский 体積方格法．在等高綫图上，打上边长为 d 的方格．利用等高綫图估計一下，該方格中心的深度，例如图 14 中有阴影的一格的深度为 2.6，則水庫的容积 V 可以用所有落在等

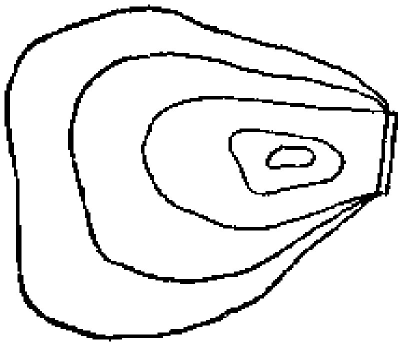

图 13

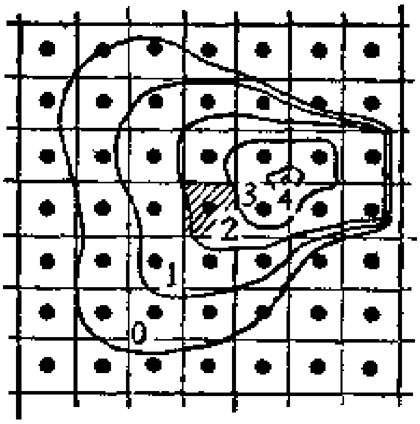

图 14

高綫图中的方格的中点的深度之和乘以 d^2 来計算，即

$$V = (\sum h)d^2, \tag{4}$$

此处 $\sum h$ 为落在等高綫图中的方格的中点的深度之和.

(ii) *截錐公式、梯形公式及 Бауман 公式.* 我們首先来估算水庫在相邻两等高綫所表示的水位之間的容积. 以 A, B 各表示上,下两个等高綫所包围的截面(它們的面积亦記为 A, B), 它們之間的距离为 h. 常用下面三个公式来近似計算水庫在这两个水位間的容积:

截錐公式: $$v_1 = \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}), \tag{5}$$

梯形公式: $$v_2 = \frac{h}{2}(A + B), \tag{6}$$

Бауман 公式: $$v = h\left[\frac{1}{2}(A + B) - \frac{T(A, B)}{6}\right]. \tag{7}$$

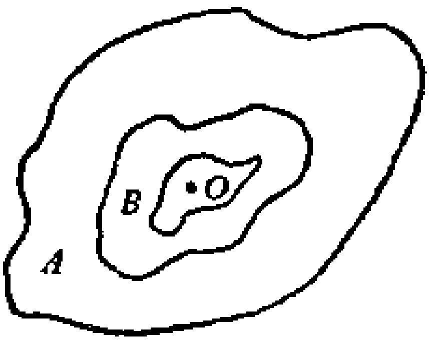

图 15

通常当 $\frac{A-B}{A} > 40\%$ 时, 用公式(5), 而当 $\frac{A-B}{A} < 40\%$ 时, 用公式(6). 公式(7)中的 $T(A, B)$ 是用以下方法所画出的图形的面积, 称它为 Бауман 改正数.

从制高点 O 出发, 作放射綫

OP. 这射綫在地图上 A, B 之間的长度是 l. 另作一图，取一点 O'. 与 OP 同方向，取 $O'P'=l$. 当 P 沿着 A 的周界走一圈时，

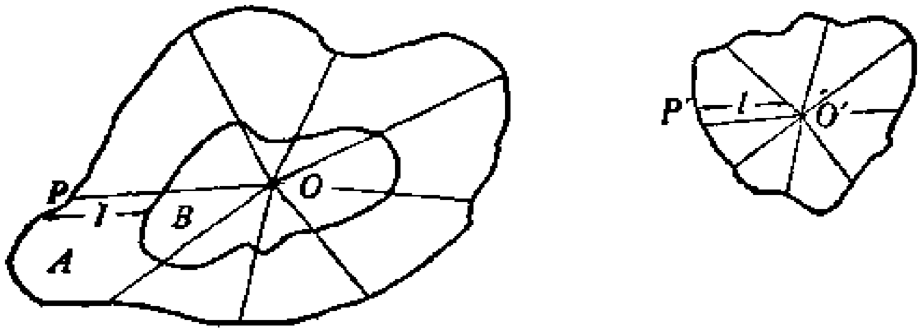

图 16

P' 也得一图形. 这图形的面积就称为 Бауман 改正数. 因为它依賴于两截面 A 与 B，所以我們用 $T(A, B)$ 来表示它.

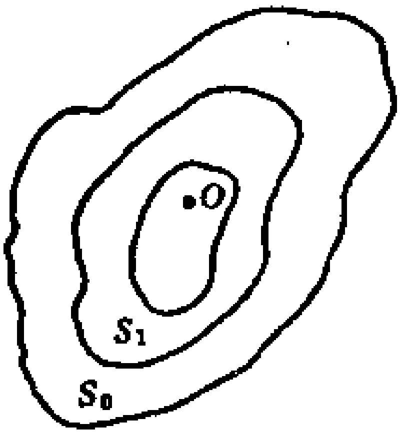

图 17

把算出来的体积一片一片地加起来，就得到水庫的容积. 換言之，設水庫的等高綫图的 $n+1$ 条等高綫所围成的截面依次为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$, S_n 即制高点 O（它們的面积亦分別記为 $S_0, S_1, \cdots, S_n$），則水庫的容积分別可以用下面的公式来計算：

$$\text{截錐公式：}\ V_1=\left(\frac{S_0+S_n}{3}+\frac{2}{3}\sum_{i=1}^{n-1}S_i+\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{S_iS_{i+1}}\right)h \tag{8}$$

$$\text{梯形公式：}\ V_2=\left(\frac{S_0+S_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}S_i\right)h \tag{9}$$

$$\text{Бауман 公式：}\ V=\left(\frac{S_0+S_n}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}S_i\right)h-$$

$$-\frac{h}{6}\sum_{i=0}^{n-1}T(S_i, S_{i+1}). \tag{10}$$

关于 Бауман 公式，有次之定理.

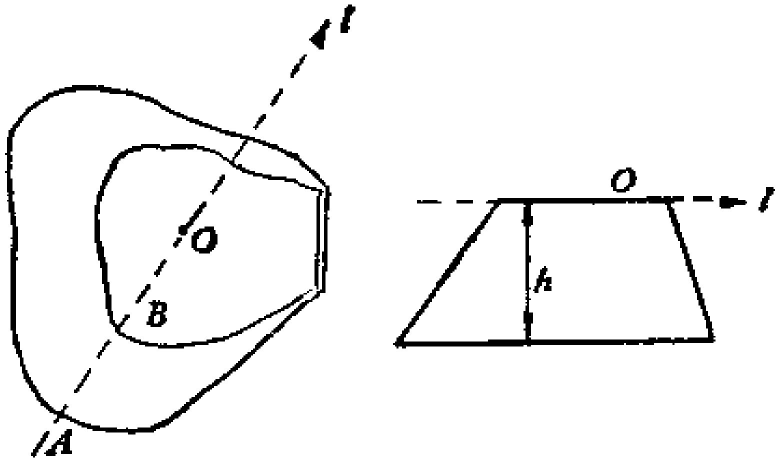

图 18

定理 1 (Бауман)[7,9]. 已知物体的下底 A 与上底 B(其面积亦記为 A, B)均为平面，且 A 平行于 B，h 为它們之間的高，O 为 B 上的某一点. 若用任意通过 O 而垂直于 B 的平面来截物体，所得的截面都是四边形，则物体的体积 v 恰如公式(7)所示.

証. 以 O 为中心引进极坐标. 命高度为 z 的等高綫的极坐标方程为

$$\rho = \rho(z, \theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

其中 $\rho(z, 0) = \rho(z, 2\pi)$. 今后我們常假定 $\rho(z,\theta)(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant z \leqslant h)$ 是連續的. 我們不妨假定 A, B 的高程各为 0 及 h. 我們記

$$\rho_1(\theta) = \rho(0, \theta), \quad \rho_2(\theta) = \rho(h, \theta).$$

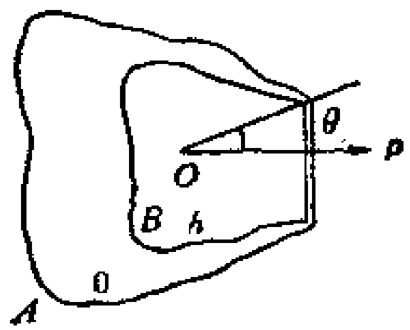

图 19

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\quad(0\leqslant z\leqslant h),$$

因此物体的体积 v 为

$$\frac{1}{2}\int_0^h\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)d\theta\,dz=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^h\left(\frac{z}{h}\rho_2(\theta)+\frac{h-z}{h}\rho_1(\theta)\right)^2dz\,d\theta=$$

$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)}{3}\right)d\theta=$$

$$=\frac{h}{2}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta\right]-$$

$$-\frac{h}{6}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2d\theta\right]=$$

$$=\frac{h}{2}(A+B)-\frac{h}{6}T(A,B).$$

定理証完.

关于截錐公式、梯形公式及 Бауман 公式的关系，我們有次之結果.

定理 2[9]. 不等式

$$v\leqslant v_1\leqslant v_2\tag{11}$$

恆成立. 当且仅当物体为截錐，且此錐体的頂点至底面 A 的垂綫通过点 O 时，$v=v_1$；当且仅当 $A=B$ 时，$v_1=v_2$.

証. 如 Бауман 定理証明中的假定. 由 Бауман 公式及 Буняковский-Schwarz 不等式可知

$$v=\frac{h}{6}\int_0^{2\pi}(\rho_1^2(\theta)+\rho_2^2(\theta)+\rho_1(\theta)\rho_2(\theta))d\theta\leqslant$$

$$\leqslant\frac{h}{3}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sqrt{\int_0^{2\pi}\rho_1^2(\theta)d\theta\int_0^{2\pi}\rho_2^2(\theta)d\theta}\right]=$$

$$= \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}) =$$

$$= v_1,$$

当且仅当 $\rho_1(\theta) = c\rho_2(\theta)$ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, c 为常数) 时，即当这物体为一个截头錐体，而此錐体的頂点至底面 A 的垂綫通过点 O 时，才会取等号(图 20)。

又由于

$$v_2 - v_1 = \frac{h}{2}(A + B) - \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}) =$$

$$= \frac{h}{6}(\sqrt{A} - \sqrt{B})^2 \geqslant 0,$$

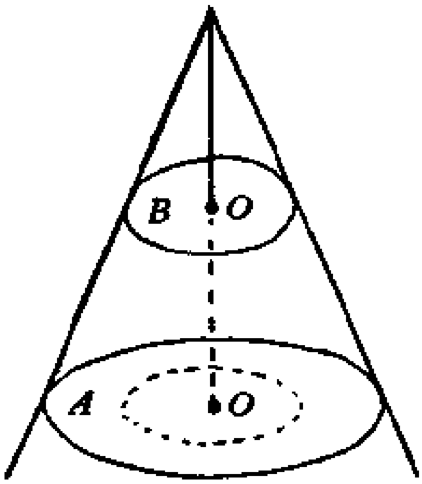

图 20

所以

$$v_1 \leqslant v_2,$$

当且仅当 $A = B$ 时取等号. 定理証完.

关于这三个公式的比較問題，我們認为主要应該从量綱来看. 面的量綱为 2，所以把面的量綱考虑为 1 所得出的公式，局限性往往是比較大的.

梯形公式是将中間截面看成上底与下底的算术平均而得到的，所以把面的量綱当作 1.

Бауман 公式則是将中間截面作为量綱 2 来考虑的. 詳言之，它是假定了 $\rho(z, \theta)$ 为 $\rho(0, \theta)$ 与 $\rho(h, \theta)$ 关于 z 的綫性关系而得到的(見定理 1).

截錐公式亦是将中間截面的量綱考虑为 2，但比 Бауман 公式还多假定了 $\rho(0, \theta) = c\rho(h, \theta)$ ($0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$)，此处 c 为一常数.

因此我們認为 Бауман 公式更具有普遍性，所以用它来近似計算物体的体积，一般說来，应該比較精确. 但这并不排斥对于某

些个别物体，用其他两个公式更恰当些的可能性．例如有一梯形，其上底与下底的寬度相等（图 21）．用梯形公式反而能获得它的眞正体积，而用 Бауман 公式与截錐公式来計算，結果就偏低了．不过我們注意此时这梯形的截面的量綱为 1（由于延 y 軸未变）．

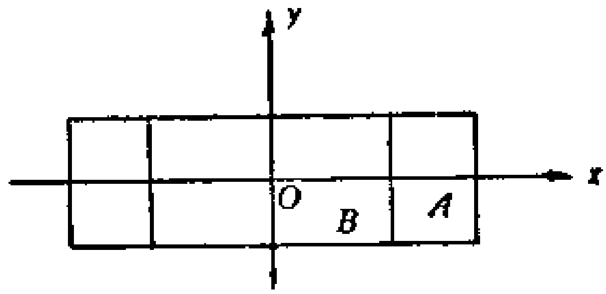

图 21

附記 1．相对于 Бауман 公式，我們还可以估計用梯形公式与截錐公式的相对偏差．例如当$\frac{A-B}{A}<40\%$时，容易算出[9]

$$\Delta=\frac{v_2-v}{v}\leqslant\frac{1}{11}<10\%.$$

（iii）**建議一个估計儲量的公式．** Бауман 公式是假定 $\rho(z,\theta)$ 为 $\rho(0,\theta)$ 与 $\rho(h,\theta)$ 关于 z 的綫性关系而得到的．如果我們将两相邻分层放在一起估計，卽已知相邻三等高綫，我們用通过 $\rho(0,\theta)$, $\rho(h,\theta)$ 与 $\rho(2h,\theta)$ 的抛物綫所形成的曲面 $\rho=\rho(z,\theta)$ 来逼近物体这二分层的表面，因此我們建議如下的計算方法．

命 A, B, C 分別表示連續三等高綫所围成的截面（面积亦記为 A, B, C），A 与 B 及 B 与 C 之間的距离都是 h，則这二片在一起的体积可以用以下公式来近似計算：

$$v_3=\frac{h}{3}(A+4B+C)-$$

$$-\frac{h}{15}(2T(A,B)+2T(B,C)-T(A,C)).\qquad(12)$$

如果不計（12）式右端的第二項，就是熟知的 Соболевский 公式（亦卽 Simpson 公式）．

把算出来的体积二片二片地加起来，就得到水庫的容积．換言之，設水庫的等高綫图的 $2n+1$ 条等高綫所围成的截面依次为 S_0, S_1, $\cdots$, S_{2n}, S_{2n} 卽制高点 O，它們的面积亦依次記为 S_0, S_1,

$\cdots, S_{2n}$ 而高程差为 h，則水庫的容积由下式

$$V_4 = \frac{h}{3}\left[S_0 + S_{2n} + 4\sum_{i=0}^{n-1} S_{2i+1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} S_{2i}\right] - \\ - \frac{h}{15}\left[2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+1}) + \right. \\ \left. + 2\sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i+1}, S_{2i+2}) - \sum_{i=0}^{n-1} T(S_{2i}, S_{2i+2})\right] \quad (13)$$

来近似計算.

注意. 如果等高綫图含有偶数条等高綫，則最上面的一片可以单独估計，而其余的用公式(13).

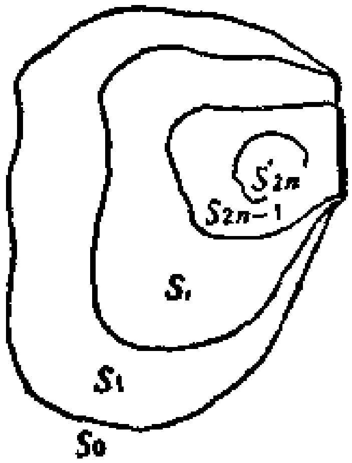

图 22

定理 3[9]. 已知物体的上底 C 与下底 A 均为平面，B 为中間的截面（面积亦分别記为 C, A, B），且 A, C 都与 B 平行，A 与 B 之間及 B 与 C 之間的距离都是 h，O 为 C 上一点，若用任意通过 O 而垂直于 C 的平面截物体，所得的截面的周界均由两条直綫及两条拋物綫所构成，則物体的体积 v_3 恰如公式(12)所示.

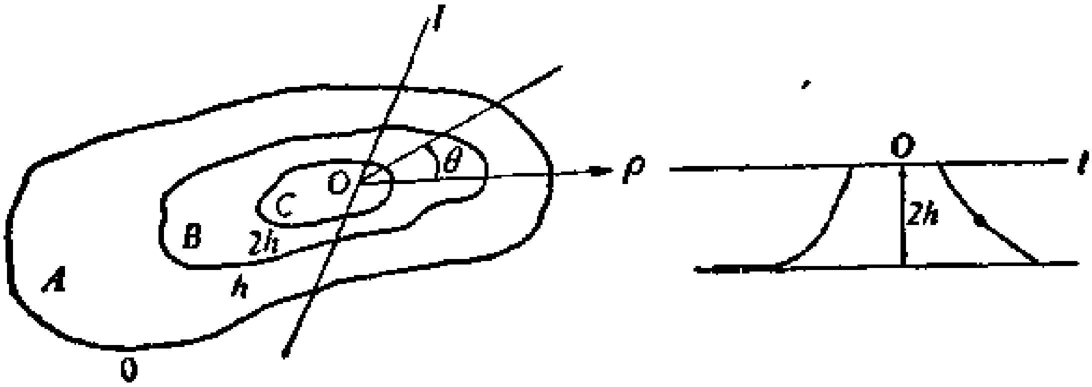

图 23

証. 以 O 为中心引进极坐标，命高度为 z 的等高綫的方程为

$$\rho = \rho(z, \theta) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \ \rho(z, 0) = \rho(z, 2\pi)).$$

不妨假定 A, B, C 的高程分别为 $0, h, 2h$，并且記

$$\rho_1(\theta) = \rho(0, \theta), \ \rho_2(\theta) = \rho(h, \theta), \ \rho_3(\theta) = \rho(2h, \theta).$$

由假定可知

$$\rho(z,\theta)=\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)-$$
$$-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta).$$

因此物体的体积 v_3 为

$$\frac{1}{2}\int_0^{2h}\int_0^{2\pi}\rho^2(z,\theta)d\theta\,dz=$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2h}\left[\frac{(z-h)(z-2h)}{2h^2}\rho_1(\theta)-\right.$$
$$\left.-\frac{z(z-2h)}{h^2}\rho_2(\theta)+\frac{z(z-h)}{2h^2}\rho_3(\theta)\right]^2dz=$$
$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{4}{15}\rho_1^2(\theta)+\frac{16}{15}\rho_2^2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_3^2(\theta)+\right.$$
$$+\frac{4}{15}\rho_1(\theta)\rho_2(\theta)+\frac{4}{15}\rho_2(\theta)\rho_3(\theta)-$$
$$\left.-\frac{2}{15}\rho_1(\theta)\rho_3(\theta)\right]d\theta=$$
$$=\frac{h}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho_1^2(\theta)}{3}+\frac{4\rho_2^2(\theta)}{3}+\frac{\rho_3^2(\theta)}{3}-\right.$$
$$-\frac{2}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_2(\theta))^2-\frac{2}{15}(\rho_2(\theta)-\rho_3(\theta))^2+$$
$$\left.+\frac{1}{15}(\rho_1(\theta)-\rho_3(\theta))^2\right]d\theta=$$
$$=\frac{h}{3}(A+4B+C)-\frac{h}{15}(2T(A,B)+$$
$$+2T(B,C)-T(A,C)).$$

定理証完.

(iv) Золотарев 方法. 在估計矿藏儲量时，当勘探綫不平行时,我們所得到的是矿体的不平行剖面.

命 A,B 分别表示矿体沿两条不平行的勘探綫的垂直剖面(面

积亦記为 A, B)，α 表示 A 与 B 所在的平面的交角(以弧度示之)．取这两张平面的交綫为 z 軸．又命 ρ_1 与 ρ_2 分别表示 A 与 B 的質量中心至 z 軸的距离．Золотарев 建議用下面的公式

$$v_4 = \frac{\alpha}{6}[\rho_1(2A + B) + \rho_2(A + 2B)] \tag{14}$$

来計算夹在这两张平面之間的矿体体积．

定理 4 (Золотарев)． 依反时針方向，任意通过 z 軸的半平面皆对应于一个角度 (θ) $(0 \leqslant \theta < 2\pi)$．記該半平面为 (θ)．若有物体夹在 (0) 与 (α) 之間，它在半平面(θ)上的截面为 $S(\theta)$ (面积亦記为 $S(\theta)$)，$S(\theta)$ 的質量中心至 z 軸的距离为 $\rho(\theta)$，而且滿足 $S(\theta) = A + \frac{B - A}{\alpha}\theta$，$\rho(\theta) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{\alpha}\theta$，此处 $A = S(0)$，$B = S(\alpha)$，$\rho_1 = \rho(0)$，$\rho_2 = \rho(\alpha)$，則物体的体积 v_4 恰如公式(14)所示．

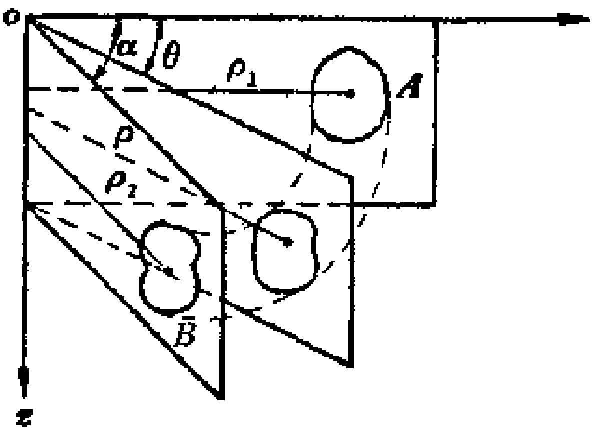

图 24

證． 在空間引进直角坐标，以 x 軸的正向过半平面 (0)．命物体所占的区域为 (V)，則其体积 v_4 为

$$v_4 = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz,$$

变換成柱面坐标 (r, θ, z)．因为

$$\rho(\theta) = \frac{\iint\limits_{S(\theta)} r\, dr\, dz}{\iint\limits_{S(\theta)} dr\, dz} = \frac{\iint\limits_{S(\theta)} r\, dr\, dz}{S(\theta)},$$

所以

$$v_4 = \int_0^\alpha d\theta \iint\limits_{S(\theta)} r\,dr\,dz = \int_0^\alpha S(\theta)\rho(\theta)d\theta =$$

$$= \int_0^\alpha \left[A + \frac{B-A}{\alpha}\theta\right]\left[\rho_1 + \frac{\rho_2-\rho_1}{\alpha}\theta\right]d\theta =$$

$$= \frac{\alpha}{6}[\rho_1(2A+B) + \rho_2(A+2B)].$$

定理証完.

§6. 求表面积

現在先介紹矿学家和地理学家所常用的方法[7,9,10]. 假定地图上以 Δh 为高程差画出等高綫，今后我們常假定有一制高点及等高綫成圈的情况来討論（其他情况也可以十分容易地被推导出来）. 我們假定由制高点向外一圈一圈地画等高綫 (l_{n-1}), (l_{n-2}), $\cdots$, (l_0). 取 (l_0) 的高度为 0，而制高点用 (l_n) 表之，它的高度是 h. (l_i) 与 (l_{i+1}) 之間的面积用 B_i 表示(卽投影的面积).

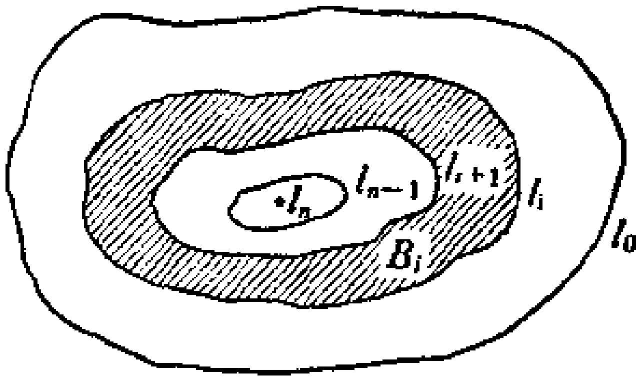

图 25

1. 矿体几何学上常用的方法的步驟如下:

a) $C_i = \dfrac{1}{2}(l_i + l_{i+1})\Delta h$ （中間直立隔板的面积）;

b) $\sum\limits_{i=0}^{n-1}\sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 就是所求的斜面积的漸近值（Бауман 方法）.

2. 地理学上常用的方法的步驟如下:

a) $l = \sum\limits_{i=0}^{n} l_i$ 为等高綫的总长度， $B = \sum\limits_{i=0}^{n-1} B_i$ 为总投影面积；由

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta h \cdot l}{B}$$

得出平均傾角 α;

b) $B\sec\alpha=\sqrt{B^2+(\Delta h\cdot l)^2}$ 就是所求的斜面积的漸近值(Волков 方法).

附記 1. $\sqrt{a^2+b^2}$ 可以借商高定理,用图解法很快求得.

这两个方法哪一个更好一些? 这些方法給出的結果在怎样的程度上迫近斜面积? 換句話說,当等高綫的分布趋向无限精密时,(也就是 $\Delta h\to 0$ 时),这些方法所給出的結果是什么? 是否就是眞的斜面积呢? 一般說来,答案是否定的. 仅仅是一些十分特殊的曲面,答案才是肯定的. 我們将定出这些曲面来,还将給出这些方法和实际結果的相差比例,并指出避免較大偏差的計算步驟.

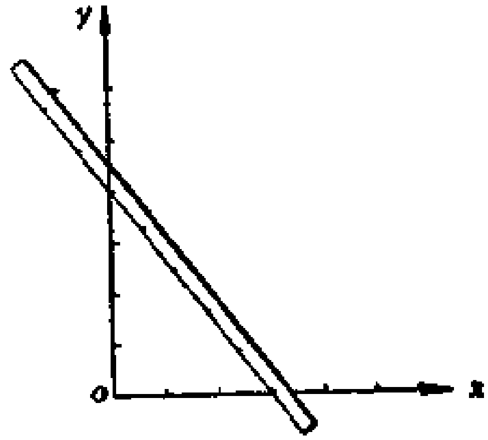

图 26

以制高点为中心引进极坐标,命高度为 z 的等高綫方程是

$$\rho=\rho(z,\theta),\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,$$

其中 $\rho(z,0)=\rho(z,2\pi)$. 我們在今后常假定 $\dfrac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial\theta}$ 与 $\dfrac{\partial\rho(z,\theta)}{\partial z}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 0\leqslant z\leqslant h)$ 都是連續的. 命 $z_i=\dfrac{h}{n}i$,則 l_i 所围繞的面积等于

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\rho^2(z_i,\theta)d\theta.$$

所以由中值公式可知

$$B_i=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\rho^2(z_i,\theta)-\rho^2(z_{i+1},\theta)]d\theta=$$

$$=-\int_0^{2\pi}\rho(z_i',\theta)\frac{\partial\rho(z_i',\theta)}{\partial z_i'}d\theta\Delta h,$$

此处 z_i' 在 z_i 与 z_{i+1} 之間,而 $\Delta h=\dfrac{h}{n}$.

另一方面,l_i 的长度等于

$$l_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z_i, \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta.$$

由 Бауман 方法所得出的結果是

$$C_i = \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i'', \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z_i'', \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta \Delta h,$$

这里又用了中値公式，z_i'' 在 z_i 与 z_{i+1} 之間． 因而当 $\Delta h \to 0$ 时，$\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{B_i^2 + C_i^2}$ 趋近于

$$\text{Ба} = \int_0^h \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta\right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} dz. \quad (1)$$

这便是用 Бауман 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时所趋向的数値．

又易見

$$B = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta) d\theta.$$

及 $\Delta h \cdot l$ 的极限应当等于

$$\lim_{n \to \infty} \Delta h \sum_{i=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2(z_i, \theta) + \left(\frac{\partial \rho(z_i, \theta)}{\partial \theta}\right)^2} d\theta =$$

$$= \int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta.$$

因此用 Волков 方法算出的斜面积，当 $\Delta h \to 0$ 时，所趋的极限是

$$\text{Во} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \rho^2(0, \theta) d\theta\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \rho \frac{\partial \rho}{\partial z} dz\right)^2 + \left(\int_0^h dz \int_0^{2\pi} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2} d\theta\right)^2} \quad (2)$$

（注意 $\rho(h, \theta) = 0$）．

由于

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2\right] d\theta + 2 \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \frac{\partial \rho}{\partial z} d\theta dz + \left(1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2\right) dz^2,$$

所以曲面的面积 S 为(参看[1])

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\left(\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2}\,d\theta\,dz. \tag{3}$$

为了比較 Ба, Вo 与 S, 我們引进一个复値函数

$$f(z,\theta)=-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}+i\sqrt{\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2}, \tag{4}$$

則

$$S=\int_0^h\int_0^{2\pi}|f(z,\theta)|\,d\theta\,dz, \tag{5}$$

$$\text{Ба}=\int_0^h\left|\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\right|dz, \tag{6}$$

及

$$\text{Вo}=\left|\int_0^h\int_0^{2\pi}f(z,\theta)d\theta\,dz\right|. \tag{7}$$

由此可見

$$\text{Вo}\leqslant\text{Ба}\leqslant S. \tag{8}$$

結論: (i) Бауман 方法比 Волков 方法好; (ii) 所求出的結果比眞实的結果常偏低一些; (iii) Бауман 方法旣然偏低,因此可以作如下的修改,卽取 $C_i=l_i\Delta h$. 这样旣化簡了算法,又增大了数值.

現在再来考虑 Вo $=S$ 及 Ба $=S$ 的曲面. 先講下面的引理.

引理[9]. 在区間 $[a,b]$ 中,如果 $f(x)$ 是一个实变数的复値函数,則

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=\int_a^b|f(x)|\,dx \tag{9}$$

成立的必要且充分的条件是 $f(x)$ 的虛实部分之比是常数.

証. 命 $f(x)=\rho(x)e^{i\theta(x)}$, $\rho(x)>0$ 而 $\theta(x)$ 是实的. 显然如果 $\theta(x)$ 与 x 无关,則等式(9)成立. 反之,由等式(9)可知

$$\int_a^b\int_a^b f(x)\overline{f(y)}dx\,dy=\int_a^b\int_a^b\rho(x)\rho(y)e^{i[\theta(x)-\theta(y)]}dx\,dy=$$

$$=2\iint\limits_{a\leqslant x<y\leqslant b}\rho(x)\rho(y)\cos[\theta(x)-\theta(y)]dx\,dy=$$

$$=2\iint\limits_{a\leqslant x<y\leqslant b}\rho(x)\rho(y)dx\,dy,$$

即

$$\iint_{a\leqslant x<y\leqslant b}\rho(x)\rho(y)\{1-\cos[\theta(x)-\theta(y)]\}dxdy=0.$$

因而得出

$$\cos[\theta(x)-\theta(y)]=1,$$

即

$$\theta(x)=\theta(y).$$

此即引理所需.

易知对于多重积分,引理亦眞(請讀者自証).

由引理可知

$$\text{Bo}=\left|\int_0^{2\pi}\int_0^h f(z,\theta)dz\,d\theta\right|=\int_0^{2\pi}\int_0^h|f(z,\theta)|dz\,d\theta=S$$

成立的必要且充分的条件是 $f(z,\theta)$ 的虛实部分之比是常数. 于是得偏微分方程

$$\rho^2+\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2=c^2\left(-\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2. \tag{10}$$

換言之,仅有适合于微分方程(10)的函数 $\rho=\rho(z,\theta)$, Волков 方法才能給出正确答案. 当然还要适合以下的条件: $\rho(h,\theta)=0$ (这是制高点),及 $\rho(0,\theta)=\rho_0(\theta)$ (这是底盘 l_0 的曲綫方程).

我們并不解微分方程(10),而从(10)的几何意义入手. 把 θ 与 z 看成参变数,即

$$x=\rho\cos\theta,\quad y=\rho\sin\theta,\quad z=z,$$

而 ρ 是 θ 与 z 的函数. 由

$$\frac{\partial x}{\partial\theta}=\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta-\rho\sin\theta,\ \frac{\partial y}{\partial\theta}=\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\ \frac{\partial z}{\partial\theta}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\cos\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial z}=\frac{\partial\rho}{\partial z}\sin\theta,\qquad \frac{\partial z}{\partial z}=1,$$

得知在曲面上点 (θ,z) 的法綫方向是

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\sin\theta+\rho\cos\theta,\ -\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\cos\theta+\rho\sin\theta,\ -\rho\frac{\partial\rho}{\partial z}\right).$$

它与 z 軸的交角 α (即点 (θ,z) 的傾角)的余弦 $\left(\text{由(10)及}\dfrac{\partial\rho}{\partial z}<0\right)$

$$\cos\alpha = \frac{-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(-\rho\dfrac{\partial\rho}{\partial z}\right)^2+\left(\dfrac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2+\rho^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+c^2}} \quad (11)$$

是一常数，也就是說这曲面的切平面与 xy 平面成一固定的角度 α. 我們来說明这样的曲面的几何性質.

