Конспект лекций по математическому анализу 2023/2024

Корчагин Егор

31 марта 2024 г.

Содержание

1 Лекция 1: Множества, функции, вещественные числа

2 Лекция 2: Множества, функции, вещественные числа

3 Лекция 3: Предел числовой последовательности

4 Лекция 4: Теорема Вейерштрасса, число e

5 Лекция 5: Число e, частичный предел

6 Лекция 6: Критерий Коши

7 Лекция 7: Числовые ряды

8 Лекция 8: Перестановка членов ряда

9 Лекция 9: Предел функции

10 Лекция 10: Замечательные пределы, критерий Коши

11 Лекция 11: Эквивалентность и o-символика

12 Лекция 12: Эквивалентность и о-символика

13 Лекция 13: Свойства непрерывных функций

14 Лекция 14: Построение показательной функции

15 Лекция 15: Производная и дифференциал

16 Лекция 16: Свойства дифференцируемых функций

17 Лекция 17: Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

18 Лекция 18: Правило Лопиталя, производные старших порядков

19 Лекция 19: Формула Тейлора

20 Лекция 20: Ряд Тейлора

21 Лекция 21: Исследование функций с помощью производных

21.1 6.1 Достаточное условие локального экстремума

Напомним, что для дифференцируемой в точке локального экстремума c функции f по теореме Ферма выполнено $f'(c) = 0$. Т. е. равенство нулю производной является необходимым условием локального экстремума дифференцируемой функции.

Напомним, что нами также было уже доказано следствие 5.26:

Следствие (5.26). Пусть f дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда f не убывает (не возрастает) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0(f'(x) \leqslant 0$ соответственно) для каждой точки $x \in (a, b)$. Кроме того, если $f'(x) > 0(f'(x) < 0)$, то f строго возрастает (соответственно, строго убывает) на (a, b).

Докажем теперь достаточное условие локального экстремума в терминах производных старших порядков.

Теорема 21.1. *Пусть f имеет n производных в окрестности точки $c \in (a, b)$ и $f(c) = f'(c) = ... = f^{(n-1)}(c) = 0$, а $f^{(n)}(c) \neq 0$. Тогда, если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) < 0(f^{(n)}(c) > 0)$, то c — точка локального максимума (минимума). Если $n = 2k + 1$, то точка c не является точкой локального экстремума.*

Доказательство. □

22 Лекция 22: Первообразная, неопределённый интеграл

22.1 Первообразная

Определение 22.1. *Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале I, если F дифференцируема на I и $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.*

Педагогический приём. $\frac{1}{x} = (\ln|x|)' = \frac{2}{2x} = (\ln|2x|)'$, т. к. $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$, т. е. отличается на константу.

Лемма 22.1. *Любые две первообразные F_1 и F_2 функции f на интервале I отличаются на константу.*

Доказательство. $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$\Phi(x)$ дифференцируема как сумма дифференцируемых функций.

$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0$

Т. к. $\Phi(x)$ дифференцируема $\Rightarrow$ непрерывна на любом интервале.

По теореме Лангранжа

$\forall a, b \in I, a \leqslant b$ $\exists c \in (a, b) \to \Phi(a)$ - $\Phi(b) = f'(c)(a-b) = 0 \cdot (a-b) = 0$. Значит $\Phi(x) = const$. □

Определение 22.2. *Множество всех первообразных функции f на некотором заданном интервале I называется неопределённым интегралом от f и обозначается $\displaystyle\int f(x)\,dx$.*

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid F(x) \text{ - первообразная } f(x), c \in \mathbb{R}\}$$

22.2 Таблица первообразных

- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x}\,dx = \ln|x| + C;$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C;$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$

- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$;
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$;

22.3 Свойства неопределённого интеграла

Теорема 22.1. *1. (Линейность)*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx = \alpha \int f(x)\ dx + \beta \int g(x)\ dx + C;$$

2. (Формула интегрирования по частям)

$$\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx;$$

3. (Формула замены переменной)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int f(x)\ dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

(Здесь подразумевается, что все интегралы существуют.)

Доказательство. 1. Пусть $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$.

$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow \alpha F(x) + \beta G(x)$ - первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow \int \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

А также $\alpha \int f(x)\ dx + \beta \int g(x)\ dx = \alpha F(x) + \alpha c_1 + \beta G(x) + \beta c_2 = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g(x) + C =$

$= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ dx = \int f'(x)g(x)\ dx + \int f(x)g'(x)\ dx$ (линейность)

$\Rightarrow \int f(x)g'(x) = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx$.

3. $(F(\varphi(t)))'_t = F'_x(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(t)) \in \displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

   С другой стороны, $F(\varphi(t)) \in \displaystyle\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$.

   Следовательно, $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}$.

$\square$

Замечание 22.1. *Отметим, что, т.к. $f'(x)\,dx = df$ и $g'(x)\,dx = dg$ (инвариантность первого дифференциала), то свойство 2) обычно записывают в виде $\displaystyle\int f\,dg = fg - \int g\,df$.*

Аналогично, свойство 3) обычно записывают в виде $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt =$ $\displaystyle= \int f(\varphi(t))\,d\varphi(t)$ и рассматривают φ как новую переменную.

Пример 22.1. *Найдём следующие первообразные:*

1.1 $\displaystyle\int \cos^9 x \sin x\ \,dx = -\int \cos^9 x (\cos x)'\ \,dx =$ *(формула замены переменной)* $\displaystyle -\int t^9\,dt\Big|_{t=\cos x} = -\frac{t^{10}}{10} + C\Big|_{t=\cos x} = -\frac{\cos^{10} x}{10} + C$;

1.2 $\displaystyle\int \cos^9 x \sin x\,dx = -\int \cos^9 x(\cos x)'\,dx =$ *(Замечание 7.6)* $\displaystyle -\int \cos^9 x\,d\cos x = -\frac{\cos^{10} x}{10} + C$;

Здесь $\cos x$ воспринимаем как переменную.

2.1 $\displaystyle\int \ln x\ \,dx = \int \ln x \cdot 1\ \,dx = \int \ln x \cdot x'\ \,dx =$ *(формула интегрирования по частям)* $\displaystyle x\ln x - \int x(\ln x)'\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C$;

2.2 $\displaystyle\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x\ln x - x + C$;

3. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\ \,dx = \left[x = \cos t; -1 \leqslant x \leqslant 1; t = \arccos x; 0 \leqslant t \leqslant \pi\right]$ *(здесь используем формулу замены переменной в обратную сторону)*

$= \int \sqrt{1-\cos^2 t}\ \ d\cos t = -\int \sqrt{1-\cos^2 t}\sin t\ \ dt = -\int \sin^2 t\ \ dt\ \ (t \geqslant 0)$ $= -\int 1-\cos^2 t\ dt = \int \cos^2 t - 1\ dt = \int \cos^2 t\ dt - \int 1\ dt = \int \dfrac{1+\cos 2x}{2}\ dt -$ $t = \int \dfrac{1}{2}\ \ dt + \dfrac{1}{2}\int \cos 2t\ \ dt - t = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 2t}{2} + C = \dfrac{1}{2}t + \dfrac{1}{2}\sin t\cos t +$ $C = \dfrac{1}{2}\arccos x + \dfrac{1}{2}\cos(\arccos x)\sin(\arccos x) + C$ *(мы подставили в $\varphi(t)$ $t = \varphi^{-1}(x)$ и получили, что $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$, т. к. $\varphi(t) = \cos t$ - биекция)* $= \frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$;

Как мы поняли, интеграл - это обратная операция к дифференцированию и обратные операции часто усторены сложнее, чем прямые. Так и с интегралом: если продифференцировать можно почти любую функцию в виде формулы, то интеграл от функции, выраженной через элементарные функции, иногда не может быть выражен через элементарные функции. Но для некоторых функций ответ выражается через элементарные. В частности, всегда можно найти интеграл от рациональной функции, но с некоторой оговоркой.

