- 第五章 关系
  - #1 关系的概念
    - 1.序偶的概念
    - 2.笛卡尔乘积及其性质
    - 3.关系相关的概念
  - #2 二元关系的表示方法及其基本性质
    - 1.矩阵表示法
    - 2.图像表示法
    - 3.二元关系的五个基本性质
  - #3 等价关系与划分
    - 1.等价关系
    - 2.覆盖与划分
  - #4 相容关系与完全覆盖
  - #5 关系的运算
    - 1.关系的合成运算
    - 2.关系的逆运算

第五章 关系

#1 关系的概念

1.序偶的概念

序偶(有序对、二元组)： 由两个固定次序个体所组成的序列，记作$< x, y >$。
序偶的顺序： 序偶$< a, b >$中，a被称为第一元素，b被称为第二元素，仅有$a = x \wedge b = y$时，才有$< a, b > = < x, y >$。
序偶的推广 - 多重序元： 序偶可以推广至多重序元(N元组)，三重序元是一个序偶，其第一元素为一序偶，例如$<< a, b >, c >$。三重序元可以简写为$< a, b, c >$的形式。而对于N重序元($N \geq 3$)而言，其第一元素为$N-1$重序元，可简写为$< x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N >$之形式。其中第$i$元素$x_i$通常被称为$N$元组之第$i$坐标。

2.笛卡尔乘积及其性质

笛卡尔乘积： 给定两个集合A与B，由所有第一元素属于A，第二元素属于B的序偶所构成的集合，称为集合A与集合B的笛卡尔乘积，记作$A \times B$，表示为$A \times B = \{< x, y > |(x \in A) \wedge (y \in B)\}$。显然，两个集合的笛卡尔乘积是一个由序偶构成的集合。为了表示方便，可以记$A \times A$为A^2，$A \times A \times A$为

A^3，$\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{N}$为$A^N$。

定理1：

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
4. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

定理2：
设A，B与C为任意三个集合，且$C \neq \varnothing$，则有$(A \times C) \subseteq (B \times C)$和$(C \times A) \subseteq (C \times B)$都是$A \subseteq B$的充要条件。

定理3：
设A，B，C，D为四个非空集合，则$(A \times B) \subseteq (C \times D)$的充要条件为$(A \subseteq C) \wedge (B \subseteq D)$。

3.关系相关的概念

关系： 设A、B为两个集合，则$A \times B$的任何一子集都称为A到B的二元关系。
N元关系： 设A_1，A_2，...，A_N是N个集合，则$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_N$的任一子集都称为他们之间的一个N元关系。
常见的关系表示方法： 一般用大写字母表示二元关系，在数学中也常用一些特殊符号表示关系，如大于、小于等。此外，还有一种aRb的表示方法，等价于$< a, b > \in R$，如果要表示$< a, b > \notin R$，则记为$a \not R b$。而对于从A到A的二元关系，可以称之为A中的二元关系。

定义域： 若存在$y \in Y$，使有$< x, y > \in S$，则所有这样的$x \in X$，被称为二元关系S的定义域，记为$D(S)$或$\mathrm{dom(S)}$，表示为$D(S) = \{x | (\exists y)((x \in X) \wedge (y \in Y) \wedge (< x, y >

$\in S))\}$。
值域： 若存在$x \in X$，使有$< x, y > \in S$，则所有这样的$y \in Y$，被称为二元关系S的值域，记为$R(S)$或ran(S)，表示为$R(S) = \{y | (\exists x)((x \in X) \wedge (y \in Y) \wedge (< x, y > \in S))\}$。
显而易见，$D(S) \subseteq X$，$R(S) \subseteq Y$。

设定X为一集合。
空关系：$\varnothing$被称为X中的空关系。
全域关系： X^2被称为X中的全域关系。
恒等关系： $I_X = \{< x, x > | x \in X\}$被称为$X$中的恒等关系。

#2 二元关系的表示方法及其基本性质

1.矩阵表示法

若给定两个有限集合$X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$与$Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$，且，$R$为$X$到$Y$的二元关系，若有

