

Конспект лекций по математическому анализу 2023/2024

Корчагин Егор

9 октября 2024 г.

Оглавление

1 Вещественные числа	6
1.1 Кванторы и обозначения	6
1.2 Парадокс Рассела	6
1.3 Декартово произведение множеств	7
1.4 Функция	8
1.5 Последовательность	9
1.6 Вещественные числа I: аксиомы	10
1.7 Вещественные числа II: сечения Дедекинда	11
1.8 Вещественные числа III: бесконечные десятичные последовательности	12
1.9 Вещественная прямая	15
1.10 Верхняя и нижняя грани	15
1.11 Максимальный и минимальный элементы	16
1.12 Супремум	16
1.13 Инфимум	17
2 Предел последовательности	18
2.1 Числовая последовательность	18
2.2 Предел последовательности	18
2.3 Единственность предела	19
2.4 Ограниченная последовательность	20
2.5 Арифметические свойства предела	20
2.6 Лемма о зажатой последовательности	22
2.7 Теорема Вейерштрасса	22
2.8 Число e	24
2.9 Принцип вложенных отрезков	25
2.10 Подпоследовательность	26
2.11 Нижний и верхний частичные пределы	26
2.12 Теорема Больцано	27
2.13 Фундаментальная последовательность	29
2.14 Критерий Коши	30
2.15 Фундаментальная последовательность	31
2.16 Числовые ряды	32
2.17 Критерий Коши сходимости ряда	33
2.18 Необходимое условие сходимости ряда	33
2.19 Абсолютная сходимость	34
2.20 Абсолютная и условная сходимость	35
2.21 Признак сравнения	35

2.22 Признак Коши	36
2.23 Перестановка членов ряда	37
3 Предел функции	40
3.1 Окрестности	40
3.2 Внутренние, предельные и граничные точки	40
3.3 Предел функции по Коши	41
3.4 Предел функции по Гейне	42
3.5 Арифметические свойства предела функции и неравенства	43
3.6 Теорема о пределе сложной функции	44
3.7 Первый замечательный предел	45
3.8 Второй замечательный предел	47
3.9 Критерий Коши	47
3.10 Пределы справа и слева	49
3.11 Теорема Вейерштрасса	49
3.12 Отношение эквивалентности	50
3.13 Классы эквивалентности	50
3.14 Эквивалентность функций	51
3.15 Свойства отношения эквивалентности	52
3.16 Подсчет пределов	52
3.17 о-малое	54
3.18 О-большое	55
3.19 Свойства о-малого и О-большого	55
4 Непрерывные функции	58
4.1 Непрерывность композиции	61
4.2 Классификация разрывов	61
4.3 Разрывы монотонной функции	63
4.4 Теорема Вейерштрасса	64
4.5 Теорема о промежуточном значении	65
4.6 Непрерывность обратной функции	68
4.7 Построение показательной функции	69
5 Производная	71
6 Исследование функций с помощью производных	72
6.1 Необходимое условие экстремума	72
6.2 Достаточное условие экстремума	72
6.3 Выпуклость и вогнутость	73
6.4 Неравенство Йенсена	76
6.5 Асимптоты	77
7 Первообразная и неопределенный интеграл	78
7.1 Первообразная	78
7.2 Таблица первообразных	79
7.3 Свойства неопределенного интеграла	79

8 Интеграл от рациональной функции	82
8.1 Рациональная функция	82
8.2 Разложение многочлена на неприводимые	83
8.3 Правильная дробь	83
8.4 Элементарная дробь	83
8.5 Разложение дроби на элементарные	83
8.6 Интегрирование рациональных функций	84
8.7 Метод Остроградского	85
8.8 Рациональные функции от \cos и \sin	87
9 Определенный интеграл	89
9.1 Определенный интеграл как площадь	89
9.2 Интеграл Римана	90
10 Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций	93
10.1 Суммы и интегралы Дарбу	93
10.2 Критерий Дарбу	94
10.3 Колебание функции	98
10.4 Интегрируемость модуля, квадрата и произведения функций	100
10.5 Интегрируемость монотонной функции	101
10.6 Равномерная непрерывность	102
10.7 Интегрируемость непрерывной функции	103
10.8 Аддитивность интеграла	103
10.9 Формула Ньютона–Лейбница	105
10.10 Существование первообразной	106
10.11 Формула интегрирования по частям	107
11 Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций	109
11.1 Формула интегрирования подстановкой	109
11.2 Мера Жордана (дополнительный материал)	110
11.3 Несобственный интеграл Римана	110
11.4 Свойства несобственного интеграла	111
11.5 Формула интегрирования подстановкой	112
11.6 Формула интегрирования по частям	113
11.7 Критерий Коши	114
11.8 Абсолютная сходимость	114
11.9 Условная сходимость	115
11.10 Несобственный интеграл от знакопостоянной функции	116
11.11 Первый признак сравнения	116
11.12 Эквивалентность в смысле сходимости интегралов	117
11.13 Второй признак сравнения	118
11.14 Первый признак сравнения	118
11.15 Второй признак сравнения	119
11.16 Интегральный признак	120
11.17 Признак Даламбера	121
11.18 Радикальный признак Коши	122
11.19 Признак Гаусса	124
11.20 Признак Дирихле	126

11.21 Признак Абеля	127
11.22 Признак Лейбница	128
11.23 Теоремы о среднем	128
11.24 Признак Дирихле	131
11.25 Признак Абеля	133
12 Некоторые приложения интеграла	134
12.1 Вычисление площади плоских тел	134
12.2 Площадь в полярной системе координат	135
12.3 Объем тел вращения	138
12.4 Длина кривой	141
13 Предел функции нескольких переменных	143
13.1 Метрическое пространство	143
13.2 Нормированное пространство	143
13.3 Евклидово пространство	144
13.4 Неравенство Коши–Буняковского	145
13.5 Предел в метрическом пространстве	145
13.6 Метрическое пространство	147
13.7 Предел функции по Гейне	147
13.8 Предел функции по Коши	148
13.9 Эквивалентность определений предела	148
13.10 Арифметические свойства предела	149
13.11 Теорема о пределе сложной функции	149
13.12 Непрерывность функции	150
13.13 Непрерывность композиции	151
14 Дифференцируемые функции нескольких переменных	152
14.1 Дифференцируемое отображение	152
14.2 Непрерывность дифференцируемого отображения	152
14.3 Производная по направлению	154
14.4 Частная производная	156
14.5 Градиент	156
14.6 Свойства градиента	157
14.7 Множество уровня	158
14.8 Матрица Якоби	158
14.9 Достаточное условие дифференцируемости	158
14.10 Частные производные высокого порядка	160
14.11 Теорема Шварца	160
14.12 Теорема Юнга	161
14.13 Дифференцируемость $(m + 1)$ раз	162
14.14 Дифференциалы высоких порядков	163
14.15 Правила дифференцирования	163
14.16 Дифференцирование сложной функции	164
14.17 Дифференциал обратного отображения	166

15 Экстремумы функций многих переменных	168
15.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме	168
15.2 Формула Тейлора	169
15.3 Точка локального экстремума	171
15.4 Необходимое условие локального экстремума	171
15.5 Достаточное условие локального экстремума	171
15.6 Критерий Сильвестра	172
15.7 Теорема о неявной функции	173
15.8 Теорема о неявном отображении	173

Глава 1

Вещественные числа

Лекция 1: Множества, функции, вещественные числа

1.1 Кванторы и обозначения

- Квантор всеобщности - \forall .
- Квантор существования - \exists .
- Импликация (логическое следствие) - \Rightarrow .
- Равносильность — \Leftrightarrow .
- Выполнено - \rightarrow (будем использовать редко).

1.2 Парадокс Рассела

Из лекций по дискретной математике вы знаете, что такое **высказывание**. Высказывание всегда либо истинно, либо ложно.

Пример 1.1. *a = «любую карту можно покрасить в четыре цвета так, чтобы соседние участки были различных цветов»* - высказывание.

Пример 1.2. *«Данное высказывание ложно»* - это не высказывание.

- Предположим, что для любого свойства $P(x)$ можно выделить множество, элементы которого этому свойству удовлетворяют

$$\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow P(x)).$$

(для всякого условия $P(x)$ существует множество y , состоящее из тех x , которые удовлетворяют условию $P(x)$)

- Пусть $P(x)$ есть $x \notin x$.
- Тогда найдётся множество y такое, что

$$\forall x(x \in y \Leftrightarrow x \notin x).$$

- Так как это верно для любого x , то верно и для $x = y$. То есть

$$y \in y \Leftrightarrow y \notin y - \text{противоречие.}$$

Альтернативное объяснение парадокса Рассела

Если разрешить содержать в множестве само же множество как элемент (т. е. $X \in X$), то возникает противоречие называемое парадоксом Рассела.

Рассмотрим множество $M = \{X : X \notin X\}$, элементами которого являются все множества такие, что эти множества не содержат себя в качестве элемента.

1. Пусть $M \notin M \Rightarrow M \in M$ (потому что M состоит из всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента).
2. Пусть $M \in M \Rightarrow M \notin M$ (потому что все элементы множества M удовлетворяют условию $X \notin X$)

Получаем противоречие $M \in M \Leftrightarrow M \notin M \Rightarrow$ все такие конструкции как M не должны являться множествами.

Выход из положения - система аксиом Цермело - Френкеля (ZF) или системой Цермело - Френкеля с аксиомой выбора (ZFC).

Однако, если ZFC непротиворечива, то её непротиворечивость не может быть доказана средствами ZFC, согласно второй теореме Гёделя.

1.3 Декартово произведение множеств

Определение 1.3. *Декартовым произведением множеств A и B называют множество, состоящее из всех упорядоченных пар элементов из A и B*

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Замечание: $(a, b) \neq (b, a)$.

Замечание 1.4. *Если рассматривается декартово произведение одного и того же множества A , то вместо $A \times A$ используется более короткое обозначение A^2 .*

Пример 1.5. *Множество точек на плоскости \mathbb{R}^2 , узлы решётки \mathbb{Z}^2 , пространство \mathbb{R}^3 . Ещё пример: $A = \{a, 1, \circ\}, B = \{b, \circ\}$*

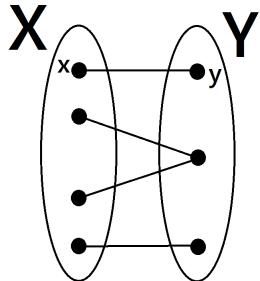
$$A \times B = \{(a, b), (a, \circ), (1, b), (1, \circ), (\circ, b), (\circ, \circ)\}$$

1.4 Функция

Определение 1.6. Функцией f из множества X в множество Y называется такое подмножество декартова произведения $X \times Y$, что

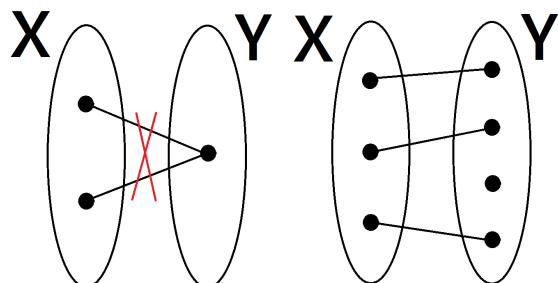
$$\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in f.$$

Будем обозначать соответствующий y через $f(x)$.



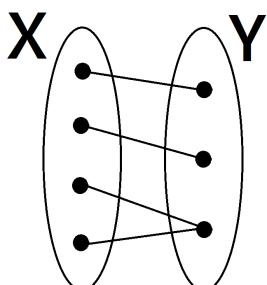
Определение 1.7. Функция f называется инъекцией, если

$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

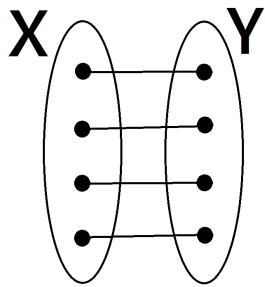


Определение 1.8. Функция f называется сюръекцией, если

$$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y.$$



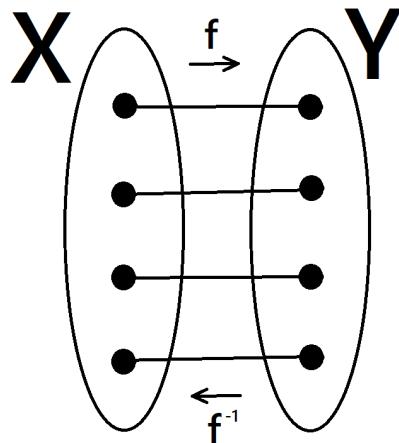
Определение 1.9. Функция называется биекцией, если она одновременно является инъекцией и сюръекцией.



Предложение 1.10. Если f - биекция, то существует обратная функция f^{-1} , для которой $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.

Доказательство. f - биекция $\Rightarrow f$ - инъекция, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

f - сюръекция $\Rightarrow \forall y \exists x : f(x) = y$



(Обозначение: если $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$)

Определение функции для наглядности:

$$\forall x \in X \exists ! y \in Y : f(x) = y$$

$$\forall y \in Y \exists (\text{сюръекция})! (\text{инъекция}) x \in X : f(x) = y \Leftrightarrow \forall y \in Y \exists ! x \in X : f^{-1}(y) = x.$$

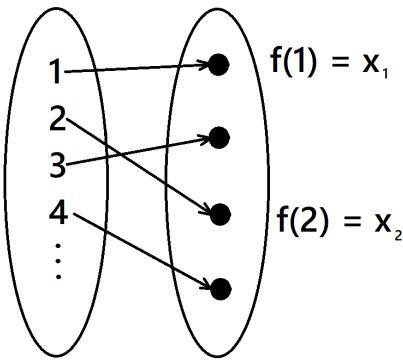
□

1.5 Последовательность

Определение 1.11. Последовательностью элементов из множества X называется функция $f : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Пример 1.12.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	...
2	4	π	12	-1	...



1.6 Вещественные числа I: аксиомы

Определение 1.13. Множеством действительных (вещественных) чисел \mathbb{R} называется множество, на котором определены операции сложения и умножения и отношение порядка \leqslant , удовлетворяющие следующим 16 аксиомам, и которое состоит более чем из одного элемента.

Аксиомы сложения

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a + b = b + a;$
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a + b) + c = a + (b + c);$
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a + 0 = a;$
4. $\forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0.$

Аксиомы умножения

5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot b = b \cdot a;$
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot 1 = a;$
8. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1.$

Аксиома связи сложения и умножения

9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \rightarrow a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

Пример 1.14. Докажите, что если $a, b \in \mathbb{R}$ и $b + a = a$, то $b = 0$.

Доказательство. $b = 0 + b = a + (-a) + b = a + b + (-a) = a + (-a) = 0$ \square

Аксиомы отношения порядка

10. $\forall a \in \mathbb{R} \rightarrow a \leqslant a;$
11. $\forall a, b \in \mathbb{R} \rightarrow a \leqslant b$ или $b \leqslant a;$
12. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leqslant b \text{ и } b \leqslant a) \rightarrow a = b;$
13. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leqslant b \text{ и } b \leqslant c) \rightarrow a \leqslant c.$

Связь отношения порядка и сложения

14. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leqslant b \rightarrow a + c \leqslant b + c.$

Связь отношения порядка и умножения

$$15. \forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leq b \text{ и } 0 \leq c) \rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c.$$

Аксиомы 1-15 известны Вам из школы как свойства действительных чисел. С другой стороны, эти аксиомы определяют алгебраические структуры. В частности, аксиомы 1-4 означают, что \mathbb{R} является абелевой (т.е. коммутативной или перестановочной) группой по сложению. Аксиомы 5-8 говорят, что $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ является абелевой группой по умножению. Аксиомы 1-9 соответствуют определению поля, а аксиомы 1-15 - определению упорядоченного поля.

Аксиома непрерывности

$$16. \text{ Если } A, B \subset \mathbb{R} \text{ и множество } A \text{ лежит слева от множества } B \text{ (т.е. } \forall a \in A \forall b \in B \rightarrow a \leq b), \text{ то } \exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \forall b \in B \rightarrow a \leq c \leq b.$$

1.7 Вещественные числа II: сечения Дедекинда

Рациональные числа: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$

Определение 1.15. *Дедекиндово сечение* - это упорядоченная пара непустых непересекающихся подмножеств A и B в множестве рациональных чисел \mathbb{Q} , обладающих следующими свойствами:

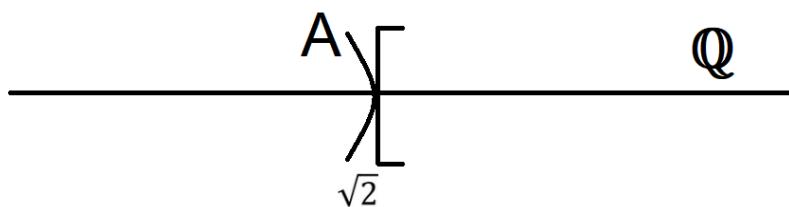
- $A \cup B = \mathbb{Q}, A \cap B = \emptyset;$
- если $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$;
- в A нет наибольшего элемента.

Определение 1.16. *Вещественное число* – это дедекиндово сечение. Для удобства в определении будем использовать только множество A (потому что, имея множество A , можно достроить множество B).

Вопрос. Чем отличаются иррациональные числа от рациональных?

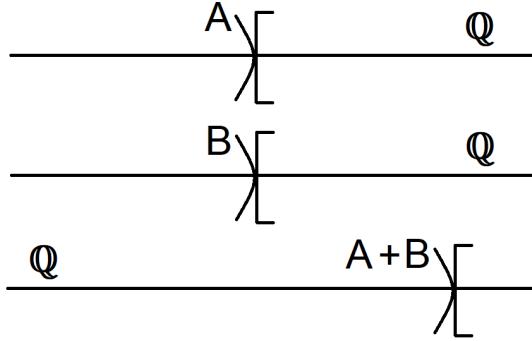
Ответ. В том, что если в B есть минимальный элемент, то этот минимальный элемент - это рациональное число, иначе минимальный элемент - иррациональное число, значит B не имеет минимального элемента.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$$



- На множестве сечений можно определить арифметические операции и порядок.
- Например, сложение определяется следующим образом:

$$A + B := \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}.$$



- Умножение устроено несколько сложнее:

– если $A, B \geq 0$, то

$$A \times B := \{a \times b : a \geq 0 \wedge a \in A \wedge b \geq 0 \wedge b \in B\} \cup \{x \in Q : x < 0\}$$

– если A или B отрицательны, используем тождества

$$A \times B = -(A \times -B) = -(-A \times B) = (-A \times -B)$$

чтобы преобразовать A и/или B в положительные числа, а затем использовать пункт выше.

- Сечения Дедекинда удовлетворяют аксиомам вещественных чисел.

Проверка аксиом: [Эдмунд Ландау. Основы анализа, 1947.](#)

1.8 Вещественные числа III: бесконечные десятичные последовательности

Определение 1.17. Вещественное число можно определить как бесконечную десятичную дробь:

$$\pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$$

где a_0 – целое неотрицательное число, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – последовательность десятичных знаков.

- Сравнить бесконечные десятичные дроби можно поразрядно.
- Как сложить два вещественных числа?

[Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа.](#)

Последовательность из бесконечного количества 9 в этом определении запрещаем: $0, (9) = 1$.

$$0, (9) = x | \cdot 10 \Rightarrow 9, (9) = 10x | - x \Rightarrow 9 = 9x | \cdot \frac{1}{9} \Rightarrow x = 1$$

Здесь применяем следующие аксиомы:

1. $a = b \rightarrow \forall c a + c = b + c$
2. $a = b \rightarrow \forall c a \cdot c = b \cdot c$

Теорема 1.18. *При таком определении для вещественных чисел выполнена аксиома непрерывности.*

Лекция 2: Множества, функции, вещественные числа

Доказательство теоремы 1.18. Аксиома непрерывности:

Если $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$ таковы, что $\forall a \in A$ и $\forall b \in B \rightarrow a \leq b$, то $\exists c : \forall a \in A, \forall b \in B \rightarrow a \leq c \leq b$.

$$b := \pm b_0, b_1 b_2 b_3 \dots \in B$$

$$\exists a \in A : \forall b \in B a \leq b$$

Множество целых частей элементов из B ограничено снизу. Возьмём в B все числа, которые начинаются с b_0, \dots

Возьмём минимальное b_1 для тех b , которые начинаются с b_0, \dots

Возьмём минимальное b_2 для тех b , которые начинаются с $b_0, b_1 \dots$

...

$$\begin{array}{ccccccc} b_0, & b_1 & b_2 & \dots \\ || & || & || & & & & \end{array}$$

$$c = c_0, c_1 c_2 \dots$$

Докажем следующие утверждения:

$$1. \forall b \in B \rightarrow c \leq b$$

Пусть $\exists b \in B$, что $b < c$

$$\begin{array}{c} b_0, b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \\ \wedge \\ c_0, c_1 c_2 \dots c_k c_{k+1} \end{array}$$

Получаем противоречие, т. к. в качестве c_{k+1} мы берём минимальный b_{k+1} среди тех, которые начинаются с $b_0, b_1 b_2 \dots b_k \dots$

$$2. \forall a \in A \rightarrow c \geq a$$

$$\begin{array}{ccccccccc} a = & a_0, & a_1 & \dots & a_k & a_{k+1} & \dots \\ & || & || & & || & \vee & & \\ c = & c_0, & c_1 & \dots & c_k & c_{k+1} & \dots \\ & || & || & & || & || & & \\ b = & b_0, & b_1 & \dots & b_k & b_{k+1} & \dots \end{array}$$

Тогда $b < a$ - противоречие.

□

1.9 Вещественная прямая

Множество вещественных чисел также представляют в виде вещественной прямой.

Определение 1.19. • *интервал:* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;

- *отрезок:* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$;

- *полуинтервалы:* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$, $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$;

- *лучи:*

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}, (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\};$$

- *точка:* $\{a\}$;

- *числовая прямая:* $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

1.10 Верхняя и нижняя грани

Определение 1.20. 1. Число $M \in \mathbb{R}$ называется *верхней гранью* множества $A \subset \mathbb{R}$, если число M лежит справа от множества A , т. е. $\forall a \in A \rightarrow a \leq M$.

2. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным сверху*, если существует (конечная) верхняя грань этого множества: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \rightarrow a \leq M$.

3. Число $m \in \mathbb{R}$ называется *нижней гранью* множества $A \subset \mathbb{R}$, если число m лежит слева от множества A , т. е. $\forall a \in A \rightarrow a \geq m$.

4. Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется *ограниченным снизу*, если существует (конечная) нижняя грань этого множества: $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \rightarrow a \geq m$.

5. Множество A называется *ограниченным*, если A ограничено сверху и ограничено снизу.

1.11 Максимальный и минимальный элементы

Определение 1.21. Число M называется максимальным элементом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут $M = \max A$), если

- $M \in A$,
- M является верхней границей A .

Число m называется минимальным элементом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут $m = \min A$), если

- $m \in A$,
- m является нижней границей A .

1.12 Супремум

Определение 1.22. Число $M \in \mathbb{R}$ называется точной верхней границей или супремумом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут: $M = \sup A$), если

1. M является верхней границей множества A и
2. не существует числа, меньшего, чем M , и являющегося верхней границей множества A ,

то есть

1. $\forall a \in A \rightarrow a \leq M$ и
2. $\neg(\exists M' \in \mathbb{R} : M' < M \text{ и } \forall a \in A \rightarrow a \leq M')$.

Замечание 1.23. Пункт (2) определения супремума можно записать в виде

$$\forall M' < M \rightarrow \neg(\forall a \in A \rightarrow a \leq M')$$

или

$$\forall M' < M \ \exists a \in A : M' < a.$$

1.13 Инфимум

Определение 1.24. Число $m \in \mathbb{R}$ называется точной нижней гранью или инфимумом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут: $m = \inf A$), если m является максимальной нижней гранью A .

Теорема 1.25. Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Тогда существует единственное число $M \in \mathbb{R}$, которое является точной верхней гранью (супремум) множества A .

Аналогичное утверждение верно и для инфимума.

Доказательство. $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено сверху $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \rightarrow a \leq M$.

Пусть B множество верхних граней A .

Тогда $B \neq \emptyset$ ($M \in B$).

$\forall a \in A$ и $\forall b \in B \rightarrow a \leq b \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B$ $a \leq c \leq b$.

Докажем, что $c = \sup A$.

1. $c \in B$.

$$\forall a \in A \rightarrow a \leq c \Rightarrow c \in B$$

2. c - минимальная верхняя грань.

Пусть $\exists b \in B : b < c$ - противоречит построению c (аксиома непрерывности).

□

Глава 2

Предел последовательности

Лекция 3: Предел числовой последовательности

2.1 Числовая последовательность

Определение 2.1. Числовой последовательностью $\{a_n\}$ называется функция $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, где $a(n) = a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Элемент последовательности - это пара (n, a_n) , где n - номер элемента последовательности, а a_n - значение элемента последовательности.

2.2 Предел последовательности

Определение 2.2. Пусть заданы числа $a, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Интервал $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется ε -окрестностью числа a .

Определение 2.3. Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$ (пишут $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ или $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow a_n \in B_\varepsilon(a),$$

m. e.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

(здесь и далее в аналогичных выражениях, если не оговорено противное, мы подразумеваем, что n, N - натуральные числа).

Пример 2.4. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ сходится к числу $a = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$$

$$a = 0, |a_n - a| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

При этом $n = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$ неравенство выполнено

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 : \forall n \geq N(\varepsilon) |a_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Пример 2.5. Последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела.

От противного. Пусть

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |a_n - a| < \varepsilon$$

Для $\varepsilon = \frac{1}{2}$ $\exists N : \forall n \geq N |a_n - a| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 2 = |a_n - a_{n+1}| &= |a_n - a + a - a_{n+1}| \leq |a_n - a| + |a - a_{n+1}| \text{ (неравенство треугольника)} < \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 2 < 1 - \text{противоречие.} \end{aligned}$$

Замечание 2.6. Пусть $\alpha > 0$ - фиксированное число. Тогда свойство

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon) |a_n - a| \leq \alpha \varepsilon$$

равносильно тому, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Доказательство. $\Leftarrow \forall \varepsilon' > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |a_n - a| < \varepsilon'$ (определение предела)

$$\varepsilon' = \alpha \varepsilon$$

$$\text{Для } \varepsilon' \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |a_n - a| < \varepsilon' = \alpha \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |a_n - a| \leq \varepsilon \alpha$$

$$\text{Пусть } \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2\alpha}. \text{ Тогда } |a_n - a| \leq \varepsilon \alpha = \frac{\varepsilon'}{2\alpha} \cdot \alpha = \frac{\varepsilon'}{2}.$$

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists N_1 = N \left(\frac{\varepsilon'}{2\alpha} \right) + 1 : \forall n > N_1 |a_n - a| \leq \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'$$

□

2.3 Единственность предела

Предложение 2.7. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b$, тогда $a = b$.

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |a_n - a| < \varepsilon$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 |a_n - b| < \varepsilon$

Пусть $a \neq b$, $|a - b| = \varepsilon_0 > 0$.

Возьмём такие N_1 и N_2 , что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ и $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Тогда $\forall n \geq \max(N_1, N_2)$

$$\varepsilon_0 = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leq |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 < \varepsilon_0 -$$

противоречие.

□

2.4 Ограниченнaя последовательность

Определение 2.8. Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *ограниченной*, если существуют такие числа $C, c \in \mathbb{R}$, что $c \leq a_n \leq C$ для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 2.9. 1. Последовательность ограничена сверху, если

$$\exists C : \forall n \ a_n \leq C.$$

2. Последовательность ограничена снизу, если $\exists c : \forall n \ a_n \geq c$.

Предложение 2.10. Сходящаяся последовательность ограничена.

Доказательство. Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ |a_n - a| < \varepsilon$$

$$\exists N : \forall n \geq N \ |a_n - a| < 1 \Rightarrow \text{по неравенству треугольника } |a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a| + 1$$

$$\forall n \ |a_n| \leq \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a| + 1\} \Rightarrow \forall n \ c \leq a_n \leq C, \text{ где}$$

$$c = -\max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a| + 1\}, C = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a| + 1\}. \quad \square$$

Лемма 2.11 (Об отделимости). *Если $a_n \rightarrow a$ и $a \neq 0$, то найдется номер $N \in \mathbb{N}$, для которого $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ при $n > N$.*

Доказательство. $a_n \rightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |a_n - a| < \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 \ \exists N : \forall n \geq N \ |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$$

$$\text{Тогда по неравенству треугольника } |a| - |a_n| \leq |a_n - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2}. \quad \square$$

2.5 Арифметические свойства предела

Теорема 2.12. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Тогда

$$1. \ \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b \ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$2. \ \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab;$$

$$3. \text{ если } b \neq 0, b_n \neq 0, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b};$$

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \ |a_n - a| < \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \ |b_n - b| < \varepsilon$$

$$N_3 = \max\{N_1, N_2\}. \text{ Тогда } \forall n \geq N_3 \ |\alpha a_n + \beta b_n - \alpha a - \beta b| = |\alpha a_n - \alpha a + \beta b_n - \beta b| \leq |\alpha a_n - \alpha a| + |\beta b_n - \beta b| = |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| \leq (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$$

2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \rightarrow |b_n - b| < \varepsilon$

$c_n = a_n b_n$

a_1, a_2, a_3, \dots

b_1, b_2, b_3, \dots

$c_1 = a_1 b_1, c_2 = a_2 b_2, c_3 = a_3 b_3, \dots$

Требуется доказать: $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow |c_n - ab| = |a_n b_n - ab| < \varepsilon$.

a_n сходится \Rightarrow по предложению 2.10 $\exists C > 0 : |a_n| \leq C$.

$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leq |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| \Rightarrow$ для $N = \max\{N_1, N_2\}$ $\forall n \geq N \rightarrow |a_n b_n - ab| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a| < C\varepsilon + |b|\varepsilon = (C + |b|)\varepsilon = \alpha\varepsilon$ ($\alpha = C + |b| > 0$)

По замечанию 2.6

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n > N |a_n b_n - ab| < (C + |b|)\varepsilon = \alpha\varepsilon$.

3. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$ (1)

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \rightarrow |b_n - b| < \varepsilon$ (2)

Требуется доказать: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Тогда из пункта 2 будет следовать пункт 3.

$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| < \varepsilon$ - требуется доказать.

Оценим $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} \right| = \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right|$

Из леммы 2.10 следует, что $\exists N_3 : \forall n > N_3 |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0$ (3)

Из (1), (2) и (3) следует, что $\forall n \geq N_4 = \max\{N_1, N_2, N_3\} \left| \frac{b - b_n}{b_n b} \right| < \frac{\varepsilon}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \frac{2\varepsilon}{|b|^2} = \alpha\varepsilon$, где $\alpha = \frac{2}{|b|^2}$.

□

Лекция 4: Теорема Вейерштрасса, число е

Теорема 2.13 (Переход к пределу в неравенстве). *Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$. Если для некоторого номера N выполнено $a_n \leq b_n$ при $n > N$, то $a \leq b$.*

Доказательство. Пусть $a > b \Rightarrow a - b = \varepsilon_0 > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Rightarrow \forall \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \Rightarrow \forall \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2} \exists N_2 : \forall n \geq N_2 |b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

$$\forall n > \max\{N, N_1, N_2\} \varepsilon_0 = a - b = a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \leq$$

$$\leq \underbrace{|a - a_n|}_{< \frac{\varepsilon_0}{2}} + \underbrace{|a_n - b_n|}_{\leq 0 \text{ (из условия)}} + \underbrace{|b_n - b|}_{< \frac{\varepsilon_0}{2}} < \varepsilon_0$$

$\varepsilon_0 < \varepsilon_0$ - противоречие. \square

2.6 Лемма о зажатой последовательности

Лемма 2.14 (О зажатой последовательности). *Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ и для некоторого $N \in \mathbb{N}$ выполнено $a_n \leq c_n \leq b_n$ при $n > N$. Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.*

Доказательство. Выполнено:

1. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$
2. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 |b_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$
3. $\forall n > N a_n \leq c_n \leq b_n$

Из этих пунктов следует, что $\forall n \geq N_4 = \max(N, N_1, N_2) \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \Rightarrow \forall n \geq N_4 a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |c_n - a| < \varepsilon$ (это определение предела) \square

2.7 Теорема Вейерштрасса

Теорема 2.15 (Вейерштрасс). *Пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает ($a_n \leq a_{n+1}$) и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.*

Аналогично, пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ не возрастает ($a_{n+1} \leq a_n$) и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфимуму.

Доказательство. $M = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ (супремум существует, т. к. a_n ограничена сверху)

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное. Хотим доказать, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |a_n - M| < \varepsilon$.

$M' = M - \varepsilon$. Т. к. $M = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, то из свойства супремума ($\forall M' < M \exists a \in A a > M'$) следует, что $\exists a \in \{a_n | n \in \mathbb{N}\} : a > M'$.

Но если $a \in \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, то $\exists N : a = a_N$. Т. е. $\exists N : a_N > M' = M - \varepsilon$.

Т. к. a_n не убывает (т. е. $a_N \leq a_{N+1}$) $\forall n \geq N a_n \geq a_N > M' = M - \varepsilon$ (*)

Только что доказано, что $M - \varepsilon < a_n$, и из-за того, что M - супремум, верно $a_n < M + \varepsilon$. Тогда $M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - M| < \varepsilon$.

(*) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N |a_n - M| < \varepsilon$.

Для доказательства второго утверждения можно рассмотреть последовательность $a_n \rightsquigarrow -a_n$. Если a_n не возрастает, то $-a_n$ не убывает. Последовательность $-a_n \rightarrow -\sup\{-a_n | n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. \square

Пример 2.16. Пусть $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n})$, $a_1 = 2$. Тогда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится и её предел равен $\sqrt{2}$.

Доказательство. 1. a_n - ограничена снизу.

Действительно, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \geq \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}}$ (неравенство Коши) $= \sqrt{2} \Rightarrow a_n \geq \sqrt{2}$.

