

EITFWH：气动声学 FW-H 方程解算软件

用户手册

完成日期：2024 年 4 月 26 日

版权说明

当前版本：V1.0

维护人员：王启星

开发人员：王启星，邵明宇，姜汉博

电子邮箱：hjiang@eitech.edu.cn

通讯地址：浙江省宁波市镇海区庄市街道同心路 568 号

目录

1 总体功能介绍	1
2 运行环境	2
2.1 硬件要求	2
2.2 软件要求	2
3 快速入门	3
3.1 安装与运行	3
3.2 整体思路	4
3.3 软件输入	5
3.3.1 总配置输入文件	5
3.3.2 观测点输入文件	5
3.3.3 积分面输入文件	5
3.3.4 物理量输入文件	5
3.4 输出文件	6
4 FW-H 声比拟理论	7
4.1 Lighthill 声比拟	7
4.2 FW-H 方程	8
4.3 FW-H 方程解 3D	9
4.3.1 时域解	9
4.3.2 提前时间方法	9
4.3.3 时间插值方法	10
4.3.4 频域解	10
4.4 FW-H 方程解 2D	12
4.4.1 FW-H 方程频域解	12
5 基本算例 3D	13
5.1 单极子源	13
5.2 偶极子源	15
6 基本算例 2D	17
6.1 单极子源	17
6.2 偶极子源	18

1 总体功能介绍

该软件使用的 Ffows Williams-Hawkins(FW-H) 方程是声比拟方法的最一般形式，它可用来计算非定常流动产生的压强脉动以声波形式在流体介质中的传播情况。FW-H 方程是对连续性方程跟动量方程的重新排列，其将流动对噪声的贡献分为三部分：分布于物面上的单极子源、偶极子源以及积分面与观察者之间非线性的四极子源，对于远场观察者，其接收到的声音信号是这三种声源贡献之和。由于 FW-H 方程不存在任何假设，因而即使在非线性很强的区域，此方程依旧适用，这使其在气动噪声数值计算领域获得了广泛应用。

该软件的输入主要包括四个部分：来流条件、积分面几何信息、积分面的流场信息、观测点位置。其中来流条件指的是来流马赫数、环境密度、压力以及声速。积分面几何信息指的是，数值计算过程中离散单元的大小、数量、位置、单位法向等。积分面流场信息是指不同离散单元位置处的压力、密度、速度矢量。观察者位置通常指希望获得声压信号的位置点。除以上信息外，还需要根据计算的问题选择计算维度，可以是二维或三维。此外，还可以根据计算规模选择计算核数，以提高计算效率。

最终，该软件根据不同的输入可输出不同观测点位置处的声压信号、频谱信息。通过一些数据处理软件，如 Matlab、Tecplot 等可对声场信息进行可视化展示，用户可更加直观的了解声场的指向性以及声压随时间的变化规律，从而更好的进行声学系统的设计和优化。

2 运行环境

2.1 硬件要求

基本要求：CPU 内存 4G 以上；硬盘剩余空间不低于 10G；

2.2 软件要求

操作系统：支持 Window 10/11

并行计算：Microsoft MPI (MS-MPI)

3 快速入门

3.1 安装与运行

本程序尚未创建桌面应用的功能，所有的操作全部在 Windows 系统下执行。本程序的依赖有 Microsoft MPI (MS-MPI)、Microsoft Visual Studio 请提前安装后再运行本程序。

收到本软件时，应该是一个名为 EITFWH 的压缩包，将其解压在自己想要的路径下，并配置相关环境即可进行编译。

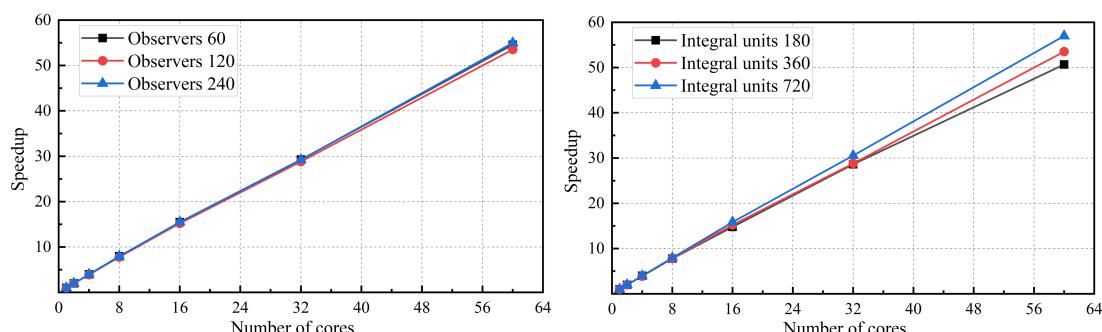
名称	修改日期	类型
.vs	2024-06-18 9:47	文件夹
bin	2024-07-28 15:48	文件夹
fftwLib	2024-01-15 10:50	文件夹
include	2024-01-20 20:53	文件夹
src	2024-07-28 15:53	文件夹
x64	2024-06-24 22:37	文件夹
config.inp	2024-06-16 12:08	ANSYS 2020 R2.inp
EITFWH.sln	2024-06-18 10:35	Visual Studio Soluti...
EITFWH.vcxproj	2024-06-18 10:05	VC++ Project
EITFWH.vcxproj.user	2024-06-18 10:27	Per-User Project O...

注：压缩包中的 config.inp 文件为程序计算过程中的相关配置文件。主要包括：1) 环境条件：来流马赫数，环境密度，声速，压力；2) 数据输入文件：观测者位置，积分面几何、流场信息等；3) 数据输出文件：观测者位置处的压力信息。

一旦编译完成，即可运行该程序。由于该程序具有 MPI 并行计算的功能，因此可根据需要输入参与计算的 CPU 核心数，以 AMD Ryzen 7 5800H 为例，此时输入 10 个核心数参与计算，程序计算页面如下。

```
命令提示符 - mpiexec -n 10 EITFWH.exe
EIT-FWH:: Pressure 0.7143
EIT-FWH:: Read observer coordinates from file observer.dat
EIT-FWH:: Progress: 100 %
EIT-FWH:: Deliver observer data to processors
EIT-FWH:: Progress: 100 %
EIT-FWH:: Read flow data from file fwhFlow.dat
EIT-FWH:: Progress: 100 %
EIT-FWH:: Source-time step 3D 5000
EIT-FWH:: Source-time from 3D 0 to 49.99
EIT-FWH:: Deliver flow data to processors
EIT-FWH:: Progress: 100 %
EIT-FWH:: Read 2D flow data from file fwhFlow2D.dat
EIT-FWH:: Progress: 100 %
EIT-FWH:: Source-time step 2D 5000
EIT-FWH:: Source-time from 2D 0 to 49.99
```

