

Конспект лекций по математическому анализу 2023/2024

Корчагин Егор

14 июня 2024 г.

Оглавление

1 Вещественные числа	4
2 Предел последовательности	5
3 Предел функции	6
4 Непрерывные функции	7
5 Производная	8
6 Исследование функций с помощью производных	9
6.1 Необходимое условие экстремума	9
6.2 Достаточное условие экстремума	9
6.3 Выпуклость и вогнутость	10
6.4 Неравенство Йенсена	13
6.5 Асимптоты	14
7 Первообразная и неопределенный интеграл	15
7.1 Первообразная	15
7.2 Таблица первообразных	16
7.3 Свойства неопределенного интеграла	16
8 Интеграл от рациональной функции	19
8.1 Рациональная функция	19
8.2 Разложение многочлена на неприводимые	20
8.3 Правильная дробь	20
8.4 Элементарная дробь	20
8.5 Разложение дроби на элементарные	20
8.6 Интегрирование рациональных функций	21
8.7 Метод Остроградского	22
8.8 Рациональные функции от \cos и \sin	24
9 Определенный интеграл	26
9.1 Определенный интеграл как площадь	26
9.2 Интеграл Римана	27
10 Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций	30
10.1 Суммы и интегралы Дарбу	30
10.2 Критерий Дарбу	31

10.3 Колебание функции	35
10.4 Интегрируемость модуля, квадрата и произведения функций	37
10.5 Интегрируемость монотонной функции	38
10.6 Равномерная непрерывность	39
10.7 Интегрируемость непрерывной функции	40
10.8 Аддитивность интеграла	40
10.9 Формула Ньютона–Лейбница	42
10.10 Существование первообразной	43
10.11 Формула интегрирования по частям	44
11 Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций	46
11.1 Формула интегрирования подстановкой	46
11.2 Мера Жордана (дополнительный материал)	47
11.3 Несобственный интеграл Римана	47
11.4 Свойства несобственного интеграла	48
11.5 Формула интегрирования подстановкой	49
11.6 Формула интегрирования по частям	50
11.7 Критерий Коши	51
11.8 Абсолютная сходимость	51
11.9 Условная сходимость	52
11.10 Несобственный интеграл от знакопостоянной функции	53
11.11 Первый признак сравнения	53
11.12 Эквивалентность в смысле сходимости интегралов	54
11.13 Второй признак сравнения	55
11.14 Первый признак сравнения	55
11.15 Второй признак сравнения	56
11.16 Интегральный признак	57
11.17 Признак Даламбера	58
11.18 Радикальный признак Коши	59
11.19 Признак Гаусса	61
11.20 Признак Дирихле	63
11.21 Признак Абеля	64
11.22 Признак Лейбница	65
11.23 Теоремы о среднем	65
11.24 Признак Дирихле	68
11.25 Признак Абеля	70
12 Некоторые приложения интеграла	71
12.1 Вычисление площади плоских тел	71
12.2 Площадь в полярной системе координат	72
12.3 Объем тел вращения	75
12.4 Длина кривой	78
13 Предел функции нескольких переменных	80
13.1 Метрическое пространство	80
13.2 Нормированное пространство	80
13.3 Евклидово пространство	81
13.4 Неравенство Коши–Буняковского	81

13.5 Предел в метрическом пространстве	82
13.6 Метрическое пространство	84
13.7 Предел функции по Гейне	84
13.8 Предел функции по Коши	85
13.9 Эквивалентность определений предела	85
13.10 Арифметические свойства предела	86
13.11 Теорема о пределе сложной функции	86
13.12 Непрерывность функции	87
13.13 Непрерывность композиции	88
14 Дифференцируемые функции нескольких переменных	89
14.1 Дифференцируемое отображение	89
14.2 Непрерывность дифференцируемого отображения	89
14.3 Производная по направлению	91
14.4 Частная производная	93
14.5 Градиент	93
14.6 Свойства градиента	94
14.7 Множество уровня	95
14.8 Матрица Якоби	95
14.9 Достаточное условие дифференцируемости	95
14.10 Частные производные высокого порядка	97
14.11 Теорема Шварца	97
14.12 Теорема Юнга	98
14.13 Дифференцируемость $(m + 1)$ раз	100
14.14 Дифференциалы высоких порядков	101
14.15 Правила дифференцирования	101
14.16 Дифференцирование сложной функции	102
14.17 Дифференциал обратного отображения	104
15 Экстремумы функций многих переменных	106
15.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме	106
15.2 Формула Тейлора	107
15.3 Точка локального экстремума	109
15.4 Необходимое условие локального экстремума	109
15.5 Достаточное условие локального экстремума	109
15.6 Критерий Сильвестра	110
15.7 Теорема о неявной функции	111
15.8 Теорема о неявном отображении	111

Глава 1

Вещественные числа

Лекция 1: Множества, функции, вещественные числа

Лекция 2: Множества, функции, вещественные числа

Глава 2

Предел последовательности

Лекция 3: Предел числовой последовательности

Лекция 4: Теорема Вейерштрасса, число е

Лекция 5: Число е, частичный предел

Лекция 6: Критерий Коши

Лекция 7: Числовые ряды

Лекция 8: Перестановка членов ряда

Глава 3

Предел функции

Лекция 9: Предел функции

Лекция 10: Замечательные пределы, критерий Коши

Лекция 11: Эквивалентность и о-символика

Лекция 12: Эквивалентность и о-символика

Лекция 13: Свойства непрерывных функций

Глава 4

Непрерывные функции

Лекция 14: Построение показательной функции

Глава 5

Производная

Лекция 15: Производная и дифференциал

Лекция 16: Свойства дифференцируемых функций

Лекция 17: Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Лекция 18: Правило Лопиталя, производные старших порядков

Лекция 19: Формула Тейлора

Лекция 20: Ряд Тейлора

Глава 6

Исследование функций с помощью производных

Лекция 21: Исследование функций с помощью производных

6.1 Необходимое условие экстремума

Напомним, что для дифференцируемой в точке локального экстремума *c* функции f по теореме Ферма выполнено $f'(c) = 0$. Т. е. равенство нулю производной является необходимым условием локального экстремума дифференцируемой функции.

Напомним, что нами также было уже доказано следствие 5.26:

Следствие (5.26) Пусть f дифференцируема в каждой точке интервала (a, b) . Тогда f не убывает (не возрастает) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$ соответственно) для каждой точки $x \in (a, b)$. Кроме того, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то f строго возрастает (соответственно, строго убывает) на (a, b) .

Докажем теперь достаточное условие локального экстремума в терминах производных старших порядков.

6.2 Достаточное условие экстремума

Теорема 6.1. Пусть f имеет n производных в окрестности точки $c \in (a, b)$ и $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, а $f^{(n)}(c) \neq 0$. Тогда, если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) < 0$ ($f^{(n)}(c) > 0$), то c — точка локального максимума (минимума). Если $n = 2k + 1$, то точка c не является точкой локального экстремума.

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} \cdot (x - c) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!} (x - c)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n + o((x - c)^n) =$$

$$= \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - c)^n + o((x - c)^n) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right)$$

Т. к. $o(1) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow c$, то по определению предела

$$\exists B_\delta(c) : \forall x \in B_\delta(c) \rightarrow |o(1)| < \varepsilon = \left| \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall x \in B_\delta(c) \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(c)$

1. Если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) > 0$, то $f(x) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right) = (x - c)^{2k} \cdot A(x)$ ($A(x) > 0 \forall x \in B_\delta(c)$)

При $x = c f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c , $f(x) > 0 \Rightarrow c$ - точка минимума.

2. Если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) < 0$, то $f(x) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right) = (x - c)^{2k} \cdot A(x)$ ($A(x) < 0 \forall x \in B_\delta(c)$)

При $x = c f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c , $f(x) < 0 \Rightarrow c$ - точка максимума.

3. Если $n = 2k+1$ и $f^{(n)}(c) > 0$, то $f(x) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right) = (x - c)^{2k+1} \cdot A(x)$ ($A(x) > 0 \forall x \in B_\delta(c)$)

При $x = c f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c в положительную сторону, $f(x) > 0$; так только мы отходим от точки c в отрицательную сторону, $f(x) < 0 \Rightarrow c$ - ни точка максимума, ни точка минимума.

4. Если $n = 2k+1$ и $f^{(n)}(c) < 0$, то $f(x) = (x - c)^n \left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1) \right) = (x - c)^{2k+1} \cdot A(x)$ ($A(x) < 0 \forall x \in B_\delta(c)$)

При $x = c f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c в положительную сторону, $f(x) < 0$; так только мы отходим от точки c в отрицательную сторону, $f(x) > 0 \Rightarrow c$ - ни точка максимума, ни точка минимума.

Хочется отметить, что выполнение условия теоремы $f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ можно гарантировать, сдвинув функцию на константу: $g(x) = f(x) - f(c)$. \square

6.3 Выпуклость и вогнутость

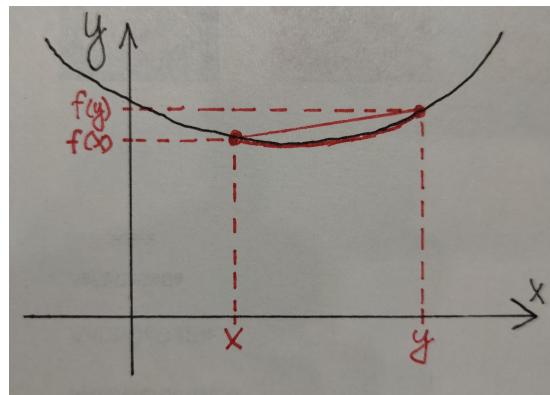
Определение 6.2. Функция f на интервале (a, b) называется **выпуклой**, если $\forall x, y \in (a, b)$ и для каждого $t \in [0, 1]$ выполнено

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Пояснение. Функция $tx + (1 - t)y$ при фиксированных x и y при различных значениях $t \in [0, 1]$ задаёт точку на отрезке $[x, y]$: при $t = 0$ функция равна y , при $t = 1$ функция равна x , если возьмём производную функции $tx + (1 - t)y$, то получим $x - y < 0 \Rightarrow$ функция монотонно убывает от y до x .

Функция $tf(x) + (1 - t)f(y)$ от t является линейной и она задаёт хорду с концами в точках $(x, f(x))$ (при $t = 1$) и $(y, f(y))$ (при $t = 0$).

Получается с левой стороны неравенства - это значение функции в точке на отрезке $[x, y]$, а с правой - ордината точки на хорде и понятно, что неравенство выполняется.



Определение 6.3. Функция f на интервале (a, b) называется **вогнутой**, если $\forall x, y \in (a, b)$ и для каждого $t \in [0, 1]$ выполнено

$$f(tx + (1 - t)y) \geq tf(x) + (1 - t)f(y).$$

Лемма 6.4. Функция f на интервале (a, b) выпукла тогда и только тогда, когда для всех точек $x < z < y$ из этого интервала выполнено

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Доказательство. Неравенство, которое нужно доказать эквивалентно

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \quad \Big| \cdot (z - x)(y - z)$$

$$yf(z) - zf(z) - yf(x) + zf(x) \leq zf(y) - xf(y) - zf(z) + xf(z)$$

$$xf(z) - yf(z) \geq zf(x) - yf(x) + xf(y) - zf(y)$$

Т. к. $x < z < y$, то $\exists t \in [0, 1] z = t \cdot x + (1 - t) \cdot y \Leftrightarrow t = \frac{z-y}{x-y}$.

Т. к. $f(x)$ - выпукла, то $f(z) = f(t \cdot x + (1 - t) \cdot y) \leq tf(x) + (1 - t)f(y) = \frac{z-y}{x-y}f(x) + \frac{x-z}{x-y}f(y) \Leftrightarrow xf(z) - yf(z) \geq zf(x) - yf(x) + xf(y) - zf(y)$, т. е пришли к тому же самому неравенству.

В обратную сторону. Имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} &\leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \Rightarrow xf(z) - yf(z) \geqslant zf(x) - yf(x) + xf(y) - zf(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z) \leqslant \frac{z-y}{x-y}f(x) + \frac{x-z}{x-y}f(y) \end{aligned}$$

Т. к. $x < z < y$, то $\exists t \in [0, 1] z = t \cdot x + (1-t) \cdot y \Leftrightarrow t = \frac{z-y}{x-y}$.

Значит

$$f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y),$$

что является определением выпуклости функции. \square

Теорема 6.5. Дифференцируемая функция f на интервале (a, b) выпукла тогда и только тогда, когда f' — неубывает.

Доказательство. $\Rightarrow \forall x < z < y \in (a, b) f$ - выпукла \Rightarrow по предыдущей лемме

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Тогда при $z \rightarrow x$ по теореме о переходе к пределу в неравенстве

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

(Здесь есть тонкость: мы можем устремлять z к x только справа, поэтому мы получим правую производную, но если функция дифференцируема, то правая производная совпадает с левой)

Пусть $z \rightarrow y$. Тогда

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leqslant f'(y)$$

Таким образом, $\forall x < y f'(x) \leqslant f'(y) \Rightarrow f'(x)$ - неубывает.

\Leftarrow Пусть $x < z < y$

По теореме Лагранжа $\exists \xi_1 \in (x, z) : \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = f'(\xi_1)$

$\exists \xi_2 \in (z, y) : \frac{f(y) - f(z)}{y - z} = f'(\xi_2)$

Таким образом, $\xi_1 \leqslant \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \Rightarrow f$ на интервале (a, b) выпукла по предыдущей лемме. \square

Следствие 6.6. Дважды дифференцируемая функция f на интервале (a, b) выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0 \forall x \in (a, b)$.

Доказательство. $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x)$ неубывает. \square

Следствие 6.7. Пусть f – дифференцируемая выпуклая функция на интервале (a, b) . Тогда $f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c)$ для всех $x, c \in (a, b)$.

Доказательство. $f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \geq f'(c)(x - c)$ (*)

1. Пусть $x > c$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq f'(c)$$

По теореме Лагранжа $\exists \xi \in (c, x)$:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) \geq f'(c),$$

т. к. функция выпукла и по теореме 6.5 функция неубывает.

2. Пусть $x < c$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq f'(c)$$

По теореме Лагранжа $\exists \xi \in (x, c)$:

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) \leq f'(c),$$

т. к. функция выпукла и по теореме 6.5 функция неубывает.

3. Пусть $x = c$. Тогда (*) : $0 \geq 0$.

\square

6.4 Неравенство Йенсена

Теорема 6.8 (Неравенство Йенсена). Пусть функция f выпукла на интервале (a, b) . Тогда для всех $x_1, \dots, x_n \in (a, b)$ и для всех чисел $t_1 \geq 0, \dots, t_n \geq 0$, для которых $t_1 + \dots + t_n = 1$, выполнено

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n).$$

Доказательство. Индукция по n . База индукции: $n = 2$

$$t_1 + t_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1 - t_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(t_1x_1 + t_2x_2) = f(t_1x_1 + (1 - t_1)x_2) \leq t_1f(x_1) + (1 - t_1)f(x_2) = t_1f(x_1) + t_2f(x_2)$$

по определению выпуклости.

Шаг индукции: пусть $t_1 + \dots + t_n + t_{n+1} = 1$. Возьмём $t = t_1 + \dots + t_n \Rightarrow t + t_{n+1} = 1$

$$f(t_1x_1 + \dots + t_nx_n + t_{n+1}x_{n+1}) = f\left(t\left(\frac{t_1}{t}x_1 + \dots + \frac{t_n}{t}x_n\right) + t_{n+1}x_{n+1}\right) = (*)$$

Тогда из выпуклости функции

$$(*) \leq tf\left(\frac{t_1}{t}f(x_1) + \dots + \frac{t_n}{t}f(x_n)\right) + t_{n+1}f(x_{n+1}) = (**)$$

$\frac{t_1}{t} + \dots + \frac{t_n}{t} = \frac{t_1 + \dots + t_n}{t} = \frac{t}{t} = 1$. Применяем предположение индукции

$$(**) \leq t_1f(x_1) + \dots + t_nf(x_n) + t_{n+1}f(x_{n+1})$$

□

Пример 6.9 (Неравенство о средних). Пусть $x_1, \dots, x_n > 0$. Тогда $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

$t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$, $f(x) = e^x$, $y_i = \ln x_i$
 $f''(x) = e^x \geq 0 \forall x \Rightarrow f(x) = e^x$ - выпуклая.

По неравенству Йенсена

$$f(t_1y_1 + \dots + t_ny_n) \leq t_1f(y_1) + \dots + t_nf(y_n)$$

$$f(t_1y_1 + \dots + t_ny_n) = e^{t_1y_1 + \dots + t_ny_n} = e^{\frac{\ln x_1}{n} + \frac{\ln x_2}{n} + \dots + \frac{\ln x_n}{n}} = e^{\frac{\ln x_1}{n}} \cdot \dots \cdot e^{\frac{\ln x_n}{n}} = \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$$

$$t_1f(y_1) + \dots + t_nf(y_n) = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$$

6.5 Асимптоты

Определение 6.10. Прямая $y = \alpha x + \beta$ называется **асимптотой** графика функции f при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$), если $f(x) = \alpha x + \beta + o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$ ($x \rightarrow -\infty$). Ясно, что в случае асимптоты на $+\infty$ справедливы равенства

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \alpha x)$$

Аналогичные равенства верны и в случае асимптоты на $-\infty$ с заменой $+\infty$ на $-\infty$.

Глава 7

Первообразная и неопределенный интеграл

Лекция 22: Первообразная, неопределённый интеграл

7.1 Первообразная

Определение 7.1. Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале I , если F дифференцируема на I и $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.

Педагогический приём. $\frac{1}{x} = (\ln|x|)' = \frac{2}{2x} = (\ln|2x|)',$ т. к. $\ln 2x = \ln 2 + \ln x,$ т. е. отличается на константу.

Лемма 7.2. Любые две первообразные F_1 и F_2 функции f на интервале I отличаются на константу.

Доказательство. $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$\Phi(x)$ дифференцируема как сумма дифференцируемых функций.

$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0$

Т. к. $\Phi(x)$ дифференцируема \Rightarrow непрерывна на любом интервале.

По теореме Лангранжа

$\forall a, b \in I, a \leq b \exists c \in (a, b) \rightarrow \Phi(a) - \Phi(b) = \Phi'(c)(a - b) = 0 \cdot (a - b) = 0.$ Значит $\Phi(x) = const.$ \square

Определение 7.3. Множество всех первообразных функции f на некотором заданном интервале I называется неопределённым интегралом от f и обозначается $\int f(x) dx.$

$$\int f(x) dx = \{F(x) + C \mid F(x) \text{ - первообразная } f(x), C \in \mathbb{R}\}$$

7.2 Таблица первообразных

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1;$
- $\int \frac{dx}{x} dx = \ln|x| + C;$
- $\int e^x dx = e^x + C;$
- $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
- $\int \cos x dx = \sin x + C;$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

7.3 Свойства неопределённого интеграла

Теорема 7.4. 1. (*Линейность*)

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx + C;$$

2. (*Формула интегрирования по частям*)

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx;$$

3. (*Формула замены переменной*)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

(Здесь подразумевается, что все интегралы существуют.)

Доказательство. 1. Пусть $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$.

$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow \alpha F(x) + \beta G(x)$ - первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow \int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

А также $\alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx = \alpha F(x) + \alpha c_1 + \beta G(x) + \beta c_2 = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

$$\begin{aligned} 2. (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g(x) + C = \\ &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x) dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \text{ (линейность)} \\ &\Rightarrow \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

$$3. (F(\varphi(t)))'_t = F'_x(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(t)) \in \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

С другой стороны, $F(\varphi(t)) \in \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}$.

Следовательно, $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(x) dx \Big|_{x=\varphi(t)}$.

□

Замечание 7.5. Отметим, что, т.к. $f'(x) dx = df$ и $g'(x) dx = dg$ (инвариантность первого дифференциала), то свойство 2) обычно записывают в виде $\int f dg = fg - \int g df$.

Аналогично, свойство 3) обычно записывают в виде $\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t)) d\varphi(t)$ и рассматривают φ как новую переменную.

Пример 7.6. Найдём следующие первообразные:

$$\begin{aligned} 1.1 \quad \int \cos^9 x \sin x dx &= - \int \cos^9 x (\cos x)' dx = \text{(формула замены переменной)} \\ &- \int t^9 dt \Big|_{t=\cos x} = -\frac{t^{10}}{10} + C \Big|_{t=\cos x} = -\frac{\cos^{10} x}{10} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1.2 \quad \int \cos^9 x \sin x dx &= - \int \cos^9 x (\cos x)' dx = \text{(Замечание 7.6)} - \int \cos^9 x d \cos x = \\ &- \frac{\cos^{10} x}{10} + C; \end{aligned}$$

Здесь $\cos x$ воспринимаем как переменную.

$$2.1 \int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx = \int \ln x \cdot x' \, dx = (\text{формула интегрирования по частям}) x \ln x - \int x(\ln x)' \, dx = x \ln x - \int 1 \, dx = x \ln x - x + C;$$

$$2.2 \int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \, d \ln x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C;$$

3. $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \left[x = \cos t; -1 \leq x \leq 1; t = \arccos x; 0 \leq t \leq \pi \right] \quad (\text{здесь используем формулу замены переменной в обратную сторону})$

$$\begin{aligned} &= \int \sqrt{1-\cos^2 t} \, d \cos t = - \int \sqrt{1-\cos^2 t} \sin t \, dt = - \int \sin^2 t \, dt \quad (t \geq 0) \\ &= - \int 1-\cos^2 t \, dt = \int \cos^2 t - 1 \, dt = \int \cos^2 t \, dt - \int 1 \, dt = \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dt - \\ &t = \int \frac{1}{2} \, dt + \frac{1}{2} \int \cos 2t \, dt - t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \frac{\sin 2t}{2} + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + \\ &C = \frac{1}{2} \arccos x + \frac{1}{2} \cos(\arccos x) \sin(\arccos x) + C \quad (\text{мы подставили в } \varphi(t)) \\ &t = \varphi^{-1}(x) \text{ и получили, что } \varphi(\varphi^{-1}(x)) = x, \text{ т. к. } \varphi(t) = \cos t \text{ - биекция} \\ &= \frac{1}{2} \arccos x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C; \end{aligned}$$

Как мы поняли, интеграл - это обратная операция к дифференцированию и обратные операции часто устроены сложнее, чем прямые. Так и с интегралом: если продифференцировать можно почти любую функцию в виде формулы, то интеграл от функции, выраженной через элементарные функции, иногда не может быть выражен через элементарные функции. Но для некоторых функций ответ выражается через элементарные. В частности, всегда можно найти интеграл от рациональной функции, но с некоторой оговоркой.

