Конспект лекций по математическому анализу 2023/2024

Корчагин Егор

7 августа 2024 г.

Оглавление

Глава 1

Вещественные числа

Лекция 1: Множества, функции, вещественные числа

1.1 Кванторы и обозначения

- Квантор всеобщности - $\forall$.
- Квантор существования - $\exists$.
- Импликация (логическое следствие) - $\Rightarrow$.
- Равносильность — $\Leftrightarrow$.
- Выполнено - $\rightarrow$ (будем использовать редко).

1.2 Парадокс Рассела

Из лекций по дискретной математике вы знаете, что такое **высказывание**. Высказывание всегда либо истинно, либо ложно.

Пример 1.1. *a = «любую карту можно покрасить в четыре цвета так, чтобы соседние участки были различных цветов» - высказывание.*

Пример 1.2. *«Данное высказывание ложно» - это не высказывание.*

- Предположим, что для любого свойства $P(x)$ можно выделить множество, элементы которого этому свойству удовлетворяют

$$\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow P(x)).$$

(для всякого условия $P(x)$ существует множество y, состоящее из тех x, которые удовлетворяют условию $P(x)$)

- Пусть $P(x)$ есть $x \notin x$.
- Тогда найдётся множество y такое, что
$$\forall x(x \in y \Leftrightarrow x \notin x).$$
- Так как это верно для любого x, то верно и для $x = y$. То есть
$$y \in y \Leftrightarrow y \notin y - \underline{\text{противоречие}}.$$

Альтернативное объяснение парадокса Рассела

Если разрешить содержать в множестве само же множество как элемент (т. е. $X \in X$), то возникает противоречие называемое парадоксом Рассела.

Рассмотрим множество $M = \{X : X \notin X\}$, элементами которого являются все множества такие, что эти множества не содержат себя в качестве элемента.

1. Пусть $M \notin M \Rightarrow M \in M$ (потому что M состоит их всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента).
2. Пусть $M \in M \Rightarrow M \notin M$ (потому что все элементы множества M удовлетворяют условию $X \notin X$)

Получаем противоречие $M \in M \Leftrightarrow M \notin M \Rightarrow$ все такие конструкции как M не должны являться множествами.

Выход из положения - система аксиом Цермело - Френкеля (ZF) или системой Цермело - Френкеля с аксиомой выбора (ZFC).

Однако, если ZFC непротиворечива, то её непротиворечивость не может быть доказана средствами ZFC, согласно второй теореме Гёделя.

1.3 Декартово произведение множеств

Определение 1.3. *Декартовым произведением множеств A и B называют множество, состоящее из всех упорядоченных пар элементов из A и B*
$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Замечание: $(a, b) \neq (b, a)$.

Замечание 1.4. *Если рассматривается декартово произведение одного и того же множества A, то вместо $A \times A$ используется более короткое обозначение A^2.*

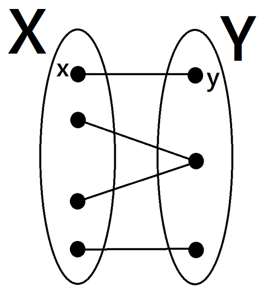
Пример 1.5. *Множество точек на плоскости $\mathbb{R}^2$, узлы решётки $\mathbb{Z}^2$, пространство $\mathbb{R}^3$. Ещё пример: $A = \{a, 1, \circ\}, B = \{b, \circ\}$*
$$A \times B = \{(a, b), (a, \circ), (1, b), (1, \circ), (\circ, b), (\circ, \circ)\}$$

1.4 Функция

Определение 1.6. *Функцией f из множества X в множество Y называется такое подмножество декартова произведения $X \times Y$, что*

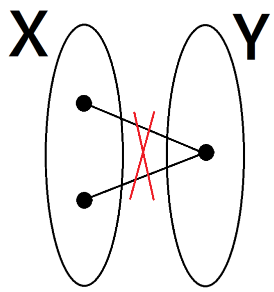
$$\forall x \in X \; \exists! \; y \in Y : (x, y) \in f.$$

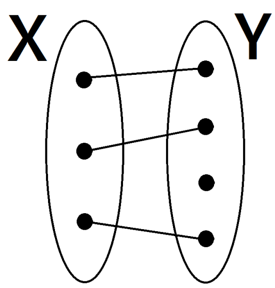
Будем обозначать соответствующий y через $f(x)$.



Определение 1.7. *Функция f называется <u>инъекцией</u>, если*

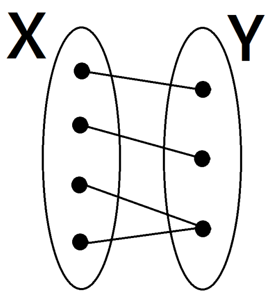
$$\forall x_1, x_2 \in X : x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$



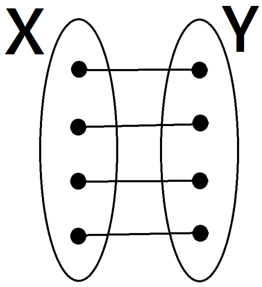


Определение 1.8. *Функция f называется <u>сюръекцией</u>, если*

$$\forall y \in Y \; \exists x \in X : f(x) = y.$$

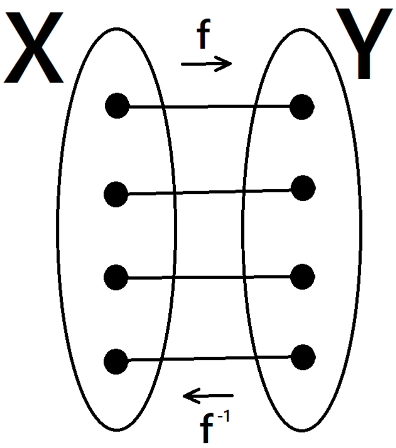


Определение 1.9. *Функция называется <u>биекцией</u>, если она одновременно является инъекцией и сюръекция.*



Предложение 1.10. *Если f - биекция, то существует обратная функция f^{-1}, для которой $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$.*

Доказательство. f - биекция $\Rightarrow$ f - инъекция, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
f - сюръекция $\Rightarrow \forall y\ \exists x : f(x) = y$



(Обозначение: если $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$)

Определение функции для наглядности:

$$\forall x \in X\ \exists! y \in Y : f(x) = y$$

$\forall y \in Y\ \exists$(сюръекция)!(инъекция) $x \in X : f(x) = y \Leftrightarrow \forall y \in Y\ \exists! x \in X : f^{-1}(y) = x.$

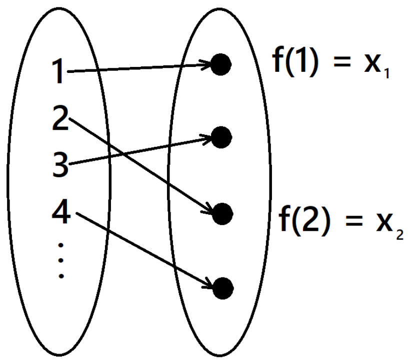
□

1.5 Последовательность

Определение 1.11. *Последовательностью элементов из множества X называется функция $f : \mathbb{N} \to X$.*

Пример 1.12.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\dots$
2	4	π	12	-1	$\dots$



1.6 Вещественные числа I: аксиомы

Определение 1.13. *Множеством действительных (вещественных) чисел* $\mathbb{R}$ *называется множество, на котором определены операции сложения и умножения и отношение порядка* $\leqslant$*, удовлетворяющие следующим 16 аксиомам, и которое состоит более чем из одного элемента.*

Аксиомы сложения

1. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a + b = b + a$;
2. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a + b) + c = a + (b + c)$;
3. $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \to a + 0 = a$;
4. $\forall a \in \mathbb{R}\ \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$.

Аксиомы умножения

5. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a \cdot b = b \cdot a$;
6. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
7. $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall a \in \mathbb{R} \to a \cdot 1 = a$;
8. $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\ \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Аксиома связи сложения и умножения

9. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \to a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Пример 1.14. *Докажите, что если* $a, b \in \mathbb{R}$ *и* $b + a = a$*, то* $b = 0$.

Доказательство. $b = 0 + b = a + (-a) + b = a + b + (-a) = a + (-a) = 0$ □

Аксиомы отношения порядка

10. $\forall a \in \mathbb{R} \to a \leqslant a$;
11. $\forall a, b \in \mathbb{R} \to a \leqslant b$ или $b \leqslant a$;
12. $\forall a, b \in \mathbb{R} : (a \leqslant b$ и $b \leqslant a) \to a = b$;
13. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leqslant b$ и $b \leqslant c) \to a \leqslant c$.

Связь отношения порядка и сложения

14. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \leqslant b \to a + c \leqslant b + c$.

Связь отношения порядка и умножения

15. $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : (a \leqslant b \text{ и } 0 \leqslant c) \to a \cdot c \leqslant b \cdot c$.