统计了不同积分面数量、观测者数量的基本算例在并行计算过程中的加速比，如下图所示。



3.2 整体思路

Algorithm 1: EITFWH 求解过程

Input: 总配置文件, 观测点位置, 积分面几何, 积分面物理量

Output: 观测点位置的声压信号

```

1 begin
2   /* 首先读取来流信息, 观测者位置, 积分面几何信息、物理信息等 */ 
3   从总配置文件中读取来流条件
4
5   从总配置文件中读取观测点文件名称
6   从观测点文件中读取观测点数量信息
7   for i to 观测点数量 do
8     | 读取观测点位置坐标
9
10  从总配置文件中读取积分面物理信息文件名称
11  从物理信息文件中读取时间步、单元数量
12  for i to 时间步数 do
13    | for i to 单元数 do
14      | | 读取密度、压力、速度
15
16  从总配置文件中读取积分面几何信息文件名称
17  从几何信息文件中读取计算步数、单元数量
18  if 计算步数 = 时间步数 then
19    | 积分面随时间移动
20  else
21    | 积分面静止
22  for i to 单元数量 do
23    | 读取单元面积
24  for i to 单元数量 do
25    | 读取单元位置、法向
26  /* 选择时域或者频域求解器 */
27  if 采用时域求解 then
28    | 时间信号计算
29  else
30    | 频谱计算 + 逆傅里叶变换
31
32  从总配置文件中读取输出文件名称
33  输出观测位置的声压信号或者频谱幅值

```

3.3 软件输入

3.3.1 总配置输入文件

该文件指定了来流马赫数、环境密度、压力、声速，并指定了数据输入、输出文件的名称。

```

1 FreeStreamMachNumber=0.1
2 FreestreamDensity=1.0
3 FreestreamSoundSpeed=1.0
4 FreestreamPressure= 0.7143
5
6
7 observerFileName=observer.dat
8 intSurfaceFileName=fwhSurface.dat
9 SurfaceFileName2D=fwhSurface2D.dat
10 flowDataFileName=fwhFlow.dat
▶ 11 flowDataFileName2D=fwhFlow2D.dat
14 pSignalOutputFileName=fwhOutputPPrime.dat
15 pSpectrumRealFileName=fwhOutputPSpectrumReal.dat
16 pSpectrumImagFileName=fwhOutputPSpectrumImag.dat
17 pSpectrumMagFileName=fwhOutputPSpectrumMag.dat
18
19
20 pSignalOutputFileName2D=fwhOutputPPrime2D.dat
21 pSpectrumMagFileName2D=fwhOutputPSpectrumMag2D.dat
22 pSpectrumRealFileName2D=fwhOutputPSpectrumReal2D.dat
23 pSpectrumImagFileName2D=fwhOutputPSpectrumImag2D.dat

```

3.3.2 观测点输入文件

该文件为观察者位置文件，包括观察者数量以及坐标信息，如下图所示：

```

1 60
2 25 0 0
3 24.9646 1.33055 0
4 24.8584 2.65734 0
5 24.6817 3.97659 0
6 24.4251 5.20457 0
7 24.1679 6.43257 0
8 23.9097 7.65057 0
9 23.6499 8.85857 0
10 23.3887 10.05657 0
11 23.1259 11.23457 0
12 22.8599 12.39257 0
13 22.5899 13.53957 0
14 22.3159 14.66657 0
15 22.0369 15.77357 0
16 21.7519 16.86057 0
17 21.4609 17.92757 0
18 21.1649 18.97457 0
19 20.8639 20.00157 0
20 20.5579 21.01857 0
21 20.2469 22.01557 0
22 20.9309 23.00257 0
23 20.6189 23.97957 0
24 20.3019 24.94657 0
25 20.9809 25.89357 0
26 20.6549 26.82957 0
27 20.3239 27.75557 0
28 20.9869 28.67157 0
29 20.6499 29.57757 0
30 20.3169 30.47357 0
31 20.9839 31.36957 0
32 20.6539 32.25557 0
33 20.3229 33.12157 0
34 20.9859 34.97757 0
35 20.6559 35.83457 0
36 20.3249 36.68157 0
37 20.9879 37.51857 0
38 20.6579 38.14557 0
39 20.3269 38.66257 0
40 20.9899 39.15857 0
41 20.6599 39.66557 0
42 20.3289 40.16257 0
43 20.9919 40.65857 0
44 20.6619 41.14557 0
45 20.3309 41.62257 0
46 20.9939 42.10857 0
47 20.6639 42.56557 0
48 20.3329 43.00257 0
49 20.9959 43.40857 0
50 20.6659 43.83557 0
51 20.3349 44.20257 0
52 20.9979 44.70857 0
53 20.6679 45.56557 0
54 20.3369 46.06257 0
55 20.9999 46.90857 0
56 20.6699 47.46557 0
57 20.3389 47.90257 0
58 20.9999 48.30857 0
59 20.6719 48.76557 0
60 20.3409 49.16257 0

```

3.3.3 积分面输入文件

该文件为 FW-H 积分面几何信息，包括积分面的离散数量以及每个离散单元的坐标位置、单位法线方向、面积，如下图所示（注意区分 3D、2D 几何条件）。其中，第一行的 360 表示离散单元的数量，第二行为单元面积，第三行为第一个离散单元的坐标位置以及单位法向，第四行为第二个离散单元的坐标及法向，以此类推。

```

▶ 1 1 360
2 0.0174533
3 0.999962 0.00872654 0 0.999962 0.00872654 0
4 0.999657 0.0261769 0 0.999657 0.0261769 0
5 0.999048 0.0436194 0 0.999048 0.0436194 0

```

3.3.4 物理量输入文件

```

1 5000 360
2 0 1.00024686649 0.71454686649 0.100373172594 3.47206501027e-06 0 1.00024710706 0.71454710706
3 0.01 1.00016403083 0.714464030833 0.10029134329 2.68566190477e-06 0 1.00016427078 0.714464271
4 0.02 1.00008054782 0.71438054782 0.100208364186 1.88865971869e-06 0 1.0000807862 0.714380786
5 0.03 0.999996746923 0.714296746923 0.100124562765 1.08420385555e-06 0 0.999996982789 0.714291
6 0.04 0.999912958863 0.714212958863 0.10004026975 2.75469135114e-07 0 0.999913191288 0.714213
7 0.05 0.999829514316 0.714129514316 0.0999558178101 -5.34352736147e-07 0 0.999829742381 0.714
8 0.06 0.999746742597 0.714046742597 0.0998715402367 -1.34206576128e-06 0 0.999746965403 0.714
9 0.07 0.99966497037 0.71396497037 0.0997877696353 -2.14448226599e-06 0 0.999665187038 0.71396
10 0.08 0.999584520351 0.713884520351 0.0997048366101 -2.93843547891e-06 0 0.999584730026 0.713

```

该文件为积分面离散单元的流场信息，如上图所示。其中，第一行 5000 为时间步数，360 为离散单元的数量。其余第一列为时间步，第二列为第一个离散单元密度随时间的变化信息，第三列为第一个离散单元压力随时间的变化，第四列为第一个离散单元速度矢量在 x 方向上的投影，第五列为速度矢量在 y 方向的投影，第六列为速度矢量在 z 方向的投影。