2. a_n - не возрастает

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) = \frac{1}{2}(a_n + \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{a_n}) \leq \frac{1}{2}(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}) = \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) \Rightarrow a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}(a_n + \frac{2}{a_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a}$

$a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$

$a = -\sqrt{2}$ - не подходит (поскольку $\forall n a_n \geq \sqrt{2} > -\sqrt{2}$) $\Rightarrow a = \sqrt{2}$. \square

Лекция 5: Число e , частичный предел

2.8 Число e

Предложение 2.17. Последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

Доказательство.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} - \text{бином Ньютона.}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = 1 + 1 + \sum_{k=2}^n C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k! \underbrace{n n \dots n}_{k \text{ раз}}} = \\ &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq (*) \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством: при $k \geq 2$ $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \geq 2^{k-1}$.

$$(*) \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} \leq 2 + 1 = 3,$$

значит a_n ограничена, $a_n \leq 3$.

Докажем, что $\sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} < 1$.

Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии.

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{k-1} = \frac{1 - q^k}{1 - q}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) < 2$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \\ &\quad \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) < 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1} \Rightarrow \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n$ возрастает.

По теореме Вейерштрасса a_n имеет предел. \square

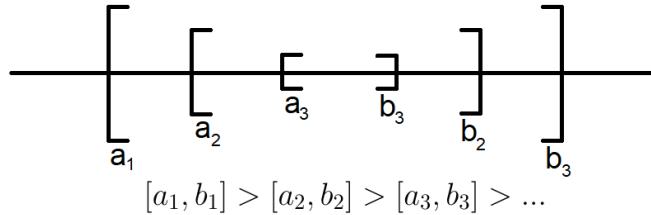
Определение 2.18. Предел последовательности $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ называют **числом Эйлера** и обозначают

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828182845904523536\dots$$

2.9 Принцип вложенных отрезков

Теорема 2.19 (Принцип вложенных отрезков). 1. Всякая последовательность $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ вложенных отрезков (т. е. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$) имеет общую точку.

2. Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, т. е. $b_n - a_n \rightarrow 0$, то такая общая точка только одна.



Доказательство. 1. $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = A, \{b_n | n \in \mathbb{N}\} = B$

$$\forall n \ a_n \leq b_n$$

$\forall n, m \ a_n \leq b_m$ - докажем это.

$$(a) \ n > m \ a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$$

$$(b) \ n \leq m \ a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$$

Тогда $\forall a \in A \ \forall b \in B \rightarrow a \leq b$

Множества A и B непустые \Rightarrow по аксиоме непрерывности $\exists c : \forall a \in A, \forall b \in B \ a \leq c \leq b$.

$\forall n \in \mathbb{N} \ a_n \leq c \leq b_n$ - точка c принадлежит всем отрезкам.

2. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$.

$\exists c_1, c_2 \in [a_n, b_n]$ - от противного ($c_1 \neq c_2$)

Пусть $c_1 < c_2$ $[c_1, c_2] \subseteq [a_n, b_n]$.

Но тогда $b_n - a_n \geq c_2 - c_1 = \varepsilon_0 > 0$.

$b_n - a_n \rightarrow 0 \Rightarrow 0 \geq \varepsilon_0 > 0$ - противоречие.

□

2.10 Подпоследовательность

Теорема 2.20. Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и пусть задана возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$. Последовательность $b_k = a_{n_k}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Число $a \in \mathbb{R}$ называется **частичным пределом** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если выполнено $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Замечание 2.21. Последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела, но его подпоследовательность $b_k = a_{2n}$ имеет предел: $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 1$.

Предложение 2.22. Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности.

Доказательство. $a_n \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 |a_n - a| < \varepsilon \\ b_k = a_{n_k} \quad k \leq n_k \\ \forall \varepsilon > 0 \exists N = N_1 \quad \forall k \geq N_1 \text{ (пояснение: } n_k \geq k \geq N_1) \quad |b_k - a| = |a_{n_k} - a| \leq \\ (\text{последовательность сходится}) \quad |a_k - a| < \varepsilon. \end{aligned} \quad \square$$

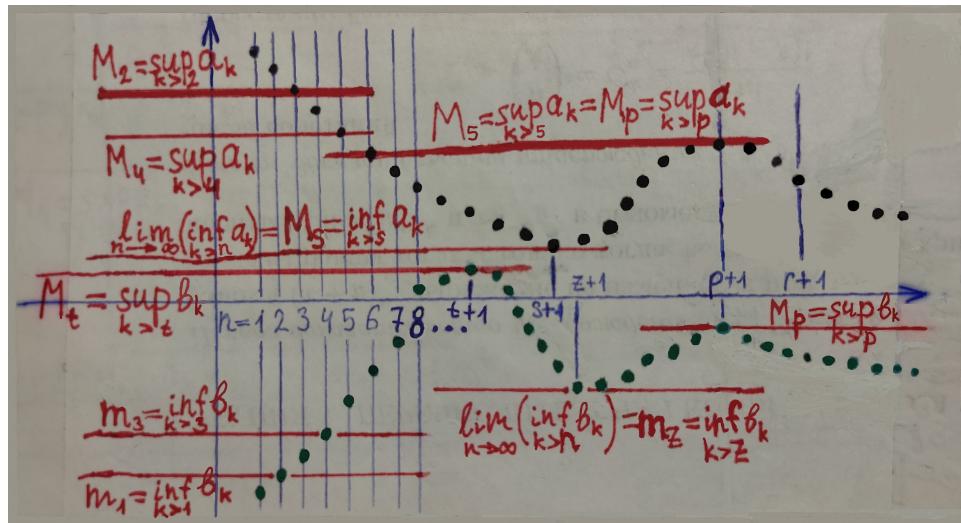
2.11 Нижний и верхний частичные пределы

Определение 2.23. Рассмотрим последовательности $M_n := \sup_{k > n} a_k$ и $m_n := \inf_{k > n} a_k$. Ясно, что последовательность M_n - не возрастают, а последовательность m_n - не убывает. Поэтому для **ограниченной** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют пределы

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} M_n, \quad \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} m_n,$$

которые называются соответственно **верхним и нижним частичными пределами** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Иллюстрация для значений m_n и M_n .



2.12 Теорема Больцано

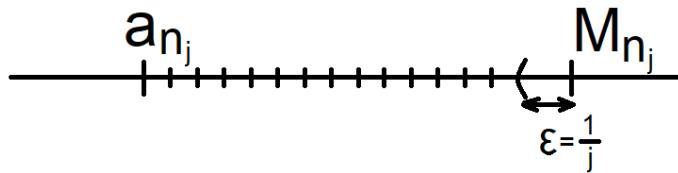
Теорема 2.24. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограниченная последовательность. Тогда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ - частичные пределы последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и любой другой частичный предел принадлежит отрезку $\left[\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \right]$.

Доказательство. Пусть $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = M$.

$$M_n = \sup_{k>n} a_k$$

Построим последовательность a_{n_k} , которая обладает свойством $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = M$. Пусть $n_1 = 1$. Пусть построены первые j членов (т. е. подобраны $n_1 < n_2 < \dots < n_j$). Подберём n_{j+1} -й номер ($n_{j+1} > n_j$).

$$M_{n_j} = \sup_{k>n_j} a_k$$



Т. к. M_{n_j} - супремум, то $\exists a \in \{a_k | k > n_j\}$ такое, что $M_{n_j} - \frac{1}{j} \leq a \leq M_{n_j}$ (в противном случае M_{n_j} - не супремум). Т. к. $a \in \{a_k | k > n_j\}$, то пусть $a = a_{\lambda}$ $n_j > n_{j+1} = \lambda$.

$\forall j \in \mathbb{N} M_{n_j} - \frac{1}{j} \leq a_{n_{j+1}} \leq M_{n_j}$. Т. к. $M_j \rightarrow M, \frac{1}{j} \rightarrow 0$, то по теореме о зажатой последовательности

$$M - 0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{j+1}} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} M_{n_j} = (\text{предложение 2.13}) M$$

Значит $\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} = M \Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ - частичный предел.

Теперь пусть $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n = m$.

Аналогично можно доказать, что

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad m_{n_j} \leq a_{n_{j+1}} \leq m_{n_j} + \frac{1}{j}$$

$$m = \lim_{j \rightarrow \infty} m_{n_j} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{j+1}} \leq m + 0$$

$\lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{j+1}} = m \Rightarrow \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$ - частичный предел.

Пусть теперь a - частичный предел. Это означает, что $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $\inf_{p > n_{k-1}} a_p = m_{n_{k-1}} \leq a_{n_k} \leq M_{n_{k-1}} = \sup_{p > n_{k-1}} a_p$. По теореме о переходе к пределу в неравенстве получаем, что $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n \leq a \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$. \square

Следствие 2.25 (Теорема Больцано). *Во всякой ограниченной последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность.*

Можно, потому что, например, есть верхний частичный предел, который является частичным пределом соответствующей последовательности.

Лекция 6: Критерий Коши

Теорема 2.26. *Ограниченная* последовательность сходится тогда и только тогда, когда множество её частичных пределов состоит из одного элемента.

Доказательство. \Rightarrow предложение 2.22

\Leftarrow Т. к. множество частичных пределов состоит из одного элемента, то

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = a$$

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n, m_n = \inf_{k > n} \{a_k\}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} M_n, M_n = \sup_{k > n} \{a_k\}$$

Тогда $\forall n m_{n-1} \leq a_n \leq M_{n-1}$.

Т. к. $m_{n-1} \rightarrow a, M_{n-1} \rightarrow a$, то по теореме о зажатой последовательности $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

□

2.13 Фундаментальная последовательность

Определение 2.27. Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **фундаментальная** (или является последовательностью Коши), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при каждом $n, m > N(\varepsilon)$. То же самое утверждение можно переписать в кванторах следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\varepsilon) |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Пример 2.28. 1. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ - фундаментальная.

2. Последовательность $a_n = (-1)^n$ не фундаментальная.

Доказательство. 1.

$$|a_n - a_m| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right| \leq \max \left\{ \frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right\} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \varepsilon : \forall n, m \geq N |a_n - a_m| < \varepsilon$$

2.

$$\exists \varepsilon = 1 : \forall N \exists n = N, m = n + 1 |a_n - a_m| = |a_n - a_{n+1}| = 2 > 1$$

□

2.14 Критерий Коши

Предложение 2.29. *Если последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится, то она фундаментальная.*

Доказательство. Последовательность сходиться $\Rightarrow \forall \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2} > 0 \exists N : \forall n \geq N |a_n - a| < \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\forall m, n > N |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Теорема 2.30. *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. \Rightarrow предложение 2.29

\Leftarrow Докажем, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N |a_n - a_m| < \varepsilon$

Для $\varepsilon = 1 \exists N : \forall n, m > N |a_n - a_m| < 1$

Тогда для $n > N |a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| \leq |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$

Значит $|a_n| \leq M = \max\{1 + |a_{N+1}|, |a_1|, \dots, |a_N|\} \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена.

У ограниченной последовательности по теореме Больцано есть хотя бы один частичный предел a . Пусть к нему сходится подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 : k > k_0 |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Кроме того, в силу фундаментальности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : n, m > N |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Пусть k выбрано так, что $k > k_0$ и $m = n_k > N$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n > N |a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

(замечание 2.8).

□

2.15 Фундаментальная последовательность

Пример 2.31. Пусть $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$, $a_1 = 1$. Докажите, что a_n сходится, и найдите предел.

Доказательство. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N} a_n \geq 1$ и

$$\begin{aligned} |a_{n+1} - a_n| &= \left| 1 + \frac{1}{1+a_n} - \left(1 + \frac{1}{1+a_{n-1}} \right) \right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leq \frac{1}{4} |a_n - a_{n-1}| \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} |a_2 - a_1| = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{1+1} - 1 \right) = \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Отсюда при $m > n$

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &\leq |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - \dots - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + \\ &+ |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{m-2} + \left(\frac{1}{4} \right)^{m-3} + \dots + \left(\frac{1}{4} \right)^n + \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \leq \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n \end{aligned}$$

Т. к. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^n = \frac{8}{3} \cdot 0 = 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \rightarrow \frac{8}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n < \varepsilon$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |a_m - a_n| < \varepsilon$ (*), т. е. выполнен Критерий Коши \Rightarrow существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Найдём этот предел.

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$$

Возьмём предел от обеих частей:

$$a = 1 + \frac{1}{1+a} \Leftrightarrow a(1+a) = 1 + a + 1 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2},$$

т. к. $a \geq 0$ ($a_n \geq 1$). □

Пояснение. (*) Условие $|a_m - a_n| < \varepsilon$ выполнено при $m > n > N$. Но в определении фундаментальной последовательности это утверждении должно выполняться $\forall n, m > N$. Это не является проблемой, т. к. в случае $m < n$ можно показать, что $|a_m - a_n| = |a_n - a_m|$ и переобозначить m и n .

Лекция 7: Числовые ряды

Замечание 2.32. На самом деле, мы доказали следующее общее утверждение. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числовая последовательность и предположим, нашлось такое число $q \in (0, 1)$, что

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q |a_n - a_{n-1}|$$

при каждом $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Тогда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится.

Доказательство.

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q |a_n - a_{n-1}| \leq q^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \dots \leq q^{n-1} |a_2 - a_1| = q^{n-1} \cdot c_1$$

Можем считать, что $m > n$.

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - \dots - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \leq \\ &\leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \leq q^{m-2} \cdot c_1 + q^{m-3} \cdot c_1 + \dots + q^{n-1} \cdot c_1 = \\ &= c_1 \cdot q^{n-1} \cdot (1 + q + \dots + q^{m-n-1}) = c_1 \cdot q^{n-1} \cdot \left(\frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \right) \leq c_1 \cdot q^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - q} = c_2 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Т. к. $\lim_{n \rightarrow \infty} c_2 q^{n-1} = c_2 \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = c_2 \cdot 0 = 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N c_2 \cdot q^{n-1} < \varepsilon,$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |a_m - a_n| < \varepsilon$, т. е. выполнен критерий Коши \Rightarrow существует $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \square

2.16 Числовые ряды

Определение 2.33. Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - числовая последовательность. Числовым рядом с членами a_n называется выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Конечные суммы $S_n := \sum_{k=1}^n a_k$ называют **частичными суммами** ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **сходится**, если у последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует предел, который называют суммой ряда. Если такого предела не существует, то говорят, что ряд не сходится или **расходится**.

В силу арифметики предела на сходимость ряда (но не на сумму ряда) не влияет добавление (или отбрасывание) первых нескольких членов.

Доказательство. S_n - сумма n первых членов ряда, C_k - сумма k отброшенных, Q_{n-k} - сумма членов ряда, входящих в сумму S_n и не входящих в C_k . Тогда $S_n = C_k + Q_{n-k}$, где k - постоянное число, не зависящее от n . Если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n-k}$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, если существует $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то существует и $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{n-k}$. \square

Пример 2.34. При каких q сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$?

Доказательство. Вычислим его частичные суммы: если $q \neq 1$, то

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

и ряд сходится к $\frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$ и расходится при $|q| > 1$; если $q = 1$, то $S_n = n$ и ряд не сходится, если $q = -1$, то $S_1 = 1, S_2 = 1 - 1 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$, т. е. ряд не сходится (в силу теоремы 2.26; множество частичных пределов состоит из 2-х элементов) \square

Также часто бывает удобно индексировать суммирование не только натуральным рядом. Под выражением $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ естественным образом подразумевается $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k_0+k-1}$, т. е. такой числовой ряд, чья n -я частичная сумма имеет вид $S_n = a_{k_0} + a_{k_0+1} + \dots + a_{k_0+n-1}$.

Т. к. сходимость ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм, то для сходимости ряда выполнен следующий критерий Коши.

2.17 Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 2.35. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что для всех $n > m > N$ выполнено

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| = |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

2.18 Необходимое условие сходимости ряда

Следствие 2.36 (Необходимое условие сходимости ряда). *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.*

Доказательство. Действительно, из критерия Коши следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N , для которого при каждом $n > N + 1$ выполнено $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$. \square

Пример 2.37. 1. Докажите, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ сходится.

2. Докажите, что гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

Доказательство. 1. Исследуем выполнение условия критерия Коши: пусть $n > m$, тогда

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right| = \left| \frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \right| \leq \frac{1}{m+1}.$$

Поэтому при $n > m > N(\varepsilon) = [\frac{1}{\varepsilon}]$ выполнено $\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k(k+1)} \right| < \varepsilon$, а значит ряд сходится.

2. Исследуем выполнение условия критерия Коши: пусть $n > m$, тогда

$$\left| \sum_{k=m+1}^n \frac{1}{k} \right| > \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n-m} = \frac{n-m}{n}.$$

Какой бы теперь ни был задан номер N , всегда можно взять $m > N$ (например, $m = N + 1$) и $n = 2m$, тогда $\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \geq \frac{1}{2}$, а значит условие критерия Коши не выполнено и ряд расходится.

□

2.19 Абсолютная сходимость

Следствие 2.38. Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство. Действительно, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ следует выполнение для него условия критерия Коши, а именно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число N , что при $n > m > N$ выполнено

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \left| \sum_{k=m+1}^n |a_k| \right| = \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon.$$

Следовательно, условие критерия Коши выполнено и для ряда $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$, а значит он сходится. □

2.20 Абсолютная и условная сходимость

Определение 2.39. Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **сходится абсолютно**, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **сходится условно**, если он сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ расходится.

Пример 2.40. Ряд $1 + (-1) + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{3} + (-\frac{1}{3}) + \dots$ - сходится условно.

Доказательство. То, что ряд не сходится абсолютно, следует из установленной расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Сходимость ряда следует из того, что его частичные суммы равны либо 0, либо $\frac{1}{n}$ (т. к. оба $\rightarrow 0$, то множество частичных сумм равно $\{0\} \Rightarrow$ последовательность частичных сумм сходится) \square

Как показано выше, из того, что ряд сходится абсолютно, следует и то, что сам ряд сходится. Поэтому иногда может быть полезно отдельно исследовать абсолютную сходимость рядов, т. е. сходимость рядов с положительными слагаемыми.

2.21 Признак сравнения

Предложение 2.41. Пусть $a_k \geq 0$, тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.

Доказательство. S_n - частичные суммы, не убывают.

1. S_n - ограничена \Rightarrow по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \Rightarrow S_n$ - ограничена.

\square

Предложение 2.42. Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Наоборот, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. 1. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится $\Rightarrow B_n$ - ограниченные частичные суммы ряда (предложение 2.41), $0 \leq A_n \leq B_n \Rightarrow A_n$ - ограничены и не убывают $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, $0 \leq A_n \leq B_n$. Если бы B_n сходились, то A_n были ограничены и не убывали $\Rightarrow A_n$ сходились, противоречие.

\square

Лекция 8: Перестановка членов ряда

2.22 Признак Коши

Теорема 2.43 (Признак Коши). Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - невозрастающая последовательность, $a_n \geq 0$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Доказательство. Пусть $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $\tilde{S}_n = \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}$. Сделаем оценку сверху и снизу частичной суммы S_N .

$$\begin{array}{ccccccccc}
 a_1 + a_1 & + & 2^1 a_{2^1} & + & 2^2 \cdot a_{2^2} & + \cdots + & 2^{n-2} \cdot a_{2^{n-2}} & + & 2^{n-1} \cdot a_{2^{n-1}} \\
 \backslash \backslash \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash \\
 \boxed{a_1 + a_2} & + & \boxed{a_3 + a_4} & + & \boxed{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} & + \cdots + & \boxed{a_{2^{n-2}+1} + \cdots + a_{2^{n-1}}} & + & \boxed{a_{2^{n-1}+1} + \cdots + a_{2^n}} \\
 \backslash \backslash \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash \\
 \boxed{a_1 + a_2} & + & \boxed{a_3 + a_4} & + & \boxed{a_5 + a_6 + a_7 + a_8} & + \cdots + & \boxed{a_{2^{n-2}+1} + \cdots + a_{2^{n-1}}} & + & 0 \\
 \backslash \backslash \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash & & \backslash \backslash \\
 a_1 + a_{2^1} & + & 2^1 \cdot a_{2^2} & + & 2^2 \cdot a_{2^3} & + \cdots + & 2^{n-2} \cdot a_{2^{n-1}} & + & 0
 \end{array}$$

В случае, если $2^{n-1} \leq N \leq 2^n$,

$$\frac{1}{2}(a_1 + \tilde{S}_{n-1}) \leq S_{2^{n-1}} \leq S_N \leq S_{2^n} \leq a_1 + \tilde{S}_{n-1}$$

1. Если $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится $\Rightarrow \tilde{S}_n$ сходится $\Rightarrow \tilde{S}_n$ ограничена $\Rightarrow S_N$ ограничена.
Но S_N не убывает $\Rightarrow S_N$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow S_N$ сходится $\Rightarrow S_N$ ограничена $\Rightarrow \tilde{S}_n$ ограничена.
Но \tilde{S}_n не убывает $\Rightarrow \tilde{S}_n$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится.

□

Пример 2.44. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

1. $p \leq 0 \frac{1}{k^p} \not\rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$ (необходимо условие нарушено) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ - расходится

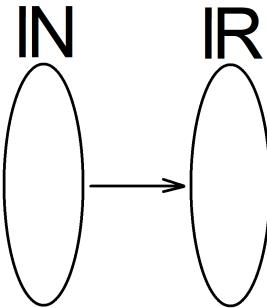
2. $p > 0 \Rightarrow \frac{1}{k^p}$ - убывает.

Признак Коши:

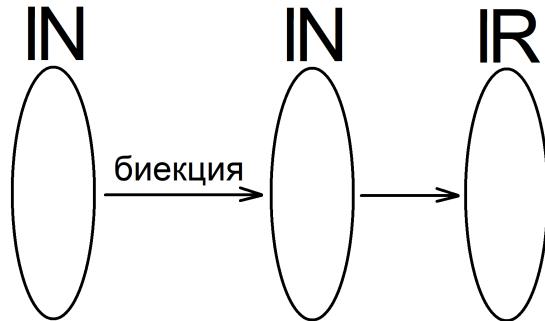
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k - \text{сходится} \Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 \text{ (пример 2.34)} \Leftrightarrow p > 1.$$

2.23 Перестановка членов ряда

a_n - это функция $a(n)$



Если поменять местами слагаемые ряда



Функция $k(j)$ - биекция на \mathbb{N} , $k(j) = k_j$ $\{a_{k_j} | j \in \mathbb{N}\} = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Пример 2.45 (семинарская задача 3.2). Если ряд сходится условно, то при перестановке членов его сумма может измениться.

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots = 0$$

Переставим члены ряда

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots &= \sum_{k=1}^{3n} \tilde{a}_k = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln 2n + \gamma + \alpha_n - \ln n - \gamma' - \alpha'_n = \\ &= \ln 2 + \gamma + \alpha_n - \gamma' - \alpha'_n \Rightarrow \text{ряд сходится к } \ln 2, \text{ а не к нулю.} \end{aligned}$$

Определение 2.46. Будем говорить, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ получен перестановкой членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, если существует последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, задающая взаимно однозначное преобразование (биекцию) множества \mathbb{N} , и такая, что $\forall j \in \mathbb{N} \rightarrow \tilde{a}_j = a_{k_j}$.

Теорема 2.47 (О независимости суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых). *Если ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ получен перестановкой членов абсолютно сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ абсолютно сходится и его сумма равна сумме ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Доказательство. Краткая запись:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$$

Шаг 1 Рассмотрим случай, когда $a_k \geq 0 \forall k \in \mathbb{N}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим $M_n = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{k_j\}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{j=1}^n \tilde{a}_j = \sum_{j=1}^n a_{k_j} \leq \sum_{k=1}^{M_n} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (*)$$

(последние два неравенства верны, потому что ряд с неотрицательными членами и $n \leq M_n$)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - абсолютно сходящийся $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

Частичные суммы $\sum_{j=1}^n \tilde{a}_j$ не убывают (т. к. $a_k \geq 0$) и ограниченные числом $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ \Rightarrow по теореме Вейерштрасса $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ - сходится.

Итак, $\tilde{A}_n = \sum_{j=1}^n \tilde{a}_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j = A$ ($A = \text{const}$)

По теореме о переходе к пределу в неравенстве $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{A}_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Поскольку ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ может быть получен из ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ обратной перестановкой слагаемых, то $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$. Поэтому при перестановке слагаемых ряда с неотрицательными членами его сумма не меняется.

Шаг 2 Рассмотрим общий случай. Применяя утверждение шага 1 для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, получаем сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{a}_j|$. Поэтому ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ сходится абсолютно. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}$, $a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$. Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$

$a_k = a_k^+ - a_k^-$ (если $a_k > 0$, то $a_k^+ = a_k$, $a_k^- = 0$; если $a_k < 0$, то $a_k^+ = 0$, $a_k^- = -a_k$),

$|a_k| = a_k^+ + a_k^-$ (тоже самое), $0 \leq a_k^+ \leq |a_k|$, $0 \leq a_k^- \leq |a_k|$.

В силу утверждения, доказанного на шаге 1,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j^+ = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \quad \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j^- = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-,$$

причём эти ряды сходятся по признаку сравнения (в силу (*)). Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{k_j}^+ - a_{k_j}^-) = (**)$$

Предел последовательности разности частичных сумм равен разности пределов частичных сумм

$$(**) : \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^+ - \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^+ - a_k^-) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

□

Заметим, что при перестановке условно сходящегося ряда, вообще говоря, меняется. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.48 (Теорема Римана). *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится условно, то для любого $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ можно так переставить члены ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, что полученный $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ будет иметь сумму равную x .*

Без доказательства.

Глава 3

Предел функции

3.1 Окрестности

Определение 3.1. Пусть $\varepsilon > 0$.

- Окрестностью радиуса ε (или ε -окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество

$$B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

- Проколотой ε -окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество

$$B'_\varepsilon(a) := B_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

3.2 Внутренние, предельные и граничные точки

Определение 3.2. • Точка $a \in \mathbb{R}$ называется внутренней точкой множества M , если она входит в это множество M с некоторой своей окрестностью (т. е. найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \subset M$).

- Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества M , если каждая ее проколотая окрестность имеет непустое пересечение с множеством M (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ пересечение $B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$).
- Точка $a \in \mathbb{R}$ называется граничной точкой множества M , если каждая ее окрестность имеет непустое пересечение как с множеством M , так и с его дополнением (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$ и $B_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R} \setminus M) \neq \emptyset$).

Пример 3.3. Например, для множества $M = (0, 1] \cup \{3\}$ точки $0, \frac{1}{2}, 1$ будут предельными, а точки -1 и 3 не будут; точки $0, 1, 3$ будут граничными, а точки -1 и $\frac{1}{2}$ не будут.

Лекция 9: Предел функции

Замечание 3.4. Точка a является предельной для M тогда и только тогда, когда найдется сходящаяся к a последовательность $a_n \in M \setminus \{a\}$.

Доказательство. \Rightarrow Если a предельная, то $\forall \varepsilon > 0 B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset \Rightarrow \forall n \varepsilon = \frac{1}{n} a_n (\neq a) \in B'_{\frac{1}{n}}(a) \cap M \neq \emptyset \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \rightarrow 0 \Rightarrow |a_n - a| \rightarrow 0 \Rightarrow a_n \rightarrow a$.

\Leftarrow Если $a_n \in M \setminus \{a\}$ и $a_n (\neq a) \rightarrow a$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Т. к. $a_n \in M \setminus \{a\}$ и $(a_n \neq a \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \varepsilon)$, то $a_n \in B'_\varepsilon(a)$ и $a_n \in M \Rightarrow B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$.

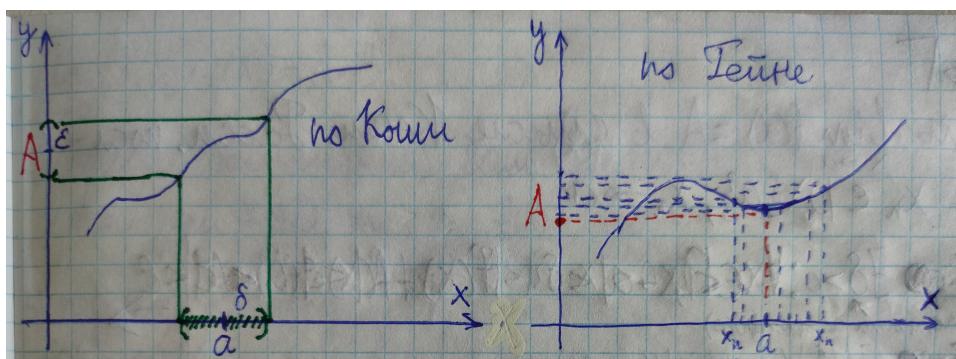
□

3.3 Предел функции по Коши

Теорема 3.5. Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и пусть a - предельная для D точка. Число A называется пределом функции f в точке a (по множеству D), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для каждого $x \in D \cap B'_\delta(a)$. Используют обозначения $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

С помощью кванторов определение можно записать так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap B'_\delta(a) \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ или, эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Пример 3.6. Пусть $f(x) = x^2$, тогда $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$.

Доказательство. Действительно, при $0 < |x - 1| < \delta$ выполнено $|f(x) - 1| = |x + 1||x - 1| < (\delta + 2)\delta$ ($|x + 1| \leq |x - 1| + 2 < \delta + 2$). Поэтому при $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ выполнено $|f(x) - 1| < \varepsilon$ при каждом x , для которого $0 < |x - 1| < \delta$.

Пояснение. 1. $\delta = \frac{\varepsilon}{3} < 1 \Rightarrow \varepsilon < 3$

$$\delta(\delta + 2) = \frac{\varepsilon}{3} \left(\frac{\varepsilon}{3} + 2 \right) < \frac{\varepsilon}{3}(1 + 2) = \varepsilon$$

2. $\delta = 1 \leq \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \varepsilon \geq 3$

$$\delta(\delta + 2) = 3 \leq \varepsilon$$

□

Пример 3.7. Почему мы не берём сам предел в окрестность? А потому, что мы это используем при расчёте пределов:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$$

Проверка: $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x) 0 < |x - 1| < \delta \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$

Примем $\delta := \varepsilon : 0 < |x - 1| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2 \right| = |x - 1| < \varepsilon$

Если мы бы допустили, что a включено в δ -окрестность, то никакое бы δ не подошло - для значения $x = a = 1$ было бы неверно, что $f(1) \in B_\delta(2)$.

Замечание 3.8. Если множество D не ограничено сверху (снизу), то можно определить предел функции в «точке» $+\infty$ ($-\infty$). Для этого по определению будем считать, что $B'_\varepsilon(+\infty) := (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ и $B'_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Можно дать альтернативное определение функции.

3.4 Предел функции по Гейне

Теорема 3.9. Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и пусть a предельная для D точка. Число A называется пределом функции f в точке a (по множеству D), если для каждой последовательности точек $x_n \in D \setminus \{a\}$ ($x_n \neq a$), $x_n \rightarrow a$, выполнено $f(x_n) \rightarrow A$ при $n \rightarrow \infty$.

Покажем, что два этих определения задают один и тот же объект.

Теорема 3.10. Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.

Доказательство. 1. $K \Rightarrow \Gamma$ Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ в смысле Коши. Рассмотрим последовательность точек $x_n \in D \setminus \{a\}$, $x_n \rightarrow a$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \delta$$

2. $\Gamma \Rightarrow K$ От противного.

Пусть число A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists x_\delta \in D, 0 < |x_\delta - a| < \delta \rightarrow |f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon$$

(отрицание определения Коши)

Рассмотрим последовательность $a_n = x_{\frac{1}{n}}$.

Пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 : \exists a_n \in D, 0 < |a_n - a| < \frac{1}{n} \rightarrow |f(a_n) - A| \geq \varepsilon$$

$0 < |a_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $a_n \rightarrow a$, но последовательность точек $f(a_n)$ не сходится к A . Таким образом, число A не является пределом функции f в точке a в смысле Гейне.

□

3.5 Арифметические свойства предела функции и неравенства

Теорема 3.11. Пусть функции f, g, h определены на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и пусть $-$ предельная для D точка. Тогда

1. (единственность предела) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, то $A = B$;
2. (линейность предела) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;
3. (предел произведения) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
4. (предел отношения) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ при $x \in D$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$;
5. (переход к пределу в неравенстве) если $\exists r > 0 : f(x) \leq g(x)$ при $x \in D \cap B'_r(a)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $A \leq B$;
6. (предел зажатой функции) если $\exists r > 0 : f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ при $x \in D \cap B'_r(a)$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A$, то $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = A$;

7. (ограниченность функции) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, то найдутся такие $\delta > 0$ и $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ при каждом $x \in D \cap B'_\delta(a)$;

8. (отделимость от нуля) если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ при $x \in D \cap B'_\delta(a)$.

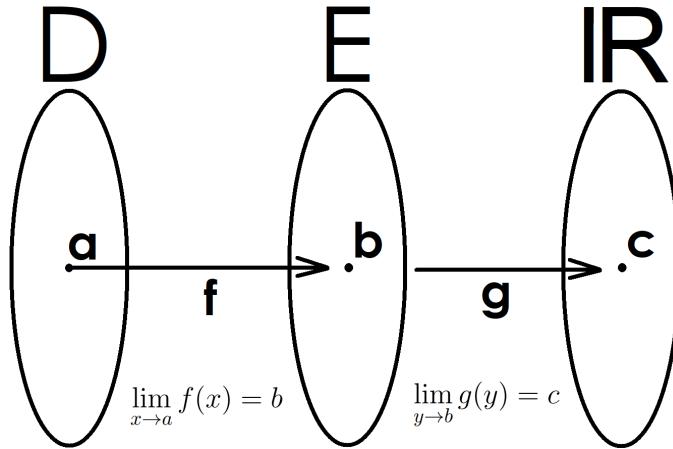
Доказательство. Свойства 1) - 6) следуют из аналогичных свойств для предела последовательности и определения функции по Гейне.

7) При $\varepsilon = 1 > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap B'_\delta(a) |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| - |A| \leq |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |A| + 1 = C > 0$

8) При $\varepsilon = \frac{|A|}{2} > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap B'_\delta(a) |f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |A - f(x)| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |A| - |f(x)| \leq |A - f(x)| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$. \square

3.6 Теорема о пределе сложной функции

Теорема 3.12. Пусть $f : D \rightarrow E, g : E \rightarrow \mathbb{R}$, a - предельная точка множества D , b - предельная точка множества E , $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$ и есть такая проколотая окрестность $B'_\delta(a)$ точки a , что $f(x) \neq b$ для каждой точки $x \in B'_\delta(a) \cap D$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.