Аксиомы 1-15 известны Вам из школы как свойства действительных чисел. С другой стороны, эти аксиомы определяют алгебраические структуры. В частности, аксиомы 1-4 означают, что $\mathbb{R}$ является абелевой (т.е. коммутативной или перестановочной) группой по сложению. Аксиомы 5-8 говорят, что $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ является абелевой группой по умножению. Аксиомы 1-9 соответствуют определению поля, а аксиомы 1-15 - определению упорядоченного поля.

Аксиома непрерывности

16. Если $A, B \subset \mathbb{R}$ и множество A лежит слева от множества B (т.е. $\forall a \in A$ $\forall b \in B \to a \leqslant b$), то $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A \ \forall b \in B \to a \leqslant c \leqslant b$.

1.7 Вещественные числа II: сечения Дедекинда

Рациональные числа: $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

Определение 1.15. *Дедекиндово сечение - это упорядоченная пара непустых непересекающихся подмножеств A и B в множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$, обладающих следующими свойствами:*

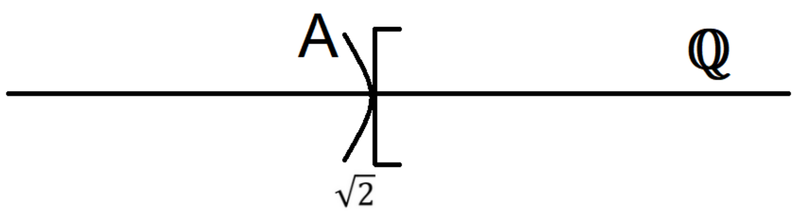
- $A \cup B = \mathbb{Q}, A \cap B = \varnothing$;
- *если $a \in A$ и $b \in B$, то $a < b$;*
- *в A нет наибольшего элемента.*

Определение 1.16. *Вещественное число — это дедекиндово сечение. Для удобства в определении будем использовать только множество A (потому что, имея множество A, можно достроить множество B).*

Вопрос. Чем отличаются иррациональные числа от рациональных?

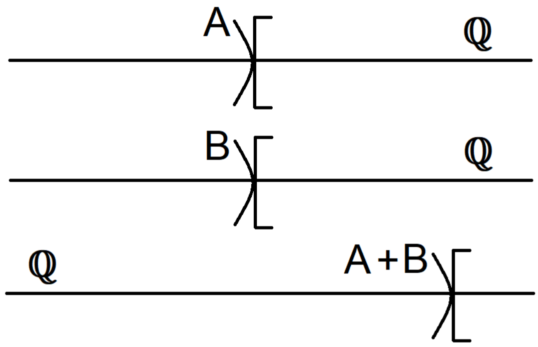
Ответ. В том, что если в B есть минимальный элемент, то этот минимальный элемент - это рациональное число, иначе минимальный элемент - иррациональное число, значит B не имеет минимального элемента.

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$$



- На множестве сечений можно определить определить арифметические операции и порядок.
- Например, сложение определяется следующим образом:

$$A + B := \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}.$$



- Умножение устроено несколько сложнее:
  - если $A, B \geqslant 0$, то

$$A \times B := \{a \times b : a \geqslant 0 \wedge a \in A \wedge b \geqslant 0 \wedge b \in B\} \cup \{x \in Q : x < 0\}$$

  - если A или B отрицательны, используем тождества

$$A \times B = -(A \times -B) = -(-A \times B) = (-A \times -B)$$

  чтобы преобразовать A и/или B в положительные числа, а затем использовать пункт выше.
- Сечения Дедекинда удовлетворяют аксиомам вещественных чисел.

Проверка аксиом: Эдмунд Ландау. Основы анализа, 1947.

1.8 Вещественные числа III: бесконечные десятичные последовательности

Определение 1.17. *Вещественное число можно определить как бесконечную десятичную дробь:*

$$\pm a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

где a_0 — целое неотрицательное число, a_1, a_2, … a_n, … - последовательность десятичных знаков.

- Сравнить бесконечные десятичные дроби можно поразрядно.
- Как сложить два вещественных числа?

Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И. Курс математического анализа.

Последовательность из бесконечного количества 9 в этом определении запрещаем: $0,(9) = 1$.

$0,(9) = x \mid \cdot 10 \Rightarrow 9,(9) = 10x \mid -x \Rightarrow 9 = 9x \mid \cdot \frac{1}{9} \Rightarrow x = 1$

Здесь применяем следующие аксиомы:

1. $a = b \to \forall c \; a + c = b + c$
2. $a = b \to \forall c \; a \cdot c = b \cdot c$

Теорема 1.18. *При таком определении для вещественных чисел выполнена аксиома непрерывности.*

Лекция 2: Множества, функции, вещественные числа

Доказательство теоремы 1.18. Аксиома непрерывности:

Если $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$ таковы, что $\forall a \in A$ и $\forall b \in B \to a \leqslant b$, то $\exists c : \forall a \in A, \forall b \in B \to a \leqslant c \leqslant b$.

$b := \pm b_0, b_1 b_2 b_3 ... \in B$

$\exists a \in A : \forall b \in B\ a \leqslant b$

Множество целых частей элементов из B ограничено снизу. Возьмём в B все числа, которые начинаются с b_0, ...

Возьмём минимальное b_1 для тех b, которые начинаются с $b_0, ...$

Возьмём минимальное b_2 для тех b, которые начинаются с $b_0, b_1 ...$

$\dots$

$$\begin{array}{cccc} & b_0, & b_1 & b_2 & ... \\ & || & || & || & \\ c = & c_0, & c_1 & c_2 & \end{array}$$

Докажем следующие утверждения:

1. $\forall b \in B \to c \leqslant b$

   Пусть $\exists b \in B$, что $b < c$

$$\begin{array}{c} b_0, b_1 b_2 \dots b_k b_{k+1} \\ \wedge \\ c_0, c_1 c_2 \dots c_k c_{k+1} \end{array}$$

   Получаем противоречие, т. к. в качестве c_{k+1} мы берём минимальный b_{k+1} среди тех, которые начинаются с $b_0, b_1 b_2 ... b_k ...$

2. $\forall a \in A \to c \geqslant a$

$$\begin{array}{ccccccc} a = & a_0, & a_1 & \dots & a_k & a_{k+1} & \dots \\ & || & || & & || & \vee & \\ c = & c_0, & c_1 & \dots & c_k & c_{k+1} & \dots \\ & || & || & & || & || & \\ b = & b_0, & b_1 & \dots & b_k & b_{k+1} & \dots \end{array}$$

   Тогда $b < a$ - противоречие.

$\square$

1.9 Вещественная прямая

Множество вещественных чисел также представляют в виде вещественной прямой.

Определение 1.19.

- *интервал:* $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$;
- *отрезок:* $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}$;
- *полуинтервалы:* $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}, (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}$;
- *лучи:*
$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x\}, (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\},$$
$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant a\}, (-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\};$$
- *точка:* $\{a\}$;
- *числовая прямая:* $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

1.10 Верхняя и нижняя грани

Определение 1.20.

1. *Число $M \in \mathbb{R}$ называется верхней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$, если число M лежит справа от множества A, т. е. $\forall a \in A \to a \leqslant M$.*
2. *Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным сверху, если существует (конечная) верхняя грань этого множества: $\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to a \leqslant M$.*
3. *Число $m \in \mathbb{R}$ называется нижней гранью множества $A \subset \mathbb{R}$, если число m лежит слева от множества A, т. е. $\forall a \in A \to a \geqslant m$.*
4. *Множество $A \subset \mathbb{R}$ называется ограниченным снизу, если существует (конечная) нижняя грань этого множества: $\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to a \geqslant m$.*
5. *Множество A называется ограниченным, если A ограничено сверху и ограничено снизу.*

1.11 Максимальный и минимальный элементы

Определение 1.21. *Число M называется максимальным элементом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут $M = \max A$), если*

- $M \in A$,
- *M является верхней гранью A.*

Число m называется минимальным элементом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут $m = \min A$), если

- $m \in A$,
- *m является нижней гранью A.*

1.12 Супремум

Определение 1.22. *Число $M \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью или супремумом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут: $M = \sup A$), если*

1. *M является верхней гранью множества A и*
2. *не существует числа, меньшего, чем M, и являющегося верхней гранью множества A,*

то есть

1. $\forall a \in A \to a \leqslant M$ *и*
2. $\neg(\exists M' \in \mathbb{R} : M' < M$ *и* $\forall a \in A \to a \leqslant M')$.

Замечание 1.23. *Пункт (2) определения супремума можно записать в виде*

$$\forall M' < M \to \neg(\forall a \in A \to a \leqslant M')$$

или

$$\forall M' < M \ \exists a \in A : M' < a.$$

1.13 Инфимум

Определение 1.24. *Число $m \in \mathbb{R}$ называется точной нижней гранью или инфимумом множества $A \subset \mathbb{R}$ (пишут: $m = \inf A$), если m является максимальной нижней гранью A.*

Теорема 1.25. *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}$ ограничено сверху. Тогда существует единственное число $M \in \mathbb{R}$, которое является точной верхней гранью (супремум) множества A.*

Аналогичное утверждение верно и для инфимума.