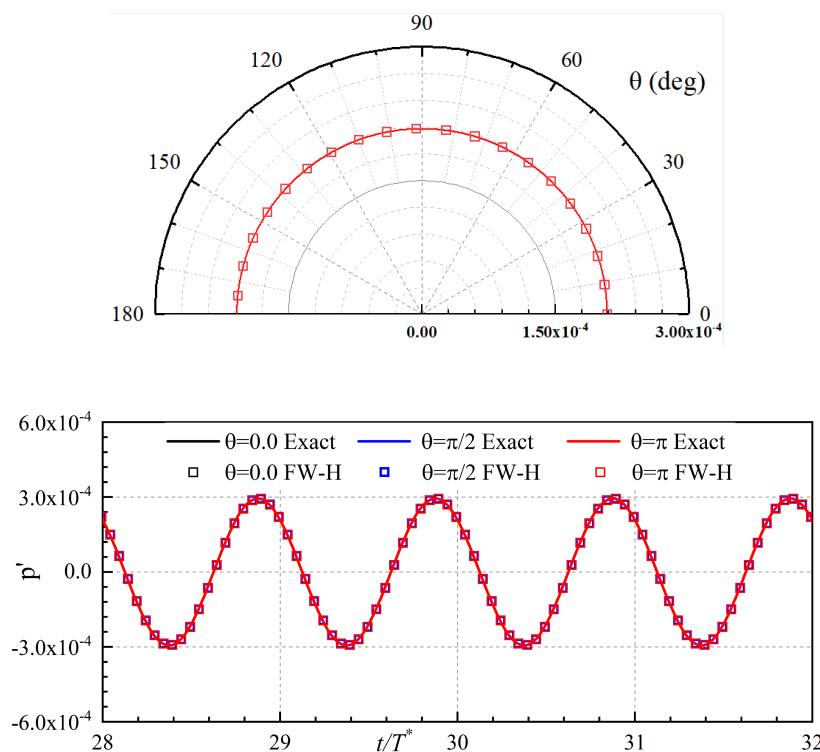
3.4 输出文件

该程序最终会输出一个包含声压信息或者频谱的 dat 文件，具体为 fwhOutputPPrime.dat/fwhOutputPSpectrumMag.dat，其对应于不同观察者位置的声压信号。以 fwhOutputPPrime.dat 为例：

	1	2	3	4	5	6
1	13.3425	-3.65937e-05	1.74444e-05	6.21149e-05	5.87502e-05	-6.08927e-05
2	13.3525	-3.66137e-05	1.79058e-05	6.5038e-05	6.72641e-05	-4.65207e-05
3	13.3625	-3.66287e-05	1.81565e-05	6.75623e-05	7.53667e-05	-3.21124e-05
4	13.3725	-3.66385e-05	1.81958e-05	6.96784e-05	8.30265e-05	-1.77247e-05
5	13.3825	-3.6643e-05	1.80236e-05	7.13783e-05	9.02137e-05	-3.41455e-06
6	13.3925	-3.66421e-05	1.76409e-05	7.26556e-05	9.69003e-05	1.07616e-05
7	13.4025	-3.66358e-05	1.70493e-05	7.35058e-05	0.00010306	2.47478e-05
8	13.4125	-3.66243e-05	1.6251e-05	7.39256e-05	0.00010867	3.8489e-05

其中第一列为时间信息，第二列为第一个观察者处的压力变化信息，第三列为第二个观察者位置的压力信号，以此类推。

推荐用 Matlab 进行读取，其中声场的指向性以及声压随时间的变化信息，如下图所示。



4 FW-H 声比拟理论

关于气动声学这一现代声学领域的诞生与发展，可追溯到 1952 年 Lighthill 在处理喷流噪声问题时所建立的 Lighthill 方程。虽然 Lighthill 方程对气动声学的发展具有重要意义，但它并没有涉及到运动物体。1969 年 Ffows Williams 和 Hawkings 在 Lighthill 方程的基础上运用广义函数，推导了静止介质中运动固壁发声的方程，即 FW-H 方程。FW-H 方程将流动对噪声的贡献分为三部分：分布于物面上的单极子源、偶极子源以及积分面与观察者之间非线性的四极子源，对于远场观察者，其接收到的声音信号是这三种源贡献之和。Farassat 将 FW-H 方程的积分形式进行巧妙变换后得到了适合于亚音速、超音速下的表达式，并获得了相应的解。

4.1 Lighthill 声比拟

在 Lighthill 声比拟理论中，没有对声源区域的流动进行假设，只需假设观测者处在静止参考环境中。

考虑连续性方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

和动量方程

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j + P_{ij}) = 0, \quad (2)$$

其中

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - \tau_{ij}, \quad (3)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3}\mu \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij}, \quad (4)$$

P_{ij} 为可压缩应力张量， τ_{ij} 为粘性应力。

对连续性方程求时间导数并对动量方程求散度后相减可得

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho u_i u_j + P_{ij}), \quad (5)$$

在方程 (5) 等号两边同时减去 $c_0^2 \partial^2 \rho / \partial x_i^2$ 即可得到 Lighthill 声比拟方程

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (6)$$

其中

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + P_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij} = \rho u_i u_j + (p - c_0^2 \rho) \delta_{ij} - \tau_{ij}, \quad (7)$$

被称为 Lighthill 张量。可以看出 Lighthill 方程直接从 Navier-Stokes 方程出发推导，不存在任何假设，因而是精确方程。这也就意味着，即使在非线性效应很强得区域，此方程依旧适用。

4.2 FW-H 方程

Ffows Williams-Hawkins (FW-H) 方程是应用非常广泛的声比拟方法，其主要适用于移动壁面作为噪声源的问题。利用近场流动数据的面积分和体积分求解 FW-H 方程，可以给出远场噪声信号。理论上，FW-H 方程会应用在固体边界处的一个积分面上，但实际中也可应用于远离壁面的可穿透积分面上。

类似于上述 Lighthill 方程的推导方法，利用 Heaviside 函数将流动变量扩展到全空间后，可得到 FW-H 方程。

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [(\rho - \rho_0) H(f)] - c_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} [(\rho - \rho_0) H(f)] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [T_{ij} H(f)] + \frac{\partial}{\partial t} [Q \delta(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(f)], \quad (8)$$

其中 Q , L_i , T_{ij} 分别为

$$Q = \rho_0 U_i n_i, \quad U_i = (1 - \frac{\rho}{\rho_0}) v_i + \frac{\rho u_i}{\rho_0}, \quad (9)$$

$$L_i = P_{ij} n_j + \rho u_i (u_n - v_n), \quad P_{ij} = (\rho - \rho_0) \delta_{ij} - \tau_{ij}, \quad (10)$$

$$T_{ij} = \rho u_i u_j + (\rho' - c_0^2 \rho') \delta_{ij} - \tau_{ij}. \quad (11)$$

T_{ij} 为 lighthill 应力张量。在观测者处，密度波动幅值往往较小 ($\rho - \rho_0$) 可由 ρ' 代替，其中 $\rho' = c_0^2 \rho'$ 。

$$\square^2 [p' H(f)] = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [T_{ij} H(f)] - \frac{\partial}{\partial x_i} [L_i \delta(f)] + \frac{\partial}{\partial t} [Q \delta(f)]. \quad (12)$$