从制高点向 xy 平面作一垂直平面，这平面与該曲面的交綫有次之性質：这曲綫上的每一点的切綫与 xy 平面的夹角等于 α，所以它是一条直綫.

从任一平面封閉曲綫(l_0)作底盘，以任一投影在盘內的点 (l_n) 作为制高点. 通过制高点与底盘垂直的直綫称为軸. 通过 l_0 上任一点 A 作一直綫，它在 A 与軸所成的平面上，与底盘的交角是 α，这样直綫所成的图形便是适合于 Bo = S 的图形.

如果有最高峯，并且向下看沒有陡峭的角度，則仅有以下的曲面才能 Bo = S: 底盘是圓或圓的若干切綫形成的多角形，或一些圓弧及一些切綫所成的图形，軸的尖端在通过圓心垂直于底盘的直綫上(見图 27).

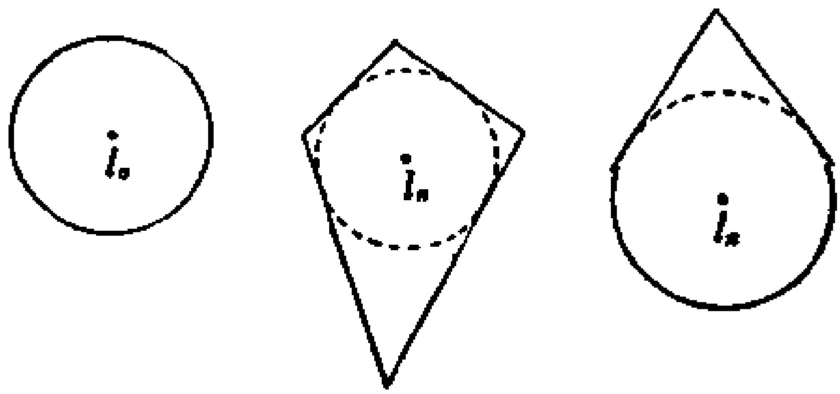

图 27

通俗些說，只有蒙古包、金字塔和一些由此复合出来的图形，才能由 Волков 的方法来无限逼近.

但什么时候 Ба = S 呢？当然当 Bo = S 的时候，Ба = S. 除掉上面所求出的一些曲面外，还有其他曲面否？答案：有. 証明如下：从

$$\text{Ба} = \int_0^h \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) d\theta \right| dz = \int_0^h \int_0^{2\pi} |f(z,\theta)| d\theta\, dz = S$$

得出

$$\int_0^h \left(\int_0^{2\pi} |f(z,\theta)| d\theta - \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) d\theta \right| \right) dz = 0.$$

积分号下的函数是非負的，因此对任一 z 常有

$$\int_0^{2\pi} |f(z,\theta)| d\theta = \left| \int_0^{2\pi} f(z,\theta) d\theta \right|.$$

因此当固定 z 时，$f(z,\theta)$ 的虚实部分之比是常数. 也就是說，仅有下面的曲面才能 Ба $= S$：高程相等之处，曲面有相同的傾角. 用通俗的話說，只有天坛頂，北海白塔及葫芦式的图形才能由 Бауман 的方法来无限逼近.

怎样来估計誤差呢？假定有二常数使

$$0 < \xi \leqslant \cos\alpha \leqslant \eta,$$

即

$$\xi \leqslant \frac{-\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}}{\sqrt{\left(\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2}} \leqslant \eta.$$

由此可得

$$\frac{\rho^2 + \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2}{\left(\rho \dfrac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2} \geqslant 1 - \eta^2.$$

因而

$$\int_0^{2\pi} \int_0^h \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2}\, dz\, d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{1-\eta^2} \int_0^{2\pi} \int_0^h \sqrt{\left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2}\, dz\, d\theta = \sqrt{1-\eta^2}\, S.$$

又

$$\int_0^{2\pi} \int_0^h \left(-\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) dz\, d\theta \geqslant$$

$$\geqslant \xi \int_0^{2\pi} \int_0^h \sqrt{\left(\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta}\right)^2 + \rho^2}\, dz\, d\theta = \xi S,$$

因此

$$\text{Bo} \geqslant \sqrt{\xi^2 S^2 + (1-\eta^2)S^2} = \sqrt{1+\xi^2-\eta^2}S.$$

又因为 $1 > \eta > \xi > 0$, 所以

$$\frac{\xi}{\eta} \leqslant \sqrt{1+\xi^2-\eta^2}$$

(将两端平方,此式卽 $(\eta^2-\xi^2)(1-\eta^2) \geqslant 0$). 故得

$$\text{Bo} \geqslant \frac{\xi}{\eta} S.$$

总而言之,我們証明了下面的結果.

定理 1[9]. 若曲面 $\rho = \rho(z, \theta)$ $(0 \leqslant z \leqslant h,\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ 上任意点的傾角 α 的余弦都滿足 $0 < \xi \leqslant \cos\alpha \leqslant \eta$, 則不等式

$$\frac{\xi}{\eta} S \leqslant \text{Bo} \leqslant \text{Ба} \leqslant S \tag{12}$$

成立. Bo$=S$ 的充要条件是曲面的任意点都有相同的傾角, Ба$=S$ 的充要条件是曲面在高程相等处的点有相同的傾角.

由此可見,只有当曲面上的点的傾角变化不大时, Волков 方法才能得到精确結果, 而只有当曲面在相邻两高程間的点的傾角相差不大时, Бауман 方法才能給出精确的結果. 然而在其他情况下,用这种方法的誤差就可能比較大了.

因此我們建議如下的算法[9]:在等高綫图上,通过制高点 (l_n) 引进若干条放射綫 $(\theta_0), (\theta_1), \cdots, (\theta_{m-1})$, 此处 (θ_j) 的輻角为

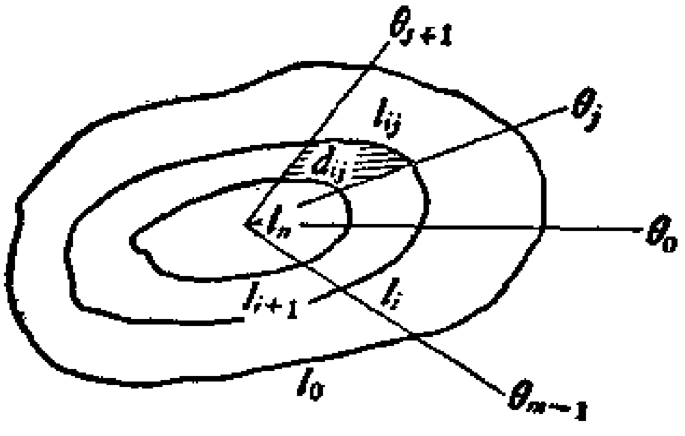

图 28

$\frac{2\pi}{m}j$. 放射綫 (θ_j), (θ_{j+1}) 与等高綫 (l_i), (l_{i-1}) 所围成的面积記为 d_{ij}. (l_i) 被 (θ_j) 与 (θ_{j+1}) 所截取的一段的长度記之为 l_{ij}.

方法 (i)

a) $D_j = \sum_{i=0}^{n-1} d_{ij}$ (等高綫图在放射綫(θ_j)与(θ_{j+1})間的面积).

b) $E_j = \left(\sum_{i=0}^{n-1} l_{ij}\right)\Delta h$ (中間隔板在两直立墙壁之間的面积之和).

c) $\sigma_1 = \sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{D_j^2 + E_j^2}$ 就是所求曲面的漸近值.

方法 (ii)

a) $c_{ij} = l_{ij}\Delta h$ (中間隔板在两直立墙壁之間的面积).

b) $\sigma_2 = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sqrt{c_{ij}^2 + d_{ij}^2}$ 就是所求曲面的漸近值.

用同样的方法，可知当 $\Delta h \to 0$, $m \to \infty$ 时，σ_1 与 σ_2 所趋近的值分別为

$$K = \int_0^{2\pi}\int_0^h |f(z,\theta)dz|\,d\theta \tag{13}$$

及

$$S = \int_0^{2\pi}\int_0^h |f(z,\theta)|\,dz\,d\theta,$$

显然 Bo $\leqslant K \leqslant S$. 同样可知 $K = S$ 的充要条件为曲面为直紋面. 由于 σ_2 趋于真面积，所以用方法 (ii) 最为精密可靠.

附記 2. 还有从考虑角度入手的計算方法，請参看陆瀓芬[10].

§ 7. Euler 函数及 Euler 公式的进一步精密化

定理 1. 在任一有限区間内 $b_1(x)$ 是囿变函数，而且当 $x \neq [x]$ 时

$$b_1(x) = x - [x] - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}. \tag{1}$$

証. 在(0,1)中 $b_1(x)$ 是两个单調上升函数 $x-\frac{1}{2}$及 $[x]$ 之差，所以它是囿变函数.

由于 $b_1(x)$ 是奇函数及

$$2\int_0^1 b_1(x)\sin 2\pi mx dx = 2\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\sin 2\pi mx dx = -\frac{1}{\pi m},$$

所以 $b_1(x)$ 的 Fourier 級数是

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n}.$$

如果 $x \neq [x]$，則 $b_1(x)$ 在这一点是連續的，因此得出定理 1 中的展开式.

由于級数 (1) 是囿变，所以可以逐项求积分. 因此

$$b_2(x) - b_2(0) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nt}{n^2}\Big|_0^x,$$

即

$$b_2(x) - \frac{1}{12} = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2} - \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

所以

$$b_2(x) = \frac{1}{2\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^2}. \tag{2}$$

这是一个絕对收斂，并且在任一区間內一致收斂的級数. (2)对任一 x 都成立. 再积分

$$b_3(x)=\frac{1}{4\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n^3}$$

及

$$b_4(x)=-\frac{1}{8\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^4}$$

等等. 一般言之，可以用归納法証明

$$b_l(x)=\begin{cases}(-1)^{1+[\frac{l}{2}]}\dfrac{2}{(2\pi)^l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi nx}{n^l}, & \text{当 } 2\nmid l^{1)},\\[2ex] (-1)^{1+[\frac{l}{2}]}\dfrac{2}{(2\pi)^l}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi nx}{n^l}, & \text{当 } 2\mid l.\end{cases}\tag{3}$$

因此

$$b_{2l}(0)=-\frac{2}{(2\pi)^{2l}}\zeta(2l)=(-1)^l\frac{B_{2l}}{(2l)!},$$

$$b_{2l+1}(0)=0\qquad(l=1,2,\cdots),$$

此处

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\qquad(s=\sigma+it,\ \sigma>1)$$

称为 Riemann ζ-函数，而 B_{2l} 称为 Bernoulli 数. 将已經算出的 Bernoulli 数，列出如下：

$$B_0=1,\quad B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_4=-\frac{1}{30},$$

$$B_6=\frac{1}{42},\quad B_8=-\frac{1}{30},\quad B_{10}=\frac{5}{66},\quad B_{12}=-\frac{691}{2730},$$

$$B_{14}=\frac{7}{6},\quad B_{16}=-\frac{3617}{510},\quad B_{18}=\frac{43867}{798},$$

$$B_{20}=-\frac{174611}{330},\quad B_{22}=\frac{854513}{138},\quad B_{24}=-\frac{236364091}{2730},$$

$$B_{26}=\frac{8553103}{6},\quad B_{28}=-\frac{23749461029}{870},$$

---

1) $a|b$ 表示整数 a 可以整除整数 b, $a\nmid b$ 表示 a 不能整除 b.

$$B_{30}=\frac{8615841276005}{14322},\quad B_{32}=-\frac{7709321041217}{510},$$

$$B_{34}=\frac{2577867858367}{6},$$

因此也附带算出了

$$\zeta(2)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \zeta(4)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90},$$

$$\zeta(6)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{\pi^6}{925}\text{ 等等.}$$

Stirling 公式(即公式(1.2))还可以进一步精密如下:我們进一步来估計 γ_n, 由分部积分法可知

$$\gamma_n=\int_n^{\infty}\frac{b_1(x)}{x}dx=\frac{b_2(x)}{x}\Big|_n^{\infty}+\int_n^{\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}dx=$$

$$=-\frac{b_2(0)}{n}+\int_n^{\infty}\frac{b_2(x)}{x^2}dx=$$

$$=-\frac{b_2(0)}{n}-\frac{b_3(0)}{n^2}+2\int_n^{\infty}\frac{b_3(x)}{x^3}dx=$$

$$=-\frac{b_2(0)}{n}-\frac{b_3(0)}{n^2}-\frac{2b_4(0)}{n^3}-\cdots-$$

$$-\frac{(l-2)!\,b_l(0)}{n^{l-1}}+(l-1)!\int_n^{\infty}\frac{b_l(x)}{x^l}dx.$$

由第二中值公式及 $b_l(x)$ 的性質可知

$$\left|\int_n^{\infty}\frac{b_l(x)}{x^l}dx\right|=\left|\frac{1}{n^l}\int_n^{\xi}b_l(x)dx\right|\leqslant\frac{2}{(2\pi)^l}\frac{\zeta(l)}{n^l},$$

因此得到

$$\log n!=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{2}\log 2\pi+\gamma_n$$

$$=\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n-n+\frac{1}{2}\log 2\pi-$$

$$-\frac{b_2(0)}{n}-\frac{b_3(0)}{n^2}-\frac{2b_4(0)}{n^3}-\cdots-$$

$$-\frac{(l-2)!\,b_l(0)}{n^{l-1}}+\varepsilon_n,\tag{4}$$

此处
$$|\varepsilon_n| \leqslant \frac{(l-1)!\,2\zeta(l)}{(2\pi)^l n^l}. \tag{5}$$

定理 2 (Euler 公式的一般形式). 命 $g(x)$ 是在 $[a,b]\,(b>a)$ 中具有多次連續微商的函数,其次数視我們的需要而定,則对所有的 t 皆有
$$\sum_{\substack{m\\ a<m+t\leqslant b}} g(m+t) = \int_a^b g(x)dx +$$
$$+\sum_{r=0}^{l-1}(-1)^r(-g^{(r)}(b)b_{r+1}(b-t)+g^{(r)}(a)b_{r+1}(a-t))+$$
$$+(-1)^{l+1}\int_a^b g^{(l)}(x)b_l(x-t)dx. \tag{6}$$

証. 1) 簡化定理.

a) 不妨假定 $t=0$. 取 $a-t=A$, $b-t=B$, $g(x+t)=$ $=G(x)$, 則有
$$\sum_{A<m\leqslant B} G(m) = \int_A^B G(x)dx +$$
$$+\sum_{r=0}^{l-1}(-1)^r(-G^{(r)}(B)b_{r+1}(B)+G^{(r)}(A)b_{r+1}(A))+$$
$$+(-1)^{l+1}\int_A^B G^{(l)}(x)b_l(x)dx. \tag{7}$$

b) 因为上式的每边都是可加的,所以只需証明
$$w \leqslant A < B \leqslant w+1$$
时的情况即可,此处 w 是任一整数.

c) 如 a) 的討論,不失普遍性,我們可以假定 $w=0$.

2) 当 $l=1$ 时,即 §1 定理1. 現在另証如下: 命
$$\varphi(x) = G((B-A)x+A),$$
故 $\varphi(x)$ 为 $[0,1]$ 上有 l 次連續微商的函数. 当 $0<x<1$ 时,将 $\varphi(x)$ 展开成 Fourier 級数
$$\varphi(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos 2\pi mx + b_m \sin 2\pi mx),$$

此处

$$a_m = 2\int_0^1 \varphi(t)\cos 2\pi mt\,dt,$$

$$b_m = 2\int_0^1 \varphi(t)\sin 2\pi mt\,dt.$$

当 $x \to 0$ 时，因为 $a_m = a_{-m}$，$b_{-m} = -b_m$，故由定理 1 得

$$\frac{\varphi(1)+\varphi(0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}(a_m + ib_m) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}\int_0^1 \varphi(t)e^{2\pi imt}dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{\substack{m=-N\\ m\neq 0}}^{N}\left\{\frac{\varphi(t)}{2\pi im}e^{2\pi imt}\Big|_0^1 - \frac{1}{2\pi im}\int_0^1 \varphi'(t)e^{2\pi imt}dt\right\} +$$

$$+\int_0^1 \varphi(t)dt =$$

$$= \int_0^1 \varphi(t)\,dt - \lim_{N\to\infty}\int_0^1 \varphi'(t)\sum_{m=1}^{N}\frac{\sin 2\pi mt}{\pi m}dt =$$

$$= \int_0^1 \varphi(t)dt - \int_0^1 \varphi'(t)b_1(-t)dt$$

(关于积分号下趋限，用到了 $b_1(x)$ 在 $[0, 1]$ 中的囿收敛性，参看 [1])，即得

$$\frac{G(A)+G(B)}{2} = \int_0^1 G((B-A)x + A)dx -$$

$$-(B-A)\int_0^1 b_1(-x)G'((B-A)x+A)dx =$$

$$= \frac{1}{B-A}\int_A^B G(t)dt - \int_A^B b_1\left(-\frac{t-A}{B-A}\right)G'(t)dt.$$

由于

$$(B-A)b_1\left(-\frac{t-A}{B-A}\right) = (B-A)\left(-\frac{t-A}{B-A}+\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -t + \frac{B+A}{2} = b_1(-t) + \frac{B+A-1}{2}$$

$$(A < t < B),$$

故得

$$(B-A)\frac{G(A)+G(B)}{2} = \int_A^B G(t)dt -$$

$$- \int_A^B (B-A) b_1\left(-\frac{t-A}{B-A}\right) G'(t)dt =$$

$$= \int_A^B G(t)dt - \int_A^B b_1(-t)G'(t)dt -$$

$$- \frac{B+A-1}{2}(G(B)-G(A)).$$

当 $0 \leqslant A < B < 1$ 得

$$\int_A^B G(t)dt + \int_A^B b_1(t)G'(t)dt -$$

$$- G(B)b_1(B) + G(A)b_1(A) = 0;$$

当 $0 \leqslant A < 1$ 得

$$G(1) = \int_A^1 G(t)dt + \int_A^1 b_1(t)G'(t)dt -$$

$$- G(1)b_1(1) + G(A)b_1(A) = 0.$$

故当 $l = 1$ 时,(7) 式成立.

3) 归納法. 运用部分积分法,可得

$$(-1)^{l+1}\int_A^B G^{(l)}(x)b_l(x)dx =$$

$$= (-1)^{l+1}[G^{(l)}(B)b_{l+1}(B) - G^{(l)}(A)b_{l+1}(A)] +$$

$$+ (-1)^{l+2}\int_A^B b_{l+1}(x)G^{(l+1)}(x)dx.$$

定理巳經証明.

§8. 实用調和分析——有限調和分析

把已知函数展开成 Fourier 級数的运算叫做調和分析. 如果 $f(x)$ 是由分析方法定义出来的,而刚好又不难算出定积分

$$C_m = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x) e^{-imx} dx$$

的数值来,則这个函数的 Fourier 展开式便立刻获得. 但如果 $f(x)$ 仅是由若干实驗数据所給定的, 或者即使 $f(x)$ 由分析方法所定义, 而 C_m 不易算出,从而只能借助于若干分点的近似积分来算出,这样所得来的 Fourier 級数便称为实用調和分析. 人們往往容易产生这样的錯覺:当取定若干分点后,希望愈多算几項,就会得到愈精密的結果. 我們将着重指出,事实上并不然,过多的計算不仅浪費人力, 而且会导致愈来愈大的誤差. 我們在这里所介紹的有限調和分析的着眼点也就在于此. 本节用的方法是"从有限到有限",并研究了由有限多个数据所应計算的最恰当的項数. 必須指出, 多算了誤差更大的現象不仅在調和分析中出現. 与調和分析有关的如橢圓型、抛物型偏微分方程中数值解的过程中也都出現. 在以下两节中将提出例子来說明:有时候眞会出現"高深反被高深誤, 不如初浅計算精"的現象. 当然, 这不是否定高深数学的重要性,而是說明,具体分析具体事物的必要性. 不了解簡单方法的优缺点,一味地陶醉于高深数学之中,以为总是高深的好,这样既会走入歧路,同时更无法了解高深数学的优越性.

先从复数形式的 Fourier 級数讲起. 假定在 $[-\pi, \pi]$ 中給了函数 $f(x)$ 的 $n(=2n'+1)$ 个数据:

$$y_l = f\left(\frac{2\pi l}{n}\right), \quad l = 0, \pm 1, \cdots, \pm n'. \tag{1}$$

利用

$$\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi ilm/n}=\begin{cases}0, & 若\quad n\nmid m;\\ 1, & 若\quad n\mid m.\end{cases} \tag{2}$$

可以从

$$y_l=\sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{2\pi ilm/n},\quad |l|\leqslant n' \tag{3}$$

中定出 C'_m 来。定出 C'_m 的方法是乘(3)以 $e^{-2\pi ilq/n}$，而对 l 加之，由(2)得出

$$\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi ilq/n}=\sum_{m=-n'}^{n'} C'_m\sum_{l=-n'}^{n'} e^{2\pi i(m-q)l/n}=nC'_q. \tag{4}$$

因此，我們建議用

$$S_n(x)=\sum_{m=-n'}^{n'} C'_m e^{imx},\quad C'_m=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi ilm/n} \tag{5}$$

来逼近 $f(x)$。現在来估計 $S_n(x)$ 与 $f(x)$ 的誤差。

定理 1. 假如 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商，各阶微商均有周期 2π，且 $|f^{(r)}(x)|<C$，則

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{6}$$

証. 已知

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx},\quad C_m=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-imx}dx. \tag{7}$$

部分积分 r 次得

$$C_m=\frac{1}{2\pi(im)^r}\int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)}(x)e^{-imx}dx,$$

所以

$$|C_m|<\frac{C}{|m|^r}.$$

因此

$$\left|f(x)-\sum_{m=-n'}^{n'} C_m e^{imx}\right|\leqslant\sum_{|m|>n'}|C_m|<$$

$$<2\sum_{m=n'+1}^{\infty}\frac{C}{m^r}<2C\int_{n'}^{\infty}\frac{dx}{x^r}=\frac{2C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{8}$$

当 $|m| \leqslant n'$ 时

$$C_m - C'_m = C_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} =$$

$$= C_m - \frac{1}{n} \sum_{l=-n'}^{n'} e^{-2\pi i l m/n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} C_q e^{2\pi i q l/n} =$$

$$= C_m - \frac{1}{n} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-n'}^{n'} C_q e^{2\pi i (q-m) l/n} =$$

$$= C_m - \sum_{\substack{q=-\infty \\ n|(q-m)}}^{\infty} C_q,$$

因此

$$|C_m - C'_m| \leqslant \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' |C_{m+nt}|,$$

此处 $\sum'$ 表示除去 $t=0$ 这一項. 因此

$$\left| \sum_{m=-n'}^{n'} (C_m - C'_m) e^{imx} \right| \leqslant \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' |C_{m+nt}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m=-n'}^{n'} \sum_{t=-\infty}^{\infty}{}' \frac{C}{|m+nt|^r} = 2C \sum_{l=n'+1}^{\infty} \frac{1}{l^r} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2C}{(r-1)n'^r}. \tag{9}$$

(任一整数 l 可以唯一地表成为 $nt+m(|m| \leqslant n')$ 的形式, 但 $t \neq 0$, 所以从所有的整数中除去适合于 $|l| \leqslant n'$ 之諸整数, 故得所云.)

因此, 由 (7), (8), (9) 可得

$$|f(x) - S_n(x)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.$$

定理証完.

附記 1. 由定理 1 的証明可知, 定理 1 还可以改为: 假如 $f(x)$ 有周期 2π, 且有絕对收斂的 Fourier 級数

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{imx}, \quad |C_m| < \frac{C}{|m|^\alpha} \ (\alpha > 1),$$

则

$$|f(x)-S_n(x)|<\frac{4C}{(\alpha-1)n'^{\alpha-1}}.$$

有时为了减少計算量，在有了 n 个数据 $y_l=f\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(-n'\leqslant\leqslant l\leqslant n')$ 之后，我們只希望計算 $2k+1$ 个系数 $C'_m(|m|\leqslant k)$，此处 $k<n'$. 算法如下：定出 $C'_m(|m|\leqslant k)$ 来使

$$\sum_{l=-n'}^{n'}\left|y_l-\sum_{m=-k}^{k}C'_m e^{2\pi ilm/n}\right|^2$$

取最小值。

$$\sum_{l=-n'}^{n'}\left|y_l-\sum_{m=-k}^{k}C'_m e^{2\pi ilm/n}\right|^2=$$

$$=\sum_{l=-n'}^{n'}\left(y_l-\sum_{q=-k}^{k}C'_q e^{2\pi ilq/n}\right)\left(\bar{y}_l-\sum_{r=-k}^{k}\bar{C}'_r e^{-2\pi ilr/n}\right)=$$

$$=\sum_{l=-n'}^{n'}|y_l|^2+n\sum_{m=-k}^{k}|C'_m|^2-\sum_{q=-k}^{k}\sum_{l=-n'}^{n'}\bar{y}_l C'_q e^{2\pi ilq/n}-$$

$$-\sum_{r=-k}^{k}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\bar{C}'_r e^{-2\pi ilr/n}=$$

$$=n\sum_{m=-k}^{k}\left(C'_m-\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}\right)\left(\bar{C}'_m-\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}\bar{y}_l e^{2\pi ilm/n}\right)+$$

$$+\sum_{l=-n'}^{n'}|y_l|^2-\frac{1}{n}\sum_{m=-k}^{k}\left|\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}\right|^2\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{l=-n'}^{n'}|y_l|^2-\frac{1}{n}\sum_{m=-k}^{k}\left|\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}\right|^2,$$

此处等号成立之充要条件为

$$C'_m=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}.$$

因此仍用

$$S_{2k+1}(x)=\sum_{m=-k}^{k}C'_m e^{imx},\quad C'_m=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}\qquad(10)$$

来逼近 $f(x)$.

在定理 1 的条件下，与定理 1 的証明相仿，可得

$$|f(x)-S_{2k+1}(x)|<\frac{2C}{(r-1)}\left(\frac{1}{n'^{r-1}}+\frac{1}{k^{r-1}}\right).$$

这就建議我們，如果只計算 $2k+1$ 項，最好少用一些数据.

在实际計算的时候，$S_n(x)$ 有以下的表达式

$$S_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}-\pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)}. \tag{11}$$

这式子的証明如下：

$$S_n(x)=\sum_{m=-n'}^{n'}C'_m e^{imx}=\frac{1}{n}\sum_{m=-n'}^{n'}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l e^{-2\pi ilm/n}e^{imx}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\sum_{m=-n'}^{n'}e^{im(x-2\pi l/n)}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\frac{\sin\left(n'+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l\frac{\sin\left(\frac{nx}{2}-\pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)}.$$

如果 $f(x)$ 是一个以 2π 为周期的实函数，則

$$S_n(x)=\sum_{m=-n'}^{n'}C'_m e^{imx}=$$

$$=C'_0+\sum_{m=1}^{n'}(C'_m e^{imx}+C'_{-m}e^{-imx}),$$

这里

$$C'_0=\frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'}y_l=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_l=\frac{a_0}{2}$$

$$C'_m = \frac{1}{n}\sum_{l=-n'}^{n'} y_l e^{-2\pi i l m/n} =$$

$$= \frac{1}{n}\left(\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos\frac{2\pi l m}{n} - i\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi l m}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(a'_m - b'_m i),$$

$$C'_{-m} = \frac{1}{2}(a'_m + b_m i).$$

因此

$$C'_m e^{imx} + C'_{-m} e^{-imx} =$$

$$= \frac{1}{2}(a'_m - b'_m i)(\cos mx + i\sin mx) +$$

$$+ \frac{1}{2}(a'_m + b_m i)(\cos mx - i\sin mx) =$$

$$= a'_m \cos mx + b'_m \sin mx.$$

因此

$$S_n(x) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{m=1}^{n'}(a'_m \cos mx + b'_m \sin mx), \tag{12}$$

此处

$$a'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos\frac{2\pi l m}{n},$$

$$b'_m = \frac{2}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin\frac{2\pi l m}{n}. \tag{13}$$

这就是实数形式的有限 Fourier 級数。

定理 2. 如果 $f(x)$ 为在 $[0, 2\pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商的实函数，各阶微商都有周期 2π，且 $|f^{(r)}(x)| < C$，則

$$\left|f(x) - \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1} y_l \frac{\sin\left(\frac{1}{2}nx - \pi l\right)}{\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{2\pi l}{n}\right)}\right| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{14}$$

附記 2. 如果分点不是等距离的，即已知

$$y_i = f(x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n(= 2n' + 1),$$

則可由联立方程組

$$y_i = \frac{a_0'}{2} + \sum_{l=1}^{n'} (a_l' \cos l x_i + b_l' \sin l x_i), \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

$$y = f(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{l=1}^{n'} (a_l' \cos l x + b_l' \sin l x)$$

中消去 a_0', a_l', b_l' 而得出 y 与 $y_1, \cdots, y_n$ 的关系，因而問題归結为解联立方程組的問題了．讀者請自己研究当分点个数为偶数的情况．

附記 3. 有些书上利用矩形公式来近似計算定义 a_m 与 b_m 的积分．因此得出

$$a_m \doteq a_m' = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \cos \frac{2\pi l m}{n},$$

$$b_m \doteq b_m' = \frac{2}{n} \sum_{l=0}^{n-1} y_l \sin \frac{2\pi l m}{n}.$$

然后用

$$S_{2r+1}(x) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{m=1}^{r} (a_m' \cos mx + b_m' \sin mx)$$

来逼近 $f(x)$．虽然用这一方法得出的 $S_{2r+1}(x)$ 的表达式仍无两样，但由于

$$a_m' = a_{m+n}', \quad b_m' = b_{m+n}',$$

所以級数

$$\frac{a_0'}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m' \cos mx + b_m' \sin mx)$$

是发散的（除非 $a_1' = \cdots = a_n' = b_1' = \cdots = b_n' = 0$）．因此取 Fourier 級数的項数愈多，变化亦愈大．如果原来的函数 $f(x)$ 有一定的光滑性（例如有連續的高阶微商等），用这个方法来处理，当項数算多了，偏差反而会更大．换言之，这个方法容易使人产生引入迷途的可能性——謬以为項数愈多愈精密．另一方面，当給了几个离散的数据时，亦不必用連續性的方法来处理．

§ 9. Laplace 方程的 Dirichlet 問題

方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1}$$

称为 Laplace 方程，它的极坐标形式是

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0. \tag{2}$$

所謂单位圓(以原点为中心、以 1 为半径的圓)的 Dirichlet 問題是：

給予一以 2π 为周期的函数 $\varphi(\theta)$，求出一函数 $u(\rho,\theta)$ 使其在单位圓內适合方程式(2)，而且满足

$$\lim_{\substack{\rho\to 1-0\\ \theta\to\theta_0}} u(\rho,\theta)=\varphi(\theta_0). \tag{3}$$

关系(3)称为边界条件.

显而易見

$$\rho^n\cos n\theta,\quad \rho^n\sin n\theta$$

适合于(2)，而且以 $\varphi(\theta)=\cos n\theta$, $\sin n\theta$ 为边界条件. 由这一事实立刻可以設想：如果 $\varphi(\theta)$ 有 Fourier 展开式

$$\varphi(\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}(a_l\cos l\theta+b_l\sin l\theta), \tag{4}$$

此处

$$a_l=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\cos l\theta\,d\theta,$$

$$b_l=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\theta)\sin l\theta\,d\theta, \tag{5}$$

則可望

$$u(\rho,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{l=1}^{\infty}(a_l\cos l\theta+b_l\sin l\theta)\rho^l \tag{6}$$

就是我們所要求的 Dirichlet 問題的解。

假如 $\varphi(\theta)$ 有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商，則 $|a_l| \leqslant \frac{2C}{l^r}$, $|b_l| \leqslant \frac{2C}{l^r}$, 此处 $C = \sup\limits_{0 \leqslant \theta < 2\pi} |\varphi^{(r)}(\theta)|$. 所以 (4) 与 (6) 都一致收斂，容易直接检驗 $u(\rho, \theta)$ 确实适合(2)与(3)，卽(6)的确表示 Dirichlet 問題的解答。

如果积分 (5) 不好求，或者 $\varphi(\theta)$ 是由实驗数据而得的，也就是仅仅知道在若干点的函数值．因而用数值积分法将区間$[0, 2\pi]$分成 n 分，然后用以下的方法得出 Dirichlet 問題的解来：先求

$$a_l \doteq \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \cos\frac{2\pi m l}{n},$$

$$b_l \doteq \frac{2}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2\pi m}{n}\right) \sin\frac{2\pi m l}{n},$$

再求

$$u(\rho, \theta) \doteq \frac{a_0}{2} + \sum_{l=1}^{N} (a_l \cos l\theta + b_l \sin l\theta)\rho^l. \tag{7}$$

如果沒有理論指导，也許有人会誤認为N大些，精密些，卽多算几項更精密些．实質上，这种“劳动”不仅无益，反而有害．或許有人認为下面的方法更深刻些：将(5)代入(6)式得

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\psi)d\psi + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\rho^l}{\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\psi)(\cos l\theta \cos l\psi +$$

$$+ \sin l\theta \sin l\psi)d\psi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\psi)\left(1 + 2\sum_{l=1}^{\infty} \rho^l \cos l(\theta - \psi)\right)d\psi.$$

由于

$$1 + 2\sum_{l=1}^{\infty} \rho^l \cos l\tau = R\left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} \rho^l e^{i\tau l}\right) =$$

$$= \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos\tau + \rho^2}, \tag{8}$$

所以得 Poisson 公式

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\psi) \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2} d\psi,$$

因而希望数值积分

$$\tilde{S}_n(\rho,\theta) = \frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos\left(\theta-\frac{2\pi l}{n}\right)+\rho^2} \tag{9}$$

能逼近 $u(\rho, \theta)$，或者希望

$$S_n^*(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\int_{\frac{2\pi l}{n}}^{\frac{2\pi(l+1)}{n}}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}d\psi \tag{10}$$

能逼近 $u(\rho, \theta)$. 有人也許以多种理由来說明这二方法的优越性. 例如这二方法比前法簡单些，前者要計算 $2N+1$ 个数值积分，而現在只要計算一个；前一方法只考慮到某一 N，而后二方法实质上已經考慮到"$N=\infty$"。当然还可能有这种說法：从微分方程的理論来看，后法比較深些，或者我們可証明它的某种空間的逼近性等等. 但事实上，我們将闡明这些方法都不比以下的初等方法好些.