Глава 8

Интеграл от рациональной функции

Лекция 23: Интеграл от рациональной функции

8.1 Рациональная функция

Определение 8.1. Функция $R(x)$ называется рациональной, если

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

для некоторых многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Пример 8.2. Найдём следующие первообразные:

1. $\int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x} dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C;$
2. $\int \frac{1}{x(x-1)^2} dx = \int \frac{1}{x-1} \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x(x-1)} dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{1}{x} dx \text{ (используем пункт 1)} = -\frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + \ln|x| + C;$
3. $\int \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \ln|x| + C - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \ln|x| + C - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} (d(x^2+1) = (x^2+1)'dx = 2xdx) = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C;$

8.2 Разложение многочлена на неприводимые

Теорема 8.3. Любой многочлен единственным образом раскладывается на неприводимые множители. (без доказательства)

Замечание 8.4. Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ раскладывается на множители вида $(x - a)$ и $(x^2 + px + q)$, где $p^2 - 4q < 0$ (дискриминант меньше нуля).

8.3 Правильная дробь

Определение 8.5. Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная, если степень числителя меньше степени знаменателя. Нулевой многочлен 0 является правильной дробью.

Замечание 8.6. Любая рациональная дробь единственным способом представлена как сумма многочлена и правильной дроби.

8.4 Элементарная дробь

Определение 8.7. Правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется элементарной (или простейшей), если её знаменатель $Q(x)$ представляет собой степень неприводимого многочлена $p(x)$:

$$Q(x) = p^k(x), k \leq 1,$$

а степень числителя $P(x)$ меньше степени $p(x)$.

8.5 Разложение дроби на элементарные

Теорема 8.8. Любая правильная рациональная дробь единственным образом разлагается в сумму элементарных дробей. (без доказательства)

Следствие 8.9. Каждая рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}$, $P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ представлена в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей

$$\frac{A}{(x - a)^m}, \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}, p^2 - 4q < 0, A, M, N \in \mathbb{R}.$$

8.6 Интегрирование рациональных функций

Теорема 8.10. Пусть P и Q два многочлена. Тогда первообразная функции $\frac{P}{Q}$ выражается в элементарных функциях (более точно, рациональных, \ln и \arctg).

Доказательство. Пусть $Q(x) = (x - a_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x - a_s)^{m_s} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_kx + q_k)^{n_k}$. По теореме 8.8 дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ раскладывается в сумму элементарных дробей

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(x - a_i)^j} + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2 + p_ix + q_i)^j}.$$

(Здесь более сильное утверждение: любая рациональная функция раскладывается в виде суммы *именно таких* элементарных дробей)

Чтобы проинтегрировать $\frac{P(x)}{Q(x)}$, нужно, в силу линейности интеграла, проинтегрировать по отдельности многочлен $R(x)$ и элементарные дроби. Но многочлен мы уже умеем интегрировать, осталось разобраться с элементарными дробями.

$$1. \int \frac{Adx}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$2. \int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, n \neq 1 \text{ (проверяется взятием производной у правой части);}$$

$$3. \text{ Воспользуемся тем, что } \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2 + 1} = \frac{1}{a} \int \frac{d\frac{x}{a}}{(\frac{x}{a})^2 + 1} = \frac{1}{a} \arctg\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx &= M \int \frac{x + \frac{N}{M}}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x + p - p + \frac{2N}{M}}{x^2 + px + q} dx = \\ &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} dx + \frac{M}{2} \int \frac{\frac{2N}{M} - p}{x^2 + px + q} dx = \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{x^2 + px + q} dx + \\ &\quad \frac{M}{2} \left(\frac{2N}{M} - p \right) \int \frac{dx}{(x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4}} = \frac{M}{2} \ln(x^2 + px + q) + \end{aligned}$$

$$\left(N - \frac{pM}{2} \right) \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \arctg \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C \quad (x^2 + px + q > 0, \text{ т. к. } D = p^2 - 4q < 0, \text{ ещё здесь пользуемся верхним интегралом});$$

$$4. n \in \mathbb{N}, a \neq 0, J_n(x, a) = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^n}\right) \text{ (формула интегрирования по частям)} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \int \frac{x \cdot n \cdot 2x}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} +$$

$$\begin{aligned}
2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \\
2n \int \frac{x^2 + a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx - 2n \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n(x, a) - \\
2na^2 J_{n+1}(x, a) \Rightarrow J_{n+1}(x, a) &= \frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n J_n(x, a) - J_n(x, a) \right) = \\
&\frac{1}{2na^2} \left(\frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + (2n - 1) J_n(x, a) \right)
\end{aligned}$$

5. $n > 1$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{2x + \frac{2N}{M}}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{M}{2} \int \frac{2x + p - p + \frac{2N}{M}}{(x^2 + px + q)^n} dx = \\
\frac{M}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + \frac{M}{2} \int \frac{-p + \frac{2N}{M}}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \frac{M}{2} \int \frac{d(x^2 + px + q)}{(x^2 + px + q)^n} + \\
\left(N - \frac{Mp}{2} \right) \int \frac{dx}{(x^2 + px + q)^n} &= \frac{M}{2} \frac{(x^2 + px + q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right). \\
\cdot \int \frac{dx}{((x + \frac{p}{2})^2 + q - \frac{p^2}{4})^n} &= \frac{M}{2} \frac{(x^2 + px + q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2} \right) J_n \left(x + \frac{p}{2}, \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} \right).
\end{aligned}$$

□

Лекция 24: Интегрирование рациональных функций, интеграл Римана

8.7 Метод Остроградского

Теорема 8.11 (Формула Остроградского). *Пусть $\deg P < \deg Q$. Тогда:*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx,$$

где $Q_2(x)$ имеет те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но однократно, $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)}$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ находятся методом неопределенных коэффициентов после дифференцирования формулы, с учетом $\deg P_1(x) < \deg Q_1(x)$, $\deg P_2(x) < \deg Q_2(x)$.

Доказательство. Если мы складываем две правильные дроби, то получим правильную дробь:

$$\deg A(x) < \deg B(x), \deg C(x) < \deg D(x)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) + C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$$

$$\deg A(x)D(x) = \deg A(x) + \deg D(x) < \deg B(x) + \deg D(x)$$

$$\deg C(x)B(x) = \deg C(x) + \deg B(x) < \deg D(x) + \deg B(x) = \deg B(x) + \deg D(x)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \deg A(x)D(x) + C(x)B(x) &= \max(\deg A(x)D(x), \deg C(x)B(x)) < \\ &< \deg B(x) + \deg D(x) \end{aligned}$$

Значит дробь $\frac{A(x)D(x) + C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$ правильная.

Пусть

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{k_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k} + \sum_{j=1}^m \sum_{s=1}^{s_j} \frac{b_{js}x + c_{js}}{(x^2 + p_jx + q_j)^s}.$$

Проинтегрируем каждое слагаемое по отдельности. Если для каждого слагаемого мы можем применить такую формулу

$$\int \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} dx = \frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} + \int \frac{P_2^*(x)}{Q_2^*(x)} dx,$$

в которой многочлены $P^*(x), Q^*(x), P_1^*(x), Q_1^*(x), P_2^*(x), Q_2^*(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то потом эти формулы мы можем сложить и получить итоговую формулу. Когда мы суммируем левую часть, то из-за линейности интеграла все интегралы вида $\int \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} dx$ объединяются в правильную дробь $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ (используем доказанный факт). В правой части слагаемые вида $\int \frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} dx$ объединяются в правильную дробь $\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx$, при этом свойство знаменателя о том, что степень каждого множителя $Q_1(x)$ меньше на единицу, чем у $Q(x)$, сохраняется. А также при суммировании в правой части интегралов вида $\int \frac{P_2^*(x)}{Q_2^*(x)} dx$ получаем $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$, при этом степень каждого множителя многочлена $Q_2(x)$ равна 1, т. к если мы складываем дроби с одинаковыми знаменателями, то знаменатель дроби не изменяется, т. е. множители остаются в первой степени, а если мы складываем дроби с разными знаменателями, то знаменатели перемножаются и каждый множитель остаётся в первой степени.

Осталось проверить, что формула выполняется для каждого слагаемого. Докажем это для 5 интегралов из теоремы 23.3.

В 1. $\int \frac{Adx}{x-a}$ и 3. $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx$ случаях $\frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} = 0$.

Во 2. $\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \int \frac{0}{Q_2(x)} dx$, у первого слагаемого степень $n-1$ в знаменателе.

В 5. $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} dx = \frac{M}{2} \frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) J_n \left(x + \frac{p}{2}, \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\right)$, у первого слагаемого степень $n-1$ в знаменателе. Теперь нужно разобраться с J_n .

В 4. $J_n(x, a) = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-1)J_{n-1}(x, a) \right)$ у первого слагаемого в знаменателе степень на 1 меньше, а второе слагаемое - это интеграл следующего порядка. Когда мы применим рекуррентную формулу для J_{n-1} , то получим дробь со степенью ещё на 1 меньше в знаменателе. Продолжим этот процесс пока не дойдём до первой степени в знаменателе. Если сложить дроби, у которых степень в знаменателе убывает, то получится дробь, у которой знаменатель имеет степень $n-1$, т. е. на 1 меньше. А интеграл от дроби со степенью 1 в знаменателе, на котором мы остановились, имеет вид $\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx$. \square

Замечание 8.12. Метод Остроградского удобно использовать, если знаменатель $Q(x)$ имеет кратные корни.

8.8 Рациональные функции от \cos и \sin

Пример 8.13. Пусть $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Заметим, что

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1 + t^2}$$

Тем самым, интегралы от функций $R(\cos x, \sin x)$, где R - рациональная функция, сводятся заменой к интегралам от рациональных функций.

Пояснение.

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad x = 2 \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = d(2 \operatorname{arctg} t) = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Договоримся, что $-\pi < x < \pi$, тогда получаем биекцию между t и x . Функции $\sin x$ и $\cos x$ - это 2π -периодические функции и интервал, на котором мы посчитали интеграл, имеет длину 2π и далее "копируем" то, что получилось после

интегрирования на другие интервалы длины 2π . Следовательно,

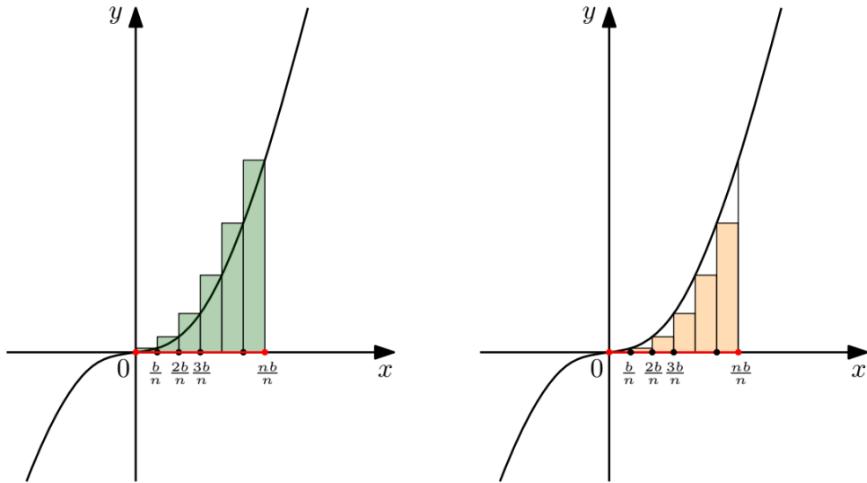
$$\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)} dx = \int \frac{P\left(\frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}, \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}\right)}{Q\left(\frac{1-\tan^2 \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}, \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1+\tan^2 \frac{x}{2}}\right)} \frac{2dt}{1+t^2}$$

Глава 9

Определенный интеграл

9.1 Определенный интеграл как площадь

Пример 9.1. Чему равняется площадь под графиком функции $y = x^3$ на отрезке $[0; b]$?



Пояснение. Площадь столбиков на левой картинке:

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \left(\frac{kb}{n} \right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{b^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{b^4}{n^4} \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{b^4}{n^4} (1+2+\dots+n)^2 (*) = \frac{b^4}{n^4} \frac{(n+1)^2 n^2}{4}$$

(*) Формула суммы кубов доказывается по индукции.

Площадь фигуры под графиком заведомо покрывается зелёными столбиками.

Площадь столбиков на правой картинке:

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{(k-1)b}{n} \right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)^3 b^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{b^4}{n^4} \sum_{k=1}^n (k-1)^3 = \frac{b^4}{n^4} (1+2+\dots+n)^2 = \\ &= \frac{b^4}{n^4} \frac{(n-1)^2 n^2}{4} \end{aligned}$$

Сумма S_2 меньше площади фигуры под графиком.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{n^4} \frac{(n+1)^2 n^2}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{n^4} \frac{(n-1)^2 n^2}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \frac{(n-1)^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b^4}{4} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}$$

По теореме о замкнутой последовательности площадь фигуры равна $\frac{b^4}{4}$. Но можно было получить ответ, посчитав интеграл: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

9.2 Интеграл Римана

Определение 9.2. • Разбиением T отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

- Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ называются отрезками разбиения. Длину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k \geq 1$.
- Величина $\Delta_T := \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ называется диаметром разбиения.
- Размеченным разбиением (T, ξ) отрезка $[a, b]$ называется пара, состоящая из разбиения T отрезка $[a, b]$ и набора точек $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
- Интегральной суммой функции f , соответствующей размеченному разбиению (T, ξ) , называется выражение

$$\sigma(f, T, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Определение 9.3. Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если существует такое число I , что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ размеченного разбиения (T, ξ) с диаметром разбиения $\Delta_T < \delta$ выполнено $|\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$.

Число I называют интегралом функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначают $\int_a^b f(x) dx$.

Пояснение. Геометрически мы уменьшаем длину отрезков и увеличиваем их число.

Пример 9.4. 1. $\int_a^b 1 dx = b - a$;

2. Функция $I_{\mathbb{Q}}$ не интегрируема ни на каком отрезке.

Пояснение. 1. $\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$.
(функция $f(\xi_k) = 1 \forall k$)

2. Функция Дирихле $I_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ определяется следующим образом:

$$I_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

\forall разбиения T можно взять $\xi \in \mathbb{Q}, \zeta \in \mathbb{I}$ (внутри любого отрезка разбиения можно взять рациональное и иррациональное число)

Тогда $\sigma(I_{\mathbb{Q}}, T, \xi) = \sum_{k=1}^n I_{\mathbb{Q}}(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$ и $\sigma(I_{\mathbb{Q}}, T, \zeta) = \sum_{k=1}^n I_{\mathbb{Q}}(\zeta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$.

Тогда для любого T с любым диаметром разбиения можно взять разметку, такую что иногда сумма равна $b - a$, иногда 0. Если $b - a \neq 0$, то функция не интегрируема.

Лекция 25: Интеграл Римана, суммы Дарбу

Предложение 9.5. Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.

Доказательство. Пусть f - интегрируема на $[a, b]$.

Тогда $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall (T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon \Leftrightarrow I - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon$.

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Пусть f - неограничена на $[a, b] \Rightarrow$ неограничена на одном из отрезков Δ_k , пусть на Δ_{k_0} . Фиксируем ξ_k для всех k кроме k_0 . Тогда $\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = C + f(\xi_{k_0}) \Delta x_{k_0} \Rightarrow I - C - \varepsilon < f(\xi_{k_0}) \Delta x_{k_0} < I - C + \varepsilon \Rightarrow \frac{I-C-\varepsilon}{\Delta x_{k_0}} < f(\xi_{k_0}) < \frac{I-C+\varepsilon}{\Delta x_{k_0}}$ - противоречие, функция ограничена. \square

Предложение 9.6 (Линейность интеграла). Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольных чисел α, β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 > 0 : \forall (T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta_1 \rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I_1| < \varepsilon$.

g - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall(T, \xi) \in \Delta_T < \delta_2 \rightarrow |\sigma(g, T, \xi) - I_2| < \varepsilon$.

Размеченное разбиение (T, ξ) взяли одно и то же для обоих интегралов.

Первые два утверждения означают, что $I_1 = \int_a^b f(x) dx, I_2 = \int_a^b g(x) dx$.

Рассмотрим интегральную сумму

$$\begin{aligned} \sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) &= \sum_{k=1}^n (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k)) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \alpha f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n \beta g(\xi_k) \Delta x_k = \\ &= \alpha \sigma(f, T, \xi) + \beta \sigma(g, T, \xi) \end{aligned}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow |\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| = |\alpha \sigma(f, T, \xi) + \beta \sigma(g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| \leq |\alpha \sigma(f, T, \xi) - \alpha I_1| + |\beta \sigma(g, T, \xi) - \beta I_2| \leq |\alpha| \varepsilon + |\beta| \varepsilon = (|\alpha| + |\beta|) \varepsilon$

$\forall \varepsilon' = \frac{\varepsilon'}{2(|\alpha| + |\beta|)} > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall(T, \xi) \in \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| \leq (|\alpha| + |\beta|) \frac{\varepsilon'}{2(|\alpha| + |\beta|)} = \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'$. \square

Предложение 9.7 (Монотонность интеграла). *Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Если $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, то $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.*

Доказательство. $f(x) \leq g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \geq 0$ и $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \Leftrightarrow \int_a^b g(x) - f(x) dx \geq 0$ (пользуемся линейностью). Пусть $h(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow$ требуется доказать, что $h(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx \geq 0$.

По определению $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall(T, \xi) \in \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(h, T, \xi) - \int_a^b h(x) dx| < \varepsilon \Leftrightarrow \int_a^b h(x) dx - \varepsilon < \sigma(h, T, \xi) < \int_a^b h(x) dx + \varepsilon$.

$\sigma(h, T, \xi) \geq 0$ (т. к. $h(\xi_k) \geq 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n h(\xi_k) \Delta x_k \geq 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx + \varepsilon > 0 \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx > -\varepsilon \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) dx \geq 0$). \square

Замечание 9.8. В частности, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Доказательство. Далее мы докажем, что если $f(x)$ интегрируема, то и $|f(x)|$ интегрируема.

$$\begin{aligned} -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| &\Rightarrow - \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \end{aligned}$$

\square

Глава 10

Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций

10.1 Суммы и интегралы Дарбу

Фиксируем ограниченную функцию f , определённую на отрезке $[a, b]$.

Определение 10.1. Для ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f и разбиения T определим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу:

$$s(f, T) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k;$$

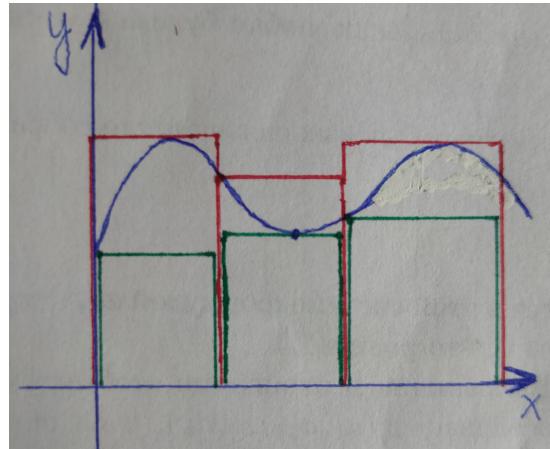
(на каждом отрезке берём минимальное значение функции)

$$S(f, T) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k.$$

(на каждом отрезке берём максимальное значение функции)

Нижним интегралом Дарбу называется число $I_* = \sup_T s(f, T)$, а верхним интегралом Дарбу называется число $I^* = \inf_T S(f, T)$.

Сумма зелёных прямоугольников - это $s(f, T)$, сумма красных прямоугольников - это $S(f, T)$.



10.2 Критерий Дарбу

- Лемма 10.2.**
1. $s(f, T) \leq \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq \sigma(f, T, \xi) \leq \sup_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq S(f, T);$
 2. Если $T \subset T'$, то $s(f, T) \leq s(f, T')$ и $S(f, T') \leq S(f, T);$
 3. $s(f, T_1) \leq s(f, T_1 \cup T_2) \leq S(f, T_1 \cup T_2) \leq S(f, T_2).$

Доказательство. 1. Докажем, что $s(f, T) = \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi)$

$$\leq: \forall \xi \quad s(f, T) = \sum_{k=1}^n \inf_{\xi_k} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k \Rightarrow s(f, T) - \text{нижняя грань} \\ \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k. \\ \inf_{\xi} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) - \text{точная нижняя грань} \Rightarrow s(f, T) \leq \\ \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi).$$

$$\geq: s(f, T) = \sum_{k=1}^n \inf_{\xi_k} f(\xi_k) \Delta x_k$$

По определению инфимума $\forall \varepsilon > 0 \exists \xi'_k \in \Delta_k : f(\xi'_k) \leq \inf_{\xi_k} f(\xi_k) + \varepsilon$.

$$\sigma(f, T, \xi') = \sum_{k=1}^n f(\xi'_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\inf_{\xi_k} f(\xi_k) + \varepsilon \right) \Delta x_k = s(f, T) + \varepsilon(b-a)$$

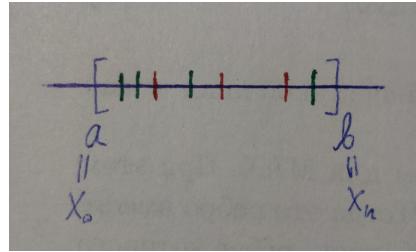
$$\inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq \sigma(f, T, \xi') \leq s(f, T) + \varepsilon(b-a)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0 \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq s(f, T)$.

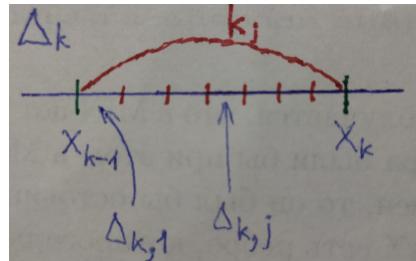
Второе и третье неравенство в цепочке очевидное. Четвёртое неравенство на самом деле является равенством и доказывается как первое равенство.