方程 (12) 为非齐次波动方程，因此流动引发的噪声，可看作厚度噪声 p'_Q , 载荷噪声 p'_L , 湍流

噪声 p'_T 的叠加:

$$p'(\mathbf{x}, t) = p'_T(\mathbf{x}, t) + p'_L(\mathbf{x}, t) + p'_Q(\mathbf{x}, t). \quad (13)$$

对于低马赫数流动，四极子项 p'_T ，相比单极子 p'_Q 、偶极子 p'_L 较小。因此，为了便于数值计算，对于四极子项的体积分常常忽略。然而，在很多情况下，由于可穿透积分面位于非线性流动区域之外，其潜在的包含了四极子项的影响。

4.3 FW-H 方程解 3D

4.3.1 时域解

FW-H 方程延迟时间解 [1]，其中厚度噪声 p'_Q 载荷噪声 p'_L 分别为

$$4\pi p'_Q(\mathbf{x}, t) = \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 (\dot{U}_n + U_{\hat{n}})}{r (1 - M_r)^2} \right]_{ret} dS + \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 U_n (r \dot{M}_r + c (M_r - M^2))}{r^2 (1 - M_r)^3} \right]_{ret} dS, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} 4\pi p'_L(\mathbf{x}, t) = & \frac{1}{c_0} \int_{f=0} \left[\frac{\dot{L}_r}{r (1 - M_r)^2} \right]_{ret} dS + \int_{f=0} \left[\frac{L_r - L_M}{r^2 (1 - M_r)^2} \right]_{ret} dS \\ & + \frac{1}{c_0} \int_{f=0} \left[\frac{L_r (r \dot{M}_r + c (M_r - M^2))}{r^2 (1 - M_r)^3} \right]_{ret} dS, \end{aligned} \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} U_n &= U_i n_i, U_{\hat{n}} = U_i \hat{n}_i, \dot{U}_n = \dot{U}_i n_i, M_r = M_i \hat{r}_i, \\ L_r &= L_i \hat{r}_i, \dot{L}_r = \dot{L}_i \hat{r}_i, L_M = L_i M_i, \dot{M}_r = \dot{M}_i \hat{r}_i. \end{aligned}$$

4.3.2 提前时间方法

延迟时间方法是在给定的观察者时刻记录感受到的声音扰动信号，这些扰动依赖于声源和观察者的位置及速度，声源在不同的时刻向周围辐射噪声，并在到达观察者位置之前跨过不同的距离。

提前时间方法是 [1] 基于给定的声源时间计算积分区域内的声音扰动信号，在每一个计算时间步，针对每一个声源单元，扰动到达观察者的时间为延迟时间。在提前时刻观察者的位置用作计算观察者与点源之间的相对距离。最后，统计所有声源单元的声扰动作为观察者时刻的信号。

$$t_{adv} = \tau + \frac{r}{c} \left\{ \frac{M_{or} + \sqrt{M_{or}^2 + 1 - M_o^2}}{1 - M_o^2} \right\}. \quad (16)$$

其中 τ 为源时间， t_{adv} 是由在时刻 τ 声源单元产生的扰动到达观测者的时间， $M_{or} = \hat{r}_i M_{oi}$ 是观

察者的马赫数向量。

4.3.3 时间插值方法

在利用 FW-H 声比拟提前时间方法预测气动噪声时，由于多普勒效应，源时域的等距离离散并不等于观测者时域的等距离离散。

假设 t^n 为离散的高级时间，在这个时刻，观察者要收集的声压信号为 p^n 。在声源产生的声压信号 p_*^n 在 t_*^n 时刻到达观测者。对于 t_*^n ，满足 $t^n \leq t_*^n < t^{n+1}$ 。

$$\delta^+t = (t_*^n - t^n)/\Delta t, \quad \delta^-t = 1 - \delta^+t.$$

0 阶插值：在 0 阶插值方法中，最近的时刻，最先收集到声压信号，即如果 $\delta^+t \leq 0.5$ ，则 p_*^n 为 p^n 的声音信号贡献。反之，如果 $\delta^+t > 0.5$ ，则 p_*^{n+1} 为 p^{n+1} 的声音信号贡献。

线性插值：对于每个声源扰动 p_*^n ，它分别对 p^n 及 p^{n+1} 的贡献为

$$p^n = \delta^-t p_*^n, \quad p^{n+1} = \delta^+t p_*^n.$$

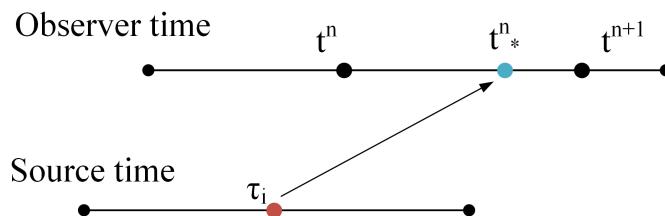


图 4.1: 时间插值

对于积分面静止的情况 $\dot{M} = 0$ ，方程 (14) 跟方程 (15) 可简化为

$$4\pi p'_T(x, t) = \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 \dot{U}_n}{r (1 - M_r)^2} \right]_{ret} dS + \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 U_n c_0 (M_r - M^2)}{r^2 (1 - M_r)^3} \right]_{ret} dS, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} 4\pi p'_L(x, t) = & \frac{1}{c_0} \int_{f=0} \left[\frac{\dot{L}_r}{r (1 - M_r)^2} \right]_{ret} dS + \int_{f=0} \left[\frac{L_r - L_M}{r^2 (1 - M_r)^2} \right]_{ret} dS \\ & + \int_{f=0} \left[\frac{L_r (M_r - M^2)}{r^2 (1 - M_r)^3} \right]_{ret} dS. \end{aligned} \quad (18)$$

4.3.4 频域解

对于 FW-H 方程延迟时间解，将其转为频域进行求解。其中，使用了傅里叶变换的微分性，将偏微分方程转为常微分方程进行求解。

主要采用如下关系式

$$\mathcal{F}[U_n] = \int_{-\infty}^{+\infty} U_n(t) e^{-iw\tau} d\tau, \quad \mathcal{F}[L_i] = \int_{-\infty}^{+\infty} L_i(t) e^{-iw\tau} d\tau,$$

$$\mathcal{F}[\dot{U}_n] = iw[U_n], \quad \mathcal{F}[\dot{L}_i] = iw[L_i].$$

$$4\pi p'_T(\mathbf{x}, \omega) = \int_{f=0} \left[\frac{i\omega \rho_0 \mathcal{F}[U_n]}{r(1-M_r)^2} \right] e^{i\omega r/c_0} dS + \int_{f=0} \left[\frac{\rho_0 \mathcal{F}[U_n] c_0 (M_r - M^2)}{r^2 (1-M_r)^3} \right] e^{i\omega r/c_0} dS, \quad (19)$$

$$\begin{aligned} 4\pi p'_L(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{c_0} \int_{f=0} \left[\frac{i\omega \mathcal{F}[L_i] \hat{r}_i}{r(1-M_r)^2} \right] e^{i\omega r/c_0} dS + \int_{f=0} \left[\frac{\mathcal{F}[L_i] (\hat{r}_i - M_i)}{r^2 (1-M_r)^2} \right] e^{i\omega r/c_0} dS \\ &\quad + \int_{f=0} \left[\frac{\mathcal{F}[L_i] \hat{r}_i (M_r - M^2)}{r^2 (1-M_r)^3} \right] e^{i\omega r/c_0} dS. \end{aligned} \quad (20)$$