23 Лекция 23: Интеграл от рациональной функции

23.1 Рациональная функция

Определение 23.1. *Функция $R(x)$ называется рациональной, если*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

для некоторых многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Пример 23.1. *Найдём следующие первообразные:*

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C$;
2. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$ *(используем пункт 1)* $= -\frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + \ln|x| + C$;
3. $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| + C - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| + C - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$ $(d(x^2+1) = (x^2+1)'dx = 2xdx)$ $= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$;

23.2 Разложение многочлена на неприводимые

Теорема 23.1. *Любой многочлен единственным образом раскладывается на неприводимые множители. (без доказательства)*

Замечание 23.1. *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ раскладывается на множители вида $(x-a)$ и (x^2+px+q), где $p^2-4q<0$ (дискриминант меньше нуля).*

23.3 Правильная дробь

Определение 23.2. *Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная, если степень числителя меньше степени знаменателя. Нулевой многочлен 0 является правильной дробью.*

Замечание 23.2. *Любая рациональная дробь единственным способом представима как сумма многочлена и правильной дроби.*

23.4 Элементарная дробь

Определение 23.3. *Правильная рациональная дробь* $\frac{P(x)}{Q(x)}$ *называется* <u>*элементарной (или простейшей)*</u>*, если её знаменатель* $Q(x)$ *представляет собой степень неприводимого многочлена* $p(x)$*:*

$$Q(x) = p^k(x), k \leqslant 1,$$

а степень числителя $P(x)$ *меньше степени* $p(x)$*.*

23.5 Разложение дроби на элементарные

Теорема 23.2. *Любая правильная рациональная дробь единственным образом разлагается в сумму элементарных дробей. (без доказательства)*

Следствие 23.2.1. *Каждая рациональная функция* $\frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ *представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей*

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, p^2-4q<0, A, M, N \in \mathbb{R}.$$

23.6 Интегрирование рациональных функций

Теорема 23.3. *Пусть* P *и* Q *два многочлена. Тогда первообразная функции* $\frac{P}{Q}$ *выражается в элементарных функциях (более точно, рациональных, ln и arctg).*

Доказательство. Пусть $Q(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (x-a_s)^{m_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_kx+q_k)^{n_k}$. По теореме 23.2 дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ раскладывается в сумму элементарных дробей

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_{ij}x+C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.$$

(Здесь более сильное утверждение: любая рациональная функция раскладывается в виде суммы *именно таких* элементарных дробей)

Чтобы проинтегрировать $\frac{P(x)}{Q(x)}$, нужно, в силу линейности интеграла, проинтегрировать по отдельности многочлен $R(x)$ и элементарные дроби. Но многочлен мы уже умеем интегрировать, осталось разобраться с элементарными дробями.

1. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = Aln|x-a| + C;$
2. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, n \neq 1$ (проверяется взятием производной у правой части);

3. Воспользуемся тем, что $\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a})+C$.
$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ dx = M\int \frac{x+\frac{N}{M}}{x^2+px+q}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p-p+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\ dx + \frac{M}{2}\int \frac{\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}\ dx + \frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q)+$
$\left(N-\frac{pM}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$ ($x^2+px+q>0$, т. к. $D=p^2-4q<0$, ещё здесь пользуемся верхним интегралом);

4. $n\in\mathbb{N}, a\neq 0, J_n(x,a) = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)$ (формула интегрирования по частям) $= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int \frac{x\cdot n\cdot 2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx - 2n\int \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n(x,a) - 2na^2J_{n+1}(x,a) \Rightarrow J_{n+1}(x,a) = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n(x,a) - J_n(x,a)\right) = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n(x,a)\right)$

5. $n>1$,
$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^n}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p-p+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^n}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\ dx + \frac{M}{2}\int \frac{-p+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^n}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot$
$\cdot\int \frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n} = \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)J_n\left(x+\frac{p}{2}, \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)$.

□

24 Лекция 24: Интегрирование рациональных функций, интеграл Римана

24.1 Метод Остроградского

Теорема 24.1 (Формула Остроградского). *Пусть $degP < degQ$. Тогда:*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

где $Q_2(x)$ имеет те же корни, что и многочлен $Q(x)$, но однократно, $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)}$, а $P_1(x)$ и $P_2(x)$ находятся методом неопределенных коэффициентов после дифференцирования формулы, с учетом $\deg P_1(x) < \deg Q_1(x), \deg P_2(x) < \deg Q_2(x)$.

Доказательство. Если мы складываем две правильные дроби, то получим правильную дробь:

$$\deg A(x) < \deg B(x), \deg C(x) < \deg D(x)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) + C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$$

$$\deg A(x)D(x) = \deg A(x) + \deg D(x) < \deg B(x) + \deg D(x)$$

$$\deg C(x)B(x) = \deg C(x) + \deg B(x) < \deg D(x) + \deg B(x) < \deg B(x) + \deg D(x)$$

Тогда

$$\deg A(x)D(x) + C(x)B(x) = max(\deg A(x)D(x)), \deg C(x)B(x)) <$$

$$< \deg B(x) + \deg D(x)$$

Значит дробь $\frac{A(x)D(x)+C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$ правильная.

Пусть

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{k_i} \frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{s_j} \frac{b_{js}x + c_{js}}{(x^2+p_jx+q_j)^s}.$$

Проинтегрируем каждое слагаемое по отдельности. Если для каждого слагаемого мы можем применить такую формулу

$$\int \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}\,dx = \frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} + \int \frac{P_2^*(x)}{Q_2^*(x)}\,dx,$$

в которой многочлены $P^*(x), Q^*(x), P_1^*(x), Q_1^*(x), P_2^*(x), Q_2^*(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то потом эти формулы мы можем сложить и получить итоговую формулу. Когда мы суммируем левую часть, то из-за линейности интеграла все интегралы вида $\displaystyle\int \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}\,dx$ объединятся в правильную дробь $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ (используем доказанный факт). В правой части слагаемые вида $\displaystyle\int \frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)}\,dx$ объединяются в правильную дробь $\displaystyle\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx$, приэтом свойство знаменателя о том, что степень каждого множителя $Q_1(x)$ меньше на единицу, чем у $Q(x)$, сохраняется. А также при суммировании в правой части интегралов вида $\displaystyle\int \frac{P_2^*(x)}{Q_2^*(x)}\,dx$ получаем $\displaystyle\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$, приэтом степень каждого множителя многочлена $Q_2(x)$ равна 1, т. к если мы складываем дроби с одинаковыми знаменателями, то знаменатель дроби не изменяется, т. е. множители остаются в первой степени, а если мы складываем дроби с разными знаменателями, то знаменатели перемножаются и каждый множитель остаётся в первой степени.

Осталось проверить, что формула выполняется для каждого слагаемого. Докажем это для 5 интегралов из теоремы 23.3.

В 1. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a}$ и 3. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ случаях $\frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} = 0$.