Доказательство. $A \subset \mathbb{R}$ - ограничено сверху $\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \to a \leqslant M$.

Пусть B множество верхних граней A.

Тогда $B \neq \varnothing$ $(M \in B)$.

$\forall a \in A$ и $\forall b \in B \to a \leqslant b \Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\exists c \in \mathbb{R} : \forall a \in A, \forall b \in B$ $a \leqslant c \leqslant b$.

Докажем, что $c = \sup A$.

1. $c \in B$.

   $\forall a \in A \to a \leqslant c \Rightarrow c \in B$

2. c - минимальная верхняя грань.

   Пусть $\exists b \in B : b < c$ - противоречит построению c (аксиома непрерывности).

□

Глава 2

Предел последовательности

Лекция 3: Предел числовой последовательности

2.1 Числовая последовательность

Определение 2.1. *Числовой последовательностью $\{a_n\}$ называется функция $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, где $a(n) = a_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Элемент последовательности - это пара (n, a_n), где n - номер элемента последовательности, а a_n - значение элемента последовательности.*

2.2 Предел последовательности

Определение 2.2. *Пусть заданы числа $a, \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Интервал $B_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ называется ε-окрестностью числа a.*

Определение 2.3. *Число $a \in \mathbb{R}$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$ (пишут $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ или $a_n \to a$ при $n \to \infty$), если*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N \to a_n \in B_\varepsilon(a),$$

т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N \to |a_n - a| < \varepsilon$$

(здесь и далее в аналогичных выражениях, если не оговорено противное, мы подразумеваем, что n, N - натуральные числа).

Пример 2.4. *Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ сходится к числу $a = 0$.*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N \to |a_n - a| < \varepsilon$$

$$a = 0,\ |a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

При этом $n = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ неравенство выполнено

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 : \forall n \geqslant N(\varepsilon)\ |a_n - a| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Пример 2.5. *Последовательность* $a_n = (-1)^n$ *не имеет предела.*

От противного. Пусть

$$\exists a \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N\ |a_n - a| < \varepsilon$$

Для $\varepsilon = \frac{1}{2}\ \exists N : \forall n \geqslant N\ |a_n - a| < \frac{1}{2}$

$2 = |a_n - a_{n+1}| = |a_n - a + a - a_{n+1}| \leqslant |a_n - a| + |a - a_{n+1}|$(неравенство треугольника) $<$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow 2 < 1 - \text{противоречие.}$$

Замечание 2.6. *Пусть* $\alpha > 0$ *- фиксированное число. Тогда свойство*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n > N(\varepsilon)\ |a_n - a| \leqslant \alpha\varepsilon$$

равносильно тому, что $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Доказательство. $\Leftarrow \forall \varepsilon' > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\ |a_n - a| < \varepsilon'$ (определение предела)

$\varepsilon' = \alpha\varepsilon$

Для $\varepsilon'\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\ |a_n - a| < \varepsilon' = \alpha\varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N\ |a_n - a| \leqslant \varepsilon\alpha$

Пусть $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2\alpha}$. Тогда $|a_n - a| \leqslant \varepsilon\alpha = \frac{\varepsilon'}{2\alpha} \cdot \alpha = \frac{\varepsilon'}{2}$.

$$\forall \varepsilon' > 0\ \exists N_1 = N\left(\frac{\varepsilon'}{2\alpha}\right) + 1 : \forall n > N_1\ |a_n - a| \leqslant \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'$$

□

2.3 Единственность предела

Предложение 2.7. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} a_n = b$, *тогда* $a = b$.

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\ |a_n - a| < \varepsilon$

2. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\ |a_n - b| < \varepsilon$

Пусть $a \neq b, |a - b| = \varepsilon_0 > 0$.

Возьмём такие N_1 и N_2, что $|a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ и $|a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$.

Тогда $\forall n \geqslant \max(N_1, N_2)$

$$\varepsilon_0 = |a - b| = |a - a_n + a_n - b| \leqslant |a - a_n| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 \Rightarrow \varepsilon_0 < \varepsilon_0 -$$

противоречие. □

2.4 Ограниченная последовательность

Определение 2.8. *Последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется* ***ограниченной****, если существуют такие числа* $C, c \in \mathbb{R}$*, что* $c \leqslant a_n \leqslant C$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 2.9. 1. *Последовательность ограничена сверху, если*

$\exists C : \forall n\ a_n \leqslant C$.

2. *Последовательность ограничена снизу, если* $\exists c : \forall n\ a_n \geqslant c$.

Предложение 2.10. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. Пусть есть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N\ |a_n - a| < \varepsilon$

$\exists N : \forall n \geqslant N\ |a_n - a| < 1 \Rightarrow$ по неравенству треугольника $|a_n| - |a| \leqslant |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a| + 1$

$\forall n\ |a_n| \leqslant \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, |a| + 1\} \Rightarrow \forall n\ c \leqslant a_n \leqslant C$, где

$c = -\max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, |a| + 1\}, C = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_N|, |a| + 1\}$. □

Лемма 2.11 (Об отделимости)**.** *Если* $a_n \to a$ *и* $a \neq 0$*, то найдется номер* $N \in \mathbb{N}$*, для которого* $|a_n| > \frac{|a|}{2} > 0$ *при* $n > N$.

Доказательство. $a_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |a_n - a| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N\ |a_n - a| < \frac{|a|}{2}$

Тогда по неравенству треугольника $|a| - |a_n| \leqslant |a_n - a| < \frac{|a|}{2} \Rightarrow |a_n| > \frac{|a|}{2}$. □

2.5 Арифметические свойства предела

Теорема 2.12. *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ *и* $\lim_{n\to\infty} b_n = b$*. Тогда*

1. $\lim_{n\to\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

2. $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$;

3. *если* $b \neq 0, b_n \neq 0$*, то* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$;

Доказательство. 1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\ |a_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\ |b_n - b| < \varepsilon$

$N_3 = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда $\forall n \geqslant N_3\ |\alpha a_n + \beta b_n - \alpha a - \beta b| = |\alpha a_n - \alpha a + \beta b_n - \beta b| \leqslant |\alpha a_n - \alpha a| + |\beta b_n - \beta b| = |\alpha||a_n - a| + |\beta||b_n - b| \leqslant (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$

2. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \to |a_n - a| < \varepsilon$

   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \to |b_n - b| < \varepsilon$

   $c_n = a_n b_n$

   $a_1, a_2, a_3, \ldots$

   $b_1, b_2, b_3, \ldots$

   $c_1 = a_1 b_1, c_2 = a_2 b_2, c_3 = a_3 b_3, \ldots$

   Требуется доказать: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to |c_n - ab| = |a_n b_n - ab| < \varepsilon$.

   a_n сходится $\Rightarrow$ по предложению 2.10 $\exists C > 0 : |a_n| \leqslant C$.

   $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \leqslant |a_n b_n - a_n b| + |a_n b - ab| = |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \Rightarrow$ для $N = \max\{N_1, N_2\}$ $\forall n \geqslant N \to |a_n b_n - ab| \leqslant |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < C\varepsilon + |b|\varepsilon = (C + |b|)\varepsilon = \alpha\varepsilon$ $(\alpha = C + |b| > 0)$

   По замечению 2.6

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \max\{N_1, N_2\} : \forall n > N \ |a_n b_n - ab| < (C + |b|)\varepsilon = \alpha\varepsilon.$$

3. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \to |a_n - a| < \varepsilon$ (1)

   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \to |b_n - b| < \varepsilon$ (2)

   Требуется доказать: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

   Докажем, что $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$. Тогда из пункта 2 будет следовать пункт 3.

   $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \varepsilon$ - требуется доказать.

   Оценим $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{b_n b}\right|$

   Из леммы 2.10 следует, что $\exists N_3 : \forall n > N_3 \ |b_n| > \frac{|b|}{2} > 0$ (3)

   Из (1), (2) и (3) следует, что $\forall n \geqslant N_4 = \max\{N_1.N_2, N_3\}$ $\left|\frac{b - b_n}{b_n \cdot b}\right| < \frac{\varepsilon}{\frac{|b|}{2} \cdot |b|} = \frac{2\varepsilon}{|b|^2} = \alpha\varepsilon$, где $\alpha = \frac{2}{|b|^2}$.

$\square$

Лекция 4: Теорема Вейерштрасса, число e

Теорема 2.13 (Переход к пределу в неравенстве). *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b$. *Если для некоторого номера* N *выполнено* $a_n \leqslant b_n$ *при* $n > N$, *то* $a \leqslant b$.