为简化编程计算中的求解公式，对一些项进行了组合。

$$\begin{aligned} 4\pi p'_T(\mathbf{x}, \omega) &= \int_{f=0} \rho_0 \mathcal{F}[U_n] \mathcal{A}(\mathbf{r}, \omega) dS, \\ 4\pi p'_L(\mathbf{x}, \omega) &= \frac{1}{c_0} \int_{f=0} \mathcal{F}[L_i] \mathcal{B}(\mathbf{r}, \omega) dS, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\mathbf{r}, \omega) &= \left[\frac{i\omega}{r(1-M_r)^2} + \frac{c_0 (M_r - M^2)}{r^2 (1-M_r)^3} \right] e^{i\omega r/c_0}, \\ \mathcal{B}(\mathbf{r}, \omega) &= \left[\frac{1}{c_0 r (1-M_r)^2} + \frac{(\hat{r}_i - M_i)}{r^2 (1-M_r)^2} + \frac{\hat{r}_i (M_r - M^2)}{r^2 (1-M_r)^3} \right] e^{i\omega r/c_0}. \end{aligned}$$

对于所求得的频域解，可通过逆傅里叶变换来获得时域解。

$$p'_T(\mathbf{x}, \tau) = \mathcal{F}^{-1}[p'_T(\mathbf{x}, \omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p'_T(\mathbf{x}, \omega) e^{iw\tau} d\omega, \quad (21)$$

$$p'_L(\mathbf{x}, \tau) = \mathcal{F}^{-1}[p'_L(\mathbf{x}, \omega)] = \int_{-\infty}^{+\infty} p'_L(\mathbf{x}, \omega) e^{iw\tau} d\omega. \quad (22)$$

需要注意，所恢复的时域结果为源时间 τ ，而不是观察者时间 t_{adv} 。

4.4 FW-H 方程解 2D

4.4.1 FW-H 方程频域解

对于均匀来流，频域 FW-H 声比拟 [2][3] 可写为以下积分方程

$$\begin{aligned} \hat{p}(\mathbf{x}^o, \omega) H(f) = & - \int_{f=0} \left[i\omega \hat{Q}(\mathbf{x}^s, \omega) G_c(\mathbf{x}^o, \mathbf{x}^s) + \hat{F}_i(\mathbf{x}^s, \omega) \frac{\partial G_c(\mathbf{x}^o, \mathbf{x}^s)}{\partial x_i^s} \right] dS \\ & - \int_{f>0} \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}^s, \omega) \frac{\partial^2 G_c(\mathbf{x}^o, \mathbf{x}^s)}{\partial x_i^s \partial x_j^s} dV. \end{aligned} \quad (23)$$

其中， $\hat{\cdot}$ 指傅里叶变换量， $\hat{p}(\mathbf{x}^o, \omega)$ 指在某一频率 ω 下，特定观察者位置处的压力幅值。 \mathbf{x}^o 为观察者位置 $\mathbf{x}^o = (x_1^o, x_2^o, x_3^o)$ ， \mathbf{x}^s 为噪声源位置 $\mathbf{x}^s = (x_1^s, x_2^s, x_3^s)$ 。气动噪声的预测依赖于单极子、偶极子、四极子的计算，可分别通过以下式子求得。

$$\begin{aligned} Q &= (\rho u_i - \rho_0 U_i) n_i, \\ F_i &= (P_{ij} + \rho(u_i - 2U_i)u_j + \rho_0 U_i U_j) n_j, \\ T_{ij} &= (\rho u_i u_j + P_{ij}/c_0^2 \rho' \delta_{ij}). \end{aligned}$$

在以上的噪声源中， u_i 为流体速度矢量； ρ 为密度， ρ' 为密度波动量； P_{ij} 代表法向跟切向应力，对于高雷诺数流动，黏性应力的影响可以忽略不计 $P_{ij} = p\delta_{ij}$ ； ρ_0 ， c_0 分别为环境密度跟声速； δ_{ij} 为克罗内克符号； n_i 为第 i 个单元的单位法向； U_i 为自由流速度矢量，本算例中自由流速度沿着 x 轴方向 $M = U_1/c_0$ 。

2D、3D 对流格林函数分别为

$$G_c(\mathbf{x}^o, \mathbf{x}^s) = \frac{i}{4\beta} e^{iM \frac{k}{\beta^2} \bar{x}} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} R_{2D} \right) \quad 2D \text{ 声辐射}, \quad (24)$$

$$G_c(\mathbf{x}^o, \mathbf{x}^s) = \frac{1}{4\pi R_{3D}} e^{-i \frac{k}{\beta^2} [R_{3D} - M \bar{x}]} \quad 3D \text{ 声辐射}. \quad (25)$$

可根据不同的计算问题选择不同维度的格林函数，对于源到观察者的距离

$$R_{2D} = \sqrt{(x^o - x^s)^2 + \beta^2 [(y^o - y^s)^2]}, \quad R_{3D} = \sqrt{(x^o - x^s)^2 + \beta^2 [(y^o - y^s)^2 + (z^o - z^s)^2]}.$$

修正项 $\beta = \sqrt{1 - M^2}$ ， $\bar{x} = x^o - x^s$ ，波数 $k = \omega/c_0$ 。对于 2D 声辐射问题， H_0^2 为 0 阶第 2 类汉克尔函数。

5 基本算例 3D

5.1 单极子源

假定亚声速均匀流沿着 x_1 轴正向，则对流波动方程三维空间自由格林函数为：

$$G(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}, \tau) = \frac{\delta(\tau - t + R/c_0)}{4\pi R^*}. \quad (26)$$

其中相位差 R , 幅值差 R^* , 压缩因子 β 分别为：

$$\begin{aligned} R &= \frac{-M_0(x_1 - y_1) + R^*}{\beta^2}, \\ R^* &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \beta^2[(x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2]}, \\ \beta &= \sqrt{1 - M_0^2}. \end{aligned}$$

单极子声场的速度势函数为 [2]:

$$\phi'(\mathbf{x}, t) = \frac{A}{4\pi R^*} \exp \left[i\omega(t - \frac{R}{c_0}) \right]. \quad (27)$$

其中，压力、密度、速度可由以下关系式求得

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}, t) &= -\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \phi', \\ \rho'(\mathbf{x}, t) &= p'/c_0^2, \\ u'(\mathbf{x}, t) &= \nabla \phi'. \end{aligned}$$