用 §8 的办法算出(命 $n=2n'+1$)

$$a_l' = \frac{2}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\cos\frac{2\pi ml}{n},$$

$$b_l' = \frac{2}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\sin\frac{2\pi ml}{n}, \tag{11}$$

而用

$$S_n(\rho, \theta) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{l=1}^{n'}(a_l'\cos l\theta + b_l'\sin l\theta)\rho^l \tag{12}$$

作为 $u(\rho, \theta)$ 的近似解.

定理 1. 如果 $\varphi(\theta)$ 是以 2π 为周期的函数，有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商，并且 $|\varphi^{(r)}(\theta)| < C$，则

$$|u(\rho, \theta) - S_n(\rho, \theta)| < \frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}. \tag{13}$$

証. 由定理 8.1[1] 已知

1) 定理 8.1 是指 §8 中的定理 1，下同.

$$|\varphi(\theta)-S_n(\theta)|<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.$$

由 Poisson 公式

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}(\varphi(\psi)-S_n(\psi))d\psi=$$
$$=u(\rho,\theta)-S_n(\rho,\theta),$$

因此得出$\left(由于\dfrac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}\geqslant 0\right)$

$$|u(\rho,\theta)-S_n(\rho,\theta)|<$$
$$<\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}d\psi=$$
$$=\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1+2\sum_{t=1}^{\infty}(\cos n\theta\cos n\psi+\right.$$
$$\left.+\sin n\theta\sin n\psi)\right)d\psi=\frac{4C}{(r-1)n'^{r-1}}.$$

定理証完.

我們还可以把 $S_n(\rho,\theta)$ 写成更簡单的形式. 由于

$$\sum_{m=-n'}^{n'}e^{imt}\rho^{|m|}=\sum_{m=0}^{n'}e^{imt}\rho^m+\sum_{m=0}^{n'}e^{-imt}\rho^m-1=$$
$$=\frac{1-(\rho e^{it})^{n'+1}}{1-\rho e^{it}}+\frac{1-(\rho e^{-it})^{n'+1}}{1-\rho e^{-it}}-1=$$
$$=\frac{2-2\rho\cos t-2\rho^{n'+1}\cos(n'+1)t+2\rho^{n'+2}\cos n't}{1-2\rho\cos t+\rho^2}-1=$$
$$=\frac{1-\rho^2-2\rho^{n'+1}\cos(n'+1)t+2\rho^{n'+2}\cos n't}{1-2\rho\cos t+\rho^2},\tag{14}$$

所以

$$S_n(\rho,\theta)=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}y_l\sum_{m=-n'}^{n'}e^{im\left(x-\frac{2\pi l}{n}\right)}\rho^{|m|}=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}y_m\times$$
$$\times\frac{1-\rho^2-2\rho^{n'+1}\cos(n'+1)\left(x-\frac{2\pi m}{n}\right)+2\rho^{n'+2}\cos n'\left(x-\frac{2\pi m}{n}\right)}{1-2\rho\cos\left(x-\frac{2\pi m}{n}\right)+\rho^2}.\tag{15}$$

定理 2. 若 $\varphi(\theta)$ 为有周期 2π 的 Riemann 可积函数，且在点 θ 有左右极限 $\varphi(\theta \pm 0)$，则

$$\lim_{\rho \to 1-0} u(\rho, \theta) = \frac{\varphi(\theta+0) + \varphi(\theta-0)}{2} = \Phi(\theta). \qquad (16)$$

特别当 θ 为 $\varphi(\theta)$ 的連續点时，$\Phi(\theta) = \varphi(\theta)$。又若 $\varphi(\theta)$ 为連續函数，则 $u(\rho, \theta)$ 关于 θ 一致地趋于 $\varphi(\theta)$。

証. 命

$$\Phi(\theta, t) = \frac{\varphi(\theta+t) + \varphi(\theta-t)}{2} \quad (t > 0).$$

由于 $\varphi(\theta)$ 为周期函数，所以

$$u(\rho, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\theta+t) \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\theta, t) \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} dt,$$

$$u(\rho, \theta) - \Phi(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\Phi(\theta, t) - \Phi(\theta)) \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} dt.$$

由假定可知，对于 $\varepsilon > 0$，存在 $\eta > 0$，当 $0 < t < \eta$ 时

$$|\Phi(\theta, t) - \Phi(\theta)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

否则

$$|\Phi(\theta, t) - \Phi(\theta)| < C,$$

此处 C 为一絕对常数。所以

$$|u(\rho, \theta) - \Phi(\theta)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{\eta} |\Phi(\theta, t) - \Phi(\theta)| \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{\eta}^{\pi} |\Phi(\theta, t) - \Phi(\theta)| \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos t+\rho^2} dt + \frac{C}{\pi}\int_{\eta}^{\pi} \frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos t+\rho^2} dt <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{C(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\eta+\rho^2}.$$

取 $\delta = \delta(\eta)$ 充分小，使当 $1-\delta < \rho < 1$ 时

$$\frac{C(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\eta+\rho^2}<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此当 $1-\delta<\rho<1$ 时

$$|u(\rho,\theta)-\Phi(\theta)|<\varepsilon.$$

又当 $\varphi(\theta)$ 为連續函数时，則在区間 $[0, 2\pi]$ 中一致連續，卽上述之 η 与 θ 无关。換言之，$u(\rho,\theta)$ 一致地趋于 $\varphi(\theta)$。定理証完。

現在我們来討論用 $\tilde{S}_n(\rho,\theta)$ 与 $S_n^*(\rho,\theta)$ 来逼近 $u(\rho,\theta)$的情况。考虑条件(3)，当 $\rho\to 1-0$ 时

$$\tilde{S}_n(\rho,\theta)=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)+\rho^2}\to$$

$$\to\begin{cases}0, \text{当 } \theta\neq\frac{2\pi l}{n} \text{ 或 } \theta=\frac{2\pi l}{n}, \varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)=0, 0\leqslant l\leqslant n-1;\\ \infty, \text{当 } \theta=\frac{2\pi l}{n}, \varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\neq 0, 0\leqslant l\leqslant n-1.\end{cases}$$

因此用 $\tilde{S}_n(\rho,\theta)$ 来逼近 $u(\rho,\theta)$ 是十分荒謬的。

再看一下，实际上 $S_n(\rho,\theta)$ 是 $\tilde{S}_n(\rho,\theta)$ 展开式的一部分，卽

$$\tilde{S}_n(\rho,\theta)=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty}\rho^m\cos\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)\right)=$$

$$=\frac{a_0'}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m'\cos m\theta+b_m'\sin m\theta)\rho^m$$

的前 $1+n'$ 項。附記 8.3 已說明这一級数当 $\rho=1$ 时是发散的。因此作近似計算时，計算的項数过多，不仅无益，反而会导致更大的誤差。換言之，公式(7)中的N取得很大（相对于分点 n 来說）亦是不妥的。

下面我們討論用 $S_n^*(\rho,\theta)$ 逼近 $u(\rho,\theta)$ 的情况。由于

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho^m\sin m\theta}{m}=R\left(-i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\rho e^{i\theta})^m}{m}\right)=$$

$$=R(i\log(1-\rho e^{i\theta}))=\operatorname{tg}^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta},$$

所以

$$S_n^*(\rho,\theta)=\sum_{l=0}^{n-1}\frac{\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}{2\pi}\int_{\frac{2\pi l}{n}}^{\frac{2\pi(l+1)}{n}}\frac{(1-\rho^2)}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}d\psi=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{m=1}^{\infty}\left[\sin m\left(\frac{2\pi(l+1)}{n}-\theta\right)-\sin m\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)\right]\frac{\rho^m}{m}=$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)+\frac{1}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\left(\varphi\left(\frac{2\pi(l-1)}{n}\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\right)\operatorname{tg}^{-1}\frac{\rho\sin\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)}{1-\rho\cos\left(\frac{2\pi l}{n}-\theta\right)}.$$

1) 取 $\theta=C(1-\rho)^{\alpha}\left(\alpha>\frac{1}{2}\right)$,则

$$\lim_{\rho\to1-0}\operatorname{tg}^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}=\lim_{\rho\to1-0}\operatorname{tg}^{-1}C(1-\rho)^{\alpha-1}.$$

换言之，当 $\rho\to1-0,\theta\to\pm0$ 时，$\operatorname{tg}^{-1}\frac{\rho\sin\theta}{1-\rho\cos\theta}$ 可以趋于区間 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 中任意値。

因此，若 $\theta_0=\frac{2\pi l}{n}$，而 $\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)\neq\varphi\left(\frac{2\pi(l-1)}{n}\right)(0\leqslant l\leqslant\leqslant n-1)$，則当 $\rho\to1-0,\theta\to\theta_0$ 时，$S_n^*(\rho,\theta)$ 的极限不存在。所以用 $S_n^*(\rho,\theta)$ 逼近 $u(\rho,\theta)$，当考虑到边界条件时，只能給趋限方法以限制，例如规定趋限是延着向径的方向，則由定理 2 可知

$$\lim_{\rho\to1-0}S_n^*(\rho,\theta)=\begin{cases}\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right),\ 若\ \frac{2\pi l}{n}<\theta<\frac{2\pi(l+1)}{n};\\ \dfrac{\varphi\left(\frac{2n(l-1)}{n}\right)+\varphi\left(\frac{2\pi l}{n}\right)}{2},\end{cases}$$

$$\text{若 } \theta=\frac{2\pi l}{n},\ 0<l\leqslant n-1.$$

2）現在研究一下誤差間題，取

$$\varphi(\theta)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin m\theta}{m^5},$$

則当 $n\geqslant 10$ 时

$$\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right)-\varphi(0)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi}{n}}{m^5}\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{m\leqslant\left[\frac{n}{4}\right]}\frac{\frac{\pi m}{n}-\frac{1}{6}\left(\frac{\pi m}{n}\right)^3}{m^5}-\sum_{m\geqslant\left[\frac{n}{4}\right]+1}\frac{1}{m^5}>\frac{1}{n}.$$

所以 $S_n^*\left(\rho,\frac{\pi}{n}\right)\to\varphi(0)<\varphi\left(\frac{\pi}{n}\right)-\frac{1}{n}$（当 $\rho\to 1-0$）．因此 $|u(\rho,\theta)-S_n^*(\rho,\theta)|$ 的阶不低于 $\frac{1}{n}$．故当边界値較光滑时，用 $S_n(\rho,\theta)$ 来逼近 $u(\rho,\theta)$，旣比 $S_n^*(\rho,\theta)$ 精密，而且表达式亦比較簡单．

附記 1． 如果区域不是单位圓，而是任意有光滑周界的有界单連通域．当給了 $n=2n'+1$ 个边界値 $u(\rho_i,\theta_i)(1\leqslant i\leqslant n)$ 后，則可以由联立方程組

$$\begin{cases}\dfrac{a_0'}{2}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n'}(a_m'\cos m\theta_i+b_m'\sin m\theta_i)\rho_i^m=u(\rho_i,\theta_i),\ 1\leqslant i\leqslant n,\\[2ex]\dfrac{a_0'}{2}+\displaystyle\sum_{m=1}^{n'}(a_m'\cos m\theta+b_m'\sin m\theta)\rho^m=u(\rho,\theta)\end{cases}$$

中消去 a_0', a_m', $b_m'(1\leqslant m\leqslant n')$ 而得出 $u(\rho,\theta)$ 与 $u(\rho_i,\theta_i)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的关系．

附記 2． 一般解边界値間題的方法为先将微分方程变为相应的差分方程，即变为一个綫性方程組，然后用代数方法或 Monte Carlo 方法来解这个方程組．关于这两个方法的介紹与比較，将于另文发表（請見拙著“連續与离散”（将发表））．

§ 10. 热传导方程

我們再举一个例子来說明：如果不加思索，高深的方法往往会把問題解得更粗糙。

我們考虑抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

在矩形

$$(Q) \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2}$$

上的解，即寻求一个在 (Q) 上連續的函数，并且适合于初始条件

$$u(0, x) = \varphi(x) \tag{3}$$

及边界条件

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 \tag{4}$$

的 $u(t, x)$。

显然

$$e^{-k^2 t} \sin kx$$

是适合(1)及(4)的解。因此，可以希望

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t} \sin kx \tag{5}$$

仍适合于(1)及(4)。命 $t = 0$ 得

$$u(0, x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx = \varphi(x). \tag{6}$$

因之，如果給了一个在区間 $[0, \pi]$ 上定义的函数 $\varphi(x)$，我們定义 $\varphi(-x) = -\varphi(x)$。这样 $\varphi(x)$ 便有一 Fourier 級数

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin kx,$$

此处

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(x)\sin kx\,dx.$$

而可以盼望，我們的解就是

$$u(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-k^2 t}\sin kx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\pi \varphi(y)\sin ky\cdot e^{-k^2 t}\sin kx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(y)\left(\vartheta_3\left(\frac{x-y}{2}, e^{-t}\right) -\right.$$

$$\left. - \vartheta_3\left(\frac{x+y}{2}, e^{-t}\right)\right)dy, \tag{7}$$

这里

$$\vartheta_3(z,q) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} q^{k^2}\cos 2kz \tag{8}$$

是有名的 Jacobi theta 函数(見[11],第二十一章).

与上节同样可知,用数值积分法求积分 (7) 是大謬不然的,还不如初等方法来得好些,也就是从 n 个数据

$$\varphi\left(\frac{\pi l}{n}\right) \quad (0 \leqslant l \leqslant n-1)$$

出发,求出有限 Fourier 級数

$$\varphi(x) \sim \sum_{k=1}^{n} c_k' \sin kx, \tag{9}$$

此处

$$c_k' = \frac{2}{\pi}\sum_{l=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{\pi l}{n}\right)\sin\frac{k\pi l}{n}. \tag{10}$$

而

$$\sum_{k=1}^{n} c_k' e^{-k^2 t}\sin kx \tag{11}$$

是解的更好的逼近.

定理 1. 命 $\varphi(x)$ 在区間 $[0,\pi]$ 中有 $r(\geqslant 2)$ 阶連續微商,各

阶微商在 $x=0$ 及 π 的值均为零，且 $|\varphi'(\theta)|<c$，則方程 (1) 在 (Q) 上适合条件 (3), (4) 的解 $u(t,x)$ 滿足

$$\left|u(t,x)-\sum_{k=1}^{\infty}c'_k e^{-k^2t}\sin kx\right|<\frac{8}{\pi(r-1)(n-1)^{r-1}}. \tag{12}$$

請讀者自己証明，幷仿照上节討論一下。

§11. 一 致 分 布

命 G_s 表示 s 維空間的单位方体

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 1, \cdots, 0 \leqslant x_s \leqslant 1. \tag{1}$$

定义. 命 $P_k = (x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)})$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 是 G_s 中的一个点列. 对任意 $(a_1, \cdots, a_s) \in G_s$, 命 $N_n(a_1, \cdots, a_s)$ 表示 $P_1, \cdots, P_n$ 中适合諸不等式

$$x_1^{(k)} < a_1, \cdots, x_s^{(k)} < a_s$$

的点 P_k 的个数. 如果常有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(a_1, \cdots, a_s)}{n} = a_1 \cdots a_s, \tag{2}$$

則称点列 $P_k(k = 1, 2, \cdots)$ 在 G_s 上一致分布.

一致分布有如下的判断条件:

定理 1 (Weyl)[12]. 一点列 $P_k(k = 1, 2, \cdots)$ 在 G_s 上是一致分布的充要条件, 是对任意 G_s 上可以 Riemann 求积的函数 $f(x_1, \cdots, x_s)$ 常有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_1^{(1)}, \cdots, x_s^{(1)}) + \cdots + f(x_1^{(n)}, \cdots, x_s^{(n)})}{n} =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s. \tag{3}$$

証. 我們仅对 $s = 1$ 来証明这一結果, 对于 $s > 1$ 的情形是类似的.

先証明, 如果 $\{P_k\}$ 是一致分布, 則 (3) 式成立.

1) 取 $f(x)$ 是如下的函数

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{若} \quad 0 \leqslant x \leqslant a; \\ 0, & \text{不然}; \end{cases}$$

則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x^{(1)})+\cdots+f(x^{(n)})}{n}=c\lim\frac{N_n(a)}{n}=$$

$$=ca=\int_0^1 f(x)dx.$$

所以,对于这样的函数 $f(x)$, 定理眞实.

2) 如果 (3) 式对 $f_1,\cdots,f_n$ 成立,则对 $C_1f_1+\cdots+C_nf_n$ 也成立,因此 (3) 式对所有的阶梯函数也眞实.

3) 习知,如果 $f(x)$ 是一 Riemann 可积函数,则任給 $\varepsilon>0$, 能有二阶梯函数 $\varphi_\varepsilon(x)$, $\Phi_\varepsilon(x)$ 使

$$\varphi_\varepsilon(x)\leqslant f(x)\leqslant\Phi_\varepsilon(x),\quad 0\leqslant x\leqslant 1, \tag{4}$$

且使

$$\int_0^1(\Phi_\varepsilon(x)-\varphi_\varepsilon(x))dx<\varepsilon.$$

由 2) 已知本定理对 $\Phi_\varepsilon(x)$ 及 $\varphi_\varepsilon(x)$ 眞实,所以

$$\int_0^1\varphi_\varepsilon(x)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\varphi_\varepsilon(x^{(1)})+\cdots+\varphi_\varepsilon(x^{(n)}))\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(f(x^{(1)})+\cdots+f(x^{(n)}))\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\Phi_\varepsilon(x^{(1)})+\cdots+\Phi_\varepsilon(x^{(n)}))=$$

$$=\int_0^1\Phi_\varepsilon(x)dx.$$

又由 (4) 可知

$$\int_0^1\varphi_\varepsilon(x)dx\leqslant\int_0^1 f(x)dx\leqslant\int_0^1\Phi_\varepsilon(x)dx.$$

故得

$$\left|\lim_{n\to\infty}\frac{f(x^{(1)})+\cdots+f(x^{(n)})}{n}-\int_0^1 f(x)dx\right|<\varepsilon,$$

这証明了定理的必要部分.

4) 定理的充分部分的証明极为容易,仅取

$$f(x)=\begin{cases}1, & 若\quad 0\leqslant x\leqslant a;\\ 0, & 不然;\end{cases}$$

(3) 式就变为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(a)}{n}=a,$$

定理証完.

把 G_s 看成为 s 維环面更合适. 一維环面 G_1 就是把 $0\leqslant x\leqslant 1$ 的两端接在一起,即成一圈.二維环面 G_2 就是把正方形 $0\leqslant x_1\leqslant 1$, $0\leqslant x_2\leqslant 1$ 的对边看成为合一而成的图形. 具体地說, 把一对对边 (1, 3) 粘上,成一管状面,而 2, 4 各成一管口, 再将 2, 4 粘上, 成一环形(見图 29).

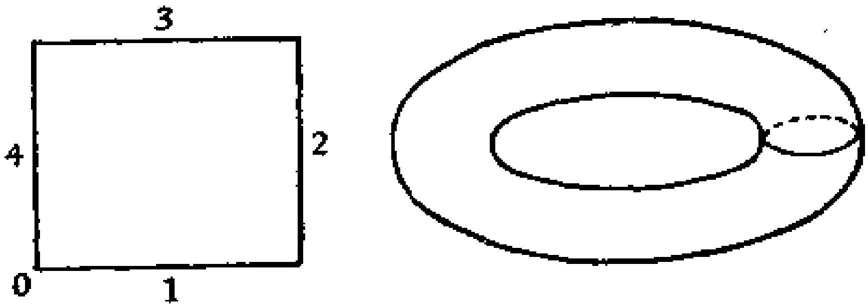

图 29

G_s 也就是把 s 維的单位方体的 $2s$ 个边界面成对地粘在一起,即将

$$(x_1,\cdots,x_{\nu-1},0,x_{\nu+1},\cdots,x_s),$$
$$(x_1,\cdots,x_{\nu-1},1,x_{\nu+1},\cdots,x_s)$$

看成为同一点.

如果单值函数 $f(x_1,\cdots,x_s)$ 的变数 $x_1,\cdots,x_s$ 都以 1 为周期,即

$$f(x_1,\cdots,x_{\nu-1},x_\nu+1,x_{\nu+1},\cdots,x_s)=f(x_1,\cdots,x_s),$$
$$\nu=1,2,\cdots,s.$$

这样的函数可以看成为 s 維环面上所定义的一个单值函数. 最簡单的例子是

$$e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)},$$

这里 $m_1,\cdots,m_s$ 是整数.

命 Q 表示 G_s 上一个区域,及 $N_n(Q)$ 表示 $P_1,\cdots,P_n$ 落在 Q 中的点数. 如果 $P_k(k=1,2,\cdots)$ 是一致分布,則

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(Q)}{n}=A(Q),$$

这里 $A(Q)$ 代表 Q 的容积．这可以在 Weyl 定理中取

$$f(x_1, \cdots, x_s)=\begin{cases}1, & 如果\quad (x_1, \cdots, x_s)\in Q,\\ 0, & 如果\quad (x_1, \cdots, x_s)\bar{\in} Q\end{cases}$$

而得之．因此，一致分布的概念可以看成为：这个数列落在 Q 中的概率与 Q 的容积相同．也可以粗略地説：在 G_s 上的概率分布处处都是一样的．

我們任意取一个点列，任意性保証了我們不对哪一点有所偏爱，因而我們可以盼望它是一致分布的．这建議出求积分的 Monte Carlo 方法，也就是任意取一点列

$$P_1, \cdots, P_k, \cdots,$$

計算

$$\frac{f(x_1^{(1)}, \cdots, x_s^{(1)})+\cdots+f(x_1^{(n)}, \cdots, x_s^{(n)})}{n}.$$

把它作为积分

$$\int\cdots\int_{G_s} f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s$$

的近似値．注意："任意取一点列"不是"取一任意点列"．而所謂任意性实質上就是要保証 $\{P_k\}$ 的一致分布性．近代計算机算得快，因此当 n 充分大时，便可以保証所要求的近似精密度(概率精密度)．

Monte Carlo 方法的实質，在于用点列的随机性来保証(概率)其一致分布性．而数論方法的优点在于排除随机性，而确切地給出一个一致分布的点列，并且給出一致分布得"最均匀"的点列．因而得出来的精确度不再是概率的，而是肯定的．不仅如此，出乎意外地，这些肯定誤差比概率誤差还要精密．

現在先介紹一个定理来說明一致分布的"均匀性"与积分近似計算的精确性之間的关系．

命 $\alpha\geqslant 1$ 为整数．記 G_s 上适合条件

$$\left|\frac{\partial^r f(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_s^{i_s}}\right| < C \qquad (5)$$

的全体函数所构成的函数族为 $H_s^a(C)$，此处 $r \leqslant as$，$0 \leqslant i_j \leqslant a$ $(1 \leqslant j \leqslant s)$ 及 $i_1 + \cdots + i_s = r$.

定理 2 (Соболь[13])． 命 $P_k(k = 1, 2, \cdots)$ 为 G_s 中的一个点列，若

$$\sup_{0\leqslant x_j\leqslant 1}\left|\frac{N_n(x_1, \cdots, x_s)}{n} - x_1\cdots x_s\right| < \varphi(n),$$

则

$$\sup_{f\in H_s^1(C)}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)})\right| \leqslant 2^s C\varphi(n).$$

証． 我們仅对 $s = 2$ 来証明这一結果．对于 $s > 2$ 的情形是完全类似的．

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(1, 1) - (f(1, 1) - f(x_1, 1)) - (f(1, 1) - \\ &\quad - f(1, x_2)) + (f(x_1, x_2) - f(x_1, 1) - f(1, x_2) + f(1, 1)) = \\ &= f(1, 1) - \int_{x_1}^1 f'_{y_1}(y_1, 1)dy_1 - \int_{x_2}^1 f'_{y_2}(1, y_2)dy_2 + \\ &\quad + \int_{x_1}^1\int_{x_2}^1 f''_{y_1y_2}(y_1, y_2)dy_1\,dy_2. \end{aligned} \qquad (6)$$

由于

$$\int_0^1\int_0^1\int_{x_1}^1 f'_{y_1}(y_1, 1)dy_1dx_1dx_2 = \int_0^1\int_0^{y_1} f'_{y_1}(y_1, 1)dx_1dy_1 =$$

$$= \int_0^1 y_1 f'_{y_1}(y_1, 1)dy_1,$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_{x_2}^1 f'_{y_2}(1, y_2)dy_2dx_1dx_2 = \int_0^1 y_2 f'_{y_2}(1, y_2)dy_2,$$

$$\int_0^1\int_0^1\int_{x_1}^1\int_{x_2}^1 f''_{y_1y_2}(y_1, y_2)dy_1dy_2dx_1dx_2 =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 y_1y_2 f''_{y_1y_2}(y_1, y_2)dy_1dy_2,$$

所以由(6)得

$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 = f(1,1) - \int_0^1 y_1 f'_{y_1}(y_1, 1)dy_1 -$$

$$-\int_0^1 y_2 f'_{y_2}(1, y_2)dy_2 + \int_0^1\int_0^1 y_1y_2 f''_{y_1y_2}(y_1, y_2)dy_1dy_2. \quad (7)$$

引入函数

$$K(u) = \begin{cases} 1, & 若 \quad u > 0, \\ 0, & 若 \quad u \leqslant 0, \end{cases}$$

则由(6)可知

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}) = f(1, 1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_1^{(k)}}^1 f'_{y_1}(y_1, 1)dy_1 -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_2^{(k)}}^1 f'_{y_2}(1, y_2)dy_2 +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_1^{(k)}}^1\int_{x_2^{(k)}}^1 f''_{y_1y_2}(y_1, y_2)dy_1dy_2 =$$

$$= f(1,1) - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 K(y_1 - x_1^{(k)})f'_{y_1}(y_1,1)dy_1 -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1 K(y_2 - x_2^{(k)})f''_{y_2}(1, y_2)dy_2 +$$

$$+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\int_0^1 K(y_1 - x_1^{(k)})K(y_2 - x_2^{(k)})f''_{y_1y_2}(y_1, y_2)dy_1dy_2 =$$

$$= f(1,1) - \frac{1}{n}\int_0^1 N_n(y_1, 1)f'_{y_1}(y_1, 1)dy_1 -$$

$$-\frac{1}{n}\int_0^1 N_n(1, y_2)f'_{y_2}(1, y_2)dy_2 +$$

$$+\frac{1}{n}\int_0^1\int_0^1 N_n(y_1, y_2)f''_{y_1y_2}(y_1, y_2)dy_1dy_2. \quad (8)$$

由(7)与(8)即得

$$\left|\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)dx_1dx_2 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_1^{(k)}, x_2^{(k)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \left| \frac{N_n(y_1, 1)}{n} - y_1 \right| \cdot |f'_{y_1}(y_1, 1)| dy_1 +$$

$$+ \int_0^1 \left| \frac{N_n(1, y_2)}{n} - y_2 \right| \cdot |f'_{y_2}(1, y_2)| dy_2 +$$

$$+ \int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{N_n(y_1, y_2)}{n} - y_1 y_2 \right| \cdot |f''_{y_1 y_2}(y_1, y_2)| dy_1 dy_2 <$$

$$< 4C\varphi(n).$$

定理証完。

定理 2 說明了以下的事实：如果我們定义 $\varphi(n)$ 是点列 P_k 的均匀度，則数值积分的問題一变而为求极精确均匀度的数列的問題了。下节中我們将給出一个均匀度十分精确的数列来。

§ 12. 做出高度均匀分布的数列——Halton 定理

对于自然数 $k \leqslant n$ 及 $r > 1$, 若

$$k = k_0 + k_1 r + \cdots + k_M r^M,$$
$$0 \leqslant k_j < r, \quad 0 \leqslant j \leqslant M, \tag{1}$$

则命

$$\varphi_r(k) = k_0 r^{-1} + k_1 r^{-2} + \cdots + k_M r^{-M-1}, \tag{2}$$

此处

$$M = [\log_r n] = \left[\frac{\log n}{\log r}\right].$$

定理 1 (Halton)[14]. 命 p_i 为第 i 个素数,又命 $P_k = (\varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_s}(k))(k = 1, 2, \cdots)$, 则当 $n > p_s$ 时

$$\sup_{0 \leqslant x_j \leqslant 1} \left| \frac{N_n(x_1, \cdots, x_s)}{n} - x_1 \cdots x_s \right| \leqslant 2^s \left(\prod_{i=1}^{s} \frac{p_i}{\log p_i} \right) \frac{\log^s n}{n}.$$

证. 在 $[0, 1]$ 中任取一个 r 进位的无限小数

$$x = 0.a_0 a_1 \cdots a_M \cdots.$$

由 (1), (2) 可見,若 $x > \varphi_r(k)$, 则下面的条件之一必适合

$$a_0 > k_0; \ a_0 = k_0, \ a_1 > k_1; \ \cdots;$$
$$a_0 = k_0, \ \cdots, \ a_{M-1} = k_{M-1}, \ a_M > k_M;$$
$$a_0 = k_0, \ \cdots, \ a_M = k_M. \tag{3}$$

换言之,对于某个 $1 \leqslant m < M + 3$, 有

$$k \equiv a_0 + \cdots + a_{m-2} r^{m-2} + k_{m-1} r^{m-1} (\bmod r^m), \tag{4}$$

此处

$$a_{m-1} > k_{m-1}, \ k_{M+1} = 0.$$

另一方面,对于給定的 x 及 k, 条件(4)中只有一个能被满足. 又对于一个給定的 m, (9)表示 k 属于 $\bmod r^m$ 的 a_{m-1} 个剩余类中的一个(仅当 $m = M + 2$ 时, k 属于 $\bmod r^{M+2}$ 唯一的剩余类). 命 q 为其中的一个, 则在 $1, 2, \cdots, n$ 中, 与 q 同余 $\bmod r^m$ 的个数

为 $\left[\frac{n}{r^m}\right]+\vartheta$，此处 $\vartheta=0$ 或 1.