Доказательство. Пусть $a > b \Rightarrow a - b = \varepsilon_0 > 0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \forall\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\ |a_n - a| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

$\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \forall\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{2}\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\ |b_n - b| < \frac{\varepsilon_0}{2}$

$\forall n > \max\{N, N_1, N_2\}\ \varepsilon_0 = a - b = a - a_n + a_n - b_n + b_n - b \leqslant$

$\leqslant \underbrace{|a - a_n|}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} + \underbrace{a_n - b_n}_{\leqslant 0 \text{ (из условия)}} + \underbrace{|b_n - b|}_{<\frac{\varepsilon_0}{2}} < \varepsilon_0$

$\varepsilon_0 < \varepsilon_0$ - противоречие. □

2.6 Лемма о зажатой последовательности

Лемма 2.14 (О зажатой последовательности). *Пусть* $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ *и для некоторого* $N \in \mathbb{N}$ *выполнено* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$ *при* $n > N$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

Доказательство. Выполнено:

1. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\ |a_n - a| < \varepsilon (\Leftrightarrow a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon)$
2. $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2\ |b_n - a| < \varepsilon (\Leftrightarrow a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon)$
3. $\forall n > N\ a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$

Из этих пунктов следует, что $\forall n \geqslant N_4 = \max(N, N_1, N_2) \Rightarrow a - \varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < a + \varepsilon \Rightarrow \forall n \geqslant N_4\ a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon \Leftrightarrow |c_n - a| < \varepsilon$ (это определение предела) □

2.7 Теорема Вейерштрасса

Теорема 2.15 (Вейерштрасс). *Пусть последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не убывает* ($a_n \leqslant a_{n+1}$) *и ограничена сверху. Тогда эта последовательность сходится к своему супремуму.*

Аналогично, пусть последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *не возрастает* ($a_{n+1} \leqslant a_n$) *и ограничена снизу. Тогда эта последовательность сходится к своему инфимуму.*

Доказательство. $M = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$ (супремум существует, т. к. a_n ограничена сверху)

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное. Хотим доказать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N \to |a_n - M| < \varepsilon$.

$M' = M - \varepsilon$. Т. к. $M = \sup\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, то из свойства супремума ($\forall M' < M$ $\exists a \in A\ a > M'$) следует, что $\exists a \in \{a_n | n \in \mathbb{N}\} : a > M'$.

Но если $a \in \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$, то $\exists N : a = a_N$. Т. е. $\exists N : a_N > M' = M - \varepsilon$.

Т. к. a_n не убывает (т. е. $a_N \leqslant a_{N+1}$) $\forall n \geqslant N\ a_n \geqslant a_N > M' = M - \varepsilon$ (*)

Только что доказано, что $M - \varepsilon < a_n$, и из-за того, что M - супремум, верно $a_n < M + \varepsilon$. Тогда $M - \varepsilon < a_n < M + \varepsilon \Leftrightarrow |a_n - M| < \varepsilon$.

(*) $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N\ |a_n - M| < \varepsilon$.

Для доказательства второго утверждения можно рассмотреть последовательность $a_n \rightsquigarrow -a_n$. Если a_n не возрастает, то $-a_n$ не убывает. Последовательность $-a_n \to \sup\{-a_n | n \in \mathbb{N}\} \Rightarrow$ последовательность $a_n \to -\sup\{-a_n | n \in \mathbb{N}\} = \inf\{a_n | n \in \mathbb{N}\}$. □

Пример 2.16. *Пусть* $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right), a_1 = 2$. *Тогда последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится и её предел равен* $\sqrt{2}$.

Доказательство.

1. a_n - ограничена снизу.

   Действительно, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \geqslant \sqrt{a_n \cdot \frac{2}{a_n}}$(неравенство Коши) $= \sqrt{2} \Rightarrow a_n \geqslant \sqrt{2}$.

2. a_n - не возрастает

   $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{a_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a_n^2}{a_n}\right) = \frac{1}{2}(a_n + a_n) = a_n \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = a$.

   $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \Rightarrow a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}a_n + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a}$

   $a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{a} \Rightarrow a^2 - \frac{1}{2}a^2 - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{2}$

   $a = -\sqrt{2}$ - не подходит (поскольку $\forall n\ a_n \geqslant \sqrt{2} > -\sqrt{2}$) $\Rightarrow a = \sqrt{2}$.

□

Лекция 5: Число e, частичный предел

2.8 Число e

Предложение 2.17. *Последовательность* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *сходится.*

Доказательство.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} - \text{бином Ньютона.}$$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n} C_n^k \frac{1}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!\underbrace{nn...n}_{k \text{ раз}}} =$$

$$= 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant (*)$$

Воспользуемся неравенством: при $k \geqslant 2$ $k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot k \geqslant 2^{k-1}$.

$$(*) \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leqslant 2 + 1 = 3,$$

значит a_n ограничена, $a_n \leqslant 3$.

Докажем, что $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} < 1$.

Воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии.

$$1 + q + q^2 + ... + q^{k-1} = \frac{1-q^k}{1-q}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) < 2$$

$$a_n = 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqslant 2+\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...$$

$$...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) < 2 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)...\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right) = a_{n+1} \Rightarrow$$

$\Rightarrow a_n < a_{n+1} \Rightarrow a_n$ возрастает.

По теореме Вейерштрасса a_n имеет предел. □

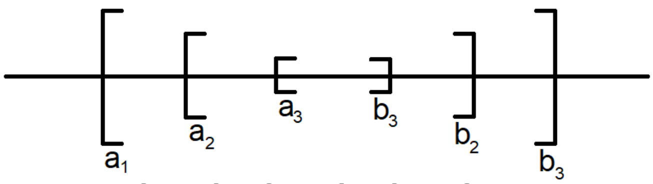
Определение 2.18. *Предел последовательности* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *называют* ***числом Эйлера*** *и обозначают*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,718281828459045235 36...$$

2.9 Принцип вложенных отрезков

Теорема 2.19 (Принцип вложенных отрезков)**.** 1. *Всякая последовательность* $\{[a_n, b_n]\}_{n=1}^{\infty}$ *вложенных отрезков (т. е.* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$*) имеет общую точку.*

2. *Кроме того, если длины отрезков стремятся к нулю, т.е.* $b_n - a_n \to 0$*, то такая общая точка только одна.*



$[a_1, b_1] > [a_2, b_2] > [a_3, b_3] > ...$

Доказательство. 1. $\{a_n | n \in \mathbb{N}\} = A, \{b_n | n \in \mathbb{N}\} = B$

$\forall n \; a_n \leqslant b_n$

$\forall n, m \; a_n \leqslant b_m$ - докажем это.

(a) $n > m \; a_m \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_m$

(b) $n \leqslant m \; a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$

Тогда $\forall a \in A \; \forall b \in B \to a \leqslant b$

Множества A и B непустые $\Rightarrow$ по аксиоме непрерывности $\exists c : \forall a \in A, \forall b \in B$ $a \leqslant c \leqslant b$.

$\forall n \in \mathbb{N} \; a_n \leqslant c \leqslant b_n$ - точка c принадлежит всем отрезкам.

2. Пусть $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$.

$\exists c_1, c_2 \in [a_n, b_n]$ - от противного ($c_1 \neq c_2$)

Пусть $c_1 < c_2$ $[c_1, c_2] \subseteq [a_n, b_n]$.

Но тогда $b_n - a_n \geqslant c_2 - c_1 = \varepsilon_0 > 0$.

$b_n - a_n \to 0 \Rightarrow 0 \geqslant \varepsilon_0 > 0$ - противоречие.