Доказательство. $h(x) = g(f(x))$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Rightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{a\} \text{ при } x_n \rightarrow a \text{ } y_n = f(x_n) \rightarrow b.$$

$$x_n \rightarrow a \text{ и } \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(a) \rightarrow f(x) \neq b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow x_n \in B'_\delta(a) (\varepsilon = \delta) \text{ и } f(x_n) \neq b.$$

$$\text{Тогда последовательность } \{f(x_n)\}_{n=N}^{\infty} \subset E \setminus \{b\} \text{ и } f(x_n) \rightarrow b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{из } \lim_{x \rightarrow b} g(x) = c) g(f(x_n)) \rightarrow c.$$

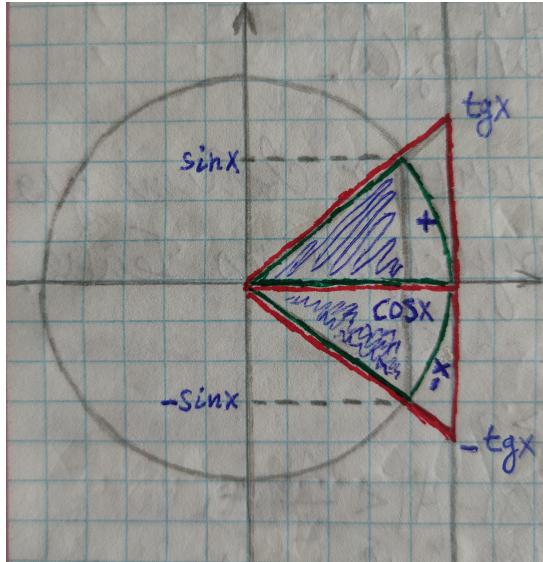
\square

Лекция 10: Замечательные пределы, критерий Коши

3.7 Первый замечательный предел

Предложение 3.13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. 1. $x \in (0; \frac{\pi}{2})$



$S_c \leq S_3 \leq S_k$ - площади синего, зелёного и красного треугольников

Используем формулу площади прямоугольного треугольника $S_c = \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x$, $S_k = \frac{\tg x}{2}$, а затем x -ой части круга $S_3 = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2$.

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2} < \frac{\tg x}{2} \cdot 2$$

$$\sin x \cdot \cos x < x < \tg x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x \cdot \cos x < x \mid : x > 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x < 1 \mid : \cos x > 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$x < \frac{\sin x}{\cos x} \mid \cdot \cos x > 0 \Rightarrow x \cdot \cos x < \sin x \mid : x > 0 \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ по теореме о зажатой функции.}$$

2. $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$

$$-\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x < -\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = -\frac{x}{2} < -\frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x > x > \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x \cdot \cos x > x \mid : x < 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x < 1 \mid : \cos x > 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$x > \frac{\sin x}{\cos x} \mid \cdot \cos x > 0 \Rightarrow x \cdot \cos x > \sin x \mid : x < 0 \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

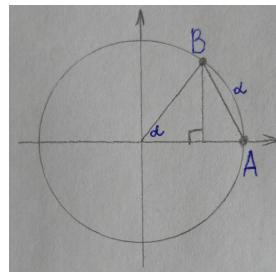
Осталось доказать, что $\lim_{x \rightarrow y} \cos x = \cos y$, т. е. функция непрерывна (предел в этой точке равен значению функции в этой точке)

Требуется доказать $\lim_{x \rightarrow y} \cos x = \cos y$.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - y| < \delta \rightarrow |\cos x - \cos y| < \varepsilon$$

$$|\cos x - \cos y| = \left| 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \sin \left(\frac{x-y}{2} \right) \right| \leq 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y|$$

Здесь мы пользуемся неравенством $|\sin \alpha| \leq |\alpha|$



Дуга больше отрезка AB . Отрезок больше высоты. Поэтому дуга угла α больше синуса соответствующего угла (или равна, если $A = B$).

Тогда если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то $|x - y| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow |\cos x - \cos y| < \varepsilon$.

□

3.8 Второй замечательный предел

Предложение 3.14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

Доказательство. Пусть $f(x) := \left(1 + \frac{1}{1+[x]}\right)^{[x]}, g(x) := \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}.$

Тогда $f(x) \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq g(x).$

Кроме того,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Следовательно, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = e.$

Утверждение следует из теоремы о пределе зажатой функции. \square

3.9 Критерий Коши

Теорема 3.15. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ и a - предельная точка D . Предел $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $x, y \in B'_\delta(a) \cap D$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Доказательство. \Rightarrow Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D,$

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда $|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(y) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f(x) - A + A - f(y)| \leq |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

\Leftarrow Пусть $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \in B'_\delta(a) \cap D \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$. Тогда $f(x_n)$ - фундаментальная (т. к. $\exists N : \forall n \geq N, x_n \in B'_\delta(a) \cap D \Rightarrow \forall n, m > N \rightarrow |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$).

Пусть есть другая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset D \setminus \{a\}, y_n \rightarrow a$.

Рассмотрим последовательность $z_{2k-1} = x_k, z_{2k} = y_k$, т. е. это последовательность вида $x_1, y_1, \dots \subset D \setminus \{a\}$.

$x_n \rightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_1 : \forall n \geq N_1 \rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$
 $y_n \rightarrow a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n \geq N_2 \rightarrow |y_n - a| < \varepsilon$ $\left| \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N_3 = 2 \max\{N_1, N_2\} : \forall n \geq N_3 \rightarrow |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow z_n \rightarrow a \Rightarrow (\text{из определения предела функции по Гейне}) \lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = B.$

Но т. к. подпоследовательность $f(x_n)$ последовательности $f(z_n)$ сходится к A , то вся последовательность $f(z_n)$ сходится к $A = B$. Значит $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ единственный. Таким образом, доказано существование предела по Гейне.

□

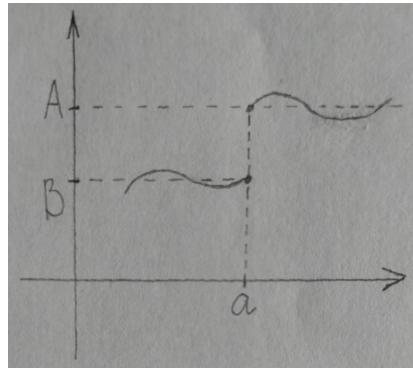
Лекция 11: Эквивалентность и о-символика

3.10 Пределы справа и слева

Пусть $D_a^+ := D \cap (a, +\infty)$ и $D_a^- := D \cap (-\infty, a)$.

Определение 3.16. Пусть точка a - предельная для множества D_a^+ и существует предел функции f по множеству D_a^+ в точке a . Этот предел называют пределом справа функции f в точке a и обозначают $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$. Аналогично определяется предел слева, который обозначают $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = B$$



3.11 Теорема Вейерштрасса

Теорема 3.17. Пусть f - не убывает и ограничена на множестве D , a - предельная точка множества D_a^- . Тогда существует предел слева

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D_a^-\}.$$

Пусть f - не убывает и ограничена на множестве D , a - предельная точка множества D_a^+ . Тогда существует предел справа

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D_a^+\}.$$

Аналогичные утверждения с заменой \inf на \sup справедливы и для невозрастающей функции.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{x \in D_a^-} f(x)$.

$$1. \forall \varepsilon > 0 \exists x_0 \in D_a^- : f(x_0) > M - \varepsilon$$

Пояснение. $M = \sup A$

- (a) $\forall a \in A \ a \leq M$
(b) $\forall b$ - верхняя грань $A \rightarrow b \geq M$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : a > M - \varepsilon$

2. $f(x)$ не убывает $\Rightarrow \forall x \geq x_0 \rightarrow f(x) \geq f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leq f(x) \leq M < M + \varepsilon$

Из (1) и (2) $\Rightarrow \varepsilon > 0 \ \exists \delta = a - x_0 > 0 : \forall x \in B'_\delta(a) \cap D_a^- \rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon$

Для предела справа доказывается аналогично. \square

3.12 Отношение эквивалентности

Определение 3.18. *Бинарное отношение \sim на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:*

1. рефлексивность: $\forall x \in X \rightarrow x \sim x$;
2. симметричность: $\forall x, y \in X \rightarrow x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
3. транзитивность: $\forall x, y, z \in X \rightarrow (x \sim y \text{ и } y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.

3.13 Классы эквивалентности

Определение 3.19. *Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности \sim . Классом эквивалентности элемента $x \in X$ называется множество*

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}$$

Пример 3.20. *Пусть задано натуральное число k . Для целых чисел m, n будем писать $m \stackrel{k}{\sim} n$, если $\frac{m-n}{k} \in \mathbb{Z}$. Проверьте, что бинарное отношение $\stackrel{k}{\sim}$ является отношением эквивалентности на \mathbb{Z} . Для любого $m \in \mathbb{Z}$ класс эквивалентности $[m]$ состоит из всех целых чисел, имеющих такой же остаток при делении на k , что и число m .*

Доказательство. Если $\frac{m-n}{k} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \equiv n \pmod{k}$.

1. $m \equiv m \pmod{k}$
2. если $m \equiv n \pmod{k}$, то $n \equiv m \pmod{k}$
3. если $m \equiv n, n \equiv p \Rightarrow m \equiv p \pmod{k}$

Таким образом, $\stackrel{k}{\sim}$ - класс эквивалентности. \square

Определение 3.21. Будем говорить, что множество X является дизъюнктным обединением семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и писать $X = \bigsqcup_{\alpha \in A} X_\alpha$, если

1. $X = \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$
2. $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha, \beta \in A : \alpha \neq \beta.$

Лемма 3.22. Если на множестве X задано отношение эквивалентности \sim , то X является дизъюнктным обединением различных классов эквивалентности $[x]$, где $x \in X$.

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ □

3.14 Эквивалентность функций

Определение 3.23. Пусть функции f и g определены и не обращаются в 0 в некоторой $B'(x_0)$. Функции f и g называются эквивалентными (пишут: $f(x) \sim g(x)$) при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Лемма 3.24. Отношение эквивалентности функций при $x \rightarrow x_0$ является отношением эквивалентности на множестве функций, определенных и не обращающихся в ноль в $B'_\delta(x_0)$.

Доказательство. Проверим требуемые свойства.

1. Рефлексивность: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) \sim f(x);$
2. Симметричность: $f(x) \sim g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow g(x) \sim f(x);$
3. Транзитивность:

$$\begin{cases} f(x) \sim g(x) \\ g(x) \sim h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x)}{g(x)h(x)} = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

Замечание 3.25. Замечательные пределы и разобранные на семинарах примеры показывают, что при $x \rightarrow 0$

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \arcsin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\ln(1 + x)} = 1$$

3.15 Свойства отношения эквивалентности

Лемма 3.26. Пусть функции $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ определены и не обращаются в 0 в некоторой $B'_\delta(x_0)$ и пусть $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Тогда $f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. 1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) \cdot g_1(x)}{f_2(x) \cdot g_2(x)} = 1 \cdot 1 = 1$

$$2. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} : \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) \cdot g_2(x)}{f_2(x) \cdot g_1(x)} = 1 \cdot 1 = 1$$

□

Замечание 3.27. Из условий $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$ не следует $f_1(x) + g_1(x) \sim f_2(x) + g_2(x)$ при $x \rightarrow x_0$. Например, $-x \sim -x$, $x + x^2 \sim x + x^3$ при $x \rightarrow 0$, но $-x + x + x^2 \not\sim -x + x + x^3$ при $x \rightarrow 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{-x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + x^2}{x + x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x}{1 + x^2} = \frac{1}{1} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

3.16 Подсчет пределов

Лемма 3.28. Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, а если один из пределов не существует, то не существует и другой.

Доказательство.

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

□

Следствие 3.29. При вычислении пределов произведений и частных функций эти функции можно заменять на эквивалентные.

Пример 3.30. Найдите $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1) \arcsin x^2}{\operatorname{tg} x \ln^2(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2}{x \cdot x^2} = 1$.

$$1. e^x - 1 \sim x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$2. \arcsin x^2 \sim x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^2}{x^2} = 1 \text{ (теорема о пределе сложной функции)}$$

$$3. \operatorname{tg} x \sim x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$$

$$4. \ln(1+x) \sim x \Rightarrow \ln^2(1+x) \sim x^2 \text{ (произведение эквивалентных функций)}$$

Лемма 3.31. Пусть $f(y) \sim g(y)$ при $y \rightarrow y_0$, и пусть $y(x) \rightarrow y_0$ при $x \rightarrow x_0$ и $y(x) \neq y_0$ при $x \in B'_\delta(x_0)$. Тогда $f(y(x)) \sim g(y(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство. По теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(y(x))}{g(y(x))} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y)}{g(y)} = 1$$

□

Пример 3.32.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\sin x} - 1)^3}{\operatorname{tg}(\sin x) \ln^2(1 + (e^x - 1))} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^3}{\operatorname{tg} x \ln^2(1 + x)} \quad (\text{лемма 3.31}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x \cdot x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1. \end{aligned}$$

Лекция 12: Эквивалентность и о-символика

3.17 о-малое

Определение 3.33. Пусть функции f и g определены в $B'(x_0)$ и функция $g(x)$ не обращается в 0. Говорят, что функция f является бесконечно малой относительно функции g при $x \rightarrow x_0$ и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Замечание 3.34. $o(g(x))$ - это класс функций. Запись $f(x) = o(g(x))$ означает, что функция $f(x)$ принадлежит классу функций $o(g(x))$. Поэтому равенство в записи $f(x) = o(g(x))$ необратимо, т. е. нельзя писать $o(g(x)) = f(x)$. Например, $x^3 = o(x)$, $x^2 = o(x)$, при $x \rightarrow 0$, но $x^3 \neq x^2$.

Пояснение.

$$\begin{aligned} x^3 &= o(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad x^3 \in o(x) \\ x^2 &= o(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad x^2 \in o(x) \\ x^3 &\neq x^2 \end{aligned}$$

Теорема 3.35. $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} f(x) \sim g(x) &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x)) \end{aligned}$$

□

Пример 3.36. Из теоремы 3.32 следует, что эквивалентности из замечания 3.25 можно переписать в виде

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin x \sim x \Leftrightarrow \sin x = x + o(x) \text{ (теорема 3.32)}$$

$$\begin{aligned} \sin x &= x + o(x), & \operatorname{tg} x &= x + o(x), \\ \arcsin x &= x + o(x), & \operatorname{arctg} x &= x + o(x), \\ e^x &= 1 + x + o(x), & \ln(1 + x) &= x + o(x), \\ \operatorname{sh} x &= x + o(x), & \operatorname{th} x &= x + o(x) \quad \text{при } x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Справка по гиперболическим функциям

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Пример 3.37.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + o(x) + x + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{x} + \frac{o(x)}{x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x} = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \operatorname{sh} x \sim x \Rightarrow \operatorname{sh} x = x + o(x)$$

3.18 О-большое

Определение 3.38. Пусть функции f и g определены в $B'_\delta(x_0)$. Говорят, что функция f ограничена относительно функции g , и пишут $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, если

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in B'(x_0) \rightarrow |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

3.19 Свойства о-малого и О-большого

Теорема 3.39. Для функций, не обращающихся в 0 в некоторой $B'(x_0)$ при $x \rightarrow x_0$, справедливы равенства:

1. $o(f) \pm o(f) = o(f)$
2. $O(f) \pm O(f) = O(f)$
3. $o(f) = O(f)$
4. $o(O(f)) = o(f)$
5. $O(o(f)) = o(f)$
6. $O(O(f)) = O(f)$
7. $o(f) \cdot O(g) = o(fg)$
8. $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$
9. $(o(f))^\alpha = o(f^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$
10. $(O(f))^\alpha = O(f^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$.

Доказательство. 1. $o(f) \pm o(f) \subseteq o(f)$ - это подразумевается под равенством

Пусть $g(x) \in o(f), h(x) \in o(f)$.

$$g(x) = o(f(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, h(x) = o(f(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) \pm h(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \pm 0 = 0 \Rightarrow g(x) \pm h(x) \in o(f)$$

2. $O(f) + O(f) = O(f)$

Пусть $g(x) \in O(f), h(x) \in O(f)$. Тогда $\exists C_1 : |g(x)| \leq C_1 |f(x)|, \exists C_2 : |h(x)| \leq C_2 |f(x)| \Rightarrow |g(x) + h(x)| \leq |g(x)| + |h(x)| \leq C_1 |f(x)| + C_2 |f(x)| = (C_1 + C_2) |f(x)| \Rightarrow g(x) + h(x) \in O(f)$.

3. $o(f) \subseteq O(f)$

Пусть $g(x) \in o(f) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall x \in B'_\delta(x_0) \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| < \varepsilon \Rightarrow |g(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$ (в данной окрестности $f(x)$ не обращается в ноль)

4. $o(O(f)) \subseteq o(f)$

Пусть $g(x) \in O(f) \Leftrightarrow \exists C : |g(x)| \leq C \cdot |f(x)| \Rightarrow \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \leq C$.

$$h(x) \in o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$-C \cdot \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right| \leq \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} \leq C \cdot \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right|$$

$\left| \frac{h(x)}{g(x)} \right| \rightarrow 0 \Rightarrow$ по теореме о зажатой функции $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow h(x) \in o(f)$.

5. $O(o(f)) = o(f)$

Пусть $g(x) \in o(f(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

$$h(x) \in O(g(x)) \Leftrightarrow \exists C : |h(x)| \leq C |g(x)| \Rightarrow \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right| \leq C$$

$$\left| \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{h(x)}{f(x)} \right| = \lim_{x \rightarrow x_0} \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right| \cdot \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$$

6. $O(O(f)) = O(f)$

Пусть $g(x) \in O(f(x)), h(x) \in O(g(x)).$

$$\exists C_1 : |g(x)| \leq C_1 \cdot |f(x)|$$

$$\exists C_2 : |h(x)| \leq C_2 \cdot |g(x)| \leq C_1 \cdot C_2 \cdot |f(x)| = C \cdot |f(x)|$$

7. $o(f) \cdot O(g) \subseteq o(fg)$

Пусть $h(x) \in o(f), k(x) \in O(g).$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0, \exists C : |h(x)| \leq C|g(x)|.$

$$-C \left| \frac{h(x)}{g(x)} \right| \leq \frac{h(x) \cdot k(x)}{f(x) \cdot g(x)} \leq C \left| \frac{h(x)}{f(x)} \right| \Rightarrow h(x) \cdot k(x) \in o(fg)$$

8. $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$

Пусть $h(x) \in O(f), k(x) \in O(g).$

Тогда $\exists C_1 : |h(x)| \leq C_1|f(x)|, \exists C_2 : |k(x)| \leq C_2|g(x)| \Rightarrow |h(x) \cdot k(x)| = |h(x)| \cdot |k(x)| \leq C_1 \cdot C_2 \cdot |f(x) \cdot g(x)| \Rightarrow h(x) \cdot k(x) \in O(fg)$

9. $(o(f))^\alpha = o(f^\alpha) \forall \alpha > 0$

Пусть $g(x) \in o(f) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha = 0$ (при $\alpha > 0) \Rightarrow$ по теореме о пределе сложной функции $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)^\alpha = 0.$ Но

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)} \right)^\alpha = \frac{g^\alpha(x)}{f^\alpha(x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g^\alpha(x)}{f^\alpha(x)} = 0 \Rightarrow g^\alpha(x) = o(f^\alpha).$$

10. $(O(f))^\alpha = O(f^\alpha) \forall \alpha > 0$

Пусть $g(x) \in O(f) \Leftrightarrow \exists C : |g(x)| \leq C|f(x)| \Rightarrow |g(x)|^\alpha \leq C^\alpha |f(x)|^\alpha = C' |f(x)|^\alpha \Rightarrow |g^\alpha(x)| \leq C' |f^\alpha(x)| \Rightarrow g^\alpha(x) \in O(f^\alpha).$

□

Глава 4

Непрерывные функции

Определение 4.1. Функция $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна (по множеству D) в точке $a \in D$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждого $x \in D$, $|x - a| < \delta$, выполнено $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. С помощью кванторов данное утверждение записывается в виде

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Определение 4.2. Точка $a \in D$ называется изолированной точкой множества D , если для некоторого $\delta > 0$ выполнено $B'_\delta(a) \cap D = \emptyset$.

Замечание 4.3. Точка $a \in D$ может быть либо изолированной, либо предельной точкой множества D .

Если точка a не изолированная, то $\forall \delta > 0 B'_\delta(a) \cap D \neq \emptyset \Rightarrow a$ - предельная.

Если точка a не предельная, то $\exists \varepsilon > 0 : B'_\varepsilon(a) \cap D = \emptyset \Rightarrow a$ - изолированная.

Предложение 4.4. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$. Следующие утверждения равносильны:

1. функция f непрерывна в точке a (по множеству D);
2. для каждой последовательности точек $x_n \in D$, $x_n \rightarrow a$, выполнено $f(x_n) \rightarrow f(a)$;
3. либо точка a - изолированная точка множества D , либо a - предельная точка множества D и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Доказательство. I. a - изолированная $\Rightarrow \exists \delta > 0 \rightarrow B'_\delta(a) \cap D = \emptyset$

1. Возьмём в определении 4.1 такую δ . Тогда в данной окрестности $B_\delta(a)$ нет точек, кроме самой a , которые принадлежат D . Но для точки a и любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ - непрерывна.

2. $x_n \rightarrow a \Rightarrow$ начиная с какого-то номера все члены последовательности x_n принадлежат $B'_\delta(a)$. Возьмём в определении предела $\varepsilon = \delta$. Но при этом они должны лежать в D , значит они становятся равными a . Следовательно, с какого-то номера $f(x_n)$ становится равной $f(a) \Rightarrow f(x_n) \rightarrow a$.

3. автоматически выполнено (a - изолированная точка)

Значит если точка a - изолированная, то эти утверждения равносильны.

II. a - не изолированная $\Rightarrow a$ - предельная (по замечанию)

1) \Rightarrow 2) От противного. Пусть $\exists x_n \rightarrow a$ и $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall N \exists n \geq N \rightarrow |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$
 $x_n \neq a$, иначе $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

Таких x_n бесконечно много, потому что в противном случае, если таких x_n конечное число, то есть последний по номеру. Возьмём N равное номеру x_n , идущего в последовательности после последнего. Тогда, начиная с $n \geq N$, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ - противоречие.

Значит такие $\{x_n\}$ образуют подпоследовательность $\{y_k\}$. Причём $y_k \neq a \Rightarrow \forall y_k \in D \setminus \{a\} y_k \rightarrow a$ (предел подпоследовательности y_k равен пределу сходящейся последовательности x_n)

Почему отсюда будет следовать, что $f(y_k) \rightarrow f(a)$? Функция f - непрерывна в точке $a \Rightarrow f(x) \rightarrow f(a)$ по Коши (первое условие сильнее второго, т. к. в определении непрерывности $|x-a| < \delta$, а в определении по Коши $0 < |x-a| < \delta$). Определение предела функции по Коши эквивалентно определению по Гейне: $f(y_k) \rightarrow f(a)$ - противоречие.

2) \Rightarrow 3) Из 2) следует определение предела функции по Гейне (2) сильнее Гейне) \Rightarrow определение предела по Коши $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

3) \Rightarrow 1) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ по Коши

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow$$

\Rightarrow определение непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in D, |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

(т. к. при $x = a$ оно и так выполняется $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$).

1) \Leftrightarrow 2), т. к. 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 1)

2) \Leftrightarrow 3), т. к. 3) \Rightarrow 1) \Rightarrow 2)

3) \Leftrightarrow 1), т. к. 1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3)

Значит 1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3).

□

Предложение 4.5. Пусть функции f, g определены на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и непрерывны в некоторой точке $a \in D$. Тогда

1. $\alpha f + \beta g, f \cdot g$ - непрерывны в точке a ;
2. если $g(x) \neq 0$ при $x \in D$, то f/g - непрерывна в точке a ;
3. найдутся такие $\delta > 0$ и $C > 0$, что $|f(x)| \leq C$ при каждом $x \in D \cap B_\delta(a)$;
4. если $f(a) \neq 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}$ при $x \in D \cap B_\delta(a)$.

Доказательство. I. a - изолированная на множестве D .

1. $\alpha f + \beta g$ и $f \cdot g$ определены на множестве $D \Rightarrow$ по предложению 4.4 из 3) \Rightarrow 1), т. е. $\alpha f + \beta g$ - непрерывна в точке a и $f \cdot g$ непрерывна в точке a .
2. $\frac{f}{g}$ определение на множестве $D \Rightarrow$ по предложению 4.4 из 3) \Rightarrow 1).
3. По определения изолированной точки $\exists \delta > 0 \rightarrow B'_\delta(a) \cap D = \emptyset \Rightarrow$ при таком δ только $a \in B_\delta(a) \cap D \Rightarrow$ можно подобрать такое $C > 0$, что $|f(a)| \leq C$.
4. Из определения изолированной точки $\exists \delta > 0 \rightarrow B'_\delta(a) \cap D = \emptyset \Rightarrow$ при таком δ только $a \in B_\delta(a) \cap D$ и $|f(a)| > \frac{|a|}{2}$ (т. к. $f(a) \neq 0$).

II. a - предельная и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a), \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$.

1. $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f(a) + \beta g(a) \Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x)$ - непрерывна в точке a (по предложению 4.4 3) \Rightarrow 1)).
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = f(a) \cdot g(a) \Rightarrow f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна в точке a (по предложению 4.4 3) \Rightarrow 1)).
2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна в точке a (по предложению 4.4 3) \Rightarrow 1)).
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ из ограниченности функции следует утверждение.
4. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ из отделимости от нуля следует утверждение.

□

Лекция 13: Свойства непрерывных функций

4.1 Непрерывность композиции

Предложение 4.6. Пусть $f : D \rightarrow K \subset \mathbb{R}$ и $g : K \rightarrow \mathbb{R}$, причем f непрерывна в точке $a \in D$ по множеству D , а g непрерывна в точке $f(a)$ по множеству K . Тогда функция $g \circ f$ непрерывная в точке по множеству D , где $g \circ f(x) := g(f(x))$.

Доказательство. 1. Если a - изолированная \Rightarrow по предложению 4.4 $f \circ g(x)$ непрерывна в точке a по множеству D (какую бы функцию мы не рассматриваем)

2. Если a - предельная, то по предложению 4.4 из непрерывности f и g следует, что если $x_n \in D, x_n \rightarrow a$, то $f(x_n) \rightarrow f(a), f(x_n) \in K$ и что $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$

□

Определение 4.7. Точка $a \in D$ называется точкой разрыва функции $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, если f не является непрерывной в точке a .

4.2 Классификация разрывов

Определение 4.8. Устранимый разрыв: существует $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, но или f не определена в точке x_0 , или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Разрыв 1-го рода: в точке разрыва x_0 существуют оба односторонних предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = f(x_0 + 0),$$

но скачок функции

$$\Delta f(x_0) = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| \neq 0.$$

Разрыв 2-го рода: не существует хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ или } \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x).$$

Пример 4.9. Классифицируйте точки разрыва функции:

$$1. \quad f(x) = \frac{\sin x}{x};$$

$$2. \quad f(x) = \frac{\sin x}{|x|}.$$

Решение.

1. Функция $\sin x$ непрерывна на \mathbb{R} :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon > 0 \forall x : |x - y| < \delta$$

$$|\sin x - \sin y| = \left| 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \right| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \right| = 2 \left| \frac{x-y}{2} \right| = |x-y| < \delta$$

Функция x непрерывна на \mathbb{R} .

Отношение непрерывных функций непрерывна, кроме $x = 0$, где функция неопределена.

Возьмём предел в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ - предел существует} \Rightarrow \text{разрыв устранимый.}$$

2. Если $x > 0$, то функция совпадает с предыдущей и непрерывна при $x > 0$.

Если $x < 0$, то это та же функция, только со знаком «-» \Rightarrow при $x < 0$ непрерывна (предложение 4.5 пункт 1) при $\alpha = -1, \beta = 0$)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{\sin x}{x} = -1 \Rightarrow$ односторонние пределы существуют, скачок равен $|1 - (-1)| = 2 \neq 0 \Rightarrow$ разрыв 1-го рода.

Пример 4.10. Пусть $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, если $x \neq 0, f(0) = 0$. Тогда точка $x = 0$ - разрыв второго рода для функции f , заданной на всем множестве \mathbb{R} .

Пояснение.

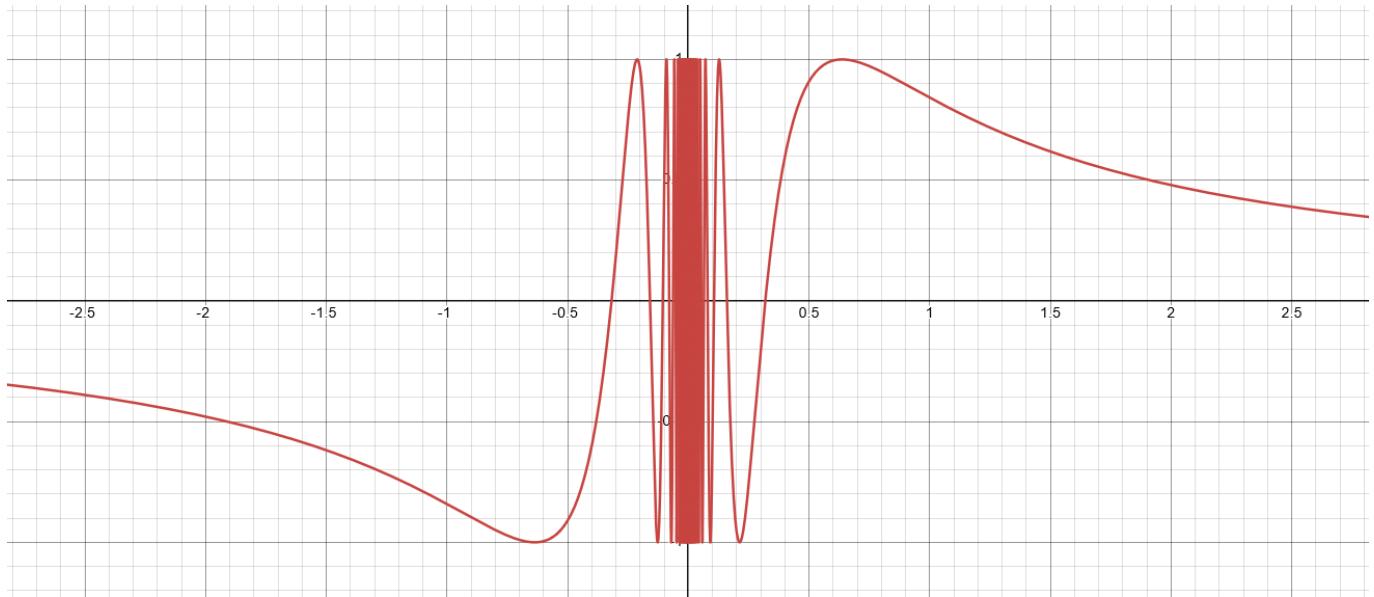
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Функция $\frac{1}{x}$ непрерывна на всей числовой прямой, кроме нуля, $\sin x$ непрерывна на $\mathbb{R} \Rightarrow$ композиция функций $\sin \frac{1}{x}$ непрерывна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (предложение 4.6)

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ - существует ли такой предел? Пусть есть такая последовательность, которая стремится справа в точке 0:

$$x_n \rightarrow 0, x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$$

$\sin \frac{1}{x_n} = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right) = (-1)^n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n}$ - не существует $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ не существует \Rightarrow разрыв 2-го рода.



4.3 Разрывы монотонной функции

Предложение 4.11. Пусть f - монотонная на интервале (a, b) функция (т. е. f либо не убывает, либо не возрастает). Тогда f может иметь разрывы только первого рода на интервале (a, b) .

Доказательство. Сначала оговоримся, что когда говорят о функции монотонной на (a, b) , подразумевают, что она определена в каждой точке на этом интервале.

Пусть x_0 - точка разрыва, $x_0 \in (a, b) \Rightarrow x_0$ - предельная для множества $D_{x_0}^-$ и $D_{x_0}^+$. Будем считать, что $f(x)$ не убывает (без ограничения общности) \Rightarrow по теореме Вейерштрасса

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x) \leq f(x_0) \quad (f \text{ не убывает})$$

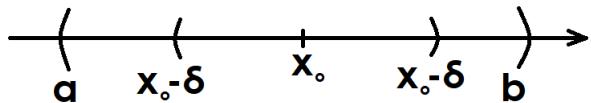
Тоже самое для правой окрестности:

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x) \geq f(x_0)$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$.

Это не разрыв 2-го рода, т. к. пределы справа и слева существует. Если бы это был разрыв устранимый, то пределы справа и слева совпадают, но тогда $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ это не является разрывом. Значит если точка x_0 является разрывом \Rightarrow скачок ненулевой \Rightarrow это разрыв 1-го рода.

Применяя теорему Вейерштрасса, мы пользовались тем, что $f(x)$ ограничена на интервале (a, b) . Пусть это не так.



Тогда рассмотрим δ -окрестность точки x_0 . $x_0 - \delta$ и $x_0 + \delta$ лежат внутри $(a, b) \Rightarrow$ функция определена в этих точках $\Rightarrow \exists f(x_0 - \delta)$ и $\exists f(x_0 + \delta) \Rightarrow f(x_0 - \delta) \leq f(x) \leq f(x_0 + \delta)$. Т. е. на всём интервале (a, b) функция может быть неограничена, но на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ она ограничена и здесь значения функции определены. Поэтому мы пользуемся теоремой Вейерштрасса не на всём интервале (a, b) , а на подинтервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. \square

4.4 Теорема Вейерштрасса

Определение 4.12. Функцию, непрерывную в каждой точке множества D (по множеству D), будем называть просто непрерывной на множестве D .

Краткая запись: $f(x) \in C(D)$ - функция непрерывна на множестве D .