Во 2. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \int \frac{0}{Q_2(x)}\,dx$, у первого слагаемого степень $n-1$ в знаменателе.

В 5. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) J_n\left(x+\frac{p}{2}, \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)$, у первого слагаемого степень $n-1$ в знаменателе. Теперь нужно разобраться с J_n.

В 4.$\displaystyle J_n(x,a) = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-1)J_{n-1}(x,a)\right)$ у первого слагаемого в знаменателе степень на 1 меньше, а второе слагаемое - это интеграл следующего порядка. Когда мы применим реккурентную формулу для J_{n-1}, то получим дробь со степенью ещё на 1 меньше в знаменателе. Продолжим этот процесс пока не дойдём до первой степени в знаменателе. Если сложить дроби, у которых степень в знаменателе убывает, то получится дробь, у которой знаменатель имеет степень $n-1$, т. е. на 1 меньше. А интеграл от дроби со степенью 1 в знаменателе, на которой мы остановились, имеет вид $\displaystyle\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$. □

Замечание 24.1. *Метод Остроградского удобно использовать, если знаменатель $Q(x)$ имеет кратные корни.*

24.2 Рациональные функции от *cos* и *sin*

Пример 24.1. *Пусть* $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. *Заметим, что*

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Тем самым, интегралы от функций $R(\cos x, \sin x)$, *где* R *— рациональная функция, сводятся заменой к интегралам от рациональных функций.*

Пояснение 24.1.

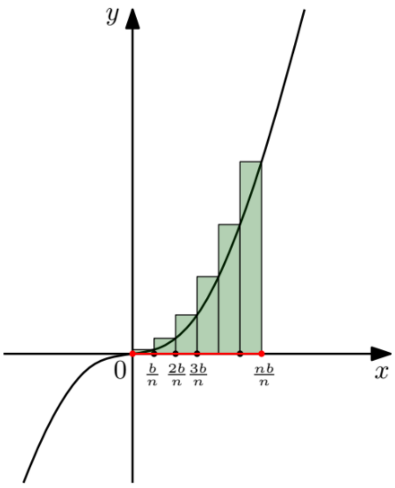
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2dt}{1+t^2}$$

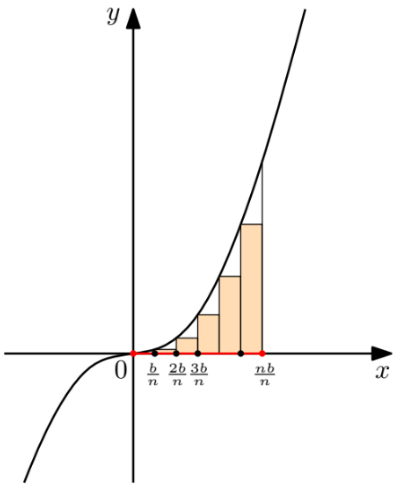
Договоримся, что $-\pi < x < \pi$, *тогда получаем биекцию между* t *и* x. *Функции* $\sin x$ *и* $\cos x$ *- это* 2π*-периодические функции и интервал, на котором мы посчитали интеграл, имеет длину* 2π *и далее "копируем"то, что получилось после интегрирования на другие интервалы длины* 2π. *Следовательно,*

$$\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\,dx = \int \frac{P\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)}{Q\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)} \frac{2dt}{1+t^2}$$

24.3 Определенный интеграл как площадь

Пример 24.2. *Чему равняется площадь под графиком функции* $y = x^3$ *на отрезке* $[0; b]$*?*





Пояснение 24.2. *Площадь столбиков на левой картинке:*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kb}{n}\right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{b^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{b^4}{n^4}(1+2+...+n)^2(*) = \frac{b^4}{n^4}\frac{(n+1)^2n^2}{4}$$

(*) Формула суммы кубов доказывается по индукции.

Площадь фигуры под графиком заведомо покрывается зелёными столбиками.

Площадь столбиков на правой картинке:

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^3 b^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{b^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = \frac{b^4}{n^4}(1+2+...+n)^2 =$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4}$$

Сумма S_2 меньше площади фигуры под графиком.

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{n^4}\frac{(n+1)^2n^2}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}$$

По теореме о зажатой последовательности площадь фигуры равна $\frac{b^4}{4}$. Но можно было получить ответ, посчитав интеграл: $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$.

24.4 Интеграл Римана

Определение 24.1.
- *Разбиением T отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.*
- *Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ называются отрезками разбиения. Длину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k \geqslant 1$.*
- *Величина $\Delta_T := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$ называется диаметром разбиения.*
- *Размеченным разбиением (T, ξ) отрезка $[a, b]$ называется пара, состоящая из разбиения T отрезка $[a, b]$ и набора точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n), \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.*
- *Интегральной суммой функции f, соответствующей размеченному разбиению (T, ξ), называется выражение*

$$\sigma(f, T, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Определение 24.2. *Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a,b]$, если существует такое число I, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall$ размеченного разбиения (T,ξ) с диаметром разбиения $\Delta_T < \delta$ выполнено $|\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon$.*

Число I называют интегралом функции f на отрезке $[a,b]$ и обозначают $\int_a^b f(x)\,dx$.

Пояснение 24.3. *Геометрически мы уменьшаем длину отрезков и увеличиваем их число.*

Пример 24.3.

1. $\int_a^b 1\,dx = b - a$;
2. *Функция $I_{\mathbb{Q}}$ не интегрируема ни на каком отрезке.*

Пояснение 24.4.

1. $\sigma(f,T,\xi) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$. *(функция $f(\xi_k) = 1\ \forall k$)*
2. *Функция Дирихле $I_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to 0, 1$ определяется следующим образом:*

$$I_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$\forall$ разбиения T можно взять $\xi \in \mathbb{Q}$, $\zeta \in \mathbb{I}$ (внутри любого отрезка разбиения можно взять рациональное и иррациональное число)

Тогда $\sigma(I_{\mathbb{Q}},T,\xi) = \sum_{k=1}^n I_{\mathbb{Q}}(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$ и $\sigma(I_{\mathbb{Q}},T,\zeta) = \sum_{k=1}^n I_{\mathbb{Q}}(\zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0$.

Тогда для любого T с любым диаметром разбиения можно взять разметку, такую что иногда сумма равна $b - a$, иногда 1. Если $b - a \neq 0$, то функция не интегрируема.

25 Лекция 25: Интеграл Римана, суммы Дарбу

Предложение 25.1. *Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть f - интегрируема на $[a,b]$.

Тогда $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (T,\xi)$ с $\Delta_T < \delta \to |\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon \Leftrightarrow \Leftrightarrow I - \varepsilon < \sigma(f,T,\xi) < I + \varepsilon$.

$\sigma(f,T,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Пусть f - неограничена на $[a,b] \Rightarrow$ неограничена на одном из отрезков Δ_k, пусть на Δ_{k_0}. Фиксируем ξ_k для всех k кроме k_0. Тогда $\sigma(f,T,\xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = C + f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0} \Rightarrow I - C - \varepsilon < f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0} < I - C + \varepsilon \Rightarrow \frac{I-C-\varepsilon}{\Delta x_{k_0}} < f(\xi_{k_0}) < \frac{I-C+\varepsilon}{\Delta x_{k_0}}$ - противоречие, функция ограничена. □

Предложение 25.2 (Линейность интеграла)**.** *Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$. Тогда для произвольных чисел α, β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ и*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Доказательство. f - интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall (T,\xi)$ с $\Delta_T < \delta_1 \to |\sigma(f,T,\xi) - I_1| < \varepsilon$.

g - интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 : \forall (T,\xi)$ с $\Delta_T < \delta_2 \to |\sigma(g,T,\xi) - I_2| < \varepsilon$.