2. Рассмотрим отрезок $[a, b]$. На нём определено разбиение T . Теперь рассмотрим измельчение разбиения T' . Оно содержит те же точки, что и в T , но добавляет ещё свои точки.

Красные точки - точки разбиения T , красные и зелёные точки - точки измельчения T' .



Пусть подотрезки $\Delta_k \in T$, а подотрезки $\Delta'_k \in T'$, $T \subset T'$. Рассмотрим отрезок Δ_k и будем считать, что он разбился на k_j отрезков. Поэтому отрезок Δ'_k мы будем индексировать двумя индексами, первый номер - номер отрезка Δ_k , в котором он лежит, второй номер - номер отрезка Δ'_k внутри отрезка Δ_k .



Тогда

$$s(f, T') = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_{k,j}} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j}$$

При этом на нескольких маленьких отрезках инфимум не меньше инфимума на одном большом отрезке, потому что на большом отрезке у нас есть больше точек, из которых мы можем выбрать меньшее значение. Если инфимум достигался на красном отрезке, то этот отрезок принадлежит большому, поэтому мы можем взять точку принадлежащую красному отрезку и получить инфимум на большом отрезке не больше, чем на маленьких. Поэтому

$$s(f, T') = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_{k,j}} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j} \geq \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j}$$

Продолжаем преобразования.

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j} = \sum_{k=1}^n \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \sum_{j=1}^{k_j} \Delta x_{k,j} = \sum_{k=1}^n \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k = s(f, T)$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

3.

$$T_1 \subset T_1 \cup T_2 \Rightarrow (\text{из пункта 2}) s(f, T) \leq s(f, T_1 \cup T_2)$$

$$(\text{из пункта 1}) s(f, T_1 \cup T_2) \leq S(f, T_1 \cup T_2)$$

$$T_1 \cup T_2 \supset T_2 \Rightarrow (\text{из пункта 2}) S(f, T_1 \cup T_2) \leq S(f, T_2)$$

□

Лекция 26: Интеграл Римана, суммы Дарбу

Лемма 10.3. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta \text{ выполнено } I_* \leq s(f, T) + \varepsilon \text{ и } I^* \geq S(f, T) - \varepsilon$.

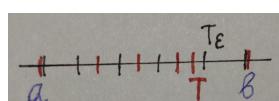
Доказательство. По определению супремума

$$I_* = \sup_T s(f, T) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists T_\varepsilon : I_* \leq s(f, T_\varepsilon) + \varepsilon$$

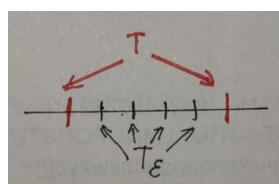
Рассмотрим произвольное разбиение T

$$s(f, T_\varepsilon \cup T) \geq (\text{пункт 2 предыдущей леммы}) s(f, T_\varepsilon) \geq I_* - \varepsilon$$

Точки из разбиения T окрасим в красный цвет, точки из T_ε - в чёрный цвет.



Точки T_ε делят отрезок с красными концами на число чёрных точек + 1. Тогда точки из T_ε могут разбить на не более, чем $2|T_\varepsilon|$ отрезков, потому что максимум достигается, когда в каждом отрезке мы ставим по одной чёрной точке (т. е. разбиваем отрезок на два).



Пояснение. Здесь Δ_k - отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, подразумеваем под знаком суммы сумму по всем отрезкам, которые образуются этим множеством точек (отрезок образуют соседние точки, т. е. внутри отрезка других точек разбиения нет).

$$\begin{aligned} s(f, T_\varepsilon \cup T) &= \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k = \sum_{\substack{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \in T}} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k + \\ &+ \sum_{\substack{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \notin T}} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k = (*) \end{aligned}$$

Первая сумма - сумма отрезков с красными концами, вторая сумма - сумма остальных отрезков (т. е. либо оба конца чёрные, либо один конец чёрный, а другой - красный). Первое слагаемое выразим как разность суммы по всем отрезкам с красными концами и суммы по всем отрезкам с красными концами, но с чёрными точками внутри.

$$\begin{aligned} (*) &= \sum_{\Delta_k \in T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k - \sum_{\substack{\Delta_k \in T \text{ и } \Delta_k \notin T \cup T_\varepsilon}} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k + \sum_{\substack{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \notin T}} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k \leqslant \\ &\leqslant s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \Delta_T \cdot 2|T_\varepsilon| \end{aligned}$$

В конце - грубая оценка для последних двух слагаемых.

Возьмём $\delta = \frac{\varepsilon}{2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot 2|T_\varepsilon|}$. Тогда для T с $\Delta_T < \delta$

$$\begin{aligned} I_* &\leqslant s(f, T_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant s(f, T \cup T_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \Delta_T \cdot 2|T_\varepsilon| + \varepsilon < \\ &< s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \delta \cdot 2|T_\varepsilon| + \varepsilon = s(f, T) + \varepsilon + \varepsilon = s(f, T) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

Заменой $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ получаем $I_* \leqslant s(f, T) + \varepsilon'$.

Аналогично доказывается, что $I^* \geqslant S(f, T) - \varepsilon$.

Уточнение. Если фиксируем ε , то T_ε - фиксированное число. $f(x)$ интегрируема \Rightarrow она ограничена (по предложению 9.5) \Rightarrow супремум ограничен, поэтому такое δ рассматривать корректно. \square

Теорема 10.4 (Критерий Дарбу). *Ограниченнная функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $I^* = I_*$.*

Доказательство. \Rightarrow Если функция интегрируема, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall (T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon$$

$$\begin{aligned} I - \varepsilon &\leq \inf_{\xi} \sigma(f, T, \xi) = s(f, T) \leq \sup_T s(f, T) = I_* \\ I^* &= \inf_T S(f, T) \leq S(f, T) = \sup_{\xi} \sigma(f, T, \xi) \leq I + \varepsilon \end{aligned}$$

Докажем, что $I_* \leq I^*$:

$$\forall T_1, T_2 \quad s(f, T_1) \leq S(f, T_2) \Rightarrow \sup_{T_1} s(f, T_1) \leq S(f, T_2) \Rightarrow \sup_{T_1} s(f, T_1) \leq \inf_{T_2} S(f, T_2)$$

Тогда

$$I - \varepsilon \leq I_* \leq I^* \leq I + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем, что $I_* = I^*$.

$$\Leftarrow I = I_* = I^*$$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \in \Delta_T < \delta \rightarrow I - \varepsilon = I_* - \varepsilon \leq (\text{лемма 10.3}) s(f, T) \leq \sigma(f, T, \xi) \leq S(f, T) \leq (\text{лемма 10.3}) I^* + \varepsilon = I + \varepsilon \Rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$,
что есть определение интеграла.

□

10.3 Колебание функции

Определение 10.5. *Колебанием функции f на отрезке Δ называется число*

$$\omega(f, \Delta) := \sup_{x, y \in \Delta} |f(x) - f(y)| = \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y).$$

Пояснение. 1. В одну сторону

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \Delta \quad f(x) - f(y) &\leq \sup_{x \in \Delta} (f(x)) - f(y) \leq \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{x, y \in \Delta} |f(x) - f(y)| \leq \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y) \end{aligned}$$

2. В другую сторону

По определению супремума и инфимума

$$\forall \delta > 0 \exists x_\delta : \sup_{x \in \Delta} f(x) \leq f(x_\delta) + \delta$$

$$\forall \delta > 0 \exists y_\delta : \inf_{y \in \Delta} f(y) \geq f(y_\delta) - \delta$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y) &\leq f(x_\delta) - f(y_\delta) + 2\delta \leq \sup_{x, y \in \Delta} |f(x) - f(y)| + 2\delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sup_{x \in \Delta} f(x) - \inf_{y \in \Delta} f(y) \leq \sup_{x, y \in \Delta} |f(x) - f(y)| \text{ при } \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Лекция 27: Интегрируемость по Риману различных классов функций

Теорема 10.6. Пусть f - ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда следующие условия эквивалентны:

1. $I^* = I_*$;
2. Функция f интегрируема на $[a, b]$;
3. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta :$

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon;$$

4. $\forall \varepsilon > 0 \exists T :$

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon;$$

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} S(f, T) - s(f, T) &= \sum_{k=1}^n \sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k - \sum_{k=1}^n \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k = \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k - \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k \right) = \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

1 \Rightarrow 2 Применяем критерий Дарбу.

2 \Rightarrow 3 Пусть f - интегрируемая функция на $[a, b]$. Тогда $I^* = I_* = I$.

По лемме 10.3

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta : \left\{ \begin{array}{l} I = I^* \geq S(f, T) - \varepsilon, \\ I = I_* \leq s(f, T) + \varepsilon. \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow I - I \leq s(f, T) - S(f, T) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

По замечанию заключаем

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \leq 2\varepsilon$$

3 \Rightarrow 4 По предыдущему пункту существует такое T с диаметром $\Delta_T < \delta$, значит и просто T существует.

$4 \Rightarrow 1$ В доказательстве критерия Дарбу мы получили следующую цепочку неравенств

$$s(f, T) \leq I_* \leq I^* \leq S(f, T)$$

Тогда

$$0 \leq I^* - I_* \leq S(f, T) - s(f, T) = \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon \Rightarrow \text{при } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ } I^* = I_*$$

□

10.4 Интегрируемость модуля, квадрата и произведения функций

Следствие 10.7. Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то $|f|$ и f^2 интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$ и для любого $[c, d] \subset [a, b]$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[c, d]$.

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Leftrightarrow$ по пункту 4 теоремы 10.6

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T : \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon.$$

Доказательство для модуля функции

(Неравенство треугольника: $|A| - |B| \leq |A - B|, |B| - |A| \leq |A - B| \Rightarrow ||A| - |B|| \leq |A - B|$)

$$\begin{aligned} \omega(|f|, \Delta_k) &= \sup_{x,y \in \Delta_k} ||f(x)| - |f(y)|| \leq \sup_{x,y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| = \omega(f, \Delta_k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^n \omega(|f|, \Delta_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon \end{aligned}$$

Доказательство для квадрата функции

$$\begin{aligned} \omega(f^2, \Delta_k) &= \sup_{x,y \in \Delta_k} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup_{x,y \in \Delta_k} |(f(x) - f(y))(f(x) + f(y))| \leq \\ &\leq \sup_{x,y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)|(|f(x)| + |f(y)|) \leq 2 \sup_{x \in \Delta_k} |f(x)| \sup_{x,y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| = \\ &= 2 \sup_{x \in \Delta_k} |f(x)| \cdot \omega(f, \Delta_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega(f^2, \Delta_k) \Delta x_k &\leqslant \sum_{k=1}^n 2 \sup_{x \in \Delta_k} |f(x)| \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \leqslant 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \leqslant \\ &\leqslant M \cdot \varepsilon, \text{ где } M - \text{ константа.} \end{aligned}$$

В обоих случаях в конце мы применяем теорему 10.6 и заключаем, что функции интегрируемы на $[a, b]$.

Интегрируемость функции на подотрезке докажем далее. \square

Следствие 10.8. *Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то $f \cdot g$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Если f и g интегрируемы, то $f - g$ и $f + g$ интегрируемы. Тогда их квадраты $(f-g)^2$ и $(f+g)^2$ интегрируемы. Следовательно, $\frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) = \frac{1}{4} \cdot 4fg = fg$ интегрируема. \square

10.5 Интегрируемость монотонной функции

Следствие 10.9. *Если f монотонна на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$.*

Доказательство. Без ограничения общности пусть f - возрастающая функция.

$$\omega(f, \Delta_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) \Delta x_k = (*)$$

Пусть $\Delta x_k = \Delta x_j \forall k, j$. Тогда

$$(*) = \Delta x_1 \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \Delta_T (f(b) - f(a))$$

Следовательно, $\forall T$ – разбиение $[a, b]$ на одинаковые части с $\Delta_T < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

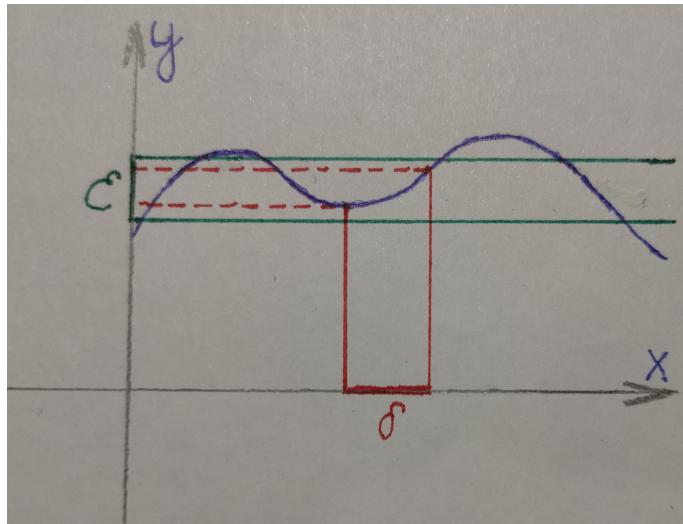
$$\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \leqslant \varepsilon.$$

Для убывающей f доказывается аналогично. \square

10.6 Равномерная непрерывность

Определение 10.10.

Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X , если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ для которого из неравенства $|x - y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Пояснение. Другими словами, существует δ на оси OX такая, что расстояние между x и y меньше, чем δ , и разность между значениями функции в точках x и y помещается в этот ε -корridor.

Замечание 10.11. Если функция является равномерно-непрерывной, то она является и непрерывной, т. к. определение непрерывности слабее:

f – непрерывна на $X \Rightarrow \forall x_0 \in X \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

В обратную сторону это не правда, см. пункт 2) примера 10.12.

Пример 10.12. 1. Функция $f(x) := \sin x$ равномерно непрерывна на \mathbb{R} , т.к. по теореме Лагранжа $|\sin x - \sin y| = |\cos \xi| \cdot |x - y| \leq |x - y|$.

2. Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не равномерно непрерывна на $(0, 1)$, т.к. $f(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \rightarrow 0$.

Пояснение. 1. По теореме Лагранжа $\forall x, y \in \mathbb{R} |\sin x - \sin y| = |(\sin \xi)'(x - y)| = |\cos \xi| |(x - y)| \leq |x - y|$

2. Требуется доказать отрицание определения равномерной непрерывности:

$$\exists \varepsilon = 1 \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in (0, 1) \ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geq 1$$

Будем доказывать для $\delta = \frac{1}{n}$, потому что всегда можно взять $\frac{1}{n} < \delta$. Тогда пусть $x = x_n = \frac{1}{n}$, $y = y_n = \frac{1}{2n} \Rightarrow |x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$, $|f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geq 1$.

10.7 Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 10.13 (Кантора). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Доказательство. Пусть f - непрерывная функция на $[a, b]$, но не равномерно непрерывная:

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta = \frac{1}{n} > 0 \exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \rightarrow |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

x_n - ограниченная последовательность, т. к. $x_n \in [a, b] \Rightarrow$ по теореме Больцано $\exists x_{n_k} \rightarrow x \Rightarrow$ из неравенства $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ следует, что $x_{n_k} - \frac{1}{n} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n}$. $x_{n_k} - \frac{1}{n} \rightarrow x, x_{n_k} + \frac{1}{n} \rightarrow x \Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $y_{n_k} \rightarrow x$.

$$\varepsilon \leq |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x) + f(x) - f(y_{n_k})| \leq |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$$

Но $|f(x_{n_k}) - f(x)| \rightarrow 0, |f(x) - f(y_{n_k})| \rightarrow 0$, а $\varepsilon > 0$ - противоречие. \square

Следствие 10.14. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда f интегрируема по Риману на $[a, b]$.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы f равномерно непрерывна на $[a, b]$. Поэтому

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta \forall x, y \in \Delta_k \rightarrow \sup_{x, y \in \Delta_k} |f(x) - f(y)| < \varepsilon \forall k \Rightarrow \\ \Rightarrow \omega(f, \Delta_k) < \varepsilon \forall k. \end{aligned}$$

Для такого разбиения $\sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon |b - a| \Rightarrow$ по теореме 10.6 функция f интегрируема по Риману на $[a, b]$. \square

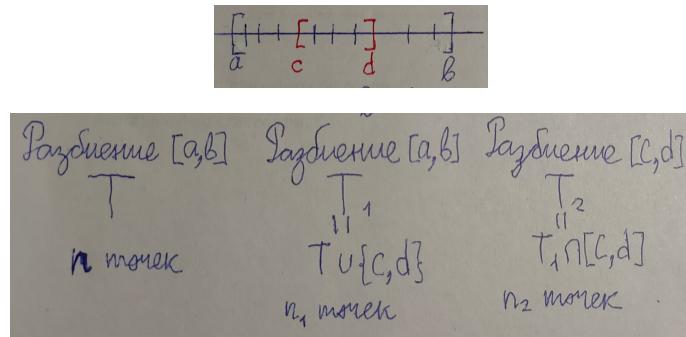
Лекция 28: Формула Ньютона-Лейбница

10.8 Аддитивность интеграла

Следствие 10.15. *Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $[c, d] \subseteq [a, b]$, то f интегрируема на отрезке $[c, d]$.*

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ по теореме 10.6 $\forall \varepsilon > 0 \exists T :$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \Delta_k} f(x) \cdot \Delta_k - \sum_{k=1}^n \inf_{x \in \Delta_k} f(x) \cdot \Delta_k < \varepsilon \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 0 \leq S(f, T) - s(f, T) < \varepsilon \end{aligned}$$



$$\sum_{k=1}^{n_2} \omega(f, \Delta_k^2) \Delta^2 x_k \leq \sum_{k=1}^{n_1} \omega(f, \Delta_k^1) \Delta^1 x_k \leq \sum_{k=1}^n \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k < \varepsilon$$

Первое неравенство выполняется, потому что в новую сумму мы добавили слагаемые отрезков, не входящих в отрезок $[c, d]$, но принадлежащих отрезку $[a, b]$, колебание функции всегда неотрицательно (разность супремума и инфимума функции неотрицательна). Здесь мы переходим от разбиения T_2 к разбиению T_1 . Второе неравенство выполняется, потому что T_1 - это измельчение разбиения T . На измельчении нижняя сумма Дарбу $s(f, T_1)$ только больше, а верхняя сумма Дарбу $S(f, T_1)$ только меньше, значит разность $S(f, T_1) - s(f, T_1) \leq S(f, T) - s(f, T)$ (лемма 10.2, пункт 2). \square

Следствие 10.16. Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $c \in [a, b]$, то f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ и верно равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Доказательство. Если интеграл слева существует, то существуют и интегралы справа по предыдущему следствию (на самом деле утверждение верно в обратную сторону, но доказательство на лекциях не приводилось).

Замечание 10.17. Если f - интегрируема на $[a, b]$, то для любой последовательности разбиений T_n такой, что $\Delta_{T_n} \rightarrow 0$, интегральная сумма $\sigma(f, T_n, \xi_n) \rightarrow I$.

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ по определению $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ } \Delta_T < \delta \text{ и } \xi \rightarrow |\sigma(f, T_n, \xi_n) - I| < \varepsilon$

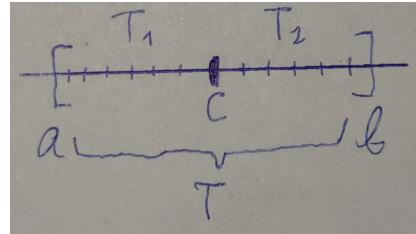
Тогда

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \Delta_{T_n} < \delta \rightarrow |\sigma(f, T_n, \xi_n) - I| < \varepsilon \Rightarrow \sigma(f, T_n, \xi_n) \rightarrow I$$

\square

Это означает, что если функция интегрируемая, то можно выбирать любое разбиение, с стремящимся к нулю диаметром, чтобы найти интеграл.

Будем брать такое разбиение T отрезка $[a, b]$, которые содержат точку c . T_1 - разбиение отрезка $[a, c]$, T_2 - разбиение отрезка $[c, b]$.



f - интегрируема $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta \rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$

$\Delta_T < \delta \Rightarrow \Delta_{T_1} < \delta, \Delta_{T_2} < \delta \Rightarrow |\sigma(f, T_1, \xi_1) - I_1| < \varepsilon, |\sigma(f, T_2, \xi_2) - I_2| < \varepsilon$

Пусть отрезок $[a, c]$ поделен на n_1 отрезков. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma(f, T, \xi) &= \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n_1} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=n_1+1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sigma(f, T_1, \xi_1) + \sigma(f, T_2, \xi_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I_1 - I_2| = |\sigma(f, T_1, \xi_1) + \sigma(f, T_2, \xi_2) - I_1 - I_2| \leqslant \\ &\leqslant |\sigma(f, T_1, \xi_1) - I_1| + |\sigma(f, T_2, \xi_2) - I_2| < 2\varepsilon \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma(f, T, \xi) \rightarrow I, \sigma(f, T, \xi) \rightarrow I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 + I_2 = I$$

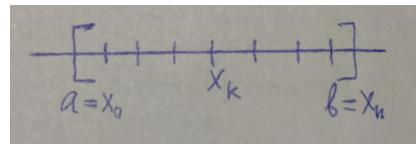
□

10.9 Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 10.18 (Формула Ньютона–Лейбница). *Пусть F - первообразная интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ функции f . Тогда*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение T отрезка $[a, b]$.



$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + \dots \\ \dots + F(x_n) - F(x_{n-1}) &= \sum_{k=1}^n F(x_k) - F(x_{k-1}) = (*) \end{aligned}$$

Применяем теорему Лагранжа для каждого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$:

$$(*) = \sum_{k=1}^n F'(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = \sigma(f, T, \xi)$$

Число $F(b) - F(a)$ равняется интегральной сумме Римана $\sigma(f, T, \xi)$. Поскольку функция интегрируема, то по замечанию из следствия выше при $T \rightarrow 0$ интегральная сумма Римана стремится к интегралу $\int_a^b f(x) dx$. При этом, как мы показали, для любого разбиения T всегда есть такая разметка ξ , когда $F(b) - F(a) = \sigma(f, T, \xi)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

□

Далее будем использовать соглашение: при $b > a$ по определению

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

10.10 Существование первообразной

Теорема 10.19. Пусть f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда функция

$$F(x) := \int_a^x f(x) dx$$

непрерывна на $[a, b]$. Кроме того, если f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Доказательство первого утверждения.

$$y \in [a, b]$$

$$F(y) = \int_a^y f(x) dx$$

$$|F(y) - F(x_0)| = \left| \int_a^y f(x) dx - \int_a^{x_0} f(x) dx \right| = \left| \int_{x_0}^y f(x) dx \right|$$

f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ ограничена: $|f(x)| \leq M$

$$\left| \int_{x_0}^y f(x) dx \right| \leq \left| \int_{x_0}^y M dx \right| = M \cdot |y - x_0| \Rightarrow$$

\Rightarrow при $y \rightarrow x_0$ $F(y) \rightarrow F(x_0) \Rightarrow F(x)$ непрерывна.

