高等数学 A（2）复习题

一、空间解析几何

1. 设 $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$，

   求：(1) 与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 均垂直的单位向量；

   (2) $(3\vec{a}-2b)\bullet(a\times b)$；

   (3) 向量 $\vec{a}$ 的方向余弦。

2. 已知三角形的顶点为 A$(3,-1,2)$、B$(4,2,2)$、C$(1,0,3)$，求此三角形的面积。

3. 已知 $\vec{a}=\vec{i}-\vec{j}+3\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$，计算以 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 为邻边的平行四边形的面积。

4. 平行四边形 $ABCD$ 的两边为 $\overrightarrow{AB}=a+2b$，$AD=a-3b$，其中 $|a|=3,\ |b|=2$，并且 $a\perp b$，

   求：(1) $|a+b|$；

   (2) 平行四边形 $ABCD$ 面积。

5. 求由 yOz 平面上曲线 $z=3-2y^2$ 绕 Oz 轴旋转一周所得的曲面方程。

6. 求过点 $(1,-3,2)$ 且平行于平面 $2x+3y-z=1$ 的平面方程。

7. 求点 $P_0(1,-2,2)$ 与平面 $5x+3y-4z=11$ 的距离。

8. 求直线 $L_1:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$ 与 $L_2:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$ 的夹角。

9. 求过点 $(2,-3,5)$ 且与平面 $x+3y=1$ 垂直的直线方程。

10. 求过点 P_0（2，-1，4）且与直线 l:$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\x-2y-z-2=0\end{cases}$ 平行的直线方程。

11. 求平面 $x-z=1$ 与 xOy 平面的夹角。

12. 求过点 $(1,2,3)$ 且与直线 $\begin{cases}x+2y+2z-3=0\\3x-y+2z+12=0\end{cases}$ 垂直的平面方程。

二、多元函数微分学

1．求极限

（1） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \dfrac{\sin xy}{x}$；

（2） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{1+xy}-1}{xy}$；

（3） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}$；

（4） $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\ln(1+xy)}{xye^{x+y}}$；

（5） $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$。

2．求全微分、全导数、偏导数

（1） $z = e^x \sin(1+y^2)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz；

（2）设函数 f 具有一阶连续偏导数，$y = f(\cos 2x, e^x)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

（3）设 $z = f(2x-y, y\sin x)$，其中 f 具有连续的偏导数，求：$\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$；

（4）设 $z = z(x,y)$ 是由方程 $e^z - xy^2 z = 3$ 确定的隐函数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}$。

3．求切线方程、切平面方程、法线及法平面方程

（1）求曲线 $x = \sin t + t, y = \cos t, z = e^t - 1$ 在点（0，1，0）处的切线方程和法平面方程。

（2）求曲面 $e^z - 2z + xy = 7$ 在点（2，3，0）处的切平面方程和法线。

（3）在曲面 $z = xy$ 上求一点，使这点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出该法线方程。

4．求方向导数与梯度

（1）函数 $z = x^2 + y^2 - xy$ 在点 $(1,1)$ 处沿什么方向的方向导数最大？最大方向导数的值是多少？

（2）求函数 $u = \ln(xe^y + yz^2 + z)$ 在点 A（1，0，1）处方向导数的最大值和方向导数取

最大值的方向，并求在点A（1，0，1）处沿点A指向点B$(3,-2,2)$方向的方向导数。

5．求函数极值、应用拉格朗日乘数法求实际最值问题

（1）求函数 $z=1+x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极值。

（2）求函数$z=xy$在条件$x+y=1$下的极大值。(应用拉格朗日乘数法)

（3）求函数$u=xyz$ 在条件 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{81}=1\ (x>0,y>0,z>0)$下的最大值。 （应用拉格朗日乘数法求解）

（4）在曲面$z=\sqrt{2+x^2+4y^2}$上求一点，使它到平面$x-2y+3z=1$的距离最近。(应用拉格朗日乘数法)

（5）设销售收入R（单位：万元）与花费在两种广告宣传上的费用x,y（单位：万元）之间的关系为：$R=\dfrac{200x}{x+5}+\dfrac{100y}{10+y}$，利润额相当于五分之一的销售收入，并要扣除广告费用，已知广告费用总预算金是25万元，试问如何分配两种广告费用可使利润最大。(应用拉格朗日乘数法)

三、重积分与应用

1．二重积分计算与应用

（1）设D由$y=\sqrt{1-x^2}$和$y=0$所围成，求$\iint\limits_D \sqrt{x^2+y^2}d\sigma$。

（2）设 D 由$y=x$与$y=x^2$所围成，求$\iint\limits_D xdxdy$。

（3）交换积分次序$\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y}dy$。

（4）计算$\int_{-1}^1 dx\int_0^2 \left|y-2x^2\right|dy$。

（5）设平面薄片所占的闭区域D为 $1\le x^2+y^2\le 4$，它的面密度$\rho(x,y)=1+x+y$，求该平面薄片的质量。

（6）设均匀薄片由$x^2+\frac{y^2}{4}\le 1, y\ge 0$确定，求薄片的质心（$\mu=1$）。

（7）设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=x^2+y^2+\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D 是圆形区域 $x^2+y^2\le 4$，求$f(x,y)$。