Размеченное разбиение (T,ξ) взяли одно и то же для обоих интегралов.

Первые два утверждения означают, что $I_1 = \int_a^b f(x)\, dx, I_2 = \int_a^b g(x)\, dx$.

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha f(\varepsilon_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \beta g(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \alpha\sigma(f,T,\xi) + \beta\sigma(g,T,\xi)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмём $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \Rightarrow |\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| = |\alpha\sigma(f,T,\xi) + \beta\sigma(g,T,\xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| \leqslant |\alpha\sigma(f,T,\xi) - \alpha I_1| + |\beta\sigma(g,T,\xi) - \beta I_2| \leqslant |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon = (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$

$\forall \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2(|\alpha|+|\beta|)} > 0\ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall (T,\xi)$ с $\Delta_T < \delta \to |\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| \leqslant (|\alpha| + |\beta|)\frac{\varepsilon'}{2(|\alpha|+|\beta|)} = \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'$. □

Предложение 25.3 (Монотонность интеграла). *Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$. Если $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, то $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx$.*

Доказательство. $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \geqslant 0$ и $\int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b g(x)\ dx \Leftrightarrow \int_a^b g(x) - f(x)\ dx$ (пользуемся линейностью). Пусть $h(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow$ требуется доказать, что $h(x) \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) \geqslant 0$.

По определению $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (T, \xi)$ с $\Delta_T < \delta \to |\sigma(h, T, \xi) - \int_a^b h(x)\ dx| < \varepsilon \Leftrightarrow \int_a^b h(x) - \varepsilon < \underline{\sigma(h, T, \xi) < \int_a^b h(x) + \varepsilon}$.

$\sigma(h, T, \xi) \geqslant 0$(т. к. $h(\xi_k) \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n h(\xi_k)\Delta x_k \geqslant 0) \Rightarrow \int_a^b h(x) + \varepsilon > 0\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) > -\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) \geqslant 0$. □

Замечание 25.1. *В частности, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$.*

Доказательство. Далее мы докажем, что если $f(x)$ интегрируема, то и $|f(x)|$ интегрируема.

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b |f(x)|\ dx \leqslant \int_a^b f(x)\ dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$$

□

25.1 Суммы и интегралы Дарбу

Фиксируем ограниченную функцию f, определённую на отрезке $[a,b]$.

Определение 25.1. *Для ограниченной на отрезке $[a,b]$ функции f и разбиения T определим <u>нижнюю и верхнюю суммы Дарбу</u>:*

$$s(f,T) := \sum_{k=1}^n \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)\Delta x_k;$$

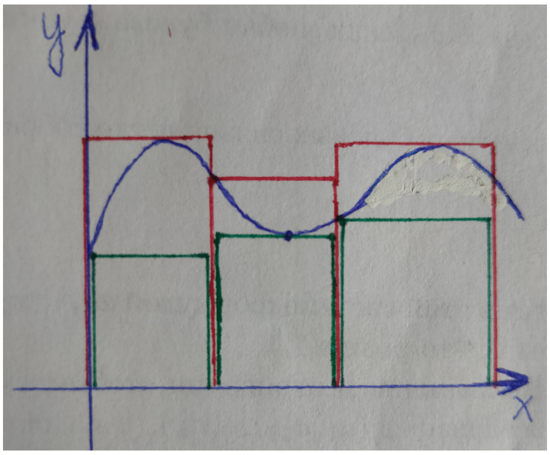
(на каждом отрезке берём минимальное значение функции)

$$S(f,T) := \sum_{k=1}^n \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)\Delta x_k.$$

(на каждом отрезке берём максимальное значение функции)

Нижним интегралом Дарбу называется число $I_* = \sup\limits_T s(f,T)$*, а верхним интегралом Дарбу называется число* $I^* = \inf\limits_T S(f,T)$.

Сумма зелёных прямоугольников - это $s(f,T)$, сумма красных прямоугольников - это $S(f,T)$.



25.2 Критерий Дарбу

Лемма 25.1. *1.* $s(f,T) \leqslant \inf\limits_\xi \sigma(f,T,\xi) \leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant \sup\limits_\xi \sigma(f,T,\xi) \leqslant S(f,T)$;

2. Если $T \subset T'$, *то* $s(f,T) \leqslant s(f,T')$ *и* $S(f,T') \leqslant S(f,T)$;

3. $s(f,T_1) \leqslant s(f,T_1 \cup T_2) \leqslant S(f,T_1 \cup T_2) \leqslant S(f,T_2)$.

Доказательство. 1. Докажем, что $s(f,T) = \inf\limits_\xi \sigma(f,T,\xi)$

$\leqslant$: $\forall \xi\ s(f,T) = \sum\limits_{k=1}^n \inf\limits_{\xi_k} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow s(f,T)$ - нижняя грань $\sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k$.

$\inf\limits_\xi \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k = \inf\limits_\xi \sigma(f,T,\xi)$ - точная нижняя грань $\Rightarrow s(f,T) \leqslant \inf\limits_\xi \sigma(f,T,\xi)$.

$\geqslant$: $s(f,T) = \sum\limits_{k=1}^n \inf\limits_{\xi_k} f(\xi_k)\Delta x_k$

По определенению инфимума $\forall \varepsilon > 0\ \exists \xi'_k \in \Delta_k : f(\xi'_k) \leqslant \inf\limits_{\xi_k} f(\xi_k) + \varepsilon$.

$$\sigma(f,T,\xi') = \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\inf_{\xi_k} f(\xi_k) + \varepsilon \right)\Delta x_k = s(f,T) + \varepsilon(b-a)$$

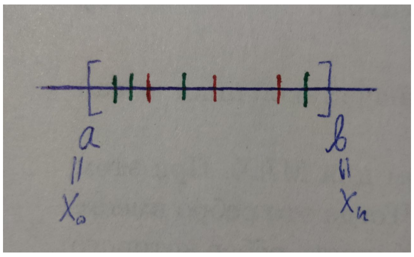
$$\inf_{\xi} \sigma(f,T,\xi) \leqslant \sigma(f,T,\xi') \leqslant s(f,T) + \varepsilon(b-a)$$

При $\varepsilon \to 0$, то $\inf\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi) \leqslant s(f,T)$.

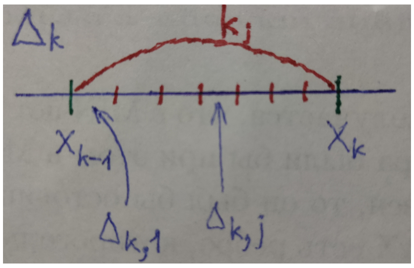
Второе и третье неравенство в цепочке очевидное. Четвёртое неравенство на самом деле является равенством и доказывается как первое равенство.

2. Рассмотрим отрезок $[a,b]$. На нём определено разбиение T. Теперь рассмотрим измельчение разбиения T'. Оно содержит те же точки, что и в T, но добавлет ещё свои точки.

   Красные точки - точки разбиения T, красные и синие точки - точки измельчения T'.



