第五章 关系

5.1 关系的概念

1.序偶的概念

序偶(有序对、二元组)： 由两个固定次序个体所组成的序列，记作$< x, y >$。
序偶的顺序： 序偶$< a, b >$中，a被称为第一元素，b被称为第二元素，仅有$a = x \wedge b = y$时，才有$< a, b > = < x, y >$。
序偶的推广 - 多重序元： 序偶可以推广至多重序元(n元组)，三重序元是一个序偶，其第一元素为一序偶，例如$<< a, b >, c >$。三重序元可以简写为$< a, b, c >$的形式。而对于N重序元(N≥3)而言，其第一元素为N-1重序元，可简写为$<$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N >$之形式。其中第i元素$x_i$通常被称为N元组之第i坐标。

2.笛卡尔乘积及其性质

笛卡尔乘积： 给定两个集合A与B，由所有第一元素属于A，第二元素属于B的序偶所构成的集合，称为集合A与集合B的笛卡尔乘积，记作$A \times B$，表示为$A \times B = \{< x, y > |(x \in A) \bigwedge (y \in B)\}$。显然，两个集合的笛卡尔乘积是一个由序偶构成的集合。为了表示方便，可以记$A \times A$为A^2，$A \times A \times A$为A^3......。

定理1：

1. $A \times (B \bigcup C) = (A \times B) \bigcup (A \times C)$
2. $A \times (B \bigcap C) = (A \times B) \bigcap (A \times C)$
3. $(A \bigcup B) \times C = (A \times C) \bigcup (B \times C)$
4. $(A \bigcap B) \times C = (A \times C) \bigcap (B \times C)$

定理2：
设A，B与C为任意三个集合，且$C \neq \varnothing$，则有$(A \times C) \subseteq (B \times C)$和$(C \times A) \subseteq (C \times B)$都是$A \subseteq B$的充要条件。

定理3：
设A，B，C，D为四个非空集合，则$(A \times B) \subseteq (C \times D)$的充要条件为$(A \subseteq C) \bigwedge (B \subseteq D)$。

3.关系的概念

关系： 设A、B为两个集合，则$A \times B$的任何一子集都称为A到B的二元关系。

N元关系： 设A_1，A_2，...，A_N是N个集合，则$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$的任一子集都称为他们之间的一个N元关系。

常见的关系表示方法： 一般用大写字母表示二元关系，在数学中也常用一些特殊符号表示关系，如大于、小于等。此外，还有一种aRb的表示方法，等价于$< a, b >\in R$，如果要表示$< a, b >\notin R$，则记为$a\not R b$。而对于从A到A的二元关系，可以称之为A中的二元关系。

定义域： 若存在$y \in Y$，使有$< x, y >\in S$，则所有这样的$x \in X$，被称为二元关系S的定义域，记为$D(S)$或$\mathrm{dom(S)}$，表示为$D(S) = \{x|(\exists y)((x \in X) \bigwedge (y \in Y) \bigwedge (< x, y >\in S))\}$。
值域： 若存在$x \in X$，使有$< x, y >\in S$，则所有这样的$y \in Y$，被称为二元关系S的值域，记为$R(S)$或$\mathrm{ran(S)}$，表示为$R(S) = \{y|(\exists x)((x \in X) \bigwedge (y \in Y) \bigwedge (< x, y >\in S))\}$。
显而易见，$D(S) \subseteq X$，$R(S) \subseteq Y$。

设定X为一集合。
空关系： $\varnothing$被称为X中的空关系。
全域关系： X^2被称为X中的全域关系。
恒等关系： $I_X = \{< x, x > |x \in X\}$被称为$X$中的恒等关系。

5.2 二元关系的表示及其性质

1.矩阵表示法

若给定两个有限集合$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$与$Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，且，$R$为$X$到$Y$的二元关系，若有

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & 若 x_i R y_j \\ 0 & 若 x_i \not R y_j \end{cases}$$

则称矩阵$[r_{ij}]$为R的关系矩阵，记作$\mathbf{M}_R$。

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.图像表示法

设$X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$与$Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$，且，$R$为$X$到$Y$的二元关系。在图上画$m$个圈（顶点），表示$x_i$，画$n$个圈，表示$y_j$，如果$x_i R y_j$，便在代表$x_i$与$y_j$的两顶点之间画一条有向的弧（边）。通过这种方法作出的图被称为R的关系图。如果是X内的二元关系，则可以只画一次X的元素。