推广成为多变数. 不妨假定 $x_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 都是无理数,計算在 1, 2, $\cdots$, n 中适合条件組

$$x_i>\varphi_{p_i}(k)\quad(1\leqslant i\leqslant s)$$

的整数 k 的个数. 为此先計算适合同余式組

$$k\equiv q_i(\bmod p^{m_i})\quad(1\leqslant i\leqslant s)^{1)}\tag{5}$$

的整数 k 的个数. 由孙子定理（見 [15], 第二章）可知对于模 $\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{m_i}$，同余式組(5)有唯一的解,因此在 1, 2, $\cdots$, n 中适合(5)的个数为 $\left[\frac{n}{\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{m_i}}\right]+\vartheta$，此处 $\vartheta=0$ 或 1 是随着 $q_1,\cdots,q_s$ 及 $m_1,\cdots,m_s$ 的不同而不同的. 因此,命

$$x_i=\sum_{m=0}^{\infty}a_{i,m}p_i^{-m-1}\quad(1\leqslant i\leqslant s),$$

則

$$N_n(x_1,\cdots,x_s)=\sum_{m_1=1}^{M_1+2}\cdots\sum_{m_s=1}^{M_s+2}\left(\prod_{i=1}^{s}b_{i,m_i-1}\right)\left(\left[\frac{n}{\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{m_i}}\right]+\vartheta\right),$$

此处

$$M_i=\left[\frac{\log n}{\log p_i}\right],\ b_{i,m}=a_{i,m}(0\leqslant m\leqslant M_i),\ b_{i,M_i+1}=1.$$

又显然有

$$nx_1\cdots x_s=\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{s}a_{i,m_i-1}\right)\left(\left[\frac{n}{\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{m_i}}\right]+\left\{\frac{n}{\prod\limits_{i=1}^{s}p_i^{m_i}}\right\}\right),$$

此处 $\{x\}$ 表示 x 的分数部分,即 $\{x\}=x-[x]$. 由于当 $l\geqslant1$ 时常有 $\left[\frac{n}{p_i^{M_i+1}l}\right]=0$，所以

1) "$a\equiv b(\bmod m)$" 的意思是 m 能整除 $a-b$，此处 a, b, m 均为整数, 关于同余式,請参看 [15], 第二章.

$$|N_n(x_1, \cdots, x_s) - nx_1\cdots x_s| = \left|\sum_{m_1=1}^{M_1+2}\cdots\sum_{m_s=1}^{M_s+2}\left(\prod_{i=1}^{s} b_{i,m_i-1}\right)\vartheta -\right.$$

$$\left.-\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{s} a_{i,m_i-1}\right)\left\{\frac{n}{\prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{m_1=1}^{M_1+2}\cdots\sum_{m_s=1}^{M_s+2}\left(\prod_{i=1}^{s} b_{i,m_i-1}\right)\vartheta -\right.$$

$$\left.-\sum_{m_1=1}^{M_1+1}\cdots\sum_{m_s=1}^{M_s+1}\left(\prod_{i=1}^{s} a_{i,m_i-1}\right)\left\{\frac{n}{\prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}}\right\}\right| +$$

$$+\sum_{v=1}^{s}\frac{n}{p_v^{M_v+1}}\sum_{m_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=1}^{\infty}\left(\prod_{i=1}^{s} a_{i,m_i-1}\right)\frac{1}{\prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}} \leqslant$$

$$\leqslant \left|\sum_{m_1=1}^{M_1+2}\cdots\sum_{m_s=1}^{M_s+2}\left(\prod_{i=1}^{s} b_{i,m_i-1}\right)\left(\vartheta - \left\{\frac{n}{\prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}}\right\}'\right)\right| +$$

$$+\sum_{v=1}^{s}\frac{n}{p_v^{M_v+1}}\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i - 1}{p_i\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)},$$

此处当有任意 $m_i = M_i + 2$ 时，$\left\{\frac{n}{\prod_{i=1}^{s} p_i^{m_i}}\right\}' = 0$。因此

$$|N_n(x_1, \cdots, x_s) - nx_1\cdots x_s| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m_1=1}^{M_1+2}\cdots\sum_{m_s=1}^{M_s+2}\left(\prod_{i=1}^{s} b_{i,m_i-1}\right) + s \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{s}\left(\sum_{m_i=1}^{M_i+2} b_{i,m_i-1}\right) + s \leqslant \prod_{i=1}^{s}\left(2 + \sum_{m_i=1}^{M_i+1} a_{i,m_i-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{s}((M_i+1)(p_i-1)+2) \leqslant \prod_{i=1}^{s} 2M_i p_i \leqslant$$

$$\leqslant 2^s\left(\prod_{i=1}^{s}\frac{p_i}{\log p_i}\right)\log^s n.$$

故得定理.

定理 2. 取

$$P_k=\left(\frac{k}{n},\ \varphi_{p_1}(k),\ \cdots,\ \varphi_{p_{s-1}}(k)\right)\quad (1\leqslant k\leqslant n),$$

則当 $n>p_{s-1}$ 时

$$\sup_{0\leqslant x_j\leqslant 1}\left|\frac{N_n(x_1,\cdots,x_s)}{n}-x_1\cdots x_s\right|\leqslant 2^{s-1}\left(\prod_{i=1}^{s-1}\frac{p_i}{\log p_i}\right)\frac{\log^{s-1}n}{n}.$$

証. 不妨假定 $[nx_1]>p_{s-1}$(否則定理显然成立). 由 $\frac{k}{n}<x_1$ 可知仅当 $k=1,2,\cdots,[nx_1]$ 时,下面諸不等式才可能成立:

$$\frac{k}{n}<x_1,\ \varphi_{p_1}(k)<x_2,\ \cdots,\ \varphi_{p_{s-1}}(k)<x_s.$$

因此在定理 1 的証明过程中, 用 nx_1 代 n, $s-1$ 代替 s, 并注意对于所有的正整数 l 常有 $\left[\frac{[nx_1]}{l}\right]=\left[\frac{nx_1}{l}\right]$, 可以看出, 一切的推理都成立, 故得定理.

由定理 1 、定理 2 及定理 11.2 立刻得到

定理 3. 当 $n>p_s$ 时有

$$\sup_{f\in H_s^1(C)}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(\varphi_{p_1}(k),\cdots,\varphi_{p_s}(k))\right|\leqslant$$

$$\leqslant 4^s C\prod_{i=1}^{s}\left(\frac{p_i}{\log p_i}\right)\frac{\log^s n}{n} \tag{6}$$

及

$$\sup_{f\in H_s^1(C)}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s-\right.$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}, \varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_{s-1}}(k)\right)\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{2s-1}C\prod_{i=1}^{s-1}\left(\frac{p_i}{\log p_i}\right)\frac{\log^{s-1} n}{n}. \tag{7}$$

附記 1. 关于 $\left|\frac{N_n(x_1, \cdots, x_s)}{n} - x_1\cdots x_s\right|$ 的下界問題，Roth[16] 証明过，对于任意点列 $P_k = (x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)})$ $(k = 1, 2, \cdots)$，皆存在点 $(x_1, \cdots, x_s) \in G_s$ 使

$$\left|\frac{N_n(x_1, \cdots, x_s)}{n} - x_1\cdots x_s\right| \geqslant \frac{2^{-2s-4}}{(s-1)^{\frac{s-1}{2}}\log^{\frac{s-1}{2}} 2}\cdot\frac{\log^{\frac{s-1}{2}} n}{n}.$$

附記 2. 命 $n = k^s$ 及 $f(x_1, \cdots, x_s) = C\frac{\cos 2\pi k x_1}{2\pi k} \in H_s^1(C)$，則

$$\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\sum_{y_1=1}^{k}\cdots\sum_{y_s=1}^{k} f\left(\frac{y_1}{k}, \cdots, \frac{y_s}{k}\right)\right| =$$

$$= \frac{C}{n}k^{s-1}\left|\sum_{y_1=1}^{k}\frac{\cos 2\pi k\frac{y_1}{k}}{2\pi k}\right| = \frac{C}{2\pi k} = \frac{C}{2\pi n^{1/s}}.$$

換言之，对于函数族 $H_s^1(C)$，用矩形法来近似計算积分，誤差的阶不能比 $1/n^{1/s}$ 更佳。

附記 3. (6) 式的右端可以改进为

$$\frac{C}{2^s n}\prod_{i=1}^{s}\left[(p_i - 1)\frac{\log n}{\log p_i} + p_i + 5\right]. \tag{8}$$

証. 1) 計算积分

$$J = \int_0^1\cdots\int_0^1 |N_n(1, \cdots, x_{i_1}, 1, \cdots, x_{i_t}, \cdots, 1) -$$

$$- n x_{i_1}\cdots x_{i_t}| dx_{i_1}\cdots dx_{i_t}.$$

不妨假定 $x_{i_1} = x_1, \cdots, x_{i_t} = x_t$，則由定理 1 的証明可知

$$|N_n(x_1, \cdots, x_t, 1, \cdots, 1) - nx_1\cdots x_t| \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{t}\left(2 + \sum_{m_i=1}^{M_i+1} a_{i,m_i-1}\right),$$

因此

$$J \leqslant \prod_{i=1}^{t}\left[\int_0^1\left(2 + \sum_{m_i=1}^{M_i+1} a_{i,m_i-1}\right)dx_i\right] =$$
$$= \prod_{i=1}^{t}\left[\sum_b p_i^{-M_i-1}\left(2 + \sum_{m_i=1}^{M_i+1} a_{i,m_i-1}\right)\right],$$

此处求和記号 $\sum_b$ 表示諸 a_{i,m_i-1} 都可以任意取 $0, 1, \cdots, p_i - 1$ 中的一个. 因此和为 $q_i + 2$ 者，共重复 T_{q_i} 次，而 T_{q_i} 为 $(1+z+\cdots+z^{p_i-1})^{M_i+1}$ 的展开式中 z^{q_i} 的系数. 换言之，

$$J \leqslant \prod_{i=1}^{t}\left(p_i^{-M_i-1}\sum_{q_i}(q_i+2)T_{q_i}\right) =$$
$$= \prod_{i=1}^{t} p_i^{-M_i-1}\left[\frac{d}{dz}\left(z^2\sum_{q_i} T_{q_i}z^{q_i}\right)\right]_{z=1} =$$
$$= \prod_{i=1}^{t} p_i^{-M_i-1}\left[\frac{d}{dz}z^2(1+z+\cdots+z^{p_i-1})^{M_i+1}\right]_{z=1} =$$
$$= \prod_{i=1}^{t} p_i^{-M_i-1}[2p_i^{M_i+1}+(M_i+1)p_i^{M_i}(1+\cdots+p_i-1)] =$$
$$= \prod_{i=1}^{t}\left[2+\frac{(M_i+1)(p_i-1)}{2}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \prod_{i=1}^{t}\left[\frac{(p_i-1)}{2}\cdot\frac{\log n}{\log p_i}+\frac{p_i}{2}+\frac{3}{2}\right].$$

2) 由定理 11.2 的証明可見，当 $f \in H_t^1(C)$ 时

$$\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s -\right.$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_s}(k)) \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 |N_n(1, \cdots, x_i, \cdots, 1) - nx_i| dx_i +$$

$$+ \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=i+1}^{s}\int_0^1\int_0^1 |N_n(1, \cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots, 1) -$$

$$- nx_i x_j| dx_i\, dx_j + \cdots +$$

$$+ \frac{C}{n}\int_0^1 \cdots \int_0^1 |N_n(x_1, \cdots, x_s) - nx_1 \cdots x_s| dx_1 \cdots dx_s \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{(p_i - 1)}{2}\frac{\log n}{\log p_i} + \frac{p_i}{2} + \frac{3}{2}\right] +$$

$$+ \frac{C}{n}\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=i+1}^{s}\left[\frac{(p_i - 1)}{2}\cdot\frac{\log n}{\log p_i} + \frac{p_i}{2} + \frac{3}{2}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{(p_j - 1)}{2}\cdot\frac{\log n}{\log p_j} + \frac{p_j}{2} + \frac{3}{2}\right] +$$

$$+ \cdots + \frac{C}{n}\prod_{i=1}^{s}\left[\frac{(p_i - 1)}{2}\cdot\frac{\log n}{\log p_i} + \frac{p_i}{2} + \frac{3}{2}\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{n}\prod_{i=1}^{s}\left(1 + \frac{(p_i - 1)}{2}\cdot\frac{\log n}{\log p_i} + \frac{p_i}{2} + \frac{3}{2}\right) =$$

$$= \frac{C}{2^s n}\prod_{i=1}^{s}\left[(p_i - 1)\frac{\log n}{\log p_i} + p_i + 5\right].$$

类似地，(7)式的右端可以换为

$$\frac{C}{2^{s-1}n}\prod_{i=1}^{s-1}\left[(p_i - 1)\frac{\log n}{\log p_i} + p_i + 5\right]. \tag{9}$$

附記 4. 分布 $\left(\frac{k}{n}, \varphi_2(k)\right)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$由 van der Corput[17] 首先提出，而由 Hammersley[28] 建議把这一分布推广成为 $\left(\frac{k}{n}, \varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_{s-1}}(k)\right)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. 由于这一分布与分

点 n 有关，在实际計算时，带来了一定的不方便．而分布 $(\varphi_{p_1}(k), \cdots, \varphi_{p_s}(k))$ 則是 Halton 所建議的．他并对分布的均匀度作了証明．关于求积公式与分点的关系，請参看 Соболь 的文章 [19—24]．

§ 13. 函数族 $H_s(q, \lambda, C)$ 上的求积公式的 Ω-結果

命 q 为正整数，$0 \leqslant \lambda < 1$ 及 C 为一正常数．記 G_s 上适合下列条件的全体函数所构成的函数类为 $H_s(q, \lambda, C)$.

$f(x_1, \cdots, x_s)$ 的不超过 q 阶的各阶微商都連續，且絕对値不超过 C. f 的 q 阶微商滿足

$$\lim_{y_\nu \to x_\nu} \frac{1}{|y_\nu - x_\nu|^\lambda} \left| \frac{\partial^q f(x_1, \cdots, y_\nu, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial y_\nu^{i_\nu} \cdots \partial x_s^{i_s}} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^q f(x_1, \cdots, x_\nu, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_\nu^{i_\nu} \cdots \partial x_s^{i_s}} \right| \leqslant C, \tag{1}$$

此处 $1 \leqslant \nu \leqslant s$, $i_j \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant s)$, $i_1 + \cdots + i_s = q$.

定理 1 (Бахвалов[25])．任取 G_s 中 n 个点 $P_k = (x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)})$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$，皆存在 $f \in H_s(q, \lambda, C)$ 使

$$\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)}) \right| \geqslant C \cdot c_1(q, \lambda, s) n^{-\frac{q+\lambda}{s}},$$

此处 $c_1(q, \lambda, s)$ 表示仅与 q, λ, s 有关的正常数，以下皆然．

証． 命

$$n_0 = [(2n)^{\frac{1}{s}}] + 1.$$

显然可以取 $c_2(q, \lambda, s)$ 使

$$\psi(x_1, \cdots, x_s) = C \cdot c_2(q, \lambda, s) n_0^{-q-\lambda} \prod_{k=1}^{s} [n_0 x_k (1 - n_0 x_k)]^{q+\lambda}$$

当 $0 \leqslant x_1 \leqslant \frac{1}{n_0}, \cdots, 0 \leqslant x_s \leqslant \frac{1}{n_0}$ 时滿足条件 (1).

命 $Q_1, \cdots, Q_{2n}$ 是下面这些 s 維立方体中任意取 $2n$ 个而得到的:

$$\frac{n_k}{n_0} \leqslant x_k \leqslant \frac{n_k+1}{n_0} (1 \leqslant k \leqslant s, 0 \leqslant n_k < n_0, n_k \text{ 为整数}).$$

考虑 $\varphi_j(x_1, \cdots, x_s)$，它在这些立方体中等于

$$\varepsilon\psi\left(x_1 - \frac{n_1}{n_0}, \cdots, x_s - \frac{n_s}{n_0}\right) \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

而在其他地方的值为零. 由于不同的 ε 的取法，所以 φ_j 共有 2^{2n} 个. 易知 $\varphi_j \in H_s(q, \lambda, C)(1 \leqslant j \leqslant 2^{2n})$.

$\{Q_j\}(1 \leqslant j \leqslant 2n)$ 中至少有 n 个未落入已給的 n 个点 $P_k(k = 1, \cdots, n)$. 不妨假定这 n 个立方体为 $Q_1, \cdots, Q_n$. 取 $\{\varphi_j\}$ 中的两个函数 φ_μ 与 φ_ν，它們具有这样的性質：

$$\begin{cases} \varphi_\mu = -\varphi_\nu, & \text{当} \quad (x_1, \cdots, x_s) \in Q_j (1 \leqslant j \leqslant n); \\ \varphi_\mu = \varphi_\nu, & \text{当} \quad (x_1, \cdots, x_s) \bar{\in} Q_j (1 \leqslant j \leqslant n); \end{cases}$$

则

$$\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_\mu(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.$$
$$\left. - \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_\nu(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s \right| =$$
$$= 2n \int_0^{\frac{1}{n_0}} \cdots \int_0^{\frac{1}{n_0}} \psi(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s =$$
$$= 2n \cdot C \cdot c_2(q, \lambda, s) n_0^{-q-\lambda-s} \left(\int_0^1 y^{q+\lambda}(1-y)^{q+\lambda} dy \right)^s =$$
$$= C \cdot c_3(q, \lambda, s) n \cdot n_0^{-q-\lambda-s} \geqslant 2C \cdot c_1(q, \lambda, s) n^{-\frac{q+\lambda}{s}}$$

及

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_\mu(x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_\nu(x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)}).$$

因此

$$\max\left(\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_\mu(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.\right.$$
$$\left. - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi_\mu(x_1^{(k)}, \cdots, x_s^{(k)}) \right|,$$
$$\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_\nu(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.$$

$$
-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\varphi_\nu(x_1^{(k)},\cdots,x_s^{(k)})\Big|\Big)\geqslant
$$

$$
\geqslant\frac{1}{2}\Big|\int_0^1\cdots\int_0^1\varphi_\mu(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s-
$$

$$
-\int_0^1\cdots\int_0^1\varphi_\nu(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s\Big|=
$$

$$
=C\cdot c_1(q,\lambda,s)n^{-\frac{q+\lambda}{s}}.
$$

定理証完.

附記 1. 易知$H_s(\alpha s,0,C)\subset H_s^\alpha(C)$. 故对于函数类$H_s^\alpha(C)$而言，由$n$个点的函数値的算术平均去逼近函数在$G_s$上的积分，誤差的阶不能比$1/n^\alpha$更佳,从而説明了定理12.3已不能允許再有本質的改进了。

§ 14. 周期函数的积分

在研究周期函数的积分之前，先說明一下，任何非周期函数的积分都可以化为周期函数的积分来計算．詳細言之，当整数 $\alpha \geqslant 2$，$f(x_1, \cdots, x_s) \in H_s^\alpha(C)$ 时，要求构造 $\varphi(x_1, \cdots, x_s) \in H_s^\alpha(c_4(\alpha, s) \cdot C)$，且适合下面两个条件

$$\left.\frac{\partial^r \varphi(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}}\right|_{x_\nu=0} = \left.\frac{\partial^r \varphi(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}}\right|_{x_\nu=1} \tag{1}$$

（此处 $1 \leqslant \nu \leqslant s$，$\alpha - 2 \geqslant i_j \geqslant 0 (1 \leqslant j \leqslant s)$，$i_1 + \cdots + i_s = r$）及

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s = $$
$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s. \tag{2}$$

于是，$\varphi(\{x_1\}, \cdots, \{x_s\})$ 及其各变数皆不超过 $\alpha - 2$ 次的微商都是各变数均有周期 1 的連續函数．

1）取[26,27]

$$\tau(x) = (2\alpha - 1)\binom{2(\alpha-1)}{\alpha-1}\int_0^x t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt =$$
$$= (2\alpha-1)\binom{2(\alpha-1)}{\alpha-1}\left(\frac{x^\alpha}{\alpha} - \frac{\binom{\alpha-1}{1}x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \right.$$
$$\left. + \cdots + (-1)^{\alpha-1}\frac{\binom{\alpha-1}{\alpha-1}x^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}\right), \tag{3}$$

显然 $\tau(x)$ 是 $[0, 1]$ 中的递增函数，且

$$\tau(0) = 0,$$
$$\tau(1) = \frac{(2\alpha-1)!}{(\alpha-1)!(\alpha-1)!} \cdot \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(2\alpha)} = 1,$$

命

$$\varphi(x_1, \cdots, x_s) = f(\tau(x_1), \cdots, \tau(x_s))\tau'(x_1)\cdots\tau'(x_s), \quad (4)$$

則

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s =$$

$$= \int_0^1\cdots\int_0^1 \varphi(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s.$$

又由于 $\left.\frac{d^v\tau(x)}{dx^v}\right|_{x=0或1} = 0(1 \leqslant v \leqslant \alpha - 2)$, 所以

$$\left.\frac{\partial^r\varphi(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_s^{i_s}}\right|_{x_v=0或1} = 0,$$

此处 $1 \leqslant v \leqslant s$, $\alpha - 2 \geqslant i_j \geqslant 0(1 \leqslant j \leqslant s)$, $i_1 + \cdots + i_s = r$.

因此条件 (1) 与 (2) 皆满足.

2) 取[26]

$$\varphi_v(x_1, \cdots, x_s) = \varphi_{v-1}(x_1, \cdots, x_s) +$$

$$+ \sum_{r_v=0}^{\alpha-2} b_{r_v+1}(x_v) \sum_{\varepsilon_v=0}^{1} (-1)^{\varepsilon_v} \frac{\partial^{r_v}\varphi_{v-1}(x_1, \cdots, \varepsilon_v, \cdots, x_s)}{\partial x_v^{r_v}}$$

$$(1 \leqslant v \leqslant s), \quad (5)$$

此处

$$\frac{\partial^{r_v}\varphi_{v-1}(x_1, \cdots, \varepsilon_v, \cdots, x_s)}{\partial x_v^{r_v}} =$$

$$= \left.\frac{\partial^{r_v}\varphi_{v-1}(x_1, \cdots, x_v, \cdots, x_s)}{\partial x_v^{r_v}}\right|_{x_v=\varepsilon_v},$$

$\varphi_0(x_1, \cdots, x_s) = f(x_1, \cdots, x_s)$ 及 $b_v(x)$ 表示 Euler 函数 (見 § 1).

命

$$\varphi(x_1, \cdots, x_s) = \varphi_s(x_1, \cdots, x_s), \quad (6)$$

則 $\varphi(x_1, \cdots, x_s)$ 卽适合条件(1), (2).

事实上, 由于 $b_v(x)$ 的周期性, 所以

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 \varphi_v(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_{v-1}(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s +$$

$$+ \sum_{r_v=0}^{\alpha-2} \int_0^1 b_{r_v+1}(x_v) dx_v \cdot \sum_{\varepsilon_v=0}^{1} (-1)^{\varepsilon_v} \cdot$$

$$\cdot \int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\partial^{r_v} \varphi_{v-1}(x_1, \cdots, \varepsilon_v, \cdots, x_s)}{\partial x_v^{r_v}} dx_1 \cdots dx_{v-1} dx_{v+1} \cdots dx_s =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi_{v-1}(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s \quad (1 \leqslant v \leqslant s).$$

因此

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s =$$
$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \varphi(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s.$$

又由于

$$\frac{\partial^r \varphi_1(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}} = \frac{\partial^r \varphi_0(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}} +$$

$$+ \sum_{r_1=i_1-1}^{\alpha-2} b_{r_1-i_1+1}(x_1) \sum_{\varepsilon_1=0}^{1} (-1)^{\varepsilon_1} \frac{\partial^{r-i_1+r_1} \varphi_0(\varepsilon_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{r_1} \partial x_2^{i_2} \cdots \partial x_s^{i_s}}$$

及

$$b_0(x) = 1, \quad b_1(+0) = -\frac{1}{2}, \quad b_1(1-0) = \frac{1}{2},$$

$$b_v(0) = b_v(1) \quad (v \geqslant 2),$$

所以

$$\frac{\partial^r \varphi_1(0, x_2, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}} = \frac{\partial^r \varphi_1(1, x_2, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}}, \tag{7}$$

此处 $0 \leqslant i_j \leqslant \alpha - 2 (1 \leqslant j \leqslant s)$, $i_1 + \cdots + i_s = r$.

类似地，由

$$\frac{\partial^r \varphi_2(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}} = \frac{\partial^r \varphi_1(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}} +$$

$$+ \sum_{r_2=i_2-1}^{\alpha-2} b_{r_2-i_2+1}(x_2) \sum_{\varepsilon_2=0}^{1} (-1)^{\varepsilon_2} \frac{\partial^{r-i_2+r_2} \varphi_1(x_1, \varepsilon_2, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \partial x_2^{r_2} \cdots \partial x_s^{i_s}}$$

可知

$$\frac{\partial^r\varphi_2(x_1,0,\cdots,x_s)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_s^{i_s}}=\frac{\partial^r\varphi_2(x_1,1,\cdots,x_s)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_s^{i_s}}. \tag{8}$$

又由 (7) 式得

$$\frac{\partial^r\varphi_2(0,x_2,\cdots,x_s)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_s^{i_s}}=\frac{\partial^r\varphi_2(1,x_2,\cdots,x_s)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_s^{i_s}}. \tag{9}$$

依次类推,可知

$$\left.\frac{\partial^r\varphi_s(x_1,\cdots,x_s)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_s^{i_s}}\right|_{x_\nu=0}=\left.\frac{\partial^r\varphi_s(x_1,\cdots,x_s)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_s^{i_s}}\right|_{x_\nu=1}, \tag{10}$$

此处 $1\leqslant\nu\leqslant s$, $\alpha-2\geqslant i_j\geqslant 0(1\leqslant j\leqslant s)$, $i_1+\cdots+i_s=r$.

定理 1. 若 $\varphi(x_1,\cdots,x_s)\in H_s^\alpha(C)(\alpha\geqslant 2)$,且适合条件(1)与(2),則 $\varphi(\{x_1\},\cdots,\{x_s\})$ 有絕对收斂的 Fourier 級数

$$\varphi(\{x_1\},\cdots,\{x_s\})=\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum C(m_1,\cdots,m_s)e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)},$$

并且滿足

$$|C(m_1,\cdots,m_s)|\leqslant\frac{c_\zeta(\alpha,s)\cdot C}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^\alpha},$$

此处 $\bar{m}=\max(1,|m|)$.

證. 我們仅就 $s=2$ 来証明这一結果,对于 $s>2$ 的情形是完全类似的. 首先注意,由 (1) 可得

$$\frac{\partial^{2\alpha-3}\varphi(x_1,0)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-2}}=\frac{\partial^{2\alpha-3}\varphi(x_1,1)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-2}}.$$

不妨假定 $m_1\neq 0$, $m_2\neq 0$, 由 (1) 及部分积分得

$$C(m_1,m_2)=\int_0^1\int_0^1\varphi(x_1,x_2)e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}dx_1\,dx_2=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^{2\alpha-2}(m_1m_2)^{\alpha-1}}\int_0^1\int_0^1\frac{\partial^{2\alpha-2}\varphi(x_1,x_2)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-1}}\cdot$$

$$\cdot e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}dx_1\,dx_2=$$

$$=\frac{-1}{(2\pi i)^{2\alpha-1}m_1^\alpha m_2^{\alpha-1}}\int_0^1\left(\frac{\partial^{2\alpha-2}\varphi(1,x_2)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^{2\alpha-2}\varphi(0,x_2)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-1}}\right)e^{-2\pi i m_2x_2}\,dx_2+$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^{2\alpha-1}m_1^{\alpha}m_2^{\alpha-1}}\int_0^1\int_0^1\frac{\partial^{2\alpha-1}\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha-1}}\cdot$$

$$\cdot e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}dx_1\,dx_2=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^{2\alpha}(m_1m_2)^{\alpha}}\left(\frac{\partial^{2\alpha-2}\varphi(1, 1)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-1}}-\frac{\partial^{2\alpha-2}\varphi(1, 0)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^{2\alpha-2}\varphi(0, 1)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-1}}+\frac{\partial^{2\alpha-2}\varphi(0, 0)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha-1}}\right)-$$

$$-\frac{1}{(2\pi i)^{2\alpha}(m_1m_2)^{\alpha}}\int_0^1\left(\frac{\partial^{2\alpha-1}\varphi(1, x_2)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^{2\alpha-1}\varphi(0, x_2)}{\partial x_1^{\alpha-1}\partial x_2^{\alpha}}\right)e^{-2\pi i m_2x_2}dx_2-$$

$$-\frac{1}{(2\pi i)^{2\alpha}(m_1m_2)^{\alpha}}\int_0^1\left(\frac{\partial^{2\alpha-1}\varphi(x_1, 1)}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha-1}}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial^{2\alpha-1}\varphi(x_1, 0)}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha-1}}\right)e^{-2\pi i m_1x_1}dx_1+$$

$$+\frac{1}{(2\pi i)^{2\alpha}(m_1m_2)^{\alpha}}\int_0^1\int_0^1\frac{\partial^{2\alpha}\varphi(x_1, x_2)}{\partial x_1^{\alpha}\partial x_2^{\alpha}}\cdot$$

$$\cdot e^{-2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}dx_1\,dx_2,$$

所以

$$|C(m_1, m_2)|\leqslant\frac{9C}{(2\pi)^{2\alpha}(\bar{m}_1\bar{m}_2)^{\alpha}}.$$

定理証完。

附記 1. 其他化非周期函数的积分为周期函数的积分的方法，請参看 Гельфанд 等[28]的文章。

§15. 一个求积公式

命 $f(x_1, \cdots, x_s)$ 为对每一变数周期皆为 1 的函数，而且有絕对收斂的 Fourier 級数

$$f(x_1, \cdots, x_s) = \sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum C(m_1, \cdots, m_s) e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)}, \quad (1)$$

并假定

$$|C(m_1, \cdots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^a}, \quad (2)$$

此处 $a > 1$，$C > 0$ 都是常数。

記适合上述条件的全体函数 $f(x_1, \cdots, x_s)$ 所构成的函数族为 $E_s^a(C)$。

命 $p > s$ 为奇素数及 $n = p^2$，则由 (1) 可知

$$\sum_{a=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{t}{p}, \frac{at}{p}, \cdots, \frac{a^{s-1}t}{p}\right) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum C(m_1, \cdots, m_s)\sum_{a=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} e^{2\pi i(m_1+m_2a+\cdots+m_sa^{s-1})t/p}.$$

由于

$$\sum_{t=1}^{p} e^{2\pi irt/q} = \begin{cases} q, & 若\quad q|r, \\ 0, & 若\quad q\nmid r, \end{cases}$$

所以

$$\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{t}{p}, \frac{at}{p}, \cdots, \frac{a^{s-1}t}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum C(m_1, \cdots, m_s)\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0 \pmod p \\ 1\leqslant a\leqslant p}} 1,$$

而

$$C(0, \cdots, 0)=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s,$$

因此

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s -$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{t}{p}, \frac{at}{p}, \cdots, \frac{a^{s-1}t}{p}\right)=$$

$$=-\frac{1}{p}\sum{}' C(m_1, \cdots, m_s)\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)\\ 1\leqslant a\leqslant p}} 1,$$

此处 $\sum'$ 表示去掉 $m_1=\cdots=m_s=0$ 一項.

当 $m_1, \cdots, m_s$ 不同时为 p 的倍数时，同余式

$$m_1+m_2a+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p)\quad (1\leqslant a\leqslant p)$$

的解数不超过 $s-1$（見[15]，第二章），否則解数为 p. 故由 (2) 式得

$$\left|-\frac{1}{p}\sum{}' C(m_1, \cdots, m_s)\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)\\ 1\leqslant a\leqslant p}} 1\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(s-1)C}{p}\sum{}'\frac{1}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^a}+C\sum{}'\frac{1}{(\overline{n_1p}\cdots\overline{n_sp})^a}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(s-1)C}{p}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{m}^a}\right)^s+\frac{C}{p}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\overline{m}^a}\right)^s=$$

$$=\frac{sC}{p}(2\zeta(a)+1)^s,$$

这里 $\zeta(a)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$. 故得

定理 1. 命 $p>s$ 为奇素数及 $n=p^2$，則当 $f(x_1, \cdots, x_s)\in E_s^a(C)$ 时

$$\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{n}\sum_{a=1}^{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{a}{p}, \frac{at}{p}, \cdots, \frac{a^{s-1}t}{p}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{s(2\zeta(\alpha)+1)^s C}{p}.$$

附記 1. Коробов[29] 应用完整三角和的估計所得到的函数族 $E_s^\alpha(C)$ 上求积公式，其精密度与定理 1 是相同的. 他所用的分点是

$$\left(\left\{\frac{t}{p^2}\right\}, \left\{\frac{t^2}{p^2}\right\}, \cdots, \left\{\frac{t^s}{p^2}\right\}\right) \quad (1 \leqslant t \leqslant p^2).$$

关于完整三角和的估計在求积公式上的应用，还可以参看 Солодов 的文章[30].