   Пусть подотрезки $\Delta_k \in T$, а подотрезки $\Delta'_k \in T'$, $T \subset T'$. Рассмотрим отрезок Δ_k и будем считать, что он разбился на k_j отрезков. Поэтому отрезок Δ'_k мы будем индексировать двумя индексами, первый номер - номер отрезка Δ_k, в которым он лежит, второй номер - номер отрезка Δ'_k внутри отрезка Δ_k.



   Тогда

$$s(f,T') = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_{k,j}} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j}$$

   Приэтом на нескольких маленьких отрезках инфимум не меньше инфимума на одном большом отрезке, потому что на большом отрезке у нас есть больше точек, из которых мы можем выбрать меньшее значение. Если инфимум достигался на красном отрезке, то этот отрезок принадлежит большому, поэтому мы можем взять точку принадлежащую красному отрезку и получить инфимум на большом отрезке не больше, чем на маленьких. Поэтому

$$s(f,T') = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi\in\Delta_{k,j}} f(\xi)\cdot\Delta x_{k,j} \geqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi\in\Delta_k} f(\xi)\cdot\Delta x_{k,j}$$

Продолжаем преобразования.

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi\in\Delta_k} f(\xi)\cdot\Delta x_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \inf_{\xi\in\Delta_k} f(\xi)\sum_{j=1}^{k_j}\Delta x_{k,j} = \sum_{k=1}^{n} \inf_{\xi\in\Delta_k} f(\xi)\Delta x_k = S(f,T)$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

3.

$$T_1 \subset T_1\cup T_2 \Rightarrow \text{(из пункта 2) } s(f,T) \leqslant s(f,T_1\cup T_2)$$
$$\text{(из пункта 1) } s(f,T_1\cup T_2) \leqslant S(f,T_1\cup T_2)$$
$$T_1\cup T_2 \supset T_2 \Rightarrow \text{(из пункта 2) } S(f,T_1\cup T_2) \leqslant S(f,T_2)$$

$\square$

26 Лекция 26: Интеграл Римана, суммы Дарбу

Лемма 26.1. *$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T$ с $\Delta_T < \delta$ выполнено $I_* \leqslant s(f,T) + \varepsilon$ и $I^* \geqslant S(f,T) - \varepsilon$.*

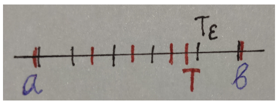
Доказательство. По определению супремума

$$I_* = \sup_T s(f,T) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists T_\varepsilon : I_* \leqslant s(f,T_\varepsilon) + \varepsilon$$

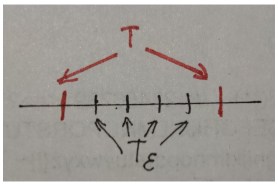
Рассмотрим произвольное разбиение T

$$s(f, T_\varepsilon \cup T) \geqslant (\text{пункт 2 предыдущей леммы}) s(f,T_\varepsilon) \geqslant I_* - \varepsilon$$

Точки из разбиения T окрасим в красный цвет, точки из T_ε - в чёрный цвет.



Точки T_ε делят отрезок с чёрными концами на число чёрных точек + 1. Тогда (подразумеваем, что и в T, и в T_ε одинаковое число точек ????????) точки из T_ε могут разбить на не более, чем $2|T_\varepsilon|$ отрезков, потому что максимум достигается, когда в каждом отрезке мы ставим по одной чёрной точке (т. е. разбиваем отрезок на два).



Пояснение. Здесь Δ_k - отрезок $[x_k, x_{k+1}]$, подразумеваем под знаком суммы сумму по всем отрезкам, которые образуются этим множеством точек (отрезок образуют соседние точки, т. е. внутри отрезка других точек разбиения нет).

$$s(f, T_\varepsilon \cup T) = \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k = \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \in T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k +$$

$$+ \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \notin T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k = (*)$$

Первая сумма - сумма отрезков с красными концами, вторая сумма - сумма остальных отрезков (т. е. либо оба конца чёрные, либо один конец чёрный, а другой - красный). Первое слагаемое выразим как разность суммы по всем отрезкам с красными концами и суммы по всем отрезкам с красными концами, но с чёрными точками внутри.

$$(*) = \sum_{\Delta_k \in T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k - \sum_{\Delta_k \in T \text{ и } \Delta_k \notin T \cup T_\varepsilon} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k + \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \notin T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant s(f,T) + 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \Delta_T \cdot 2|T_\varepsilon|$$

В конце - грубая оценка для последних двух слагаемых.

Возьмём $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2 \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot 2|T_\varepsilon|}$. Тогда для T с $\Delta_T < \delta$

$$I_* \leqslant s(f,T_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant s(f, T \cup T_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant s(f,T) + 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \Delta_T \cdot 2|T_\varepsilon| + \varepsilon <$$

$$< s(f,T) + 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \delta \cdot 2|T_\varepsilon| + \varepsilon = s(f,T) + \varepsilon + \varepsilon = s(f,T) + 2\varepsilon$$

Заменой $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ получаем $I_* \leqslant s(f,T) + \varepsilon'$.

Аналогично доказывается, что $I^* \geqslant S(f,T) - \varepsilon$.

Уточнение. Если фиксируем ε, то T_ε - фиксированное число. $f(x)$ интегрируема $\Rightarrow$ она ограничена (по предложению 25.1) $\Rightarrow$ супремум ограничен, поэтому такое δ рассматривать корректно. □

Теорема 26.1 (Критерий Дарбу)**.** *Ограниченная функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $I^* = I_*$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Если функция интегрируема, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (T,\xi) \text{ с } \Delta_T < \delta \to |\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < \sigma(f,T,\xi) < I + \varepsilon$$

$$I - \varepsilon \leqslant \inf_{\xi} \sigma(f,T,\xi) = s(f,T) \leqslant \sup_{T} s(f,T) = I_*$$

$$I^* = \inf_{T} S(f,T) \leqslant S(f,T) = \sup_{\varepsilon} \sigma(f,T,\xi) \leqslant I + \varepsilon$$

Докажем, что $I_* \leqslant I^*$:

$$\forall T_1, T_2\ s(f,T_1) \leqslant S(f,T_2) \Rightarrow \sup_{T_1} s(f,T_1) \leqslant S(f,T_2) \Rightarrow \sup_{T_1} s(f,T_1) \leqslant S(f,T_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{T_1} s(f,T_1) \leqslant \inf_{T_2} S(f,T_2)$$

Тогда

$$I - \varepsilon \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant I + \varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем, что $I_* = I^*$.

$\Leftarrow I = I_* = I^*$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta \to I - \varepsilon = I_* - \varepsilon \leqslant \text{(лемма 26.1) } s(f,T) \leqslant$$

$$\leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant S(f,T) \leqslant \text{(лемма 26.1) } I^* + \varepsilon = I + \varepsilon \Rightarrow |\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon,$$

что есть определение интеграла.