□

2.10 Подпоследовательность

Теорема 2.20. *Пусть задана последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и пусть задана возрастающая последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Последовательность $b_k = a_{n_k}$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Число $a \in \mathbb{R}$ называется **частичным пределом** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, если выполнено $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.*

Замечание 2.21. *Последовательность $a_n = (-1)^n$ не имеет предела, но его подпоследовательность $b_k = a_{2n}$ имеет предел: $\lim_{k\to\infty} b_k = 1$.*

Предложение 2.22. *Любая подпоследовательность сходящейся последовательности сходится к пределу этой последовательности.*

Доказательство. $a_n \to a$ при $n \to \infty$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1\ |a_n - a| < \varepsilon$

$b_k = a_{n_k}\ k \leqslant n_k$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_1\ \forall k \geqslant N_1$ (пояснение: $n_k \geqslant k \geqslant N_1$) $|b_k - a| = |a_{n_k} - a| \leqslant$ (последовательность сходится) $|a_k - a| < \varepsilon$. □

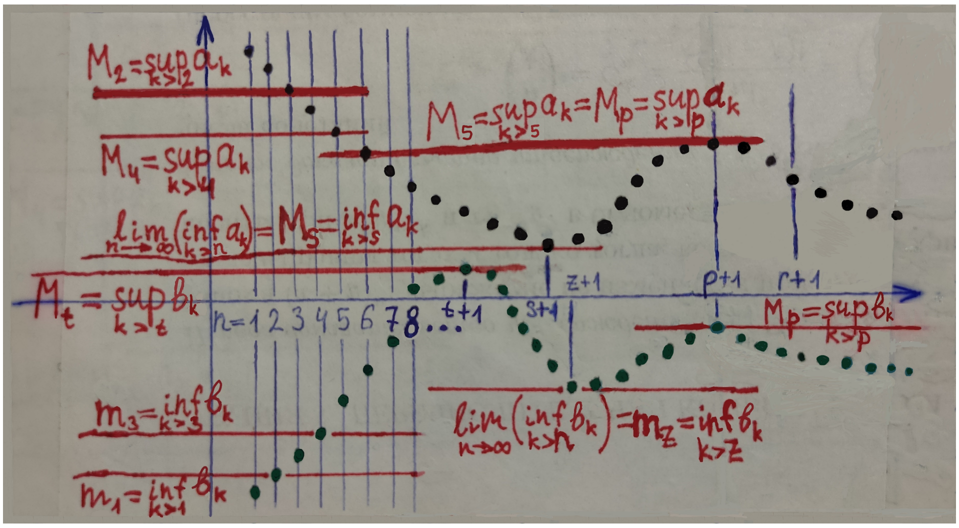
2.11 Нижний и верхний частичные пределы

Определение 2.23. *Рассмотрим последовательности $M_n := \sup_{k>n} a_k$ и $m_n := \inf_{k>n} a_k$. Ясно, что последовательность M_n - не возрастает, а последовательность m_n - не убывает. Поэтому для **ограниченной** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ существуют пределы*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} M_n,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n := \lim_{n\to\infty} m_n,$$

*которые называются соответственно **верхним и нижним частичными пределами** последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.*

Иллюстрация для значений m_n и M_n.



2.12 Теорема Больцано

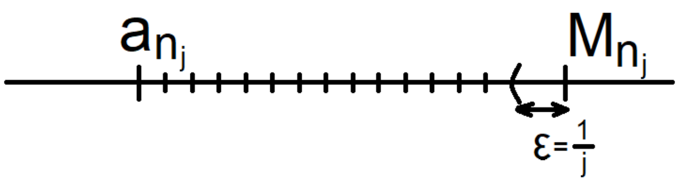
Теорема 2.24. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ***ограниченная*** *последовательность. Тогда* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ *и* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ *- частичные пределы последовательности* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *и любой другой частичный предел принадлежит отрезку* $\left[\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n\right]$.

Доказательство. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n = \lim\limits_{n\to\infty} M_n = M$.

$M_n = \sup_{k>n} a_k$

Построим последовательность a_{n_k}, которая обладает свойством $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = M$. Пусть $n_1 = 1$. Пусть построены первые j членов (т. е. подобраны $n_1 < n_2 < ... < n_j$). Подберём n_{j+1}-й номер ($n_{j+1} > n_j$).

$M_{n_j} = \sup_{k>n_j} a_k$



Т. к. M_{n_j} - супремум, то $\exists a \in \{a_k | k > n_j\}$ такое, что $M_{n_j} - \frac{1}{j} \leqslant a \leqslant M_{n_j}$ (в противном случае M_{n_j} - не супремум). Т. к. $a \in \{a_k | k > n_j\}$, то пусть $a = a_\lambda$ $n_j > n_{j+1} = \lambda$.

$\forall j \in \mathbb{N}$ $M_{n_j} - \frac{1}{j} \leqslant a_{n_{j+1}} \leqslant M_{n_j}$. Т. к. $M_j \to M, \frac{1}{j} \to 0$, то по теореме о зажатой последовательности

$$M - 0 \leqslant \lim_{j\to\infty} a_{n_{j+1}} \leqslant \lim_{j\to\infty} M_{n_j} = (\text{предложение } 2.13)\ M$$

Значит $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} = M \Rightarrow \overline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ - частичный предел.

Теперь пусть $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} m_n = m$.

Аналогично можно доказать, что

$$\forall j \in \mathbb{N}\ m_{n_j} \leqslant a_{n_{j+1}} \leqslant m_{n_j} + \frac{1}{j}$$

$$m = \lim_{j\to\infty} m_{n_j} \leqslant \lim_{j\to\infty} a_{n_{j+1}} \leqslant m + 0$$

$\lim_{j\to\infty} a_{n_{j+1}} = m \Rightarrow \underline{\lim}_{n\to\infty} a_n$ - частичный предел.

Пусть теперь a - частичный предел. Это означает, что $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ для некоторой подпоследовательности $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тогда $\inf\limits_{p>n_{k-1}} a_p = m_{n_{k-1}} \leqslant a_{n_k} \leqslant M_{n_{k-1}} = \sup\limits_{p>n_{k-1}} a_p$. По теореме о переходе к пределу в неравенстве получаем, что $\underline{\lim}\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant a \leqslant \overline{\lim}\limits_{n\to\infty} a_n$. □

Следствие 2.25 (Теорема Больцано)**.** *Во всякой* ***ограниченной*** *последовательности можно найти сходящуюся подпоследовательность.*

Можно, потому что, например, есть верхний частичный предел, который является частичным пределом соответствующей последовательности.

Лекция 6: Критерий Коши

Теорема 2.26. ***Ограниченная*** *последовательность сходится тогда и только тогда, когда множество её частичных пределов состоит из одного элемента.*

Доказательство. $\Rightarrow$ предложение 2.22

$\Leftarrow$ Т. к. множество частичных пределов состоит из одного элемента, то

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n = a$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} m_n, m_n = \inf_{k>n}\{a_k\}, \varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} M_n, M_n = \sup_{k>n}\{a_k\}$$

Тогда $\forall n\ m_{n-1} \leqslant a_n \leqslant M_{n-1}$.

Т. к. $m_{n-1} \to a, M_{n-1} \to a$, то по теореме о зажатой последовательности $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

□

2.13 Фундаментальная последовательность

Определение 2.27. *Говорят, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$* ***фундаментальна*** *(или является последовательностью Коши), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число (номер) $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ при каждых $n, m > N(\varepsilon)$. То же самое утверждение можно переписать в кванторах следующим образом:*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n, m > N(\varepsilon)\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Пример 2.28. *1. Последовательность $a_n = \frac{1}{n}$ - фундаментальная.*

2. Последовательность $a_n = (-1)^n$ не фундаментальная.

Доказательство. 1.

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leqslant \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \varepsilon : \forall n, m \geqslant N\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

2.

$$\exists \varepsilon = 1 : \forall N\ \exists n = N, m = n + 1\ |a_n - a_m| = |a_n - a_{n+1}| = 2 > 1$$

□

2.14 Критерий Коши

Предложение 2.29. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится, то она фундаментальная.*

Доказательство. Последовательность сходиться $\Rightarrow \forall \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2} > 0\ \exists N : \forall n \geqslant N$ $|a_n - a| < \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{2}$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

$$\forall m, n > N\ |a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leqslant |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

□

Теорема 2.30. *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.*

Доказательство. $\Rightarrow$ предложение 2.29

$\Leftarrow$ Докажем, что последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - фундаментальна $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n, m > N\ |a_n - a_m| < \varepsilon$

Для $\varepsilon = 1\ \exists N : \forall n, m > N\ |a_n - a_m| < 1$

Тогда для $n > N$ $|a_n| = |a_n - a_{N+1} + a_{N+1}| \leqslant |a_n - a_{N+1}| + |a_{N+1}| < 1 + |a_{N+1}|$

Значит $|a_n| \leqslant M = \max\{1 + |a_{N+1}|, |a_1|, ..., |a_N|\} \Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена.

У ограниченной последовательности по теореме Больцано есть хотя бы один частичный предел a. Пусть к нему сходится подпоследовательность $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 : k > k_0\ |a_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

Кроме того, в силу фундаментальности

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : n, m > N\ |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Пусть k выбрано так, что $k > k_0$ и $m = n_k > N$. Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall n > N\ |a_n - a| = |a_n - a_{n_k} + a_{n_k} - a| \leqslant |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

(замечание 2.8).

□

2.15 Фундаментальная последовательность

Пример 2.31. *Пусть* $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}, a_1 = 1$. *Докажите, что* a_n *сходится, и найдите предел.*

Доказательство. Заметим, что $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \geqslant 1$ и

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|1 + \frac{1}{1+a_n} - \left(1 + \frac{1}{1+a_{n-1}}\right)\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(1+a_n)(1+a_{n-1})} \leqslant \frac{1}{4}|a_n - a_{n-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}|a_2 - a_1| = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\left(1 + \frac{1}{1+1} - 1\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\frac{1}{2}$$

Отсюда при $m > n$

$$|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - \ldots - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \leqslant |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots +$$

$$+ |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{m-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{m-3} + \ldots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n} + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{4}}\right) \leqslant \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n} \cdot \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n}$$

Т. к. $\lim_{n\to\infty} \frac{8}{3} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \frac{8}{3} \cdot 0 = 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \to \frac{8}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n < \varepsilon$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |a_m - a_n| < \varepsilon$ $(*)$, т. е. выполнен Критерий Коши $\Rightarrow$ существует $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Найдём этот предел.