Определение 4.13. Будем говорить, что функция ограничена на множестве D , если найдется такое число $C > 0$, что $\forall x \in [a, b] \rightarrow |f(x)| \leq C$.

Теорема 4.14 (Вейерштрасс). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на $[a, b]$ и достигает минимума и максимума, т. е. существуют такие точки $x_m, x_M \in [a, b]$, что

$$f(x_m) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ и } f(x_M) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Доказательство. 1. $f(x)$ - ограничена.

Пусть это не так:

$$\forall n \geq \mathbb{N} \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| > n \quad (*)$$

Все такие $\{x_n\}$ образуют ограниченную последовательность, т. к. все $x_n \in [a, b] \Rightarrow$ можно выделить $\{x_{n_k}\}$ - сходящуюся подпоследовательность, пусть $x_{n_k} \rightarrow x_0$. Тогда $f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$, т. к. $f(x)$ - непрерывна (предложение 4.4). Но такого не может быть, т. к. $|f(x_{n_k})| > n_k$ (пользуемся $(*)$), а $n_k \rightarrow \infty$.

2. Докажем, что $\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M$ и $\inf_{x \in [a, b]} f(x) = m$ достигаются.

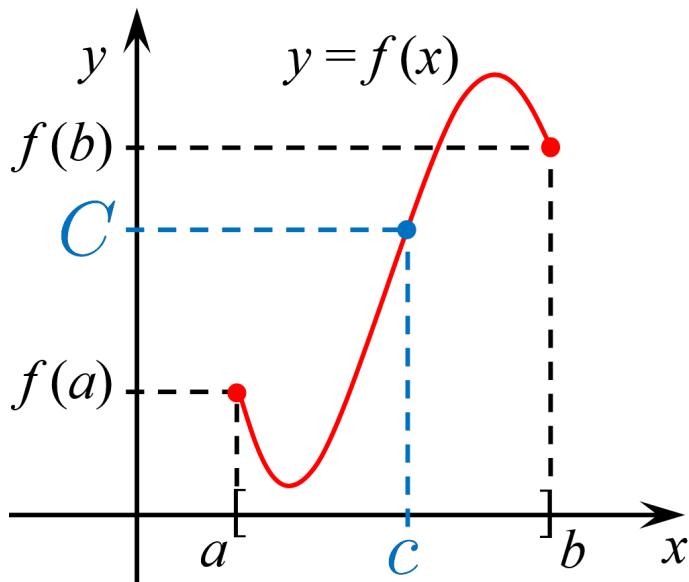
Докажем следующие x_n : $M - \frac{1}{n} \leq f(x_n) \leq M$ (**). Такие x_n (их бесконечно много) найдутся из определения супремума. Значит x_n - ограниченная последовательность $\Rightarrow \exists x_{n_k}$ - подпоследовательность, сходящаяся к $x_M \Rightarrow \exists \lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_M)$ (по непрерывности функции) и с другой стороны

$\lim_{n_k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$ (по теореме о зажатой последовательности, применяемой к (**)). Следовательно, $f(x_M) = M$.

□

4.5 Теорема о промежуточном значении

Теорема 4.15 (Коши). Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если $f(a) = A, f(b) = B$, то для каждого значения $C \in [A, B]$ (или $C \in [B, A]$, если $B < A$) найдется точка $c \in [a, b]$, для которой $f(c) = C$.



Доказательство. 1. $g(x) = f(x) - C$, т. е. хотим доказать, что $\exists c : g(x) = 0$.

2. Если $g(a) = 0$, то $c = a$. Если $g(b) = 0$, то $c = b$. Поэтому будем считать, что $g(a) \neq 0$ и $g(b) \neq 0$. Но тогда $g(a)$ и $g(b)$ разного знака, т. к. $A \leq C \leq B$ или $B \leq C \leq A$.

3. Рассмотрим отрезок $[a, b]$ и точку $\frac{a+b}{2}$.

Если $g\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, то мы нашли такую точку, что $g(x) = 0$.

Если $g\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$, то рассматриваем отрезок $[a; \frac{a+b}{2}]$.

Если $g\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$, то рассматриваем отрезок $[\frac{a+b}{2}; b]$.

(Таким образом, мы зажимаем искомую точку отрезком, в одном конце которого $g(x) < 0$, а в другом $g(x) > 0$)

Если ни одной точки, где $g(x) = 0$ не найдено, то мы получим последовательность вложенных отрезков. Тогда по теореме о вложенных отрезков $\exists c \in [a, b]$

- общая точка (длина отрезков стремится к нулю, потому что мы каждый раз длину делим пополам, $\frac{b-a}{2^n} \rightarrow 0$)

Левые концы отрезков обозначим a_n , правые - b_n . Тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$. Из непрерывности функции следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = g(c) \leq 0$ (т. к. $g(a_n) < 0$) и $\lim_{n \rightarrow \infty} g(b_n) = g(c) \geq 0$ (т. к. $g(b_n) > 0$) $\Rightarrow 0 \leq g(c) \leq 0 \Rightarrow g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = C$.

□

Лекция 14: Построение показательной функции

Теорема 4.16 (Критерий непрерывности монотонной функции). *Монотонная функция $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f([a, b])$ - отрезок ($f([a, b]) = \{f(x) | x \in [a, b]\}$ - образ).*

Доказательство. Будем считать, что f - не убывает без ограничения общности.

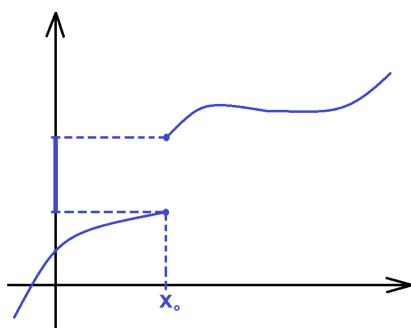
\Rightarrow 1. По теореме Коши $\forall C \in [f(a), f(b)] \exists c \in [a, b] : f(c) = C$, т. к. f - непрерывна на $[a, b]$.

2. $\forall x \in [a, b] f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ (функция монотонная)

2 пункт утверждает, что образ $f([a, b])$ содержится в отрезке $[f(a), f(b)]$, т. е. все точки образа лежат в $[f(a), f(b)]$. И при этом они лежат плотно друг к другу (т. е. нет дырок, иначе это не был бы отрезок), это следует из 1 пункта.

$\Leftarrow f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ (из того, что f - не убывает, следует, что $f(a)$ - левая граница отрезка, а $f(b)$ - правая граница отрезка).

Пусть f - не непрерывна \Rightarrow у неё есть точки разрыва. Пусть x_0 - точка разрыва \Rightarrow из предложения 4.11 (т. к. f - монотонна) x_0 - разрыв 1-го рода $\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup_{x < x_0} f(x)$ и $\exists \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x > x_0} f(x)$ (как в предложении 4.11) и эти пределы не равны $\Rightarrow (\sup_{x < x_0} f(x), \inf_{x > x_0} f(x))$ - не пустой. Тогда в этом интервале есть точка $C \neq f(x_0) \Rightarrow \exists c : f(c) = C$.



Иначе $\sup_{x < x_0} f(x) < C = f(c) \Rightarrow c \geq x_0 \quad \inf_{x > x_0} f(x) > C = f(c) \Rightarrow c \leq x_0 \quad \Rightarrow c = x_0$, но $f(x_0) \neq C$.

Если $x_0 = a$, то рассмотрим интервал $(\sup_{x < x_0} f(x), f(x_0))$, если $x_0 = b$, то рассмотрим интервал $(f(x_0), \inf_{x > x_0} f(x))$.

□

4.6 Непрерывность обратной функции

Теорема 4.17 (О непрерывности обратной функции). *Пусть f непрерывна и строго монотонна на $[a, b]$ (т. е. f монотонна и $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$). Тогда f - биекция между отрезками $I = [a, b]$ и J с концами $f(a)$ и $f(b)$ и f^{-1} непрерывна и строго монотонна на J .*

Доказательство. f - строго возрастает (без ограничения общности).

1. f - инъекция.

$$\left. \begin{array}{l} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \end{array} \right\} \Leftrightarrow (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$$

2. f - сюръекция.

f - непрерывная, монотонная \Rightarrow по теореме 4.16 $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ для любой точки отрезка есть прообраз.

Из 1) и 2) f - биекция $\Rightarrow \exists f^{-1}(y)$.

3. $f^{-1}(y)$ - монотонная.

Пусть $y_1 < y_2$ ($y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$), $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$.

$$x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2), x_1 < x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$$

В итоге: $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.

4. $f : I \rightarrow J \Rightarrow f^{-1} : J \rightarrow I$ (функция из отрезка в отрезок) \Rightarrow по теореме 4.16 f^{-1} - непрерывная.

□

Пример 4.18. У функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ есть непрерывная и строго монотонная на \mathbb{R} обратная функция.

Доказательство. Функцию $f(x) = \operatorname{tg} x$ строго возрастает и непрерывна на интервале $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Поэтому образ отрезка $[-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}]$ есть отрезок

$[\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}), \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})]$, на котором существует непрерывная строго монотонная обратная функция f_n^{-1} (теорема 4.17). Эти функции согласованы, т. е. $f_{n+1}^{-1}(x) = f_n^{-1}(x)$ для каждой точки

$$x \in \left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \right], \text{ а } \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right), \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}\right) \right] = \mathbb{R}.$$

$$(\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}) \rightarrow -\infty, \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}) \rightarrow +\infty)$$

Тем самым, построена обратная функция f^{-1} на \mathbb{R} , которую мы обозначим $\operatorname{arctg} x$.

□

4.7 Построение показательной функции

Пусть $a > 1$. Будем считать известным из школьного курса, что для рациональных x значение a^x корректно определено и выполнены свойства

$$a^0 = 1, a^{x+y} = a^x \cdot a^y, x < y \Rightarrow a^x < a^y$$

для рациональных x и y .

Лемма 4.19. *Пусть $N \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такое число $C(N)$, что для всех $x, y \in \mathbb{Q}, x, y \leq N$, выполнено $|a^x - a^y| \leq C(N)|x - y|$*

Доказательство. Если $x - y \geq 1$, то $0 < a^x - a^y \leq a^x \leq a^N \leq a^N|x - y| = C(N)|x - y|$.

Если $0 < |x - y| < 1$, то найдётся натуральное число n , для которого $\frac{1}{n+1} \leq x - y < \frac{1}{n}$. Тогда

$$a^x - a^y = a^y(a^{x-y} - 1) \leq a^N(a^{x-y} - 1) \leq a^N(a^{\frac{1}{n}} - 1) \leq a^N \frac{(a - 1)}{n}$$

Пояснение. Докажем последнее неравенство

$$(a^{\frac{1}{n}} - 1) \leq \frac{a-1}{n} \Leftrightarrow n(a^{\frac{1}{n}} - 1) \leq a - 1 \Leftrightarrow n(a^{\frac{1}{n}} - 1) + 1 \leq a$$

$$x = a^{\frac{1}{n}} - 1 > 0 \Leftrightarrow x + 1 = a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow (x + 1)^n = a$$

Из последних двух строчек следует неравенство Бернулли: $nx + 1 \leq (x + 1)^n$. Повторяем шаги в обратную сторону и доказываем требуемое неравенство.

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &\leq \frac{2}{n+1} \Rightarrow a^N \frac{(a-1)}{n} \leq \frac{2a^N(a-1)}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} &\leq x - y \Rightarrow \frac{2a^N(a-1)}{n+1} \leq 2a^N(a-1)(x-y) = C(N)(x-y) \\ C(N) &= \max\{a^N, 2a^N(a-1)\} \end{aligned}$$

□

Лекция 15: Производная и дифференциал

Теорема 4.20. Пусть $a > 1$. Существует единственная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, совпадающая с $x \mapsto a^x$ при $x \in \mathbb{Q}$.

Доказательство. □

Следствие 4.21. Для построенной функции a^x выполнены следующие свойства:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \text{ и } x < y \Rightarrow a^x < a^y.$$

Доказательство. □

По теореме об обратной функции корректно определена непрерывная строго монотонная функция $\log_a : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Глава 5

Производная

Лекция 16: Свойства дифференцируемых функций

Лекция 17: Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Лекция 18: Правило Лопиталя, производные старших порядков

Лекция 19: Формула Тейлора

Лекция 20: Ряд Тейлора

Глава 6

Исследование функций с помощью производных

Лекция 21: Исследование функций с помощью производных

6.1 Необходимое условие экстремума

Напомним, что для дифференцируемой в точке локального экстремума *c* функции f по теореме Ферма выполнено $f'(c) = 0$. Т. е. равенство нулю производной является необходимым условием локального экстремума дифференцируемой функции.

Напомним, что нами также было уже доказано следствие 5.26:

Следствие (5.26) Пусть f дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) . Тогда f не убывает (не возрастает) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$ соответственно) для каждой точки $x \in (a, b)$. Кроме того, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то f строго возрастает (соответственно, строго убывает) на (a, b) .

Докажем теперь достаточное условие локального экстремума в терминах производных старших порядков.

6.2 Достаточное условие экстремума

Теорема 6.1. Пусть f имеет n производных в окрестности точки $c \in (a, b)$ и $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, а $f^{(n)}(c) \neq 0$. Тогда, если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) < 0$ ($f^{(n)}(c) > 0$), то c — точка локального максимума (минимума). Если $n = 2k + 1$, то точка c не является точкой локального экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} \cdot (x - c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} (x - c)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n + o((x - c)^n) =$$

$$= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + o((x - c)^n) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right)$$

Т. к. $o(1) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow c$, то по определению предела

$$\exists B_\delta(c) : \forall x \in B_\delta(c) \rightarrow |o(1)| < \varepsilon = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall x \in B_\delta(c) \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(c)$

1. Если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) > 0$, то $f(x) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right) = (x - c)^{2k} \cdot A(x)$ ($A(x) > 0 \forall x \in B_\delta(c)$)

При $x = c f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c , $f(x) > 0 \Rightarrow c$ - точка минимума.

2. Если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) < 0$, то $f(x) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right) = (x - c)^{2k} \cdot A(x)$ ($A(x) < 0 \forall x \in B_\delta(c)$)

При $x = c f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c , $f(x) < 0 \Rightarrow c$ - точка максимума.

3. Если $n = 2k+1$ и $f^{(n)}(c) > 0$, то $f(x) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right) = (x - c)^{2k+1} \cdot A(x)$ ($A(x) > 0 \forall x \in B_\delta(c)$)

При $x = c f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c в положительную сторону, $f(x) > 0$; так только мы отходим от точки c в отрицательную сторону, $f(x) < 0 \Rightarrow c$ - ни точка максимума, ни точка минимума.

4. Если $n = 2k+1$ и $f^{(n)}(c) < 0$, то $f(x) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right) = (x - c)^{2k+1} \cdot A(x)$ ($A(x) < 0 \forall x \in B_\delta(c)$)

При $x = c f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c в положительную сторону, $f(x) < 0$; так только мы отходим от точки c в отрицательную сторону, $f(x) > 0 \Rightarrow c$ - ни точка максимума, ни точка минимума.

Хочется отметить, что выполнение условия теоремы $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ можно гарантировать, сдвинув функцию на константу: $g(x) = f(x) - f(c)$. \square

6.3 Выпуклость и вогнутость

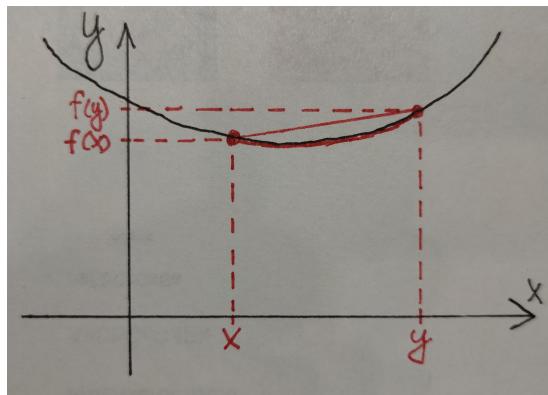
Определение 6.2. Функция f на интервале (a, b) называется **выпуклой**, если $\forall x, y \in (a, b)$ и для каждого $t \in [0, 1]$ выполнено

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Пояснение. Функция $tx + (1 - t)y$ при фиксированных x и y при различных значениях $t \in [0, 1]$ задаёт точку на отрезке $[x, y]$: при $t = 0$ функция равна y , при $t = 1$ функция равна x , если возьмём производную функции $tx + (1 - t)y$, то получим $x - y < 0 \Rightarrow$ функция монотонно убывает от y до x .

Функция $tf(x) + (1 - t)f(y)$ от t является линейной и она задаёт хорду с концами в точках $(x, f(x))$ (при $t = 1$) и $(y, f(y))$ (при $t = 0$).

Получается с левой стороны неравенства - это значение функции в точке на отрезке $[x, y]$, а с правой - ордината точки на хорде и понятно, что неравенство выполняется.



Определение 6.3. Функция f на интервале (a, b) называется **вогнутой**, если $\forall x, y \in (a, b)$ и для каждого $t \in [0, 1]$ выполнено

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Лемма 6.4. Функция f на интервале (a, b) выпукла тогда и только тогда, когда для всех точек $x < z < y$ из этого интервала выполнено

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Доказательство. Неравенство, которое нужно доказать эквивалентно

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \mid \cdot (z - x)(y - z)$$

$$yf(z) - zf(z) - yf(x) + zf(x) \leq zf(y) - xf(y) - zf(z) + xf(z)$$

$$xf(z) - yf(z) \geq zf(x) - yf(x) + xf(y) - zf(y)$$

Т. к. $x < z < y$, то $\exists t \in [0, 1] z = t \cdot x + (1 - t) \cdot y \Leftrightarrow t = \frac{z-y}{x-y}$.

Т. к. $f(x)$ - выпукла, то $f(z) = f(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) = \frac{z-y}{x-y}f(x) + \frac{x-z}{x-y}f(y) \Leftrightarrow xf(z) - yf(z) \geq zf(x) - yf(x) + xf(y) - zf(y)$, т. е пришли к тому же самому неравенству.

В обратную сторону. Имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} &\leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \Rightarrow xf(z) - yf(z) \geqslant zf(x) - yf(x) + xf(y) - zf(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z) \leqslant \frac{z-y}{x-y}f(x) + \frac{x-z}{x-y}f(y) \end{aligned}$$

Т. к. $x < z < y$, то $\exists t \in [0, 1] z = t \cdot x + (1-t) \cdot y \Leftrightarrow t = \frac{z-y}{x-y}$.

Значит

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y),$$

что является определением выпуклости функции. \square

Теорема 6.5. Дифференцируемая функция f на интервале (a, b) выпукла тогда и только тогда, когда f' — неубывает.

Доказательство. $\Rightarrow \forall x < z < y \in (a, b) f$ - выпукла \Rightarrow по предыдущей лемме

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Тогда при $z \rightarrow x$ по теореме о переходе к пределу в неравенстве

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

(Здесь есть тонкость: мы можем устремлять z к x только справа, поэтому мы получим правую производную, но если функция дифференцируема, то правая производная совпадает с левой)

Пусть $z \rightarrow y$. Тогда

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$$

Таким образом, $\forall x < y f'(x) \leqslant f'(y) \Rightarrow f'(x)$ - неубывает.

\Leftarrow Пусть $x < z < y$

По теореме Лагранжа $\exists \xi_1 \in (x, z) : \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_1)$

$\exists \xi_2 \in (z, y) : \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\xi_2)$

Таким образом, $\xi_1 \leqslant \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \Rightarrow f$ на интервале (a, b) выпукла по предыдущей лемме. \square

Следствие 6.6. Дважды дифференцируемая функция f на интервале (a, b) выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0 \forall x \in (a, b)$.

Доказательство. $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x)$ неубывает. \square

Следствие 6.7. Пусть f – дифференцируемая выпуклая функция на интервале (a, b) . Тогда $f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c)$ для всех $x, c \in (a, b)$.

Доказательство. $f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \geq f'(c)(x - c)$ (*)

1. Пусть $x > c$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq f'(c)$$

По теореме Лагранжа $\exists \xi \in (c, x)$:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) \geq f'(c),$$

т. к. функция выпукла и по теореме 6.5 функция неубывает.

2. Пусть $x < c$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq f'(c)$$

По теореме Лагранжа $\exists \xi \in (x, c)$:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) \leq f'(c),$$

т. к. функция выпукла и по теореме 6.5 функция неубывает.

3. Пусть $x = c$. Тогда (*) : $0 \geq 0$.

\square

6.4 Неравенство Йенсена

Теорема 6.8 (Неравенство Йенсена). Пусть функция f выпукла на интервале (a, b) . Тогда для всех $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ и для всех чисел $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$, для которых $t_1 + \dots + t_n = 1$, выполнено

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n).$$

Доказательство. Индукция по n . База индукции: $n = 2$

$$t_1 + t_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1 - t_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t_1x_1 + t_2x_2) = f(t_1x_1 + (1 - t_1)x_2) \leq t_1f(x_1) + (1 - t_1)f(x_2) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$$

по определению выпуклости.

Шаг индукции: пусть $t_1 + \dots + t_n + t_{n+1} = 1$. Возьмём $t = t_1 + \dots + t_n \Rightarrow t + t_{n+1} = 1$

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) = f\left(t\left(\frac{t_1}{t}x_1 + \dots + \frac{t_n}{t}x_n\right) + t_{n+1}x_{n+1}\right) = (*)$$

Тогда из выпуклости функции

$$(*) \leq tf\left(\frac{t_1}{t}f(x_1) + \dots + \frac{t_n}{t}f(x_n)\right) + t_{n+1}f(x_{n+1}) = (**)$$

$\frac{t_1}{t} + \dots + \frac{t_n}{t} = \frac{t_1 + \dots + t_n}{t} = \frac{t}{t} = 1$. Применяем предположение индукции

$$(**) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1})$$

□

Пример 6.9 (Неравенство о средних). Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$. Тогда $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

$t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$, $f(x) = e^x$, $y_i = \ln x_i$
 $f''(x) = e^x \geq 0 \forall x \Rightarrow f(x) = e^x$ - выпуклая.

По неравенству Йенсена

$$f(t_1y_1 + \dots + t_ny_n) \leq t_1f(y_1) + \dots + t_nf(y_n)$$

$$f(t_1y_1 + \dots + t_ny_n) = e^{t_1y_1 + \dots + t_ny_n} = e^{\frac{\ln x_1}{n} + \frac{\ln x_2}{n} + \dots + \frac{\ln x_n}{n}} = e^{\frac{\ln x_1}{n}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{\ln x_n}{n}} = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

$$t_1f(y_1) + \dots + t_nf(y_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

6.5 Асимптоты

Определение 6.10. Прямая $y = \alpha x + \beta$ называется **асимптотой** графика функции f при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$). Ясно, что в случае асимптоты на $+\infty$ справедливы равенства

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x)$$

Аналогичные равенства верны и в случае асимптоты на $-\infty$ с заменой $+\infty$ на $-\infty$.

Глава 7

Первообразная и неопределенный интеграл

Лекция 22: Первообразная, неопределённый интеграл

7.1 Первообразная

Определение 7.1. Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале I , если F дифференцируема на I и $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Педагогический приём. $\frac{1}{x} = (\ln|x|)' = \frac{2}{2x} = (\ln|2x|)',$ т. к. $\ln 2x = \ln 2 + \ln x,$ т. е. отличается на константу.

Лемма 7.2. Любые две первообразные F_1 и F_2 функции f на интервале I отличаются на константу.

Доказательство. $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$\Phi(x)$ дифференцируема как сумма дифференцируемых функций.

$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0$

Т. к. $\Phi(x)$ дифференцируема \Rightarrow непрерывна на любом интервале.

По теореме Лангранжа

$\forall a, b \in I, a \leq b \exists c \in (a, b) \rightarrow \Phi(a) - \Phi(b) = \Phi'(c)(a - b) = 0 \cdot (a - b) = 0.$ Значит $\Phi(x) = const.$ \square

Определение 7.3. Множество всех первообразных функции f на некотором заданном интервале I называется неопределённым интегралом от f и обозначается $\int f(x) dx.$

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid F(x) \text{ - первообразная } f(x), C \in \mathbb{R}\}$$

7.2 Таблица первообразных

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1;$
- $\int \frac{dx}{x} dx = \ln|x| + C;$
- $\int e^x dx = e^x + C;$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
- $\int \cos x dx = \sin x + C;$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

7.3 Свойства неопределённого интеграла

Теорема 7.4. 1. (*Линейность*)

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C;$$

2. (*Формула интегрирования по частям*)

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx;$$

3. (*Формула замены переменной*)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

(Здесь подразумевается, что все интегралы существуют.)

Доказательство. 1. Пусть $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$.

$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow \alpha F(x) + \beta G(x)$ - первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow \int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

А также $\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = \alpha F(x) + \alpha c_1 + \beta G(x) + \beta c_2 = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

$$\begin{aligned} 2. (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g(x) + C = \\ &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \text{ (линейность)} \\ &\Rightarrow \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

$$3. (F(\varphi(t)))'_t = F'_x(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(t)) \in \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

С другой стороны, $F(\varphi(t)) \in \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}$.

Следовательно, $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}$.

□

Замечание 7.5. Отметим, что, т.к. $f'(x) dx = df$ и $g'(x) dx = dg$ (инвариантность первого дифференциала), то свойство 2) обычно записывают в виде $\int f dg = fg - \int g df$.

Аналогично, свойство 3) обычно записывают в виде $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t)$ и рассматривают φ как новую переменную.

Пример 7.6. Найдём следующие первообразные:

$$\begin{aligned} 1.1 \quad \int \cos^9 x \sin x dx &= - \int \cos^9 x (\cos x)' dx = \text{(формула замены переменной)} \\ &- \int t^9 dt \Big|_{t=\cos x} = -\frac{t^{10}}{10} + C \Big|_{t=\cos x} = -\frac{\cos^{10} x}{10} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2 \quad \int \cos^9 x \sin x dx &= - \int \cos^9 x (\cos x)' dx = \text{(Замечание 7.6)} - \int \cos^9 x d \cos x = \\ &- \frac{\cos^{10} x}{10} + C; \end{aligned}$$

Здесь $\cos x$ воспринимаем как переменную.

$$2.1 \int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx = \int \ln x \cdot x' \, dx = (\text{формула интегрирования по частям}) x \ln x - \int x(\ln x)' \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C;$$

$$2.2 \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, d \ln x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C;$$

3. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[x = \cos t; -1 \leq x \leq 1; t = \arccos x; 0 \leq t \leq \pi \right]$ (здесь используем формулу замены переменной в обратную сторону)

$$\begin{aligned} &= \int \sqrt{1-\cos^2 t} \, d \cos t = - \int \sqrt{1-\cos^2 t} \sin t \, dt = - \int \sin^2 t \, dt \quad (t \geq 0) \\ &= - \int 1-\cos^2 t \, dt = \int \cos^2 t - 1 \, dt = \int \cos^2 t \, dt - \int 1 \, dt = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dt - \\ &t = \int \frac{1}{2} \, dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t \, dt - t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{2} + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + \\ &C = \frac{1}{2} \arccos x + \frac{1}{2} \cos(\arccos x) \sin(\arccos x) + C \quad (\text{мы подставили в } \varphi(t)) \\ &t = \varphi^{-1}(x) \text{ и получили, что } \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x, \text{ т. к. } \varphi(t) = \cos t \text{ - биекция} \\ &= \frac{1}{2} \arccos x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C; \end{aligned}$$

Как мы поняли, интеграл - это обратная операция к дифференцированию и обратные операции часто устроены сложнее, чем прямые. Так и с интегралом: если продифференцировать можно почти любую функцию в виде формулы, то интеграл от функции, выраженной через элементарные функции, иногда не может быть выражен через элементарные функции. Но для некоторых функций ответ выражается через элементарные. В частности, всегда можно найти интеграл от рациональной функции, но с некоторой оговоркой.

Глава 8

Интеграл от рациональной функции

Лекция 23: Интеграл от рациональной функции

8.1 Рациональная функция

Определение 8.1. Функция $R(x)$ называется рациональной, если

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

для некоторых многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Пример 8.2. Найдём следующие первообразные:

1. $\int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x} dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C;$
2. $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x} dx \text{ (используем пункт 1)} = -\frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + \ln|x| + C;$
3. $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \ln|x| + C - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x| + C - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} (d(x^2+1) = (x^2+1)'dx = 2xdx) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C;$

8.2 Разложение многочлена на неприводимые

Теорема 8.3. Любой многочлен единственным образом раскладывается на неприводимые множители. (без доказательства)

Замечание 8.4. Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ раскладывается на множители вида $(x - a)$ и $(x^2 + px + q)$, где $p^2 - 4q < 0$ (дискриминант меньше нуля).

8.3 Правильная дробь

Определение 8.5. Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная, если степень числителя меньше степени знаменателя. Нулевой многочлен 0 является правильной дробью.

Замечание 8.6. Любая рациональная дробь единственным способом представлена как сумма многочлена и правильной дроби.

8.4 Элементарная дробь

Определение 8.7. Правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется элементарной (или простейшей), если её знаменатель $Q(x)$ представляет собой степень неприводимого многочлена $p(x)$:

$$Q(x) = p^k(x), k \leq 1,$$

а степень числителя $P(x)$ меньше степени $p(x)$.

8.5 Разложение дроби на элементарные

Теорема 8.8. Любая правильная рациональная дробь единственным образом разлагается в сумму элементарных дробей. (без доказательства)

Следствие 8.9. Каждая рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ представлена в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей

$$\frac{A}{(x - a)^m}, \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, p^2 - 4q < 0, A, M, N \in \mathbb{R}.$$

8.6 Интегрирование рациональных функций

Теорема 8.10. Пусть P и Q два многочлена. Тогда первообразная функции $\frac{P}{Q}$ выражается в элементарных функциях (более точно, рациональных, \ln и \arctg).

Доказательство. Пусть $Q(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - a_s)^{m_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_kx + q_k)^{n_k}$. По теореме 8.8 дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ раскладывается в сумму элементарных дробей

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}.$$

(Здесь более сильное утверждение: любая рациональная функция раскладывается в виде суммы *именно таких* элементарных дробей)

Чтобы проинтегрировать $\frac{P(x)}{Q(x)}$, нужно, в силу линейности интеграла, проинтегрировать по отдельности многочлен $R(x)$ и элементарные дроби. Но многочлен мы уже умеем интегрировать, осталось разобраться с элементарными дробями.

$$1. \int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$2. \int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, n \neq 1 \text{ (проверяется взятием производной у правой части);}$$

$$3. \text{ Воспользуемся тем, что } \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{x}{a}}{(\frac{x}{a})^2 + 1} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= M \int \frac{x + \frac{N}{M}}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x + p - p + \frac{2N}{M}}{x^2 + px + q} dx = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \frac{M}{2} \int \frac{\frac{2N}{M} - p}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} dx + \\ &\quad \frac{M}{2} \left(\frac{2N}{M} - p \right) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \end{aligned}$$

$$\left(N - \frac{pM}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \quad (x^2 + px + q > 0, \text{ т. к. } D = p^2 - 4q < 0, \text{ ещё здесь пользуемся верхним интегралом});$$

$$4. n \in \mathbb{N}, a \neq 0, J_n(x, a) = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\right) \text{ (формула интегрирования по частям)} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \int \frac{x \cdot n \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} +$$

$$\begin{aligned}
2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \\
2n \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx - 2n \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n(x, a) - \\
2na^2 J_{n+1}(x, a) \Rightarrow J_{n+1}(x, a) &= \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n(x, a) - J_n(x, a) \right) = \\
&\frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1) J_n(x, a) \right)
\end{aligned}$$

5. $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + \frac{2N}{M}}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x + p - p + \frac{2N}{M}}{(x^2 + px + q)^n} dx = \\
\frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + \frac{M}{2} \int \frac{-p + \frac{2N}{M}}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + \\
\left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} &= \frac{M}{2} \frac{(x^2 + px + q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right). \\
\cdot \int \frac{dx}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} &= \frac{M}{2} \frac{(x^2 + px + q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) J_n \left(x + \frac{p}{2}, \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right).
\end{aligned}$$

□

Лекция 24: Интегрирование рациональных функций, интеграл Римана

8.7 Метод Остроградского

Теорема 8.11 (Формула Остроградского). *Пусть $\deg P < \deg Q$. Тогда:*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$$

где $Q_2(x)$ имеет те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но однократно, $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)}$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ находятся методом неопределенных коэффициентов после дифференцирования формулы, с учетом $\deg P_1(x) < \deg Q_1(x)$, $\deg P_2(x) < \deg Q_2(x)$.

Доказательство. Если мы складываем две правильные дроби, то получим правильную дробь:

$$\deg A(x) < \deg B(x), \deg C(x) < \deg D(x)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) + C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$$

$$\deg A(x)D(x) = \deg A(x) + \deg D(x) < \deg B(x) + \deg D(x)$$

$$\deg C(x)B(x) = \deg C(x) + \deg B(x) < \deg D(x) + \deg B(x) = \deg B(x) + \deg D(x)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \deg A(x)D(x) + C(x)B(x) &= \max(\deg A(x)D(x), \deg C(x)B(x)) < \\ &< \deg B(x) + \deg D(x) \end{aligned}$$

Значит дробь $\frac{A(x)D(x) + C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$ правильная.

Пусть

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k} + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{s_j} \frac{b_{js}x + c_{js}}{(x^2 + p_jx + q_j)^s}.$$

Проинтегрируем каждое слагаемое по отдельности. Если для каждого слагаемого мы можем применить такую формулу

$$\int \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} dx = \frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} + \int \frac{P_2^*(x)}{Q_2^*(x)} dx,$$

в которой многочлены $P^*(x), Q^*(x), P_1^*(x), Q_1^*(x), P_2^*(x), Q_2^*(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то потом эти формулы мы можем сложить и получить итоговую формулу. Когда мы суммируем левую часть, то из-за линейности интеграла все интегралы вида $\int \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} dx$ объединяются в правильную дробь $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ (используем доказанный факт). В правой части слагаемые вида $\int \frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} dx$ объединяются в правильную дробь $\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx$, при этом свойство знаменателя о том, что степень каждого множителя $Q_1(x)$ меньше на единицу, чем у $Q(x)$, сохраняется. А также при суммировании в правой части интегралов вида $\int \frac{P_2^*(x)}{Q_2^*(x)} dx$ получаем $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$, при этом степень каждого множителя многочлена $Q_2(x)$ равна 1, т. к если мы складываем дроби с одинаковыми знаменателями, то знаменатель дроби не изменяется, т. е. множители остаются в первой степени, а если мы складываем дроби с разными знаменателями, то знаменатели перемножаются и каждый множитель остаётся в первой степени.