Доказательство второго утверждения.

Пусть теперь f непрерывна в $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Воспользуемся монотонностью интеграла и проинтегрируем каждую часть.

$$\int_{x_0}^x (f(x_0) - \varepsilon) dx \leq \int_{x_0}^x f(x) dx \leq \int_{x_0}^x (f(x_0) + \varepsilon) dx$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

Пусть $x > x_0$, поделим на $x - x_0$.

$$f(x_0) - \varepsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Это означает, что предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ существует и он равен $f(x_0)$. Таким образом, F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Если $x < x_0$, то когда поделим на $x - x_0$ знаки перевернутся, но в итоге мы получим тоже самое. \square

Следствие 10.20. Пусть f непрерывна на $[a, b]$, тогда у f существует первообразная.

Пояснение. Если во всех точках f непрерывна, то по теореме 10.19 первообразная f существует во всех точках.

10.11 Формула интегрирования по частям

Теорема 10.21 (Формула интегрирования по частям). Пусть f, g — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции. Тогда

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Доказательство. $F(x) = g(x) \cdot f(x)$

$$F'(x) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

Непрерывно дифференцируемая функция — это дифференцируемая функция, у которой первая производная непрерывна. Это означает, что $g'(x) \cdot f(x)$ и $g(x) \cdot f'(x)$ непрерывны $\Rightarrow g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$ непрерывна. У непрерывных функций есть первообразная по предыдущему следствию. Тогда мы можем их интегрировать.

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a)$$

$$\begin{aligned} g(b) \cdot f(b) - g(a) \cdot f(a) &= F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x) dx = \int_a^b g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x) dx = \\ &= \int_a^b g'(x) \cdot f(x) dx + \int_a^b g(x) \cdot f'(x) dx \end{aligned}$$

□

Пример 10.22. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x dx.$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 x d \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln|x^2+1| \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

Глава 11

Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций

Лекция 29: Несобственный интеграл

11.1 Формула интегрирования подстановкой

Теорема 11.1. Пусть f — непрерывна на $[a, b]$, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Доказательство. f — непрерывна на $[a, b] \Rightarrow f$ — интегрируема на $[\varphi(a), \varphi(b)]$ (функция интегрируема на любом подотрезке $[a, b]$) и у f есть первообразная (по теореме 10.19).

Тогда у функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ тоже есть первообразная $F(\varphi(t))$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$$

□

Пример 11.2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x} + 1} dx = (*)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Применяем формулу

$$(*) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \int_{\operatorname{tg} 0}^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} \frac{dy}{y^2 + 2} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{y}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$$

11.2 Мера Жордана (дополнительный материал)

Пусть Δ — параллелепипед в \mathbb{R}^n , являющийся декартовым произведением промежутков вида $[a_i, b_i]$, (a_i, b_i) , $[a_i, b_i)$ или $(a_i, b_i]$. Мера Жордана параллелепипеда Δ определяется как произведение

$$\mu\Delta = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Для ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определяются:

- внешняя мера Жордана

$$\mu^*E = \inf \sum_{k=1}^N \mu\Delta_k, \quad \bigcup_k \Delta_k \supset E$$

- внутренняя мера Жордана

$$\mu_*E = \sup \sum_{k=1}^N \mu\Delta_k, \quad \bigcup_k \Delta_k \subset E, \quad \Delta_k \cap \Delta_m = \emptyset, \text{ если } k \neq m.$$

Здесь $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_N$ — параллелепипеды описанного выше вида.

Определение 11.3. Множество E называется измеримым по Жордану (или квадрируемым), если $\mu^*E = \mu_*E$. В этом случае мера Жордана равна $\mu E = \mu^*E = \mu_*E$.

11.3 Несобственный интеграл Римана

Определение 11.4. Пусть f интегрируема на каждом отрезке $[a, x]$ при $x < b$ ($b \in (-\infty, +\infty]$). Говорят, что несобственный интеграл

$$\int_a^b f(t) dt$$

сходится, если существует предел

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \int_a^x f(t) dt.$$

В этом случае значение несобственного интеграла полагают равным значению данного предела. В противном случае (если предела не существует) говорят, что несобственный интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с особенностью в нижнем пределе интегрирования.

Пример 11.5.

$$\int_1^b \frac{1}{x^p} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1), & p \neq 1, \\ \ln b, & p = 1. \end{cases}$$

Предел при $b \rightarrow \infty$ существует тогда и только тогда, когда $p > 1$.

С другой стороны,

$$\int_b^1 \frac{1}{x^p} dt = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(1 - b^{1-p}), & p \neq 1, \\ -\ln b, & p = 1. \end{cases}$$

Предел при $b \rightarrow 0$ существует тогда и только тогда, когда $p < 1$.

11.4 Свойства несобственного интеграла

Теорема 11.6. Пусть f, g интегрируемы на каждом отрезке $[a, x]$ при $x < b$ и пусть для них определены несобственные интегралы на промежутке $[a, b)$. Тогда

1. если $b \in \mathbb{R}$ и f интегрируема на $[a, b]$, то значение несобственного интеграла на промежутке $[a, b)$ совпадает со значением обычного интеграла Римана по отрезку $[a, b]$;
2. функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a, b)$ и

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

3. если $c \in [a, b)$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

Доказательство. 1. По определению $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$.

По теореме 10.19 если $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ интегрируема на $[a, b]$, то $F(t)$ непрерывна на $[a, b] \Rightarrow \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = F(b) = \int_a^b f(x) dx$.

2. $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t \alpha f(x) + \beta g(x) dx$ (здесь уже обычный определённый интеграл, применяем линейность) $= \lim_{t \rightarrow b^-} \alpha \int_a^t f(x) dx + \beta \int_a^t g(x) dx = \alpha \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx + \beta \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

Мы предполагаем, что интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b g(x) dx$ существуют, тогда существует интеграл $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx$.

3. $\int_a^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx = (*)$

При $c \in [a, b)$ для уже определённого интеграла применяем аддитивность:

$$(*) = \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx + \int_c^t f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

В отличие от пункта 2 здесь равенство выполняется в обе стороны: $\int_a^c f(x) dx$ является константой, поэтому предел $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_c^t f(x) dx$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x) dx$.

□

11.5 Формула интегрирования подстановкой

Теорема 11.7. Пусть f непрерывна на $[a, b]$ и интегрируема в несобственном смысле, $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ - непрерывно дифференцируемое отображение, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(t) \rightarrow b$ при $t \rightarrow \beta$. Тогда функция $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[\alpha, \beta]$ и

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Доказательство. Из условия теоремы знаем, что

$$\exists \int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b^-} \int_a^y f(x) dx$$

Рассмотрим следующий интеграл (мы не знаем заранее, существует ли он):

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \lim_{s \rightarrow \beta} \int_\alpha^s f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

При этом не важно с какой стороны s стремится к β (справа или слева), потому что мы определили интеграл как в случае $\alpha < \beta$, так и в случае $\beta < \alpha$.

Для данного определённого интеграла под пределом действует формула интегрирования заменой (теорема 11.1).

$$\lim_{s \rightarrow \beta} \int_{\alpha}^s f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \lim_{s \rightarrow \beta} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x) dx$$

$\varphi(\alpha) = a, \varphi(s) \rightarrow b$ при $s \rightarrow \beta \Rightarrow$

$$\lim_{s \rightarrow \beta} \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx$$

что тоже самое, что интеграл в начале доказательства. Значит интеграл $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$ существует и равен $\int_a^b f(x) dx$. \square

11.6 Формула интегрирования по частям

Теорема 11.8. Пусть f, g непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$ и существует предел $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x)$. Тогда функции $f'g$ и fg' одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b]$ и в случае интегрируемости

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Доказательство. Если существует $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x)$, то $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a)$ – это число. Тогда функции $f'g$ и fg' одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b]$.

В случае интегрируемости

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)g'(t) dt$$

Применяем формулу интегрирования по частям для определённого интеграла

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t)g'(t) dt &= \lim_{x \rightarrow b-} \left(f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t) dt \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t) dt \end{aligned}$$

\square

11.7 Критерий Коши

Теорема 11.9 (Критерий Коши). *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; b]$, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a; \xi] \subseteq [a; b]$ и неограничена в левой окрестности точки $x = b$. Тогда для сходимости интеграла*

$$\int_a^b f(x) dx$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число η , что при любых $\eta_1, \eta_2 \in (\eta; b)$

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Запишем критерий Коши для функции $F(x) = \int_a^x f(t) dt$:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \Leftrightarrow & \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \eta > 0 \ \forall \eta_1, \eta_2 \in B_\delta(b) \rightarrow |F(\eta_1) - F(\eta_2)| < \varepsilon \Rightarrow \\ \Rightarrow \left| \int_a^{\eta_1} f(x) dx - \int_a^{\eta_2} f(x) dx \right| &= \left| \int_a^{\eta_1} f(x) dx + \int_{\eta_2}^a f(x) dx \right| = \left| \int_{\eta_2}^{\eta_1} f(x) dx \right| = \\ &= \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x) dx \right| < \varepsilon \end{aligned}$$

□

Лекция 30: Абсолютная сходимость

11.8 Абсолютная сходимость

Определение 11.10. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(t) dt$ сходится **абсолютно**, если сходится интеграл $\int_a^b |f(t)| dt$.

Предложение 11.11. Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.

Доказательство. Запишем критерий Коши (теорема 11.9)

$$\int_a^b |f(x)| dx \text{ - сходится} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \eta_1, \eta_2 \in B_\delta(b) \rightarrow \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

Применяем замечание 9.8 (первое неравенство)

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x) dx \right| \leq \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)| dx \leq \left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)| dx \right| < \varepsilon$$

Значит сходится интеграл $\int_a^b f(t) dt$. □

Замечание 11.12. Исследование абсолютной сходимости сводится к исследованию сходимости интеграла от неотрицательной функции. В случае неотрицательной функции f функция F оказывается монотонной, поэтому сходимость интеграла от неотрицательной функции равносильна ограниченности F на $[a, b]$ (применяем теорему Вейерштрасса).

11.9 Условная сходимость

Определение 11.13. Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(t) dt$ сходится **условно**, если сам интеграл сходится, но не сходится абсолютно.

Пример 11.14. Примером условно сходящегося интеграла может служить интеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$.

Доказательство. Формула интегрирования по частям дает следующее равенство

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x} \Big|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx,$$

Последний интеграл в этом равенстве сходится абсолютно, поскольку

$$\int_1^\infty \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^\infty \left| \frac{1}{x^2} \right| dx \text{ - сходится.}$$

В то же время, $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ не сходится абсолютно. Действительно,

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx \geq \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x} dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x} dx \text{ (формула: } 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x\text{)}$$

Первый интеграл в последнем равенстве расходится, а второй, как и выше, равен

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\sin x}{x} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2} dx \text{ - сходится.}$$

Это означает, что $\int_1^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ является суммой сходящегося и расходящегося интеграла и, следовательно, расходится. □

11.10 Несобственный интеграл от знакопостоянной функции

Теорема 11.15 (Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции). *Пусть функция $f(x) \geq 0$ интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b]$. Тогда сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$ эквивалентна условию*

$$\sup_{b' \in [a, b]} \int_a^{b'} f(x) dx < +\infty.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(y) = \int_a^y f(x) dx$. На любом отрезке $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема (в силу следствия 10.15) и, поскольку $f(x) \geq 0$, $F(y)$ - монотонна:

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(x) dx = \int_a^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \geq \int_a^{x_1} f(x) dx = F(x_1).$$

Тогда, в силу теоремы Вейерштраса 3.18, если $F(y)$ - ограничена, то

$$\sup_{y \in [a, b]} F(y) = \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

В обратную сторону

$$\exists \int_a^b f(x) dx = \lim_{y \rightarrow b} \int_a^y f(x) dx \Rightarrow F(x) - \text{ограничена.}$$

□

11.11 Первый признак сравнения

Теорема 11.16 (Первый признак сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b]$ и для любого $x \in [a, b]$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда:*

- из сходимости $\int_a^b g(x) dx$ следует сходимость $\int_a^b f(x) dx$;
- из расходимости $\int_a^b f(x) dx$ следует расходимость $\int_a^b g(x) dx$.

Доказательство. Поскольку $0 \leq f(x) \leq g(x)$, из монотонности интеграла 9.7 следует, что для любого $y \in [a, b]$:

$$0 \leq \int_a^y f(x) dx \leq \int_a^y g(x) dx.$$

Если $\int_a^b g(x) dx$ сходится, то по критерию сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции 11.15 функция $G(y) = \int_a^y g(x) dx$ — ограничена. Тогда из неравенства выше следует, что и функция $F(y) = \int_a^y f(x) dx$ ограничена. Отсюда, в силу теоремы 11.15, следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Если же $\int_a^b f(x) dx$ расходится, то $F(y)$ неограничена, как и функция $G(y)$. \square

11.12 Эквивалентность в смысле сходимости интегралов

Определение 11.17. Будем говорить, что $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны в смысле сходимости интегралов при $x \rightarrow b - 0$ (обозн. $f(x) \xrightarrow{\text{ex.}} g(x)$ при $x \rightarrow b - 0$), если $\exists m, M > 0, b_1 < b$ такие, что $\forall x \in [b_1, b)$ выполняются неравенства

$$mg(x) \leq f(x) \leq Mg(x).$$

Теорема 11.18 (Второй признак сравнения). Пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ и $f(x) \xrightarrow{\text{ex.}} g(x)$ при $x \rightarrow b - 0$.

Тогда несобственные интегралы $\int_a^b g(x) dx$ и $\int_a^b f(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Функции эквивалентны в терминах сходимости, когда $\exists b_1 : \forall x \in [b_1, b)$ для которых выполнено $mg(x) \leq f(x) \leq Mg(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{b_1} f(x) dx + \int_{b_1}^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b g(x) dx = \int_a^{b_1} g(x) dx + \int_{b_1}^b g(x) dx.$$

При этом $\int_a^{b_1} f(x) dx$ и $\int_a^{b_1} g(x) dx$ — определенный интегралы, не влияющие на сходимость.

Исследуем интегралы $\int_{b_1}^b f(x) dx$ и $\int_{b_1}^b g(x) dx$. Если $\int_{b_1}^b g(x) dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{b_1}^b Mg(x) dx = M \int_{b_1}^b g(x) dx$. Тогда по первому признаку сравнения 11.16 интеграл $\int_{b_1}^b f(x) dx$ тоже сходится.

И наоборот, если $\int_{b_1}^b g(x) dx$ расходится, то расходится и $\int_{b_1}^b mg(x) dx = m \int_{b_1}^b g(x) dx$. Тогда по первому признаку сравнения 11.16 интеграл $\int_{b_1}^b f(x) dx$ тоже расходится. \square

11.13 Второй признак сравнения

Предложение 11.19. Если $f \geq 0$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow b - 0$, то $f(x) \stackrel{ex}{\sim} g(x)$.

Доказательство. $g(x) \sim f(x)$ при $x \rightarrow b - 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Тогда $\exists \delta : \forall x \in B'_\delta(b) :$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}.$$

Тогда $g(x) > 0$ и

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x).$$

□

Предложение 11.20. Пусть $f_i(x), g_i(x) i \in \{1, 2, 3\}$ - неотрицательные на промежутке $[a, b)$ функции, причем $f_3(x) > 0, g_3(x) > 0$ и $f_i(x) \stackrel{ex}{\sim} g_i(x) i \in \{1, 2, 3\}$ при $x \rightarrow b - 0$. Тогда

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \stackrel{ex}{\sim} \frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \text{ при } x \rightarrow b - 0.$$

Доказательство. ????????????????????

□

Пример 11.21. Исследовать на сходимость $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x} \sin(\frac{2+\cos x}{x^2})}{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^\alpha} dx$.

Лекция 31: Еще немного про числовые ряды

11.14 Первый признак сравнения

Определение 11.22. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **знаком постоянным**, если или $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$, или $a_n \leq 0 \forall n \in \mathbb{N}$.

Предложение 11.23 (Первый признак сравнения). Пусть $0 \leq a_n \leq b_n$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Наоборот, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то расходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Было доказано ранее.

Замечание 11.24. Поскольку первые несколько членов не влияют на сходимость ряда, достаточно, чтобы неравенства выше выполнялись начиная с некоторого момента $\forall n > n_0$. Это называется **принципом локализации**.

Следствие 11.25 (Признак Вейерштрасса). Если $|a_n| \leq b_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Доказательство. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ сходится по первому признаку сравнения. Если ряд сходится абсолютно, то он и просто сходится. \square

11.15 Второй признак сравнения

Теорема 11.26 (Второй признак сравнения). Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$. Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — эквивалентны по сходимости, т.е. сходятся/расходятся одновременно.

Доказательство. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \Rightarrow$ из определения предела следует, что $\exists n \geq N \rightarrow \frac{1}{2}c \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{3}{2}c$ (отступили на $\frac{1}{2}c$ обе стороны) $\Rightarrow \frac{1}{2}c \cdot b_n \leq a_n \leq \frac{3}{2}c \cdot b_n$

c — положительное число, поэтому можно применять первый признак сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}c \cdot b_n$ — расходится (по первому признаку сравнения) $\Rightarrow \frac{3}{2}c \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — расходится.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ — сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}c \cdot b_n$ — сходится (по первому признаку сравнения) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходится.

\square

Пример 11.27. Теперь мы можем ответить на вопрос, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{n^2}$, т. к. $\arctg \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.

Следствие 11.28. Если $a_n \geq 0$ и $a_n \sim b_n, n \rightarrow \infty$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Доказательство. Определение эквивалентности для функций: $f(x) \sim g(x)$ при $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

В частности верно для функций от n : $a_n \sim b_n$ при $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0$

По предыдущей теореме получаем требуемое. \square

11.16 Интегральный признак

Предложение 11.29. Пусть $f(x) \geq 0$ и не возрастает на промежутке $[1, +\infty)$.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Обозначим через $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$ частичную сумму ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Поскольку $f(x) \geq 0$, последовательность S_n монотонно возрастает.

Заметим, что $\forall b > 1$ функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[1, b]$, поскольку $f(x)$ монотонна (следствие 10.9). Также заметим, что в силу монотонности $f(x)$ для $x \in [n, n+1]$ выполнено

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1).$$

Тем самым, $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} f(n) dx &= f(n)((n+1)-n) = f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1) = \\ &= f(n+1)((n+1)-n) = \int_n^{n+1} f(n+1) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, если $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходится, то

$$S_n - f(1) = f(2) + \dots + f(n) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx < +\infty,$$

что означает ограниченность S_n и, в силу монотонности S_n и теоремы Вейерштрасса 2.14, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Если же $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ расходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx = +\infty$, и

$$S_n = f(1) + \dots + f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \rightarrow +\infty,$$

что означает расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$. □

Пример 11.30. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Применяя интегральный признак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \text{сходится} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx - \text{сходится} \Leftrightarrow p > 1$$

11.17 Признак Даламбера

Теорема 11.31 (Признак Даламбера). *Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда*

1. если существует $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0, 1)$ такие, что $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q \forall k \geq k_0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ сходится};$$

2. если $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \rightarrow \frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1. Знаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$

Пусть $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq q < 1 \forall k \geq k_0$

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot a_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot a_{k-1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \cdot a_{k_0} \leq q^{k-k_0+1} a_{k_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_k \leq q^{k-k_0} a_{k_0} \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} a_{k_0} \Rightarrow \text{ряд } \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} a_{k_0} \text{ сходится} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ сходится (по первому признаку сравнения)}$$

Значит по принципу локализации ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

2. $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq 1 \Rightarrow a_{k+1} \geq a_k \geq \dots \geq a_{k_0} > 0 \Rightarrow a_k \not\rightarrow 0$, т. е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

Следствие 11.32 (Признак Даламбера в предельной форме). *Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$, тогда*

1. при $q < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

2. при $q > 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

3. при $q = 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ может сходиться, а может и расходиться.

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Возьмём $q' = \frac{q+1}{2}$ - середина отрезка $[q, 1]$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

$$\exists N : \forall n > N \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} < q' < 1 \Rightarrow$$

по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2. $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \Rightarrow$

по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

3. $q = 1$. Пример: $a_n = (\frac{1}{n})^p$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^p = 1 \text{ при любом } p$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^p$ сходится при $p > 1$ и не сходится $p \leq 1$.

□

11.18 Радикальный признак Коши

Теорема 11.33 (Радикальный признак Коши). *Пусть $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$. Тогда*

1. если существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $q \in (0, 1)$ такие, что $\sqrt[k]{a_k} \leq q \ \forall k \geq k_0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

2. если $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \rightarrow \sqrt[k]{a_k} \geq 1$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится.

Доказательство. 1. Пусть $\sqrt[k]{a_k} \leq q < 1 \Rightarrow a_k \leq q^k \ \forall k > k_0$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ - сходится, т. к. $q \in (0, 1) \Rightarrow$ по первому признаку сравнения $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

2. $\sqrt[k]{a_k} \geq 1 \Rightarrow a_k \geq 1 \forall k \geq k_0 \Rightarrow a_n \not\rightarrow 0 \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится в силу необходимого условия сходимости ряда.

□

Следствие 11.34 (Признак Коши в предельной форме). *Пусть $a_k > 0 \forall k \in \mathbb{N}$ и $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, тогда*

1. при $q < 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится;

2. при $q > 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится;

3. при $q = 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ может сходиться, а может и расходится.

