MVDR Beamforming - это метод обработки сигналов, в котором массив датчиков фокусируется на объекте получающем сигнал. Фиксируется угловое положение датчиков в массиве относительно объекта-получателя, для этого ведем вектор $\alpha$ содержащий фазовые сдвиги каждого датчик. В случае равномерного линейного размещения датчиков:

$$\alpha = (1, e^{-j\zeta_0}, ..., e^{-j(M-1)\zeta_0})^T,$$

где $(.)^T$ обозначает транспонирование, $M$ - число датчиков в массиве, $\zeta_0 = 2\pi f \frac{d}{c} sin(\theta)$, $f$ - частота дискретизации, $d$ - расстояние между датчиками в массиве, $\theta$ - азимутальный фиксированный угол между датчиком и объектом получателем, $c$ - скорость звука.

Выходной сигнал $y$ задается линейной комбинацией данных с $M$ датчиков, $x$ является матрицей сигналов с датчиков антенной решетки и $w$ - вектор весов:

$$y = w^H x.$$

где $(.)^H$ обозначает комплексное-сопряжение и транспонирование.

Метод стремится минимизировать общую выходную мощность сигнала, сохраняя при этом усиление равным единице в фиксированном направлении $vs$ распространения сигнала, что приводит к задаче минимизации с ограничениями.

Мощность $P$ выходящего сигнала:

$$P = E\{|y|^2\} = E\{|w^H x|^2\} = E\{(w^H x)(x^H w)\} = w^H E\{xx^H\} w = w^H K w,$$

где $K = E\{xx^H\}$ - ковариационная матрица.

При минимизации этого уравнения, установив производную равной нулю, мы получим вектор $w$ содержащий только нули, по существу мощность минимизирована, однако, как упоминалось ранее, метод сохраняет усиление равным единице в направлении распространения сигнала. Определить данное ограничение можно как:

$$\alpha^H w = 1.$$

Получаем следующую задачу минимизации:

$$\min_w\{P\} = \min_w\{w^H K w\} \text{ при условии } \alpha^H w = 1.$$

Для ее решения применяем метод Лагранжа, позволяющий минимизировать с учетом одного или нескольких ограничений. Включим ограничение в уравнение мощности выходящего сигнала:

$$P = w^H K w + \lambda(\alpha^H w - 1),$$

где $\lambda$ - множитель Лагранжа. При задании производной от $dP/dw$ равной нулю, получим оптимальный вектор весов:

$$\frac{dP}{dw} = Kw + \alpha\lambda = 0,$$

откуда следует

$$w = -K^{-1}\alpha\lambda.$$

Домножив данное уравнение на $\alpha^H$ слева получим выражение для $\lambda$:

$$\lambda = -\frac{1}{\alpha^H K^{-1}\alpha}.$$

В итоге получаем выражение для вектора весов:

$$w = \frac{K^{-1}\alpha}{\alpha^H K^{-1}\alpha}.$$