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & 若 x_i R y_j \\ 0 & 若 x_i \not R y_j \end{cases}$$

则称矩阵$[r_{ij}]$为R的关系矩阵，记作$\mathbf{M}_R$。

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2.图像表示法

设$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$与$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，且，R为X到Y的二元关系。在图上画m个圈（顶点），表示x_i，画n个圈，表示y_j，如果x_iRy_j，便在代表x_i与y_j的两顶点之间画一条有向的弧（边）。通过这种方法作出的图被称为R的关系图。如果是X内的二元关系，则可以只画一次X的元素。

3.二元关系的五个基本性质

设R是集合X中的二元关系。
自反关系： $(\forall x)(x\in X\Rightarrow <x,x>\in R)$
反自反关系： $(\forall x)(x\in X\Rightarrow <x,x>\notin R)$
对称关系： $(\forall x)(\forall y)((x\in X\wedge y\in Y\wedge <x,y>\in R)\Rightarrow <y,x>\in R)$
反对称关系： $(\forall x)(\forall y)((x\in X\wedge y\in Y\wedge <x,y>\in R)\Rightarrow <y,x>\notin R)$
传递关系： $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x\in X\wedge y\in Y\wedge z\in Z\wedge <x,y>\in R\wedge <y,z>\in R)\Rightarrow <x,z>\in R))$

#3 等价关系与划分

1.等价关系

等价关系： 设R是集合X中的二元关系，若R是自反的、对称的、传递的，则R是等价关系。
等价类： 设R是非空集合X中的等价关系，对于任一确定的$x\in X$，均可以作一X的子集$[x]_R$，称为由x生成（以x为代表元素的）R的等价类，表示为$[x]_R=\{y|(y\in X)\wedge (<$

$x,y>\in R)\}$。则所有与x有等价关系R的所有元素构成的集合便是$[x]_R$。
定理1： 设R是集合X中的等价关系，对任一x，有$x\in[x]_R$。
定理2： 设R是集合X中的等价关系，有

1. **对任意的$x,y\in X$，要么是$[x]_R=[y]_R$，要么是$[x]_R\cap[y]_R=\varnothing$。**
2. $\bigcup_{x\in X}[x]_R=X$

商集： 设R是集合X中的等价关系。由X中的各元素生成的R的等价类所有成的集合$\{[x]_R|x\in X\}$称为X关于R的商集，记作X/R。$X/R\subseteq\rho(X)$。

2.覆盖与划分

覆盖： 设X为非空集合（可以为无穷集合）。$A=A_1,A_2,...,A_n$，其中集合$A_i\subseteq X(i=1,2,...,n)$，且$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=X$，则称$A$为$X$的覆盖。
划分： 设A是X的覆盖，其对任意i，j，满足$A_i\cap A_j=\varnothing$（$i\neq j$），则称A为X的划分。
加细： 设A，B为X的两个划分，$A=\{A_1,A_2,...,A_m\}$，$B=\{B_1,B_2,...,B_n\}$，若对于划分B的每一个类B_i都存在A的一个类A_j，使得$B_j\subseteq A_i$，则称B为A的加细，也说B加细了划分A。
真加细： 若B是A的加细，且$B\neq A$，则称B是A的真加细。

定理1：设R是非空集合X中的关系，则X对R的商集X/R是X的一种划分。
定理2：设A是非空集合X的一种划分。$A=\{A_1,A_2,...,A_n\}$中的关系R定义为$\{<x,y>|(\exists A_i)(A_i\in A\wedge x\in A_i\wedge y\in A_i)\}$，则$R$是$X$中的等价关系。

定理3： 设R_1和R_2是非空集合X中的等价关系，则$R_1 = R_2$的充要条件为$X/R_1 = X/R_2$。

#4 相容关系与完全覆盖

相容关系： 设R是集合X中的二元关系，如果R是自反的、对称的，则称R是相容关系。因为所有的相容关系都是自反且对称的，所以在用关系矩阵表示之时，可以仅记下矩阵做对角线以下的内容；而在用关系图表示时，可以省去各个闭路，用两点间的连线代替往返有向弧。