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Возьмём $q' = \frac{q+1}{2}$ - середина отрезка $[q, 1]$.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то

$$\exists N : \forall n > N \rightarrow \sqrt[n]{a_n} < q' < 1 \Rightarrow$$

по признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2. $q > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \sqrt[n]{a_n} \geq 1 \Rightarrow$

по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

3. $q = 1$. Пример: $a_n = (\frac{1}{n})^p$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p = 1^p = 1 \text{ при любом } p.$$

Здесь мы воспользовались $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^p$ сходится при $p > 1$ и не сходится $p \leq 1$.

□

Пример 11.35. Признак Коши сложнее, однако сильнее, чем признак Даламбера. Если признак Даламбера подтверждает сходимость или расходимость ряда, то и признак Коши делает то же, однако обратное неверно:

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^k - k}$$

Признак Даламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1}-n-1}}{2^{(-1)^n-n}} = 2^{(-1)^{n+1}-(-1)^n-n-1+n} = 2^{2(-1)^{n+1}-1} = \begin{cases} 2^{-3}, & n - \text{чётное}; \\ 2, & n - \text{нечётное}. \end{cases}$$

Следовательно, признак Даламбера не применим.

Признак Коши. $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n]{2^{-n}} \leq \sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}} \leq \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{2^{-n}} = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Знаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0) \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}, \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

По теореме о зажатой последовательности $\sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}} \rightarrow \frac{1}{2} < 1$ при $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, ряд сходится.

11.19 Признак Гаусса

Теорема 11.36 (Признак Гаусса). *Пусть $a_n > 0$. Если существует $p \in \mathbb{R}, \delta > 0$ такие, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O(\frac{1}{n^{1+\delta}})$, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, т. е. при $p > 1$ сходится и при $p \leq 1$ расходится.*

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) \\ & \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) = \ln \left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \right) = (1) \end{aligned}$$

Применим формулу Тейлора для $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$

$$\begin{aligned} (1) &= \ln \left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p \right) = \ln \left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \right) \cdot \right. \\ & \left. \cdot \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2} \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = (2) \end{aligned}$$

Знаем, что $o(g) = O(g)$. Тогда

$$(2) = \ln \left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) \right) \cdot \left(1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) =$$

$$= \ln \left(1 - \frac{p}{n} + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = (3)$$

Если $\delta > 1$, то $O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$; если $\delta < 1$, то $O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$.

Возьмём $\delta' = \min(\delta, 1)$. Тогда

$$(3) = \ln \left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right) \right) = (4)$$

Применим формулу Тейлора для $\ln(1+x)$

$$(4) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right) + O\left(O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right)$$

Следовательно по определению О-большого $\exists C > 0$:

$$\ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) \leq C \frac{1}{n^{1+\delta'}}$$

По первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right)$ сходится.

Значит

$$\exists \lim_{N \rightarrow \infty} S_N = S$$

$$S_N = \sum_{n=1}^N \ln \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) = \ln \left(\prod_{n=1}^N \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n} \right)^p \right) = \ln \left(\frac{a_{N+1}}{a_1} (N+1)^p \right)$$

стремится к S при $N \rightarrow \infty$.

$$\ln \left(\frac{a_{N+1}}{a_1} (N+1)^p \right) = S + o(1)$$

$$\frac{a_{N+1}}{a_1} (N+1)^p = e^S \cdot e^{o(1)} = (5)$$

Применим формулу Тейлора для $e^{o(1)}$

$$(5) = e^S \cdot (1 + o(1) + o(o(1))) = e^S \cdot (1 + o(1))$$

$$\frac{a_{N+1}}{\frac{e^S a_1}{(N+1)^p}} = 1 + o(1) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{N+1}}{\frac{e^S a_1}{(N+1)^p}} = 1 \Rightarrow a_n \sim \frac{\text{const}}{n^p} \text{(второй признак сравнения)}$$

□

Лекция 32: Признаки Абеля и Дирихле

11.20 Признак Дирихле

Теорема 11.37 (Признак Дирихле). *Пусть последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ограничена:*

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \rightarrow \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq C,$$

а последовательность $\{b_k\}$ монотонно стремится к нулю. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство.

$$A_n = \sum_{k=1}^n a_k, A_n - \text{ограничена}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^n A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} = \\ &= \sum_{k=1}^n A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \quad (A_0 = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n \end{aligned}$$

A_n - ограничена, $b_n \rightarrow 0 \Rightarrow A_n \cdot b_n \rightarrow 0$.

Докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ - сходится абсолютно, значит и просто сходится.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^n |A_k (b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=1}^n |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| = (*)$$

Без ограничения общности последовательность b_k - монотонно убывает ($b_k \geq b_{k+1}$). Пусть ряд A_k ограничен числом M .

$$(*) \leq \sum_{k=1}^n M(b_k - b_{k+1}) = M \sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_{n+1}) = Mb_1 - Mb_{n+1} \rightarrow Mb_1$$

при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится. □

11.21 Признак Абеля

Теорема 11.38 (Признак Абеля). Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, последовательность $\{b_k\}$ монотонна и ограничена. Тогда ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходится.

Доказательство. b_n - монотонна и ограничена \Rightarrow (по т. Вейерштрасса) $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$

Пусть $b'_n = b_n - b \Rightarrow b'_n$ стремится монотонно к нулю.

По признаку Дирихле сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b'_n$. Здесь мы пользуемся, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится \Rightarrow частичная сумма $\sum_{k=1}^n a_k$ ограничена.

$$\sum_{k=1}^n a_k b'_k = \sum_{k=1}^n a_k (b_k - b) = \sum_{k=1}^n a_k b_k - b \sum_{k=1}^n a_k$$

$\sum_{k=1}^n a_k b'_k$ - сходится, $b \sum_{k=1}^n a_k$ - сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^n a_k b_k$ - сходится. \square

Следствие 11.39 (Следствие из признака Абеля). Пусть последовательность $\{b_k\}$ монотонна и $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = b \in (0, +\infty)$. Тогда ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство. 1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится, последовательность b_k - монотонна, ограничена (т. к. имеет предел) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится (по признаку Абеля).

2. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится.

Т. к. $b_k \rightarrow b > 0$, то $\exists k_0 : \forall k \geq k_0 \rightarrow b_k > 0$. Тогда последовательность $\{\frac{1}{b_k}\}$ - монотонна с $k \geq k_0$ и имеет предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{b_k} = \frac{1}{b} > 0$.

Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится, то $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b_k$ - сходится.

Последовательность $b'_k = \{\frac{1}{b_k}\}$ - монотонна, ограничена $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k \cdot b_k) \cdot b'_k$ - сходится по признаку Абеля $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ - сходится \Rightarrow по принципу локализации $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится. \square

Замечание 11.40. Следствие из признака Абеля утверждает, что характер сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ не изменится, если последовательность $\{a_k\}$ заменить на эквивалентную последовательность $\{c_k\}$ (предел отношения последовательностей $\{a_k\}$ и $\{c_k\}$ должен стремиться к 1) при условии, что последовательность $\{\frac{c_k}{a_k}\}$ монотонна.

11.22 Признак Лейбница

Теорема 11.41 (Признак Лейбница). *Если последовательность b_k монотонно стремится к нулю, то ряд Лейбница $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ сходится.*

Доказательство. $\sum_{k=1}^n (-1)^k = \begin{cases} -1, & k - \text{нечётное} \\ 0, & k - \text{чётное} \end{cases}$ - ограничена, b_k монотонно стремится к нулю \Rightarrow по признаку Дирихле $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ - сходится. \square

Пример 11.42. Последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ монотонно стремится к нулю \Rightarrow по признаку Лейбница ряд $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^n}{n}$ - сходится.

Замечание 11.43. Из того, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{b_k}{a_k} = 1$ не следует, что $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Доказательство. Пусть, например, $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$, $b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}$. Тогда $\frac{b_k}{a_k} = 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. При этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, т. к. $b_k = a_k + c_k$, где $c_k = \frac{1}{k}$ и, как было показано ранее гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится. \square

11.23 Теоремы о среднем

Теорема 11.44 (Первая теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, и $g(x)$ не меняет знак (то есть либо всюду неотрицательна: $g(x) \geq 0$, либо всюду неположительна $g(x) \leq 0$). Тогда существует такое число μ , $m \leq \mu \leq M$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Пусть без ограничения общности $g(x) \geq 0$.

$$\begin{aligned} m \leq f(x) \leq M &\Rightarrow mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

1. Если $\int_a^b g(x) dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) dx = 0 = \mu \int_a^b g(x) dx$

2. Если $\int_a^b g(x) dx \neq 0 \Rightarrow \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$

В частности $m \leq \mu \leq M$.

□

Следствие 11.45 (Первая теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ - непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$ и не меняет знак. Тогда существует такое число $c \in [a, b]$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Доказательство. Если функция f непрерывна, то тогда она принимает все значения от наибольшего до наименьшего. Тогда $\exists c : \mu = f(c)$, где μ из предыдущей теоремы. Мы можем переписать утверждение предыдущей теоремы так:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx$$

□

Теорема 11.46 (Вторая теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ монотонна (нестрого) на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 11.47 (Формулы Бонне). *Если функция $f(x)$ не возрастает и $f(x) \geq 0$ на отрезке $[a, b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то существует точка $\xi \in [a, b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx.$$

Если же функция $f(x)$ не убывает, то

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(b) \int_\xi^b g(x) dx.$$

Доказательство. Пусть разбиение $T = \{a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b\}$.

Функция $f(x)$ - монотонная \Rightarrow интегрируема (Следствие 10.9), $g(x)$ по условию леммы интегрируема $\Rightarrow f(x)g(x)$ интегрируема.

Воспользуемся аддитивностью интеграла.

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)g(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))g(x) dx \end{aligned}$$

Пусть $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x) dx$, $\rho = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))g(x) dx$.

Докажем, что $\rho \rightarrow 0$ при $\Delta_T \rightarrow 0$.

$$|\rho| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)| |g(x)| dx = (*)$$

Здесь мы применили неравенство треугольника и то, что модуль функции интегрируем.

Если функция $g(x)$ интегрируема по Риману, то она ограничена числом M .

$$\begin{aligned} (*) &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(f, \Delta_k) M dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) M \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1 dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) M \Delta x_k = \\ &= M \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \end{aligned}$$

f интегрируема $\Rightarrow \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k \rightarrow 0$ при $\Delta_T \rightarrow 0$ по критерию Дарбу.

Обозначение: $G(x) = \int_a^x g(t) dt$

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot (G(x_{k+1}) - G(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) G(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) G(x_k) = (**)$$

Т. к. $f(x_0)G(x_0) = f(a)G(a) = f(a) \cdot 0 = 0$, то мы можем изменить индекс суммирования у первой суммы, а последнее слагаемое вынести отдельно.

$$(**) = \sum_{k=1}^{n-1} G(x_k)(f(x_{k-1}) - f(x_k)) + f(x_{n-1})G(b) = (***)$$

По теореме 10.19 $G(x)$ - непрерывна. Тогда $m = \min G(x), M = \max G(x)$ и $G(x)$ достигает эти значения. Кроме того, $f(x_{k-1}) - f(x_k) \geq 0$.

$$(\ast\ast\ast) \geq m \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) + f(x_{n-1})m = mf(a)$$

Аналогично, $\sigma \leq Mf(a)$.

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = \sigma + \rho$$

$$mf(a) + \rho \leq \sigma + \rho \leq Mf(a) + \rho$$

Перейдём к пределу при $\Delta_T \rightarrow 0$

$$mf(a) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq Mf(a)$$

$$\exists \xi : G(\xi) = \mu \in (m, M) \text{ и } \int_a^\xi g(x) dx \cdot f(a) = \mu f(a) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

Аналогично доказывается вторая формула. \square

Пусть $f(x)$ - не возрастает, $f_2(x) = f(x) - f(b) \geq 0$.

Применяем формулу Бонне

$$\int_a^b f_2(x)g(x) dx = f_2(a) \int_a^\xi g(x) dx = (f(a) - f(b)) \int_a^\xi g(x) dx$$

$$\int_a^b f_2(x)g(x) dx = \int_a^b (f(x) - f(b))g(x) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx - f(b) \int_a^b g(x) dx$$

$$\text{Тогда } \int_a^b f(x)g(x) dx = f(a) \int_a^\xi g(x) dx - f(b) \int_a^\xi g(x) dx + f(b) \int_a^b g(x) dx =$$

$$f(a) \int_a^\xi g(x) dx - f(b) \int_\xi^b g(x) dx$$

\square

Лекция 33: Некоторые приложения интеграла

11.24 Признак Дирихле

Пусть функция $y = f(x)g(x)$ определена на промежутке $[a; b]$ и неограничена в левой окрестности точки $x = b$. Тогда справедливы следующие достаточные признаки сходимости.

Теорема 11.48 (Признак Дирихле). *Интеграл $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится, если:*

- функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a; b]$;

- функция $g(x)$ монотонна на $[a; b]$, причем $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt$ для некоторых $x_1, x_2 \in [a, b]$ (не ограничивая общности будем считать $x_1 \leq x_2$). Так как $g(t)$ монотонна на $[x_1; x_2]$, она на нём интегрируема, а значит и $f(t)g(t)$ интегрируема на $[x_1; x_2]$ как произведение интегрируемых функций.

Поскольку $f(t)$ – интегрируема, а $g(t)$ – монотонна, выполнены условия второй теоремы о среднем и существует такая точка $\xi \in [x_1; x_2]$, что

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt = g(x_1) \int_{x_1}^{\xi} f(t) dt + g(x_2) \int_{\xi}^{x_2} f(t) dt.$$

Функция $\int_{x_1}^{x_2} f(t) dt$ ограничена на $[a; b]$, а значит, найдется такое $M \geq 0$, что

$$\left| \int_{x_1}^{\xi} f(t) dt \right| = F_1(\xi) \leq M, \left| \int_{\xi}^{x_2} f(t) dt \right| = F_2(\xi) \leq M$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt \right| &= \left| g(x_1) \int_{x_1}^{\xi} f(t) dt + g(x_2) \int_{\xi}^{x_2} f(t) dt \right| \leq |g(x_1)| \left| \int_{x_1}^{\xi} f(t) dt \right| + \\ &+ |g(x_2)| \left| \int_{\xi}^{x_2} f(t) dt \right| \leq |g(x_1)|M + |g(x_2)|M = M(|g(x_1)| + |g(x_2)|) \end{aligned}$$

$g(x)$ монотонно стремится к нулю, следовательно, она ограничена с одной стороны $g(a)$, а с другой 0. Тогда $|g(x_2)| \leq |g(x_1)|$ и

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt \right| \leq 2M|g(x_1)|. g(x) \rightarrow 0, \text{ что по определению означает}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta \in [a, b] \forall x \in (\delta; b) : |g(x)| < \varepsilon. \text{ Тогда } \forall x_1, x_2 \in (\delta; b)$$

$\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t) dt \leq 2M|g(x_1)| < 2M\varepsilon$, что есть не что иное, как критерий Коши сходимости несобственного интеграла. \square

Пример 11.49. Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$, сходится при $\alpha > 0$ по признаку Дирихле.

При $\alpha > 0$

$$1. \int_1^x \sin x dx = -\cos x \Big|_1^x - \text{ограничена}$$

$$2. \frac{1}{x^\alpha} \rightarrow 0 \text{ монотонно при } x \rightarrow +\infty.$$

Следовательно, по признаку Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ - сходится при $\alpha > 0$.

При $\alpha \leq 0$ расходится. Действительно, по критерию Коши

$$\exists \varepsilon = \frac{\pi}{6} : \forall \delta > 0 \ \exists x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k > \delta$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \right| \geq \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} dx \right| = \frac{1}{2} \left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} > \varepsilon$$

11.25 Признак Абеля

В условиях предыдущего слайда на функцию $y = f(x)g(x)$ справедлив следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 11.50 (Признак Абеля). *Интеграл $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится, если:*

- функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится;
- функция $g(x)$ ограничена и монотонна на $[a; b]$.

Доказательство. $g(x)$ - монотонная и ограничена \Rightarrow по теореме Вейерштрасса $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = A$.

Пусть $g_0(x) = g(x) - A \Rightarrow g_0(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow b$.

Тогда для $g_0(x)$ и $f(x)$ выполнены условия признака Дирихле $\Rightarrow \int_a^b f(x)g_0(x) dx$ - сходится.

$$\int_a^b f(x)g_0(x) dx = \int_a^b f(x)(g(x) - A) dx = \int_a^b f(x)g(x) dx - A \int_a^b f(x) dx$$

$\int_a^b f(x) dx$ - сходится по условию теоремы. Значит и $\int_a^b f(x)g(x) dx$ сходится. \square

Пример 11.51. *Докажите, что при $\alpha > 0$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \arctan x dx$ сходится.*

$$\alpha > 0$$

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx \text{ - сходится.}$$

$$2. \arctan x \text{ - монотонна и ограничена}$$

\Rightarrow по признаку Абеля $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \arctan x dx$ - сходится.

Глава 12

Некоторые приложения интеграла

12.1 Вычисление площади плоских тел

Предложение 12.1. Пусть $f(x) \geq 0$ – неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда область Φ под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ измерима по Жордану в точности тогда, когда $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Более того, $\mu(\Phi) = \int_a^b f(x) dx$.

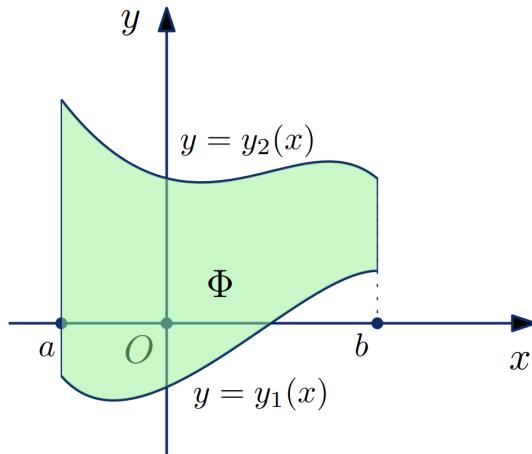
Доказательство. 1. Пусть Φ – измерима по Жордану. Возьмём последовательность элементарных фигур (прямоугольников) $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ таких, что $\mu(P_n) \rightarrow \mu_* = \mu(\Phi)$. Рассмотрим прямоугольники верхнего края нашей фигуры. Каждой такой фигуре можно сопоставить точку в разбиении T , т. е. $P_k \mapsto T_k$.

2.

□

Теорема 12.2. Пусть функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и $y_2(x) \geq y_1(x), x \in [a; b]$. Площадь фигуры Φ , ограниченной графиками функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ и соответствующими отрезками прямых $x = a, x = b$, равна

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

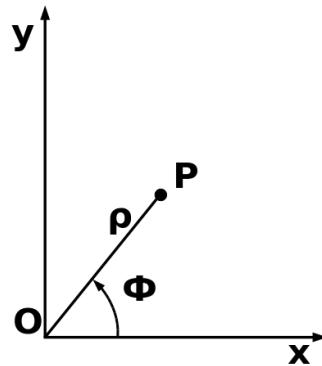


Доказательство. В предыдущем предложении мы рассматривали неотрицательные функции. Здесь мы можем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ сдвинуть вверх на одну и ту же константу, таким образом, они станут неотрицательными, если не были таковыми до этого, при этом искомая площадь останется неизменной.

Знаем, что мера Жордана функции $y_2(x)$ - это интеграл $\int_a^b y_2(x) dx$, мера Жордана функции $y_1(x)$ - это интеграл $\int_a^b y_1(x) dx$. Получается, что мера Жордана искомой площади равна $\int_a^b y_2(x) dx - \int_a^b y_1(x) dx = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx$. \square

12.2 Площадь в полярной системе координат

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.



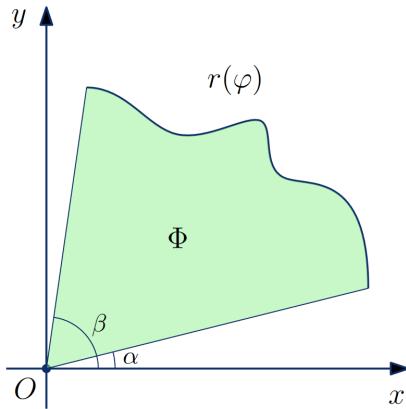
Пару полярных координат r и φ можно перевести в Декартовы координаты x и y путём применения тригонометрических функций синуса и косинуса

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$$

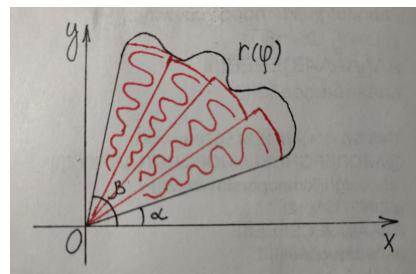
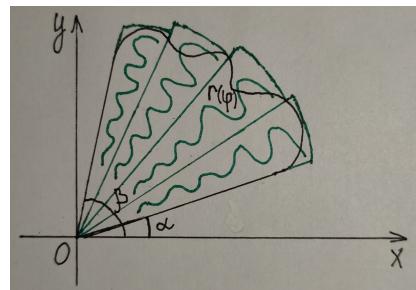
Для $r = 0$, φ может быть произвольным действительным числом. Для $r \neq 0$, чтобы получить уникальное значение φ , следует ограничиться интервалом $[0, 2\pi)$.

Теорема 12.3. Площадь сектора Φ , ограниченного графиком функции $r(\varphi)$ в полярных координатах и соответствующими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi.$$



Доказательство. Разделим фигуру на секторы, при этом сначала выберем радиус сектора как минимальное расстояние до начал координат (красные секторы), а затем - как максимальное (зелёные секторы):



T - разбиение $[\alpha, \beta]$

Формулу площади круга πr^2 можно доказать, посчитав интеграл $4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$ (фактически считаем площади четверти круга)

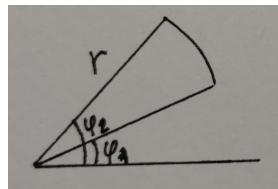
$$4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4 \int_0^r r \sqrt{1 - (\frac{x}{r})^2} dx = [\sin \varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow r \sin \varphi = x \Rightarrow r \cos \varphi d\varphi = dx] = \\ = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cdot r \cos \varphi d\varphi = (*),$$

т. к. $\sin \varphi = \frac{r}{r} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$, $\sin \varphi = \frac{0}{r} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

$$(*) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \cos \varphi \cdot r \cos \varphi d\varphi = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \varphi d\varphi = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \\ = 4r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} d\varphi = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = 2r^2 \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right) = \pi r^2$$

Тогда площадь сектора равна

$$S_{(\varphi_1, \varphi_2)} = \frac{\pi r^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{2\pi} = \frac{r^2 (\varphi_2 - \varphi_1)}{2}$$



Площадь красных секторов

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \inf_{\varphi \in \Delta_k} r^2(\varphi) \frac{1}{2} \Delta \varphi_k = s(g, T),$$

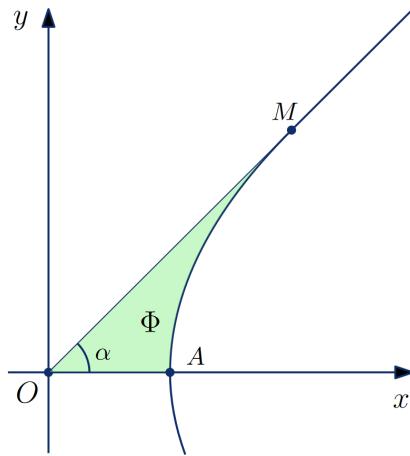
где $g(r) = \frac{r^2}{2}$, $\Delta \varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$.