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+a_n}$$

Возьмём предел от обеих частей:

$$a = 1 + \frac{1}{1+a} \Leftrightarrow a(1+a) = 1 + a + 1 \Leftrightarrow a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{2},$$

т. к. $a \geqslant 0$ $(a_n \geqslant 1)$. □

Пояснение. *(*) Условие* $|a_m - a_n| < \varepsilon$ *выполнено при* $m > n > N$. *Но в определении фундаментальной последовательности это утверждении должно выполняться* $\forall n, m > N$. *Это не является проблемой, т. к. в случае* $m < n$ *можно показать, что* $|a_m - a_n| = |a_n - a_m|$ *и переобозначить* m *и* n.

Лекция 7: Числовые ряды

Замечание 2.32. *На самом деле, мы доказали следующее общее утверждение. Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- числовая последовательность и предположим, нашлось такое число* $q \in (0,1)$*, что*

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q|a_n - a_{n-1}|$$

при каждом $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$*. Тогда последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится.*

Доказательство.

$$|a_{n+1} - a_n| \leqslant q|a_n - a_{n-1}| \leqslant q^2|a_{n-1} - a_{n-2}| \leqslant ... \leqslant q^{n-1}|a_2 - a_1| = q^{n-1} \cdot c_1$$

Можем считать, что $m > n$.

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_{m-1} + a_{m-1} - a_{m-2} + a_{m-2} - ... - a_{n+1} + a_{n+1} - a_n| \leqslant$$

$$\leqslant |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + ... + |a_{n+1} - a_n| \leqslant q^{m-2} \cdot c_1 + q^{m-3} \cdot c_1 + ... + q^{n-1} \cdot c_1 =$$

$$= c_1 \cdot q^{n-1} \cdot (1 + q + ... + q^{m-n-1}) = c_1 \cdot q^{n-1} \cdot \left(\frac{1 - q^{m-n}}{1 - q}\right) \leqslant c_1 \cdot q^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - q} = c_2 \cdot q^{n-1}$$

Т. к. $\lim_{n\to\infty} c_2 q^{n-1} = c_2 \lim_{n\to\infty} q^{n-1} = c_2 \cdot 0 = 0$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ c_2 \cdot q^{n-1} < \varepsilon,$$

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |a_m - a_n| < \varepsilon$, т. е. выполнен критерий Коши $\Rightarrow$ существует $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

2.16 Числовые ряды

Определение 2.33. *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- числовая последовательность. Числовым рядом с членами* a_n *называется выражение*

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Конечные суммы $S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ *называют* ***частичными суммами*** *ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*.*

Говорят, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***сходится****, если у последовательности* $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существует предел, который называют суммой ряда. Если такого предела не существует, то говорят, что ряд не сходится или* ***расходится****.*

В силу арифметики предела на сходимость ряда (но не на сумму ряда) не влияет добавление (или отбрасывание) первых нескольких членов.

Доказательство. S_n - сумма n первых членов ряда, C_k - сумма k отброшенных, Q_{n-k} - сумма членов ряда, входящих в сумму S_n и не входящих в C_k. Тогда $S_n = C_k + Q_{n-k}$, где k - постоянное число, не зависящее от n. Если существует $\lim_{n\to\infty} Q_{n-k}$, то существует и $\lim_{n\to\infty} S_n$, если существует $\lim_{n\to\infty} S_n$, то существует и $\lim_{n\to\infty} Q_{n-k}$. □

Пример 2.34. *При каких q сходится ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$?*

Доказательство. Вычислим его частичные суммы: если $q \neq 1$, то

$$S_n = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

и ряд сходится к $\frac{1}{1-q}$ при $|q| < 1$ и расходится при $|q| > 1$; если $q = 1$, то $S_n = n$ и ряд не сходится, если $q = -1$, то $S_1 = 1, S_2 = 1 - 1 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, ...$, т. е. ряд не сходится (в силу теоремы 2.26; множество частичных пределов состоит из 2-х элементов) □

Также часто бывает удобно индексировать суммирование не только натуральным рядом. Под выражением $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ естественным образом подразумевается $\sum_{k=1}^{\infty} a_{k_0+k-1}$, т. е. такой числовой ряд, чья n-я частичная сумма имеет вид $S_n = a_{k_0} + a_{k_0+1} + ... + a_{k_0+n-1}$.

Т. к. сходимость ряда равносильна сходимости последовательности его частичных сумм, то для сходимости ряда выполнен следующий критерий Коши.

2.17 Критерий Коши сходимости ряда

Теорема 2.35. *Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что для всех $n > m > N$ выполнено*

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\right| = |S_n - S_m| < \varepsilon.$$

2.18 Необходимое условие сходимости ряда

Следствие 2.36 (Необходимое условие сходимости ряда)**.** *Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $a_k \to 0$ при $k \to \infty$.*

Доказательство. Действительно, из критерия Коши следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся номер N, для которого при каждом $n > N + 1$ выполнено $|a_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$. □

Пример 2.37. *1. Докажите, что ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ *сходится.*

2. Докажите, что гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ *расходится.*

Доказательство. 1. Исследуем выполнение условия критерия Коши: пусть $n > m$, тогда

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\Big| = \Big|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Big| = \Big|\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1}\Big| \leqslant \frac{1}{m+1}.$$

Поэтому при $n > m > N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ выполнено $\Big|\sum\limits_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}\Big| < \varepsilon$, а значит ряд сходится.

2. Исследуем выполнение условия критерия Коши: пусть $n > m$, тогда

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}\Big| > \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{n-m} = \frac{n-m}{n}.$$

Какой бы теперь ни был задан номер N, всегда можно взять $m > N$ (например, $m = N+1$) и $n = 2m$, тогда $\Big|\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k\Big| \geqslant \dfrac{1}{2}$, а значит условие критерия Коши не выполнено и ряд расходится.

□

2.19 Абсолютная сходимость

Следствие 2.38. *Из сходимости ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *следует сходимость ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доказательство. Действительно, из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ следует выполнение для него условия критерия Коши, а именно, для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число N, что при $n > m > N$ выполнено

$$\Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=m+1}^{n} |a_k|\Big| = \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon.$$

Следовательно, условие критерия Коши выполнено и для ряда $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$, а значит он сходится. □

2.20 Абсолютная и условная сходимость

Определение 2.39. *Говорят, что ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***сходится абсолютно***, *если сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$. *Говорят, что ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ***сходится условно***, *если он сходится, а ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *расходится.*

Пример 2.40. *Ряд* $1 + (-1) + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{2}) + \frac{1}{3} + (-\frac{1}{3}) + \ldots$ *- сходится условно.*

Доказательство. То, что ряд не сходится абсолютно, следует из установленной расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Сходимость ряда следует из того, что его частичные суммы равны либо 0, либо $\frac{1}{n}$ (т. к. оба $\to 0$, то множество частичных сумм равно $\{0\} \Rightarrow$ последовательность частичных сумм сходится) $\square$

Как показано выше, из того, что ряд сходится абсолютно, следует и то, что сам ряд сходится. Поэтому иногда может быть полезно отдельно исследовать абсолютную сходимость рядов, т. е. сходимость рядов с положительными слагаемыми.

2.21 Признак сравнения

Предложение 2.41. *Пусть* $a_k \geqslant 0$, *тогда ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм ограничена.*

Доказательство. S_n - частичные суммы, не убывают.

1. S_n - ограничена $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} S_n \Rightarrow S_n$ - ограничена.

$\square$

Предложение 2.42. *Пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *сходится, то сходится и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. *Наоборот, если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится, то расходится и ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Доказательство.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится $\Rightarrow B_n$ - ограниченные частичные суммы ряда (предложение 2.41), $0 \leqslant A_n \leqslant B_n \Rightarrow A_n$ - ограничены и не убывают $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, $0 \leqslant A_n \leqslant B_n$. Если бы B_n сходились, то A_n были ограничены и не убывали $\Rightarrow A_n$ сходились, противоречие.

$\square$

Лекция 8: Перестановка членов ряда

2.22 Признак Коши

Теорема 2.43 (Признак Коши)**.** *Пусть* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *- невозрастающая последовательность,* $a_n \geqslant 0$. *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$.