§ 16. Коробов 定理

命 $f(x_1, \cdots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, q 及 $a_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 为整数，则

$$\frac{1}{q}\sum_{t=1}^{q} f\left(\frac{a_1 t}{q}, \cdots, \frac{a_s t}{q}\right) =$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum C(m_1, \cdots, m_s)\frac{1}{q}\sum_{t=1}^{q} e^{2\pi i(a_1 m_1+\cdots+a_s m_s)t/q} =$$

$$= \sum_{a_1 m_1+\cdots+a_s m_s\equiv 0 \pmod q}{\overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}}}\sum C(m_1, \cdots, m_s),$$

所以得

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s - \frac{1}{q}\sum_{t=1}^{q} f\left(\frac{a_1 t}{q}, \cdots, \frac{a_s t}{q}\right) =$$

$$= - \sum_{a_1 m_1+\cdots+a_s m_s\equiv 0 \pmod q}{}' C(m_1, \cdots, m_s).$$

Коробов 定理是說存在怎样的整数 $a_1, \cdots, a_s$ 使用单和来逼近多重积分的誤差最小，即使

$$\left|\sum_{a_1 m_1+\cdots+a_s m_s\equiv 0 \pmod q}{}' C(m_1, \cdots, m_s)\right| \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{a_1 m_1+\cdots+a_s m_s\equiv 0 \pmod q}{}' \frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^\alpha} = C\Omega \text{（定义）} \quad (1)$$

最小。

定理 1. 若 $p > s$ 为奇素数，则对于 $0 < \varepsilon < \alpha - 1$，皆存在 a，当 $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $\cdots$, $a_s = a^{s-1}$ 时

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{t}{p}, \frac{at}{p}, \cdots, \frac{a^{s-1}t}{p}\right)\right| <$$

$$< C(2s)^{\alpha}\left(2\zeta\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)+1\right)^{\alpha s} p^{-\alpha+\varepsilon}.$$

証明之前先証次之引理。

引1. 若 $a_i \geqslant 0$ $(i=1, 2, \cdots)$, $0<\beta \leqslant \gamma$, 級数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{\beta}$ 收斂,則

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

証. 不妨假定 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{\beta}>0$, 則

$$\frac{\left(\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}}=\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i^{\gamma}}{\left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^{\beta}\right)^{\frac{\gamma}{\beta}}}\right\}^{\frac{1}{\gamma}}=$$

$$=\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i^{\beta}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^{\beta}}\right)^{\frac{\gamma}{\beta}}\right\}^{\frac{1}{\gamma}} \leqslant\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{a_i^{\beta}}{\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_j^{\beta}}\right)\right\}^{\frac{1}{\gamma}}=1.$$

引理証完。

定理 1 的証明。 命 a 为当 $1 \leqslant z \leqslant p$, $a_1=1$, $a_2=z$, $\cdots$, $a_s=z^{s-1}$ 时使 Ω 取极小者,則由引 1

$$\min_{1 \leqslant z \leqslant p} \Omega \leqslant\left(\min_{1 \leqslant z \leqslant p} \sum_{m_1+\cdots+m_s z^{s-1} \equiv 0(\bmod p)}' \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{1+\varepsilon/\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{1+\varepsilon/\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant\left(\frac{1}{p} \sum_{z=1}^{p} \sum_{m_1+\cdots+m_s z^{s-1} \equiv 0(\bmod p)}' \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{1+\varepsilon/\alpha}}\right)^{\frac{\alpha}{1+\varepsilon/\alpha}}=$$

$$=\left(\Sigma_1+\Sigma_2\right)^{\frac{\alpha}{1+\frac{\varepsilon}{\alpha}}},$$

此处

$$\Sigma_1=\frac{1}{p} \sum_{z=1}^{p} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_s z^{s-1} \equiv 0(\bmod p) \\ p \mid (m_1, \cdots, m_s)}}' \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^{1+\varepsilon/\alpha}},$$

$$\sum_2 = \frac{1}{p}\sum_{x=1}^{p}\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_s x^{s-1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)\\ p\nmid(m_1,\cdots,m_s)}}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^{1+\varepsilon/\alpha}}.$$

显然

$$\sum_1 = \sum{}' \frac{1}{[(\overline{pn_1})\cdots(\overline{pn_s})]^{1+\varepsilon/\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant s\left(2\zeta\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)+1\right)^s p^{-1-\varepsilon/\alpha},$$

$$\sum_2 = \frac{1}{p}\sum_{p\nmid(m_1,\cdots,m_s)}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^{1+\varepsilon/\alpha}} \sum_{\substack{x=1\\ m_1+\cdots+m_s x^{s-1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)}}^{p} 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s-1}{p}\sum_{p\nmid(m_1,\cdots,m_s)}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s)^{1+\varepsilon/\alpha}} <$$

$$< \frac{s-1}{p}\left(2\zeta\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)+1\right)^s.$$

所以

$$\Omega \leqslant (2s)^{\alpha}\left(2\zeta\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)+1\right)^{\alpha s} p^{\alpha-\varepsilon}.$$

故由 (1) 式即得定理。

下面我們將要改进定理 1。如果 $m_1^0, \cdots, m_s^0$ 是一組适合于

$$a_1 m_1^0 + \cdots + a_s m_s^0 \equiv 0(\mathrm{mod}\ q), \quad |m_i^0| \leqslant \frac{q}{2}$$

的解，則

$$m_1 = m_1^0 + ql_1, \cdots, m_s = m_s^0 + ql_s \tag{2}$$

也是同余式

$$a_1 m_1 + \cdots + a_s m_s \equiv 0(\mathrm{mod}\ q)$$

的解。反之，它的任何一个解也都可以表示成为形式(2)。因此

$$\Omega = \sum_{\substack{a_1 m_1^0+\cdots+a_s m_s^0\equiv 0(\mathrm{mod}\ q)\\ |m_i^0|\leqslant \frac{q}{2}}}{}' \sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_s=-\infty}^{\infty} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{[(\overline{m_1^0+ql_1})\cdots(\overline{m_s^0+ql_s})]^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{\substack{a_1 m_1^0 + \cdots + a_s m_s^0 \equiv 0 (\bmod q) \\ |m_i^0| \leqslant \frac{q}{2}}}' \prod_{i=1}^{s} \left(\sum_{l_i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{m_i^0 + l_i q})^\alpha} \right).$$

引进假定 $(a_i, q) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$，如此则当 $m_1^0, \cdots, m_s^0$ 中有 $s-1$ 个給出，則其他一个唯一地被决定了。

由于

$$\sum_{|m_i^0| \leqslant \frac{q}{2}} \sum_{l_i=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{m_i^0 + l_i q})^\alpha} \leqslant 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + 2\zeta(\alpha)$$

及

$$\sum_{l_i=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{m_i^0 + l_i q})^\alpha} \leqslant 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\left[q\left(l - \frac{1}{2}\right)\right]^\alpha} \leqslant 2\left(\frac{2}{q}\right)^\alpha \zeta(\alpha),$$

可得

$$\left| \Omega - \sum_{\substack{a_1 m_1^0 + \cdots + a_s m_s^0 \equiv 0 (\bmod q) \\ |m_i^0| \leqslant \frac{q}{2}}}' \frac{1}{(\overline{m}_1^0 \cdots \overline{m}_s^0)^\alpha} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{\substack{a_1 m_1^0 + \cdots + a_s m_s^0 \equiv 0 (\bmod q) \\ |m_i^0| \leqslant \frac{q}{2}}} \left(\sum_{l_\nu=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{m_\nu^0 + l_\nu q})^\alpha} \right) \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{\mu=1 \\ \mu \neq \nu}}^{s} \left(\sum_{l_\mu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{m_\mu^0 + l_\mu q})^\alpha} \right) \leqslant$$

$$\leqslant s\left(\frac{2}{q}\right)^\alpha (2\zeta(\alpha) + 1)^s. \tag{3}$$

为方便起見，我們略去上标 0，并且命

$$\Lambda_\alpha = \sum_{\substack{a_1 m_1 + \cdots + a_s m_s \equiv 0 (\bmod q) \\ |m_i| \leqslant \frac{q}{2}}}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^\alpha}, \tag{4}$$

于是得到 s 重积分与单和

$$\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \frac{1}{q} \sum_{t=1}^{q} f\left(\frac{a_1 t}{q}, \cdots, \frac{a_s t}{q}\right) \right|$$

的誤差

$$\leqslant C\left[\Lambda_\alpha + s\left(\frac{2}{q}\right)^\alpha (2\zeta(\alpha)+1)^s\right]. \tag{5}$$

附記 1. 与此相同的方法可以証明:若 q 为奇数,$(a_i, q) = 1$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$, 則对于任意整数 $r \geqslant 1$, 皆有

$$\left|\sum_{\substack{a_1m_1+\cdots+a_sm_s\equiv 0 (\bmod q)\\ |m_j|\leqslant qr}}' \frac{1}{\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s} - \sum_{\substack{a_1m_1+\cdots+a_sm_s\equiv 0 (\bmod q)\\ |m_j|\leqslant \frac{q}{2}}}' \frac{1}{\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s}\right| <$$

$$< \frac{s\,2^{s+1}}{q}\log^s 6qr. \tag{6}$$

定理 2 (Коробов[31,32]). 命 $q = p > s$ 为奇素数,則存在整数 $a(p\nmid a)$ 使

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s -\right.$$

$$\left. -\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{t}{p}, \frac{at}{p}, \cdots, \frac{a^{s-1}t}{p}\right)\right| <$$

$$< C[(s-1)^\alpha 2^{(s+1)\alpha}\log^{\alpha s} 3p + s2^\alpha(2\zeta(\alpha)+1)^s]p^{-\alpha}. \tag{7}$$

証. 由 (5) 式可知定理 2 的証明归結为求証

$$\Lambda_\alpha \leqslant \left[\frac{(s-1)2^{s+1}\log^s 3p}{p}\right]^\alpha. \tag{8}$$

由引 1 可知

$$\Lambda_\alpha^{1/\alpha} \leqslant \Lambda_1.$$

所以只要証明当 $\alpha = 1$ 时,結論 (8) 成立即可。命

$$\Lambda_1(a) = \sum_{\substack{m_1+\cdots+a^{s-1}m_s\equiv 0 (\bmod p)\\ |m_j|\leqslant \frac{p}{2}}}' \frac{1}{\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s},$$

則

$$\min_{1\leqslant a\leqslant p-1}\Lambda_1(a) \leqslant \frac{1}{p-1}\sum_{a=1}^{p-1}\Lambda_1(a) =$$

$$= \frac{1}{p-1}\sum_{|m_j|\leqslant\frac{p}{2}}' \frac{1}{\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s}\sum_{\substack{1\leqslant a\leqslant p-1\\ m_1+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0 (\bmod p)}} 1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s-1}{p-1}\left(\sum_{|m|\leqslant\frac{p}{2}}\frac{1}{\overline{m}}\right)^s \leqslant \frac{(s-1)2^{s+1}\log^s 3p}{p}.$$

定理証完。

附記 2. 命 $n = k^s$ 及

$$f(x_1, \cdots, x_s) = C\,\frac{e^{2\pi i k x_1} + e^{-2\pi i k x_1}}{k^\alpha},$$

则 $f(x_1, \cdots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$，而

$$\left|\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)\,dx_1 \cdots dx_s - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{n}\sum_{y_1=1}^{k} \cdots \sum_{y_s=1}^{k} f\left(\frac{y_1}{k}, \cdots, \frac{y_s}{k}\right)\right| = \frac{2C}{k^\alpha} = \frac{2C}{n^{\alpha/s}}.$$

故对于函数族 $E_s^\alpha(C)$，用矩形公式来近似計算积分，誤差的阶不能比 $n^{-\alpha/s}$ 更佳。

§17. 函数族 $E_s^\alpha(C)$ 上的求积公式的 Ω-结果

定理 1 (Шарыгин[33]). 任意給出 G_s 的 $n(>2)$ 个点

$$P_j=(x_1^{(j)},\cdots,x_s^{(j)}),\quad j=1,2,\cdots,n,$$

皆存在 $f(x_1,\cdots,x_s)\in E_s^\alpha(C)$, 满足

$$f(x_1^{(j)},\cdots,x_s^{(j)})=0,\quad j=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

及

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s\geqslant C\cdot c_6(\alpha,s)\frac{\log^{s-1}n}{n^\alpha}. \tag{2}$$

在証明定理 1 之前,先証明次之引理.

引 1. 将正整数 k 分拆为 s 个非負整数之和

$$k=r_1+\cdots+r_s$$

的方法为 C_{s-1}^{k+s-1}.

証. k 的每一种分拆皆对应于如下一个图形

$$\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{r_1}\ \ \circ\ \ \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{r_2}\ \ \circ\ \ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \ \circ\ \ \underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{r_s}$$

图 30

且反之亦眞. 这种图形的个数显然是 C_{s-1}^{k+s-1},故得引理.

定理 1 的証明. 假定 $2^{k-1}<n\leqslant 2^k$, 任意添加 2^k-n 个点

$$P_j=(x_1^{(j)},\cdots,x_s^{(j)}),\quad j=n+1,\cdots,2^k.$$

考慮所有的整数矢量

$$\nu=(r_1,\cdots,r_s),$$

此处 $r_1+\cdots+r_s=k$, $r_i\geqslant 0(1\leqslant i\leqslant s)$. 命 $G(\nu)$ 表示适合条件

$$\bar{m}_i\leqslant 2^{r_i},\quad i=1,2,\cdots,s$$

的整数矢量 $(m_1, \cdots, m_s)$ 的集合，则显然任一 $G(\nu)$ 的元素的个数皆不少于 2^k+1。

首先說明对于每一矢量 ν，皆存在三角多項式

$$T_\nu(x_1, \cdots, x_s) = \\ = \sum_{(m_1,\cdots,m_s)\in G(\nu)} C_\nu(m_1, \cdots, m_s) e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)} \not\equiv 0, \quad (3)$$

且滿足

$$T_\nu(x_1^{(j)}, \cdots, x_s^{(j)}) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 2^k. \quad (4)$$

这是由于 (4) 式为以 Fourier 系数 $C_\nu(m_1, \cdots, m_s)$ 为变数的一个綫性方程組，变数的个数多于方程的个数，所以可以确定諸 $C_\nu(m_1, \cdots, m_s)$，使 $T_\nu(x_1, \cdots, x_s)$ 滿足(3)及(4)。

命

$$T_\nu^{(0)}(x_1, \cdots, x_s) = \frac{T_\nu(x_1, \cdots, x_s) e^{-2\pi i(m_1'x_1+\cdots+m_s'x_s)}}{C_\nu(m_1', \cdots, m_s')2^{\alpha k}}, \quad (5)$$

此处 $|C_\nu(m_1', \cdots, m_s')| = \max\limits_{(m_1,\cdots,m_s)\in G(\nu)} |C_\nu(m_1, \cdots, m_s)|$。

我們来証明可以选取 $\chi = c_7(\alpha, s)$ 使

$$f(x_1, \cdots, x_s) = C\chi \sum_\nu{}' T_\nu^{(0)}(x_1, \cdots, x_s) \in E_s^\alpha(C). \quad (6)$$

因子 $e^{2\pi i(n_1x_1+\cdots+n_sx_s)}$ 仅仅可能出現于这样的三角多項式 $T_\nu^{(0)}(x_1, \cdots, x_s)$，此处

$$\nu = (r_1, \cdots, r_s), \quad r_i \geqslant 0, \quad (1 \leqslant i \leqslant s), \\ k = r_1 + \cdots + r_s,$$

而且

$$\bar{n}_1 \leqslant 2^{r_1+1}, \cdots, \bar{n}_s \leqslant 2^{r_s+1}.$$

所以

$$\log_2 \bar{n}_1 - 1 \leqslant r_1 = k - r_2 - \cdots - r_s \leqslant \\ \leqslant k - \log_2 \bar{n}_2 - \cdots - \log_2 \bar{n}_s + s - 1,$$

即 r_1 可以取不超过

$$k - \log_2 \bar{n}_1 - \cdots - \log_2 \bar{n}_s + s + 1 = \log_2 \frac{2^k}{\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s} + s + 1$$

个值．换言之，含因子 $e^{2\pi i(n_1x_1+\cdots+n_sx_s)}$ 的三角多项式 $T_\nu^{(0)}(x_1,\cdots,x_s)$ 的个数不超过

$$\left(\log_2\frac{2^k}{\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s}+s+1\right)^s.$$

因此，如果取

$$\chi=\inf_{0<y\leqslant1}\left\{y^\alpha\left(\log_2\frac{1}{y}+s+1\right)^s\right\}^{-1}=c_7(\alpha,s), \tag{7}$$

则

$$C\chi\frac{\left(\log_2\dfrac{2^k}{\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s}+s+1\right)^s}{2^{\alpha k}}\leqslant\frac{C}{(\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^\alpha}.$$

所以

$$f(x_1,\cdots,x_s)\in E_s^\alpha(C).$$

由(4)，(5)，(6)可知

$$f(x_1^{(j)},\cdots,x_s^{(j)})=0,\quad j=1,2,\cdots,n.$$

又由引 1 可知

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)\,dx_1\cdots dx_s=\frac{C\chi}{2^{\alpha k}}\sum_\nu 1=$$

$$=C\chi\frac{C_{s-1}^{k+s-1}}{2^{\alpha k}}\geqslant C\frac{c_7(\alpha,s)k^{s-1}}{(s-1)!\,2^{\alpha k}}\geqslant$$

$$\geqslant C\cdot c_6(\alpha,s)\frac{\log^{s-1}n}{n^\alpha}.$$

定理証完．

由定理 1 立刻可見，由 G_s 中任意 n 个点的函数值所构成的单和去逼近函数在 G_s 上的积分，誤差的阶都不能比 $n^{-\alpha}\log^{s-1}n$ 更好．换言之，定理 16.2 所給出的誤差的主阶 $p^{-\alpha}$ 已經臻于至善了．

§ 18. 存在定理之另証

引1. 当 $\alpha > 1$, $n \geqslant 1$ 时, 有

$$\sum_{\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s \leqslant n} 1 \leqslant 3^s n \log^{s-1} 3n \tag{1}$$

与

$$\sum_{\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s > n} \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha} \leqslant (5\zeta(\alpha))^s n^{-\alpha+1} \log^{s-1} 3n. \tag{2}$$

證. 1) 当 $s=1$ 时, (1) 式显然. 現在假定当 $s \leqslant k$ 时 (1) 式成立, 则

$$\sum_{\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_{k+1} \leqslant n} 1 = \sum_{\bar{m}_1 \leqslant n} \sum_{\bar{m}_2 \cdots \bar{m}_{k+1} \leqslant \frac{n}{\bar{m}_1}} 1 \leqslant 3^k n \log^{k-1} 3n \sum_{\bar{m}_1 \leqslant n} \frac{1}{\bar{m}_1} <$$

$$< 3^{k+1} n \log^k 3n,$$

故由归納法即得 (1) 式.

2) 当 $s=1$ 时

$$\sum_{\bar{m} > n} \frac{1}{\bar{m}^\alpha} = 2 \sum_{m > n} \frac{1}{m^\alpha} \leqslant \frac{2}{n^\alpha} + 2\int_n^\infty \frac{dt}{t^\alpha} =$$

$$= \frac{2}{n^\alpha} + \frac{2}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} < 5\zeta(\alpha) n^{-\alpha+1}.$$

現在假定 (2) 式当 $s \leqslant k$ 时成立, 则

$$\sum_{\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_{k+1} > n} \frac{1}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_{k+1})^\alpha} = \sum_{\bar{m}_1 \leqslant n} \frac{1}{\bar{m}_1^\alpha} \sum_{\bar{m}_2 \cdots \bar{m}_{k+1} > \frac{n}{\bar{m}_1}} \frac{1}{(\bar{m}_2 \cdots \bar{m}_{k+1})^\alpha} +$$

$$+ \sum_{\bar{m}_1 > n} \frac{1}{\bar{m}_1^\alpha} \sum_{\bar{m}_2 \cdots \bar{m}_{k+1} \geqslant 1} \frac{1}{(\bar{m}_2 \cdots \bar{m}_{k+1})^\alpha} <$$

$$< (5\zeta(\alpha))^k n^{-\alpha+1} \log^{k-1} 3n \sum_{\bar{m}_1 \leqslant n} \frac{1}{\bar{m}_1} + (3\zeta(\alpha))^k \sum_{\bar{m}_1 > n} \frac{1}{\bar{m}_1^\alpha} <$$

$$< 3(5\zeta(\alpha))^k n^{-\alpha+1}\log^k 3n + (3\zeta(\alpha))^{k+1} n^{-\alpha+1} <$$
$$< (5\zeta(\alpha))^{k+1} n^{-\alpha+1}\log^k 3n.$$

引理証完.

引 2. 当 $p > s$ 为奇素数时，则对于任何 $0 < \varepsilon < 1$，皆存在不少于 $p - [\varepsilon p]$ 个 z 使同余式

$$m_1 + m_2 z + \cdots + m_s z^{s-1} \equiv 0 \pmod p \tag{3}$$

在范围

$$\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s \leqslant \frac{\varepsilon p}{s3^s\log^{s-1}3p}, \quad (m_1, \cdots, m_s) \neq (0, \cdots, 0) \tag{4}$$

中无解.

証. 当 $\dfrac{\varepsilon p}{s3^s\log^{s-1}3p} < 1$ 时，引理自明．现在假定 $\dfrac{\varepsilon p}{s3^s\log^{s-1}3p} \geqslant 1$. 由于固定 $(m_1, \cdots, m_s) \neq (0, \cdots, 0)$ 时，同余式(3)在区間 $1 \leqslant z \leqslant p$ 中的解数不超过 $s-1$，因此由引 1 可知同余式(3)在范围(4)中的解数总和不超过

$$\sum'_{\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s \leqslant \frac{\varepsilon p}{s3^s\log^{s-1}3p}} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_s z^{s-1}\equiv 0 \pmod p\\ 1\leqslant z\leqslant p}} 1 \leqslant$$
$$\leqslant (s-1)3^s \frac{\varepsilon p}{s3^s\log^{s-1}3p}\log^{s-1}3p < \varepsilon p,$$

故得引理.

定理 1[34]. 命 $p > s$ 为奇素数，则存在 a，当 $a_1 = 1, a_2 = a, \cdots, a_s = a^{s-1}$ 时

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)} \left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s)dx_1\cdots dx_s -\right.$$
$$\left. - \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{t}{p}, \frac{at}{p}, \cdots, \frac{a^{s-1}t}{p}\right)\right| <$$
$$< C(2s)^\alpha 3^{\alpha s}(5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha}\log^{\alpha(s-1)}3p.$$

証. 由引 2 可知至少有 $\dfrac{p+1}{2}$ 个 z 使同余式(3)在范围

$$\overline{m}_1\cdots\overline{m}_s \leqslant \frac{p}{2s3^s\log^{s-1}3p}, \quad (m_1, \cdots, m_s) \neq (0, \cdots, 0)$$

中无解. 对于这些 z 求和,由引 1 及(16.1)(取 $a_1=1,\cdots,a_s=z^{s-1}$) 可知

$$\sum_z \Omega=\sum_z \sum'_{m_1+\cdots+m_s z^{s-1}\equiv 0(\bmod p)} \frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s\geqslant\frac{p}{2s\cdot 3^s\log^{s-1}3p}} \sum_{\substack{m_1+\cdots+m_s z^{s-1}\equiv 0(\bmod p)\\ 1\leqslant z\leqslant p}} \frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant p\sum'_{p|(m_1,\cdots,m_s)} \frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^\alpha}+$$

$$+(s-1)\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s\geqslant\frac{p}{2s3^s\log^{s-1}3p}} \frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^\alpha}<$$

$$<sp^{-\alpha+1}(2\zeta(\alpha)+1)^s+$$

$$+s(5\zeta(\alpha))^s\left(\frac{p}{2s\cdot 3^s\log^{s-1}3p}\right)^{-\alpha+1}\log^{s-1}3p<$$

$$<\frac{1}{3}(2s)^\alpha\cdot 3^{\alpha s}(5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha+1}\log^{(s-1)\alpha}3p. \tag{5}$$

在这 $\frac{p+1}{2}$ 个 z 之中,至多有 $\left[\frac{p}{3}\right]$ 个 z,它所对应之 Ω 适合

$$\Omega\geqslant(2s)^\alpha 3^{\alpha s}(5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha}\log^{(s-1)\alpha}3p,$$

否则对于这些 z 求和则得

$$\sum_z \Omega\geqslant\left(\left[\frac{p}{3}\right]+1\right)(2s)^\alpha 3^{\alpha s}(5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha}\log^{(s-1)\alpha}3p>$$

$$>\frac{1}{3}(2s)^\alpha 3^{\alpha s}(5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha+1}\log^{(s-1)\alpha}3p,$$

此与(5)相矛盾. 由于 $\frac{p+1}{2}-\left[\frac{p}{3}\right]\geqslant 1$,故至少有一个 $z(z=a)$,使其对应之 Ω 适合

$$\Omega<(2s)^\alpha 3^{\alpha s}(5\zeta(\alpha))^s p^{-\alpha}\log^{\alpha(s-1)}3p.$$

由(16.1)即得定理.

附記 1. Бахвалов[25] 最先用这一方法証明:当 $p>s$ 为奇素数时,存在整数 $a_1,\cdots,a_s$ 使

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{a_1t}{p},\cdots,\frac{a_st}{p}\right)\right|<$$
$$< C\cdot c_8(\alpha,s)p^{-\alpha}\log^{\alpha(s-1)}p.$$

附記 2. 凡使

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{q}\sum_{t=1}^{q} f\left(\frac{a_1t}{q},\cdots,\frac{a_st}{q}\right)\right|<$$
$$< C\cdot c_9(\alpha,s)\frac{\log^{c_{10}(\alpha,s)}q}{q^\alpha}\quad (q\geqslant 3)$$

成立的$(a_1,\cdots,a_s)$皆称为模 q 的**极值系数**. 定理 16.2 說明当 $q=p>s$ 为奇素数时,存在 a 使$(1,a,\cdots,a^{s-1})$为模 p 的极值系数. 当給了 p 之后,定理 16.2 的証明过程卽提供了一个計算 a 的方法:算出 $\Lambda_1(1),\Lambda_1(2),\cdots,\Lambda_1(p-1)$. 若其最小者为 $\Lambda_1(a)$,則 a 就是所要求者. 用这一方法定出 a 来,所需的乘除法运算次数为 $c_{11}(s)p^s$. 因此計算量頗大. 我們将于以后三节討論較快地定出极值系数来的方法.

§19. 二重积分

定理 1[35]. 命 $n>3$ 及

$$q_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]^{1)},$$

则

$$\sup_{f\in E_2^\alpha(C)}\left|\int_0^1\int_0^1 f(x_1,x_2)dx_1dx_2-\frac{1}{q_n}\sum_{t=1}^{q_n} f\left(\frac{t}{q_n},\frac{q_{n-1}t}{q_n}\right)\right|<$$

$$<C\left(\frac{8.4\zeta(\alpha)\log q_n}{(0.36)^\alpha q_n^\alpha}+\frac{2^{\alpha+1}(2\zeta(\alpha)+1)^2}{q_n^\alpha}\right). \qquad (1)$$

証. 1) 由 (16.5) 可知只要証明

$$A_\alpha<\frac{8.4\zeta(\alpha)\log q_n}{(0.36)^\alpha q_n^\alpha} \qquad (2)$$

即可.

2) 計算.

$$q_1=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^2\right]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{0.85}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

$$q_n\geqslant\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^4\right]\geqslant$$

$$\geqslant\frac{0.97}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\quad(n\geqslant 2),$$

1) q_n 即为 Fibonacci 数,它适合递推公式 $q_n=q_{n-1}+q_{n-2}(n\geqslant 2)$,此处 $q_0=q_1=1$,而 $\frac{q_{n-1}}{q_n}$ 即为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的渐近分数(见[15],第十章).

$$q_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left[1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^5\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1.01}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \quad (n>3),$$

$$q_{m-1}q_{n-m} \geqslant \frac{0.85 \times 0.97}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} >$$

$$> 0.36 q_n \quad (n>3,\ 2 \leqslant m \leqslant n-1),$$

$$n-1 \leqslant \frac{\log q_n}{\log \frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

3）簡化。

$$A_\alpha = \sum_{\substack{m_1+q_{n-1}m_2 \equiv 0 (\bmod q_n) \\ |m_i| \leqslant \frac{1}{2}q_n}}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1\overline{m}_2)^\alpha} =$$

$$= 2 \sum_{1 \leqslant x \leqslant q_n/2} \frac{1}{[\overline{x}(\overline{q_{n-1}x - q_n y})]^\alpha}, \tag{3}$$

此处 y 为适合

$$\left| y - \frac{q_{n-1}}{q_n} x \right| \leqslant \frac{1}{2}$$

之整数．将上式右端之和分为 $n-2$ 个分和

$$J_m = \sum_{q_{m-1} \leqslant x < q_m} \frac{1}{[\overline{x}(\overline{q_{n-1}x - q_n y})]^\alpha}, \quad m = 2, \cdots, n-1, \tag{4}$$

最后 J_{n-1} 的求和范围当然是 $q_{n-2} \leqslant x \leqslant q_n/2$．不再一一声明了．

4）J_m 的估計．由于

$$q_m q_{m-2} - q_{m-1}^2 = (-1)^m,$$

所以当給予整数 x, y 之后，方程組

$$\begin{cases} x = q_{m-1}u + q_m v, \\ y = q_{m-2}u + q_{m-1}v \end{cases}$$

有唯一的整数解 u, v。当 $q_{m-1} \leqslant x < q_m$ 时显然

$$uv < 0.$$

又对于不同的 x 所对应的 u 亦必不同．倘若不然，如果有 $x \neq x'$，且适合 $q_{m-1} \leqslant x,\ x' < q_m$，皆对应于同一 u，则由

$$\begin{cases} x = q_{m-1}u + q_m v, \\ x' = q_{m-1}u + q_m v' \end{cases}$$

可知 $q_m | (x - x')$，此不可能．因此

$$|q_{n-1}x - q_n y| = |(q_{n-1}q_{m-1} - q_n q_{m-2})u + (q_{n-1}q_m - \\ - q_n q_{m-1})v| = |-q_{n-m}u + q_{n-m-1}v| \geqslant q_{n-m}|u|,$$

$$J_m \leqslant \sum_{q_{m-1} \leqslant x < q_m} \frac{1}{(\overline{x}\,\overline{q_{n-m}u})^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\overline{q_{m-1}q_{n-m}})^\alpha} \sum_{u \neq 0} \frac{1}{\overline{u}^\alpha} =$$

$$= \frac{2\zeta(\alpha)}{(q_{m-1}q_{n-m})^\alpha} \leqslant \frac{2\zeta(\alpha)}{(0.36)^\alpha q_n^\alpha}.$$

5）由 2)，3)，4) 即得

$$\Lambda_\alpha = 2\sum_{m=2}^{n-1} J_m \leqslant 4(n-2)\frac{\zeta(\alpha)}{(0.36)^\alpha q_n^\alpha} <$$

$$< \frac{4\zeta(\alpha)\log q_n}{(0.36)^\alpha \log\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot q_n^\alpha} < \frac{8.4\,\zeta(\alpha)\log q_n}{(0.36)^\alpha q_n^\alpha}.$$

定理証完．

由定理 17.1 可知由定理 1 所給出的誤差的阶 $\log q_n/q_n^\alpha$ 已达到了最佳的阶段了．

附記 1． 作者[35]最初証明了，利用下面类型的点列

$$\left(\frac{a_1 k}{n}, \frac{a_2 k}{n}\right)(k \leqslant n),\ (a_i, n) = 1 \quad (i = 1, 2)$$

上的函数值的算术平均去逼近二重积分，誤差的阶不能比 $\log n/n^\alpha$ 更佳．

附記 2． 在此我們是运用 $R(\sqrt{5})$ 的单位 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 以得出二維的极值系数来的．实际上，改用任意实二次域都是可以的．关于推广至高維空間的問題，作者建議用代数完实域（例如分圓域与 Dirichlet 域）来代替实二次域，可能在理論上或实际計算上解决高維的問題．

§ 20. 求积公式与同余式的解

定理 1 (Бахвалов[25]). 若 $m > 1$, 而同余式

$$a_1m_1 + \cdots + a_sm_s \equiv 0 (\bmod n) \tag{1}$$

在范围

$$\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s < m, \quad (m_1, \cdots, m_s) \neq (0, \cdots, 0) \tag{2}$$

中无解, 则

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} f\left(\frac{a_1 t}{n}, \cdots, \frac{a_s t}{n}\right) \right| <$$

$$< C \cdot c_{12}(\alpha, s) \frac{\log^{s-1} m}{m}. \tag{3}$$

首先說明每一个体积小于 m, 以整点为頂点, 而稜平行于坐标軸的长方体之中, 同余式 (1) 最多只有一个解. 事实上, 若 $(m_1, \cdots, m_s)$ 与 $(m_1', \cdots, m_s')$ 都适合 (1), 则

$$a_1(m_1 - m_1') + \cdots + a_s(m_s - m_s') \equiv 0 (\bmod n),$$

$$(\overline{m_1 - m_1'}) \cdots (\overline{m_s - m_s'}) < m.$$

此为矛盾.

称这种长方体为 P_m^s 型的长方体, 在証明定理 1 之前, 我們先証次之引理.

引 1. 命 v 为正整数. 我們記滿足 $\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s < vm$ 的整点 $(m_1, \cdots, m_s)$ 的全体为 Γ_{vm}^s, 則 Γ_{vm}^s 可被不超过 $c_{13}(s) v \log^{s-1} 3vm$ 个 P_m^s 型的长方体遮盖.

証. 当 $s = 1$ 时, 取 $c_{13}(1) = 4$ 即得引理. 現在对于 s 用归納法.