□

26.1 Колебание функции

Определение 26.1. *Колебанием функции f на отрезке Δ называется число*

$$\omega(f,\Delta) := \sup_{x,y\in\Delta} |f(x) - f(y)| = \sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y).$$

Пояснение 26.1. *1. В одну сторону*

$$\forall x, y \in \Delta \ f(x) - f(y) \leqslant \sup_{x,y\in\Delta} (f(x)) - f(y) \leqslant \sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x,y\in\Delta} |f(x) - f(y)| \leqslant \sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y)$$

2. В другому сторону

По определению супремума и инфимума

$$\forall \delta > 0 \ \exists x_\delta : \sup_{x\in\Delta} f(x) \leqslant f(x_\delta) + \delta$$

$$\forall \delta > 0 \ \exists y_\delta : \sup_{y\in\Delta} f(y) \geqslant f(y_\delta) + \delta$$

Тогда

$$\sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y) \leqslant f(x_\delta) - f(y_\delta) + 2\delta \leqslant \sup_{x,y\in\Delta} |f(x) - f(y)| + 2\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y) \leqslant \sup_{x,y\in\Delta} |f(x) - f(y)| \ \textit{при } \delta \to 0$$

27 Лекция 27: Интегрируемость по Риману различных классов функций

Теорема 27.1. *Пусть f - ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $I^* = I_*$;
2. *Функция f интегрируема на $[a, b]$;*
3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T$ *с* $\Delta_T < \delta$:
$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon;$$
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists T$:
$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon;$$

Доказательство. Заметим, что

$$S(f, T) - s(f, T) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k - \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k$$

$1 \Rightarrow 2$ Применяем критерий Дарбу.

$2 \Rightarrow 3$ Пусть f - интегрируемая функция на $[a, b]$. Тогда $I^* = I_* = I$.

По лемме 26.1

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta : \begin{cases} I = I^* \geqslant S(f, T) - \varepsilon, \\ I = I_* \leqslant s(f, T) + \varepsilon. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I - I \leqslant s(f, T) - S(f, T) + 2\varepsilon$$

По замечанию заключаем

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k \leqslant 2\varepsilon$$

$3 \Rightarrow 4$ По предыдущему пункту существует такое T с диаметром $\Delta_T < \delta$, значит и просто T существует.

$4 \Rightarrow 1$ В доказательстве критерия Дарбу мы получили следующую цепочку неравенств

$$s(f,T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(f,T)$$

Тогда

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S(f,T) - s(f,T) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon \Rightarrow \text{ при } \varepsilon \to 0 \ I^* = I_*$$

□

27.1 Интегрируемость модуля, квадрата и произведения функций

Следствие 27.1.1. *Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то $|f|$ и f^2 интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$ и для любого $[c,d] \subset [a,b]$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. f - интегрируема на $[a,b] \Leftrightarrow$ по пункту 4 теоремы 27.1

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon.$$

Доказательство для модуля функции

(Неравенство треугольника: $|A| - |B| \leqslant |A - B|, |B| - |A| \leqslant |A - B| \Rightarrow ||A| - |B|| \leqslant |A - B|$)

$$\omega(|f|,\Delta_k) = \sup_{x,y\in\Delta_k} ||f(x)| - |f(y)|| \leqslant \sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x) - f(y)| = \omega(f,\Delta_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega(|f|,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon$$

Доказательство для квадрата функции

$$\omega(f^2,\Delta_k) = \sup_{x,y\in\Delta_k} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup_{x,y\in\Delta_k} |(f(x) - f(y))(f(x) + f(y))| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x) - f(y)|(|f(x)| + |f(y)|) \leqslant 2 \sup_{x\in\Delta_k} |f(x)| \sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x) - f(y)| =$$

$$= 2 \sup_{x\in\Delta_k} |f(x)| \cdot \omega(f,\Delta_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f^2,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2 \sup_{x\in\Delta_k} |f(x)| \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant 2 \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant M \cdot \varepsilon, \text{где M - константа.}$$

В обоих случаях в конце мы применяем теорему 27.1 и заключаем, что функции интегрируемы на $[a, b]$.

Интегрируемость функции на подотрезке докажем далее. □

Следствие 27.1.2. *Если f и g интегрируемы на $[a, b]$, то и $f \cdot g$ интегрируема на $[a, b]$.*

Доказательство. Если f и g интегрируемы, то $f - g$ и $f + g$ интегрируемы. Тогда их квадраты $(f - g)^2$ и $(f + g)^2$ интегрируемы. Следовательно, $\frac{1}{4}((f+g)^2 - (f-g)^2) = \frac{1}{4} \cdot 4fg = fg$ интегрируема. □

27.2 Интегрируемость монотонной функции

Следствие 27.1.3. *Если f монотонна на $[a, b]$, то f интегрируема по Риману на $[a, b]$.*

Доказательство. Без ограничения общности пусть f - возрастающая функция.

$$\omega(f, \Delta_k) = f(x_k) - f(x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1}))\Delta x_k = (*)$$

Пусть $\Delta x_k = \Delta x_j \ \forall k, j$. Тогда

$$(*) = \Delta x_1 \sum_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \Delta_T (f(b) - f(a))$$

Следовательно, $\forall T-$ разбиение $[a, b]$ на одинаковые части с $\Delta_T < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

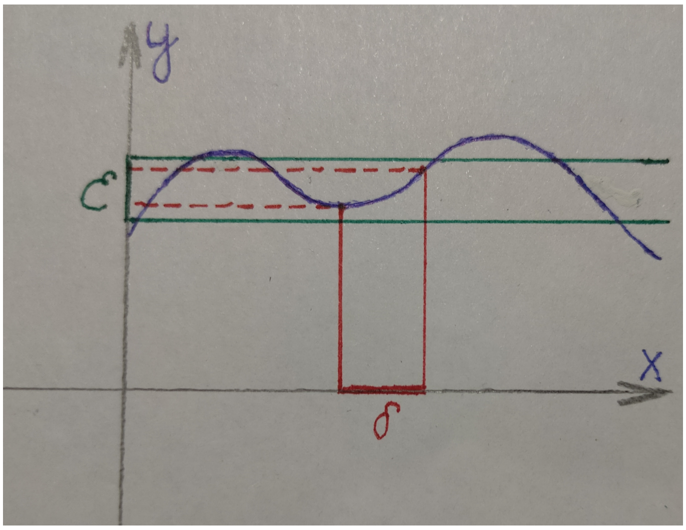
$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k \leqslant \varepsilon \cdot (f(b) - f(a)).$$

Для убывающей f доказывается аналогично. □

27.3 Равномерная непрерывность

Определение 27.1.

Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ для которого из неравенства $|x - y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Пояснение 27.1. *Другими словами, существует δ на оси OX такая, что расстояние между x и y меньше, чем δ, и разность между значениями функции x и y помещается в этот $\varepsilon-$коридор.*

Замечание 27.1. *Если функция является равномерно-непрерывной, то она является и непрерывной, т. к. определение непрерывности слабее:*

$f-$*непрерывна на* $X \Rightarrow \forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

В обратную сторону это не правда, см. пункт 2) примера 27.1.

Пример 27.1.

1. *Функция $f(x) := \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, т.к. по теореме Лагранжа $|\sin x - \sin y| = |\cos \xi| \cdot |x - y| \leqslant |x - y|$.*
2. *Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не равномерно непрерывна на $(0, 1)$, т.к. $f(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{n}) = n, |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} \to 0$.*

Пояснение 27.2.

1. *По теореме Лагранжа $\forall x, y \in \mathbb{R} |\sin x - \sin y| = |(\sin \xi)'(x - y)| = |\cos \xi||(x - y)| \leqslant |x - y|$*
2. *Требуется доказать отрицание определения равномерной непрерывности:*

$$\exists \varepsilon = 1\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in (0, 1)\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geqslant 1$$

Будем доказывать для $\delta = \frac{1}{n}$, потому что всегда можно взять $\frac{1}{n} < \delta$. Тогда пусть $x = x_n = \frac{1}{n}, y = y_n = \frac{1}{2n} \Rightarrow |x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}, |f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geqslant 1$.