Доказательство. Сделаем оценку сверху и снизу данной частичной суммы.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_2 & + & 2^1 \cdot a_{2^2} & + & 2^2 \cdot a_{2^3} & + & \dots & + & 2^n \cdot a_{2^{n+1}} \\
\backslash // & & \backslash // & & \backslash // & & & & \backslash // \\
\boxed{a_1} & + & \boxed{a_2 + a_3} & + & \boxed{a_4 + a_5 + a_6 + a_7} & + & \dots & + & \boxed{a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1}} \\
\backslash // & & \backslash // & & \backslash // & & & & \backslash // \\
a_1 & + & 2^1 \cdot a_{2^1} & + & 2^2 \cdot a_{2^2} & + & \dots & + & 2^n \cdot a_{2^n}
\end{array}$$

Пусть $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \tilde{S}_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k a_{2^k}$. Тогда

$$\tilde{S}_n \leqslant a_1 + \tilde{S}_n \leqslant S_{2^{n+1}-1} \leqslant \frac{1}{2}\tilde{S}_n \leqslant \tilde{S}_n$$

1. Если $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится $\Rightarrow \tilde{S}_n$ сходится $\tilde{S}_n$ ограничена $\Rightarrow S_{2^{n+1}-1}$ ограничена. Но $S_{2^{n+1}-1}$ не убывает $\Rightarrow S_{2^{n+1}-1}$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится.

2. Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится $\Rightarrow S_{2^{n+1}-1}$ сходится $\Rightarrow S_{2^{n+1}-1}$ ограничена $\Rightarrow \tilde{S}_n$ ограничена. Но $\tilde{S}_n$ не убывает $\Rightarrow \tilde{S}_n$ сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ сходится.

□

Пример 2.44. *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ *сходятся при* $p > 1$ *и расходятся при* $p \leqslant 1$.

1. $p \leqslant 0$ $\frac{1}{k^p} \not\to 0$ при $x \to \infty$ (необходимо условие нарушено) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ - расходится

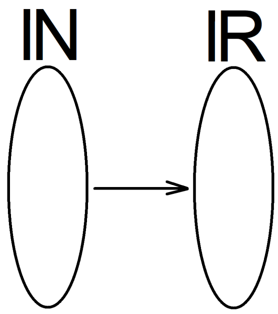
2. $p > 0 \Rightarrow \frac{1}{k^p}$ - убывает.

   Признак Коши:

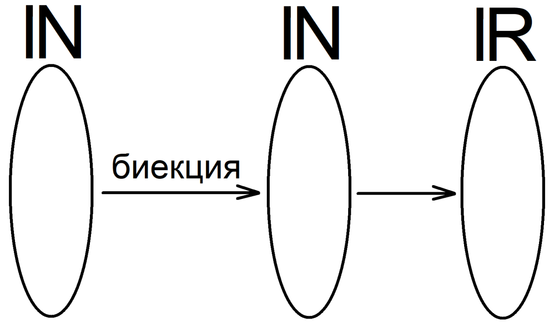
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(2^k)^p} = \sum_{k=1}^{\infty} (2^{1-p})^k - \text{сходится} \Leftrightarrow 2^{1-p} < 1 \text{ (пример 2.34)} \Leftrightarrow p > 1.$$

2.23 Перестановка членов ряда

a_n - это функция $a(n)$



Если поменять местами слагаемые ряда



Функция $k(j)$ - биекция на $\mathbb{N}, k(j) = k_j$ $\{a_{k_j} | j \in \mathbb{N}\} = \{a_n | n \in \mathbb{N}\}$

Пример 2.45 (семинарская задача 3.2)**.** *Если ряд сходится условно, то при перестановке членов его сумма может измениться.*

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots = 0$$

Переставим члены ряда

$$1 + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \dots = \sum_{k=1}^{3n} \tilde{a}_k = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln 2n + \gamma + \alpha_n - \ln n - \gamma' - \alpha'_n =$$

$$= \ln 2 + \gamma + \alpha_n - \gamma' - \alpha'_n \Rightarrow \textit{ряд сходится к } \ln 2, \textit{ а не к нулю.}$$

Определение 2.46. *Будем говорить, что ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ получен перестановкой членов ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, если существует последовательность натуральных чисел $\{k_j\}_{j=1}^{\infty}$, задающая взаимно однозначное преобразование (биекцию) множества $\mathbb{N}$, и такая, что $\forall j \in \mathbb{N} \to \tilde{a}_j = a_{k_j}$.*

Теорема 2.47 (О независимости суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых)**.** *Если ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ получен перестановкой членов абсолютно сходящегося ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ абсолютно сходится и его сумма равна сумме ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Доказательство. Краткая запись:

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \rightsquigarrow \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}$$

Шаг 1 Рассмотрим случай, когда $a_k \geqslant 0\ \forall k \in \mathbb{N}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим $M_n = \max\limits_{j\in\{1,\ldots,n\}} \{k_j\}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j = \sum_{j=1}^{n} a_{k_j} \leqslant \sum_{k=1}^{M_n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k \ (*)$$

(последние два неравенства верны, потому что ряд с неотрицательными членами и $n \leqslant M_n$)

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - абсолютно сходящийся $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

Частичные суммы $\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j$ не убывают (т. к. $a_k \geqslant 0$) и ограниченные числом $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ - сходится.

Итак, $\tilde{A}_n = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_j = A$ ($A = const$)

По теореме о переходе к пределу в неравенстве $\lim_{n\to\infty} \tilde{A}_n \leqslant \lim_{n\to\infty} A \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Поскольку ряд $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ может быть получен из ряда $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ обратной перестановкой слагаемых, то $\sum_{j=1}^{\infty} a_j \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$. Поэтому при перестановке слагаемых ряда с неотрицательными членами его сумма не меняется.

Шаг 2 Рассмотрим общий случай. Применяя утверждение шага 1 для сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$, получаем сходимость ряда $\sum_{j=1}^{\infty} |\tilde{a}_j|$. Поэтому ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ сходится абсолютно. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим через $a_k^+ = \max\{a_k, 0\}, a_k^- = \max\{-a_k, 0\}$. Тогда при всех $k \in \mathbb{N}$

$$a_k = a_k^+ - a_k^- \text{ (если } a_k > 0, \text{ то } a_k^+ = a_k, a_k^- = 0; \text{ если } a_k < 0, \text{ то } a_k^+ = 0, a_k^- = -a_k),$$

$$|a_k| = a_k^+ + a_k^- \text{ (тоже самое)}, 0 \leqslant a_k^+ \leqslant |a_k|, 0 \leqslant a_k^- \leqslant |a_k|.$$

В силу утверждения, доказанного на шаге 1,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j^+ = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^+ = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j^- = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^- = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-,$$

причём эти ряды сходятся по признаку сравнения (в силу (*)). Поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j = \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j} = \sum_{j=1}^{\infty} (a_{k_j}^+ - a_{k_j}^-) = (**)$$

Предел последовательности разности частичных сумм равен разности пределов частичных сумм

$$(**) : \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^{+} - \sum_{j=1}^{\infty} a_{k_j}^{-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{+} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{-} = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^{+} - a_k^{-}) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

□

Заметим, что при перестановке условно сходящегося ряда, вообще говоря, меняется. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.48 (Теорема Римана)**.** *Если ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится условно, то для любого* $x \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *можно так переставить члены ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*, что полученный* $\sum_{j=1}^{\infty} \tilde{a}_j$ *будет иметь сумму равную* x*.*

Без доказательства.

Глава 3

Предел функции

3.1 Окрестности

Определение 3.1. *Пусть $\varepsilon > 0$.*

- *Окрестностью радиуса ε (или ε-окрестностью) точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество*

$$B_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon).$$

- *Проколотой ε-окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество*

$$B'_\varepsilon(a) := B_\varepsilon(a) \setminus \{a\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon).$$

3.2 Внутренние, предельные и граничные точки

Определение 3.2.
- *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется внутренней точкой множества M, если она входит в это множество M с некоторой своей окрестностью (т. е. найдется такое $\varepsilon > 0$, что $B_\varepsilon(a) \subset M$).*

- *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется предельной точкой множества M, если каждая ее проколотая окрестность имеет непустое пересечение с множеством M (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ пересечение $B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \varnothing$).*

- *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется граничной точкой множества M, если каждая ее окрестность имеет непустое пересечение как с множеством M, так и с его дополнением (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ и $B_\varepsilon(a) \cap M \neq \varnothing$ и $B_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R} \setminus M) \neq \varnothing$).*

Пример 3.3. *Например, для множества $M = (0, 1] \cup \{3\}$ точки $0, \frac{1}{2}, 1$ будут предельными, а точки -1 и 3 не будут; точки $0, 1, 3$ будут граничными, а точки -1 и $\frac{1}{2}$ не будут.*

Лекция 9: Предел функции

Замечание 3.4. *Точка a является предельной для M тогда и только тогда, когда найдется сходящаяся к a последовательность $a_n \in M \setminus \{a\}$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Если a предельная, то $\forall \varepsilon > 0$ $B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \varnothing \Rightarrow \forall n$ $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $a_n(\neq a) \in B'_{\frac{1}{n}}(a) \cap M \neq \varnothing \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \frac{1}{n}, \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow |a_n - a| \to 0 \Rightarrow a_n \to a$.