将 Γ_{vm}^{s+1} 用超平面 $m_{s+1} = 0, \pm 2^i v$ $(i = 0, 1, \cdots, [\log_2 m])$

分开。 若 $2^i v < m_{s+1} \leqslant 2^{i+1} v$，则 $\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s < \frac{m}{2^i}$，所以 Γ_{vm}^{s+1} 与平面 $m_{s+1} = v2^i + 1$ 的交集可以借助于 $c_{13}(s) \log^{s-1} 3\frac{m}{2^i}$ 个 $P_{\frac{m}{2^i}}^{s}$ 型的长方体来遮盖。

在每个这样的长方体上，置 $m_{s+1} = v2^{i+1}$，即得到一个 P_{2vm}^{s+1} 型的长方体，显然它可以被不超过 $2v$ 个 P_m^{s+1} 的立方体来遮盖（由于 $m_{s+1} = v2^{i+1}$），因此集合 Γ_{vm}^{s+1} 中满足 $2^i v < m_{s+1} \leqslant 2^{i+1} v$ 的点可以被不超过 $2vc_{13}(s) \log^{s-1} 3\frac{m}{2^i}$ 个 P_m^{s+1} 型的长方体来遮盖。

若 $|j| \leqslant v$，则由归納法，假定可知集合 Γ_{vm}^{s+1} 与平面 $m_{s+1} = j$ 的交集可以被不超过

$$I_j = c_{13}(s)\left(\left[\frac{v}{j}\right] + 1\right) \log^{s-1} 3\left(\left[\frac{v}{j}\right] + 1\right) m$$

个 P_m^s 型的长方体来遮盖。 由于 P_m^s 型的长方体也可以看作 P_m^{s+1} 型的长方体，所以，集合 Γ_{vm}^{s+1} 中满足 $m_{s+1} = j$ 的点也可以被不超过 I_j 个 P_m^{s+1} 型的长方体遮盖。

因此，Γ_m^{s+1} 可以被不超过

$$2\left[\sum_{j=0}^{v} c_{13}(s)\left(\left[\frac{v}{j}\right] + 1\right) \log^{s-1} 3\left(\left[\frac{v}{j}\right] + 1\right) m + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{[\log_2 m]} 2vc_{13}(s) \log^{s-3} \frac{m}{2^i}\right] = c_{13}(s+1) v \log^s 3vm$$

个 P_m^{s+1} 型的长方体来遮盖。引理証完。

定理 1 的証明。 命 T_v 为 Γ_{vm}^s 中适合同余式 (1) 的整点的个数。因为在每个 P_m^s 型的长方体中，同余式(1)的解数皆不超过 1，所以

$$T_v \leqslant c_{13}(s) v \log^{s-1} 3vm.$$

因此

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f\left(\frac{a_1 t}{n}, \cdots, \frac{a_s t}{n}\right)\Bigg| =$$

$$= \sup_{f\in E_s^{\alpha}(C)} \Bigg| \sum_{a_1m_1+\cdots+a_sm_s\equiv 0 \pmod n}{}' C(m_1,\cdots,m_s)\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{a_1m_1+\cdots+a_sm_s\equiv 0 \pmod n}{}' \frac{1}{(\bar{m}_1\cdot\cdots\cdot\bar{m}_s)^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(m\nu)^{\alpha}}\cdot(T_{\nu+1}-T_{\nu})\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{\nu=1}^{\infty}T_{\nu+1}\left(\frac{1}{(m\nu)^{\alpha}}-\frac{1}{[m(\nu+1)]^{\alpha}}\right)\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot c_{13}(s)\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)\log^{s-1}3(\nu+1)m}{m^{\alpha}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\alpha}{\nu^{\alpha}(\nu+1)}\leqslant c_{12}(\alpha,s)C\frac{\log^{s-1}3m}{m^{\alpha}},$$

此处用到

$$\frac{1}{\nu^{\alpha}}-\frac{1}{(\nu+1)^{\alpha}}=\frac{\int_{\nu}^{\nu+1}\alpha t^{\alpha-1}dt}{\nu^{\alpha}(\nu+1)^{\alpha}}\leqslant\frac{\alpha}{\nu^{\alpha}(\nu+1)}.$$

定理証完.

附記 1[25]. 命 $\frac{q_{n-1}}{q_n}$ 为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 的漸近分数,則

$$\left|\frac{q_{n-1}}{q_n}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|<\frac{1}{2q_n^2}$$

又对于任意分数 h/q 皆有

$$\left|\frac{h}{q}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|>\frac{2}{5q^2}$$

(見[15],第十章). 所以,当 $|q|<q_n/3$ 时

$$\left|\frac{h}{q}-\frac{p_n}{q_n}\right|\geqslant\left|\frac{h}{q}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|-\left|\frac{q_{n-1}}{q_n}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right|>$$

$$>\frac{2}{5q^2}-\frac{1}{2q_n^2}>\frac{1}{3q^2},$$

即

$$|q| \cdot |q_{n-1}q - q_n h| \geqslant \frac{1}{3} q_n.$$

故同余式

$$x_1 + q_{n-1}x_2 \equiv 0 \pmod{q_n}$$

的非零解皆满足

$$\bar{x}_1\bar{x}_2 \geqslant \frac{q_n}{3}.$$

因此由定理 1 亦得到定理 19.1（即单和与二重积分之差的阶为 $\log q_n/q_n^a$）.

附記 2. 同定理 1 的方法可得

$$\sum_{\substack{|m_j| \leqslant m \\ a_1m_1+\cdots+a_sm_s\equiv 0 \pmod n}} \frac{1}{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s} \leqslant \sum_{\nu=1}^{m^{s-1}} \frac{T_{\nu+1} - T_\nu}{m\nu} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=1}^{m^{s-1}} T_{\nu+1}\left(\frac{1}{m\nu} - \frac{1}{m(\nu+1)}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{c_{13}(s)}{m} \sum_{\nu=1}^{m^{s-1}} \frac{(\nu+1)\log^{s-1} 3(\nu+1)m}{\nu(\nu+1)} \leqslant$$

$$\leqslant c_{14}(s)\frac{\log^s m}{m}. \tag{4}$$

附記 3. 命 $(a_\nu, n) = 1$, $a_\nu b_\nu \equiv 1 \pmod n$ $(1 \leqslant \nu \leqslant s)$, 則由定理 1 可知 $(a_1, \cdots, a_s)$ 为最优系数的充要条件为：若 $a_\nu m_\nu + \cdots + a_s m_s \not\equiv 0 \pmod n$, 則

$$\left\langle \frac{b_{\nu-1}(a_\nu m_\nu + \cdots + a_s m_s)}{n} \right\rangle \geqslant \frac{c_{15}(a, s)}{\bar{m}_\nu \cdots \bar{m}_s \log^{c_{16}(a,s)} n},$$

此处 $\langle x \rangle = \min(x - [x], 1 + [x] - x)$.

特别当 $(a, n) = 1$ 时，$(1, a, \cdots, a^{s-1})$ 为最优系数的充要条件为：若 $m_2 + m_3 a + \cdots + m_s a^{s-2} \not\equiv 0 \pmod n$, 則

$$\left\langle \frac{m_2 a + \cdots + m_s a^{s-1}}{n} \right\rangle \geqslant \frac{c_{17}(a, s)}{\bar{m}_2 \cdots \bar{m}_s \log^{c_{18}(a,s)} n}.$$

由引理 18.2 可知，当 $n = p > s$ 为奇素数时，存在 a 满足：当

$m_2 + \cdots + m_s a^{s-2} \not\equiv 0 \pmod p$ 时

$$\left\langle \frac{m_2 a + \cdots + m_s a^{s-1}}{p} \right\rangle \geqslant \frac{1}{\bar{m}_2 \cdots \bar{m}_s 2s \cdot 3^s \log^{s-1} 3p}.$$

于是由定理 1 立刻得到

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{t}{p}, \cdots, \frac{a^{s-1}t}{p}\right) \right| <$$

$$< C \cdot c_{19}(\alpha, s) p^{-\alpha} \log^{(\alpha+1)(s-1)} p.$$

附記 4. 因为对于固定的 $(m_1, \cdots, m_s) \neq (0, \cdots, 0)$，若不計加減法运算，則不超过 $2sp$ 次乘除法的运算，即能定出满足同余式

$$m_1 + m_2 a + \cdots + m_s a^{s-1} \equiv 0 \pmod p \quad (1 \leqslant a \leqslant p)$$

的 a 来，因此由引理 17.1 可知不超过

$$\sum_{\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s \leqslant \frac{p}{2s \cdot 3^s \log^{s-1} 3p}} 2sp \leqslant p^2$$

次乘除法的运算，即能定出最优系数 $(1, a, \cdots, a^{s-1})$ 来。

寻求 a 的步驟如下：命

$$\sigma_\nu(a) = \sum_{\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s = \nu} \delta_p(m_1 + \cdots + m_s a^{s-1}),$$

此处

$$\delta_p(m) = \begin{cases} 0, & 若 \quad m \not\equiv 0 \pmod p, \\ 1, & 若 \quad m \equiv 0 \pmod p). \end{cases}$$

先求出区間 $[1, p]$ 中使 $\sigma_1(z) = 0$ 的 z，記为 z_1，再在 z_1 中求出使 $\sigma_2(z_1) = 0$ 的 z_1，記为 z_2，如此等等，最后至 $\sigma_{n+1}(z_n) > 0$，則諸 z_n 即合所需。

§21. 极值系数

本节将研究如何具体求出极值系数的方法.

定理 1[36]. 对于整数 z, 命

$$H(z)=\frac{3^s}{p}\sum_{t=1}^{p}\left(1-2\left\{\frac{t}{p}\right\}\right)^2\cdot$$
$$\cdot\left(1-2\left\{\frac{tz}{p}\right\}\right)^2\cdots\left(1-2\left\{\frac{tz^{s-1}}{p}\right\}\right)^2, \qquad (1)$$

若当 $z=1,2,\cdots,p-1$ 时, 整数 $z=a$ 使 $H(z)$ 取极小值, 则 $(1, a, \cdots, a^{s-1})$ 为模 p 的极值系数.

証. 由于

$$b_2(x)=\frac{\{x\}^2}{2}-\frac{\{x\}}{2}+\frac{1}{12}=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi mx}{m^2}$$

(見 §7),所以

$$3(1-2\{x\})^2=\frac{6}{\pi^2}\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{e^{2\pi imx}}{m^2}+1=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{\psi(m)},$$

此处 $\psi(0)=1$, $\psi(m)=\frac{\pi^2}{6}m^2(m\neq 0)$. 因此

$$H(z)=\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum\frac{e^{2\pi i(m_1+\cdots+m_s z^{s-1})t/p}}{\psi(m_1)\cdots\psi(m_s)},$$

$$H(z)-1=\sum_{m_1+\cdots+m_s z^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}{}'\frac{1}{\psi(m_1)\cdots\psi(m_s)}<$$

$$<\sum_{m_1+\cdots+m_s z^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}{}'\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^2},$$

故由定理 16.2 的証明可知

$$H(a)-1\leqslant\min_{1\leqslant z\leqslant p-1}\sum_{m_1+\cdots+m_s z^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}{}'\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^2}\leqslant$$

$$\leqslant c_{20}(s)\frac{\log^{2s}p}{p^2}.$$

另一方面

$$H(a)-1>\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s\sum_{m_1+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)}'\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^2},$$

因此当

$$\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s<\frac{\left(\frac{6}{\pi^2}\right)^{\frac{s}{2}}p}{\sqrt{c_{20}(s)}\log^s p},\quad (m_1,\cdots,m_s)\neq(0,\cdots,0)\ (2)$$

时，同余式

$$m_1+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$$

无解．故由定理 20.1 可知

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)dx_1\cdots dx_s-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}f\left(\frac{t}{p},\frac{at}{p},\cdots,\frac{a^{s-1}t}{p}\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\cdot\frac{c_{21}(\alpha,s)\log^{(\alpha+1)s-1}p}{p^\alpha}.$$

换言之，$(1,a,\cdots,a^{s-1})$ 为模 p 的极值系数．定理証完．

命 $q=p_1p_2$，此处 p_1，p_2 皆为大于 s 的素数，且 p_2 为距$[\sqrt{p_1}]$最近的素数．对于 p_1，由定理 1 定义 a，命

$$G(z)=\frac{3^s}{q}\sum_{t=1}^{q}\left(1-2\left\{\frac{p_1+p_2}{q}t\right\}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\left(1-2\left\{\frac{p_1z+p_2a}{q}t\right\}\right)^2\cdots\left(1-2\left\{\frac{p_1z^{s-1}+p_2a^{s-1}}{q}t\right\}\right)^2.$$

(3)

定理 2[27,36]． 若当 $z=1,2,\cdots,p_2-1$ 时，$z=b$ 使 $G(z)$ 取极小值，則 $(p_1+p_2,p_1b+p_2a,\cdots,p_1b^{s-1}+p_2a^{s-1})$ 为模 q 的极值系数．

証．

$$G(x)-1=\frac{1}{q}\sum_{t=1}^{q}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum{}' \frac{e^{2\pi i\frac{(p_1+p_2)m_1+\cdots+(p_1x^{s-1}+p_2a^{s-1})m_s}{q}t}}{\psi(m_1)\cdots\psi(m_s)}=$$

$$=\sum_{(p_1+p_2)m_1+\cdots+(p_1x^{s-1}+p_2a^{s-1})m_s\equiv 0(\bmod q)}{}' \frac{1}{\psi(m_1)\cdots\psi(m_s)}=$$

$$=\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)\\ m_1+\cdots+m_sx^{s-1}\equiv 0(\bmod p_2)}}{}' \frac{1}{\psi(m_1)\cdots\psi(m_s)}$$

将上面的和分为 $\sum_1$ 与 $\sum_2$ 两部分，在 $\sum_1$ 中，諸 m_ν 皆为 p_2 之倍数，其余均属于 $\sum_2$。因此

$$\sum_1=\sum_{p_2(n_1+\cdots+n_sa^{s-1})\equiv 0(\bmod p_1)}{}' \frac{1}{\psi(n_1p_2)\cdots\psi(n_sp_2)}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p_2^2}\sum_{n_1+\cdots+n_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)}{}' \frac{1}{\psi(n_1)\cdots\psi(n_s)}=$$

$$=\frac{1}{p_2^2}(H(a)-1)\leqslant c_{20}(s)\frac{\log^{2s}q}{q^2}.$$

由(16.5)可知

$$\sum_2\leqslant\sum_{\substack{m_1+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)\\ m_1+\cdots+m_sx^{s-1}\equiv 0(\bmod p_2)}}{}'' \frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\substack{|m_j|\leqslant\frac{q-1}{2}\\ m_1+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)\\ m_1+\cdots+m_sx^{s-1}\equiv 0(\bmod p_2)}}{}'' \frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^2}+\frac{s\pi^{2s}}{q^2}\leqslant$$

$$\leqslant\Bigg(\sum_{\substack{|m_j|\leqslant\frac{q-1}{2}\\ m_1+\cdots+m_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)\\ m_1+\cdots+m_sx^{s-1}\equiv 0(\bmod p_2)}}{}'' \frac{1}{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s}\Bigg)^2+\frac{s\pi^{2s}}{q^2},$$

此处 $\sum''$ 表示通过諸非皆为 p_2 之倍数且非皆为零之 $m_1,\cdots,m_s$ 求和。所以

$$\min_{1\leqslant x\leqslant p_2-1}\sum\nolimits_2 \leqslant \Big(\min_{1\leqslant x\leqslant p_2-1}\sum_{\substack{|m_j|\leqslant\frac{q-1}{2}\\ m_1+\cdots+m_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)\\ m_1+\cdots+m_s x^{s-1}\equiv 0(\bmod p_2)}}'' \frac{1}{\bar m_1\cdots\bar m_s}\Big)^2+\frac{s\pi^{2s}}{q^2}\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\frac{1}{p_2-1}\sum_{\substack{|m_j|\leqslant\frac{q-1}{2}\\ m_1+\cdots+m_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)}}''\frac{1}{\bar m_1\cdots\bar m_s}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\substack{x=1\\ m_1+\cdots+m_s x^{s-1}\equiv 0(\bmod p_2)}}^{p_2-1} 1\Big)^2+\frac{s\pi^{2s}}{q^2}\leqslant$$

$$\leqslant\Big(\frac{s-1}{p_2-1}\sum_{\substack{|m_j|\leqslant\frac{q-1}{2}\\ m_1+\cdots+m_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)}}'\frac{1}{\bar m_1\cdots\bar m_s}\Big)^2+\frac{s\pi^{2s}}{q^2}.$$

又由(2),(16.6)及(20.4)可知

$$\min_{1\leqslant x\leqslant p_2-1}\sum\nolimits_2\leqslant 2\Big(\frac{s-1}{p_2-1}\sum_{\substack{|m_j|\leqslant\frac{p_1-1}{2}\\ m_1+\cdots+m_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p_1)}}'\frac{1}{\bar m_1\cdots\bar m_s}\Big)^2+$$

$$+\frac{s^4 2^{2s+6}}{q^2}\log^{2s}6q<c_{22}(s)\frac{\log^{4s}q}{q^2}.$$

因此

$$G(b)-1\leqslant\sum\nolimits_1+\min_{1\leqslant x\leqslant p_2-1}\sum\nolimits_2<c_{23}(s)\frac{\log^{4s}q}{q^2}.$$

另一方面

$$G(b)-1>\Big(\frac{6}{\pi^2}\Big)^s\sum_{(p_1+p_2)m_1+\cdots+(p_1b^{s-1}+p_2a^{s-1})m_s\equiv 0(\bmod q)}'\frac{1}{(\bar m_1\cdots\bar m_s)^2},$$

所以当

$$\bar m_1\cdots\bar m_s<\frac{\Big(\frac{6}{\pi^2}\Big)^{s/2}q}{\sqrt{c_{23}(s)\log^{2s}q}},\ (m_1,\cdots,m_s)\neq(0,\cdots,0)$$

时,同余式

$$(p_1+p_2)m_1+\cdots+(p_1b^{s-1}+p_2a^{s-1})m_s\equiv 0(\bmod q)$$

无解．因此由定理 20.1 可知 $(p_1+p_2, p_1b+p_2a, \cdots, p_1b^{s-1}+p_2a^{s-1})$ 为模 $q=p_1p_2$ 的极值系数．定理証完．

附記 1．因为 $(1-2\{x\})^2$ 为偶函数，所以 $H(z)$ 与 $G(z)$ 可以分别换为

$$\widetilde{H}(z)=\frac{3^s}{p}\Big[1+2\sum_{t=1}^{\frac{p-1}{2}}\Big(1-2\Big\{\frac{t}{p}\Big\}\Big)^2\Big(1-2\Big\{\frac{tz}{p}\Big\}\Big)^2\cdots$$
$$\cdots\Big(1-2\Big\{\frac{tz^{s-1}}{p}\Big\}\Big)^2\Big] \tag{4}$$

及

$$\widetilde{G}(z)=\frac{3^s}{q}\Big[1+2\sum_{t=1}^{\frac{q-1}{2}}\Big(1-2\Big\{\frac{p_1+p_2}{q}t\Big\}\Big)^2\cdot$$
$$\cdot\Big(1-2\Big\{\frac{p_1z+p_2a}{q}t\Big\}\Big)^2\cdots\Big(1-2\Big\{\frac{p_1z^{s-1}+p_2a^{s-1}}{q}t\Big\}\Big)^2\Big]. \tag{5}$$

例[37]．取 $p_1=241$, $p_2=17$, $q=4097$, 则由公式 (4), (5) 可以算出 $a=76$, $b=1$．于是得到 mod 4097 的极値系数 {258, 1533, 105, 2196}．因此

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_4)dx_1\cdots dx_4\approx$$
$$\approx\frac{1}{4097}\sum_{t=1}^{4097}\varphi\Big(\Big\{\frac{258}{4097}t\Big\},\Big\{\frac{1533}{4097}t\Big\},\Big\{\frac{105}{4097}t\Big\},\Big\{\frac{2196}{4097}t\Big\}\Big), \tag{6}$$

此处 $\varphi(x_1,\cdots,x_4)$ 为 $f(x_1,\cdots,x_4)$ 經 § 14 的方法周期化以后的函数．例如，取

$$f_1=\frac{x_1x_2x_3x_4}{0.0625},$$

$$f_2=\frac{x_1+x_2-x_3+2x_4}{1.5},$$

$$f_3=\frac{3x_1^3x_2^2x_3e^{x_1x_2x_3x_4}}{3e-5},$$

$$f_4=1+\cos 2\pi(x_1+x_2+x_3+x_4),$$

$$f_5=1+\sin n\pi(x_1+x_2-x_3+2x_4)\quad (n\text{ 为正整数}),$$

$$f_6 = \frac{16 n_1^2 e^{-n_1\left[\frac{x_1^2}{(1-x_1)^2}+\frac{x_2^2}{(1-x_2)^2}+\frac{x_3^2}{(1-x_3)^2}+\frac{x_4^2}{(1-x_4)^2}\right]}}{\pi^2(1-x_1)^2(1-x_2)^2(1-x_3)^2(1-x_4)^2}$$

（n_1 为正整数），

这六个函数在 G_4 上的积分值都等于 1，而用公式（6）計算的結果为：

被积函数	近似值	被积函数	近似值
I_1	0.999995	$I_5(n=100)$	1.00000013
I_2	0.999999	$I_5(n=200)$	1.00000021
I_3	1.000186	$I_6(n_1=1)$	0.999682
I_4	1.000000	$I_6(n_1=10)$	1.002806
$I_5(n=10)$	1.00000000	$I_6(n_1=30)$	0.940240
$I_5(n=30)$	1.00000002	$I_6(n_1=60)$	1.583021
$I_5(n=60)$	1.00000004	$I_6(n_1=100)$	3.977712

附記 2. 用定理 1 的方法求出 a，所需的乘除法的运算次数为 $c_{24}(s)p^2$. 用定理 2 的方法定出 a, b 的运算次数为 $c_{25}(s)(p_1^2 + p_1p_2^2) \leqslant c_{26}(s)q^{4/3}$.

附記 3. 定理 2 还可以进一步推广. 取 $q = p_1p_2p_3$，此处 p_i 皆为大于 s 的奇素数，且 p_2, p_3 分别为最接近 $[\sqrt{p_1}]$ 与 $[\sqrt{p_2}]$ 的素数，定义 a, b 如定理 2 所示. 又命

$$\tilde{F}(z) = \frac{3^s}{q}\left[1 + 2\sum_{t=1}^{\frac{q-1}{2}}\left(1 - 2\left\{\frac{p_1p_2 + p_2p_3 + p_3p_1}{q}t\right\}\right)^2 \cdot \right.$$
$$\cdot\left(1 - 2\left\{\frac{p_1p_2z + p_2p_3a + p_3p_1b}{q}t\right\}\right)^2\cdots$$
$$\left.\cdots\left(1 - 2\left\{\frac{p_1p_2z^{s-1} + p_2p_3a^{s-1} + p_3p_1b^{s-1}}{q}t\right\}\right)^2\right]. \qquad (7)$$

假若 c 为当 $z = 1, 2, \cdots, p_3 - 1$ 时，使 $\tilde{F}(z)$ 为最小者，则 $(p_1p_3 + p_2p_3 + p_3p_1, \cdots, p_1p_2c^{s-1} + p_2p_3a^{s-1} + p_3p_1b^{s-1})$ 即为模 q 的极值系数. 用这一方法定出 a, b, c 的运算次数为 $c_{27}(s)q^{8/7}$. 还

可以依次类推.

附記 4. 請参看附录:"极值系数表"[37]. 在表(I)—(IV)中,命

$$a^{\nu-1} \equiv a_\nu \pmod p \quad (1 \leqslant a_\nu < p).$$

在表(V)—(XII)中,首先命同余式

$$(p_1 + p_2)x \equiv 1 \pmod{p_1p_2} \quad (1 \leqslant x < p_1p_2)$$

之解为 x, 又命

$$(p_1b^{\nu-1} + p_2a^{\nu-1})x \equiv a_\nu \pmod{p_1p_2} \quad (1 \leqslant a_\nu < p_1p_2),$$

則极值系数就是

$$(1, a_2, a_3, \cdots, a_{s-1}).$$

§ 22. Бахвалов 定理

命 $\alpha > 1$, t 为满足 $t \geqslant \alpha$ 的最小整数. 又命

$$\left(\sum_{j=-n}^{n} z^j\right)^t = \sum_{j=-nt}^{nt} \mu_{n,t,j} z^j, \tag{1}$$

$$\left|\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.$$
$$\left. - \frac{\sum\limits_{j=-nt}^{nt} \mu_{n,t,j} f(\alpha_1 j, \cdots, \alpha_s j)}{(2n+1)^t}\right| = \Omega_1. \tag{2}$$

定理 1 (Бахвалов[25]). 命 $n \geqslant 3$, $\varepsilon > 0$, 则对于 G_s 中几乎所有的点 $P = (\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$[1)] 皆有

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \Omega_1 \leqslant C \cdot c_{23}(\alpha, s, P, \varepsilon) n^{-\alpha} \log^{(s+\varepsilon)(\alpha+1)} n. \tag{3}$$

在証明定理之前,先証明次之二引理.

引 1. 若 c 为常数, n 为非零整数,则满足

$$\langle c + nx \rangle \leqslant \varepsilon \quad (x \in [0,1])$$

的点 x 的測度为 2ε.

証. 不妨假定 $\varepsilon < \frac{1}{2}$,否則引理显然成立. 由 $\langle x \rangle$ 的定义可知将引理中之 $[0, 1]$ 換为任意长度为 1 的区間皆可. 換言之,可以将 x 換为 $x - \frac{c}{n}$, 即不妨假定 $c = 0$. 又由于 $\langle nx \rangle = \langle -nx \rangle$,所以可以假定 $n > 0$. 显然使

$$\langle nx \rangle \leqslant \varepsilon$$

成立的点为满足下面某不等式的 x:

---

1) 这句話或讀成:"除去 G_s 中一个 Lebesgue 測度为零的点集". 請参看 [38], 第三章.

$$\left\{0 \leqslant x \leqslant \frac{\varepsilon}{n}, \frac{1-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant \frac{1+\varepsilon}{n}, \frac{2-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant \frac{2+\varepsilon}{n}, \cdots \right.$$

$$\left. \cdots, \frac{n-1-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant \frac{n-1+\varepsilon}{n}, \frac{n-\varepsilon}{n} \leqslant x \leqslant 1\right\}.$$

它們的測度之和为 2ε.

引 2[39]. 若 $\varphi(\bar{s}) > 0$, 級数 $\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{\bar{s}\varphi(\bar{s})}$ 收斂, 則几乎对于 G_s 中所有的点 P 皆满足:对于所有的 $(n_1, \cdots, n_s) \neq (0, \cdots, 0)$ 皆有

$$\left\langle \sum_{j=1}^{s} \alpha_j n_j \right\rangle > \frac{c_{29}(P)}{\prod_{j=1}^{s} (\bar{n}_j \varphi(\bar{n}_j))} > 0. \tag{4}$$

証. 先証明当 $(n_1, \cdots, n_s) \neq (0, \cdots, 0)$ 时, G_s 中满足

$$\left\langle \sum_{j=1}^{s} \alpha_j n_j \right\rangle \leqslant \varepsilon$$

的点 P 的測度不超过 2ε. 事实上,当 $s=1$ 时由引 1 即明所欲証. 現在假定当 $s \leqslant k$ 时已眞,則当 $s=k+1$ 时,若 $n_{k+1}=0$,則由归納法即明所欲証. 現在假定 $n_{k+1} \neq 0$, 則由于

$$\left\langle \sum_{j=1}^{k+1} \alpha_j n_j \right\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{k} \alpha_j n_j + \alpha_{k+1} n_{k+1} \right\rangle \leqslant \varepsilon \tag{5}$$

可知,当固定 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ 时,使(5)式成立的 α_{k+1} 的綫性測度不超过 2ε,因此使(5)式成立的点 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_{k+1})$ 的測度不超过 2ε.

由此可見, 凡满足对于某一 $(n_1, \cdots, n_s) \neq (0, \cdots, 0)$, 使下式

$$\left\langle \sum_{j=1}^{s} \alpha_j n_j \right\rangle \leqslant \frac{\eta}{\prod_{j=1}^{s} (\bar{n}_j \varphi(\bar{n}_j))} \quad (\eta > 0)$$

成立的点 P 的集合 σ_η 的測度不超过

$$2\eta \sum{}' \frac{1}{\prod_{j=1}^{s} (\bar{n}_j \varphi(\bar{n}_j))} = 2\eta \left[\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{m}\varphi(\bar{m})} \right)^s - \frac{1}{\varphi(1)^s} \right] < c\eta.$$

现在来証明对于任意 $\tau > 0$，都不能使下式

$$\left\langle \sum_{j=1}^{s} \alpha_j n_j \right\rangle > \frac{\tau}{\prod_{j=1}^{s} (\bar{n}_j \varphi(\bar{n}_j))}$$

对所有的 $(n_1, \cdots, n_s) \neq (0, \cdots, 0)$ 皆满足的点 P 的集合 σ 的测度为零。倘若不然，設其测度为 δ，則对于任意 $\eta > 0$，σ 一定是 σ_η 的子集。取 $\eta = \delta/2c$，則 σ 的测度亦当不超过 σ_η 的测度，卽不超过 $c\eta = \delta/2$，此乃矛盾。故得引理。

定理 1 的証明。 記 $\sum \alpha_k n_k = \sum_{k=1}^{s} \alpha_k n_k$。由于

$$f(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) = \sum \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}} \sum C(n_1, \cdots, n_s) e^{2\pi i \sum \alpha_k n_k},$$

所以

$$\frac{1}{(2n+1)^t} \sum_{j=-nt}^{nt} \mu_{n,t,j} f(\alpha_1 j, \cdots, \alpha_s j) =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^t} \sum \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}} \sum C(n_1, \cdots, n_s) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{j=-nt}^{nt} \mu_{n,t,j} (e^{2\pi i \sum \alpha_k n_k})^j \right) =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^t} \sum \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}} \sum C(n_1, \cdots, n_s) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{j=-n}^{n} e^{2\pi i j \sum \alpha_k n_k} \right)^t =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^t} \sum \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}} \sum C(n_1, \cdots, n_s) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{\sin (2n+1)\pi \sum \alpha_k n_k}{\sin \pi \sum \alpha_k n_k} \right)^t.$$

因为

$$C(0, \cdots, 0) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s$$

及

$$\left|\frac{\sin(2n+1)y}{(2n+1)\sin y}\right|\leqslant 1,$$

所以

$$\Omega_1=\left|\frac{1}{(2n+1)^s}\sum{}' C(n_1,\ \cdots,\ n_s)\left(\frac{\sin(2n+1)\pi\sum\alpha_k n_k}{\sin\pi\sum\alpha_k n_k}\right)^s\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\sum{}'\frac{1}{(\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^\alpha}\left|\frac{\sin(2n+1)\pi\sum\alpha_k n_k}{(2n+1)\sin\pi\sum\alpha_k n_k}\right|^\alpha.$$

将右端的和分为 $\sum''$ 与 $\sum'''$ 两部分，$\sum''$ 为对满足 $\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s\geqslant n^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}$ 之諸 $(n_1,\ \cdots,\ n_s)$ 求和，$\sum'''$ 为通过其余之 $(n_1,\ \cdots,\ n_s)$ 求和. 由引理 18.1 可知

$$\sum''=\sum_{\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s\geqslant n^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}}\frac{1}{(\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^\alpha}\left|\frac{\sin(2n+1)\pi\sum\alpha_k n_k}{(2n+1)\sin\pi\sum\alpha_k n_k}\right|^\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s\geqslant n^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}}\frac{1}{(\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant(5\zeta(\alpha))^s\left(n^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}\right)^{-(\alpha-1)}\log^{s-1}3n\leqslant c_{30}(\alpha,\ s)n^{-\alpha}. \tag{6}$$

又因为当 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时，$|\sin\pi y|\geqslant 2\langle y\rangle$，所以

$$\sum'''=\frac{1}{(2n+1)^\alpha}\sum_{\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s<n^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}}{}'\frac{1}{(\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^\alpha}\cdot$$

$$\cdot\left|\frac{\sin(2n+1)\pi\sum\alpha_k n_k}{(2n+1)\sin\pi\sum\alpha_k n_k}\right|^\alpha\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2^\alpha(2n+1)^\alpha}\sum_{\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s<n^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}}{}'\frac{1}{(\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^\alpha\langle\sum\alpha_k n_k\rangle^\alpha}. \tag{7}$$

以下我們仅仅考虑适合下面条件的点 P，即对于所有的 $(n_1,\cdots,\ n_s)\neq(0,\ \cdots,\ 0)$ 皆有

$$\langle\sum\alpha_k n_k\rangle>\frac{c_{31}(P,\ \varepsilon)}{\prod_{k=1}^{s}\left(\bar{n}_k(\overline{\log_2\bar{n}_k})^{1+\frac{\varepsilon}{s}}\right)}>0. \tag{8}$$

由引 2 可知这种点 P 的测度为 1.

命 $\sum_m$ 表示 (7) 之右端适合条件

$$\frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{2^{m+2}(m+1)^{s+\varepsilon}} \leqslant \langle\sum \alpha_k n_k\rangle \leqslant \frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{2^{m+1}m^{s+\varepsilon}} \tag{9}$$

的部分和.