Площадь зелёных секторов

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \sup_{\varphi \in \Delta_k} r^2(\varphi) \frac{1}{2} \Delta \varphi_k = S(g, T)$$

$S(g, T)$ и $s(g, T)$ стремятся к интегралу. Мера Жордана зажата между ними \Rightarrow тоже стремится к интегралу, т. е. к $\int_\alpha^\beta \frac{r^2(\varphi)}{2} d\varphi$. \square

Пример 12.4. На гиперболе $x^2 - y^2 = a^2$ дана точка $M(x_0; y_0)$. Найти площадь криволинейного треугольника OAM .



Зададим в полярной системе координат гиперболу:

$$x^2 - y^2 = a^2 \Rightarrow r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi = a^2 \Rightarrow r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = a^2 \Rightarrow r^2 = \frac{a^2}{\cos 2\varphi} \Rightarrow r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

Угол точки A равен 0 , угол точки M равен $\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}$.

Осталось посчитать интеграл:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \frac{a^2}{\cos 2\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 2\varphi} d\varphi = \frac{a^2}{4} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \frac{d \sin 2\varphi}{\cos^2 2\varphi} = \\ &= \frac{a^2}{4} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \frac{d \sin 2\varphi}{1 - \sin^2 2\varphi} = \frac{a^2}{8} \ln \left| \frac{1 - \sin 2 \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}}{1 + \sin 2 \operatorname{arctg} \frac{y_0}{x_0}} \right| + C = (*) \end{aligned}$$

В силу формулы $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ получаем, что

$$(*) = \frac{a^2}{8} \ln \left| \frac{1 - \frac{2 \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}}}{1 + \frac{2 \frac{y_0}{x_0}}{1 + \frac{y_0^2}{x_0^2}}} \right| + C$$

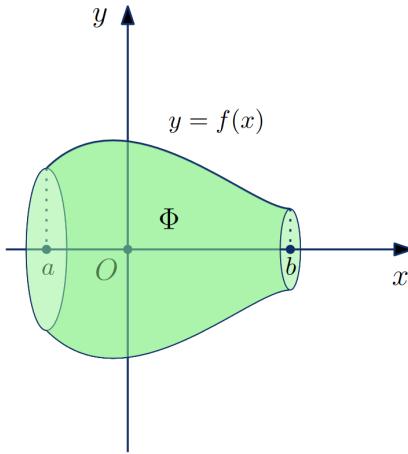
Лекция 34: Метрические, нормированные и евклидовы пространства

12.3 Объем тел вращения

Теорема 12.5. Пусть функция $y = y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a; b]$. Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Φ ,

ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox , равен

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$



Доказательство. Обозначим через G тело, образованное вращением вокруг оси Ox фигуры Φ . Рассмотрим разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ отрезка $[a; b]$. Заметим, что фигура $C_1(T)$, состоящая из цилиндров высоты $h_k = x_k - x_{k-1}$ радиуса $R = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$, покрывает тело вращения G . А фигура $C_2(T)$, состоящая из цилиндров высоты $h_k = x_k - x_{k-1}$ радиуса $R = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$, наоборот, вписана в тело вращения G . Как известно, объем цилиндра радиуса R и высоты h равен $\pi R^2 h$. Отсюда получаем, что

$$\mu(C_2(T)) = \sum_{k=1}^n \pi \inf_{x \in \Delta_k} f^2(x) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \pi \sup_{x \in \Delta_k} f^2(x) \Delta x_k = \mu(C_1(T)).$$

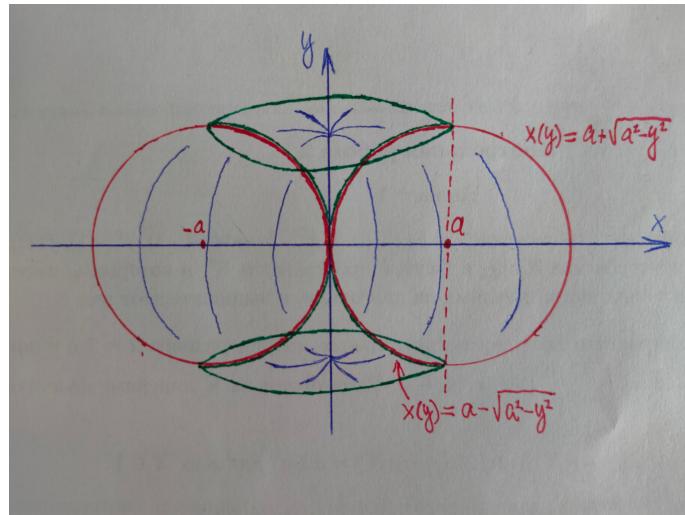
В правом и левой частях неравенства стоят в точности нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $\pi f^2(x)$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, она является интегрируемой (следствие 10.14). А значит интегрируем и ее квадрат (следствие 10.7). Тем самым получаем, что

$$\mu(C_1(T)), \mu(C_2(T)) \rightarrow I = \pi \int_a^b f^2(x) dx \text{ при } \Delta_T \rightarrow 0.$$

Это означает, что G измеримо по Жордану, и его объем равен $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$. \square

Пример 12.6. Найти объем тела, образованного при вращении круга $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ вокруг оси Oy .

Пояснение. Хоть здесь фигура вращается вокруг оси OY , но нам это не помешает. $(x - a)^2 + y^2 \leq a^2$ задаёт круг с центром в точке $(0, a)$ и радиусом a . При повороте этой красной окружности получим "бублик". Чтобы посчитать его объём, нужно вычислить объём фигуры, получающейся при вращении вокруг OY правой полуокружности $x(y) = a + \sqrt{a^2 - y^2}$, и вычесть объём фигуры, получающейся при вращении вокруг OY левой полуокружности $x(y) = a - \sqrt{a^2 - y^2}$ (отверстие "бублика"). Пользуясь теоремой 12.5 найдём итоговый объём.



$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a (a + \sqrt{a^2 - y^2})^2 - (a - \sqrt{a^2 - y^2})^2 dy = 4\pi \int_{-a}^a a\sqrt{a^2 - y^2} dy = \\ &= 4\pi a \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy \end{aligned}$$

Отдельно считаем такой интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy &= a^2 \int_{-a}^a \sqrt{1 - (\frac{y}{a})^2} d(\frac{y}{a}) = a^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt = \\ &= a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 x} d(\sin x) = a^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(\sin x) \end{aligned}$$

Далее

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x d(\sin x) = \cos x \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x d(\cos x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \\ &= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \pi - I \end{aligned}$$

Тогда

$$\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = \frac{a^2 \pi}{2}$$

Следовательно

$$V = 4\pi a \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - y^2} dy = 2a^3 \pi^2$$

12.4 Длина кривой

Для описания длины дуги кривой мы будем использовать иной подход — определим длину кривой через свойства, которым она должна удовлетворять.

Чтобы этот подход был более понятен, сначала реализуем его на площади фигуры.

Пусть $f \geq 0$ на $[a, b]$. И пусть $S(\alpha, \beta)$ площадь под графиком функции f на отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Разумные требования на S — это

1. аддитивность: $S(\alpha, \gamma) = S(\alpha, \beta) + S(\beta, \gamma)$ при $a \leq \alpha < \beta < \gamma \leq b$;
2. монотонность по включению: $\inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha) \leq S(\alpha, \beta) \leq \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)(\beta - \alpha)$.

Предложение 12.7. Пусть f интегрируема по Риману на $[a, b]$. При выполнении выше описанных условий $S(a, b) = \int_a^b f(x) dx$.

Доказательство. $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ — разбиение $[a, b]$, $I = \int_a^b f(x) dx$.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \inf_{x \in \Delta_k} f(x) \Delta x_k &\leq (\text{аддитивность}) \sum_{k=1}^n S(x_{k-1}, x_k) = (\text{монотонность по включению}) \\ &= S(a, b) \leq \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \Delta_k} f(x) \Delta x_k (\text{аналогично}) \end{aligned}$$

Если функция интегрируема, то

$$\sum_{k=1}^n \inf_{x \in \Delta_k} f(x) \Delta x_k \rightarrow I, \sum_{k=1}^n \sup_{x \in \Delta_k} f(x) \Delta x_k \rightarrow I \Rightarrow S(a, b) \rightarrow I \Rightarrow S(a, b) = I$$

(т. к. площадь константа). □

Определение 12.8. Пусть $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ — гладкая кривая, т.е. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и функции $x, y, z \in C^1([a, b])$ (множество функций, у которых первая производная непрерывна). Пусть $\ell(a, b)$ — длина пути соответствующая отрезку $[a, b]$. Тогда длина кривой удовлетворяет следующим требованиям

1. $\ell(\alpha, \gamma) = \ell(\alpha, \beta) + \ell(\beta, \gamma)$ при $a \leq \alpha < \beta < \gamma \leq b$;

$$2. \inf_{t \in [\alpha, \beta]} |v(t)|(\beta - \alpha) < \ell(\alpha, \beta) \leq \sup_{t \in [\alpha, \beta]} |v(t)|(\beta - \alpha), \text{ где } v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Теорема 12.9. *Длина кривой, заданной параметрическими уравнениями*

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a; b],$$

где $x(t), y(t), z(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции, равна

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dx$$

Доказательство. Задаём прямую в \mathbb{R}^3 , введя при этом параметр $t \in \mathbb{R}$ и точки $(x(t), y(t), z(t))$. Во втором пункте $v(t), t \in [\alpha, \beta]$ - это скорость движения по кривой на временном отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда $|v(t)|(\beta - \alpha)$ - это длина кривой на отрезке $[\alpha, \beta]$. Используя физическую интерпретацию, утверждаем, что скорость - производная по каждой координате: $v = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Значит $|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.

Рассмотрим разбиение времени $T = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, Δt_k - длина отрезка разбиения. По определению

$$\inf_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \leq \ell(\Delta t_k) \leq \sup_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k$$

По первому свойству

$$\sum_{k=1}^n \inf_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \leq \ell(a, b) \leq \sum_{k=1}^n \sup_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k$$

$x(t), y(t), z(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции \Rightarrow функция $|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ - непрерывна. Значит она интегрируема.

Выше мы записали интегральные суммы Дарбу для этой функции \Rightarrow

$$\sum_{k=1}^n \inf_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \rightarrow I, \sum_{k=1}^n \sup_{t \in \Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \rightarrow I, I = \int_a^b |v(t)| dt.$$

□

Глава 13

Предел функции нескольких переменных

13.1 Метрическое пространство

Определение 13.1. Пусть X - множество. Функция $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ называется метрикой, если

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$
2. $d(x, y) = d(y, x) \forall x, y \in X;$
3. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \forall x, y, z \in X.$

Пара (X, d) называется метрическим пространством.

Пример 13.2. • Дискретная метрика: $d(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d(x, y) = 1$ во всех остальных случаях.

- Вещественные числа с функцией расстояния $d(x, y) = |y - x|$ и евклидово пространство являются полными метрическими пространствами.
- Расстояние Хэмминга в теории кодирования.

(Расстояние Хэмминга - функция расстояния между двоичными словами, которая равна количеству битов, в которых эти слова различаются. Другими словами - это минимальная длина пути от одного двоичного слова до другого в булевом кубе)

- Манхэттенская метрика: $d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n |p_i - q_i|$, где $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ – векторы.

13.2 Нормированное пространство

Определение 13.3. Пусть X – линейное пространство. Функция $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, +\infty)$ называется нормой, если

1. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X;$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X.$

Пара $(X, \|\cdot\|)$ называется нормированным пространством.

Всякое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = \|x - y\|$.

Проверяем свойства метрического пространства.

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow \|x - y\| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y.$
2. $d(x, y) = \|x - y\| = |-1| \|x - y\| = \|y - x\|$
3. Равносильно неравенству треугольника для нормированного пространства.

13.3 Евклидово пространство

Определение 13.4. Пусть X — линейное пространство. Функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если для всех $x, y, z \in X$ и всех $a, b \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:

1. $\langle x, x \rangle \geq 0$ и $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0;$
2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle;$
3. $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle.$

Линейное пространство X со скалярным произведением называется евклидовым.

Пример 13.5. На линейном пространстве \mathbb{R}^k всех упорядоченных наборов (x_1, \dots, x_k) задано скалярное произведение $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^k x_j y_j$. Тем самым, на \mathbb{R}^k задана естественная евклидова метрика

$$\|x - y\| := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + \dots + |x_k - y_k|^2}.$$

13.4 Неравенство Коши–Буняковского

Лемма 13.6 (Неравенство Коши–Буняковского). Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение на линейном пространстве X , тогда

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Доказательство. Рассмотрим скалярный квадрат: $\langle x+yt, x+yt \rangle \geq 0, t \in \mathbb{R}, x, y \in X$. Воспользуемся линейностью

$$0 \leq \langle x+yt, x+yt \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, yt \rangle + \langle yt, x \rangle + \langle yt, yt \rangle = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle$$

Если $\vec{y} = 0$, то просто подставим в исходное неравенство и получим $0 \leq 0$. Теперь пусть $\vec{y} \neq 0$. Чтобы неравенство $\langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle \geq 0$ выполнялось, необходимо, чтобы $D = 4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle y, y \rangle\langle x, x \rangle \leq 0$. Тогда

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle y, y \rangle\langle x, x \rangle$$

□

Следствие 13.7. На евклидовом пространстве функция $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ является нормой.

1. По свойству скалярного произведения $\|x\| = \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|$
3. $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq (\text{нер-во Коши-Буняковского})$
 $\langle x, x \rangle + 2\sqrt{\langle x, x \rangle}\sqrt{\langle y, y \rangle} + \langle y, y \rangle = (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$

13.5 Предел в метрическом пространстве

Определение 13.8. Пусть (X, d) метрическое пространство.

1. Множество

$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

называется открытым шаром радиуса r .

2. Последовательность точек $x_n \in X$ называется сходящейся к точке x , если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N(\varepsilon)$, что $d(x, x_n) < \varepsilon$ для каждого $n \geq N(\varepsilon)$.
3. Точка x называется предельной для множества $M \subset X$, если для всякого $\varepsilon > 0$ выполнено $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \emptyset$.

Лемма 13.9. Пусть (X, d) метрическое пространство. Тогда

1. если $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$, то $d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$;
2. предел сходящейся последовательности единственен.

Доказательство. 1. Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| = |d(x_n, y_n) - d(x_n, y) + d(x_n, y) - d(x, y)| \leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + \\ + |d(x_n, y) - d(x, y)| \quad (*)$$

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, y) + d(y_n, y) \Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x_n, y) \leq d(y_n, y)$$

$$d(x_n, y) \leq d(x_n, x) + d(x, y) \Rightarrow d(x_n, y) - d(x, y) \leq d(x_n, x)$$

$$(*) : |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)| \leq d(y_n, y) + d(x_n, x)$$

Т. к. $d(y_n, y) \rightarrow 0, d(x_n, x) \rightarrow 0$, то $d(y_n, y) + d(x_n, x) \rightarrow 0 \Rightarrow d(x_n, y_n) \rightarrow d(x, y)$.

2. Пусть $x_n \rightarrow x, x_n \rightarrow y$. По первому пункту $d(x_n, x_n) \rightarrow d(x, y)$. Т. к. $d(x_n, x_n) = 0$, то $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (по определению).

□

Лекция 35: Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Из второго пункта определения 13.8 получаем, что для $x_n \in \mathbb{R}^n$

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

13.6 Метрическое пространство

Замечание 13.10. На \mathbb{R}^k справедливы соотношения

$$\max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq \|x\| \leq \sqrt{k} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j|$$

для векторов $x = (x_1, \dots, x_k)$. Тем самым, последовательность $x_n \rightarrow x$ в \mathbb{R}^k тогда и только тогда, когда $(x_n)_j \rightarrow x_j$.

Пояснение. $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ (рассматриваем евклидово пространство, см. пример 13.5)

$$\max_{1 \leq j \leq n} |x_j| \leq \sqrt{0 + \dots + 0 + \max_{1 \leq j \leq n} x_j^2 + 0 + \dots + 0} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|$$

Получили неравенство выше.

Пусть $x_n \rightarrow x (\Leftrightarrow x_n - x \rightarrow 0) \Leftrightarrow \|x_n - x\| \rightarrow 0$. Поэтому будем рассматривать пределы векторов, которые стремятся к нулевому вектору.

$$1. \forall j x_j \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 0, \text{ т. к. } \|x\| \leq \sqrt{n} \max_{1 \leq j \leq k} |x_j|.$$

$$2. \forall j x \rightarrow 0 \Rightarrow \|x\| = 0 \Rightarrow x_j \rightarrow 0, \text{ т. к. } \max_{1 \leq j \leq k} |x_j| \leq \|x\|.$$

Предложение 13.11. Пусть $x_n \rightarrow x, y_n \rightarrow y$ в нормированном пространстве $(X, \|\cdot\|)$ и $\alpha_n \rightarrow \alpha_0$ в \mathbb{R} . Тогда $x_n + y_n \rightarrow x + y$ и $\alpha_n x_n \rightarrow \alpha_0 x$ в X .

Доказательство. $\|x_n + y_n - (x + y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \rightarrow 0 + 0 = 0$

$$\|\alpha_n x_n - \alpha_0 x\| = \|\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha_0 x\| \leq \|\alpha_n x_n - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha_0 x\| = |\alpha_n| \cdot \|x_n - x\| + |\alpha_n - \alpha_0| \cdot \|x\| \rightarrow |\alpha_0| \cdot 0 + 0 \cdot \|x\| = 0 \quad \square$$

13.7 Предел функции по Гейне

Определение 13.12 (предела функции по Гейне). Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) два метрических пространства, а - предельная точка множества X . Пусть $f : X \setminus \{a\} \rightarrow Y$. Говорят, что $A \in Y$ предел функции f при $x \rightarrow a$, если для каждой последовательности $x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$, выполнено $f(x_n) \rightarrow A$. Пишут $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Предложение 13.13. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = B$, то $A = B$.

Доказательство. a - предельная точка $\Rightarrow \exists x_n \in X \setminus \{a\} : x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A, f(x_n) \rightarrow B$ по определению предела функции по Гейне. Но $y_n = f(x_n)$ - последовательность векторов. А мы уже выяснили, что если у последовательности векторов есть предел, то он один (Замечание 13.10). \square

13.8 Предел функции по Коши

Определение 13.14 (предела функции по Коши). Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) два метрических пространства, a – предельная точка множества X . Пусть $f : X \setminus \{a\} \rightarrow Y$. Говорят, что $A \in Y$ предел функции f при $x \rightarrow a$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $d_Y(f(x), A) < \varepsilon$ для каждого такого $x \in X$, что $0 < d_X(x, a) < \delta$.

В кванторах: $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(a) \rightarrow f(x) - A < \varepsilon$.

13.9 Эквивалентность определений предела

Теорема 13.15. Определения по Коши и по Гейне равносильны.

Доказательство.

$K \Rightarrow \Gamma$ Пусть $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ по Коши.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(a) \rightarrow \|f(x) - A\| < \varepsilon$$

Пусть $x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \Rightarrow \exists N : \forall n \geq N \rightarrow \|x_n - a\| < \delta \Leftrightarrow x_n \in B'_\delta(a) \Rightarrow \forall n \geq N \rightarrow \|f(x_n) - A\| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \rightarrow A$

$\Gamma \Rightarrow K \Leftrightarrow \neg K \Rightarrow \neg \Gamma$

$$\neg K \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in B'_\delta(a) : \|f(x) - A\| \geq \varepsilon$$

Для каждого $\delta = \frac{1}{n} \exists x_n \in B'_{\frac{1}{n}}(a) : \|f(x_n) - A\| \geq \varepsilon$

Но $x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a$ и $f(x_n) \not\rightarrow A \Rightarrow \neg \Gamma$.

\square

13.10 Арифметические свойства предела

Теорема 13.16 (Арифметические свойства предела). *Пусть (X, d_X) метрическое пространство, a — предельная точка X . Пусть $f, g : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^k$, $\alpha : X \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \alpha_0$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = A + B$, $\lim_{x \rightarrow a} (\alpha(x)f(x)) = \alpha_0 A$.*

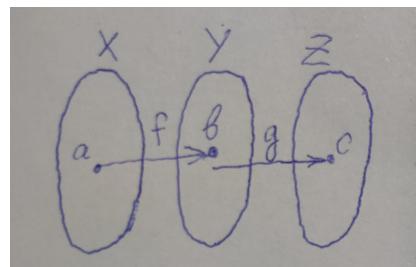
Доказательство. По определению предела функции по Гейне если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \rightarrow f(x_n) \rightarrow A, g(x_n) \rightarrow B \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \rightarrow A + B$, т. к. $f(x_n), g(x_n)$ - векторы (см. предложение 13.11).

По определению предела функции по Гейне если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \rightarrow f(x_n) \rightarrow A, \alpha(x_n) \rightarrow \alpha_0 \Rightarrow \alpha(x_n)f(x_n) \rightarrow \alpha_0 A$, т. к. $f(x_n)$ - вектор (см. предложение 13.11). \square

13.11 Теорема о пределе сложной функции

Теорема 13.17 (О пределе сложной функции). *Пусть X, Y, Z — метрические пространства, a — предельная точка X , b — предельная точка Y . Пусть $f : X \setminus \{a\} \rightarrow Y \setminus \{b\}$ и $g : Y \setminus \{b\} \rightarrow Z$. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$, то $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.*

Доказательство.