3.二元关系的性质

设R是集合X中的二元关系。
自反关系： $(\forall x)(x \in X \rightarrow < x, x > \in R)$
反自反关系： $(\forall x)(x \in X \rightarrow < x, x > \notin R)$
对称关系： $(\forall x)(\forall y)((x \in X \wedge y \in Y \wedge < x, y > \in R) \rightarrow < y, x > \in R)$
反对称关系： $(\forall x)(\forall y)((x \in X \wedge y \in Y \wedge < x, y > \in R) \rightarrow < y, x > \notin R)$
传递关系： $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \in X \wedge y \in Y \wedge z \in Z \wedge < x, y > \in R \wedge < y, z > \in R) \rightarrow < x, z > \in R))$

5.3 等价关系与划分

1.等价关系

等价关系： 设R是集合X中的二元关系，若R是自反的、对称的、传递的，则R是等价关系。
等价类： 设R是非空集合X中的等价关系，对于任一确定的$x \in X$，均可以作一X的子集$[x]_R$，称为由x生成（以x为代表元素的）R的等价类，表示为$[x]_R = \{y|(y \in X) \bigwedge (<x, y> \in R)\}$。则所有与$x$有等价关系$R$的所有元素构成的集合便是$[x]_R$。
定理1： 设R是集合X中的等价关系，对任一x，有$x \in [x]_R$。
定理2： 设R是集合X中的等价关系，有

1. **对任意的**$x, y \in X$**，要么是**$[x]_R = [y]_R$**，要么是**$[x]_R \cap [y]_R = \varnothing$**。**
2. $\bigcup_{x \in X} [x]_R = X$

商集： 设R是集合X中的等价关系。由X中的各元素生成的R的等价类所有成的集合$\{[x]_R|x \in X\}$称为X关于R的商集，记作X/R。$X/R \subseteq \rho(X)$。

2.覆盖与划分

覆盖： 设X为非空集合（可以为无穷集合）。$A = A_1, A_2, ..., A_m$，其中集合$A_i \subseteq X(i = 1, 2, ..., m)$，且$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = X$，则称$A$为$X$的覆盖。
划分： 设A是X的覆盖，其对任意i，j，满足$A_i \cap A_j = \varnothing$（$i \neq j$），则称$A$为$X$的划分。
加细： 设A，B为X的两个划分，$A = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$，$B = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$，若对于划分$B$的每一个类$B_i$都存在$A$

的一个类A_j，使得$B_j \subseteq A_i$，则称B为A的加细，也说B加细了划分A。
真加细： 若B是A的加细，且$B \neq A$，则称B是A的真加细。

定理1：设R是非空集合X中的关系，则X对R的商集X/R是X的一种划分。
定理2：设A是非空集合X的一种划分。$A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$中的关系$R$定义为$\{< x, y > |(\exists A_i)(A_i \in A \wedge x \in A_i \wedge y \in A_i)\}$，则$R$是$X$中的等价关系。
定理3： 设R_1和R_2是非空集合X中的等价关系，则$R_1 = R_2$的充要条件为$X/R_1 = X/R_2$。

5.4 相容关系与完全覆盖

相容关系： 设R是集合X中的二元关系，如果R是自反的、对称的，则称R是相容关系。因为所有的相容关系都是自反且对称的，所以在用关系矩阵表示之时，可以仅记下矩阵做对角线以下的内容。
最大相容类： 设R是集合X中的相容关系。若有$X_1 \subseteq X$，使得对于任意$x, y \in X_1$，有$< x, y > \in R$，而在$X - X_1$中没有任何一个元素与X_1中的所有元素都存在R关系，则称X_1为由R产生的最大相容类。
完全覆盖： 由R产生的所有最大相容类所构成的集合称为集合X的完全覆盖，记作$C_R(X)$。

定理1： 设R是集合X中的相容关系。对任一$x \in X$，必存在一$X_i \in C_R(X)$使得$x \in X_i$。
定理2： 设R是非空有限集合X中的相容关系，则存在X的完全覆盖$C_R(X)$，且$C_R(X)$是X的覆盖。

定理3： 给定集合X的一个覆盖$A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$，由它确定的关系$R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup ... \cup A_n \times A_n$是相容关系。

5.5 关系的运算