首先証明:任意 $P^s_{2^m}$ 型的长方体中,皆不能包含多于一点适合

$$\langle\sum \alpha_k n_k\rangle \leqslant \frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{2^{m+1}m^{s+\varepsilon}}. \tag{10}$$

事实上,倘若不然,若有 $(n_1',\cdots,n_s')$ 与 $(n_1'',\cdots,n_s'')$ 皆适合(10)式,则 $(\overline{n_1'-n_1''})\cdots(\overline{n_s'-n_s''}) < 2^m$,而

$$\langle\sum \alpha_k(n_k'-n_k'')\rangle \leqslant \langle\sum \alpha_k n_k'\rangle + \langle\sum \alpha_k n_k''\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2c_{31}(P,\varepsilon)}{2^{m+1}m^{s+\varepsilon}} = \frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{2^m m^{s+\varepsilon}}.$$

但另一方面,由(8)可知

$$\langle\sum \alpha_k(n_k'-n_k'')\rangle > \frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{2^m m^{s+\varepsilon}},$$

此为矛盾. 故明所欲証.

命 T_v^m 表示满足 $\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s < v2^m$ 的整点 $(n_1,\cdots,n_s)$ 中适合(10)的个数,则由引理 20.1 可知

$$T_v^m \leqslant c_{13}(s)v\log^{s-1}3v2^m,$$

因此

$$\sum_m = \sum_{\frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{2^{m+2}(m+1)^{s+\varepsilon}} \leqslant \langle\sum \alpha_k n_k\rangle \leqslant \frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{2^{m+1}m^{s+\varepsilon}}}{}' \frac{1}{(\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^\alpha\langle\sum \alpha_k n_k\rangle^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{2^{m+2}(m+1)^{s+\varepsilon}}{c_{31}(P,\varepsilon)}\right)^\alpha \sum_{\langle\sum \alpha_k n_k\rangle \leqslant \frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{2^{m+1}m^{s+\varepsilon}}}{}' \frac{1}{(\bar{n}_1\cdots\bar{n}_s)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c_{32}(\alpha,s,P,\varepsilon)m^{(s+\varepsilon)\alpha}\sum_{v=1}^\infty \frac{T_{v+1}^m - T_v^m}{v^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c_{32}(\alpha,s,P,\varepsilon)m^{(s+\varepsilon)\alpha}\sum_{v=2}^\infty T_v^m\left(\frac{1}{(v-1)^\alpha} - \frac{1}{v^\alpha}\right) \leqslant$$

$$\leqslant c_{32}(\alpha, s, P, \varepsilon) m^{(s+\varepsilon)\alpha} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\alpha c_{13}(s) \nu \log^{s-1} 3\nu 2^m}{\nu(\nu-1)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant c_{33}(\alpha, s, P, \varepsilon) m^{(s+\varepsilon)\alpha+s-1}.$$

因为对于任意 $(n_1, \cdots, n_s) \neq (0, \cdots, 0)$, $\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s < n^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}$ 皆有

$$\langle \sum \alpha_k n_k \rangle > \frac{c_{31}(P, \varepsilon)}{n^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}} \left(\frac{2\alpha}{\alpha-1} \log_2 n \right)^{s+\varepsilon}},$$

所以当 $m \geqslant \frac{2\alpha}{\alpha-1} \log_2 n$ 时, $\sum_m = 0$. 因此

$$\sum{}''' \leqslant \frac{1}{2^\alpha(2n+1)^\alpha} \left[\sum_{m=1}^{\left[\frac{2\alpha}{\alpha-1}\log_2 n\right]} \sum_m + \right.$$

$$\left. + \sum_{\langle \sum \alpha_k n_k \rangle > \frac{c_{31}(P,\varepsilon)}{4}} \frac{1}{(\bar{n}_1 \cdots \bar{n}_s)^\alpha \langle \sum \alpha_k n_k \rangle^\alpha} \right] <$$

$$< c_{34}(\alpha, s, P, \varepsilon) n^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\left[\frac{2\alpha}{\alpha-1}\log_2 n\right]} m^{(s+\varepsilon)\alpha+s-1} <$$

$$< c_{35}(\alpha, s, P, \varepsilon) n^{-\alpha} \log^{(s+\varepsilon)(\alpha+1)} n. \tag{11}$$

由(6),(11)可知

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \Omega_1 \leqslant C \cdot c_{28}(\alpha, s, P, \varepsilon) n^{-\alpha} \log^{(s+\varepsilon)(\alpha+1)} n.$$

定理証完。

附記 1. 定理 1 是一个存在定理，由証明的过程可見，若能找到点 P，使对所有的 $(n_1, \cdots, n_s) \neq (0, \cdots, 0)$ 皆有

$$\langle \sum \alpha_k n_k \rangle > \frac{c_{31}(P, \varepsilon)}{\prod_{k=1}^{s} (\bar{n}_k (\overline{\log_2 \bar{n}_k}))^{1+\frac{\varepsilon}{s}}} > 0,$$

則 P 点卽能使 (3) 式成立。

附記 2. 由定理 17.1 可知，定理 1 所給出的誤差的主阶亦是臻于至善的。

§ 23. 重积分与单积分

命 $f(x_1, \cdots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$，则

$$f(a_1x, \cdots, a_sx) = C(0, \cdots, 0) +$$

$$+ \sum_{-\infty}^{\infty} \cdots \sum{}' C(m_1, \cdots, m_s) e^{2\pi i(a_1m_1+\cdots+a_sm_s)x}. \quad (1)$$

由于当 n 为整数时

$$\int_0^1 e^{2\pi int} dt = \begin{cases} 1, & \text{当} \quad n = 0, \\ 0, & \text{当} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

所以取 $a_1, \cdots, a_s$ 皆为整数，积分 (1) 式得

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \int_0^1 f(a_1x, \cdots, a_sx) dx =$$

$$= - \sum_{a_1m_1+\cdots+a_sm_s=0}{}' C(m_1, \cdots, m_s).$$

这就是重积分与单积分之間的关系．因此問題归結为如何选择 $a_1, \cdots, a_s$ 使用单积分来逼近重积分的誤差最小，即使

$$\left| \sum_{a_1m_1+\cdots+a_sm_s=0}{}' C(m_1, \cdots, m_s) \right| \leqslant C \sum_{a_1m_1+\cdots+a_sm_s=0}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^\alpha} =$$

$$= C\Omega_2 \text{(定义)} \quad (2)$$

最小．

对于 $q \geqslant 2$，命 $p_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 为适合 $q < p_1 < p_2 < \cdots < < p_s \leqslant 2^s q$ 的素数（关于这些素数的存在性，請見 [15]，第五章）．取

$$a_i = \frac{p_1 \cdots p_s}{p_i} \quad (1 \leqslant i \leqslant s), \quad (3)$$

则由

$$a_1m_1 + \cdots + a_sm_s = 0$$

可知

$$p_i | m_i \quad (1 \leqslant i \leqslant s).$$

因此

$$\Omega_1 = \sum_{n_1+\cdots+n_s=0}{}' \frac{1}{[(\overline{p_1 n_1})\cdots(\overline{p_s n_s})]^\alpha} < \frac{1}{q^{2\alpha}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{n}^\alpha}\right)^s =$$
$$= \frac{(2\zeta(\alpha)+1)^s}{q^{2\alpha}}.$$

故得

定理 1. 命 $q \geqslant 2$, $p_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 为适合 $q < p_1 < \cdots < < p_s \leqslant 2^s q$ 的 s 个素数,則

$$\left| \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_s) dx_1 \cdots dx_s - \right.$$
$$\left. - \int_0^1 f(a_1 x, \cdots, a_s x) dx \right| \leqslant C \frac{(2\zeta(\alpha)+1)^s}{q^{2\alpha}},$$

此处 $a_i = p_1 \cdots p_s / p_i (1 \leqslant i \leqslant s)$.

附記 1. 关于重积分与单积分的关系，請参考徐利治的文章[40].

附記 2. 以下三节，我們将討論极值系数法在插入法及积分方程数值解法上的应用. 在此我們須說明，本书仅限于在函数类 $H_s^\alpha(C)$ 及 $E_s^\alpha(C)$ 上討論重积分的数值計算方法，而在一些其他条件之下的数值积分方法，在此都不拟論及. 例如假定 G_s 上的函数有 $q(>1)$ 級有界連續偏微商

$$\left| \frac{\partial^r f(x_1, \cdots, x_s)}{\partial x_1^{i_1} \cdots \partial x_s^{i_s}} \right| < C$$

$$(i_j \geqslant 0,\ i_1 + \cdots + i_s = r \leqslant q,\ C \text{ 为常数}),$$

或假定函数 $f(x_1, \cdots, x_s)$ 有絕对收斂的 Fourier 級数,而其 Fourier 系数满足

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum |C(m_1, \cdots, m_s)(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha|^2 < C$$

$$\left(\alpha > \frac{1}{2} \text{ 及 } C \text{ 为常数}\right)$$

等等. 关于这些方面的文献,在此亦不列举了.

§ 24. 函数族 $E_s^\alpha(C)$ 上的插值公式

本节将討論极值系数法在插值法方面的应用.

命 $s \geqslant 2$, n 与 n_1 皆为正整数, 且满足 $1 < n_1 < n$. 又命

$$\Delta = \int_0^1 \cdots \int_0^1 \left| f(x_1, \cdots, x_s) - \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} f\left(\frac{a_1 t}{n}, \cdots, \frac{a_s t}{n}\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, \sigma_{t,a}(x_1, \cdots, x_s) \right|^2 dx_1 \cdots dx_s, \tag{1}$$

此处

$$\sigma_{t,a}(x_1, \cdots, x_s) = \sum_{\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s < n_1} e^{2\pi i \left[m_1 \left(x_1 - \frac{a_1 t}{n}\right) + \cdots + m_s \left(x_s - \frac{a_s t}{n}\right) \right]}. \tag{2}$$

本节将証明下面三个定理.

定理 1[34,41]. 命 $n = p > s$ 为素数及 $n_1 = [p^{\frac{2\alpha}{4\alpha-1}} \log^{-\frac{(2\alpha-1)(s-1)}{4\alpha-1}} p] + 2$, 则存在 a, 当 $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $\cdots$, $a_s = a^{s-1}$ 时

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \Delta \leqslant C^2 \cdot c_{36}(\alpha, s) p^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}} \log^{\frac{4\alpha^2}{4\alpha-1}(s-1)} p.$$

定理 2[34,41]. 命 $n = p > s$ 为素数, 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \delta(\varepsilon)$ 满足 $\alpha - 1 > \delta > 0$, $\varepsilon > \dfrac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1} - \dfrac{(2\alpha-\delta)(2\alpha-1-\delta)}{4\alpha-1-\delta}$.

又命 $n_1 = [p^{\frac{2\alpha-\delta}{4\alpha-1-\delta}}] + 1$; 则存在 a, 当 $a_1 = 1$, $\cdots$, $a_s = a^{s-1}$ 时

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \Delta \leqslant C^2 \cdot c_{37}(\alpha, \varepsilon)^s \cdot s! p^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1} + \varepsilon}.$$

定理 3[34,41]. 命 $n \geqslant 3$, 则对于任意 $n_1 < n$ 及 $a_1, \cdots, a_s$ 皆有

$$\sup_{f \in E_s^\alpha(C)} \Delta \geqslant \frac{C^2}{\alpha} n^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}}.$$

因此，由定理 3 可以看出定理 1 与定理 2 已不能再允許有本質的改进了．换言之，誤差的主阶不能比 $n^{\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}}$ 更低．

在証明定理 1 与定理 2 之前先証明次之引理．

引 1． 命 $\alpha>1$，$l_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 均为整数，且 $\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s>3^s$，$n_1$ 为适合 $1\leqslant n_1\leqslant\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s/3^s$ 的整数，則

$$\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s\leqslant n_1}\frac{1}{[(\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_s+m_s})]^\alpha}<s!(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^s\frac{n_1^\alpha}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s)^\alpha}.\qquad(3)$$

証．当 $s=1$ 时

$$\sum_{\bar{m}_1\leqslant n_1}\frac{1}{(\overline{l_1+m_1})^\alpha}\leqslant\left(\frac{3}{2}\right)^\alpha\frac{3n_1}{\bar{l}_1^\alpha}<(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))\frac{n_1^\alpha}{\bar{l}_1^\alpha}.\qquad(4)$$

現在假定引理当 $s\leqslant k$ 时成立，則当 $s=k+1$ 时，首先由假定可知当 $\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant n_1$ 时，至少有一个 $\bar{m}_i<\bar{l}_i/2$，所以

$$\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant n_1}\frac{1}{[(\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_{k+1}+m_{k+1}})]^\alpha}\leqslant\Sigma_1+\cdots+\Sigma_{k+1},\qquad(5)$$

此处

$$\Sigma_i=\sum_{\substack{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant n_1\\ \bar{m}_i<\frac{\bar{l}_i}{2}}}\frac{1}{[(\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_{k+1}+m_{k+1}})]^\alpha}.\qquad(6)$$

1）如果 $n_1\leqslant\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1}/3^k$，則由归納法假定可知

$$\Sigma_1\leqslant\sum_{\substack{\bar{m}_1\leqslant n_1\\ \bar{m}_1<\frac{\bar{l}_1}{2}}}\frac{1}{(\overline{l_1+m_1})^\alpha}\sum_{\bar{m}_2\cdots\bar{m}_{k+1}\leqslant\frac{n_1}{\bar{m}_1}}\frac{1}{[(\overline{l_2+m_2})\cdots(\overline{l_{k+1}+m_{k+1}})]^\alpha}<$$

$$<k!(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^k\frac{n_1^\alpha}{(\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}\sum_{\bar{m}_1<\frac{\bar{l}_1}{2}}\frac{1}{[\bar{m}_1(\overline{l_1+m_1})]^\alpha}<$$

$$<k!(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^k\frac{2^\alpha\cdot3\zeta(\alpha)n_1^\alpha}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_{k+1})^\alpha}.$$

2）如果 $n_1>\frac{\bar{l}_2\cdots\bar{l}_{k+1}}{3^k}$，則

$$
\begin{aligned}
\sum\nolimits_1 \leqslant & \sum_{\bar m_1 < \frac{3^k n_1}{\bar l_2 \cdots \bar l_{k+1}}}' \frac{1}{(\overline{l_1 + m_1})^\alpha} \cdot \\
& \cdot \sum_{\bar m_2 \cdots \bar m_{k+1} \leqslant \frac{n_1}{\bar m_1}} \frac{1}{[(\overline{l_2 + m_2}) \cdots (\overline{l_{k+1} + m_{k+1}})]^\alpha} + \\
& + \sum_{\frac{3^k n_1}{\bar l_2 \cdots \bar l_{k+1}} \leqslant \bar m_1 < \frac{\bar l_1}{2}} \frac{1}{(\overline{l_1 + m_1})^\alpha} \cdot \\
& \cdot \sum_{\bar m_2 \cdots \bar m_{k+1} \leqslant \frac{n_1}{\bar m_1}} \frac{1}{[(\overline{l_2 + m_2}) \cdots (\overline{l_{k+1} + m_{k+1}})]^\alpha} < \\
& < (3\zeta(\alpha))^k \sum_{\bar m_1 < \frac{3^k n_1}{\bar l_2 \cdots \bar l_{k+1}}} \frac{1}{(\overline{l_1 + m_1})^\alpha} + \\
& + \frac{k!(4^{3\alpha}\zeta(\alpha))^k n_1^\alpha}{(\bar l_2 \cdots \bar l_{k+1})^\alpha} \sum_{1 \leqslant \bar m_1 < \frac{\bar l_1}{2}} \frac{1}{[\bar m_1 (\overline{l_1 + m_1})]^\alpha} < \\
& < 3^{k+\alpha+1}\zeta(\alpha)^k \frac{3^k n_1}{\bar l_1^\alpha \bar l_2 \cdots \bar l_{k+1}} + \frac{k!(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^k n_1^\alpha}{(\bar l_2 \cdots \bar l_{k+1})^\alpha} \cdot \\
& \cdot \frac{2^{\alpha+1}\zeta(\alpha)}{\bar l_1^\alpha} \leqslant (3^{k+\alpha k+\alpha+1}\zeta(\alpha)^k + k! 3^{4\alpha k} \cdot \\
& \cdot 2^{\alpha+1}\zeta(\alpha)^{k+1}) \frac{n_1^\alpha}{(\bar l_1 \cdots \bar l_{k+1})^\alpha},
\end{aligned}
$$

总之得到

$$
\sum\nolimits_1 \leqslant (3^{k+\alpha k+\alpha+1}\zeta(\alpha)^k + k! 3^{4\alpha k} \cdot 2^{\alpha+2}\zeta(\alpha)^{k+1}) \frac{n_1^\alpha}{(\bar l_1 \cdots \bar l_{k+1})^\alpha}. \tag{7}
$$

将(7)的左端换为 $\sum_i (2 \leqslant i \leqslant k+1)$，不等式仍成立。由于

$$
\begin{aligned}
(k+1)(3^{k+\alpha k+\alpha+1}\zeta(\alpha)^k + k! 3^{4\alpha k} \cdot 2^{\alpha+2}\zeta(\alpha)^{k+1}) = \\
= (k+1)!(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^{k+1}\left(\frac{3^{-3\alpha k-3\alpha+k+1}}{k!\zeta(\alpha)} + \frac{2^{\alpha+2}}{3^{4\alpha}}\right) < \\
< (k+1)!(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^{k+1},
\end{aligned}
$$

故由（5）式及归納法卽得引理.

定理 1 的証明. 因为

$$\int_0^1 e^{2\pi imt}dt=\begin{cases}1, & 当\quad m=0,\\ 0, & 当\quad m\neq 0,\end{cases}$$

所以

$$\Delta=\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s<n_1}\Bigg|C(m_1,\cdots,m_s)-$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}f\left(\frac{t}{p},\cdots,\frac{a^{s-1}t}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{m_1+\cdots+m_sa^{s-1}}{p}t}\Bigg|^2+$$

$$+\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s\geqslant n_1}|C(m_1,\cdots,m_s)|^2=\sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2. \qquad (8)$$

由于

$$C(m_1,\cdots,m_s)=$$

$$=\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\cdots,x_s)e^{-2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)}dx_1\cdots dx_s,$$

所以用 § 16 的方法可得

$$\left|C(m_1,\cdots,m_s)-\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}f\left(\frac{t}{p},\cdots,\frac{a^{s-1}t}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{m_1+\cdots+m_sa^{s-1}}{p}t}\right|=$$

$$=\left|\sum_{l_1+\cdots+l_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}{}' C(l_1+m_1,\cdots,l_s+m_s)\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{l_1+\cdots+l_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}{}'\frac{1}{[(\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_s+m_s})]^{\alpha}},$$

此处 $\sum'$ 表示去掉 $l_1=\cdots=l_s=0$ 一項. 由于

$$\frac{\bar{l}}{\bar{m}\,(\overline{l+m})}\leqslant 2,$$

所以

$$\sum\nolimits_1\leqslant$$

$$\leqslant C^2\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s<n_1}\left(\sum_{l_1+\cdots+l_sa^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}{}'\frac{1}{[(\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_s+m_s})]^{\alpha}}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant C^2 \sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s<n_1} \sum_{l_1+\cdots+l_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}' \frac{1}{[(\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_s+m_s})]^{\alpha}}\cdot$$

$$\cdot \sum_{l_1'+\cdots+l_s' a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}' \prod_{\nu=1}^{s}\left(\frac{\bar{m}_\nu}{\bar{l}_\nu'}\right)^{\alpha}\left(\frac{\bar{l}_\nu'}{\bar{m}_\nu(\overline{l_\nu'+m_\nu})}\right)^{\alpha}\leqslant$$

$$\leqslant C^2 2^{\alpha s} n_1^{\alpha} \sum_{l_1'+\cdots+l_s' a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}' \frac{1}{(\bar{l}_1'\cdots\bar{l}_s')^{\alpha}}\cdot$$

$$\cdot \sum_{l_1+\cdots+l_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}' \sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s<n_1} \frac{1}{[(\overline{l_1+m_1})\cdots(\overline{l_s+m_s})]^{\alpha}}.$$

取 a 适合定理 18.1 的要求. 故同余式

$$l_1+\cdots+l_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)$$

的非零解皆适合

$$\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s>\frac{p}{2s\cdot 3^s\log^{s-1}3p}.$$

故存在 $c_{38}(s)$, 当 $p>c_{38}(s)$ 时

$$\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s>3^s n_1>3^s.$$

故由引 1 及定理 18.1 可知

$$\sum\nolimits_1\leqslant C^2\cdot s!2^{\alpha s}(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^s n_1^{2\alpha}\left(\sum_{l_1+\cdots+l_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}' \frac{1}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s)^{\alpha}}\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot s!6^{\alpha s}(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^s(2s)^{2\alpha}(5\zeta(\alpha))^{2s}n_1^{2\alpha}p^{-2\alpha}\log^{2(s-1)\alpha}3p\leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot c_{39}(\alpha,s)p^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}}\log^{\frac{4\alpha^2}{4\alpha-1}(s-1)}p.$$

又由引理 18.1 可知

$$\sum\nolimits_2\leqslant C^2\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s\geqslant n_1}\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^{2\alpha}}\leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot(5\zeta(2\alpha))^s n_1^{-2\alpha+1}\log^{s-1}3p\leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot c_{40}(\alpha,s)p^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}}\log^{\frac{4\alpha^2}{4\alpha-1}(s-1)}p.$$

故由 (8) 式即得定理. 而当 $p\leqslant c_{38}(s)$ 时, 显然可取 $c_{36}(\alpha,s)$ 充分大使定理成立. 定理 1 証完.

定理 2 的证明. 取 a 适合定理 16.1 的要求,则同余式

$$l_1+\cdots+l_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)$$

的非零解适合

$$\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s>\frac{p}{2s\left(3\zeta\left(1+\frac{\delta}{2\alpha}\right)\right)^s p^{\delta/2\alpha}}.$$

故存在 $c_{41}(\alpha,\varepsilon)$,当 $p>c_{41}(\alpha,\varepsilon)^s$ 时

$$\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s>3^s n_1>3^s.$$

故由定理 16.1 可知

$$\sum\nolimits_1\leqslant C^2\cdot s!2^{\alpha s}(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^s n_1^{2\alpha}\Bigg(\sum_{l_1+\cdots+l_s a^{s-1}\equiv 0(\bmod p)}{}' \frac{1}{(\bar{l}_1\cdots\bar{l}_s)^\alpha}\Bigg)^2\leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot s!2^{\alpha s}(3^{4\alpha}\zeta(\alpha))^s(2s)^{2\alpha}\left(3\zeta\left(1+\frac{\delta}{2\alpha}\right)\right)^{2s\alpha}n_1^{2\alpha}p^{-2\alpha+\delta}\leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot s!c_{42}(\alpha,\delta)p^{-\frac{(2\alpha-\delta)(2\alpha-1-\delta)}{4\alpha-1-\delta}}.$$

又由于

$$\sum\nolimits_2\leqslant C^2\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s\geqslant n_1}\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^{2\alpha}}=$$

$$=C^2\sum_{\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s\geqslant n_1}\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^{2\alpha-1-\delta}}\cdot\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^{1+\delta}}\leqslant$$

$$\leqslant C^2 n_1^{-2\alpha+1+\delta}\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum\frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^{1+\delta}}\leqslant$$

$$\leqslant C^2(3\zeta(1+\delta))^s n_1^{-2\alpha+1+\delta}\leqslant$$

$$\leqslant C^2\cdot c_{41}(\delta)p^{-\frac{(2\alpha-\delta)(2\alpha-1-\delta)}{4\alpha-1-\delta}}.$$

故得定理 2. 而当 $p\leqslant c_{41}(\alpha,\varepsilon)^s$ 时,可以取 $c_{37}(\alpha,\varepsilon)$ 充分大使定理成立.

定理 3 的证明. 取

$$f(x_1,\cdots,x_s)=\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\frac{Ce^{2\pi i(m_1x_1+m_2x_2)}}{(\bar{m}_1\bar{m}_2)^\alpha},$$

则 $f(x_1,\cdots,x_s)\in E_s^\alpha(C)$. 而

$$\Delta = C^2\sum_{\bar m_1\bar m_2<n_1}\left(\sum_{a_1l_1+a_2l_2\equiv 0(\bmod n)}{}' \frac{1}{[(\overline{l_1+m_1})(\overline{l_2+m_2})]^\alpha}\right)^2+$$

$$+C^2\sum_{\bar m_1\bar m_2\geqslant n_1}\frac{1}{(\bar m_1\bar m_2)^{2\alpha}}=C^2(\Sigma_1+\Sigma_2).$$

不妨假定 $a_1=-1$, $(a_2,n)=1$. 命 $\frac{p_t}{q_t}$ 为 $\frac{a_2}{n}$ 的 t 次漸近分数; $p_m/q_m=a_2/n$, $1=q_0\leqslant q_1<\cdots<q_r\leqslant n_1<q_{r+1}\leqslant\cdots\leqslant\leqslant q_m=n$. 由于

$$|p_mq_t-q_mp_t|\leqslant\frac{q_m}{q_{t+1}}\,(0\leqslant t\leqslant m-1),$$

所以

$$\Sigma_1\geqslant\sum_{\bar m_1\bar m_2<n_1}\frac{1}{[(\overline{p_mq_r-q_mp_r+m_1})(\overline{q_r+m_2})]^{2\alpha}}>$$

$$>\left(\frac{q_{r+1}}{q_m}\right)^{2\alpha}>n_1^{2\alpha}n^{-2\alpha}\quad(\text{取 } m_1=0,\ m_2=q_r-1).$$

現在估計 Σ_2:

$$\Sigma_2>\sum_{\bar m_1\geqslant n_1}\frac{1}{\bar m_1^{2\alpha}}>2\int_{n_1}^{\infty}\frac{dt}{t^{2\alpha}}=\frac{2}{2\alpha-1}n_1^{-2\alpha+1}>\frac{n_1^{-2\alpha+1}}{\alpha},$$

故由 (9) 式得

$$\Delta>\frac{C^2}{\alpha}(n_1^{2\alpha}n^{-2\alpha}+n_1^{-2\alpha+1})\geqslant\frac{C^2}{\alpha}n^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}}.$$

定理証完.

当 $s=2$ 时, 在証明定理 1 的过程中, 用定理 19.1 代替定理 18.1, 并取 $n=q_m$, $a_1=1$, $a_2=q_{m-1}$, 及 $n_1=[q_m^{\frac{2\alpha}{4\alpha-1}}\log^{-\frac{1}{4\alpha-1}}q_m]+1$, 則得

定理 4. 命 $n=q_m$, $a_1=1$, $a_2=q_{m-1}\,(m>3)$ 及 $n_1==[q_m^{\frac{2\alpha}{4\alpha-1}}\log^{-\frac{1}{4\alpha-1}}q_m]+1$, 則

$$\sup_{f\in E_2^\alpha(C)}\int_0^1\int_0^1\Big|f(x_1,x_2)-$$

$$-\frac{1}{q_m}\sum_{t=1}^{q_m} f\left(\frac{t}{q_m},\frac{q_{m-1}t}{q_m}\right)\sigma_{t,a}(x_1,x_2)\Big|^2 dx_1\,dx_2<$$

$$< C^2\cdot c_{44}(\alpha)q_m^{-\frac{2\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}}\log^{\frac{6\alpha-2}{4\alpha-1}}q_m.$$

与定理 1 及定理 3 相类似可得

定理 5[34,41]. 命 $n=p>s$ 为素数, $n_1=[p^{\frac{\alpha}{2\alpha-1}}\log^{\frac{(s-1)(1-\alpha)}{2\alpha-1}}p]+2$, 则存在 a, 当 $a_1=1,\ a_2=a,\ \cdots,\ a_s=a^{s-1}$ 时

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\Big|f(x_1,\cdots,x_s)-$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\frac{t}{p},\cdots,\frac{a^{s-1}t}{p}\right)\sigma_{t,a}(x_1,\cdots,x_s)\Big|<$$

$$< C\cdot c_{45}(\alpha,s)p^{-\frac{\alpha(\alpha-1)}{2\alpha-1}}\log^{\frac{\alpha^2(s-1)}{2\alpha-1}}p.$$

附記 1. Смоляк[42] 与 Рябенький[43] 首先将极値系数法用于插入法. 命

$$\Delta=\min_a\inf_{\varphi_k\in L_2}\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\int_0^1\cdots\int_0^1\Big|f(x_1,\cdots,x_s)-$$

$$-\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} f\left(\frac{a_1t}{n},\cdots,\frac{a_st}{n}\right)\varphi_k(x_1,\cdots,x_s)\Big|^2dx_1\cdots dx_s,\quad(9)$$

則 Смоляк[42] 的結果可以敍述为

$$\frac{C^2}{2n^\alpha}\leqslant\Delta\leqslant C^2\cdot c_{46}(\alpha,s)\frac{\log^{(2s-1)\alpha+s}n(\log\log n)^{2s}}{n^{\alpha-\frac{1}{2}}},$$

此处 $\alpha\geqslant\frac{3}{2}$, 且上界为对 $n=p>s$ 的素数时成立.

Рябенький[43] 的結果为: 当 $n=p>s$ 的素数时, 存在 a, 当 $a_1=1,\cdots,a_s=a^{s-1}$ 时

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\Delta\leqslant C^2\cdot c_{47}(\alpha,s)p^{-\alpha+\frac{1}{2}}\log^{(\alpha+\frac{1}{2})s-1}p,$$

此处 $n_1=[\sqrt{p}\log^{-\frac{s}{2}}p]$. 对应于定理 5，他的结果可以写成为

$$\sup_{f\in E_s^\alpha(C)}\Big|f(x_1,\cdots,x_s)-$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}f\left(\frac{t}{p},\cdots,\frac{a^{s-1}t}{p}\right)\sigma_{t,a}(x_1,\cdots,x_s)\Big|<$$

$$<C\cdot c_{48}(\alpha,s)p^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\log^{\frac{\alpha+1}{2}s-1}p. \tag{10}$$

除此而外，当 $\alpha>3$ 时，对于某些特殊的 a，Коробов[44] 曾改进了(10)式. 但在他的表达式中，需依赖于

$$\frac{\partial^{(\tau_1+\cdots+\tau_s)r}f\left(\frac{a_1t}{p},\cdots,\frac{a_st}{p}\right)}{\partial x_1^{\tau_1 r}\cdots\partial x_s^{\tau_s r}},\quad 1\leqslant t\leqslant p,$$

此处 $r=\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]$, $\tau_j=0$ 或 $1(1\leqslant j\leqslant s)$.

附記 2. 若用矩形法的推广，则命 $n=k^s(k\geqslant 2)$ 及

$$Q(x_1,\cdots,x_s)=\frac{1}{n}\sum_{l_1=1}^{k}\cdots\sum_{l_s=1}^{k}f\left(\frac{l_1}{k},\cdots,\frac{l_s}{k}\right)\cdot$$

$$\cdot\sum_{\bar m_1\cdots\bar m_s<n_1}e^{2\pi i\left[m_1\left(x_1-\frac{l_1}{k}\right)+\cdots+m_s\left(x_s-\frac{l_s}{k}\right)\right]}. \tag{11}$$

特别取

$$f(x_1,\cdots,x_s)=C\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{m_s=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m_1x_1+\cdots+m_sx_s)}}{(\bar m_1\cdots\bar m_s)^\alpha},$$

则 $f(x_1,\cdots,x_s)\in E_s^\alpha(C)$，而且

$$\int_0^1\cdots\int_0^1|f(x_1,\cdots,x_s)-Q(x_1,\cdots,x_s)|^2dx_1\cdots dx_s=$$

$$=C^2\sum_{\bar m_1\cdots\bar m_s<n_1}\Bigg(\sum_{\substack{k|r_i\\1\leqslant i\leqslant s}}'\frac{1}{[\overline{(r_1+m_1)}\cdots\overline{(r_s+m_s)}]^\alpha}\Bigg)^2+$$

$$+C^2\sum_{\bar m_1\cdots\bar m_s\geqslant n_1}\frac{1}{(\bar m_1\cdots\bar m_s)^{2\alpha}}\geqslant$$

$$\geqslant\begin{cases}C^2, & 当 \quad n_1 > k, \\ \dfrac{C^2}{2\alpha-1}k^{-2\alpha+1}=\dfrac{C^2}{2\alpha-1}n^{-\frac{2\alpha-1}{s}}, & 当 \quad n_1 \leqslant k,\end{cases}$$

因此用矩形法来处理这一問題，誤差的阶不能比 $n^{-\frac{2\alpha-1}{s}}$ 更好，所以当 $s \geqslant 2$ 时，我們的結果比这結果强。

附記 3. 定理 1 建議了一个构造 s 維空間的函数的实用調和分析的方法：給了 G_s 中的 p 个函数值

$$f\left(\left\{\frac{t}{p}\right\}, \left\{\frac{at}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a^{s-1}t}{p}\right\}\right) \quad (1 \leqslant t \leqslant p),$$

我們建議用

$$\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p} f\left(\left\{\frac{t}{p}\right\}, \cdots, \left\{\frac{a^{s-1}t}{p}\right\}\right)\sigma_{t,a}(x_1, \cdots, x_s)$$

作为函数 $f(x_1, \cdots, x_s)$ 的实用調和分析，此处 a, n_1 及 $\sigma_{t,a}(x_1, \cdots, x_s)$ 均如定理 1 所示。

§ 25. Fredholm 型积分方程的漸近解法

本节将研究第二类多重 Fredholm 型积分方程

$$\varphi(x_1, \cdots, x_s) = \lambda \int_0^1 \cdots \int_0^1 K(x_1, \cdots, x_s; y_1, \cdots, y_s) \cdot$$
$$\cdot \varphi(y_1, \cdots, y_s) dy_1 \cdots dy_s + f(x_1, \cdots, x_s) \tag{1}$$

的漸近解問題. 为簡单起見,将 (1) 式記为

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_s} K(P; Q) \varphi(Q) dQ + f(P), \tag{2}$$

此处 $P = (x_1, \cdots, x_s)$, $Q = (y_1, \cdots, y_s)$.