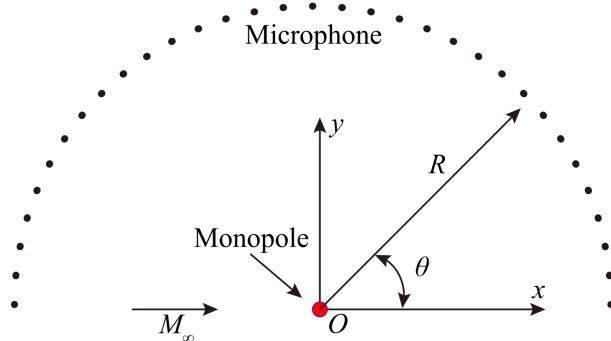


图 5.1: 示意图

图5.1为单极子声场计算示意图。其中, R 为观察者距离 $R = 20$, ω 为信号角频率 $\omega = 2\pi$, M_∞ 为来流马赫数 $M_\infty \in [0.0, 0.5]$, 采样间隔 $\Delta\tau = 0.01$, 源时间范围 $\tau \in [0.0, 50]$, 速度势幅值 $A = 1/340$ 。FW-H 积分面半径设置为 1。

基于以上条件获得的输入文件分别为：

观测者位置： observer.dat

积分面几何信息： fwhSurface.dat

积分面物理信息： fwhFlow.dat

Listing 1: config.inp

```

1 FreeStreamMachNumber=0.1
2 FreestreamDensity=1.0
3 FreestreamSoundSpeed=1.0
4 FreestreamPressure= 0.7143
5
6
7 observerFileName=observer.dat
8 intSurfaceFileName=fwhSurface.dat
9 SurfaceFileName2D=fwhSurface2D.dat
10 flowDataFileName=fwhFlow.dat
11 flowDataFileName2D=fwhFlow2D.dat
12
13
14 pSignalOutputFileName=fwhOutputPPrime.dat
15 pSpectrumRealFileName=fwhOutputPSpectrumReal.dat
16 pSpectrumImagFileName=fwhOutputPSpectrumImag.dat
17 pSpectrumMagFileName=fwhOutputPSpectrumMag.dat
18
19
20 pSignalOutputFileName2D=fwhOutputPPrime2D.dat
21 pSpectrumMagFileName2D=fwhOutputPSpectrumMag2D.dat
22 pSpectrumRealFileName2D=fwhOutputPSpectrumReal2D.dat
23 pSpectrumImagFileName2D=fwhOutputPSpectrumImag2D.dat

```

将总配置文件 config.inp 与上述三个文件 observer.dat, fwhSurface.dat, fwhSurface.dat, 以及 EITFWH.exe 放置在同一文件夹下，执行命令： mpiexec -n 10 EITFWH.exe 即可运行该程序。

通过修改 config.inp 文件中的自由来流马赫数 FreeStreamMachNumber 可获得不同的计算结果。图5.2为单极子源在不同来流马赫数条件下声场的指向性。图5.3为不同来流马赫数条件下，部分观测点位置的声压信号曲线。

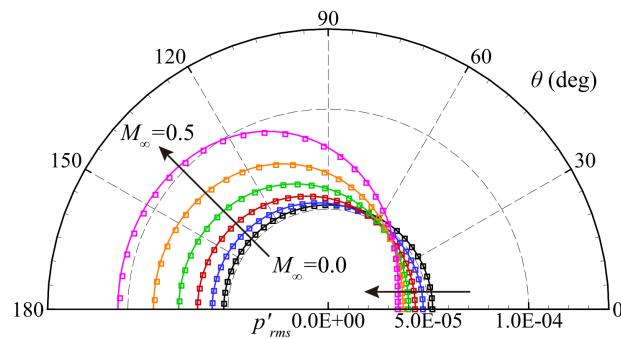


图 5.2: 不同马赫数条件单极子源声场的指向性

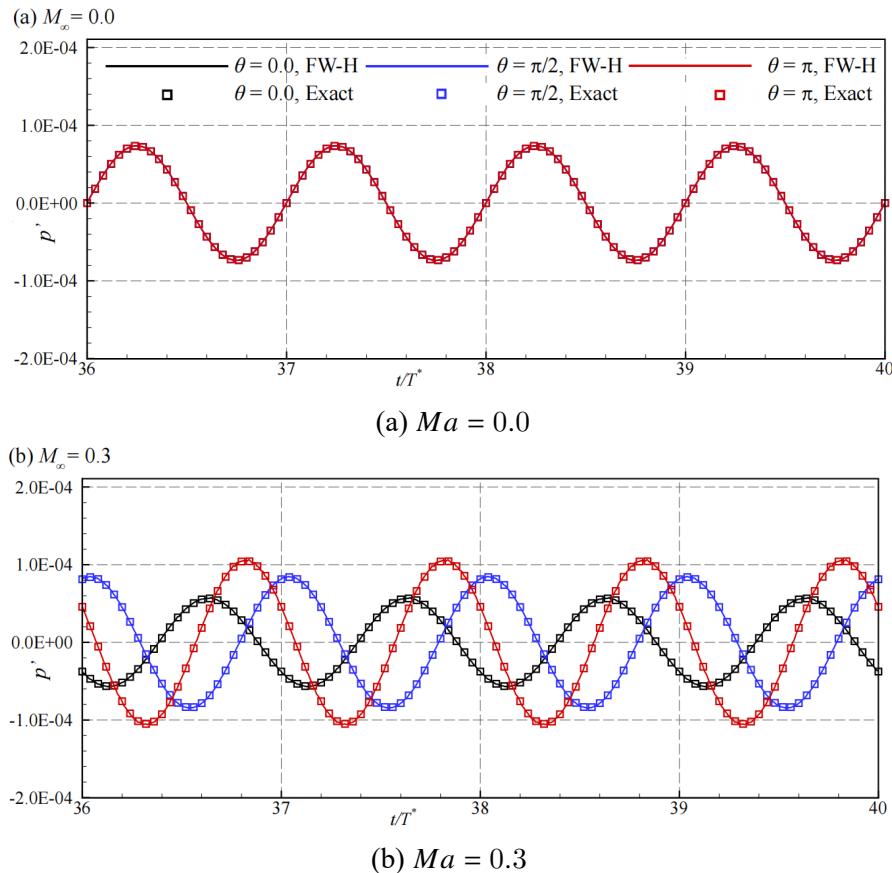


图 5.3: 不同观测位置的声压信号

5.2 偶极子源

在均匀流中偶极子源的速度势函数为，其中偶极子轴沿着 x_2 方向。

$$\phi'(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ \frac{A}{4\pi R^*} \exp \left[i\omega(t - \frac{R}{c_0}) \right] \right\}. \quad (28)$$

粒子的速度、压力振幅、密度波动可分别通过以下式子获得。

$$p'(\mathbf{x}, t) = -\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \phi',$$

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = p'/c_0^2,$$

$$u'(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi'.$$

偶极子的速度势振幅、频率以及观察者位置等都与上述单极子中的相同。

图5.4为偶极子源在不同来流马赫数条件下声场的指向性。随着来流马赫数的增加，最大声压对应的方向逐渐向上游移动。图5.5为不同来流马赫数条件下，部分观测点位置的声压信号曲线。从以上所有情况来看，数值解与精确解吻合良好，验证了 EITFWH 在 3D 空间下数值计算的准确性。