最大相容类： 设R是集合X中的相容关系。若有$X_1 \subseteq X$，使得对于任意$x, y \in X_1$，有$< x, y >\in R$，而在$X - X_1$中没有任何一个元素与X_1中的所有元素都存在R关系，则称X_1为由R产生的最大相容类。

完全覆盖： 由R产生的所有最大相容类所构成的集合称为集合X的完全覆盖，记作$C_R(X)$。

关系图法求完全覆盖： 先画出相容关系的简化关系图，然后找出所有的“最大完全多边形”（所有顶点之间均有连线），这些多边形的顶点构成的集合的集合就是所要求的完全覆盖。

定理1： 设R是集合X中的相容关系。对任一$x \in X$，必存在一$X_i \in C_R(X)$使得$x \in X_i$。

定理2： 设R是非空有限集合X中的相容关系，则存在X的完全覆盖$C_R(X)$，且$C_R(X)$是X的覆盖。

定理3： 给定集合X的一个覆盖$A = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$，由它确定的关系$R = A_1 \times A_1 \cup A_2 \times A_2 \cup ... \cup A_n \times A_n$是相容关系。

#5 关系的运算

显然，关系可以直接继承集合的所有操作。

1.关系的合成运算

关系的合成运算： 设R是集合X到集合Y的关系，S是集合Y到集合Z的关系，则$R \circ S$称为R和S的合成关系，定义为：$R \circ S = \{< x, z > |(x \in X) \wedge (z \in Z) \wedge (\exists y)(y \in Y \wedge < x, y > \in R \wedge < y, z > \in S)\}$
需要注意的是，这种运算合法的前提是$R(R) \subseteq Y \wedge D(S) \subseteq Y$，当$R(R) \cap D(S) = \varnothing$时，有$R \circ S = \varnothing$。
关系的n次幂： 设R是集合X中的二元关系，$n \in \mathbf{N}$，定义R的n次幂为
$R^0 = I_X$，$R^{n+1} = R^n \circ R$
合成运算的矩阵表示法： 设有$\mathbf{M}_R$为$m \times n$的矩阵，$\mathbf{M}_S$为$n \times p$的矩阵，分别表示为

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

则由这两个关系矩阵构造出的合成运算的结果为$\mathbf{M}_R \circ \mathbf{M}_S$:

$$\mathbf{M}_R \circ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

$$C_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} (a_{ij} \wedge b_{jk})$$

定理1： 设R是集合X到集合Y的二元关系，S是从集合Y到集合Z的二元关系，则有$\mathbf{M}_R \circ \mathbf{M}_S = \mathbf{M}_{R \circ S}$。

设R_1是集合X到集合Y的二元关系，R_2和R_3是集合Y到集合Z的二元关系，R_4是Z到W的二元关系，
定理2： 若有$R_2 \subseteq R_3$成立，则有$R_1 \circ R_2 \subseteq R_1 \circ R_3$与$R_2 \circ R_4 \subseteq R_3 \circ R_4$成立。
定理3：

1. $R_1 \circ (R_2 \cup R_3) = (R_1 \circ R_2) \cup (R_1 \circ R_3)$
2. $R_1 \circ (R_2 \cap R_3) \subseteq (R_1 \circ R_2) \cap (R_1 \circ R_3)$
3. $(R_2 \cup R_3) \circ R_4 = (R_2 \circ R_4) \cup (R_3 \circ R_4)$
4. $(R_2 \cap R_3) \circ R_4 \subseteq (R_2 \circ R_4) \cap (R_3 \circ R_4)$

定理4： $(R_1 \circ R_2) \circ R_3 = R_1 \circ (R_2 \circ R_3)$
定理5： 设R是集合X内的二元关系，$m, n \in \mathbf{N}$，有$R^m \circ R^n = R^{m+n}$与$(R^m)^n = R^{m \cdot n}$成立。