引入条件

$$f(P) \in E_s^\alpha(C), \; K(P; Q) \in E_{2s}^\alpha(C). \tag{3}$$

在解方程 (2) 之前,先講次之引理.

引 1. 若 $f_1(P) \in E_s^\alpha(C)$, $f_2(P) \in E_s^\alpha(C)$, 則

$$f_1(P) + f_2(P) \in E_s^\alpha(C_1 + C_2),$$
$$f_1(P) f_2(P) \in E_s^\alpha\left(C_1 C_2 \cdot 2^{(\alpha+1)s}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^s\right).$$

証. 命 $C_1(m_1, \cdots, m_s)$ 与 $C_2(m_1, \cdots, m_s)$ 分别表示 $f_1(P)$ 与 $f_2(P)$ 的 Fourier 系数, 則 $f_1(P) + f_2(P)$ 的 Fourier 系数为 $C_1(m_1, \cdots, m_s) + C_2(m_1, \cdots, m_s)$. 由于

$$|C_1(m_1, \cdots, m_s) + C_2(m_1, \cdots, m_s)| \leqslant$$
$$\leqslant |C_1(m_1, \cdots, m_s)| + |C_2(m_1, \cdots, m_s)| \leqslant \frac{C_1 + C_2}{(\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_s)^\alpha}$$

故 $f_1(P) + f_2(P) \in E_s^\alpha(C_1 + C_2)$.

又由于

$$f_1(P) f_2(P) = \sum \overset{\infty}{\underset{-\infty}{\cdots}} \sum C_1(m_1, \cdots, m_s) C_2(n_1, \cdots, n_s) \cdot$$
$$\cdot e^{2\pi i[(m_1+n_1)x_1 + \cdots + (m_s+n_s)x_s]} =$$

$$= \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{l_s=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} C_1(m_1, \cdots, m_s) \cdot$$

$$\cdot C_2(l_1 - m_1, \cdots, l_s - m_s) \Big] e^{2\pi i (l_1 x_1 + \cdots + l_s x_s)}$$

及

$$\left| \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} C_1(m_1, \cdots, m_s) C_2(l_1 - m_1, \cdots, l_s - m_s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C_2 \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{m}_1 \cdots \overline{m}_s)^\alpha} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{[(\overline{l_1 - m_1}) \cdots (\overline{l_s - m_s})]^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C_2 \prod_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{m_\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\overline{m}_\nu (\overline{l_\nu - m_\nu})]^\alpha} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C_2 \prod_{\nu=1}^{s} \left(\sum_{|m_\nu| \leqslant \frac{l_\nu}{2}} \frac{1}{[\overline{m}_\nu (\overline{l_\nu - m_\nu})]^\alpha} + \right.$$

$$\left. + \sum_{|m_\nu| > \frac{l_\nu}{2}} \frac{1}{[\overline{m}_\nu (\overline{l_\nu - m_\nu})]^\alpha} \right) \leqslant$$

$$\leqslant C_1 C_2 \prod_{\nu=1}^{s} \left(\frac{2^{\alpha+1}}{\overline{l}_\nu^\alpha} \sum_{m_\nu=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{m}_\nu^\alpha} \right) =$$

$$= C_1 C_2 \left[2^{\alpha+1} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right) \right]^s \Big/ (\overline{l}_1 \cdots \overline{l}_s)^\alpha,$$

所以

$$f_1(P) f_2(P) \in E_s^\alpha \left(C_1 C_2 \cdot 2^{(\alpha+1)s} \left(3 + \frac{2}{\alpha - 1} \right)^s \right).$$

引理証完.

当 λ 充分小时,命

$$\varphi(P) = f(P) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \varphi_\nu(P), \tag{4}$$

代入(2)式,比較 λ^ν 的系数得

$$\varphi_\nu(P) = \int_{G_{\nu_s}} K(P; Q_1)K(Q_1, Q_2)\cdots$$

$$\cdots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu)f(Q_\nu)dQ_1\cdots dQ_\nu. \tag{5}$$

因此

$$\varphi(P) = f(P) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda^\nu \int_{G_{\nu_s}} K(P; Q_1)K(Q_1; Q_2)\cdots$$

$$\cdots K(Q_{\nu-1}; Q_\nu)f(Q_\nu)dQ_1\cdots dQ_\nu. \tag{6}$$

由于

$$|f(P)| \leqslant C\sum_{-\infty}^{\infty}\cdots\sum \frac{1}{(\bar{m}_1\cdots\bar{m}_s)^\alpha} =$$

$$= C\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{m}^\alpha}\right)^s \leqslant C\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^s$$

及

$$|K(P; Q)| \leqslant C\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{2s},$$

所以

$$|K(P; Q_1)\cdots K(Q_{\nu-1}; Q_\nu)f(Q_\nu)| \leqslant C^{\nu+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{(2\nu+1)s}. \tag{7}$$

将(6)式改写为

$$\varphi(P) = f(P) + \int_{G_{ms}} F(P, Q_1, \cdots, Q_m)dQ_1\cdots dQ_m + R, \tag{8}$$

此处

$$F(P, Q_1, \cdots, Q_m) = \sum_{\nu=1}^{m} \lambda^\nu K(P, Q_1)\cdots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu)f(Q_\nu) \tag{9}$$

及

$$R = \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \lambda^\nu \int_{G_{\nu_s}} K(P; Q_1)\cdots K(Q_{\nu-1}; Q_\nu)f(Q_\nu)dQ_1\cdots dQ_\nu. \tag{10}$$

命 ε 为任意适合 $0<\varepsilon<\alpha-1$ 的正数，又命

$$\beta=2\alpha^2 s\log\left(6+\frac{8\alpha}{\varepsilon}\right),\quad \gamma=\log C+\beta\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right),\tag{11}$$

则当 $|\lambda|<e^{-\gamma}$ 时，由 (7) 式可知

$$|R|\leqslant\sum_{\nu=m+1}^{\infty}|\lambda|^{\nu}\int_{G_{\nu s}}|K(P;Q_1)\cdots$$

$$\cdots K(Q_{\nu-1};Q_\nu)f(Q_\nu)|dQ_1\cdots dQ_\nu\leqslant$$

$$\leqslant C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s\sum_{\nu=m+1}^{\infty}e^{-\frac{\nu\beta}{\varepsilon}}=$$

$$=C\frac{\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^2}{e^{\frac{\beta}{\varepsilon}}-1}\cdot e^{-\frac{m\beta}{\varepsilon}}.\tag{12}$$

就变数 $(Q_1,\cdots,Q_m)$ 而言，易知 $K(P;Q_1)\in E_s^\alpha\left(C\cdot\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s\right)\subset E_{ms}^\alpha\left(C\cdot\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s\right)$，$K(Q_{\mu-1};Q_\mu)\in E_{ms}^\alpha(C)(\mu\leqslant\nu)$，$f(Q_\nu)\in E_{ms}^\alpha(C)$，故由引 1 可知

$$F(P,Q_1,\cdots,Q_m)\in E_{ms}^\alpha(C'),\tag{13}$$

此处

$$C'\leqslant C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(|\lambda|C\cdot 2^{(\alpha+1)s}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s\right)^\nu\leqslant$$

$$\leqslant C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[\frac{2^{(\alpha+1)s}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^s}{2^{2\alpha^2 s}\left(3+\frac{4\alpha}{\varepsilon}\right)^{2\alpha^2 s}}\right]^\nu<2C.\tag{14}$$

故由定理 16.1 可知，当 $p>ms$ 为奇素数时，存在 a 使

$$\left|\int_{G_{ms}}F(P,Q_1,\cdots,Q_m)dQ_1\cdots dQ_m-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}F(P,M_{1,t},\cdots,M_{m,t})\right|<$$

$$< 2C \cdot p^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}\left(6+\frac{8\alpha}{\varepsilon}\right)^{ms\alpha} =$$

$$= 2C \cdot p^{-\alpha+\frac{\varepsilon}{2}} e^{\frac{m\beta}{2\alpha}}, \tag{15}$$

此处

$$M_{\nu,t} = \left(\frac{a^{(\nu-1)s}t}{p}, \cdots, \frac{a^{\nu s-1}t}{p}\right)(1 \leqslant \nu \leqslant m, 1 \leqslant t \leqslant p). \tag{16}$$

取

$$m = \left[\frac{\alpha\varepsilon \log p}{\beta}\right] + 1, \tag{17}$$

则由(8),(12),(15)得

定理 1[44,45]. 若 $|\lambda| < e^{-\gamma}$,则当 $p > ms$ 为素数时,存在整数 a 使方程(2)的解 $\varphi(P)$ 适合次之不等式

$$\left|\varphi(P) - \frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{m}\lambda^{\nu}K(P; M_{1,t})\cdots K(M_{\nu-1,t}; M_{\nu,t})f(M_{\nu,t})\right| <$$

$$< C \cdot c_{49}(\alpha, s, \varepsilon)p^{-\alpha+\varepsilon},$$

此处 γ, $M_{\nu,t}$ 及 m 的定义分别见(11), (16)及(17).

§26. Volterra 型积分方程的漸近解法

本节将研究第二类 Volterra 型积分方程

$$\varphi(x_1, \cdots, x_s) = \int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_s} K(x_1, \cdots, x_s; y_1, \cdots, y_s)\cdot$$
$$\cdot\varphi(y_1, \cdots, y_s)dy_1\cdots dy_s + f(x_1, \cdots, x_s) \tag{1}$$

的漸近解問題。将方程 (1) 簡記为

$$\varphi(P) = \int_{T_P} K(P; Q)\varphi(Q)dQ + f(P). \tag{2}$$

引入条件

$$f(P)\in E_s^\alpha(1),\ K(P; Q)\in E_{2s}^\alpha(1). \tag{3}$$

命

$$\varphi(P) = f(P) + \sum_{\nu=1}^{\infty}\varphi_\nu(P), \tag{4}$$

此处

$$\varphi_\nu(P) = \int_{T_P}\int_{T_{Q_1}}\cdots\int_{T_{Q_{\nu-1}}} G(P, Q_1, \cdots, Q_\nu)dQ_1\cdots dQ_\nu,$$
$$G(P, Q_1, \cdots, Q_\nu) = K(P; Q_1)\cdots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu)f(Q_\nu),$$
$$Q_\nu = (y_{(\nu-1)s+1}, \cdots, y_{\nu s})\quad (\nu\geqslant 1). \tag{5}$$

由于

$$|G(P, Q_1, \cdots, Q_\nu)| < \left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{(2\nu+1)s}, \tag{6}$$

所以

$$|\varphi_\nu(P)| \leqslant \int_{T_P}\cdots\int_{T_{Q_{\nu-1}}} |G(P, \cdots, Q_\nu)|dQ_1\cdots dQ_\nu <$$
$$< \left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{(2\nu+1)s}\int_{T_P}\cdots\int_{T_{Q_{\nu-1}}} dQ_1\cdots dQ_\nu \leqslant$$
$$\leqslant \left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{(2\nu+1)s}\left(\int_0^1\int_0^{z_1}\cdots\int_0^{z_{\nu-1}} dz_1\cdots dz_\nu\right)^s =$$

$$= \frac{\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{(2\nu+1)s}}{\nu!^s}. \tag{7}$$

命 p 为素数及

$$m = \left[\frac{\alpha(2\alpha - 1)}{s(4\alpha - 1)} \cdot \frac{\log p}{\log\log p}\right]. \tag{8}$$

不妨假定 $m > 2\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^2$. 因此

$$\left|\sum_{\nu=m+1}^{\infty} \varphi_\nu(P)\right| \leqslant \sum_{\nu=m+1}^{\infty} |\varphi_\nu(P)| <$$

$$< \sum_{\nu=m+1}^{\infty} \frac{\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{(2\nu+1)s}}{\nu!^s} <$$

$$< \frac{\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{(2m+3)s}}{m!^s} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} =$$

$$= \frac{\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^{(2m+3)s}}{m!^s}. \tag{9}$$

对于 $\varepsilon > 0$, 命

$$n_1 = [p^{\frac{2\alpha-\delta}{4\alpha-1-\delta}}] + 1, \tag{10}$$

此处 $\alpha - 1 > \delta > 0$ 充分小, 且满足

$$\varepsilon > \frac{2\alpha(2\alpha - 1)}{4\alpha - 1} - \frac{(2\alpha - \delta)(2\alpha - 1 - \delta)}{4\alpha - 1 - \delta}.$$

又命

$$\tilde{G}(P, Q_1, \cdots, Q_\nu) = \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{p} K(P; M_{1,t}) \cdots$$

$$\cdots K(M_{\nu-1,t}; M_{\nu,t}) f(M_{\nu,t}) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\bar{m}_1 \cdots \bar{m}_{\nu s} < n_1} e^{-2\pi i(m_1 + \cdots + m_{\nu s} a^{\nu s - 1}) t/p} \cdot e^{2\pi i(m_1 y_1 + \cdots + m_{\nu s} y_{\nu s})}, \tag{11}$$

此处

$$M_{\nu,t}=\left(\frac{a^{(\nu-1)s}t}{p},\ \cdots,\ \frac{a^{s\nu-1}t}{p}\right)(1\leqslant\nu\leqslant m,\ 1\leqslant t\leqslant p).\quad(12)$$

由于

$$G(P,Q_1,\cdots,Q_\nu)\in E^{\alpha}_{\nu s}\left(2^{(\alpha+1)s\nu}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{(\nu+1)s}\right),\quad(13)$$

所以由 Буняковский–Schwarz 不等式及定理 24.2 可知存在 a 使

$$\left|\varphi_\nu(P)-\int_{T_P}\cdots\int_{T_{Q_{\nu-1}}}\widetilde{G}(P,\cdots,Q_\nu)dQ_1\cdots dQ_\nu\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_{T_P}\cdots\int_{T_{Q_{\nu-1}}}|G-\widetilde{G}|dQ_1\cdots dQ_\nu\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_{T_P}\cdots\int_{T_{Q_{\nu-1}}}dQ_1\cdots dQ_\nu}\cdot$$

$$\cdot\sqrt{\int_{G_{\nu s}}|G-\widetilde{G}|^2dQ_1\cdots dQ_\nu}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(\nu s)!^{1/2}}{\nu!^{s/2}}c_{50}(\alpha,s,\varepsilon)^\nu p^{-\frac{\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}+\frac{\varepsilon}{2}}.\quad(14)$$

命

$$B_{\nu,t}(P)=\sum_{\overline{m}_1\cdots\overline{m}_{\nu s}<n_1}e^{-2\pi i(m_1+\cdots+m_{\nu s}a^{\nu s-1})t/p}\cdot$$

$$\cdot\int_{T_P}\cdots\int_{T_{Q_{\nu-1}}}e^{2\pi i(m_1y_1+\cdots+m_{\nu s}y_{\nu s})}dQ_1\cdots dQ_\nu,\quad(15)$$

则由(14)得

$$\left|\sum_{\nu=1}^{m}\varphi_\nu(P)-\frac{1}{p}\sum_{t=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{m}B_{\nu,t}(P)K(P;M_{1,t})\cdots\right.$$

$$\left.\cdots K(M_{\nu-1,t};M_{\nu,t})f(M_{\nu,t})\right|<$$

$$<\frac{(ms)!^{1/2}}{(m!)^{s/2}}c_{51}(\alpha,s,\varepsilon)^m p^{-\frac{\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}+\frac{\varepsilon}{2}},\quad(16)$$

故由(4)，(9)，(16)及 Stirling 公式得

定理 1[37]. 当 $p > ms$ 为素数时，存在整数 a，使方程 (2) 的解适合次之不等式

$$\left| \varphi(P) - f(P) - \frac{1}{p} \sum_{t=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{m} B_{\nu,t}(P) K(P; M_{1,t}) \cdots \right.$$

$$\left. \cdots K(M_{\nu-1,t}; M_{\nu,t}) f(M_{\nu,t}) \right| <$$

$$< c_{52}(\alpha, s, \varepsilon) p^{-\frac{\alpha(2\alpha-1)}{4\alpha-1}+\varepsilon}, \qquad (17)$$

此处 m, $M_{\nu,t}$ 及 $B_{\nu,t}(P)$ 之定义分别見(8)，(12)及(15)。

附記 1. 关于 $C > 1$ 之情况，亦可以类似地加以处理．又在上节与本节中，对于非周期函数 $f(P)$ 与 $K(P; Q)$，也可以仿照 § 14 的方法加以处理。

附記 2. Шахов[46,47] 首先是利用 $E_s^\alpha(C)$ 上的插値公式来近似求解方程 (2)，他原来的結果为将不等式 (17) 之右端換为 $c_{53}(\alpha, s, \varepsilon) p^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

附記 3. 我們还可以处理形如

$$\varphi(x_1, \cdots, x_s, x_{s+1}, \cdots, x_{s+l}) =$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_0^{x_{s+1}} \cdots \int_0^{x_{s+l}} K(x_1, \cdots, x_{s+l}; y_1, \cdots, y_{s+l}) \cdot$$

$$\cdot \varphi(y_1, \cdots, y_{s+l}) dy_1 \cdots dy_{s+l} + f(x_1, \cdots, x_{s+l})$$

的积分方程，此处 $s \geqslant 0$, $l \geqslant 1$, $K(x_1, \cdots, x_{s+l}; y_1, \cdots, y_{s+l}) \in E_{2s+2l}^\alpha(1)$ 及 $f(x_1, \cdots, x_{s+l}) \in E_{s+l}^\alpha(1)$ (用本节的方法或将本节与上节的方法結合起来使用)。

附記 4. 极值系数法还可以用来研究某些偏微分方程的数値解法問題，請参看 Рябенький 的文章[48]。

附　录

极值系数表

(I)

$n=p$	$s=3$		
	$H(a)-1$	$a_1=a$	a_2
101	0.0703	40	85
101	0.0703	48	82
199	0.0214	30	104
199	0.0214	73	155
307	0.0114	75	99
307	0.0114	131	276
523	0.00454	78	331
523	0.00454	114	444
701	0.00319	215	660
701	0.00319	313	530
1069	0.00142	136	323
1069	0.00142	338	930
1543	0.00075	355	1042
1543	0.00075	552	733
2129	0.00044	359	1141
2129	0.00044	937	821
3001	0.00025	276	1151
3001	0.00025	772	1786
4001	0.00015	722	1154
4001	0.00015	1934	3422
5003	0.000105	1476	2271
5003	0.000105	1949	1324
6007	0.000070	592	2058
6007	0.000070	2831	1223
8191	0.000044	739	5515
8191	0.000044	3303	7588
10007	0.000033	544	5733
10007	0.000033	3072	583

(II)

$n=p$	$s=4$			
	$H(a)-1$	$a_2=a$	a_3	a_4
307	0.0906	42	229	101
307	0.0906	95	122	231
523	0.0412	178	304	243
523	0.0412	238	160	424
701	0.0281	82	415	382
701	0.0281	265	125	178
1069	0.0150	71	765	865
1069	0.0150	271	749	938
1543	0.00837	128	954	215
1543	0.00837	663	1357	122
2129	0.00500	766	1281	1906
2129	0.00500	970	2011	506
3001	0.00303	174	266	1269
3001	0.00303	1466	440	2826
4001	0.00200	113	766	2537
4001	0.00200	956	1708	440
5003	0.001480	792	1889	191
5003	0.001480	2053	2283	4191
6007	0.001009	1351	5080	3086
6007	0.001009	2610	162	2330
8191	0.000622	2488	5939	7859
8191	0.000622	3842	782	6538
10007	0.000486	1206	3421	2842
10007	0.000486	1784	430	6588

(III)

$n=p$	$s=5$				
	$H(a)-1$	$a_2=a$	a_3	a_4	a_5
1069	0.0962	63	762	970	177
1069	0.0962	526	874	54	610
1543	0.0580	58	278	694	134
1543	0.0580	133	716	1105	380
2129	0.0383	618	833	1705	1964
2129	0.0383	720	1053	236	1729
3001	0.0237	408	1409	1681	1620
3001	0.0237	890	2837	1089	2888
4001	0.0154	1534	568	3095	2544
4001	0.0154	1651	1120	658	2087
5003	0.0114	840	177	3593	1311
5003	0.0114	1352	1809	4304	519
6007	0.0085	509	780	558	1693
6007	0.0085	1487	593	4769	3243
8191	0.0055	1386	4302	7715	3735
8191	0.0055	2228	238	6040	7498
10007	0.0042	198	9183	6967	8507
10007	0.0042	1870	4457	8766	954

(IV)

$n=p$	$s=6$					
	$H(a)-1$	$a_2=a$	a_3	a_4	a_5	a_6
2129	0.186	41	1681	793	578	279
2129	0.186	727	537	792	954	1633
3001	0.123	233	271	122	1417	51
3001	0.123	322	1650	123	593	1883
4001	0.086	1751	1235	1945	844	1475
4001	0.086	1780	3609	2415	1626	1557
5003	0.063	2037	1882	1336	4803	2846
5003	0.063	2208	2342	3037	1676	3391
6007	0.050	312	1232	5943	4060	5250
6007	0.050	1521	746	5350	3872	2452
8191	0.034	1632	1349	6380	1399	6070
8191	0.034	3699	3631	6020	4842	5032
10007	0.027	2240	4093	1908	931	3984
10007	0.027	2399	1176	9257	2010	8623

(V)

$n=p_1p_2$	p	p_2	$s=3$				
			a	b	$G(b)-1$	a_2	a_3
20039	691	29	176	20	0.000016	5704	12319
28117	907	31	402	12	0.000008	19449	5600
39029	1259	31	535	5	0.000005	10607	26871
57091	1543	37	355	14	0.000002	48188	21101
82001	1907	43	275	10	0.000001	21252	67997
100063	2129	47	359	24	0.000001	28036	22431

(VI)

$n=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=4$					
			a	b	$G(b)-1$	a_2	a_3	a_4
20039	691	29	320	6	0.000276	19668	17407	14600
28117	907	31	316	3	0.000108	17549	1900	24455
39029	1259	31	483	9	0.000077	30699	34367	605
57091	1543	37	128	13	0.000056	52590	48787	38790
82001	1907	43	60	37	0.000031	57270	58903	17672
100063	2129	47	766	5	0.000019	92313	24700	95582

(VII)

$n=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=5$						
			a	b	$G(b)-1$	a_2	a_3	a_4	a_5
15019	653	23	193	15	0.0032	10641	2640	6710	784
20039	691	29	271	17	0.0022	11327	11251	12076	18677
33139	1069	31	63	17	0.0011	32133	17866	21281	32247
51097	1381	37	480	13	0.0006	44672	45346	7044	14242
71053	1733	41	828	12	0.0003	33755	65170	12470	6878
100063	2129	47	618	31	0.0002	90036	77477	27253	6222

(VIII)

$n=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=6$							
			a	b	$G(b)-1$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
15019	653	23	254	3	0.0197	8743	8358	6559	2795	772
20039	691	29	29	18	0.0123	5557	150	11951	2461	9179
33139	1069	31	63	8	0.0069	18236	1831	19143	5522	22910
51097	1381	37	264	15	0.0031	9931	7551	29682	44446	17340
71053	1733	41	680	11	0.0026	18010	3155	50203	6605	13328
100063	2129	47	727	20	0.0015	43307	15440	39114	43534	39955

(IX)

$n=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=7$								
			a	b	$G(b)-1$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
15019	653	23	32	19	0.0835	12439	2983	8607	7041	7210	6741
18101	787	23	173	7	0.0730	17487	14976	44	9186	7308	1936
24041	829	29	175	6	0.0463	1833	18190	21444	23858	1135	12929
33139	1069	31	159	16	0.0339	7642	9246	5584	23035	32241	30396
46213	1249	37	430	12	0.0210	37900	17534	41873	32280	15251	26909
57091	1543	37	82	14	0.0168	35571	45299	51436	34679	1472	8065
71053	1733	41	680	17	0.0131	31874	36082	13810	6605	68784	9848
100063	2129	47	718	30	0.0085	39040	62047	89839	6347	30892	64404

(X)

$n=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=8$									
			a	b	$G(b)-1$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
24041	829	29	32	12	0.1999	17471	21749	5411	12326	3144	21024	6252
33139	1069	31	313	17	0.1345	3520	29553	3239	1464	16735	19197	3019
46213	1249	37	351	19	0.0900	5347	30775	35645	11403	16894	32016	16600
57091	1543	37	438	21	0.0688	17411	46802	9779	16807	35302	1416	47755
71053	1733	41	104	38	0.0557	60759	26413	24409	48215	51048	19876	29096
100063	2129	47	86	20	0.0359	4344	58492	29291	60031	10486	22519	60985

(XI)

$n=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=9$										
			a	b	$G(b)-1$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
33193	1069	31	68	6	0.4915	68	4624	16181	6721	26221	26661	23442	3384
46213	1249	37	128	28	0.3262	8871	40115	20065	30352	15654	42782	17966	33962
57091	1543	37	117	11	0.2664	20176	12146	23124	2172	33475	5070	42339	36122
71053	1733	41	459	9	0.2021	26454	13119	27174	17795	22805	43500	45665	49857
100063	2129	47	636	17	0.1136	70893	53211	12386	27873	56528	16417	17628	14997
159053	3001	53	108	26	0.0846	60128	101694	23300	43576	57659	42111	85501	93062

(XII)

$n=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=10$											
			a	b	$G(b)-1$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
85633	4507	19	1611	9	0.614	37667	35345	3864	54821	74078	30354	57935	51906	56279
103661	4507	23	1611	3	0.499	45681	57831	80987	9718	51556	55377	37354	4353	27595
115069	5003	23	431	12	0.431	65470	650	95039	77293	98366	70366	74605	55507	49201
130703	4507	29	1611	10	0.377	64709	53373	17385	5244	29008	52889	66949	51906	110363
145087	5003	29	431	16	0.333	55464	120722	105045	102309	58342	5327	59596	60510	119243
155093	5003	31	431	27	0.316	90485	20662	110048	102308	148396	125399	124635	10480	44198

参 考 文 献

[1] 华罗庚，高等数学引論，科学出版社，1963.
[2] 徐利治，漸近积分与积分逼近，科学出版社，1958.
[3] 关肇直，泛函分析講义，高等教育出版社，1958.
[4] 何祚庥，評“积分的近似計算”一书，兼論多重积分計算方法，科学通报，1963，第2期，46—49.
[5] В. И. Крылов, Приближенное вычисление интегралов, Физматгиз, Москва, 1959.
[6] H. Steinhaus, Sur un théorème de M. V. Jarnik, *Colloquium Mathematicum*, **1** (1948), 1—5.
[7] 烏沙闊夫 (И. Н. Ушаков)，矿藏几何学，煤炭工业出版社，1957.
[8] 雷若夫 (П. А. Рыжов)，矿体几何学，地质出版社，1957.
[9] 华罗庚与王元，关于在等高綫图上計算矿藏储量与坡地面积的問題，数学学报，**11**:1 (1961)，29—40.
[10] 陆溦芬. 在等高綫地形图上量算地表面面积的問題，測量制图学报，**4**:1 (1960)，11—18.
[11] E. T. Whittaker and G. N. Watson, A Course of Modern Analysis, Fourth edition, Oxford Press, 1952.
[12] H. Weyl, Über die Gleichverteilung der Zahlen mod. Eins, *Math. Ann.*, **77** (1913), 313—352.
[13] И. М. Соболь, Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функций классов $\widetilde{W}_1$ и $\widetilde{H}_1$, *Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ.*, 1:2 (1961), 208—216.
[14] J. H. Halton, On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multi-dimensional integrals, *Numeritische Mathematik*, **27**:2 (1960), 73—79.
[15] 华罗庚，数論导引，科学出版社，1957.
[16] K. F. Roth, On irregularities distribution, *Mathematika*, **1**:2 (1954), 73—79.
[17] J. G. van der Corput, Verteilungs functionen, *Proc. Ned. Acad. v. Wet.*, **38** (1935), 813—821.
[18] J. M. Hammersley, Monte Carlo methods for solving multivaluable problems, *Proc. N. Y. Acad. Sci.* (Conference on numerical properties of functions of more than one independent variable: Oct. 1959; to be published in 1960).
[19] И. М. Соболь, Многомерные интегралы и метода Монте-Карло, *ДАН СССР*, **114**:4 (1957), 706—709.
[20] И. М. Соболь, Применение разложений по функциях Харра к исследованию сеток интегрилования, дисс. канд. физ-мат. наук М. ВЦ АН СССР, 1959.
[21] И. М. Соболь, Функции многих переменных с быстро сходящимися рядами Харра, *ДАН СССР*, **132**:4 (1960), 773—776.
[22] И. М. Соболь, Точная оценка погрешности многомерных формул

для функций класса S_p, *ДАН СССР*, **132**:5 (1960), 1041—1044.
[23] И. М. Соболь, О вычисление многомерных интегралов, *ДАН СССР*, **139**:4 (1961), 821—823.
[24] И. М. Соболь, О вычислении бесконечномерных интегралов, *Журнал Выч. Мат. и Мат. Физ.*, I:5 (1961), 917—921.
[25] Н. С. Бахвалов, О приближенном вычислении кратных интегрилов, *Вестник МГУ*, **4** (1959), 3—18.
[26] И. Ф. Шарыгин, О применении теоретико-числовых методов интегрирования в случае непериодических функций, *ДАН СССР*, **132**:1 (1960), 71—74.
[27] Н. М. Коробов, О применении теоретико-числовых сеток, Вычислительные методы и программирование, Изд. МГУ, 1962, 80—102.
[28] И. М. Гельфанд, А. С. Фролов и Н. Н. Ченцов, Вычисление континуальных интегралов методом Монте Карло, *Изв. Высш. Учебных заведений, Сер. Матем.*, **5** (1958).
[29] Н. М. Коробов, Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел, *ДАН СССР*, **115**:6 (1957), 1062—1065.
[30] В. М. Солодов, О вычислении кратных интегралов, *ДАН СССР*, **127**:4 (1959), 753—756.
[31] Н. М. Коробов, О приближенном вычислении кратных интегралов, *ДАН СССР*, **124**:6 (1959), 1207—1210.
[32] Н. М. Коробов, Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов, *Вестник МГУ*, **4** (1959), 19—25.
[33] И. Ф. Шарыгин, Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций, *Жур. Выч. Мат. и Мат. Физ.*, **3**:2 (1963), 370—376.
[34] 王 元，論积分的近似計算及其应用，数学进展，**5**:1 (1962), 1—44.
[35] 华罗庚与王元,关于多重积分近似計算的若干注記,科学記录新輯, **4**:1 (1960), 4—8.
[36] Н. М. Коробов, Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов, *ДАН СССР*, **132**:5 (1960), 1009—1012.
[37] А. И. Салтыков, Таблицы для вычисления кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов, *Журнал Вычис. Матем. и Матем. Физ.*, **3**:1 (1963), 181—186.
[38] 那湯松 (И. П. Натансон), 实变函数論,高等教育出版社, 1955.
[39] А. Я. Хинчин, Цепные дробы, 1949, *Усп. Мат. Наук*, **1** (1936).
[40] L. C. Hsu (徐利治), A reduction formula for the numerical integration of periodic functions of several variables, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **13** (1962), 383—386.
[41] Wang Yuan (王 元), A note on interpolation of a certain class of functions, *Sci. Sinica*, **10**:6 (1961), 632—636.
[42] С. А. Смоляк, Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^a и E_s^a, *ДАН СССР*, **131**:5 (1960), 1028—1031.

[43] В. С. Рябенький, О таблицах и интерполяции функции из некоторого класса, *ДАН СССР*, **131**:5 (1960), 1025—1027.

[44] Н. М. Коробов, Применение теоретико-числовых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах, Тру. Мат. Ин. Им. В. А. Стеклова, LX, 1961, 195—210.

[45] Н. М. Коробов, О приближенном решении интегральных уравнений, *ДАН СССР*, **128**:2 (1959), 235—238.

[46] Ю. Н. Шахов, О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций, *ДАН СССР*, **128**:6 (1959), 1136—1139.

[47] Ю. Н. Шахов, Приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций, *ДАН СССР*, **136**:6 (1961), 1302—1305.

[48] В. С. Рябенький, Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретико-числовых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей, Тру. Мат. Инс. Им. В. А. Стеклова, LX, 1961, 232—237.