По определению предела функции по Гейне если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \rightarrow a \rightarrow f(x_n) \in Y \setminus \{b\}, f(x_n) \rightarrow b \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow c$. \square

Важно: исключение из множеств X и Y точек a и b в функции $f : X \setminus \{a\} \rightarrow Y \setminus \{b\}$ обязательно. Контрпример:

$$f(x) = 0 \quad \forall x, g(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow 0} f(g(x)) = 0, \lim_{y \rightarrow 0} g(y) = 1$.

13.12 Непрерывность функции

Определение 13.18. Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) два метрических пространства. Отображение $f : X \rightarrow Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ или x_0 – изолированная точка.

Замечание 13.19. 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a , то для всякой последовательности $x_n \rightarrow a$ выполнено $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Это отличается от определения предела функции по Гейне тем, что не требуется брать x_n отличными от a .

2. То же верно и для определения предела по Коши в случае непрерывности: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, если $d_X(x, x_0) < \delta$.

Пояснение. 1. Если x_0 – изолированная точка, то любая последовательность, стремящаяся к x_0 , состоит только из точек $x_0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

Пусть $\forall x_n (\neq x_0) \rightarrow x_0 f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. От противного: пусть $\exists x_n \rightarrow x_0 : f(x_n) \not\rightarrow f(x_0)$, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 \forall N : \exists n \geq N \rightarrow \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_n \neq x_0 (\text{м. к. } \varepsilon > 0) \Rightarrow \exists x_n (\neq x_0) \rightarrow x_0 \|f(x_n) - f(x_0)\| \geq \varepsilon - \text{противоречие.}$$

2. Если x_0 – изолированная, то найдётся такая δ -окрестность, что других точек в ней нет:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

Если x_0 – предельная, то $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(x_0) \rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ – условие верно, т. к. оно строится.

В обратную сторону.

Если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ – верно, то изолированная точка x_0 подходит.

Теперь возьмём ту же δ что и в условии выше. Тогда для $x \neq x_0$ верно $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(x_0) \rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$, а для $x = x_0 \|f(x) - f(x_0)\| = 0 < \varepsilon$ – тоже верно.

13.13 Непрерывность композиции

Предложение 13.20. Пусть $f : X \rightarrow Y$ непрерывна в точке $a \in X$, $g : Y \rightarrow Z$ непрерывна в точке $f(a) \in Y$. Тогда композиция $g \circ f : X \rightarrow Z$ непрерывна в точке a .

Доказательство. Если точка a - изолированная на множестве X , то тогда любая функция в ней непрерывна. Если она не изолированная, т. е. предельная, то рассмотрим предел в этой точке.

$f(x)$ - непрерывна в точке $a \Rightarrow \forall x_n \rightarrow a \ f(x_n) \rightarrow f(a)$.
 $g(x)$ - непрерывна в точке $f(a) \Rightarrow \forall y_n \rightarrow f(a) \ g(y_n) \rightarrow g(f(a)) \Rightarrow \forall x_n \ f(x_n) \rightarrow f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$ (по теореме о пределе сложной функции). \square

Предложение 13.21. Пусть $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ - непрерывные в точке a функции. Тогда $f + g$ непрерывна в точке a . Если $m = 1$, то и $f \cdot g$ непрерывна в точке a .

Вообще здесь не очень удачная формулировка. Точнее будет сказать, что $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}^m, X \subseteq \mathbb{R}^k$.

Доказательство. Если a - изолированная точка, то любая функция в ней непрерывна, в частности $f + g$.

В противном случае если a - предельная точка, то по теореме 13.16 предел суммы функций равен сумме пределов функций.

Если $m = 1$, то обе функции переводят вектор в скаляр.

Если a - изолированная точка, то любая функция в ней непрерывна, в частности $f \cdot g$. В случае предельной точки к множеству X пользуемся арифметическими свойствами предела (теорема 13.16). \square

Глава 14

Дифференцируемые функции нескольких переменных

Лекция 36: Дифференцируемость функций нескольких переменных

14.1 Дифференцируемое отображение

Определение 14.1. Отображение $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке x , если для каждого $h \in \mathbb{R}^k$

$$f(x + h) = f(x) + L(h) + \alpha(h)\|h\|,$$

где $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ - линейное отображение, $\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \|\alpha(h)\| = 0$.

Линейное отображение L называют дифференциалом f в точке x и обозначают df .

14.2 Непрерывность дифференцируемого отображения

Замечание 14.2. Напомним, что отображение $L : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ называется линейным, если

$$L(a_1h_1 + a_2h_2) = a_1Lh_1 + a_2Lh_2$$

для произвольных векторов $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^k$ и произвольных чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Если в \mathbb{R}^k фиксирован базис $e := \{e_1, \dots, e_k\}$, а в \mathbb{R}^m фиксирован базис $e' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$, то линейное отображение L представимо в виде $L(h) = L(e_1)h_1 + \dots + L(e_k)h_k$, где $h = (h_1, \dots, h_k)^T$ в базисе e , а векторы $L(e_j) = (a_{1,j}, \dots, a_{m,j})^T$ в базисе e' . В частности, каждое линейное отображение при фиксированных базисах e и e' в \mathbb{R}^k и в \mathbb{R}^m соответственно записывается с помощью матрицы $A = (a_{i,j})$.

Кроме того,

$$\begin{aligned} \|Lh\| &= \|L(e_1)h_1 + \dots + L(e_k)h_k\| \leq (\|L(e_1)\| + \dots + \|L(e_k)\|) \max_{1 \leq j \leq k} |h_j| = C \max_{1 \leq j \leq k} |h_j| \leq \\ &\leq C\|h\| \end{aligned}$$

и каждое линейное отображение непрерывно на \mathbb{R}^k .

(Если $\|h\| \rightarrow 0$, то $\|Lh\| \rightarrow 0$. Но если линейное отображение непрерывно в 0, то оно непрерывно в любой точке, потому что при $g \rightarrow h$ $\|L(g) - L(h)\| = \|L(g - h)\| \rightarrow 0$)

Следствие 14.3. Если отображение $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ дифференцируемо в точке x , то оно непрерывно в точке x .

Доказательство. Пользуясь определением дифференцируемости, $\|f(x+h) - f(x)\| = \|L(h) + \alpha(h)\| \|h\| \leq \|L(h)\| + \|\alpha(h)\| \cdot \|h\|$

$\|\alpha(h)\| \cdot \|h\| \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$ и, как мы выяснили, $\|L(h)\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|f(x+h) - f(x)\| \rightarrow 0 \Rightarrow$ отображение непрерывно в точке x . \square

Замечание 14.4. Т.к. дифференцируемость f в точке x равносильна тому, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Lh\|}{\|h\|} = 0$$

и т.к. сходимость по норме равносильна покоординатной сходимости (предложение 13.11), то при фиксированном базисе $e' := \{e'_1, \dots, e'_m\}$ в \mathbb{R}^m дифференцируемость отображения f равносильно дифференцируемости каждой координаты f_j в точке x . В этом случае $Lh = (L_1h, \dots, L_mh)$ в базисе e' , где $L_j = df_j$ - дифференциал j -й координаты.

Доказательство.

$$L(h) = \begin{pmatrix} \frac{\|f_1(x+h) - f_1(x) - L_1(h)\|}{\|h\|} \\ \dots \\ \frac{\|f_m(x+h) - f_m(x) - L_m(h)\|}{\|h\|} \end{pmatrix}$$

Необходимо для дифференцируемости, чтобы этот столбец стремился к нулевому вектору. Но это верно в точности когда каждая координата стремится к нулю $\frac{\|f_i(x+h) - f_i(x) - L_i(h)\|}{\|h\|} \rightarrow 0$. \square

14.3 Производная по направлению

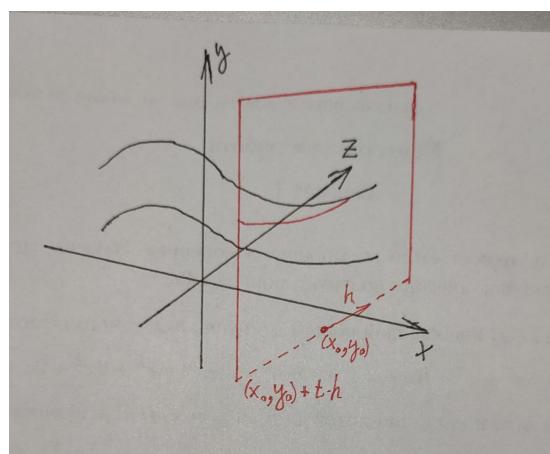
Лемма 14.5. Если отображение $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке x , то для каждого вектора $h \in \mathbb{R}^k$ (f, x, h фиксируем) функция $\varphi : t \mapsto f(x + th)$, $t \in \mathbb{R}$ дифференцируема в точке 0 и $\frac{d}{dt}f(x + th)\Big|_{t=0} = df(h)$. В частности, дифференциал определен единственным образом.

Доказательство. Рассмотрим приращение функции в точках t и 0

$$\begin{aligned} f(x + th) - f(x) &= L(th) + \alpha(th)\|th\| \\ \frac{f(x + th) - f(x)}{t} &= \frac{tL(h) + t\alpha(th)\|h\|}{t} = L(h) + \alpha(th)\|h\| \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} L(h) + \alpha(th)\|h\| = \\ \varphi'(0) &= \frac{d}{dt}f(x + th)\Big|_{t=0} = L(h) = df(h) \end{aligned}$$

Причём на каждом векторе h мы однозначно знаем, чему равняется производная $df(h) = \frac{d}{dt}f(x + th)\Big|_{t=0}$, в одномерном случае мы знаем, что производная единственна. \square

Определение 14.6. Пусть $\|v\| = 1$. Производная $\frac{\partial f}{\partial v}(x) := \frac{d}{dt}f(x + tv)\Big|_{t=0}$ называется производной по направлению вектора v .



Если мы зададим функцию в трёхмерном пространстве, то её график - это поверхность. Теперь если мы отметим точку (x_0, y_0) и направление h единичной длины (важно, иначе функция в сечении растянется или сожмётся), то $(x_0, y_0) + th$ заметает всю прямую. Тогда если мы посмотрим на значения функции в этих точках прямой, то мы сделаем сечение этой функции. Получим знакомую функцию в двумерной системе координат, у которой мы уже умеем находить производную.

Пример 14.7. Пусть

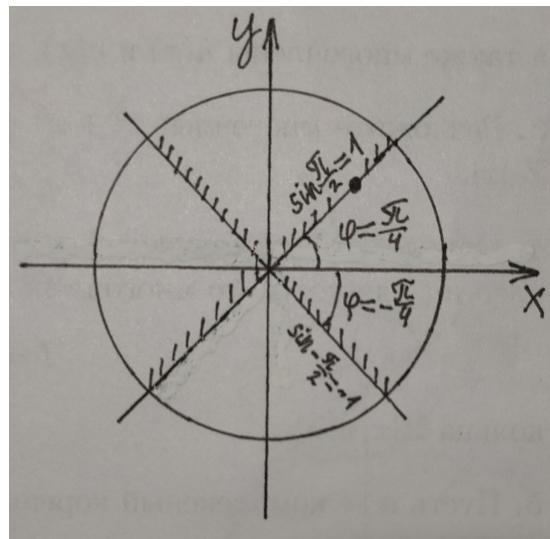
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Функция f разрывна в нуле, а значит не дифференцируема, но в точке $(0, 0)$ существуют обе частных производных. Действительно, если $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$, то функция $f(x, y) = \sin 2\varphi$. Таким образом, $f(x, y)$ в любой окрестности точки $(0, 0)$ принимает значения ± 1 , но $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{d}{dx}(x, 0) = 0$. Аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Пояснение.

$$x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, f(x, y) = \frac{2r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{r^2} = \sin 2\varphi$$

Значит значение функции в полярной системе координат не зависит от $r \Rightarrow$ в любой окрестности точки $(0, 0) \exists \varphi$, в котором $f(x, y)$ принимает значения ± 1 , поэтому функция не непрерывна в нуле, тем более не дифференцируема (следствие 14.3).



Производная вдоль x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{t} = 0$$

Аналогично производная вдоль y равна 0.

14.4 Частная производная

Определение 14.8. Частной производной $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ функции $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x = (x_1, \dots, x_k)$ называется производная по направлению вектора e_j , т.е.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \left. \frac{d}{dt} f(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_k) \right|_{t=x_j}.$$

Пояснение. По определению производной по направлению

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) &= \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \left. \frac{d}{dt} \left(f(x + te_j) \right) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, \dots, x_k) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_k)}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dy} f(x_1, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_k) \right|_{y=t+x_j} \end{aligned}$$

14.5 Градиент

Замечание 14.9. При фиксированном базисе $e = \{e_1, \dots, e_k\}$ в \mathbb{R}^k линейные функционалы dx_1, \dots, dx_n оказываются сопряженным базисом к e , т.е. $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Таким образом,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k.$$

Пояснение. $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

(e_1, \dots, e_k) – фиксируем базис.

$x_1 = \xi(x) = \xi(x_1, \dots, x_k)$

$dx_1 = d\xi$

$\xi(x + h) - \xi(x) = x_1 + h_1 - x_1 = h_1 = d\xi(h) + \alpha(h) \|h\|$

$$df(h) = df(e_1)h_1 + df(e_2)h_2 + \dots + df(e_k)h_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}h_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1(h) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k(h)$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k$$

Определение 14.10. Градиентом функции f называется вектор $\nabla f := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$.

14.6 Свойства градиента

Предложение 14.11. *Производная по направлению вектора v равна*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

Доказательство. Из замечания 14.9

$$df(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k} h_k \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

□

Лемма 14.12. *Если f дифференцируема в точке x и $df \neq 0$, то наибольшее значение производной вдоль единичного вектора v (т.е. $\|v\| = 1$) достигается на векторе $\|\nabla f(x)\|^{-1} \nabla f(x)$.*

Доказательство. По неравенству Коши-Буняковского

$$|\langle \nabla f, v \rangle| \leq \|\nabla f\| \|v\|$$

Максимум достигается при $v = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$

□

Лекция 37: Частные производные высокого порядка

14.7 Множество уровня

Определение 14.13. Множеством уровня называется

$$\gamma(h) = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \varphi(x_1, \dots, x_n) = h\}.$$

Предложение 14.14. Градиент функции φ в точке \bar{x}^0 перпендикулярен её множеству уровня, проходящей через эту точку.

Пока без доказательства

14.8 Матрица Якоби

Замечание 14.15. В случае отображения $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ при фиксированных базисах e и e' в \mathbb{R}^k и в \mathbb{R}^m соответственно, компоненты матрицы дифференциала df имеют $a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, т.е. по строкам написаны градиенты $\nabla f_i(x)$.

Определение 14.16. При фиксированных базисах e в \mathbb{R}^k и e' в \mathbb{R}^m матрицу, соответствующую линейному отображению df , называют матрицей Якоби отображения f в точке x и обозначают $J_f(x)$.

14.9 Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 14.17. Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в этой точке, то f — дифференцируема в точке x_0 .

Доказательство. Индукция по числу переменных.

$k = 1$. У функции от одной переменной одна частная производная и она равна производной.

Пусть утверждение верно для некоторого k , докажем для $k + 1$.

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_{k+1})$$

$$\begin{aligned} f(a_1 + h_1, \dots, a_{k+1} + h_{k+1}) - f(a) &= f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}) - f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}) + \\ &\quad + f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}) - f(a) \end{aligned}$$

Пусть

$$\sigma = f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}) - f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1})$$

$$\rho = f(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1}) - f(a)$$

Считаем, что функция ρ от k переменных и применяем предположение индукции. Расписываем определение дифференцируемости и формулы дифференциала через частные производные:

$$\rho = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k + \alpha(h)\|h\| - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k + \alpha(h)\|h\|$$

(Важные моменты: $f(a+h) \rightarrow f(a)$ при $h \rightarrow 0$; у h всего $k+1$ координат, поэтому если $h \rightarrow 0$, то его первые k координат тоже стремятся к нулю)

По теореме Лангранжа $\exists \xi : 0 < \xi < h_{k+1}$

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + \xi)h_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1} - \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + \xi)h_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1} + \left(-\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + \xi) \right)h_{k+1} \end{aligned}$$

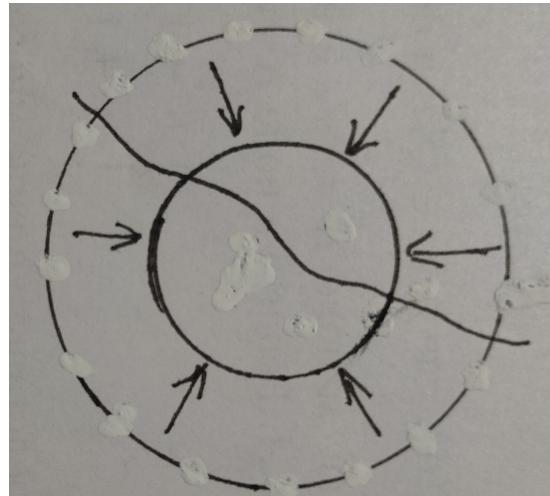
Пользуясь непрерывностью частных производных и тем, что $h_i \rightarrow 0$, $0 < \xi < h_{k+1}$, получаем, что

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1 + h_1, \dots, a_k + h_k, a_{k+1} + \xi) \right) = \alpha(h)$$

(по условию теоремы частные производные непрерывны) $|\alpha(h)h_k| < |\alpha(h)|\|h\|$

$$\rho + \sigma = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a) + \alpha(h)\|h\|$$

Хочется заметить, что когда мы используем теорему Лангранжа необходимо, чтобы функция не только была дифференцируема, но и непрерывна на каком-то отрезке. Наша функция дифференцируема в некоторой окрестности точки a , поэтому можно взять точки h_k , которые лежат внутри этой окрестности. Для того, чтобы добиться непрерывности в каждой точке, возьмём окрестность поменьше (с включённой границей), так, чтобы эти точки h_k остались всё ещё в окрестности.



□

14.10 Частные производные высокого порядка

Определение 14.18. Пусть $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ и предположим, что в некоторой окрестности $B_r(x_0)$ точки x_0 существует частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_j}$. Если функция $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}$ в точке x_0 имеет частную производную по переменной x_i , то эта частная производная $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(x_0)$ называется частной производной второго порядка по переменным x_j и x_i и обозначается $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$.

Частная производная порядка k определяется рекурсивно:

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}} \right).$$

Замечание 14.19. Частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$, вообще говоря, могут не совпадать!

14.11 Теорема Шварца

Теорема 14.20 (Шварц). Пусть смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ существуют в окрестности точки (x_0, y_0) и непрерывны в этой точке. Тогда их значения в точке (x_0, y_0) совпадают.

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t, s) = f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0 + s) + f(x_0, y_0)$$

Пусть

$$\psi(\tau) = f(x_0 + \tau, y_0 + s) = f(x_0 + \tau, y_0)$$

По теореме Лагранжа $\exists c : 0 < c < t$

$$F(t, s) = \psi(t) - \psi(0) = \psi'(c) \cdot t$$

$$\begin{aligned}\psi'(c) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c, y_0 + s) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c, y_0) \\ \varphi(u) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 + c, y_0 + u)\end{aligned}$$

По теореме Лагранжа $\exists d : 0 < d < s$

$$\psi'(c) = \varphi(s) - \varphi(0) = \varphi'(d) \cdot s$$

$$\varphi'(d) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, 0 < d < s, 0 < c < t$$

Для всех t и s из достаточно малой окрестности 0

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c, y_0 + d) \cdot t \cdot s, 0 < d < s, 0 < c < t$$

Перегруппировать слагаемые иначе, получим

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \tilde{c}, y_0 + \tilde{d}) \cdot t \cdot s, 0 < \tilde{d} < s, 0 < \tilde{c} < t$$

следовательно

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0 + \tilde{c}, y_0 + \tilde{d}) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c, y_0 + d) \\ t \rightarrow 0 &\Rightarrow c \rightarrow 0, \tilde{c} \rightarrow 0 \\ s \rightarrow 0 &\Rightarrow d \rightarrow 0, \tilde{d} \rightarrow 0\end{aligned}$$

В силу непрерывности смешанных производных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

□

14.12 Теорема Юнга

Теорема 14.21 (Юнг). Пусть f - дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0) , а её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) . Тогда смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в точке (x_0, y_0) совпадают.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Рассмотрим функцию

$$F(t, t) = f(t, t) - f(0, t) - f(t, 0) + f(0, 0).$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $g(u) = f(t, u) - f(0, u)$, получаем

$$F(t, t) = g(t) - g(0) = g'(\xi)t = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, \xi) \right)t.$$

Дифференцируемость $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(0, 0)$ означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)t + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\xi + o(\sqrt{t^2 + \xi^2}).$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, \xi) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\xi + o(\xi).$$

Т. к. $0 \leq \xi \leq t$, то $o(\sqrt{t^2 + \xi^2}) = o(t)$ (т. к. $\sqrt{t^2 + \xi^2} \leq \sqrt{2}t$) и $o(\xi) = o(t)$. Таким образом,

$$F(t, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)t^2 + o(t^2).$$

Аналогично, обозначив $g(u) = f(t, u) - f(u, 0)$, получим

$$F(t, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)t^2 + o(t^2).$$

Приняв полученные выражения, поделив на t^2 и устремив t к нулю, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0).$$

□

Замечание 14.22. Условия теорем Юнга и Шварца не следуют друг из друга.

14.13 Дифференцируемость $(m + 1)$ раз

Определение 14.23. Пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки a . Говорят, что f дважды дифференцируема в точке a , если все её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ дифференцируемы в точке a . Пусть f - m раз дифференцируема в окрестности точки a . Говорят, что f дифференцируема $(m + 1)$ раз в точке a , если все частные производные m -того порядка $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}$ дифференцируемы в точке a .

Следствие 14.24. Если f - m раз дифференцируема в точке a , то значения производных порядка m $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}(a)$ не зависят от порядка дифференцирования.

Доказательство. База индукции для $m = 2$: теорема Юнга.

Переход: рассмотрим производную порядка $m + 1$.