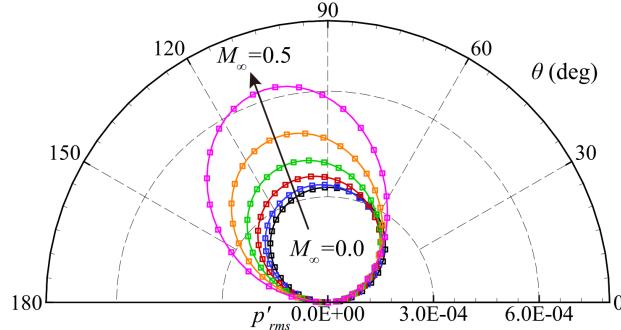


图 5.4: 不同马赫数条件偶极子源声场的指向性

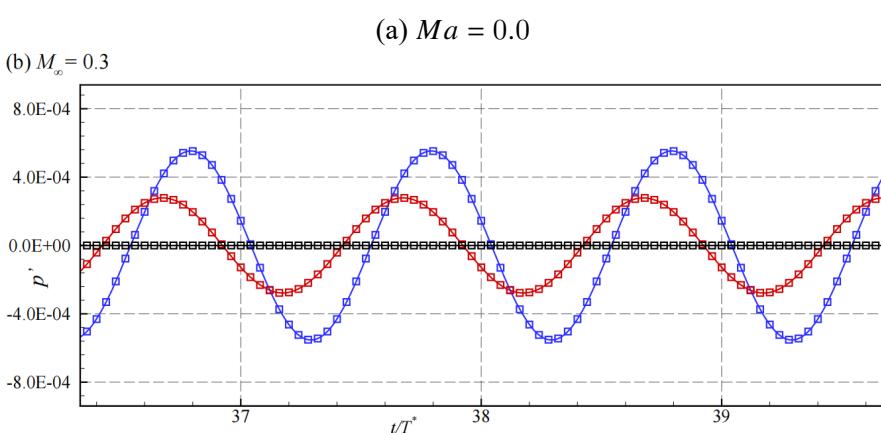
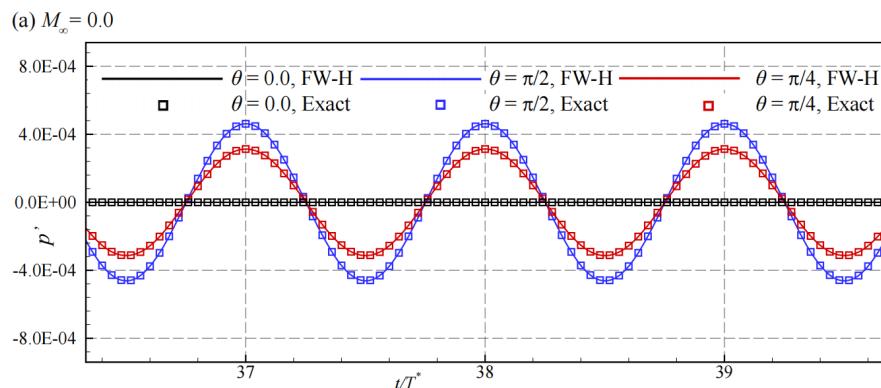


图 5.5: 不同观测位置的声压信号

6 基本算例 2D

6.1 单极子源

使用 2D 频域 FW-H 公式计算了单极子源的远场噪声。其中，单极子源位于坐标中心，均匀来流沿着 x 轴正向。该条件下单极子源的速度势函数 [4] 为：

$$\phi(x, y, t) = A \frac{i}{4\beta} \exp^{i(\omega t + M k x / \beta^2)} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} \sqrt{x^2 + \beta^2 y^2} \right). \quad (29)$$

其中速度、压力振幅、密度波动量可由以下关系式求得

$$\begin{aligned} p'(\mathbf{x}, t) &= -\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi', \\ \rho'(\mathbf{x}, t) &= p'/c_0^2, \\ u'(\mathbf{x}, t) &= \nabla \phi'. \end{aligned}$$

方程 (29) 表示均匀流流过一个静止的源，如图6.1所示。其中， R 为观察者距离 $R = 25$ ， ω 为信号角频率 $\omega = 2\pi$ ， M_∞ 为来流马赫数 $M_\infty \in [0.0, 0.8]$ ，采样间隔 $\Delta\tau = 0.01$ ，源时间范围 $\tau \in [0.0, 50]$ ，速度势幅值 $A = 1/340$ ，FW-H 积分面半径为 1。

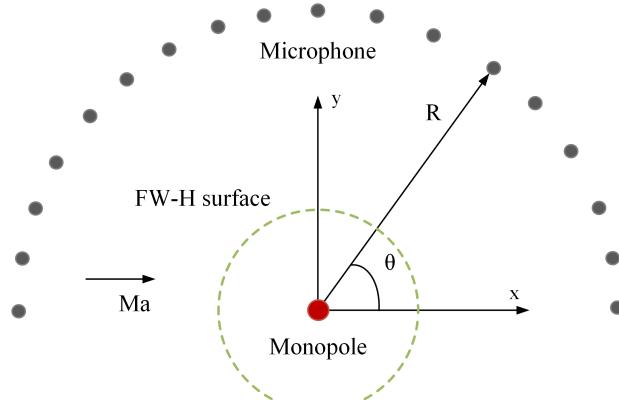


图 6.1: 示意图

与上述计算过程类似，将 `observer.dat`, `fwhSurface.dat`, `fwhSurface.dat` 文件, `config.inp` 文件以及 `EITFWH.exe` 可执行程序放置在同一文件夹下，执行命令：`mpiexec -n 10 EITFWH.exe` 即可运行该程序。通过修改 `config.inp` 文件中的自由来流马赫数 `FreeStreamMachNumber` 获得不同的计算结果。图6.2为单极子源不同来流马赫数条件下声场的指向性。图6.3为不同来流马赫数条件下，部分观测点位置声压信号随时间的变化曲线。