定理6： 设R是有限集X内的二元关系，$|X|=n$，则存在s,t，使$R^t=R^s,0\leq s<t\leq 2^{n^2}$成立。

2.关系的逆运算

逆运算的定义： 设R是集合X到集合Y的二元关系，则从Y到X的关系R之逆运算定义为$R^{-1}=\{<y,x>\mid<x,y>\in R\}$

定理1： 设R与S皆为从集合X到集合Y的二元关系，有

1. $(R^{-1})^{-1}=R$
2. $(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$
3. $(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$
4. $(\sim R)^{-1}=\sim(R^{-1})$ **全集为**$X\times Y$
5. $(R-S)^{-1}=R^{-1}-S^{-1}$

定理2： 设R是集合X中的二元关系，$R=R^{-1}$为R具备对称性的充要条件。
定理3： 设R是集合X到集合Y的二元关系，S是集合Y到集合Z的二元关系，则有$(R\circ S)^{-1}=S^{-1}\circ R^{-1}$

3.关系的闭包运算

所谓闭包运算，就是通过尽可能少地向一关系中添加序偶，使之获得自反、对称或传递性。
正式定义如下
自反闭包： 设R是集合X中的二元关系，如果有X中的关系R'满足
$(1)R'$具备自反性且$R'\supseteq R$，(2)对X中的任意自反关系R''，如果有$R''\supseteq R$，则有$R''\supseteq R'$成立
那么称R'为R的自反闭包，记作$r(R)$。

对称闭包： 设R是集合X中的二元关系，如果有X中的关系R'满足
(1)R'具备对称性且$R' \supseteq R$，(2)对X中的任意对称关系R''，如果有$R'' \supseteq R$，则有$R'' \supseteq R'$成立
那么称R'为R的对称闭包，记作$s(R)$。
传递闭包： 设R是集合X中的二元关系，如果有X中的关系R'满足
(1)R'具备传递性且$R' \supseteq R$，(2)对X中的任意传递关系R''，如果有$R'' \supseteq R$，则有$R'' \supseteq R'$成立
那么称R'为R的传递闭包，记作$t(R)$。

定理1： 设R是集合X中的二元关系，有

1. **R有自反性**$\Leftrightarrow r(R) = R$
2. **R有对称性**$\Leftrightarrow s(R) = R$
3. **R有传递性**$\Leftrightarrow t(R) = R$

定理2： 设R是集合X中的二元关系，有

1. **R有自反性**$\Rightarrow s(R), t(R)$**有自反性**
2. **R有对称性**$\Rightarrow r(R), t(R)$**有对称性**
3. **R有传递性**$\Rightarrow r(R)$**有传递性**

定理3： 设R是集合X中的二元关系，有

1. $rs(R) = sr(R)$
2. $rt(R) = tr(R)$
3. $ts(R) \supseteq st(R)$

定理4： 设R是集合X中的二元关系，有

1. $r(R) = R \cup I_X$

2. $s(R) = R \cup R^{-1}$
3. $t(R) = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^\infty$

定理5： 设R是集合X中的二元关系，有$R^{n+1} \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \Leftrightarrow t(R) = \bigcup_{i=1}^{n} R^i$
定理6： 设R是集合X中的二元关系，$R^2 \subseteq R \Leftrightarrow R$具备传递性
定理7： 设R是集合X中的二元关系，则存在$k \leq |X|$，使$t(R) = \bigcup_{i=1}^{k} R^i$

求解传递闭包算法 - Floyd-Warshall算法：

1. **新建矩阵**$A = \mathbf{M}_R$
2. **新建索引变量**$i = 1$
3. **遍历**A**的第**i**列元素，对于所有**$A[j,i] = 1$**，遍历**A**的第**j**行，**$A[j,k] = A[j,k] \land A[i,k]$
4. **索引**$i++$**，若**$i \leq n$**，回到上一步**

#6 偏序关系