27.4 Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 27.2 (Кантора). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, то f равномерно непрерывна на $[a, b]$.*

Следствие 27.2.1. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$. Тогда f интегрируема по Риману на $[a, b]$.*

28 Лекция 28: Формула Ньютона-Лейбница

28.1 Аддитивность интеграла

Следствие 28.0.1. *Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $[c, d] \subseteq [a, b]$, то f интегрируема на отрезке $[c, d]$.*

Следствие 28.0.2. *Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $c \in [a, b]$, то f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ и верно равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

28.2 Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 28.1 (Формула Ньютона–Лейбница). *Пусть F - первообразная интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ функции f. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Далее будем использовать соглашение: при $b > a$ по определению

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

28.3 Существование первообразной

Теорема 28.2. *Пусть f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда функция*

$$F(x) := \int_a^x f(x)\,dx$$

непрерывна на $[a, b]$. Кроме того, если f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. □

Следствие 28.2.1. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$, тогда у f существует первообразная.*

28.4 Формула интегрирования по частям

Теорема 28.3 (Формула интегрирования по частям). *Пусть f, g — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции. Тогда*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Пример 28.1. $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx.$

29 Лекция 29: Несобственный интеграл

29.1 Формула интегрирования подстановкой

Теорема 29.1. *Пусть f — непрерывна на $[a, b], \varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt.$$

Пример 29.1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\, dx.$

29.2 Мера Жордана (дополнительный материал)

Пусть Δ — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, являющийся декартовым произведением промежутков вида $[a_i, b_i]$, (a_i, b_i), $[a_i, b_i)$ или $(a_i, b_i]$. Мера Жордана параллелепипеда Δ определяется как произведение

$$\mu\Delta = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i).$$

Для ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определяются:

- внешняя мера Жордана

$$\mu^* E = \inf \sum_{k=1}^{N} \mu\Delta_k,\ \ \bigcup_k \Delta_k \supset E$$

- внутренняя мера Жордана

$$\mu_* E = \sup \sum_{k=1}^{N} \mu\Delta_k, \bigcup_k \Delta_k \subset E, \Delta_k \cap \Delta_m = \varnothing,\ \text{если } k \neq m.$$

Здесь $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_N$ — параллелепипеды описанного выше вида.

Определение 29.1. *Множество E называется измеримым по Жордану (или квадрируемым), если $\mu^* E = \mu_* E$. В этом случае мера Жордана равна $\mu E = \mu^* E = \mu_* E$.*

29.3 Несобственный интеграл Римана

Определение 29.2. *Пусть f интегрируема на каждом отрезке $[a, x]$ при $x < b$ ($b \in (-\infty, +\infty]$). Говорят, что несобственный интеграл*

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

сходится, если существует предел

$$\lim_{x \to b-0} \int_a^x f(t)\, dt.$$

В этом случае значение несобственного интеграла полагают равным значению данного предела. В противном случае (если предела не существует) говорят, что несобственный интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с особенностью в нижнем пределе интегрирования.

Пример 29.2.

$$\int_1^b \frac{1}{x^p}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - 1), & p \neq 1, \\ \ln b, & p = 1. \end{cases}$$

Предел при $b \to \infty$ существует тогда и только тогда, когда $p > 1$.

С другой стороны,

$$\int_b^1 \frac{1}{x^p}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(1 - b^{1-p}), & p \neq 1, \\ -\ln b, & p = 1. \end{cases}$$

Предел при $b \to 0$ существует тогда и только тогда, когда $p < 1$.

29.4 Свойства несобственного интеграла

Теорема 29.2. *Пусть f, g интегрируемы на каждом отрезке $[a, x]$ при $x < b$ и пусть для них определены несобственные интегралы на промежутке $[a, b)$. Тогда*

1. *если $b \in \mathbb{R}$ и f интегрируема на $[a, b]$, то значение несобственного интеграла на промежутке $[a, b)$ совпадает со значением обычного интеграла Римана по отрезку $[a, b]$;*

2. *функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a, b)$ и*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx;$$

3. если $c \in [a, b)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

29.5 Формула интегрирования подстановкой

Теорема 29.3. *Пусть f непрерывна на $[a, b)$, $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ - непрерывно дифференцируемое отображение, $\varphi(\alpha) = a, \varphi(t) \to b$ при $t \to \beta$. Тогда функция $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[\alpha, \beta)$ и*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

29.6 Формула интегрирования по частям

Теорема 29.4. *Пусть f, g непрерывно дифференцируемы на $[a, b)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)g(x)$. Тогда функции $f'g$ и fg' одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$ и в случае интегрируемости*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \lim_{x\to b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f(t)g'(t)\,dt.$$

29.7 Критерий Коши

Теорема 29.5 (Критерий Коши)**.** *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; b)$, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a; \xi] \subseteq [a; b)$ и неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Тогда для сходимости интеграла*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число η, что при любых $\eta_1, \eta_2 \in (\eta; b)$

$$\left| \int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx \right| < \varepsilon.$$

30 Лекция 30: Абсолютная сходимость

30.1 Абсолютная сходимость

Определение 30.1. *Говорят, что несобственный интеграл* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *сходится* ***абсолютно****, если сходится интеграл* $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$.

Предложение 30.1. *Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.*

Доказательство. □

Замечание 30.1. *Исследование абсолютной сходимости сводится к исследованию сходимости интеграла от неотрицательной функции. В случае неотрицательной функции* f *функция* F *оказывается монотонной, поэтому сходимость интеграла от неотрицательной функции равносильна ограниченности* F *на* $[a, b)$.

30.2 Условная сходимость

Определение 30.2. *Говорят, что несобственный интеграл* $\int_a^b f(t)\,dt$ *сходится* ***условно****, если сам интеграл сходится, но не сходится абсолютно.*

Пример 30.1.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

последний интеграл сходится абсолютно. В то же время,

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|\,dx \geqslant \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\,dx,$$

где первый интеграл не сходится, а второй сходится, а значит и интеграл от суммы сходиться не может.

30.3 Несобственный интеграл от знакопостоянной функции

Теорема 30.1 (Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции)**.** *Пусть функция* $f(x) \geqslant 0$ *интегрируема на любом отрезке* $[a, b'] \subset [a, b)$*. Тогда сходимость интеграла* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *эквивалентна условию* $\displaystyle\sup_{b' \in [a,b)} \int_a^{b'} f(x)\,dx < +\infty$.

Доказательство. □

30.4 Первый признак сравнения

Теорема 30.2 (Первый признак сравнения)**.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на любом отрезке* $[a, b'] \subset [a, b)$ *и для любого* $x \in [a, b)$ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$*. Тогда:*

- *из сходимости следует сходимость;*
- *из расходимости следует расходимость.*

Доказательство. □

30.5 Эквивалентность в смысле сходимости интегралов

Определение 30.3. *Будем говорить, что* $f(x)$ *и* $g(x)$ *эквивалентны в смысле сходимости интегралов при* $x \to b - 0$ *(обозн.* $f(x) \overset{cx.}{\sim} g(x)$ *при* $x \to b - 0$*), если* $\exists m, M > 0, b_1 < b$ *такие, что* $\forall x \in [b_1, b)$ *выполняются неравенства*

$$mg(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x).$$

Теорема 30.3 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть неотрицательные функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на любом отрезке* $[a, b'] \subset [a, b)$ *и* $f(x) \overset{cx.}{\sim} g(x)$ *при* $x \to b - 0$.