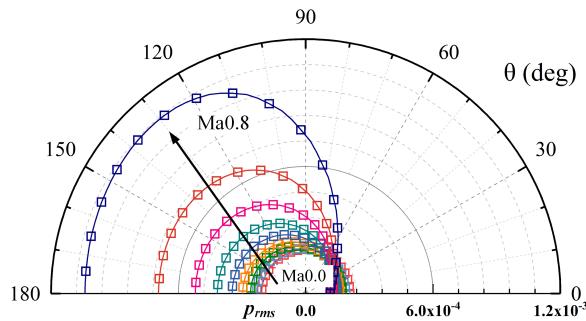


图 6.2: 不同马赫数条件单极子源声场的指向性

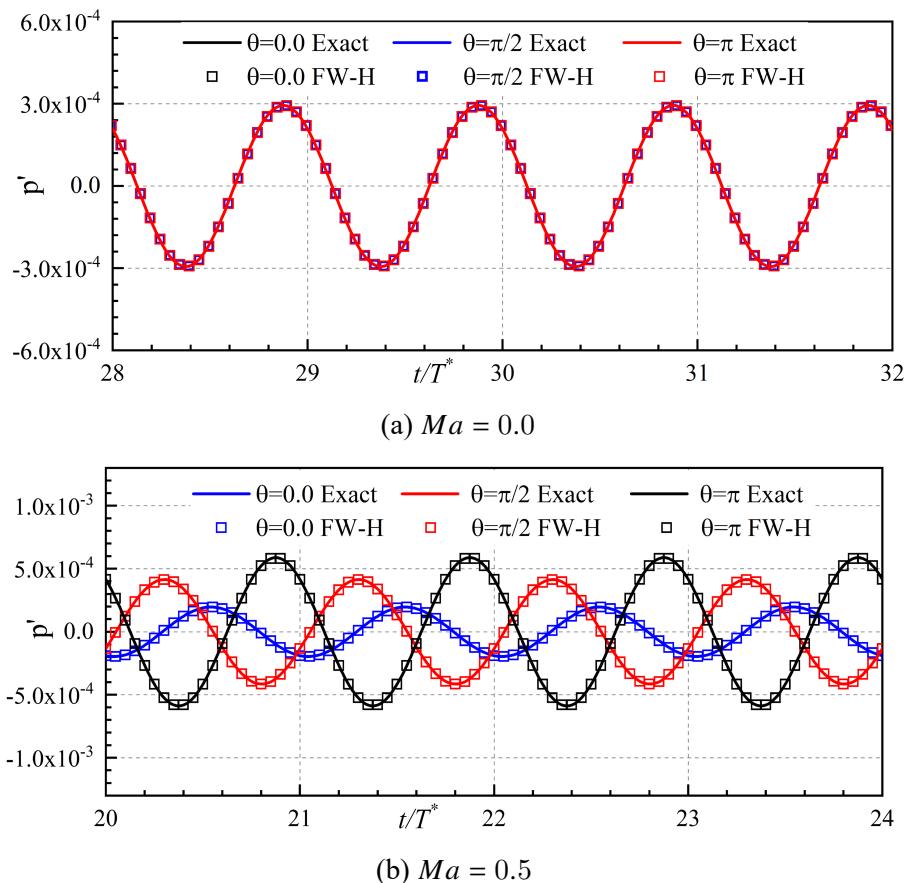


图 6.3: 不同观测位置的声压信号

6.2 偶极子源

均匀流中偶极子源的速度势函数为

$$\phi'(x, t) = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ A \frac{i}{4\beta} \exp^{i(\omega t + M k x / \beta^2)} H_0^{(2)} \left(\frac{k}{\beta^2} \sqrt{x^2 + \beta^2 y^2} \right) \right\}. \quad (30)$$

其中, 偶极子轴沿着 y 轴方向, 粒子的速度、压力振幅、密度波动可分别通过以下式子求得:

$$p'(\mathbf{x}, t) = -\rho_0 \left[\frac{\partial}{\partial t} + U_0 \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi',$$

$$\rho'(\mathbf{x}, t) = p'/c_0^2,$$

$$u'(\mathbf{x}, t) = \nabla \phi'.$$

偶极子源的速度势振幅、频率以及观察者位置等都与上述单极子源中的相同。图6.4为偶极子源不同来流马赫数条件下声场的指向性。随着来流马赫数的增加, 最大声压对应的方向逐渐向上游移动。图6.5为不同来流马赫数条件下, 部分观测点位置的声压信号。从以上计算结果来看, 数值解与精确解吻合较好, 验证了 EITFWH 在 2D 空间下数值计算的准确性。

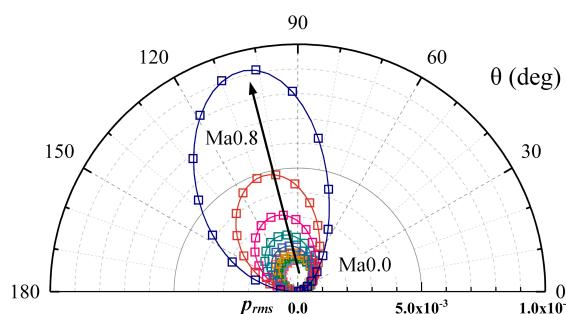


图 6.4: 不同马赫数条件偶极子源声场的指向性

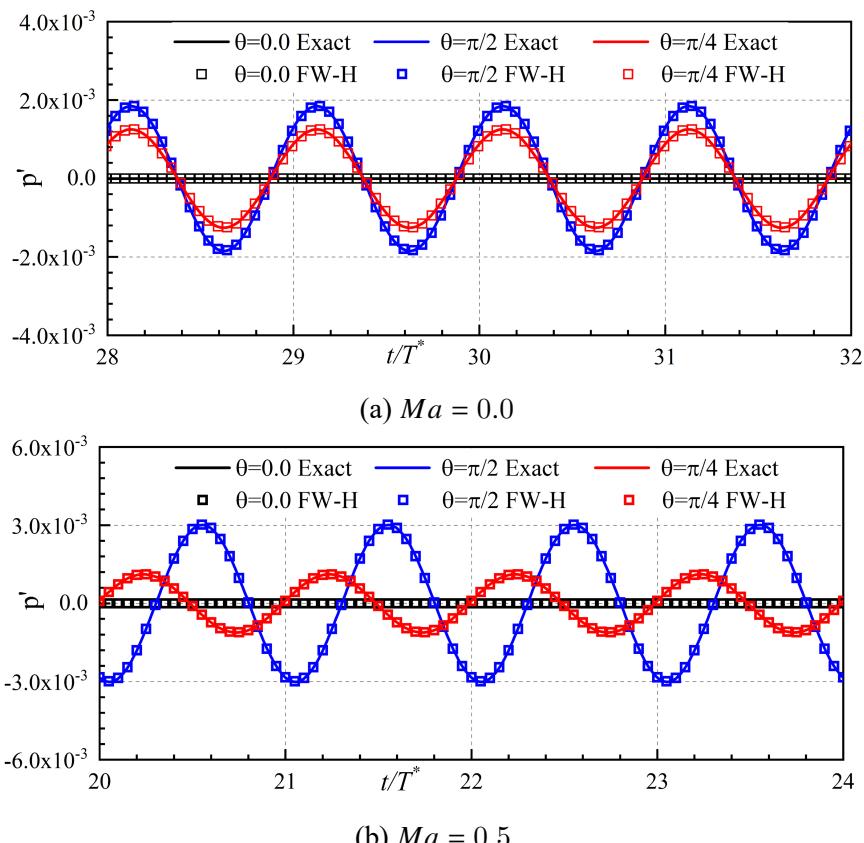


图 6.5: 不同观测位置的声压信号

References

- [1] D Casalino. An advanced time approach for acoustic analogy predictions. *Journal of Sound and Vibration*, 261(4):583–612, 2003.
- [2] David Lockard. A comparison of Ffowcs Williams-Hawkings solvers for airframe noise applications. In *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference & Exhibit*, page 2580, 2002.
- [3] David P Lockard. An efficient, two-dimensional implementation of the Ffowcs Williams and Hawkings equation. *Journal of Sound and Vibration*, 229(4):897–911, 2000.
- [4] A. P. Dowling, J. E. Ffowcs Williams, and Wayne M. Wright. Sound and sources of sound. *American Journal of Physics*, 53, 1983.