Осталось проверить, что формула выполняется для каждого слагаемого. Докажем это для 5 интегралов из теоремы 23.3.

В 1. $\int \frac{Adx}{x-a}$ и 3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$ случаях $\frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} = 0$.

Во 2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \int \frac{0}{Q_2(x)} dx$, у первого слагаемого степень $n-1$ в знаменателе.

В 5. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{M}{2} \frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) J_n \left(x + \frac{p}{2}, \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)$, у первого слагаемого степень $n-1$ в знаменателе. Теперь нужно разобраться с J_n .

В 4. $J_n(x, a) = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-1)J_{n-1}(x, a) \right)$ у первого слагаемого в знаменателе степень на 1 меньше, а второе слагаемое - это интеграл следующего порядка. Когда мы применим рекуррентную формулу для J_{n-1} , то получим дробь со степенью ещё на 1 меньше в знаменателе. Продолжим этот процесс пока не дойдём до первой степени в знаменателе. Если сложить дроби, у которых степень в знаменателе убывает, то получится дробь, у которой знаменатель имеет степень $n-1$, т. е. на 1 меньше. А интеграл от дроби со степенью 1 в знаменателе, на котором мы остановились, имеет вид $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$. \square

Замечание 8.12. Метод Остроградского удобно использовать, если знаменатель $Q(x)$ имеет кратные корни.

8.8 Рациональные функции от \cos и \sin

Пример 8.13. Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Заметим, что

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Тем самым, интегралы от функций $R(\cos x, \sin x)$, где R - рациональная функция, сводятся заменой к интегралам от рациональных функций.

Пояснение.

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = d(2 \operatorname{arctg} t) = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Договоримся, что $-\pi < x < \pi$, тогда получаем биекцию между t и x . Функции $\sin x$ и $\cos x$ - это 2π -периодические функции и интервал, на котором мы посчитали интеграл, имеет длину 2π и далее "копируем" то, что получилось после

интегрирования на другие интервалы длины 2π . Следовательно,

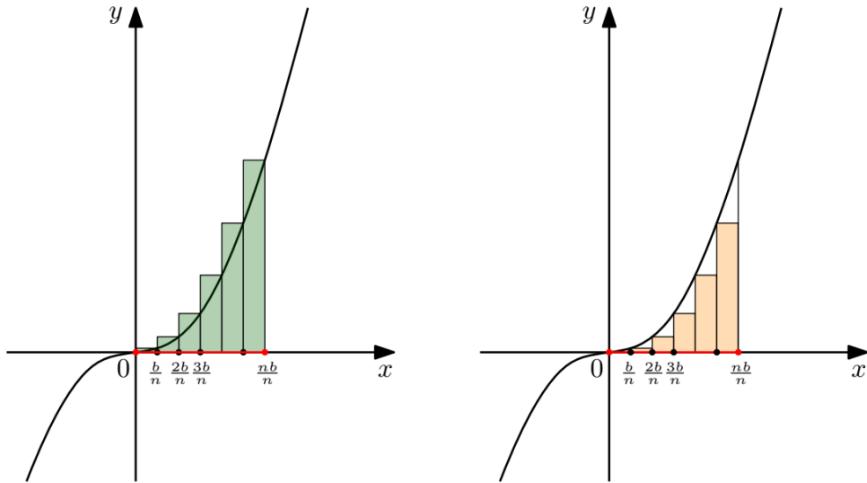
$$\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} dx = \int \frac{P\left(\frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}, \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}\right)}{Q\left(\frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}, \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}\right)} \frac{2dt}{1+t^2}$$

Глава 9

Определенный интеграл

9.1 Определенный интеграл как площадь

Пример 9.1. Чему равняется площадь под графиком функции $y = x^3$ на отрезке $[0; b]$?



Пояснение. Площадь столбиков на левой картинке:

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{kb}{n}\right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{b^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{b^4}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{b^4}{n^4} (1+2+\dots+n)^2 (*) = \frac{b^4}{n^4} \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$$

(*) Формула суммы кубов доказывается по индукции.

Площадь фигуры под графиком заранее покрывается зелёными столбиками.

Площадь столбиков на правой картинке:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^3 b^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{b^4}{n^4} \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \frac{b^4}{n^4} (1+2+\dots+n)^2 = \\ &= \frac{b^4}{n^4} \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \end{aligned}$$

Сумма S_2 меньше площади фигуры под графиком.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{n^4} \frac{(n+1)^2 n^2}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{n^4} \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}$$

По теореме о замкнутой последовательности площадь фигуры равна $\frac{b^4}{4}$. Но можно было получить ответ, посчитав интеграл: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

9.2 Интеграл Римана

Определение 9.2. • Разбиением T отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

- Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ называются отрезками разбиения. Длину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k \geq 1$.
- Величина $\Delta_T := \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ называется диаметром разбиения.
- Размеченным разбиением (T, ξ) отрезка $[a, b]$ называется пара, состоящая из разбиения T отрезка $[a, b]$ и набора точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
- Интегральной суммой функции f , соответствующей размеченному разбиению (T, ξ) , называется выражение

$$\sigma(f, T, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Определение 9.3. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если существует такое число I , что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ размеченного разбиения (T, ξ) с диаметром разбиения $\Delta_T < \delta$ выполнено $|\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$.

Число I называют интегралом функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначают $\int_a^b f(x) dx$.

Пояснение. Геометрически мы уменьшаем длину отрезков и увеличиваем их число.

Пример 9.4. 1. $\int_a^b 1 dx = b - a$;

2. Функция $I_{\mathbb{Q}}$ не интегрируема ни на каком отрезке.

Пояснение. 1. $\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$.
 (функция $f(\xi_k) = 1 \forall k$)

2. Функция Дирихле $I_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ определяется следующим образом:

$$I_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

\forall разбиения T можно взять $\xi \in \mathbb{Q}, \zeta \in \mathbb{I}$ (внутри любого отрезка разбиения можно взять рациональное и иррациональное число)

Тогда $\sigma(I_{\mathbb{Q}}, T, \xi) = \sum_{k=1}^n I_{\mathbb{Q}}(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$ и $\sigma(I_{\mathbb{Q}}, T, \zeta) = \sum_{k=1}^n I_{\mathbb{Q}}(\zeta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$.

Тогда для любого T с любым диаметром разбиения можно взять разметку, такую что иногда сумма равна $b - a$, иногда 0. Если $b - a \neq 0$, то функция не интегрируема.

Лекция 25: Интеграл Римана, суммы Дарбу

Предложение 9.5. Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Пусть f - интегрируема на $[a, b]$.

Тогда $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon \Leftrightarrow I - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon$.

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Пусть f - неограничена на $[a, b] \Rightarrow$ неограничена на одном из отрезков Δ_k , пусть на Δ_{k_0} . Фиксируем ξ_k для всех k кроме k_0 . Тогда $\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = C + f(\xi_{k_0}) \Delta x_{k_0} \Rightarrow I - C - \varepsilon < f(\xi_{k_0}) \Delta x_{k_0} < I - C + \varepsilon \Rightarrow \frac{I-C-\varepsilon}{\Delta x_{k_0}} < f(\xi_{k_0}) < \frac{I-C+\varepsilon}{\Delta x_{k_0}}$ - противоречие, функция ограничена. \square

Предложение 9.6 (Линейность интеграла). Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольных чисел α, β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall (T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta_1 \rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I_1| < \varepsilon$.

g - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall(T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta_2 \rightarrow |\sigma(g, T, \xi) - I_2| < \varepsilon.$

Размеченное разбиение (T, ξ) взяли одно и то же для обоих интегралов.

Первые два утверждения означают, что $I_1 = \int_a^b f(x) dx, I_2 = \int_a^b g(x) dx.$

Рассмотрим интегральную сумму

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) &= \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \alpha f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \beta g(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= \alpha \sigma(f, T, \xi) + \beta \sigma(g, T, \xi) \end{aligned}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow |\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| = |\alpha \sigma(f, T, \xi) + \beta \sigma(g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| \leqslant |\alpha \sigma(f, T, \xi) - \alpha I_1| + |\beta \sigma(g, T, \xi) - \beta I_2| \leqslant |\alpha| \varepsilon + |\beta| \varepsilon = (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon$

$\forall \varepsilon' = \frac{\varepsilon'}{2(|\alpha| + |\beta|)} > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall(T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| \leqslant (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon'}{2(|\alpha| + |\beta|)} = \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'. \quad \square$

Предложение 9.7 (Монотонность интеграла). *Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Если $f(x) \leqslant g(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leqslant \int_a^b g(x) dx$.*

Доказательство. $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \geqslant 0$ и $\int_a^b f(x) dx \leqslant \int_a^b g(x) dx \Leftrightarrow \int_a^b g(x) - f(x) dx \geqslant 0$ (пользуемся линейностью). Пусть $h(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow$ требуется доказать, что $h(x) \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx \geqslant 0$.

По определению $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall(T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(h, T, \xi) - \int_a^b h(x) dx| < \varepsilon \Leftrightarrow \int_a^b h(x) dx - \varepsilon < \sigma(h, T, \xi) < \int_a^b h(x) dx + \varepsilon$.

$\sigma(h, T, \xi) \geqslant 0$ (т. к. $h(\xi_k) \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n h(\xi_k) \Delta x_k \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx + \varepsilon > 0 \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx > -\varepsilon \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx \geqslant 0$). \square

Замечание 9.8. В частности, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx$.

Доказательство. Далее мы докажем, что если $f(x)$ интегрируема, то и $|f(x)|$ интегрируема.

$$\begin{aligned} -|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| &\Rightarrow - \int_a^b |f(x)| dx \leqslant \int_a^b f(x) dx \leqslant \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

\square

Глава 10

Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций

10.1 Суммы и интегралы Дарбу

Фиксируем ограниченную функцию f , определённую на отрезке $[a, b]$.

Определение 10.1. Для ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f и разбиения T определим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу:

$$s(f, T) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k;$$

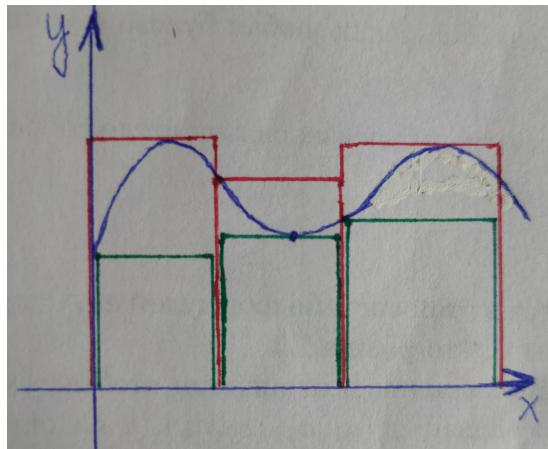
(на каждом отрезке берём минимальное значение функции)

$$S(f, T) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k.$$

(на каждом отрезке берём максимальное значение функции)

Нижним интегралом Дарбу называется число $I_* = \sup_T s(f, T)$, а верхним интегралом Дарбу называется число $I^* = \inf_T S(f, T)$.

Сумма зелёных прямоугольников - это $s(f, T)$, сумма красных прямоугольников - это $S(f, T)$.



10.2 Критерий Дарбу

- Лемма 10.2.**
1. $s(f, T) \leq \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq \sigma(f, T, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq S(f, T);$
 2. Если $T \subset T'$, то $s(f, T) \leq s(f, T')$ и $S(f, T') \leq S(f, T);$
 3. $s(f, T_1) \leq s(f, T_1 \cup T_2) \leq S(f, T_1 \cup T_2) \leq S(f, T_2).$

Доказательство. 1. Докажем, что $s(f, T) = \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$

$$\leq: \forall \xi \quad s(f, T) = \sum_{k=1}^n \inf_{\xi_k} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow s(f, T) - \text{нижняя грань}$$

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

$$\inf_{\xi} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) - \text{точная нижняя грань} \Rightarrow s(f, T) \leq \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi).$$

$$\geq: s(f, T) = \sum_{k=1}^n \inf_{\xi_k} f(\xi_k) \Delta x_k$$

По определению инфимума $\forall \varepsilon > 0 \exists \xi'_k \in \Delta_k : f(\xi'_k) \leq \inf_{\xi_k} f(\xi_k) + \varepsilon$.

$$\sigma(f, T, \xi') = \sum_{k=1}^n f(\xi'_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\inf_{\xi_k} f(\xi_k) + \varepsilon \right) \Delta x_k = s(f, T) + \varepsilon(b - a)$$

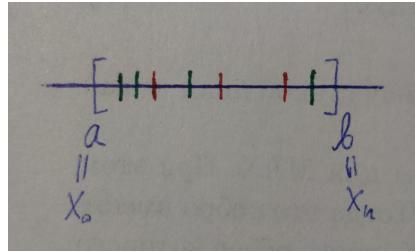
$$\inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq \sigma(f, T, \xi') \leq s(f, T) + \varepsilon(b - a)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0 \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq s(f, T)$.

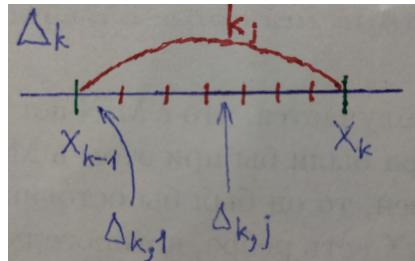
Второе и третье неравенство в цепочке очевидное. Четвёртое неравенство на самом деле является равенством и доказывается как первое равенство.

2. Рассмотрим отрезок $[a, b]$. На нём определено разбиение T . Теперь рассмотрим измельчение разбиения T' . Оно содержит те же точки, что и в T , но добавляет ещё свои точки.

Красные точки - точки разбиения T , красные и зелёные точки - точки измельчения T' .



Пусть подотрезки $\Delta_k \in T$, а подотрезки $\Delta'_k \in T'$, $T \subset T'$. Рассмотрим отрезок Δ_k и будем считать, что он разбился на k_j отрезков. Поэтому отрезок Δ'_k мы будем индексировать двумя индексами, первый номер - номер отрезка Δ_k , в котором он лежит, второй номер - номер отрезка Δ'_k внутри отрезка Δ_k .



Тогда

$$s(f, T') = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_{k,j}} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j}$$

При этом на нескольких маленьких отрезках инфимум не меньше инфимума на одном большом отрезке, потому что на большом отрезке у нас есть больше точек, из которых мы можем выбрать меньшее значение. Если инфимум достигался на красном отрезке, то этот отрезок принадлежит большому, поэтому мы можем взять точку принадлежащую красному отрезку и получить инфимум на большом отрезке не больше, чем на маленьких. Поэтому

$$s(f, T') = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_{k,j}} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j} \geq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j}$$

Продолжаем преобразования.

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j} = \sum_{k=1}^n \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \sum_{j=1}^{k_j} \Delta x_{k,j} = \sum_{k=1}^n \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k = s(f, T)$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

3.

$$T_1 \subset T_1 \cup T_2 \Rightarrow (\text{из пункта 2}) s(f, T) \leq s(f, T_1 \cup T_2)$$

$$(\text{из пункта 1}) s(f, T_1 \cup T_2) \leq S(f, T_1 \cup T_2)$$

$$T_1 \cup T_2 \supset T_2 \Rightarrow (\text{из пункта 2}) S(f, T_1 \cup T_2) \leq S(f, T_2)$$

□

Лекция 26: Интеграл Римана, суммы Дарбу

Лемма 10.3. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta \text{ выполнено } I_* \leq s(f, T) + \varepsilon \text{ и } I^* \geq S(f, T) - \varepsilon$.

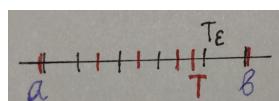
Доказательство. По определению супремума

$$I_* = \sup_T s(f, T) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon : I_* \leq s(f, T_\varepsilon) + \varepsilon$$

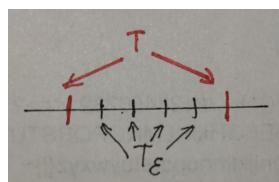
Рассмотрим произвольное разбиение T

$$s(f, T_\varepsilon \cup T) \geq (\text{пункт 2 предыдущей леммы}) s(f, T_\varepsilon) \geq I_* - \varepsilon$$

Точки из разбиения T окрасим в красный цвет, точки из T_ε - в чёрный цвет.



Точки T_ε делят отрезок с красными концами на число чёрных точек + 1. Тогда точки из T_ε могут разбить на не более, чем $2|T_\varepsilon|$ отрезков, потому что максимум достигается, когда в каждом отрезке мы ставим по одной чёрной точке (т. е. разбиваем отрезок на два).



Пояснение. Здесь Δ_k - отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, подразумеваем под знаком суммы сумму по всем отрезкам, которые образуются этим множеством точек (отрезок образуют соседние точки, т. е. внутри отрезка других точек разбиения нет).

$$\begin{aligned} s(f, T_\varepsilon \cup T) &= \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k = \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \in T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k + \\ &+ \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \notin T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k = (*) \end{aligned}$$

Первая сумма - сумма отрезков с красными концами, вторая сумма - сумма остальных отрезков (т. е. либо оба конца чёрные, либо один конец чёрный, а другой - красный). Первое слагаемое выразим как разность суммы по всем отрезкам с красными концами и суммы по всем отрезкам с красными концами, но с чёрными точками внутри.

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{\Delta_k \in T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k - \sum_{\Delta_k \in T \text{ и } \Delta_k \notin T \cup T_\varepsilon} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k + \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \notin T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k \leqslant \\ &\leqslant s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \Delta_T \cdot 2|T_\varepsilon| \end{aligned}$$

В конце - грубая оценка для последних двух слагаемых.

Возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot 2|T_\varepsilon|}$. Тогда для T с $\Delta_T < \delta$

$$\begin{aligned} I_* &\leqslant s(f, T_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant s(f, T \cup T_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \Delta_T \cdot 2|T_\varepsilon| + \varepsilon < \\ &< s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \delta \cdot 2|T_\varepsilon| + \varepsilon = s(f, T) + \varepsilon + \varepsilon = s(f, T) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Заменой $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ получаем $I_* \leqslant s(f, T) + \varepsilon'$.

Аналогично доказывается, что $I^* \geqslant S(f, T) - \varepsilon$.

Уточнение. Если фиксируем ε , то T_ε - фиксированное число. $f(x)$ интегрируема \Rightarrow она ограничена (по предложению 9.5) \Rightarrow супремум ограничен, поэтому такое δ рассматривать корректно. \square

Теорема 10.4 (Критерий Дарбу). *Ограниченнная функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $I^* = I_*$.*

Доказательство. \Rightarrow Если функция интегрируема, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} I - \varepsilon &\leq \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) = s(f, T) \leq \sup_T s(f, T) = I_* \\ I^* &= \inf_T S(f, T) \leq S(f, T) = \sup_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq I + \varepsilon \end{aligned}$$

Докажем, что $I_* \leq I^*$:

$$\forall T_1, T_2 \quad s(f, T_1) \leq S(f, T_2) \Rightarrow \sup_{T_1} s(f, T_1) \leq S(f, T_2) \Rightarrow \sup_{T_1} s(f, T_1) \leq \inf_{T_2} S(f, T_2)$$

Тогда

$$I - \varepsilon \leq I_* \leq I^* \leq I + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что $I_* = I^*$.

$$\Leftarrow I = I_* = I^*$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \in \Delta_T < \delta \rightarrow I - \varepsilon = I_* - \varepsilon \leq (\text{лемма 10.3}) s(f, T) \leq \sigma(f, T, \xi) \leq S(f, T) \leq (\text{лемма 10.3}) I^* + \varepsilon = I + \varepsilon \Rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$,
что есть определение интеграла.

□

10.3 Колебание функции

Определение 10.5. *Колебанием функции f на отрезке Δ называется число*

$$\omega(f, \Delta) := \sup_{x, y \in \Delta} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y).$$

Пояснение. 1. В одну сторону

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \Delta \quad f(x) - f(y) &\leq \sup_{x \in \Delta} (f(x)) - f(y) \leq \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{x, y \in \Delta} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y) \end{aligned}$$

2. В другую сторону

По определению супремума и инфимума

$$\forall \delta > 0 \exists x_\delta : \sup_{x \in \Delta} f(x) \leq f(x_\delta) + \delta$$

$$\forall \delta > 0 \exists y_\delta : \inf_{y \in \Delta} f(y) \geq f(y_\delta) - \delta$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y) &\leq f(x_\delta) - f(y_\delta) + 2\delta \leq \sup_{x, y \in \Delta} |f(x) - f(y)| + 2\delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y) \leq \sup_{x, y \in \Delta} |f(x) - f(y)| \text{ при } \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Лекция 27: Интегрируемость по Риману различных классов функций

Теорема 10.6. Пусть f - ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $I^* = I_*$;
2. Функция f интегрируема на $[a, b]$;
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta :$

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon;$$

4. $\forall \varepsilon > 0 \exists T :$

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon;$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} S(f, T) - s(f, T) &= \sum_{k=1}^n \sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k - \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k \right) = \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

1 \Rightarrow 2 Применяем критерий Дарбу.

2 \Rightarrow 3 Пусть f - интегрируемая функция на $[a, b]$. Тогда $I^* = I_* = I$.

По лемме 10.3

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta : &\begin{cases} I = I^* \geq S(f, T) - \varepsilon, \\ I = I_* \leq s(f, T) + \varepsilon. \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow I - I \leq s(f, T) - S(f, T) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

По замечанию заключаем

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \leq 2\varepsilon$$

3 \Rightarrow 4 По предыдущему пункту существует такое T с диаметром $\Delta_T < \delta$, значит и просто T существует.

$4 \Rightarrow 1$ В доказательстве критерия Дарбу мы получили следующую цепочку неравенств

$$s(f, T) \leq I_* \leq I^* \leq S(f, T)$$

Тогда

$$0 \leq I^* - I_* \leq S(f, T) - s(f, T) = \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon \Rightarrow \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ } I^* = I_*$$

□

10.4 Интегрируемость модуля, квадрата и произведения функций

Следствие 10.7. Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то $|f|$ и f^2 интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$ и для любого $[c, d] \subset [a, b]$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[c, d]$.

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Leftrightarrow$ по пункту 4 теоремы 10.6

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon.$$

Доказательство для модуля функции

(Неравенство треугольника: $|A| - |B| \leq |A - B|, |B| - |A| \leq |A - B| \Rightarrow ||A| - |B|| \leq |A - B|$)

$$\begin{aligned} \omega(|f|, \Delta_k) &= \sup_{x,y \in \Delta_k} ||f(x)| - |f(y)|| \leq \sup_{x,y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| = \omega(f, \Delta_k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^n \omega(|f|, \Delta_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon \end{aligned}$$

Доказательство для квадрата функции

$$\begin{aligned} \omega(f^2, \Delta_k) &= \sup_{x,y \in \Delta_k} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup_{x,y \in \Delta_k} |(f(x) - f(y))(f(x) + f(y))| \leq \\ &\leq \sup_{x,y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)|(|f(x)| + |f(y)|) \leq 2 \sup_{x \in \Delta_k} |f(x)| \sup_{x,y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| = \\ &= 2 \sup_{x \in \Delta_k} |f(x)| \cdot \omega(f, \Delta_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega(f^2, \Delta_k) \Delta x_k &\leqslant \sum_{k=1}^n 2 \sup_{x \in \Delta_k} |f(x)| \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \leqslant 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \leqslant \\ &\leqslant M \cdot \varepsilon, \text{ где } M - \text{ константа.} \end{aligned}$$

В обоих случаях в конце мы применяем теорему 10.6 и заключаем, что функции интегрируемы на $[a, b]$.

Интегрируемость функции на подотрезке докажем далее. \square

Следствие 10.8. *Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то $f \cdot g$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Если f и g интегрируемы, то $f - g$ и $f + g$ интегрируемы. Тогда их квадраты $(f-g)^2$ и $(f+g)^2$ интегрируемы. Следовательно, $\frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) = \frac{1}{4} \cdot 4fg = fg$ интегрируема. \square

10.5 Интегрируемость монотонной функции

Следствие 10.9. *Если f монотонна на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$.*

Доказательство. Без ограничения общности пусть f - возрастающая функция.

$$\omega(f, \Delta_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k = (*)$$

Пусть $\Delta x_k = \Delta x_j \forall k, j$. Тогда

$$(*) = \Delta x_1 \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \Delta_T (f(b) - f(a))$$

Следовательно, $\forall T$ – разбиение $[a, b]$ на одинаковые части с $\Delta_T < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

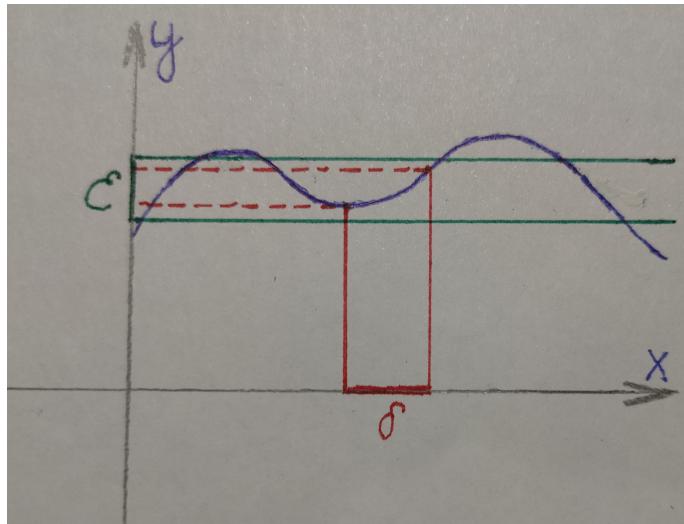
$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \leqslant \varepsilon.$$

Для убывающей f доказывается аналогично. \square

10.6 Равномерная непрерывность

Определение 10.10.

Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ для которого из неравенства $|x - y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Пояснение. Другими словами, существует δ на оси OX такая, что расстояние между x и y меньше, чем δ , и разность между значениями функции в точках x и y помещается в этот ε -корridor.

Замечание 10.11. Если функция является равномерно-непрерывной, то она является и непрерывной, т. к. определение непрерывности слабее:

f – непрерывна на $X \Rightarrow \forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

В обратную сторону это не правда, см. пункт 2) примера 10.12.

Пример 10.12. 1. Функция $f(x) := \sin x$ равномерно непрерывна на \mathbb{R} , т.к. по теореме Лагранжа $|\sin x - \sin y| = |\cos \xi| \cdot |x - y| \leq |x - y|$.

2. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не равномерно непрерывна на $(0, 1)$, т.к. $f(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n}, |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$.

Пояснение. 1. По теореме Лагранжа $\forall x, y \in \mathbb{R} |\sin x - \sin y| = |(\sin \xi)'(x - y)| = |\cos \xi| |(x - y)| \leq |x - y|$

2. Требуется доказать отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon = 1 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in (0, 1) \ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq 1$$

Будем доказывать для $\delta = \frac{1}{n}$, потому что всегда можно взять $\frac{1}{n} < \delta$. Тогда пусть $x = x_n = \frac{1}{n}, y = y_n = \frac{1}{2n} \Rightarrow |x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}, |f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geq 1$.

10.7 Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 10.13 (Кантора). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f - непрерывная функция на $[a, b]$, но не равномерно непрерывная:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta = \frac{1}{n} > 0 \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

x_n - ограниченная последовательность, т. к. $x_n \in [a, b] \Rightarrow$ по теореме Больцано $\exists x_{n_k} \rightarrow x \Rightarrow$ из неравенства $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ следует, что $x_{n_k} - \frac{1}{n} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n}$. $x_{n_k} - \frac{1}{n} \rightarrow x, x_{n_k} + \frac{1}{n} \rightarrow x \Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $y_{n_k} \rightarrow x$.

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x) + f(x) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

Но $|f(x_{n_k}) - f(x)| \rightarrow 0, |f(x) - f(y_{n_k})| \rightarrow 0$, а $\varepsilon > 0$ - противоречие. \square

Следствие 10.14. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда f интегрируема по Риману на $[a, b]$.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta \forall x, y \in \Delta_k \rightarrow \sup_{x, y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall k \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega(f, \Delta_k) < \varepsilon \forall k. \end{aligned}$$

Для такого разбиения $\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon |b - a| \Rightarrow$ по теореме 10.6 функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$. \square

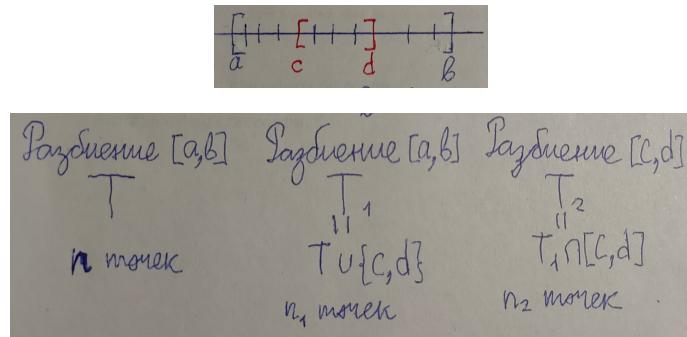
Лекция 28: Формула Ньютона-Лейбница

10.8 Аддитивность интеграла

Следствие 10.15. *Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $[c, d] \subseteq [a, b]$, то f интегрируема на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме 10.6 $\forall \varepsilon > 0 \exists T :$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \Delta_k} f(x) \cdot \Delta_k - \sum_{k=1}^n \inf_{x \in \Delta_k} f(x) \cdot \Delta_k < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 \leq S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon \end{aligned}$$



$$\sum_{k=1}^{n_2} \omega(f, \Delta_k^2) \Delta^2 x_k \leq \sum_{k=1}^{n_1} \omega(f, \Delta_k^1) \Delta^1 x_k \leq \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon$$

Первое неравенство выполняется, потому что в новую сумму мы добавили слагаемые отрезков, не входящих в отрезок $[c, d]$, но принадлежащих отрезку $[a, b]$, колебание функции всегда неотрицательно (разность супремума и инфимума функции неотрицательна). Здесь мы переходим от разбиения T_2 к разбиению T_1 . Второе неравенство выполняется, потому что T_1 - это измельчение разбиения T . На измельчении нижняя сумма Дарбу $s(f, T_1)$ только больше, а верхняя сумма Дарбу $S(f, T_1)$ только меньше, значит разность $S(f, T_1) - s(f, T_1) \leq S(f, T) - s(f, T)$ (лемма 10.2, пункт 2). \square

Следствие 10.16. Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $c \in [a, b]$, то f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ и верно равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Доказательство. Если интеграл слева существует, то существуют и интегралы справа по предыдущему следствию (на самом деле утверждение верно в обратную сторону, но доказательство на лекциях не приводилось).

Замечание 10.17. Если f - интегрируема на $[a, b]$, то для любой последовательности разбиений T_n такой, что $\Delta_{T_n} \rightarrow 0$, интегральная сумма $\sigma(f, T_n, \xi_n) \rightarrow I$.

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ по определению $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ } \Delta_T < \delta \text{ и } \xi \rightarrow |\sigma(f, T_n, \xi_n) - I| < \varepsilon$

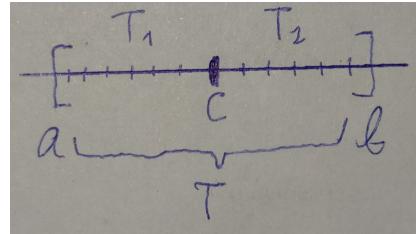
Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Delta_{T_n} < \delta \rightarrow |\sigma(f, T_n, \xi_n) - I| < \varepsilon \Rightarrow \sigma(f, T_n, \xi_n) \rightarrow I$$

\square

Это означает, что если функция интегрируемая, то можно выбирать любое разбиение, с стремящимся к нулю диаметром, чтобы найти интеграл.

Будем брать такое разбиение T отрезка $[a, b]$, которые содержат точку c . T_1 - разбиение отрезка $[a, c]$, T_2 - разбиение отрезка $[c, b]$.



f - интегрируема $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$

$\Delta_T < \delta \Rightarrow \Delta_{T_1} < \delta, \Delta_{T_2} < \delta \Rightarrow |\sigma(f, T_1, \xi_1) - I_1| < \varepsilon, |\sigma(f, T_2, \xi_2) - I_2| < \varepsilon$

Пусть отрезок $[a, c]$ поделен на n_1 отрезков. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(f, T, \xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n_1} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=n_1+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sigma(f, T_1, \xi_1) + \sigma(f, T_2, \xi_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I_1 - I_2| = |\sigma(f, T_1, \xi_1) + \sigma(f, T_2, \xi_2) - I_1 - I_2| \leqslant \\ &\leqslant |\sigma(f, T_1, \xi_1) - I_1| + |\sigma(f, T_2, \xi_2) - I_2| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma(f, T, \xi) \rightarrow I, \sigma(f, T, \xi) \rightarrow I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 + I_2 = I$$

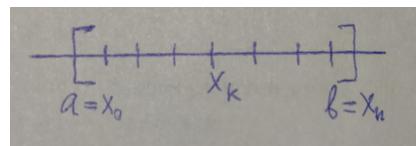
□

10.9 Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 10.18 (Формула Ньютона–Лейбница). *Пусть F - первообразная интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ функции f . Тогда*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение T отрезка $[a, b]$.