Тогда несобственные интегралы $\int_a^b g(x)\,dx$ *и* $\int_a^b (x)\,dx$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. □

30.6 Второй признак сравнения

Предложение 30.2. *Если* $f \geqslant 0$ *и* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to b - 0$*, то* $f(x) \overset{cx.}{\sim} g(x)$*.*

Доказательство. □

Предложение 30.3. *Пусть* $f_i(x), g_i(x)$ $i \in \{1, 2, 3\}$ *- неотрицательные на промежутке* $[a, b)$ *функции, причем* $f_3(x) > 0, g_3(x) > 0$ *и* $f_i(x) \overset{cx.}{\sim} g_i(x)$ $i \in \{1, 2, 3\}$ *при* $x \to b - 0$*. Тогда*

$$\frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \overset{cx.}{\sim} \frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{f_3(x)} \text{ при } x \to b - 0.$$

Доказательство. □

Пример 30.2. *Исследовать на сходимость* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{x} \sin\left(\frac{2+\cos x}{x^2}\right)}{(e^{\frac{1}{x}} - 1)^\alpha}\,dx.$

31 Лекция 31: Еще немного про числовые ряды

31.1 Первый признак сравнения

Определение 31.1. *Ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *называется* ***знакопостоянным***, *если или* $a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, *или* $a_n \leqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Предложение 31.1 (Первый признак сравнения). *Пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. *Наоборот, если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство. □

Замечание 31.1. *Поскольку первые несколько членов не влияют на сходимость ряда, достаточно, чтобы неравенства выше выполнялись начиная с некоторого момента* $\forall n > n_0$. *Это называется* ***принципом локализации***.

Следствие 31.0.1 (Признак Вейерштрасса). *Если* $|a_n| \leqslant b_n$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится, то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится.*

31.2 Второй признак сравнения

Теорема 31.1 (Второй признак сравнения). *Пусть* $a_n, b_n > 0$ *и* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c \neq 0$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$*— эквивалентны по сходимости, т.е. сходятся/расходятся одновременно.*

Доказательство. □

Следствие 31.1.1. *Если* $a_n \geqslant 0$ *и* $a_n \sim b_n, n \to \infty$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

31.3 Интегральный признак

Предложение 31.2. *Пусть* $f(x) \leqslant 0$ *и не возрастает на промежутке* $[1, +\infty)$. *Тогда ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и интеграл* $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ *сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. □

Пример 31.1. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *сходится при* $p > 1$ *и расходится при* $p \leqslant 1$.

31.4 Признак Даламбера

Теорема 31.2 (Признак Даламбера)**.** *Пусть* $a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1. *если существует* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in (0,1)$ *такие, что* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q\ \forall k \geqslant k_0$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*
2. *если* $\exists k_0 : \forall k \leqslant k_0 \to \frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. □

Следствие 31.2.1 (Признак Даламбера в предельной форме)**.** *Пусть* $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = q$, *тогда*

1. *при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*
2. *при* $q > 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*
3. *при* $q = 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *может сходится, а может и расходится.*

31.5 Радикальный признак Коши

Теорема 31.3 (Радикальный признак Коши)**.** *Пусть* $a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1. *если существуют* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in (0,1)$ *такие, что* $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q\ \forall k \geqslant k_0$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*
2. *если* $\exists k_0 : \forall k \geqslant k_0 \to \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$, *то ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. □

Следствие 31.3.1 (Признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть* $a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, *тогда*

1. *при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*
2. *при* $q > 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*
3. *при* $q = 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *может сходится, а может и расходится.*

Пример 31.2. *Признак Коши сложнее, однако сильнее, чем признак Даламбера. Если признак Даламбера подтверждает сходимость или расходимость ряда, то и признак Коши делает то же, однако обратное неверно:*

$$??????? \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^p$$

31.6 Признак Гаусса

Теорема 31.4 (Признак Гаусса)**.** *Пусть* $a_n > 0$. *Если существует* $p \in \mathbb{R}, \delta > 0$ *такие, что* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O(\frac{1}{n^{1+\delta}})$, *то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$, *т. е. при* $p > 1$ *сходится и при* $p \leqslant 1$ *расходится.*

Доказательство. □

32 Лекция 32: Признаки Абеля и Дирихле

32.1 Признак Дирихле

Теорема 32.1 (Признак Дирихле)**.** *Пусть последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ограничена:*

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \to \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant C,$$

а последовательность $\{b_k\}$ *монотонно стремится к нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. □

32.2 Признак Абеля

Теорема 32.2 (Признак Абеля)**.** *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, последовательность* $\{b_k\}$ *монотонна и ограничена. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. □

Следствие 32.2.1 (Следствие из признака Абеля)**.** *Пусть последовательность* $\{b_k\}$ *монотонна и* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b \in (0, +\infty)$*. Тогда ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится или расходятся одновременно.*

Замечание 32.1. *Следствие из признака Абеля утверждает, что характер сходимости ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *не изменится, если последовательность* $\{a_k\}$ *заменить на эквивалентную последовательность* $\{c_k\}$ *при условии, что последовательность* $\{\frac{c_k}{a_k}\}$ *монотонна.*

32.3 Признак Лейбница

Теорема 32.3 (Признак Лейбница)**.** *Если последовательность* b_k *монотонно стремится к нулю, то ряд Лейбница* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k b_k$ *сходится.*

Доказательство. □

Замечание 32.2. *Из того, что ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится и* $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{b_k}{a_k} = 1$ *не следует, что* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится.*

32.4 Теоремы о среднем

Теорема 32.4 (Первая теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, и $g(x)$ не меняет знак (то есть либо всюду неотрицательна: $g(x) \geqslant 0$, либо всюду неположительна $g(x) \leqslant 0$). Тогда существует такое число $\mu, m \leqslant \mu \leqslant M$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. □

Следствие 32.4.1 (Первая теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ - непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и не меняет знак. Тогда существует такое число $c \in [a,b]$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f() \int_a^b g(x)\,dx.$$

Теорема 32.5 (Вторая теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ монотонна (нестрого) на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx + f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. □

Лемма 32.1 (Формулы Бонне). *Если функция $f(x)$ не возрастает и $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a) \int_a^\xi g(x)\,dx.$$

Если же функция $f(x)$ не убывает, то

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b) \int_\xi^b g(x)\,dx.$$

32.5 Признак Дирихле

Пусть функция $y = f(x)g(x)$ определена на промежутке $[a;b)$ и неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Тогда справедливы следующие достаточные признаки сходимости.

Теорема 32.6 (Признак Дирихле)**.** *Интеграл* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *сходится, если:*

- *функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную на* $[a;b)$*;*
- *функция* $g(x)$ *монотонна на* $[a;b)$*, причем* $\lim\limits_{x\to b-0} g(x) = 0$*.*

Пример 32.1. *Интеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx$*, сходится при* $\alpha > 0$ *по признаку Дирихле.*

32.6 Признак Абеля

В условиях предыдущего слайда на функцию $y = f(x)g(x)$ справедлив следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 32.7 (Признак Абеля)**.** *Интеграл* $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ *сходится, если:*

- *функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b)$ *и интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится;*
- *функция* $g(x)$ *ограничена и монотонна на* $[a;b)$*.*

Пример 32.2. *Докажите, что при* $\alpha > 0$ *интеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \arctan x\,dx$ *сходится.*