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_{m+1}}} \left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \dots \partial x_{k_1}} \right)$$

По предположению индукции внутри скобок можно дифференцировать в любом порядке. Поскольку функция $\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m} \dots \partial x_{k_1}}$ дифференцируема, то по теореме Юнга мы можем переставлять частную производную по переменной $x_{k_{m+1}}$ в любое место. \square

Лекция 38: Правила дифференцирования

14.14 Дифференциалы высоких порядков

Предположим, что $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ - дифференцируема в окрестности точки a и предположим, что ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ дифференцируемы в точке a . Тогда при каждом $h \in \mathbb{R}^k$ возникает функция $x \mapsto df|_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)h_k$, дифференцируема в точке a . Ее дифференциал

$$d(df(h))|_a(q) = \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(a)q_j \right) h_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)q_j \right) h_k.$$

Т.е. получена билинейная форма $d(df(h))|_a(q) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)q_j h_i$. Эта билинейная форма оказывается симметричной по теореме Юнга, а т.к. симметричная билинейная форма однозначно задается своей квадратичной формой

$$d(df(h))|_a(h) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)h_j h_i = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)dx_j(h)dx_i(h),$$

то эту квадратичную форму $d^2 f := \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)dx_j dx_i$ и называют вторым дифференциалом функции f .

Определение 14.25. Если f – m раз дифференцируема в точке a , то

$$d^n f|_a := \sum_{1 \leq j_1, \dots, j_n \leq k ???} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}}(a) dx_{j_1} \dots dx_{j_n}.$$

Последняя запись означает лишь то, что при вычислении n -го дифференциала на векторе $h \in \mathbb{R}^k$ надо воспользоваться линейностью, а

$$[dx_{j_1} \dots dx_{j_n}](h) := dx_{j_1}(h) \dots dx_{j_n}(h) = h_{j_1} \dots h_{j_n}.$$

14.15 Правила дифференцирования

Теорема 14.26. Пусть функции $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируемы в некоторой точке x . Тогда, для произвольных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, функции $af + bg$ и fg дифференцируемы в точке x и $d(af + bg) = adf + bdg$ и $d(fg) = fdg + gdf$.

Доказательство. $\alpha(h), \beta(h), \gamma(h) \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$

1. Здесь доказываем в общем случае, т. е. для функций $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$.

$$f(x + h) - f(x) = df|_x(h) + \alpha(h)||h||$$

$$g(x + h) - g(x) = dg|_x(h) + \beta(h)||h||$$

$$\begin{aligned} (af + bg)(x + h) - (af + bg)(x) &= af(x + h) + bg(x + h) - af(x) - bg(x) = \\ &= a(df|_x(h) + \alpha(h)||h||) + b(dg|_x(h) + \beta(h)||h||) = a \cdot df(h) + b \cdot dg(h) + (\alpha(h) + \beta(h))||h|| = \\ &= a \cdot df(h) + b \cdot dg(h) + \gamma(h)||h|| \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} fg(x + h) - fg(x) &= f(x + h)g(x + h) - f(x)g(x) = f(x + h)g(x + h) - f(x + h)g(x) + \\ &+ f(x + h)g(x) - f(x)g(x) = f(x + h)(g(x + h) - g(x)) + g(x)(f(x + h) - f(x)) = \\ &= f(x + h)(dg|_x(h) + \beta(h)||h||) + g(x)(df|_x(h) + \alpha(h)||h||) = (*) \end{aligned}$$

Функция f дифференцируема \Rightarrow непрерывна в точке x и $h \rightarrow 0$. Тогда

$$\begin{aligned} (*) &= (f(x) + o(1))(dg|_x(h) + \beta(h)||h||) + g(x)(df|_x(h) + \alpha(h)||h||) = f(x)dg|_x(h) + \\ &+ f(x)\beta(h)||h|| + o(1)dg|_x(h) + o(1)\beta(h)||h|| + g(x)df|_x(h) + g(x)\alpha(h)||h|| = \\ &= f(x)dg|_x(h) + g(x)df|_x(h) + \gamma(h)||h||. \end{aligned}$$

$f(x)$ и $g(x)$ - константы $\Rightarrow f(x)\beta(h)||h|| = \gamma(h)||h||$ и $g(x)\alpha(h)||h|| = \gamma(h)||h||$

$||dg|_x(h)|| \leq C||h||$ (см. конец замечания 14.2) $\Rightarrow o(1)dg|_x(h) = \gamma(h)||h||$

$o(1)\beta(h)||h|| = \gamma(h)||h||$

□

14.16 Дифференцирование сложной функции

Теорема 14.27. Пусть $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, причем отображение f дифференцируемо в точке a , отображение g дифференцируемо в точке $f(a)$. Тогда отображение $g \circ f$ дифференцируемо в точке a и $d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$.

Доказательство. $h \in \mathbb{R}^k, q \in \mathbb{R}^m$

$$f(a + h) = f(a) + df|_a(h) + \alpha(h)||h||$$

$$g(f(a) + q) = g(f(a)) + dg|_{f(a)}(q) + \beta(q)||q||$$

$$g(f(a + h)) - g(f(a)) = g(f(a) + (f(a + h) - f(a))) - g(f(a)) = (*)$$

Функция f - дифференцируема \Rightarrow непрерывна \Rightarrow при $h \rightarrow 0$, $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0 \Rightarrow q \rightarrow 0$, поэтому

$$\begin{aligned} (*) &= g(f(a)) + dg|_{f(a)}(f(a+h) - f(a)) + \beta(f(a+h) - f(a))||f(a+h) - f(a)|| - g(f(a)) = \\ &= dg|_{f(a)}(df|_a(h) + \alpha(h)||h||) + \gamma(h)||h|| = (**) \end{aligned}$$

Докажем, что

$$\gamma(h) = \beta(f(a+h) - f(a)) \frac{||f(a+h) - f(a)||}{||h||},$$

где $\gamma(h)$ - бесконечно малая функция. Функция f - дифференцируема \Rightarrow непрерывна \Rightarrow при $h \rightarrow 0$, $f(a+h) - f(a) \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{||f(a+h) - f(a)||}{||h||} &= ||df\left(\frac{h}{||h||}\right) + \alpha(h)|| \leqslant (\text{неравенство треугольника}) \\ &\leqslant ||df\left(\frac{h}{||h||}\right)|| + ||\alpha(h)|| \end{aligned}$$

По замечанию 14.2 $||df\left(\frac{h}{||h||}\right)|| \leqslant C \frac{h}{||h||} = C$

Далее продолжаем преобразования

$$(**) = dg|_{f(a)} \cdot df|_a(h) + ||h||dg|_{f(a)}(\alpha(h)) + \gamma(h)||h|| = (***)$$

По замечанию 14.2 $||h||dg|_{f(a)}(\alpha(h)) \leqslant C||\alpha(h)|| \rightarrow 0$

$$(***) = dg|_{f(a)} \cdot df|_a(h) + \gamma_2(h)||h||$$

$dg|_{f(a)} \cdot df|_a(h)$ означают композицию двух линейных отображений. \square

Замечание 14.28. Поясним запись $d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$. Здесь $df|_a : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ есть линейное отображение и $dg|_{f(z)} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение. Тогда их композиция $dg|_{f(a)} \circ df|_a : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение, действующее по правилу $dg|_{f(a)} \circ df|_a(h) = dg|_{f(a)}(df|_a(h))$.

Замечание 14.29. Матрица Якоби композиции функций $g \circ f$ в точке a равняется произведению матриц Якоби отображения f в точке a и отображения g в точке $f(a)$. В частности, при $n = 1$, для функции $g(x_1, \dots, x_m)$ и отображения

$$f(y_1, \dots, y_k) = (f_1(y_1, \dots, y_k), \dots, f_m(y_1, \dots, y_k)),$$

во-первых, выполнено:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(a)) \frac{\partial f_1}{\partial y_j}(a) + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(a)) \frac{\partial f_m}{\partial y_j}(a).$$

Во-вторых, выполнено так называемое свойство инвариантности 1-го дифференциала: $dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial g}{\partial x_m}dx_m$, где нам не важно, являются ли dx_1, \dots, dx_m - дифференциалами независимых переменных или же являются дифференциалами некоторых функций $x_j = f_j(y_1, \dots, y_k)$.

Пояснение. 1. При композиции линейных отображений их матрицы при переходе перемножаются. Для каждой функции такие матрицы будут иметь вид

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}, J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial f_1} & \frac{\partial g}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial f_m} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица перехода композиции функций будет равна $J_g J_f$.

2.

$$\begin{aligned} dg(f) &= \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_m}dx_m = \sum_{i=1}^k \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_i} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right) dx_i = \\ &= \sum_{i=1}^k \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_i} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_i = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_i} \left(\sum_{i=1}^k \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_i \right) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial f_i} df_i \end{aligned}$$

Пример 14.30. Пусть $f(x, y) = \varphi(u, v, w)$, где $u = xy, v = x + y, w = x - y$.
Тогда

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv + \frac{\partial \varphi}{\partial w}dw = \frac{\partial \varphi}{\partial u}d(xy) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}d(x+y) + \frac{\partial \varphi}{\partial w}d(x-y) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}(xdy + ydx) + \frac{\partial \varphi}{\partial v}(dx + dy) + \frac{\partial \varphi}{\partial w}(dx - dy). \end{aligned}$$

В частности, $\frac{\partial f}{\partial x} = y \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = x \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial w}$.

14.17 Дифференциал обратного отображения

Теорема 14.31. Пусть $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ - есть непрерывная биекция между окрестностями $U(a)$ и $V(f(a))$, причем обратное отображение $f^{-1} : V(f(a)) \rightarrow U(a)$ также непрерывно (т. е. f - гомеоморфизм между $U(a)$ и $V(f(a))$). Предположим, что f - дифференцируемо в точке a и df - обратимое линейное отображение. Тогда f^{-1} - дифференцируемо в точке $f(a)$ и $df^{-1}|_{f(a)} = (df|_a)^{-1}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что такой предел равен 0.

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{\|f^{-1}(f(a) + q) - f^{-1}(f(a)) - (df|_a)^{-1}(q)\|}{\|q\|}$$

$$\begin{aligned} h &= f^{-1}(f(a) + q) - f^{-1}(f(a)), h \rightarrow 0 \Leftrightarrow q \rightarrow 0 \\ h &= f^{-1}(f(a) + q) - a \Rightarrow q = f(a + h) - f(a) \end{aligned}$$

f дифференцируемо в точке a , поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h - (df|_a)^{-1}(f(a + h) - f(a))\|}{\|f(a + h) - f(a)\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|h - (df|_a)^{-1}(df_a(h) + \alpha(h)\|h\|)\|}{\|f(a + h) - f(a)\|} =$$

Пользуемся линейностью дифференциала и тем, что по замечанию 14.2 $(df|_a)^{-1}(\alpha(h)) \leq C\|\alpha(h)\|$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(h)\| \cdot \|h\|}{\|df(h) + \alpha(h)\| \|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(h)\|}{\|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\|}$$

Теперь отдельно оценим знаменатель. p - вектор \Rightarrow по замечанию 14.2

$$\|(df)^{-1}(p)\| \leq C\|p\|$$

Пусть $p = df(h)$.

$$\begin{aligned} \|(df)^{-1}(df(h))\| &\leq C\|df(h)\| \\ \|h\|C_2 &\leq \|df(h)\| \end{aligned}$$

Таким образом, применяя неравенство треугольника,

$$\|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\| \geq \|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\| - \|\alpha(h)\| \geq C - \|\alpha(h)\| \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|\alpha(h)\|}{\|df\left(\frac{h}{\|h\|}\right) + \alpha(h)\|} = 0$$

□

Глава 15

Экстремумы функций многих переменных

Лекция 39: Формула Тейлора и экстремум

15.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 15.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Если $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема $m + 1$ раз на отрезке $[a, x]$, то*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x - a)^m + \frac{1}{m!} \int_a^x (x - t)^m f^{(m+1)}(t) dt$$

Доказательство. База: $m = 0$.

$$f(x) = f(a) + \int_c^x f'(t) dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$$

Переход:

$$\begin{aligned} R_m &= \frac{1}{m!} \int_a^x (x - t)^m f^{(m+1)}(t) dt = -\frac{1}{(m+1)!} \int_a^x f^{(m+1)}(t) d(x-t)^{m+1} = \\ &= -\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(t) \Big|_a^x + \frac{1}{(m+1)!} \int_a^x (x-t)^{m+1} f^{(m+2)}(t) dt = \\ &= \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a) + R_{m+1} \end{aligned}$$

□

Следствие 15.2. Справедливо следующее равенство:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство.

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \right| = \left| \frac{1}{m!} \int_0^x (x-t)^m e^t dt \right| = (*)$$

Пользуемся следующей оценкой

$$\left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \sup_{x \in [a,b]} |\varphi(x)| (b-a)$$

При $x \geq 1$

$$(*) \leq \left| \frac{x^{m+1} e^x}{m!} \right| \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty \text{ и фиксированном } x$$

При $x < 1$

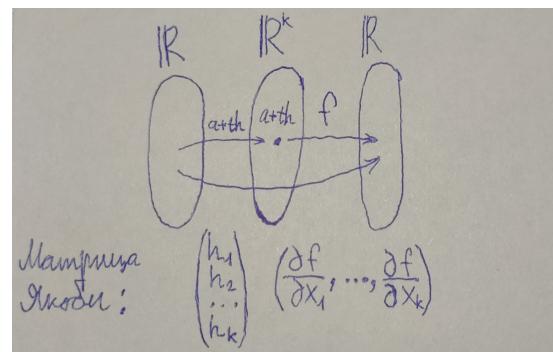
$$(*) \leq \left| \frac{e^x}{m!} \right| \rightarrow 0$$

□

15.2 Формула Тейлора

Лемма 15.3. Пусть функция f m раз дифференцируема в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) := f(a+th)$. Тогда φ m раз дифференцируема в окрестности точки нуль и $\varphi^{(m)}(t) = d^m f|_{a+th}(h)$.

Доказательство. База индукции: $m = 1$.



$$\varphi'(t) = f'(a+th) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a+th)h_k =$$

$$df \Big|_{a+th}(h)$$

Переход:

$$\begin{aligned}
 \varphi^{(m+1)}(t) &= (\varphi^{(m)}(t))' = (d^m f|_{a+th}(h))'_t = \left(\sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} h_{j_1} \dots h_{j_m} \right)'_t = \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} h_{j_1} \dots h_{j_m} \right) = \sum_{j_1, \dots, j_m} \sum_{i=1}^k \frac{\partial^{m+1} f(a+th)}{\partial x_i \partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_m}} h_{j_1} \dots h_{j_m} h_i = \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_{m+1}} \frac{\partial^{m+1} f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_{m+1}}} h_{j_1} \dots h_{j_{m+1}} = d^{m+1} f|_{a+th}(h)
 \end{aligned}$$

□

Теорема 15.4. Пусть функция $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ m раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки a . Тогда справедлива следующая формула Тейлора:

$$f(a+h) = f(a) + df|_a(h) + \frac{1}{2!} d^2 f|_a(h) + \dots + \frac{1}{m!} df^{(m)}|_a(h) + o(\|h\|^m).$$

Доказательство. $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi(t) = f(a+th)$

$$\begin{aligned}
 \varphi(1) &= \varphi(0) + \varphi'(0) \cdot 1 + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t) dt = \\
 &\quad (\text{по лемме 15.3}) = f(a) + \frac{df|_a(h)}{1!} + \dots + \frac{d^{m-1} f|_a(h)}{(m-1)!} + \frac{d^m f|_a(h)}{m!} + R_m \\
 R_m &= \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t) dt - \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!} = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(t) dt - \\
 &\quad - \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} \varphi^{(m)}(0) dt = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^1 (1-t)^{m-1} (\varphi^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(0)) dt \\
 &\quad \frac{|R_m|}{\|h\|^m} \leqslant \frac{\sup |\varphi^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(0)|}{\|h\|^m m!} = \\
 &= \sup \left| \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} h_1 \dots h_m - \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} h_1 \dots h_m \right| \frac{1}{\|h\|^m \cdot m!} = (*) \\
 &\quad \forall k |h_{j_k}| \leqslant \|h\| \Rightarrow \frac{|h_{j_1} \dots h_{j_m}|}{\|h\|^m} \frac{1}{m!} \leqslant \frac{1}{m!}
 \end{aligned}$$

m -я производная функции непрерывна \Rightarrow

$$\Rightarrow \sum_{j_1, \dots, j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_n}} \rightarrow 0 \text{ при } h \rightarrow 0$$

Значит $(*) \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{|R_m|}{\|h\|^m} \rightarrow 0 \Rightarrow R_m = o(\|h\|^m)$

□

15.3 Точка локального экстремума

Определение 15.5. Пусть функция $u = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 . Тогда x_0 называют точкой

- локального максимума функции, если для всех точек $x \in U(x_0)$ верно неравенство $f(x) \leq f(x_0)$;
- строгого локального максимума функции, если для всех точек $x \in U(x_0)$ верно неравенство $f(x) < f(x_0)$;
- локального минимума функции, если для всех точек $x \in U(x_0)$ верно неравенство $f(x) \geq f(x_0)$;
- строгого локального минимума функции, если для всех точек $x \in U(x_0)$ верно неравенство $f(x) > f(x_0)$;
- локального экстремума функции, если она входит в одну из перечисленных выше категорий.

15.4 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 15.6 (Необходимое условие локального экстремума). Пусть a - точка локального экстремума функции f и предположим, что f дифференцируема в точке a . Тогда $df|_a = 0$ (или, что тоже самое, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0 \forall j$).

Доказательство. Пусть a - точка максимума \Rightarrow при фиксированном h и $t \neq 0$ $\varphi(0) > \varphi(t) = f(a + ht)$.

$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow$ необходимое условие $\varphi'(0) = 0 = df|_a(h) \forall h$ по лемме 15.3 $\Rightarrow df|_a = 0$. \square

Определение 15.7. Точки, в которых все частные производные равны нулю, называются стационарными.

15.5 Достаточное условие локального экстремума

Теорема 15.8 (Достаточное условие локального экстремума). Пусть f дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки a и предположим, что в точке a выполнено необходимое условие локального экстремума: $df|_a(h) = 0 \forall h$. Тогда

1. если $d^2f|_a(h) > 0 \forall h \neq 0$, то a - точка строгого локального минимума;

2. если $d^2 f|_a(h) < 0 \forall h \neq 0$, то a - точка строгого локального максимума.

Доказательство. Докажем первый пункт, второй доказывается аналогично. По теореме 15.4

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= df|_a(h) + \frac{d^2 f|_a}{2}(h) + o(\|h\|^2) = \frac{d^2 f|_a}{2}(h) + o(\|h\|^2) = \\ &= \|h\|^2 \left(\frac{d^2 f|_a \left(\frac{h}{\|h\|} \right)}{2} + o(1) \right) = (*) \end{aligned}$$

$d^2 f|_a \left(\frac{h}{\|h\|} \right)$ - симметричная билинейная форма

$$\begin{aligned} \min_{\|u\|=1} u^T Bu &= \min_{\|u\|=1} u^T S^T D S u = [v = S u] = \\ (*) &\geq \|h\|^2 \left(\frac{m}{2} + o(1) \right) \Rightarrow \forall h \in B_\delta(a) \|h\|^2 \left(\frac{m}{2} + o(1) \right) \geq \|h\|^2 \frac{m}{4} > 0 \end{aligned}$$

□

15.6 Критерий Сильвестра

Замечание 15.9. Отметим, что $d^2 f|_a(h)$ — это квадратичная форма

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_k}(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Условие теоремы выше подразумевает её положительную или отрицательную определенность, что позволяет применить критерий Сильвестра:

1. все угловые миноры матрицы квадратичной формы $d^2 f|_a$ положительны
 $\Leftrightarrow d^2 f|_a$ - положительно определена (т.е. $d^2 f|_a(h) > 0$ при каждом $h \neq 0$);
2. угловые миноры матрицы квадратичной формы $d^2 f|_a$ начинаются с отрицательного, а затем чередуют знаки $\Leftrightarrow d^2 f|_a$ - отрицательно определена (т.е. $d^2 f|_a(h) < 0$ при каждом $h \neq 0$).

15.7 Теорема о неявной функции

Для сокращения всех записей будем использовать обозначение $F'_y(x, y) := \frac{\partial F}{\partial y}(x, y)$.

Теорема 15.10. Пусть $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ — определена и непрерывно дифференцируема (т. е. частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности U точки $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Пусть 1) $F(a, b) = 0$ и 2) $F'_y(a, b) \neq 0$. Тогда найдутся промежутки $I_x = (a - \alpha, a + \alpha)$ и $I_y = (b - \beta, b + \beta)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f : I_x \rightarrow I_y$, для которых $I_x \times I_y \subset U$ и для каждой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$ выполнено $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$. Кроме того, $f'(x) = -\frac{F'_x(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

Теорема 15.11. Пусть $F : \mathbb{R}^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}$ — определена и непрерывно дифференцируема (т. е. частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности U точки $(a, b) = (a_1, \dots, a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Пусть 1) $F(a, b) = 0$ и 2) $F'_y(a, b) \neq 0$. Тогда найдутся $I_x = (a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1) \times \dots \times (a_k - \alpha_k, a_k + \alpha_k)$ и $I_y = (b - \beta, b + \beta)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f : I_x \rightarrow I_y$, для которых $I_x \times I_y \subset U$ и для каждой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$ выполнено $F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$. Кроме того, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{F'_{x_j}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}$.

15.8 Теорема о неявном отображении

Теорема 15.12. Пусть отображение $F : \mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности U точки $(a, b) = (a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{k+n}$. Пусть 1) $F(a, b) = 0$ и 2) матрица

$$F'_y(a, b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(a, b) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(a, b) & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(a, b) \end{pmatrix} — \text{обратима.}$$

Тогда найдутся $I_x = (a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1) \times \dots \times (a_k - \alpha_k, a_k + \alpha_k)$ и $I_y = (b_1 - \beta_1, b_1 + \beta_1) \times \dots \times (b_n - \beta_n, b_n + \beta_n)$ и непрерывно дифференцируемое отображение $f = (f_1, \dots, f_n) : I_x \rightarrow I_y$, для которых $I_x \times I_y \subset U$ и для каждой точки $(x, y) \in I_x \times I_y$ выполнено

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$