MVDR Beamforming - это метод обработки сигналов, в котором массив датчиков фокусируется на источнике сигнала. Фиксируется угловое положение датчиков в массиве относительно источника, для этого ведем вектор α содержащий фазовые сдвиги каждого датчик. В случае равномерного линейного размещения датчиков:

$$\alpha = (1, e^{-j\zeta_0}, ..., e^{-j(M-1)\zeta_0})^T,$$

где $(.)^T$ обозначает транспонирование, M - число датчиков в массиве, $\zeta_0 = 2\pi f \frac{d}{c} sin(\theta)$, f - частота дискретизации, d - расстояние между датчиками в массиве, θ - азимутальный фиксированный угол между датчиком и источником, c - скорость звука.

Выходной сигнал y задается линейной комбинацией данных с M датчиков, x является матрицей сигналов приходящих на антенную решетку от источника и w - вектор весов:

$$y^T = (w^H x).$$

где $(.)^H$ обозначает комплексное-сопряжение и транспонирование.

Метод стремится минимизировать общую выходную мощность сигнала, сохраняя при этом усиление равным единице в фиксированном направлении α распространения сигнала, что приводит к задаче минимизации с ограничениями.

Мощность P выходящего сигнала:

$$P = E\{|y^T|^2\} = E\{|w^H x|^2\} = E\{(w^H x)(x^H w)\} = w^H E\{xx^H\} w = w^H K w,$$

где $K = E\{xx^H\}$ - ковариационная матрица.

При минимизации этого уравнения, установив производную равной нулю, мы получим вектор w содержащий только нули, по существу мощность минимизирована, однако, как упоминалось ранее, метод сохраняет усиление равным единице в направлении распространения сигнала. Определить данное ограничение можно как:

$$\alpha^H w = 1.$$

Получаем следующую задачу минимизации:

$$\min_w\{P\} = \min_w\{w^H K w\} \text{ при условии } \alpha^H w = 1.$$

Для ее решения применяем метод Лагранжа, позволяющий минимизировать с учетом одного или нескольких ограничений. Включим ограничение в уравнение мощности выходящего сигнала:

$$P = w^H K w + \lambda(\alpha^H w - 1),$$

где λ - множитель Лагранжа. При задании производной от dP/dw равной нулю, получим оптимальный вектор весов:

$$\frac{dP}{dw} = Kw + \alpha\lambda = 0,$$

откуда следует

$$w = -K^{-1}\alpha\lambda.$$

Домножив данное уравнение на α^H слева получим выражение для λ:

$$\lambda = -(\alpha^H K^{-1}\alpha)^{-1}.$$

В итоге получаем выражение для вектора весов:

$$w = K^{-1}\alpha(\alpha^H K^{-1}\alpha)^{-1}.$$

Матрица сигналов с каждого датчика x имеет размер $M \times G$, где G количество сэмплов. Таким образом ковариационную матрицу K можно представить в следующем виде:

$$K = E\{xx^H\} = \frac{1}{G}xx^H = XX^H$$

где $X = x/\sqrt{G}$. Для сокращения времени расчета ковариационной матрицы, используем qr разложние матрицы X

$$X^H = QR$$

где Q - унитарная матрица размера $G \times G$, R - верхняя треугольная матрица размера $G \times M$.

Определение унитарной матрицы:

$$Q^H Q = QQ^H = E, Q^{-1} = Q^H.$$

Подставим qr - разложение матрицы X в выражение для ковариационной матрицы:

$$K = XX^H = R^H Q^H Q R = R^H E R = R^H R$$

Заметим, что верхняя треугольная матрица R имеет не нулевые только первые M строк:

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

где R_1 - верхняя треугольная матрица размера $M \times M$, 0 матрица размера $G - M \times M$. Подставим в выражение для матрицы K:

$$K = R^H R = R_1^H R_1$$

Из системы линейных алгебраических уравнений:

$$KZ = \alpha,$$

следует

$$Z = K^{-1}\alpha = (R_1^H R_1)^{-1}\alpha.$$

Итак, вектор или матрицу весов w можно представить в виде:

$$w = Z(\alpha^H Z)^{-1}.$$