2．三重积分计算与应用

（1）设Ω是由三个坐标平面与平面$x+y+z=1$所围成，求积分 $\iiint\limits_\Omega 2x\ dv$。

（2）计算$\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdydz$，其中$\Omega$是由$z=1-\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=0$所围成的区域。

（3）计算重积分$\iiint\limits_\Omega (z-\sqrt{x^2+y^2})dv$，其中$\Omega$是由圆柱面$x^2+y^2=1$和平面$z=0, z=1$所围成的闭区域。

（4）求由球面$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$和圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的立体的体积。

（5）设Ω为曲面$z=x^2+y^2$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$围成的封闭区域，它的密度函数为 $\mu(x,y,z)=z$，求Ω关于z轴的转动惯量。

(6) 已知一立体由曲面$z=\sqrt{2-x^2-y^2}$和$x^2+y^2=z$所围成, 其密度$\rho=2$，求该立体的质量。

(7) 计算三重积分 $\iiint\limits_\Omega (1+x^2y)\,dv$ ，其中Ω 由$x^2+y^2=4$与$z=0$及$z=3$ 所围立体。

四、曲线、曲面积分

1．求第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）

（1）设 L 为上半圆周 $y=\sqrt{4-x^2}$ ，求 $\int_L e^{\sqrt{x^2+y^2}}ds$ 。

（2）设 L 是连接点（0，0）与点（1，2）的直线段，求 $\int_L (x+y)ds$ 。

（3）计算曲线积分 $\int_\Gamma (x+y+z)ds$ ，其中 Γ 是连接点 $A(1,1,1)$ 与点 B（2，3，4）的直线段。

2．求第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）

（1）设曲线 L 为抛物线 $y=x^2$ 上从点 $(0,0)$ 到点 $(1,1)$ 一段弧，求曲线积分 $\int_L (x^2-y^2)dx$ 。

（2）设 Γ 是从（1，1，1）到（2，3，4）的直线段，求 $\int_\Gamma xdx+ydy+zdz$ 。

3．应用格林公式

（1）计算 $\oint_L (1+x^2+y^3)dx+(x-x^3+y^3)dy$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=4$，取正向。

（2）计算曲线积分 $\int_L (1+3x-y^2\cos x)dx+(x-2y\sin x-2y^2)dy$，其中 L 是沿上半圆周

$y=\sqrt{a^2-x^2}$ （$a>0$）从点 $A(a,0)$ 到点 $B(-a,0)$ 的一段弧。

4．求第一类曲面积分（对面积的曲面积分）

（1）求曲面 $z=x^2+y^2$ 被曲面 $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ 所截下的那部分曲面的面积。

（2）设 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ （$0\le z\le 1$），求 $\iint\limits_\Sigma (x+y+z)dS$ 。

(3) 计算 $\iint\limits_\Sigma (6x+3y+2z)dS$，其中 $\sum$ 为平面 $\frac{x}{3}+\frac{y}{6}+\frac{z}{9}=1$ 在第一卦限中的部分。

5．求第二类曲面积分（对坐标的曲面积分）

（1）计算曲面积分 $\iint\limits_\Sigma z^3dxdy$，其中 $\sum$ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于平面 $z=0,z=1$ 之间的部分，取上侧。

（2）计算曲面积分 $\oiint\limits_\Sigma y^2dydz+z^2dzdx+(x+y+e^z)dxdy$，其中 Σ 是由曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与平面 $z=1$ 所围成立体的表面，取外侧。

五、无穷级数

1．判断下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{n}{3^{n-1}}$。　　（2）$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{2n+3}$。

（3）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$。　　（4）$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2\frac{n\pi}{4}}{n^2+n}$。　　（5）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{n!}$。

2．若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在$x=-2$处收敛，判断幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在$x=2$处的收敛性。

3．将函数 $f(x)=e^{2x+1}$ 在 $x=1$ 处展开为幂级数，并求收敛域。

4． 将函数$f(x)=\frac{x}{x+1}$展开成$(x-3)$的幂级数，并求其收敛域。

5．将函数$f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$展开为 $x-1$ 的幂级数，并求收敛域。

6．将函数 $f(x)=\ln(x^2+3x+2)$ 展开为 $x-2$ 的幂级数，并求收敛域。

7．求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{4^n(n+1)}$的收敛域，并求和函数。

8．求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{nx^{n-1}}{3^n}$ 的收敛域，并求和函数。

9．将函数 $f(x)=\begin{cases}1, 0\le x<2\\ x, 2\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为余弦级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，讨论此余弦级数的收敛于$f(x)$情况，并求出余弦级数的和函数。（不必求出余弦级数的具体形式）

10．将函数$f(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ x & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 展开为傅里叶级数，求系数a_1。