$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots \\ \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) &= \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = (*) \end{aligned}$$

Применяем теорему Лагранжа для каждого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$:

$$(*) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sigma(f, T, \xi)$$

Число $F(b) - F(a)$ равняется интегральной сумме Римана $\sigma(f, T, \xi)$. Поскольку функция интегрируема, то по замечанию из следствия выше при $T \rightarrow 0$ интегральная сумма Римана стремится к интегралу $\int_a^b f(x) dx$. При этом, как мы показали, для любого разбиения T всегда есть такая разметка ξ , когда $F(b) - F(a) = \sigma(f, T, \xi)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

□

Далее будем использовать соглашение: при $b > a$ по определению

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

10.10 Существование первообразной

Теорема 10.19. Пусть f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда функция

$$F(x) := \int_a^x f(x) dx$$

непрерывна на $[a, b]$. Кроме того, если f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Доказательство первого утверждения.

$$y \in [a, b]$$

$$F(y) = \int_a^y f(x) dx$$

$$|F(y) - F(x_0)| = \left| \int_a^y f(x) dx - \int_a^{x_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^y f(x) dx \right|$$

f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ ограничена: $|f(x)| \leq M$

$$\left| \int_{x_0}^y f(x) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^y M dx \right| = M \cdot |y - x_0| \Rightarrow$$

\Rightarrow при $y \rightarrow x_0$ $F(y) \rightarrow F(x_0) \Rightarrow F(x)$ непрерывна.

Доказательство второго утверждения.

Пусть теперь f непрерывна в $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Воспользуемся монотонностью интеграла и проинтегрируем каждую часть.

$$\int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) dx \leq \int_{x_0}^x f(x) dx \leq \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) dx$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

Пусть $x > x_0$, поделим на $x - x_0$.

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Это означает, что предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ существует и он равен $f(x_0)$. Таким образом, F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Если $x < x_0$, то когда поделим на $x - x_0$ знаки перевернутся, но в итоге мы получим тоже самое. \square

Следствие 10.20. Пусть f непрерывна на $[a, b]$, тогда $y f$ существует первообразная.

Пояснение. Если во всех точках f непрерывна, то по теореме 10.19 первообразная f существует во всех точках.

10.11 Формула интегрирования по частям

Теорема 10.21 (Формула интегрирования по частям). Пусть f, g — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции. Тогда

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Доказательство. $F(x) = g(x) \cdot f(x)$

$$F'(x) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Непрерывно дифференцируемая функция — это дифференцируемая функция, у которой первая производная непрерывна. Это означает, что $g'(x) \cdot f(x)$ и $g(x) \cdot f'(x)$ непрерывны $\Rightarrow g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$ непрерывна. У непрерывных функций есть первообразная по предыдущему следствию. Тогда мы можем их интегрировать.

$$\int_a^b F'(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

$$g(b) \cdot f(b) - g(a) \cdot f(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) \, dx = \int_a^b g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x) \, dx =$$

$$= \int_a^b g'(x) \cdot f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \cdot f'(x) \, dx$$

□

Пример 10.22. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx.$

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x \, dx = x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 x \, d \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Глава 11

Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций

Лекция 29: Несобственный интеграл

11.1 Формула интегрирования подстановкой

Теорема 11.1. Пусть f — непрерывна на $[a, b]$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Доказательство. f — непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ — интегрируема на $[\varphi(a), \varphi(b)]$ (функция интегрируема на любом подотрезке $[a, b]$) и у f есть первообразная (по теореме 10.19).

Тогда у функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ тоже есть первообразная $F(\varphi(t))$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

□

Пример 11.2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} + 1} dx = (*)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Применяем формулу

$$(*) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \int_{\operatorname{tg} 0}^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} \frac{dy}{y^2 + 2} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{y}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$$

11.2 Мера Жордана (дополнительный материал)

Пусть Δ — параллелепипед в \mathbb{R}^n , являющийся декартовым произведением промежутков вида $[a_i, b_i]$, (a_i, b_i) , $[a_i, b_i)$ или $(a_i, b_i]$. Мера Жордана параллелепипеда Δ определяется как произведение

$$\mu\Delta = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Для ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определяются:

- внешняя мера Жордана

$$\mu^*E = \inf \sum_{k=1}^N \mu\Delta_k, \quad \bigcup_k \Delta_k \supset E$$

- внутренняя мера Жордана

$$\mu_*E = \sup \sum_{k=1}^N \mu\Delta_k, \quad \bigcup_k \Delta_k \subset E, \quad \Delta_k \cap \Delta_m = \emptyset, \text{ если } k \neq m.$$

Здесь $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ — параллелепипеды описанного выше вида.

Определение 11.3. Множество E называется измеримым по Жордану (или квадрируемым), если $\mu^*E = \mu_*E$. В этом случае мера Жордана равна $\mu E = \mu^*E = \mu_*E$.

11.3 Несобственный интеграл Римана

Определение 11.4. Пусть f интегрируема на каждом отрезке $[a, x]$ при $x < b$ ($b \in (-\infty, +\infty]$). Говорят, что несобственный интеграл

$$\int_a^b f(t) dt$$

сходится, если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(t) dt.$$

В этом случае значение несобственного интеграла полагают равным значению данного предела. В противном случае (если предела не существует) говорят, что несобственный интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с особенностью в нижнем пределе интегрирования.

Пример 11.5.

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1), & p \neq 1, \\ \ln b, & p = 1. \end{cases}$$

Предел при $b \rightarrow \infty$ существует тогда и только тогда, когда $p > 1$.

С другой стороны,

$$\int_b^1 \frac{1}{x^p} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(1 - b^{1-p}), & p \neq 1, \\ -\ln b, & p = 1. \end{cases}$$

Предел при $b \rightarrow 0$ существует тогда и только тогда, когда $p < 1$.

11.4 Свойства несобственного интеграла

Теорема 11.6. Пусть f, g интегрируемы на каждом отрезке $[a, x]$ при $x < b$ и пусть для них определены несобственные интегралы на промежутке $[a, b)$. Тогда

1. если $b \in \mathbb{R}$ и f интегрируема на $[a, b]$, то значение несобственного интеграла на промежутке $[a, b)$ совпадает со значением обычного интеграла Римана по отрезку $[a, b]$;
2. функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a, b)$ и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

3. если $c \in [a, b)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

Доказательство. 1. По определению $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$.

По теореме 10.19 если $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ интегрируема на $[a, b]$, то $F(t)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = F(b) = \int_a^b f(x) dx$.

2. $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t \alpha f(x) + \beta g(x) dx$ (здесь уже обычный определённый интеграл, применяем линейность) $= \lim_{t \rightarrow b^-} \alpha \int_a^t f(x) dx + \beta \int_a^t g(x) dx = \alpha \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx + \beta \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

Мы предполагаем, что интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ существуют, тогда существует интеграл $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx$.

3. $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = (*)$

При $c \in [a, b)$ для уже определённого интеграла применяем аддитивность:

$$(*) = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

В отличие от пункта 2 здесь равенство выполняется в обе стороны: $\int_a^c f(x) dx$ является константой, поэтому предел $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$.

□

11.5 Формула интегрирования подстановкой

Теорема 11.7. Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и интегрируема в несобственном смысле, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ - непрерывно дифференцируемое отображение, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(t) \rightarrow b$ при $t \rightarrow \beta$. Тогда функция $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[\alpha, \beta]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Доказательство. Из условия теоремы знаем, что

$$\exists \int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(x) dx$$

Рассмотрим следующий интеграл (мы не знаем заранее, существует ли он):

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \lim_{s \rightarrow \beta} \int_\alpha^s f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

При этом не важно с какой стороны s стремится к β (справа или слева), потому что мы определили интеграл как в случае $\alpha < \beta$, так и в случае $\beta < \alpha$.

Для данного определённого интеграла под пределом действует формула интегрирования заменой (теорема 11.1).

$$\lim_{s \rightarrow \beta} \int_{\alpha}^s f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \lim_{s \rightarrow \beta} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x) dx$$

$\varphi(\alpha) = a, \varphi(s) \rightarrow b$ при $s \rightarrow \beta \Rightarrow$

$$\lim_{s \rightarrow \beta} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx$$

что тоже самое, что интеграл в начале доказательства. Значит интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ существует и равен $\int_a^b f(x) dx$. \square

11.6 Формула интегрирования по частям

Теорема 11.8. Пусть f, g непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$ и существует предел $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x)$. Тогда функции $f'g$ и fg' одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b]$ и в случае интегрируемости

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Доказательство. Если существует $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x)$, то $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a)$ – это число. Тогда функции $f'g$ и fg' одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b]$.

В случае интегрируемости

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)g'(t) dt$$

Применяем формулу интегрирования по частям для определённого интеграла

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)g'(t) dt &= \lim_{x \rightarrow b-} \left(f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t) dt \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t) dt \end{aligned}$$

\square

11.7 Критерий Коши

Теорема 11.9 (Критерий Коши). *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; b]$, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a; \xi] \subseteq [a; b]$ и неограничена в левой окрестности точки $x = b$. Тогда для сходимости интеграла*

$$\int_a^b f(x) dx$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число η , что при любых $\eta_1, \eta_2 \in (\eta; b)$

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Запишем критерий Коши для функции $F(x) = \int_a^x f(t) dt$:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \eta > 0 \ \forall \eta_1, \eta_2 \in B_\delta(b) \rightarrow |F(\eta_1) - F(\eta_2)| < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \int_a^{\eta_1} f(x) dx - \int_a^{\eta_2} f(x) dx \right| &= \left| \int_a^{\eta_1} f(x) dx + \int_{\eta_2}^a f(x) dx \right| = \left| \int_{\eta_2}^{\eta_1} f(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Лекция 30: Абсолютная сходимость

11.8 Абсолютная сходимость

Определение 11.10. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(t) dt$ сходится **абсолютно**, если сходится интеграл $\int_a^b |f(t)| dt$.

Предложение 11.11. Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.

Доказательство. Запишем критерий Коши (теорема 11.9)

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ - сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \eta_1, \eta_2 \in B_\delta(b) \rightarrow \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

Применяем замечание 9.8 (первое неравенство)

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x) dx \right| \leq \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)| dx \leq \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

Значит сходится интеграл $\int_a^b f(t) dt$. □

Замечание 11.12. Исследование абсолютной сходимости сводится к исследованию сходимости интеграла от неотрицательной функции. В случае неотрицательной функции f функция F оказывается монотонной, поэтому сходимость интеграла от неотрицательной функции равносильна ограниченности F на $[a, b]$ (применяем теорему Вейерштрасса).

11.9 Условная сходимость

Определение 11.13. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(t) dt$ сходится **условно**, если сам интеграл сходится, но не сходится абсолютно.

Пример 11.14. Примером условно сходящегося интеграла может служить интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Доказательство. Формула интегрирования по частям дает следующее равенство

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

Последний интеграл в этом равенстве сходится абсолютно, поскольку

$$\int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^\infty \left| \frac{1}{x^2} \right| dx \text{ - сходится.}$$

В то же время, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ не сходится абсолютно. Действительно,

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} dx \quad (\text{формула: } 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x)$$

Первый интеграл в последнем равенстве расходится, а второй, как и выше, равен

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\sin x}{x} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ - сходится.}$$

Это означает, что $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ является суммой сходящегося и расходящегося интеграла и, следовательно, расходится. □

11.10 Несобственный интеграл от знакопостоянной функции

Теорема 11.15 (Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции). *Пусть функция $f(x) \geq 0$ интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b]$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$ эквивалентна условию*

$$\sup_{b' \in [a, b]} \int_a^{b'} f(x) dx < +\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(y) = \int_a^y f(x) dx$. На любом отрезке $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема (в силу следствия 10.15) и, поскольку $f(x) \geq 0$, $F(y)$ - монотонна:

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \geq \int_a^{x_1} f(x) dx = F(x_1).$$

Тогда, в силу теоремы Вейерштраса 3.18, если $F(y)$ - ограничена, то

$$\sup_{y \in [a, b]} F(y) = \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

В обратную сторону

$$\exists \int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx \Rightarrow F(x) - \text{ограничена.}$$

□

11.11 Первый признак сравнения

Теорема 11.16 (Первый признак сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b]$ и для любого $x \in [a, b]$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:*

- из сходимости $\int_a^b g(x) dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x) dx$;
- из расходимости $\int_a^b f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x) dx$.

Доказательство. Поскольку $0 \leq f(x) \leq g(x)$, из монотонности интеграла 9.7 следует, что для любого $y \in [a, b]$:

$$0 \leq \int_a^y f(x) dx \leq \int_a^y g(x) dx.$$

Если $\int_a^b g(x) dx$ сходится, то по критерию сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции 11.15 функция $G(y) = \int_a^y g(x) dx$ — ограничена. Тогда из неравенства выше следует, что и функция $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ ограничена. Отсюда, в силу теоремы 11.15, следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Если же $\int_a^b f(x) dx$ расходится, то $F(y)$ неограничена, как и функция $G(y)$. \square

11.12 Эквивалентность в смысле сходимости интегралов

Определение 11.17. Будем говорить, что $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны в смысле сходимости интегралов при $x \rightarrow b - 0$ (обозн. $f(x) \xrightarrow{\text{ex.}} g(x)$ при $x \rightarrow b - 0$), если $\exists m, M > 0, b_1 < b$ такие, что $\forall x \in [b_1, b)$ выполняются неравенства

$$mg(x) \leq f(x) \leq Mg(x).$$

Теорема 11.18 (Второй признак сравнения). Пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ и $f(x) \xrightarrow{\text{ex.}} g(x)$ при $x \rightarrow b - 0$.

Тогда несобственные интегралы $\int_a^b g(x) dx$ и $\int_a^b f(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Функции эквивалентны в терминах сходимости, когда $\exists b_1 : \forall x \in [b_1, b)$ для которых выполнено $mg(x) \leq f(x) \leq Mg(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b_1} f(x) dx + \int_{b_1}^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b g(x) dx = \int_a^{b_1} g(x) dx + \int_{b_1}^b g(x) dx.$$

При этом $\int_a^{b_1} f(x) dx$ и $\int_a^{b_1} g(x) dx$ — определенный интегралы, не влияющие на сходимость.

Исследуем интегралы $\int_{b_1}^b f(x) dx$ и $\int_{b_1}^b g(x) dx$. Если $\int_{b_1}^b g(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{b_1}^b Mg(x) dx = M \int_{b_1}^b g(x) dx$. Тогда по первому признаку сравнения 11.16 интеграл $\int_{b_1}^b f(x) dx$ тоже сходится.

И наоборот, если $\int_{b_1}^b g(x) dx$ расходится, то расходится и $\int_{b_1}^b mg(x) dx = m \int_{b_1}^b g(x) dx$. Тогда по первому признаку сравнения 11.16 интеграл $\int_{b_1}^b f(x) dx$ тоже расходится. \square

11.13 Второй признак сравнения

Предложение 11.19. Если $f \geq 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b - 0$, то $f(x) \stackrel{ex}{\sim} g(x)$.

Доказательство. $g(x) \sim f(x)$ при $x \rightarrow b - 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Тогда $\exists \delta : \forall x \in B'_\delta(b) :$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}.$$

Тогда $g(x) > 0$ и

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x).$$

□

Предложение 11.20. Пусть $f_i(x), g_i(x) i \in \{1, 2, 3\}$ - неотрицательные на промежутке $[a, b)$ функции, причем $f_3(x) > 0, g_3(x) > 0$ и $f_i(x) \stackrel{ex}{\sim} g_i(x) i \in \{1, 2, 3\}$ при $x \rightarrow b - 0$. Тогда

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \stackrel{ex}{\sim} \frac{g_1(x) \cdot g_2(x)}{g_3(x)} \text{ при } x \rightarrow b - 0.$$

Доказательство. ????????????????????

□

Пример 11.21. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x} \sin(\frac{2+\cos x}{x^2})}{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^\alpha} dx$.

Лекция 31: Еще немного про числовые ряды

11.14 Первый признак сравнения

Определение 11.22. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **знаком постоянным**, если или $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, или $a_n \leq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Предложение 11.23 (Первый признак сравнения). Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Наоборот, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Было доказано ранее.

Замечание 11.24. Поскольку первые несколько членов не влияют на сходимость ряда, достаточно, чтобы неравенства выше выполнялись начиная с некоторого момента $\forall n > n_0$. Это называется **принципом локализации**.

Следствие 11.25 (Признак Вейерштрасса). Если $|a_n| \leq b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Доказательство. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ сходится по первому признаку сравнения. Если ряд сходится абсолютно, то он и просто сходится. \square

11.15 Второй признак сравнения

Теорема 11.26 (Второй признак сравнения). Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$.

0. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — эквивалентны по сходимости, т.е. сходятся/расходятся одновременно.

Доказательство. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \Rightarrow$ из определения предела следует, что $\exists n \geq N \rightarrow \frac{1}{2}c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}c$ (отступили на $\frac{1}{2}c$ обе стороны) $\Rightarrow \frac{1}{2}c \cdot b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}c \cdot b_n$

c — положительное число, поэтому можно применять первый признак сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}c \cdot b_n$ — расходится (по первому признаку сравнения) $\Rightarrow \frac{3}{2}c \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — расходится.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}c \cdot b_n$ — сходится (по первому признаку сравнения) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится.

\square

Пример 11.27. Теперь мы можем ответить на вопрос, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{n^2}$, т. к. $\arctg \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

Следствие 11.28. Если $a_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n, n \rightarrow \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Определение эквивалентности для функций: $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

В частности верно для функций от n : $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0$

По предыдущей теореме получаем требуемое. \square

11.16 Интегральный признак

Предложение 11.29. Пусть $f(x) \geq 0$ и не возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Обозначим через $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ частичную сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Поскольку $f(x) \geq 0$, последовательность S_n монотонно возрастает.

Заметим, что $\forall b > 1$ функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[1, b]$, поскольку $f(x)$ монотонна (следствие 10.9). Также заметим, что в силу монотонности $f(x)$ для $x \in [n, n+1]$ выполнено

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1).$$

Тем самым, $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} f(n) dx &= f(n)((n+1)-n) = f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1) = \\ &= f(n+1)((n+1)-n) = \int_n^{n+1} f(n+1) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то

$$S_n - f(1) = f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty,$$

что означает ограниченность S_n и, в силу монотонности S_n и теоремы Вейерштрасса 2.14, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Если же $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty$, и

$$S_n = f(1) + \dots + f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \rightarrow +\infty,$$

что означает расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. □

Пример 11.30. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Применяя интегральный признак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \text{сходится} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx - \text{сходится} \Leftrightarrow p > 1$$

11.17 Признак Даламбера

Теорема 11.31 (Признак Даламбера). *Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда*

1. если существует $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0, 1)$ такие, что $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \forall k \geq k_0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится};$$

2. если $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1. Знаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$

Пусть $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \forall k \geq k_0$

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot a_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot a_{k-1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \cdot a_{k_0} \leq q^{k-k_0+1} a_{k_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0} \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} a_{k_0} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} a_{k_0} \text{ сходится} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ сходится (по первому признаку сравнения)}$$

Значит по принципу локализации ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

2. $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \Rightarrow a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq a_{k_0} > 0 \Rightarrow a_k \not\rightarrow 0$, т. е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

Следствие 11.32 (Признак Даламбера в предельной форме). *Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$, тогда*

1. при $q < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

2. при $q > 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

3. при $q = 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ может сходиться, а может и расходиться.

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Возьмём $q' = \frac{q+1}{2}$ - середина отрезка $[q, 1]$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

$$\exists N : \forall n > N \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q' < 1 \Rightarrow$$

по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2. $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow$

по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

3. $q = 1$. Пример: $a_n = (\frac{1}{n})^p$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^p = 1 \text{ при любом } p$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^p$ сходится при $p > 1$ и не сходится $p \leq 1$.

□

11.18 Радикальный признак Коши

Теорема 11.33 (Радикальный признак Коши). *Пусть $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда*

1. если существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0, 1)$ такие, что $\sqrt[k]{a_k} \leq q \ \forall k \geq k_0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится};$$

2. если $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \rightarrow \sqrt[k]{a_k} \geq 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1. Пусть $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \Rightarrow a_k \leq q^k \ \forall k > k_0$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ - сходится, т. к. $q \in (0, 1) \Rightarrow$ по первому признаку сравнения $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

2. $\sqrt[k]{a_k} \geq 1 \Rightarrow a_k \geq 1 \forall k \geq k_0 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится в силу необходимого условия сходимости ряда.

□

Следствие 11.34 (Признак Коши в предельной форме). *Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, тогда*

1. при $q < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

2. при $q > 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

3. при $q = 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ может сходиться, а может и расходится.

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Возьмём $q' = \frac{q+1}{2}$ - середина отрезка $[q, 1]$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то

$$\exists N : \forall n > N \rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q' < 1 \Rightarrow$$

по признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2. $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow$

по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

3. $q = 1$. Пример: $a_n = (\frac{1}{n})^p$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p = 1^p = 1 \text{ при любом } p.$$

Здесь мы воспользовались $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^p$ сходится при $p > 1$ и не сходится $p \leq 1$.

□

Пример 11.35. Признак Коши сложнее, однако сильнее, чем признак Даламбера. Если признак Даламбера подтверждает сходимость или расходимость ряда, то и признак Коши делает то же, однако обратное неверно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k - k}$$

Признак Даламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1}-n-1}}{2^{(-1)^n-n}} = 2^{(-1)^{n+1}-(-1)^n-n-1+n} = 2^{2(-1)^{n+1}-1} = \begin{cases} 2^{-3}, & n - \text{чётное}; \\ 2, & n - \text{нечётное}. \end{cases}$$

Следовательно, признак Даламбера не применим.

Признак Коши. $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n]{2^{-n}} \leq \sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}} \leq \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{2^{-n}} = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Знаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0) \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

По теореме о зажатой последовательности $\sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, ряд сходится.

11.19 Признак Гаусса

Теорема 11.36 (Признак Гаусса). *Пусть $a_n > 0$. Если существует $p \in \mathbb{R}, \delta > 0$ такие, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O(\frac{1}{n^{1+\delta}})$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, т. е. при $p > 1$ сходится и при $p \leq 1$ расходится.*

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) \\ & \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) = \ln \left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \right) = (1) \end{aligned}$$

Применим формулу Тейлора для $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$

$$\begin{aligned} (1) &= \ln \left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \right) = \ln \left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = (2) \end{aligned}$$

Знаем, что $o(g) = O(g)$. Тогда

$$\begin{aligned} (2) &= \ln \left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \\ &= \ln \left(1 - \frac{p}{n} + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = (3) \end{aligned}$$

Если $\delta > 1$, то $O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$; если $\delta < 1$, то $O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$.

Возьмём $\delta' = \min(\delta, 1)$. Тогда

$$(3) = \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right) \right) = (4)$$

Применим формулу Тейлора для $\ln(1+x)$

$$(4) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right) + O\left(O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right)$$

Следовательно по определению О-большого $\exists C > 0$:

$$\ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) \leq C \frac{1}{n^{1+\delta'}}$$

По первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right)$ сходится.

Значит

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) = \ln \left(\prod_{n=1}^N \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) = \ln \left(\frac{a_{N+1}}{a_1} (N+1)^p \right)$$

стремится к S при $N \rightarrow \infty$.

$$\ln \left(\frac{a_{N+1}}{a_1} (N+1)^p \right) = S + o(1)$$

$$\frac{a_{N+1}}{a_1} (N+1)^p = e^S \cdot e^{o(1)} = (5)$$

Применим формулу Тейлора для $e^{o(1)}$

$$(5) = e^S \cdot (1 + o(1) + o(o(1))) = e^S \cdot (1 + o(1))$$

$$\frac{a_{N+1}}{\frac{e^S a_1}{(N+1)^p}} = 1 + o(1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{N+1}}{\frac{e^S a_1}{(N+1)^p}} = 1 \Rightarrow a_n \sim \frac{\text{const}}{n^p} \text{ (второй признак сравнения)}$$

□

Лекция 32: Признаки Абеля и Дирихле

11.20 Признак Дирихле

Теорема 11.37 (Признак Дирихле). *Пусть последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена:*

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq C,$$

а последовательность $\{b_k\}$ монотонно стремится к нулю. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство.

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, A_n - \text{ограничена}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \quad (A_0 = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n \end{aligned}$$

A_n - ограничена, $b_n \rightarrow 0 \Rightarrow A_n \cdot b_n \rightarrow 0$.

Докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ - сходится абсолютно, значит и просто сходится.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^n |A_k (b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=1}^n |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| = (*)$$

Без ограничения общности последовательность b_k - монотонно убывает ($b_k \geq b_{k+1}$). Пусть ряд A_k ограничен числом M .

$$(*) \leq \sum_{k=1}^n M(b_k - b_{k+1}) = M \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_{n+1}) = Mb_1 - Mb_{n+1} \rightarrow Mb_1$$

при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. □

11.21 Признак Абеля

Теорема 11.38 (Признак Абеля). Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, последовательность $\{b_k\}$ монотонна и ограничена. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. b_n - монотонна и ограничена \Rightarrow (по т. Вейерштрасса) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Пусть $b'_n = b_n - b \Rightarrow b'_n$ стремится монотонно к нулю.

По признаку Дирихле сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b'_n$. Здесь мы пользуемся, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится \Rightarrow частичная сумма $\sum_{k=1}^n a_k$ ограничена.

$$\sum_{k=1}^n a_k b'_k = \sum_{k=1}^n a_k (b_k - b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k - b \sum_{k=1}^n a_k$$

$\sum_{k=1}^n a_k b'_k$ - сходится, $b \sum_{k=1}^n a_k$ - сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k b_k$ - сходится. \square

Следствие 11.39 (Следствие из признака Абеля). Пусть последовательность $\{b_k\}$ монотонна и $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b \in (0, +\infty)$. Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится, последовательность b_k - монотонна, ограничена (т. к. имеет предел) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится (по признаку Абеля).

2. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится.

Т. к. $b_k \rightarrow b > 0$, то $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \rightarrow b_k > 0$. Тогда последовательность $\{\frac{1}{b_k}\}$ - монотонна с $k \geq k_0$ и имеет предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{b_k} = \frac{1}{b} > 0$.

Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится, то $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b_k$ - сходится.

Последовательность $b'_k = \{\frac{1}{b_k}\}$ - монотонна, ограничена $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k \cdot b_k) \cdot b'_k$ - сходится по признаку Абеля $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ - сходится \Rightarrow по принципу локализации $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится. \square

Замечание 11.40. Следствие из признака Абеля утверждает, что характер сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ не изменится, если последовательность $\{a_k\}$ заменить на эквивалентную последовательность $\{c_k\}$ (предел отношения последовательностей $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$ должен стремиться к 1) при условии, что последовательность $\{\frac{c_k}{a_k}\}$ монотонна.

11.22 Признак Лейбница

Теорема 11.41 (Признак Лейбница). *Если последовательность b_k монотонно стремится к нулю, то ряд Лейбница $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ сходится.*

Доказательство. $\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} -1, & k - \text{нечётное} \\ 0, & k - \text{чётное} \end{cases}$ - ограничена, b_k монотонно стремится к нулю \Rightarrow по признаку Дирихле $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ - сходится. \square

Пример 11.42. Последовательность $\left\{ \frac{1}{n} \right\}$ монотонно стремится к нулю \Rightarrow по признаку Лейбница ряд $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится.

Замечание 11.43. Из того, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{a_k} = 1$ не следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Доказательство. Пусть, например, $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, $b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}$. Тогда $\frac{b_k}{a_k} = 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. При этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, т. к. $b_k = a_k + c_k$, где $c_k = \frac{1}{k}$ и, как было показано ранее гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. \square

11.23 Теоремы о среднем

Теорема 11.44 (Первая теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, и $g(x)$ не меняет знак (то есть либо всюду неотрицательна: $g(x) \geq 0$, либо всюду неположительна $g(x) \leq 0$). Тогда существует такое число μ , $m \leq \mu \leq M$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Пусть без ограничения общности $g(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} m \leq f(x) \leq M &\Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

1. Если $\int_a^b g(x) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = 0 = \mu \int_a^b g(x) dx$

2. Если $\int_a^b g(x) dx \neq 0 \Rightarrow \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$

В частности $m \leq \mu \leq M$.

□

Следствие 11.45 (Первая теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ - непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и не меняет знак. Тогда существует такое число $c \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Если функция f непрерывна, то тогда она принимает все значения от наибольшего до наименьшего. Тогда $\exists c : \mu = f(c)$, где μ из предыдущей теоремы. Мы можем переписать утверждение предыдущей теоремы так:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

□

Теорема 11.46 (Вторая теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ монотонна (нестрого) на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 11.47 (Формулы Бонне). *Если функция $f(x)$ не возрастает и $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx.$$

Если же функция $f(x)$ не убывает, то

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

Доказательство. Пусть разбиение $T = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$.

Функция $f(x)$ - монотонная \Rightarrow интегрируема (Следствие 10.9), $g(x)$ по условию леммы интегрируема $\Rightarrow f(x)g(x)$ интегрируема.

Воспользуемся аддитивностью интеграла.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))g(x) dx \end{aligned}$$

Пусть $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx$, $\rho = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))g(x) dx$.

Докажем, что $\rho \rightarrow 0$ при $\Delta_T \rightarrow 0$.

$$|\rho| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| |g(x)| dx = (*)$$

Здесь мы применили неравенство треугольника и то, что модуль функции интегрируем.

Если функция $g(x)$ интегрируема по Риману, то она ограничена числом M .

$$\begin{aligned} (*) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(f, \Delta_k) M dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) M \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1 dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) M \Delta x_k = \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

f интегрируема $\Rightarrow \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \rightarrow 0$ при $\Delta_T \rightarrow 0$ по критерию Дарбу.

Обозначение: $G(x) = \int_a^x g(t) dt$

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot (G(x_{k+1}) - G(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) G(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) G(x_k) = (**)$$

Т. к. $f(x_0)G(x_0) = f(a)G(a) = f(a) \cdot 0 = 0$, то мы можем изменить индекс суммирования у первой суммы, а последнее слагаемое вынести отдельно.

$$(**) = \sum_{k=1}^{n-1} G(x_k)(f(x_{k-1}) - f(x_k)) + f(x_{n-1})G(b) = (***)$$

По теореме 10.19 $G(x)$ - непрерывна. Тогда $m = \min G(x), M = \max G(x)$ и $G(x)$ достигает эти значения. Кроме того, $f(x_{k-1}) - f(x_k) \geq 0$.

$$(\ast\ast\ast) \geq m \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) + f(x_{n-1})m = mf(a)$$

Аналогично, $\sigma \leq Mf(a)$.

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \sigma + \rho$$

$$mf(a) + \rho \leq \sigma + \rho \leq Mf(a) + \rho$$

Перейдём к пределу при $\Delta_T \rightarrow 0$

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mf(a)$$

$$\exists \xi : G(\xi) = \mu \in (m, M) \text{ и } \int_a^\xi g(x) dx \cdot f(a) = \mu f(a) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Аналогично доказывается вторая формула. \square

Пусть $f(x)$ - не возрастает, $f_2(x) = f(x) - f(b) \geq 0$.

Применяем формулу Бонне

$$\int_a^b f_2(x)g(x) dx = f_2(a) \int_a^\xi g(x) dx = (f(a) - f(b)) \int_a^\xi g(x) dx$$

$$\int_a^b f_2(x)g(x) dx = \int_a^b (f(x) - f(b))g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx - f(b) \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx - f(b) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_a^b g(x) dx =$$

$$f(a) \int_a^\xi g(x) dx - f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

\square

Лекция 33: Некоторые приложения интеграла

11.24 Признак Дирихле

Пусть функция $y = f(x)g(x)$ определена на промежутке $[a; b]$ и неограничена в левой окрестности точки $x = b$. Тогда справедливы следующие достаточные признаки сходимости.

Теорема 11.48 (Признак Дирихле). *Интеграл $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится, если:*

- функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a; b]$;

- функция $g(x)$ монотонна на $[a; b]$, причем $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt$ для некоторых $x_1, x_2 \in [a, b]$ (не ограничивая общности будем считать $x_1 \leq x_2$). Так как $g(t)$ монотонна на $[x_1; x_2]$, она на нём интегрируема, а значит и $f(t)g(t)$ интегрируема на $[x_1; x_2]$ как произведение интегрируемых функций.

Поскольку $f(t)$ – интегрируема, а $g(t)$ – монотонна, выполнены условия второй теоремы о среднем и существует такая точка $\xi \in [x_1; x_2]$, что

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt = g(x_1) \int_{x_1}^{\xi} f(t) dt + g(x_2) \int_{\xi}^{x_2} f(t) dt.$$

Функция $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ ограничена на $[a; b]$, а значит, найдется такое $M \geq 0$, что

$$\left| \int_{x_1}^{\xi} f(t) dt \right| = F_1(\xi) \leq M, \left| \int_{\xi}^{x_2} f(t) dt \right| = F_2(\xi) \leq M$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt \right| &= \left| g(x_1) \int_{x_1}^{\xi} f(t) dt + g(x_2) \int_{\xi}^{x_2} f(t) dt \right| \leq |g(x_1)| \left| \int_{x_1}^{\xi} f(t) dt \right| + \\ &+ |g(x_2)| \left| \int_{\xi}^{x_2} f(t) dt \right| \leq |g(x_1)|M + |g(x_2)|M = M(|g(x_1)| + |g(x_2)|) \end{aligned}$$

$g(x)$ монотонно стремится к нулю, следовательно, она ограничена с одной стороны $g(a)$, а с другой 0. Тогда $|g(x_2)| \leq |g(x_1)|$ и

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt \right| \leq 2M|g(x_1)|. g(x) \rightarrow 0, \text{ что по определению означает}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in [a, b] \forall x \in (\delta; b) : |g(x)| < \varepsilon. \text{ Тогда } \forall x_1, x_2 \in (\delta; b)$$

$\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt \leq 2M|g(x_1)| < 2M\varepsilon$, что есть не что иное, как критерий Коши сходимости несобственного интеграла. \square

Пример 11.49. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, сходится при $\alpha > 0$ по признаку Дирихле.

При $\alpha > 0$

$$1. \int_1^x \sin x dx = -\cos x \Big|_1^x - \text{ограничена}$$

$$2. \frac{1}{x^\alpha} \rightarrow 0 \text{ монотонно при } x \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, по признаку Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ - сходится при $\alpha > 0$.

При $\alpha \leq 0$ расходится. Действительно, по критерию Коши

$$\exists \varepsilon = \frac{\pi}{6} : \forall \delta > 0 \ \exists x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k > \delta$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} dx \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} > \varepsilon$$

11.25 Признак Абеля

В условиях предыдущего слайда на функцию $y = f(x)g(x)$ справедлив следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 11.50 (Признак Абеля). *Интеграл $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится, если:*

- функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится;
- функция $g(x)$ ограничена и монотонна на $[a; b]$.

Доказательство. $g(x)$ - монотонная и ограничена \Rightarrow по теореме Вейерштрасса $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = A$.

Пусть $g_0(x) = g(x) - A \Rightarrow g_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b$.

Тогда для $g_0(x)$ и $f(x)$ выполнены условия признака Дирихле $\Rightarrow \int_a^b f(x)g_0(x) dx$ - сходится.

$$\int_a^b f(x)g_0(x) dx = \int_a^b f(x)(g(x) - A) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx - A \int_a^b f(x) dx$$

$\int_a^b f(x) dx$ - сходится по условию теоремы. Значит и $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится. \square

Пример 11.51. *Докажите, что при $\alpha > 0$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \arctan x dx$ сходится.*

$$\alpha > 0$$

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ - сходится.}$$

$$2. \arctan x \text{ - монотонна и ограничена}$$

\Rightarrow по признаку Абеля $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \arctan x dx$ - сходится.

Глава 12

Некоторые приложения интеграла

12.1 Вычисление площади плоских тел

Предложение 12.1. Пусть $f(x) \geq 0$ – неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда область Φ под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ измерима по Жордану в точности тогда, когда $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Более того, $\mu(\Phi) = \int_a^b f(x) dx$.

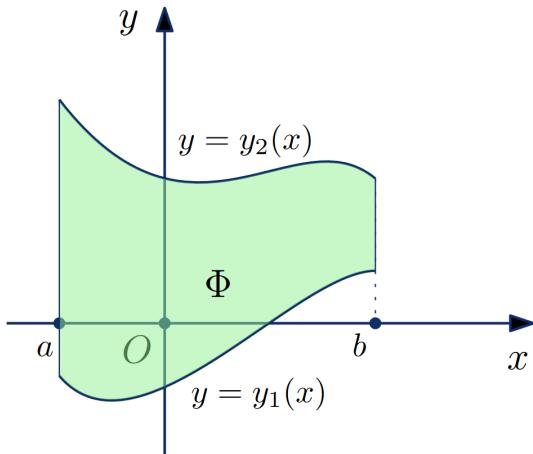
Доказательство. 1. Пусть Φ – измерима по Жордану. Возьмём последовательность элементарных фигур (прямоугольников) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ таких, что $\mu(P_n) \rightarrow \mu_* = \mu(\Phi)$. Рассмотрим прямоугольники верхнего края нашей фигуры. Каждой такой фигуре можно сопоставить точку в разбиении T , т. е. $P_k \mapsto T_k$.

2.

□

Теорема 12.2. Пусть функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и $y_2(x) \geq y_1(x), x \in [a; b]$. Площадь фигуры Φ , ограниченной графиками функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ и соответствующими отрезками прямых $x = a, x = b$, равна

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

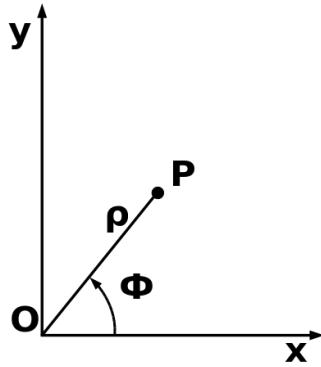


Доказательство. В предыдущем предложении мы рассматривали неотрицательные функции. Здесь мы можем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ сдвинуть вверх на одну и ту же константу, таким образом, они станут неотрицательными, если не были таковыми до этого, при этом искомая площадь останется неизменной.

Знаем, что мера Жордана функции $y_2(x)$ - это интеграл $\int_a^b y_2(x) dx$, мера Жордана функции $y_1(x)$ - это интеграл $\int_a^b y_1(x) dx$. Получается, что мера Жордана искомой площади равна $\int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx$. \square

12.2 Площадь в полярной системе координат

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.



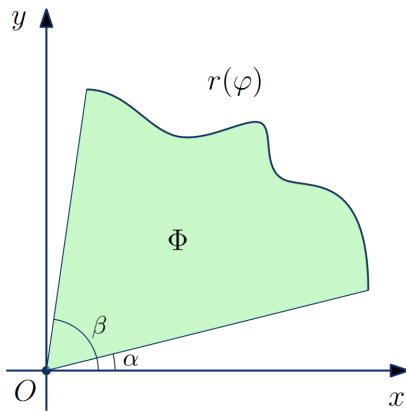
Пару полярных координат r и φ можно перевести в Декартовы координаты x и y путём применения тригонометрических функций синуса и косинуса

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

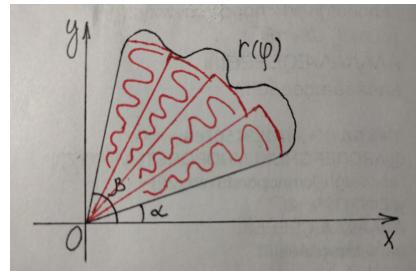
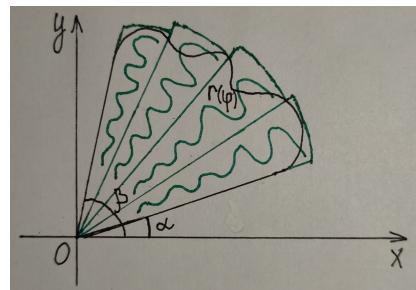
Для $r = 0$, φ может быть произвольным действительным числом. Для $r \neq 0$, чтобы получить уникальное значение φ , следует ограничиться интервалом $[0, 2\pi)$.

Теорема 12.3. Площадь сектора Φ , ограниченного графиком функции $r(\varphi)$ в полярных координатах и соответствующими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$



Доказательство. Разделим фигуру на секторы, при этом сначала выберем радиус сектора как минимальное расстояние до начал координат (красные секторы), а затем - как максимальное (зелёные секторы):



T - разбиение $[\alpha, \beta]$

Формулу площади круга πr^2 можно доказать, посчитав интеграл $4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ (фактически считаем площади четверти круга)

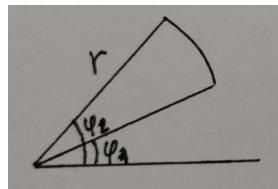
$$4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^r r \sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2} dx = [\sin \varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow r \sin \varphi = x \Rightarrow r \cos \varphi d\varphi = dx] = \\ = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cdot r \cos \varphi d\varphi = (*),$$

т. к. $\sin \varphi = \frac{r}{r} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\sin \varphi = \frac{0}{r} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

$$(*) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi \cdot r \cos \varphi d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \varphi d\varphi = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 2r^2 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \pi r^2$$

Тогда площадь сектора равна

$$S_{(\varphi_1, \varphi_2)} = \frac{\pi r^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} = \frac{r^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{2}$$



Площадь красных секторов

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \inf_{\varphi \in \Delta_k} r^2(\varphi) \frac{1}{2} \Delta \varphi_k = s(g, T),$$

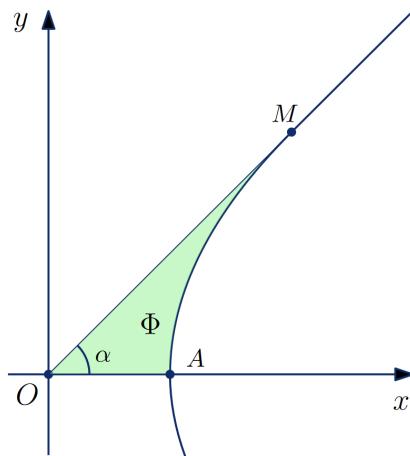
где $g(r) = \frac{r^2}{2}$, $\Delta \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$.

Площадь зелёных секторов

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \sup_{\varphi \in \Delta_k} r^2(\varphi) \frac{1}{2} \Delta \varphi_k = S(g, T)$$

$S(g, T)$ и $s(g, T)$ стремятся к интегралу. Мера Жордана зажата между ними \Rightarrow тоже стремится к интегралу, т. е. к $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$. \square

Пример 12.4. На гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$ дана точка $M(x_0; y_0)$. Найти площадь криволинейного треугольника OAM .



Зададим в полярной системе координат гиперболу:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = a^2 &\Rightarrow r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = a^2 \Rightarrow r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = a^2 \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi} \Rightarrow \\ &\Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \end{aligned}$$

Угол точки A равен 0 , угол точки M равен $\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}$.

Осталось посчитать интеграл:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \frac{a^2}{\cos 2\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 2\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \frac{d \sin 2\varphi}{\cos^2 2\varphi} = \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \frac{d \sin 2\varphi}{1 - \sin^2 2\varphi} = \frac{a^2}{8} \ln \left| \frac{1 - \sin 2 \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}}{1 + \sin 2 \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \right| + C = (*) \end{aligned}$$

В силу формулы $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ получаем, что

$$(*) = \frac{a^2}{8} \ln \left| \frac{1 - \frac{2 \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}}}{1 + \frac{2 \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}}} \right| + C$$

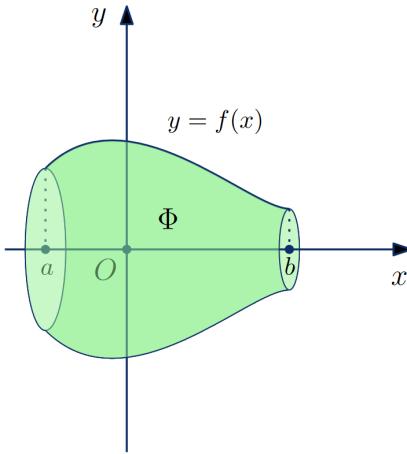
Лекция 34: Метрические, нормированные и евклидовы пространства

12.3 Объем тел вращения

Теорема 12.5. Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Φ ,

ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox , равен

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Доказательство. Обозначим через G тело, образованное вращением вокруг оси Ox фигуры Φ . Рассмотрим разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$. Заметим, что фигура $C_1(T)$, состоящая из цилиндров высоты $h_k = x_k - x_{k-1}$ радиуса $R = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$, покрывает тело вращения G . А фигура $C_2(T)$, состоящая из цилиндров высоты $h_k = x_k - x_{k-1}$ радиуса $R = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$, наоборот, вписана в тело вращения G . Как известно, объем цилиндра радиуса R и высоты h равен $\pi R^2 h$. Отсюда получаем, что

$$\mu(C_2(T)) = \sum_{k=1}^n \pi \inf_{x \in \Delta_k} f^2(x) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \pi \sup_{x \in \Delta_k} f^2(x) \Delta x_k = \mu(C_1(T)).$$

В правом и левой частях неравенства стоят в точности нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $\pi f^2(x)$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, она является интегрируемой (следствие 10.14). А значит интегрируем и ее квадрат (следствие 10.7). Тем самым получаем, что

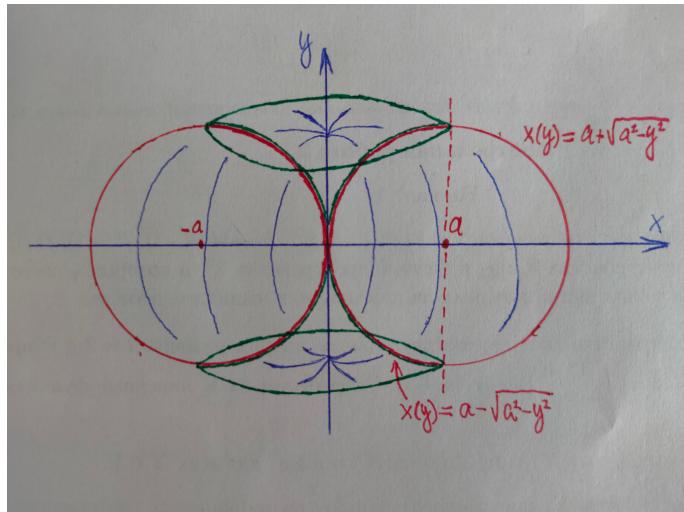
$$\mu(C_1(T)), \mu(C_2(T)) \rightarrow I = \pi \int_a^b f^2(x) dx \text{ при } \Delta_T \rightarrow 0.$$

Это означает, что G измеримо по Жордану, и его объем равен $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$.

□

Пример 12.6. Найти объем тела, образованного при вращении круга $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ вокруг оси Oy .

Пояснение. Хоть здесь фигура вращается вокруг оси OY , но нам это не помешает. $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ задаёт круг с центром в точке $(0, a)$ и радиусом a . При повороте этой красной окружности получим "бублик". Чтобы посчитать его объём, нужно вычислить объём фигуры, получающейся при вращении вокруг OY правой полуокружности $x(y) = a + \sqrt{a^2 - y^2}$, и вычесть объём фигуры, получающейся при вращении вокруг OY левой полуокружности $x(y) = a - \sqrt{a^2 - y^2}$ (отверстие "бублника"). Пользуясь теоремой 12.5 найдём итоговый объём.



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a (a + \sqrt{a^2 - y^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 - y^2})^2 dy = 4\pi \int_{-a}^a a\sqrt{a^2 - y^2} dy = \\ &= 4\pi a \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy \end{aligned}$$

Отдельно считаем такой интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy &= a^2 \int_{-a}^a \sqrt{1 - (\frac{y}{a})^2} d(\frac{y}{a}) = a^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} d(\sin x) = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(\sin x) \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(\sin x) = \cos x \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(\cos x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \pi - I \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{a^2 \pi}{2}$$

Следовательно

$$V = 4\pi a \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = 2a^3 \pi^2$$

12.4 Длина кривой

Для описания длины дуги кривой мы будем использовать иной подход — определим длину кривой через свойства, которым она должна удовлетворять.

Чтобы этот подход был более понятен, сначала реализуем его на площади фигуры.

Пусть $f \geq 0$ на $[a, b]$. И пусть $S(\alpha, \beta)$ площадь под графиком функции f на отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Разумные требования на S — это

1. аддитивность: $S(\alpha, \gamma) = S(\alpha, \beta) + S(\beta, \gamma)$ при $a \leq \alpha < \beta < \gamma \leq b$;
2. монотонность по включению: $\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leq S(\alpha, \beta) \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha)$.

Предложение 12.7. Пусть f интегрируема по Риману на $[a, b]$. При выполнении выше описанных условий $S(a, b) = \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство. $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — разбиение $[a, b]$, $I = \int_a^b f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \inf_{x \in \Delta_k} f(x) \Delta x_k &\leq (\text{аддитивность}) \sum_{k=1}^n S(x_{k-1}, x_k) = (\text{монотонность по включению}) \\ &= S(a, b) \leq \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \Delta_k} f(x) \Delta x_k (\text{аналогично}) \end{aligned}$$

Если функция интегрируема, то

$$\sum_{k=1}^n \inf_{x \in \Delta_k} f(x) \Delta x_k \rightarrow I, \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \Delta_k} f(x) \Delta x_k \rightarrow I \Rightarrow S(a, b) \rightarrow I \Rightarrow S(a, b) = I$$

(т. к. площадь константа). □

Определение 12.8. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — гладкая кривая, т.е. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и функции $x, y, z \in C^1([a, b])$ (множество функций, у которых первая производная непрерывна). Пусть $\ell(a, b)$ — длина пути соответствующая отрезку $[a, b]$. Тогда длина кривой удовлетворяет следующим требованиям

1. $\ell(\alpha, \gamma) = \ell(\alpha, \beta) + \ell(\beta, \gamma)$ при $a \leq \alpha < \beta < \gamma \leq b$;

$$2. \inf_{t \in [\alpha, \beta]} |v(t)|(\beta - \alpha) < \ell(\alpha, \beta) \leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |v(t)|(\beta - \alpha), \text{ где } v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Теорема 12.9. Длина кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a; b],$$

где $x(t), y(t), z(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции, равна

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dx$$

Доказательство. Задаём прямую в \mathbb{R}^3 , введя при этом параметр $t \in \mathbb{R}$ и точки $(x(t), y(t), z(t))$. Во втором пункте $v(t), t \in [\alpha, \beta]$ - это скорость движения по кривой на временном отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда $|v(t)|(\beta - \alpha)$ - это длина кривой на отрезке $[\alpha, \beta]$. Используя физическую интерпретацию, утверждаем, что скорость - производная по каждой координате: $v = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Значит $|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.

Рассмотрим разбиение времени $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, Δt_k - длина отрезка разбиения. По определению

$$\inf_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \leq \ell(\Delta t_k) \leq \sup_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k$$

По первому свойству

$$\sum_{k=1}^n \inf_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \leq \ell(a, b) \leq \sum_{k=1}^n \sup_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k$$

$x(t), y(t), z(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции \Rightarrow функция $|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ - непрерывна. Значит она интегрируема.

Выше мы записали интегральные суммы Дарбу для этой функции \Rightarrow

$$\sum_{k=1}^n \inf_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \rightarrow I, \sum_{k=1}^n \sup_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \rightarrow I, I = \int_a^b |v(t)| dt.$$

□

Глава 13

Предел функции нескольких переменных

13.1 Метрическое пространство

Определение 13.1. Пусть X - множество. Функция $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ называется метрикой, если

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
2. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X;$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X.$

Пара (X, d) называется метрическим пространством.

Пример 13.2. • Дискретная метрика: $d(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d(x, y) = 1$ во всех остальных случаях.

- Вещественные числа с функцией расстояния $d(x, y) = |y - x|$ и евклидово пространство являются полными метрическими пространствами.
- Расстояние Хэмминга в теории кодирования.

(Расстояние Хэмминга - функция расстояния между двоичными словами, которая равна количеству битов, в которых эти слова различаются. Другими словами - это минимальная длина пути от одного двоичного слова до другого в булевом кубе)

- Манхэттенская метрика: $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|$, где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – векторы.

13.2 Нормированное пространство

Определение 13.3. Пусть X – линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ называется нормой, если

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X;$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X.$

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется нормированным пространством.

Всякое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$.

Проверяем свойства метрического пространства.

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$
2. $d(x, y) = \|x - y\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\|$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \Leftrightarrow \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| \Leftrightarrow \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|,$
где $a = x - y, b = y - z.$

13.3 Евклидово пространство

Определение 13.4. Пусть X — линейное пространство. Функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если для всех $x, y, z \in X$ и всех $a, b \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$
3. $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle.$

Линейное пространство X со скалярным произведением называется евклидовым.

Пример 13.5. На линейном пространстве \mathbb{R}^k всех упорядоченных наборов (x_1, \dots, x_k) задано скалярное произведение $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^k x_j y_j$. Тем самым, на \mathbb{R}^k задана естественная евклидова метрика

$$\|x - y\| := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_k - y_k|^2}.$$

13.4 Неравенство Коши–Буняковского

Лемма 13.6 (Неравенство Коши–Буняковского). *Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на линейном пространстве X , тогда*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Доказательство. Рассмотрим скалярный квадрат: $\langle x+yt, x+yt \rangle \geq 0, t \in \mathbb{R}, x, y \in X$. Воспользуемся линейностью

$$0 \leq \langle x+yt, x+yt \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, yt \rangle + \langle yt, x \rangle + \langle yt, yt \rangle = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle$$

Если $\vec{y} = 0$, то просто подставим в исходное неравенство и получим $0 \leq 0$. Теперь пусть $\vec{y} \neq 0$. Чтобы неравенство $\langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle \geq 0$ выполнялось, необходимо, чтобы $D = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle y, y \rangle\langle x, x \rangle \leq 0$. Тогда

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle y, y \rangle\langle x, x \rangle$$

□

Следствие 13.7. На евклидовом пространстве функция $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ является нормой.

1. По свойству скалярного произведения $\|x\| = \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq (\text{нер-во Коши-Буняковского})$
 $\langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

13.5 Предел в метрическом пространстве

Определение 13.8. Пусть (X, d) метрическое пространство.

1. Множество

$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

называется открытым шаром радиуса r .

2. Последовательность точек $x_n \in X$ называется сходящейся к точке x , если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $d(x, x_n) < \varepsilon$ для каждого $n \geq N(\varepsilon)$.
3. Точка x называется предельной для множества $M \subset X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

4. Точка x называется изолированной для множества $M \subset X$, если $\exists \varepsilon > 0$, такое что $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) = \emptyset$.

Лемма 13.9. Пусть (X, d) метрическое пространство. Тогда

1. если $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, то $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$;

2. предел сходящейся последовательности единственен.

Доказательство. 1. Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| = |d(x_n, y_n) - d(x_n, y) + d(x_n, y) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| +$$

$$+ |d(x_n, y) - d(x, y)| \quad (*)$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, y) + d(y_n, y) \Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x_n, y) \leq d(y_n, y)$$

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y) \Rightarrow d(x_n, y) - d(x, y) \leq d(x_n, x)$$

$$(*) : |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)| \leq d(y_n, y) + d(x_n, x)$$

Т. к. $d(y_n, y) \rightarrow 0, d(x_n, x) \rightarrow 0$, то $d(y_n, y) + d(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

2. Пусть $x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow y$. По первому пункту $d(x_n, x_n) \rightarrow d(x, y)$. Т. к. $d(x_n, x_n) = 0$, то $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (по определению).

□

Лекция 35: Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Из второго пункта определения 13.8 получаем, что для $x_n \in \mathbb{R}^n$

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

13.6 Метрическое пространство

Замечание 13.10. На \mathbb{R}^k справедливы соотношения

$$\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j|$$

для векторов $x = (x_1, \dots, x_k)$. Тем самым, последовательность $x_n \rightarrow x$ в \mathbb{R}^k тогда и только тогда, когда $(x_n)_j \rightarrow x_j$.

Пояснение. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ (рассматриваем евклидово пространство, см. пример 13.5)

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| = \sqrt{0 + \dots + 0 + \max_{1 \leq j \leq n} x_j^2 + 0 + \dots + 0} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

Получили неравенство выше.

Пусть $x_n \rightarrow x (\Leftrightarrow x_n - x \rightarrow 0) \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$. Поэтому будем рассматривать пределы векторов, которые стремятся к нулевому вектору.

$$1. \forall j x_j \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0, \text{ т. к. } \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j|.$$

$$2. \forall j x \rightarrow 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x_j \rightarrow 0, \text{ т. к. } \max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq \|x\|.$$

Предложение 13.11. Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ и $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ в \mathbb{R} . Тогда $x_n + y_n \rightarrow x + y$ и $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha_0 x$ в X .

Доказательство. $\|x_n + y_n - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0 + 0 = 0$

$$\|\alpha_n x_n - \alpha_0 x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha_0 x\| \leq \|\alpha_n x_n - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha_0 x\| = |\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha_0| \cdot \|x\| \rightarrow |\alpha_0| \cdot 0 + 0 \cdot \|x\| = 0 \quad \square$$

13.7 Предел функции по Гейне

Определение 13.12 (предела функции по Гейне). Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) два метрических пространства, а - предельная точка множества X . Пусть $f : X \setminus \{a\} \rightarrow Y$. Говорят, что $A \in Y$ предел функции f при $x \rightarrow a$, если для каждой последовательности $x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$, выполнено $f(x_n) \rightarrow A$. Пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Предложение 13.13. *Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, то $A = B$.*

Доказательство. a - предельная точка $\Rightarrow \exists x_n \in X \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, f(x_n) \rightarrow B$ по определению предела функции по Гейне. Но $y_n = f(x_n)$ - последовательность векторов. А мы уже выяснили, что если у последовательности векторов есть предел, то он один (лемма 13.9). \square

13.8 Предел функции по Коши

Определение 13.14 (предела функции по Коши). *Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) два метрических пространства, a – предельная точка множества X . Пусть $f : X \setminus \{a\} \rightarrow Y$. Говорят, что $A \in Y$ предел функции f при $x \rightarrow a$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $d_Y(f(x), A) < \varepsilon$ для каждого такого $x \in X$, что $0 < d_X(x, a) < \delta$.*

13.9 Эквивалентность определений предела

Теорема 13.15. *Определения по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство.

$K \Rightarrow \Gamma$ Пусть $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ по Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(a) \rightarrow \|f(x) - A\| < \varepsilon$$

Пусть $x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \|x_n - a\| < \delta \Leftrightarrow x_n \in B'_\delta(a) \Rightarrow \forall n \geq N \rightarrow \|f(x_n) - A\| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A$

$\Gamma \Rightarrow K \Leftrightarrow \neg K \Rightarrow \neg \Gamma$

$$\neg K \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in B'_\delta(a) : \|f(x) - A\| \geq \varepsilon$$

Для каждого $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n \in B'_{\frac{1}{n}}(a) : \|f(x_n) - A\| \geq \varepsilon$

Но $x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$ и $f(x_n) \not\rightarrow A \Rightarrow \neg \Gamma$.

\square

13.10 Арифметические свойства предела

Теорема 13.16 (Арифметические свойства предела). *Пусть (X, d_X) метрическое пространство, a — предельная точка X . Пусть $f, g : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^k, \alpha : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B, \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \alpha_0$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B, \lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x)f(x)) = \alpha_0 A$.*

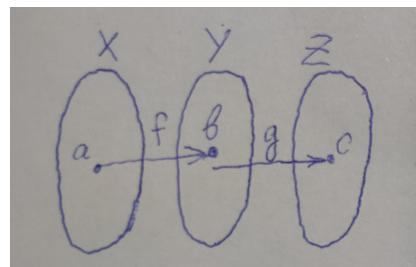
Доказательство. По определению предела функции по Гейне, если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$ выполнено $f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A + B$, т. к. $f(x_n), g(x_n)$ - векторы (см. предложение 13.11).

По определению предела функции по Гейне, если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$ выполнено $f(x_n) \rightarrow A, \alpha(x_n) \rightarrow \alpha_0 \Rightarrow \alpha(x_n)f(x_n) \rightarrow \alpha_0 A$, т. к. $f(x_n)$ - вектор (см. предложение 13.11). \square

13.11 Теорема о пределе сложной функции

Теорема 13.17 (О пределе сложной функции). *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, a — предельная точка X, b — предельная точка Y . Пусть $f : X \setminus \{a\} \rightarrow Y \setminus \{b\}$ и $g : Y \setminus \{b\} \rightarrow Z$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.*

Доказательство.



По определению предела функции по Гейне если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$ выполнено $f(x_n) \in Y \setminus \{b\}, f(x_n) \rightarrow b \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow c$. \square

Важно: исключение из множеств X и Y точек a и b в функции $f : X \setminus \{a\} \rightarrow Y \setminus \{b\}$ обязательно. Контрпример:

$$f(x) = 0 \quad \forall x, g(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 0, \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$.

13.12 Непрерывность функции

Определение 13.18. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) два метрических пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ или x_0 – изолированная точка.

Замечание 13.19. 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a , то для всякой последовательности $x_n \rightarrow a$ выполнено $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Это отличается от определения предела функции по Гейне тем, что не требуется брать x_n отличными от a .

2. То же верно и для определения предела по Коши в случае непрерывности: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, если $d_X(x, x_0) < \delta$.

Пояснение. 1. Если x_0 – изолированная точка, то любая последовательность, стремящаяся к x_0 , состоит только из точек $x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Пусть $\forall x_n (\neq x_0) \rightarrow x_0 f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. От противного: пусть $\exists x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$, т. е.

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0 \quad \forall N : \exists n \geq N \rightarrow \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow x_n \neq x_0 \text{ (т. к. } \varepsilon > 0) \Rightarrow \exists x_n (\neq x_0) \rightarrow x_0 \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon - \text{противоречие.} \end{aligned}$$

2. Если x_0 – изолированная, то найдётся такая δ -окрестность, что других точек в ней нет:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Если x_0 – предельная, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(x_0) \rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ – условие верно, т. к. оно строится.

В обратную сторону.

Если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ – верно, то изолированная точка x_0 подходит.

Теперь возьмём ту же δ что и в условии выше. Тогда для $x \neq x_0$ верно $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(x_0) \rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, а для $x = x_0 \|f(x) - f(x_0)\| = 0 < \varepsilon$ – тоже верно.

13.13 Непрерывность композиции

Предложение 13.20. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывна в точке $a \in X$, $g : Y \rightarrow Z$ непрерывна в точке $f(a) \in Y$. Тогда композиция $g \circ f : X \rightarrow Z$ непрерывна в точке a .

Доказательство. Если точка a - изолированная на множестве X , то тогда любая функция в ней непрерывна. Если она не изолированная, т. е. предельная, то рассмотрим предел в этой точке.

$f(x)$ - непрерывна в точке $a \Rightarrow \forall x_n \rightarrow a$ выполнено $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

$g(x)$ - непрерывна в точке $f(a) \Rightarrow \forall y_n \rightarrow f(a)$ выполнено $g(y_n) \rightarrow g(f(a))$

Тогда $\forall x_n \rightarrow a, f(x_n) \rightarrow f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$ (по теореме о пределе сложной функции). \square

Предложение 13.21. Пусть $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ - непрерывные в точке a функции. Тогда $f + g$ непрерывна в точке a . Если $m = 1$, то и $f \cdot g$ непрерывна в точке a .

Вообще здесь не очень удачная формулировка. Точнее будет сказать, что $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^m, X \subseteq \mathbb{R}^k$.

Доказательство. Если a - изолированная точка, то любая функция в ней непрерывна, в частности $f + g$.

В противном случае если a - предельная точка, то по теореме 13.16 предел суммы функций равен сумме пределов функций.

Если $m = 1$, то обе функции переводят вектор в скаляр.

Если a - изолированная точка, то любая функция в ней непрерывна, в частности $f \cdot g$. В случае предельной точки к множеству X пользуемся арифметическими свойствами предела (теорема 13.16). \square

Глава 14

Дифференцируемые функции нескольких переменных

Лекция 36: Дифференцируемость функций нескольких переменных

14.1 Дифференцируемое отображение

Определение 14.1. Отображение $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке x , если для каждого $h \in \mathbb{R}^k$

$$f(x + h) = f(x) + L(h) + \alpha(h)\|h\|,$$

где $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ - линейное отображение, $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = 0$.

Линейное отображение L называют дифференциалом f в точке x и обозначают df .

14.2 Непрерывность дифференцируемого отображения

Замечание 14.2. Напомним, что отображение $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется линейным, если

$$L(a_1h_1 + a_2h_2) = a_1Lh_1 + a_2Lh_2$$

для произвольных векторов $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^k$ и произвольных чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Если в \mathbb{R}^k фиксирован базис $e := \{e_1, \dots, e_k\}$, а в \mathbb{R}^m фиксирован базис $e' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$, то линейное отображение L представимо в виде $L(h) = L(e_1)h_1 + \dots + L(e_k)h_k$, где $h = (h_1, \dots, h_k)^T$ в базисе e , а векторы $L(e_j) = (a_{1,j}, \dots, a_{m,j})^T$ в базисе e' . В частности, каждое линейное отображение при фиксированных базисах e и e' в \mathbb{R}^k и в \mathbb{R}^m соответственно записывается с помощью матрицы $A = (a_{i,j})$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|Lh\| &= \|L(e_1)h_1 + \dots + L(e_k)h_k\| \leq (\|L(e_1)\| + \dots + \|L(e_k)\|) \max_{1 \leq j \leq k} |h_j| = C \max_{1 \leq j \leq k} |h_j| \leq \\ &\leq C\|h\| \end{aligned}$$

и каждое линейное отображение непрерывно на \mathbb{R}^k .

(Если $\|h\| \rightarrow 0$, то $\|Lh\| \rightarrow 0$. Но если линейное отображение непрерывно в 0, то оно непрерывно в любой точке, потому что при $g \rightarrow h$ $\|L(g) - L(h)\| = \|L(g - h)\| \rightarrow 0$)

Следствие 14.3. Если отображение $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке x , то оно непрерывно в точке x .

Доказательство. Пользуясь определением дифференцируемости, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|L(h) + \alpha(h)\| \|h\| \leq \|L(h)\| + \|\alpha(h)\| \|h\|$

$\|\alpha(h)\| \cdot \|h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и, как мы выяснили, $\|L(h)\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|f(x+h) - f(x)\| \rightarrow 0 \Rightarrow$ отображение непрерывно в точке x . \square

Замечание 14.4. Т.к. дифференцируемость f в точке x равносильна тому, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0$$

и т.к. сходимость по норме равносильна покоординатной сходимости (предложение 13.11), то при фиксированном базисе $e' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$ в \mathbb{R}^m дифференцируемость отображения f равносильно дифференцируемости каждой координаты f_j в точке x . В этом случае $Lh = (L_1h, \dots, L_mh)$ в базисе e' , где $L_j = df_j$ - дифференциал j -й координаты.

Доказательство.

$$L(h) = \begin{pmatrix} \frac{\|f_1(x+h) - f_1(x) - L_1(h)\|}{\|h\|} \\ \dots \\ \frac{\|f_m(x+h) - f_m(x) - L_m(h)\|}{\|h\|} \end{pmatrix}$$

Необходимо для дифференцируемости, чтобы этот столбец стремился к нулевому вектору. Но это верно в точности когда каждая координата стремится к нулю $\frac{\|f_i(x+h) - f_i(x) - L_i(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$. \square

14.3 Производная по направлению

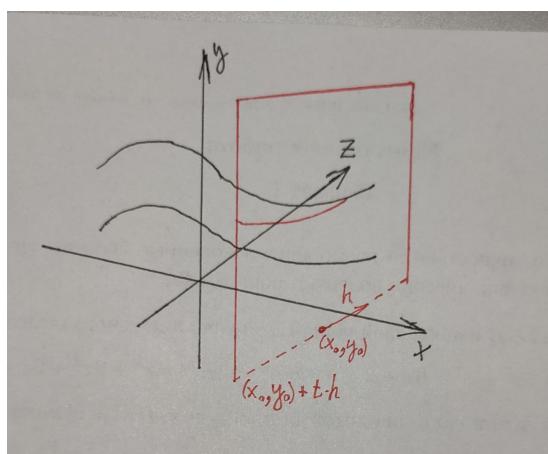
Лемма 14.5. Если отображение $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке x , то для каждого вектора $h \in \mathbb{R}^k$ (f, x, h фиксируем) функция $\varphi : t \mapsto f(x + th)$, $t \in \mathbb{R}$ дифференцируема в точке 0 и $\frac{d}{dt}f(x + th)\Big|_{t=0} = df(h)$. В частности, дифференциал определен единственным образом.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции в точках t и 0

$$\begin{aligned} f(x + th) - f(x) &= L(th) + \alpha(th)\|th\| \\ \frac{f(x + th) - f(x)}{t} &= \frac{tL(h) + t\alpha(th)\|h\|}{t} = L(h) + \alpha(th)\|h\| \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} L(h) + \alpha(th)\|h\| = \\ \varphi'(0) &= \frac{d}{dt}f(x + th)\Big|_{t=0} = L(h) = df(h) \end{aligned}$$

Причём на каждом векторе h мы однозначно знаем, чему равняется производная $df(h) = \frac{d}{dt}f(x + th)\Big|_{t=0}$, в одномерном случае мы знаем, что производная единственна. \square

Определение 14.6. Пусть $\|v\| = 1$. Производная $\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \frac{d}{dt}f(x + tv)\Big|_{t=0}$ называется производной по направлению вектора v .



Если мы зададим функцию в трёхмерном пространстве, то её график - это поверхность. Теперь если мы отметим точку (x_0, y_0) и направление h единичной длины (важно, иначе функция в сечении растянется или сожмётся), то $(x_0, y_0) + th$ заметает всю прямую. Тогда если мы посмотрим на значения функции в этих точках прямой, то мы сделаем сечение этой функции. Получим знакомую функцию в двумерной системе координат, у которой мы уже умеем находить производную.

Пример 14.7. Пусть

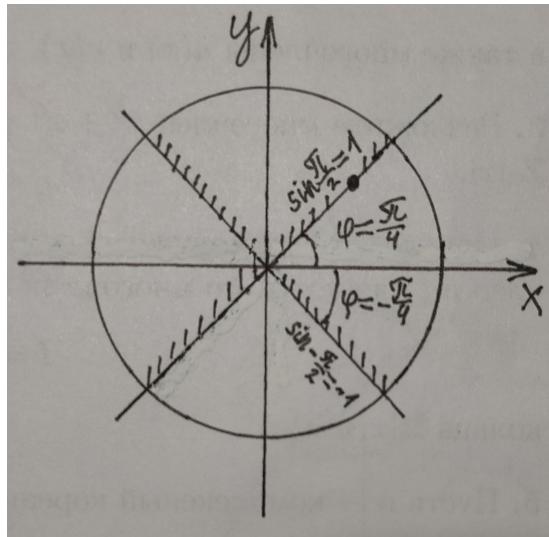
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Функция f разрывна в нуле, а значит не дифференцируема, но в точке $(0, 0)$ существуют обе частных производных. Действительно, если $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, то функция $f(x, y) = \sin 2\varphi$. Таким образом, $f(x, y)$ в любой окрестности точки $(0, 0)$ принимает значения ± 1 , но $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{d}{dx}(x, 0) = 0$. Аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Пояснение.

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, f(x, y) = \frac{2r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \sin 2\varphi$$

Значит значение функции в полярной системе координат не зависит от $r \Rightarrow$ в любой окрестности точки $(0, 0) \exists \varphi$, в котором $f(x, y)$ принимает значения ± 1 , поэтому функция не непрерывна в нуле, тем более не дифференцируема (следствие 14.3).



Производная вдоль x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

Аналогично производная вдоль y равна 0.

14.4 Частная производная

Определение 14.8. Частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ функции $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x = (x_1, \dots, x_k)$ называется производная по направлению вектора e_j , т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \left. \frac{d}{dt} f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_k) \right|_{t=x_j}.$$

Пояснение. По определению производной по направлению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \left. \frac{d}{dt} \left(f(x + te_j) \right) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k)}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dy} f(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_k) \right|_{y=t+x_j} \end{aligned}$$

14.5 Градиент

Замечание 14.9. При фиксированном базисе $e = \{e_1, \dots, e_k\}$ в \mathbb{R}^k линейные функционалы dx_1, \dots, dx_n оказываются сопряженным базисом к e , т.е. $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Таким образом,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

Пояснение. $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$

(e_1, \dots, e_k) – фиксируем базис.

$x_1 = \xi(x) = \xi(x_1, \dots, x_k)$

$dx_1 = d\xi$

$\xi(x + h) - \xi(x) = x_1 + h_1 - x_1 = h_1 = d\xi(h) + \alpha(h)||h||$

Применим df к $h = h_1 e_1 + \dots + h_k e_k$ и воспользуемся линейностью.

$$df(h) = df(e_1)h_1 + df(e_2)h_2 + \dots + df(e_k)h_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}h_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k(h)$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

Определение 14.10. Градиентом функции f называется вектор $\nabla f := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$.

14.6 Свойства градиента

Предложение 14.11. *Производная по направлению вектора v равна*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

Доказательство. Из замечания 14.9

$$\frac{\partial f}{\partial v} = df(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1}v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}v_k \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

□

Лемма 14.12. *Если f дифференцируема в точке x и $df \neq 0$, то наибольшее значение производной вдоль единичного вектора v (т.е. $\|v\| = 1$) достигается на векторе $\|\nabla f(x)\|^{-1}\nabla f(x)$.*

Доказательство. По неравенству Коши-Буняковского

$$|\langle \nabla f, v \rangle|^2 \leq \|\nabla f\| \|v\|$$

Максимум достигается при равенстве, то есть при $v = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$

□

Лекция 37: Частные производные высокого порядка

14.7 Множество уровня

Определение 14.13. Множеством уровня называется

$$\gamma(h) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) = h\}.$$

Предложение 14.14. Градиент функции φ в точке \vec{x}^0 перпендикулярен её множеству уровня, проходящей через эту точку.

Пока без доказательства

14.8 Матрица Якоби

Замечание 14.15. В случае отображения $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ при фиксированных базисах e и e' в \mathbb{R}^k и e в \mathbb{R}^m соответственно, компоненты матрицы дифференциала df имеют $a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, т.е. по строкам написаны градиенты $\nabla f_i(x)$.

Определение 14.16. При фиксированных базисах e в \mathbb{R}^k и e' в \mathbb{R}^m матрицу, соответствующую линейному отображению df , называют матрицей Якоби отображения f в точке x и обозначают $J_f(x)$.

14.9 Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 14.17. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в этой точке, то f — дифференцируема в точке x_0 .

Доказательство. Индукция по числу переменных.

$k = 1$. У функции от одной переменной одна частная производная и она равна производной.

Пусть утверждение верно для некоторого k , докажем для $k + 1$.

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$$

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, \dots, a_{k+1} + h_{k+1}) - f(a) &= f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + h_{k+1}) - \\ &\quad - f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}) + f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}) - f(a) \end{aligned}$$

Пусть

$$\sigma = f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + h_{k+1}) - f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1})$$

$$\rho = f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}) - f(a)$$

Считаем, что функция ρ от k переменных и применяем предположение индукции. Расписываем определение дифференцируемости и формулы дифференциала через частные производные:

$$\rho = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k + \alpha(h)\|h\| - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k + o(\|h\|)$$

(Важные моменты: $f(a+h) \rightarrow f(a)$ при $h \rightarrow 0$; у h всего $k+1$ координат, поэтому если $h \rightarrow 0$, то его первые k координат тоже стремятся к нулю)

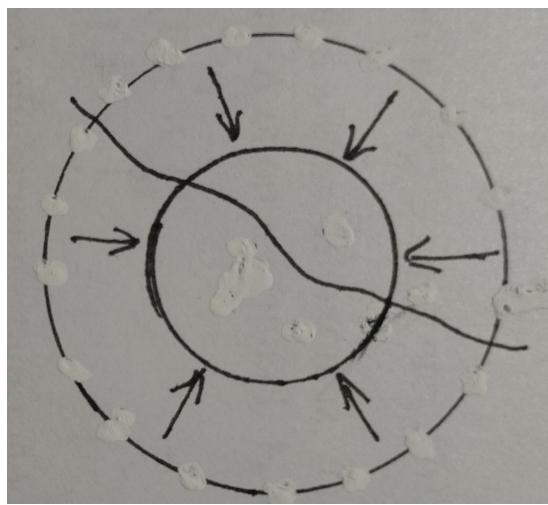
По теореме Лангранжа $\exists \xi : 0 < \xi < h_{k+1}$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + \xi)h_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1} - \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + \xi)h_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1} + \left(-\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + \xi) \right)h_{k+1} \end{aligned}$$

Пользуясь непрерывностью частных производных и тем, что $h_i \rightarrow 0$, $0 < \xi < h_{k+1}$, получаем, что

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + \xi) \right) &= \alpha(h) \\ \alpha(h)\|h\| = o(\|h\|) \Rightarrow \rho + \sigma &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a) + o(\|h\|) \end{aligned}$$

Хочется заметить, что когда мы используем теорему Лангранжа необходимо, чтобы функция не только была дифференцируема, но и непрерывна на каком-то отрезке. Наша функция дифференцируема в некоторой окрестности точки a , поэтому можно взять точки h_k , которые лежат внутри этой окрестности. Для того, чтобы добиться непрерывности в каждой точке, возьмём окрестность поменьше (с включённой границей), так, чтобы эти точки h_k остались всё ещё в окрестности.



□

14.10 Частные производные высокого порядка

Определение 14.18. Пусть $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ и предположим, что в некоторой окрестности $B_r(x_0)$ точки x_0 существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Если функция $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}$ в точке x_0 имеет частную производную по переменной x_i , то эта частная производная $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x_0)$ называется частной производной второго порядка по переменным x_j и x_i и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

Частная производная порядка k определяется рекурсивно:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right).$$

Замечание 14.19. Частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, вообще говоря, могут не совпадать!

14.11 Теорема Шварца

Теорема 14.20 (Шварц). Пусть смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в этой точке. Тогда их значения в точке (x_0, y_0) совпадают.

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t, s) = f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + s) + f(x_0, y_0)$$

Пусть

$$\psi(\tau) = f(x_0 + \tau, y_0 + s) - f(x_0 + \tau, y_0)$$

По теореме Лагранжа $\exists c : 0 < c < t$

$$F(t, s) = \psi(t) - \psi(0) = \psi'(c) \cdot t$$

$$\begin{aligned} \psi'(c) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c, y_0 + s) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c, y_0) \\ \varphi(u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c, y_0 + u) \end{aligned}$$

По теореме Лагранжа $\exists d : 0 < d < s$

$$\psi'(c) = \varphi(s) - \varphi(0) = \varphi'(d) \cdot s$$

$$\varphi'(d) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c, y_0 + d), 0 < d < s, 0 < c < t$$

Для всех t и s из достаточно малой окрестности 0

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c, y_0 + d) \cdot t \cdot s, 0 < d < s, 0 < c < t$$

Если перегруппировать слагаемые иначе, получим

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \tilde{c}, y_0 + \tilde{d}) \cdot t \cdot s, 0 < \tilde{d} < s, 0 < \tilde{c} < t$$

следовательно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \tilde{c}, y_0 + \tilde{d}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c, y_0 + d) \\ t \rightarrow 0 &\Rightarrow c \rightarrow 0, \tilde{c} \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0 &\Rightarrow d \rightarrow 0, \tilde{d} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

В силу непрерывности смешанных производных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

□

14.12 Теорема Юнга

Теорема 14.21 (Юнг). *Пусть f - дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) , а её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) . Тогда смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в точке (x_0, y_0) совпадают.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Рассмотрим функцию

$$F(t, t) = f(t, t) - f(0, t) - f(t, 0) + f(0, 0).$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $g(u) = f(t, u) - f(0, u)$, получаем

$$F(t, t) = g(t) - g(0) = g'(\xi)t = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, \xi) \right)t.$$

Дифференцируемость $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(0, 0)$ означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\xi + o(\sqrt{t^2 + \xi^2}).$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, \xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\xi + o(\xi).$$

Т. к. $0 \leq \xi \leq t$, то $o(\sqrt{t^2 + \xi^2}) = o(t)$ (т. к. $\sqrt{t^2 + \xi^2} \leq \sqrt{2}t$) и $o(\xi) = o(t)$. Таким образом,

$$F(t, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)t^2 + o(t^2).$$

Аналогично, обозначив $g(u) = f(u, t) - f(u, 0)$, получим

$$F(t, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)t^2 + o(t^2).$$

Приняв полученные выражения, поделив на t^2 и устремив t к нулю, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

□

Замечание 14.22. Условия теорем Юнга и Шварца не следуют друг из друга.

14.13 Дифференцируемость $(m + 1)$ раз

Определение 14.23. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки a . Говорят, что f дважды дифференцируема в точке a , если все её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ дифференцируемы в точке a .

Пусть f - m раз дифференцируема в окрестности точки a . Говорят, что f дифференцируема $(m + 1)$ раз в точке a , если все частные производные m -того порядка $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$ дифференцируемы в точке a .

Следствие 14.24. Если f - m раз дифференцируема в точке a , то значения производных порядка m $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(a)$ не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. База индукции для $m = 2$: теорема Юнга.

Переход: рассмотрим производную порядка $m + 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_{m+1}}} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \dots \partial x_{k_1}} \right)$$

По предположению индукции внутри скобок можно дифференцировать в любом порядке. Поскольку функция $\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \dots \partial x_{k_1}}$ дифференцируема, то по теореме Юнга мы можем переставлять частную производную по переменной $x_{k_{m+1}}$ в любое место. □

Лекция 38: Правила дифференцирования

14.14 Дифференциалы высоких порядков

Предположим, что $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ - дифференцируема в окрестности точки a и предположим, что ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ дифференцируемы в точке a . Тогда при каждом $h \in \mathbb{R}^k$ возникает функция $x \mapsto df|_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)h_k$, дифференцируема в точке a . Ее дифференциал

$$d(df(h))|_a(q) = \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(a)q_j \right)h_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)q_j \right)h_k.$$

Т.е. получена билинейная форма $d(df(h))|_a(q) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)q_j h_i$. Эта билинейная форма оказывается симметричной по теореме Юнга, а т.к. симметричная билинейная форма однозначно задается своей квадратичной формой

$$d(df(h))|_a(h) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)h_j h_i = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)dx_j(h)dx_i(h),$$

то эту квадратичную форму $d^2 f := \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)dx_j dx_i$ и называют вторым дифференциалом функции f .

Определение 14.25. Если f – n раз дифференцируема в точке a , то

$$d^n f|_a := \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq k ???} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}}(a) dx_{j_1} \dots dx_{j_n}.$$

Последняя запись означает лишь то, что при вычислении n -го дифференциала на векторе $h \in \mathbb{R}^k$ надо воспользоваться линейностью, а

$$[dx_{j_1} \dots dx_{j_n}](h) := dx_{j_1}(h) \dots dx_{j_n}(h) = h_{j_1} \dots h_{j_n}.$$

14.15 Правила дифференцирования

Теорема 14.26. Пусть функции $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы в некоторой точке x . Тогда, для произвольных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, функции $af + bg$ и fg дифференцируемы в точке x и $d(af + bg) = adf + bdg$ и $d(fg) = fdg + gdf$.

Доказательство. $\alpha(h), \beta(h), \gamma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$

1. Здесь доказываем в общем случае, т. е. для функций $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$f(x + h) - f(x) = df|_x(h) + \alpha(h)||h||$$

$$g(x + h) - g(x) = dg|_x(h) + \beta(h)||h||$$

$$\begin{aligned} (af + bg)(x + h) - (af + bg)(x) &= af(x + h) + bg(x + h) - af(x) - bg(x) = \\ &= a(df|_x(h) + \alpha(h)||h||) + b(dg|_x(h) + \beta(h)||h||) = a \cdot df(h) + b \cdot dg(h) + (\alpha(h) + \beta(h))||h|| = \\ &= a \cdot df(h) + b \cdot dg(h) + \gamma(h)||h|| \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} fg(x + h) - fg(x) &= f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x) = f(x + h)g(x + h) - f(x + h)g(x) + \\ &+ f(x + h)g(x) - f(x)g(x) = f(x + h)(g(x + h) - g(x)) + g(x)(f(x + h) - f(x)) = \\ &= f(x + h)(dg|_x(h) + \beta(h)||h||) + g(x)(df|_x(h) + \alpha(h)||h||) = (*) \end{aligned}$$

Функция f дифференцируема \Rightarrow непрерывна в точке x и $h \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (*) &= (f(x) + o(1))(dg|_x(h) + \beta(h)||h||) + g(x)(df|_x(h) + \alpha(h)||h||) = f(x)dg|_x(h) + \\ &+ f(x)\beta(h)||h|| + o(1)dg|_x(h) + o(1)\beta(h)||h|| + g(x)df|_x(h) + g(x)\alpha(h)||h|| = \\ &= f(x)dg|_x(h) + g(x)df|_x(h) + \gamma(h)||h||. \end{aligned}$$

$f(x)$ и $g(x)$ - константы $\Rightarrow f(x)\beta(h)||h|| = \gamma(h)||h||$ и $g(x)\alpha(h)||h|| = \gamma(h)||h||$

$||dg|_x(h)|| \leq C||h||$ (см. конец замечания 14.2) $\Rightarrow o(1)dg|_x(h) = \gamma(h)||h||$

$o(1)\beta(h)||h|| = \gamma(h)||h||$

□

14.16 Дифференцирование сложной функции

Теорема 14.27. Пусть $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, причем отображение f дифференцируемо в точке a , отображение g дифференцируемо в точке $f(a)$. Тогда отображение $g \circ f$ дифференцируемо в точке a и $d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$.

Доказательство. $h \in \mathbb{R}^k, q \in \mathbb{R}^m$

$$f(a + h) = f(a) + df|_a(h) + \alpha(h)||h||$$

$$g(f(a) + q) = g(f(a)) + dg|_{f(a)}(q) + \beta(q)||q||$$

$$g(f(a + h)) - g(f(a)) = g(f(a) + (f(a + h) - f(a))) - g(f(a)) = (*)$$

Функция f - дифференцируема \Rightarrow непрерывна \Rightarrow при $h \rightarrow 0$, $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0 \Rightarrow q \rightarrow 0$, поэтому

$$\begin{aligned} (*) &= g(f(a)) + dg|_{f(a)}(f(a+h) - f(a)) + \beta(f(a+h) - f(a))\|f(a+h) - f(a)\| - g(f(a)) = \\ &= dg|_{f(a)}(df|_a(h) + \alpha(h)\|h\|) + \gamma(h)\|h\| = (**) \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\gamma(h) = \beta(f(a+h) - f(a)) \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|},$$

где $\gamma(h)$ - бесконечно малая функция. Функция f - дифференцируема \Rightarrow непрерывна \Rightarrow при $h \rightarrow 0$, $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} &= \|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\| \leqslant (\text{неравенство треугольника}) \\ &\leqslant \|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\| + \|\alpha(h)\| \end{aligned}$$

По замечанию 14.2 $\|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\| \leqslant C\|\frac{h}{\|h\|}\| = C$

Далее продолжаем преобразования

$$(**) = dg|_{f(a)} \circ df|_a(h) + \|h\|dg|_{f(a)}(\alpha(h)) + \gamma(h)\|h\| = (***)$$

По замечанию 14.2 $\|h\|dg|_{f(a)}(\alpha(h)) \leqslant \|h\|C\|\alpha(h)\| \rightarrow 0$

$$(***) = dg|_{f(a)} \circ df|_a(h) + \gamma_2(h)\|h\|$$

$dg|_{f(a)} \circ df|_a(h)$ означают композицию двух линейных отображений. \square

Замечание 14.28. Поясним запись $d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$. Здесь $df|_a : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть линейное отображение и $dg|_{f(z)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение. Тогда их композиция $dg|_{f(a)} \circ df|_a : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение, действующее по правилу $dg|_{f(a)} \circ df|_a(h) = dg|_{f(a)}(df|_a(h))$.

Замечание 14.29. Матрица Якоби композиции функций $g \circ f$ в точке a равняется произведению матриц Якоби отображения f в точке a и отображения g в точке $f(a)$. В частности, при $n = 1$, для функции $g(x_1, \dots, x_m)$ и отображения

$$f(y_1, \dots, y_k) = (f_1(y_1, \dots, y_k), \dots, f_m(y_1, \dots, y_k)),$$

во-первых, выполнено:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(a)) \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(a) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(a)) \frac{\partial f_m}{\partial y_j}(a).$$

Во-вторых, выполнено так называемое свойство инвариантности 1-го дифференциала: $dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m}dx_m$, где нам не важно, являются ли dx_1, \dots, dx_m - дифференциалами независимых переменных или же являются дифференциалами некоторых функций $x_j = f_j(y_1, \dots, y_k)$.

Пояснение. 1. При композиции линейных отображений их матрицы перехода перемножаются. Для каждой функции такие матрицы будут иметь вид

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}, J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial f_1} & \frac{\partial g}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial g}{\partial f_m} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица перехода композиции функций будет равна $J_g J_f$.

2. С одной стороны,

$$dg = \frac{\partial g}{\partial f_1} df_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial f_m} df_m$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} dg(f) &= \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_k} dx_k = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx_i = \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial g}{\partial f_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_j} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f_j}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_j} df_j \end{aligned}$$

Пример 14.30. Пусть $f(x, y) = \varphi(u, v, w)$, где $u = xy, v = x + y, w = x - y$. Тогда

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w} dw = \frac{\partial \varphi}{\partial u} d(xy) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d(x+y) + \frac{\partial \varphi}{\partial w} d(x-y) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial u} (xdy + ydx) + \frac{\partial \varphi}{\partial v} (dx + dy) + \frac{\partial \varphi}{\partial w} (dx - dy). \end{aligned}$$

В частности, $\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial w}$.

14.17 Дифференциал обратного отображения

Теорема 14.31. Пусть $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ - есть непрерывная биекция между окрестностями $U(a)$ и $V(f(a))$, причем обратное отображение $f^{-1} : V(f(a)) \rightarrow U(a)$ также непрерывно (т. е. f - гомеоморфизм между $U(a)$ и $V(f(a))$). Предположим, что f - дифференцируемо в точке a и df - обратимое линейное отображение. Тогда f^{-1} - дифференцируемо в точке $f(a)$ и $df^{-1}|_{f(a)} = (df|_a)^{-1}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что такой предел равен 0.

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\|f^{-1}(f(a) + q) - f^{-1}(f(a)) - (df|_a)^{-1}(q)\|}{\|q\|}$$

$$h = f^{-1}(f(a) + q) - f^{-1}(f(a)), h \rightarrow 0 \Leftrightarrow q \rightarrow 0$$

$$h = f^{-1}(f(a) + q) - a \Rightarrow q = f(a + h) - f(a)$$

f дифференцируемо в точке a , поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h - (df|_a)^{-1}(f(a + h) - f(a))\|}{\|f(a + h) - f(a)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h - (df|_a)^{-1}(df|_a(h) + \alpha(h)\|h\|)\|}{\|f(a + h) - f(a)\|} =$$

Пользуемся линейностью дифференциала и тем, что по замечанию 14.2 $(df|_a)^{-1}(\alpha(h)) \leq C\|\alpha(h)\|$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(h)\| \cdot \|h\|}{\|df(h) + \alpha(h)\| \|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(h)\|}{\|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\|}$$

Теперь отдельно оценим знаменатель. p - вектор \Rightarrow по замечанию 14.2

$$\|(df)^{-1}(p)\| \leq C\|p\|$$

Пусть $p = df(h)$.

$$\begin{aligned} \|(df)^{-1}(df(h))\| &\leq C\|df(h)\| \\ \|h\|C_2 &\leq \|df(h)\| \end{aligned}$$

Таким образом, применяя неравенство треугольника,

$$\|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\| \geq \|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\| - \|\alpha(h)\| \geq C - \|\alpha(h)\| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(h)\|}{\|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\|} = 0$$

□

Глава 15

Экстремумы функций многих переменных

Лекция 39: Формула Тейлора и экстремум

15.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 15.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема $m + 1$ раз на отрезке $[a, x]$, то*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x - a)^m + \frac{1}{m!} \int_a^x (x - t)^m f^{(m+1)}(t) dt$$

Доказательство. База: $m = 0$.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$$

Переход:

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{1}{m!} \int_a^x (x - t)^m f^{(m+1)}(t) dt = -\frac{1}{(m+1)!} \int_a^x f^{(m+1)}(t) d(x-t)^{m+1} = \\ &= -\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(t) \Big|_a^x + \frac{1}{(m+1)!} \int_a^x (x-t)^{m+1} f^{(m+2)}(t) dt = \\ &= \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a) + R_{m+1} \end{aligned}$$

□

Следствие 15.2. Справедливо следующее равенство:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство.

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{1}{m!} \int_0^x (x-t)^m e^t dt \right| = (*)$$

Пользуемся следующей оценкой

$$\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| (b-a)$$

При $x \geq 1$

$$(*) \leq \left| \frac{x^{m+1} e^x}{m!} \right| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ и фиксированном } x$$

При $x < 1$

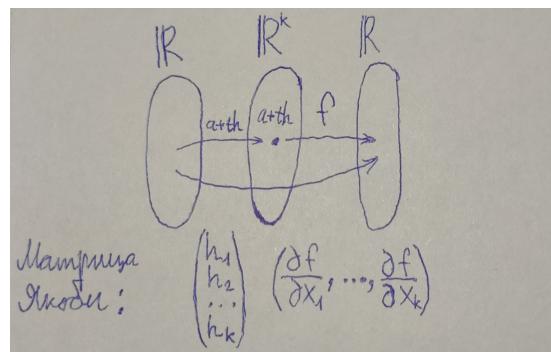
$$(*) \leq \left| \frac{e^x}{m!} \right| \rightarrow 0$$

□

15.2 Формула Тейлора

Лемма 15.3. Пусть функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ m раз дифференцируема в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) := f(a + th)$. Тогда φ m раз дифференцируема в окрестности точки нуль и $\varphi^{(m)}(t) = d^m f|_{a+th}(h)$.

Доказательство. База индукции: $m = 1$.



$$\varphi'(t) = f'(a+th) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a+th)h_k =$$

$$df \Big|_{a+th}(h)$$

Переход:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(m+1)}(t) &= (\varphi^{(m)}(t))' = (d^m f|_{a+th}(h))'_t = \left(\sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} h_{j_1} \dots h_{j_m} \right)'_t = \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} h_{j_1} \dots h_{j_m} \right) = \sum_{j_1, \dots, j_m} \sum_{i=1}^k \frac{\partial^{m+1} f(a+th)}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} h_{j_1} \dots h_{j_m} h_i = \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_{m+1}} \frac{\partial^{m+1} f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}} h_{j_1} \dots h_{j_{m+1}} = d^{m+1} f|_{a+th}(h)
 \end{aligned}$$

□

Теорема 15.4. Пусть функция $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ m раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки a . Тогда справедлива следующая формула Тейлора:

$$f(a+h) = f(a) + df|_a(h) + \frac{1}{2!} d^2 f|_a(h) + \dots + \frac{1}{m!} df^{(m)}|_a(h) + o(\|h\|^m).$$

Доказательство. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(a+th)$

$$\begin{aligned}
 \varphi(1) &= \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t) dt = \\
 &\quad (\text{по лемме 15.3}) = f(a) + \frac{df|_a(h)}{1!} + \dots + \frac{d^{m-1} f|_a(h)}{(m-1)!} + \frac{d^m f|_a(h)}{m!} + R_m \\
 R_m &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t) dt - \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t) dt - \\
 &\quad - \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(0) dt = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} (\varphi^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(0)) dt \\
 &\quad \frac{|R_m|}{\|h\|^m} \leqslant \frac{\sup |\varphi^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(0)|}{\|h\|^m m!} = \\
 &= \sup \left| \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} h_1 \dots h_m - \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} h_1 \dots h_m \right| \frac{1}{\|h\|^m \cdot m!} = (*) \\
 &\quad \forall k |h_{j_k}| \leqslant \|h\| \Rightarrow \frac{|h_{j_1} \dots h_{j_m}|}{\|h\|^m} \frac{1}{m!} \leqslant \frac{1}{m!}
 \end{aligned}$$

m -я производная функции непрерывна \Rightarrow

$$\Rightarrow \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

Значит $(*) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{|R_m|}{\|h\|^m} \rightarrow 0 \Rightarrow R_m = o(\|h\|^m)$

□

15.3 Точка локального экстремума

Определение 15.5. Пусть функция $u = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 . Тогда x_0 называют точкой

- локального максимума функции, если для всех точек $x \in U(x_0)$ верно неравенство $f(x) \leq f(x_0)$;
- строгого локального максимума функции, если для всех точек $x \in U(x_0)$ верно неравенство $f(x) < f(x_0)$;
- локального минимума функции, если для всех точек $x \in U(x_0)$ верно неравенство $f(x) \geq f(x_0)$;
- строгого локального минимума функции, если для всех точек $x \in U(x_0)$ верно неравенство $f(x) > f(x_0)$;
- локального экстремума функции, если она входит в одну из перечисленных выше категорий.

15.4 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 15.6 (Необходимое условие локального экстремума). Пусть a - точка локального экстремума функции f и предположим, что f дифференцируема в точке a . Тогда $df|_a = 0$ (или, что тоже самое, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0 \forall j$).

Доказательство. Пусть a - точка максимума \Rightarrow при фиксированном h и $t \neq 0$ $\varphi(0) = f(a) > f(a + ht) = \varphi(t)$.

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$ необходимое условие $\varphi'(0) = 0 = df|_a(h) \forall h$ по лемме 15.3 $\Rightarrow df|_a = 0$. \square

Определение 15.7. Точки, в которых все частные производные равны нулю, называются стационарными.

15.5 Достаточное условие локального экстремума

Теорема 15.8 (Достаточное условие локального экстремума). Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки a и предположим, что в точке a выполнено необходимое условие локального экстремума: $df|_a(h) = 0 \forall h$. Тогда

1. если $d^2f|_a(h) > 0 \forall h \neq 0$, то a - точка строгого локального минимума;

2. если $d^2 f|_a(h) < 0 \forall h \neq 0$, то a - точка строгого локального максимума.

Доказательство. Докажем первый пункт, второй доказывается аналогично. По теореме 15.4

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= df|_a(h) + \frac{d^2 f|_a}{2}(h) + o(\|h\|^2) = \frac{d^2 f|_a}{2}(h) + o(\|h\|^2) = \\ &= \|h\|^2 \left(\frac{d^2 f|_a \left(\frac{h}{\|h\|} \right)}{2} + o(1) \right) = (*) \end{aligned}$$

$d^2 f|_a \left(\frac{h}{\|h\|} \right)$ - симметричная билинейная форма.

Заметим, что квадратичная функция $d^2 f|_a(q) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) q_i q_j$ является симметричной квадратичной формой, и как функция аргумента q достигает свое минимальное значение на единичной сфере $\{h: \|q\| = 1\}$. Действительно, симметричная квадратичная форма B ортогональными преобразованиями S приводится к диагональному виду D , поэтому

$$\min_{\|u\|=1} u^T B u = \min_{\|u\|=1} u^T S^T D S u = \min_{\|v\|=1} v^T D v = m,$$

где m - минимальный элемент на диагонали матрицы D .

Поэтому непрерывная функция $d^2 f|_a(q)$ достигает на сфере своего минимума:

$$\min_{\|q\|=1} d^2 f|_a(q) = m = d^2 f|_a(q_0) > 0.$$

Тогда

$$(*) \geq \|h\|^2 \left(\frac{m}{2} + o(1) \right) \Rightarrow \forall h \in B_\delta(a) \|h\|^2 \left(\frac{m}{2} + o(1) \right) \geq \|h\|^2 \frac{m}{4} > 0.$$

□

15.6 Критерий Сильвестра

Замечание 15.9. Отметим, что $d^2 f|_a(h)$ – это квадратичная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Условие теоремы выше подразумевает её положительную или отрицательную определенность, что позволяет применить критерий Сильвестра:

1. все угловые миноры матрицы квадратичной формы $d^2 f|_a$ положительно $\Leftrightarrow d^2 f|_a$ - положительно определена (т.е. $d^2 f|_a(h) > 0$ при каждом $h \neq 0$);
2. угловые миноры матрицы квадратичной формы $d^2 f|_a$ начинаются с отрицательного, а затем чередуют знаки $\Leftrightarrow d^2 f|_a$ - отрицательно определена (т.е. $d^2 f|_a(h) < 0$ при каждом $h \neq 0$).

15.7 Теорема о неявной функции

Для сокращения всех записей будем использовать обозначение $F'_y(x, y) := \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

Теорема 15.10. Пусть $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ - определена и непрерывно дифференцируема (т.е. частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности U точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Пусть 1) $F(a, b) = 0$ и 2) $F'_y(a, b) \neq 0$. Тогда найдутся промежутки $I_x = (a - \alpha, a + \alpha)$ и $I_y = (b - \beta, b + \beta)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f : I_x \rightarrow I_y$, для которых $I_x \times I_y \subset U$ и для каждой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$ выполнено $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$. Кроме того, $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Доказательство. □

Теорема 15.11. Пусть $F : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ - определена и непрерывно дифференцируема (т.е. частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности U точки $(a, b) = (a_1, \dots, a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Пусть 1) $F(a, b) = 0$ и 2) $F'_y(a, b) \neq 0$. Тогда найдутся $I_x = (a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1) \times \dots \times (a_k - \alpha_k, a_k + \alpha_k)$ и $I_y = (b - \beta, b + \beta)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f : I_x \rightarrow I_y$, для которых $I_x \times I_y \subset U$ и для каждой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$ выполнено $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$. Кроме того, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{F'_{x_j}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

15.8 Теорема о неявном отображении

Теорема 15.12. Пусть отображение $F : \mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ - определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности U точки $(a, b) = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{k+n}$. Пусть 1) $F(a, b) = 0$ и 2) матрица

$$F'_y(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(a, b) \end{pmatrix} - \text{обратима.}$$

Тогда найдутся $I_x = (a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1) \times \dots \times (a_k - \alpha_k, a_k + \alpha_k)$ и $I_y = (b_1 - \beta_1, b_1 + \beta_1) \times \dots \times (b_n - \beta_n, b_n + \beta_n)$ и непрерывно дифференцируемое отображение $f =$

$(f_1, \dots, f_n) : I_x \rightarrow I_y$, для которых $I_x \times I_y \subset U$ и для каждой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$ выполнено

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$