$\Leftarrow$ Если $a_n \in M \setminus \{a\}$ и $a_n(\neq a) \to a$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N \to |a_n - a| < \varepsilon$.

Т. к. $a_n \in M \setminus \{a\}$ и $(a_n \neq a \Rightarrow 0 < |a_n - a| < \varepsilon)$, то $a_n \in B'_\varepsilon(a)$ и $a_n \in M \Rightarrow B'_\varepsilon(a) \cap M \neq \varnothing$.

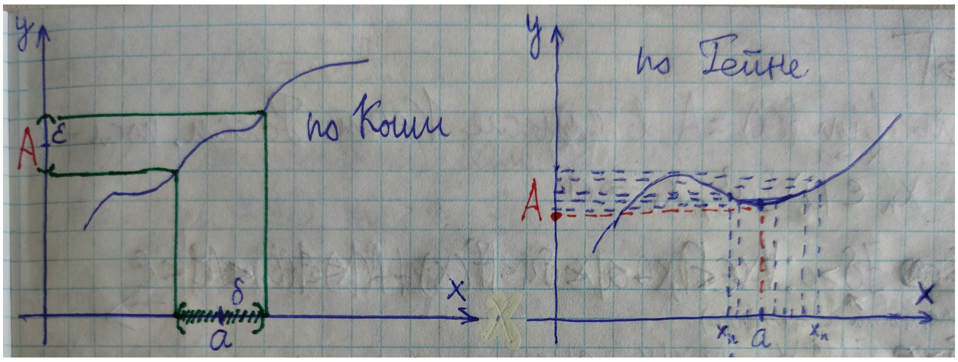
□

3.3 Предел функции по Коши

Теорема 3.5. *Пусть функция f определена на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и пусть a - предельная для D точка. Число A называется <u>пределом</u> функции f в точке a (по множеству D), если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ для каждого $x \in D \cap B'_\delta(a)$. Используют обозначения $\lim_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.*

С помощью кванторов определение можно записать так: $\lim_{x \to a} f(x) = A$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap B'_\delta(a) \to |f(x) - A| < \varepsilon$ или, эквивалентно,

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon.$$



Пример 3.6. *Пусть $f(x) = x^2$, тогда $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.*

Доказательство. Действительно, при $0 < |x - 1| < \delta$ выполнено $|f(x) - 1| = |x + 1||x - 1| < (\delta + 2)\delta$ $(|x + 1| \leqslant |x - 1| + 2 < \delta + 2)$. Поэтому при $\delta := \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ выполнено $|f(x) - 1| < \varepsilon$ при каждом x, для которого $0 < |x - 1| < \delta$.

Пояснение. *1.* $\delta = \frac{\varepsilon}{3} < 1 \Rightarrow \varepsilon < 3$

$\delta(\delta+2) = \frac{\varepsilon}{3}(\frac{\varepsilon}{3}+2) < \frac{\varepsilon}{3}(1+2) = \varepsilon$

2. $\delta = 1 \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \varepsilon \geqslant 3$

$\delta(\delta+2) = 3 \leqslant \varepsilon$

□

Пример 3.7. *Почему мы не берём сам предел в окрестность? А потому, что мы это используем при расчёте пределов:*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

Проверка: $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall x)\ 0 < |x-1| < \delta\ \left|\frac{x^2-1}{x-1} - 2\right| < \varepsilon$

Примем $\delta := \varepsilon : 0 < |x-1| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} - 2\right| = |x-1| < \varepsilon$

Если мы бы допустили, что a *включено в* δ*-окрестность, то никакое бы* δ *не подошло - для значения* $x = a = 1$ *было бы неверно, что* $f(1) \in B_\delta(2)$.

Замечание 3.8. *Если множество* D *не ограничено сверху (снизу), то можно определить предел функции в «точке»* $+\infty$ $(-\infty)$. *Для этого по определению будем считать, что* $B'_\varepsilon(+\infty) := (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$ *и* $B'_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$.

Можно дать альтернативное определение функции.

3.4 Предел функции по Гейне

Теорема 3.9. *Пусть функция* f *определена на некотором множестве* $D \subset \mathbb{R}$ *и пусть* a *предельная для* D *точка. Число* A *называется* <u>*пределом*</u> *функции* f *в точке* a *(по множеству* D*), если для каждой последовательности точек* $x_n \in D \setminus \{a\}$ $(x_n \neq a)$, $x_n \to a$, *выполнено* $f(x_n) \to A$ *при* $n \to \infty$.

Покажем, что два этих определения задают один и тот же объект.

Теорема 3.10. *Определения предела функции по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. 1. К $\Rightarrow$ Г Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A$ в смысле Коши. Рассмотрим последовательность точек $x_n \in D \setminus \{a\}, x_n \to a$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\delta > 0\ \exists N : \forall n > N\ |x_n - a| < \delta$$

2. Г $\Rightarrow$ К От противного.

   Пусть число A не является пределом функции f в точке a в смысле Коши. Это означает, что

   $$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0 : \exists x_\delta \in D, 0 < |x_\delta - a| < \delta \to |f(x_\delta) - A| \geqslant \varepsilon$$

   (отрицание определения Коши)

   Рассмотрим последовательность $a_n = x_{\frac{1}{n}}$.

   Пусть $\delta = \frac{1}{n}$. Тогда

   $$\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0 : \exists a_n \in D, 0 < |a_n - a| < \frac{1}{n} \to |f(a_n) - A| \geqslant \varepsilon$$

   $0 < |a_n - a| < \frac{1}{n} \Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $a_n \to a$, но последовательность точек $f(a_n)$ не сходится к A. Таким образом, число A не является пределом функции f в точке a в смысле Гейне.

$\square$

3.5 Арифметические свойства предела функции и неравенства

Теорема 3.11. *Пусть функции f, g, h определены на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и пусть - предельная для D точка. Тогда*

1. *(единственность предела) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, то $A = B$;*
2. *(линейность предела) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha A + \beta B\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*
3. *(предел произведения) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = A \cdot B$;*
4. *(предел отношения) если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$ и $g(x) \neq 0$ при $x \in D$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$;*
5. *(переход к пределу в неравенстве) если $\exists r > 0 : f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in D \cap B'_r(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $A \leqslant B$;*
6. *(предел зажатой функции) если $\exists r > 0 : f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ при $x \in D \cap B'_r(a)$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, то $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$;*

7. *(ограниченность функции) если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$*, то найдутся такие* $\delta > 0$ *и* $C > 0$*, что* $|f(x)| \leqslant C$ *при каждом* $x \in D \cap B'_\delta(a)$*;*

8. *(отделимость от нуля) если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \neq 0$*, то найдется такое* $\delta > 0$*, что* $|f(x)| > \frac{|A|}{2}$ *при* $x \in D \cap B'_\delta(a)$*.*

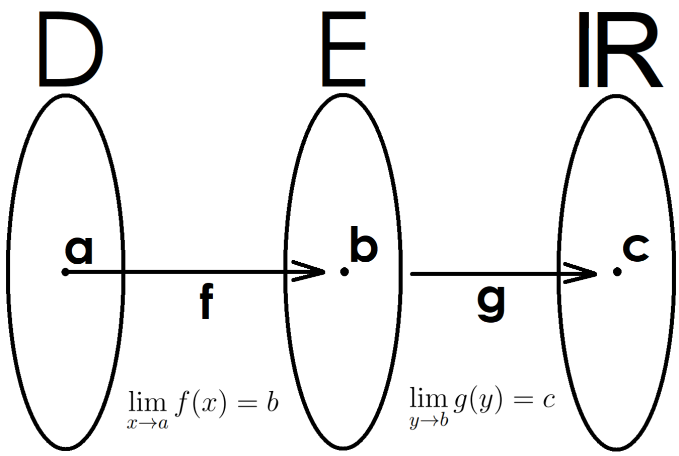
Доказательство. Свойства 1) - 6) следуют из аналогичных свойств для предела последовательности и определения функции по Гейне.

7) При $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap B'_\delta(a)$ $|f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| - |A| \leqslant |f(x) - A| < 1 \Rightarrow |f(x)| \leqslant |A| + 1 = C > 0$

8) При $\varepsilon = \frac{|A|}{2} > 0$ $\exists \delta > 0 : \forall x \in D \cap B'_\delta(a)$ $|f(x) - A| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |A - f(x)| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |A| - |f(x)| \leqslant |A - f(x)| < \frac{|A|}{2} \Rightarrow |f(x)| > \frac{|A|}{2}$. □

3.6 Теорема о пределе сложной функции

Теорема 3.12. *Пусть* $f : D \to E, g : E \to \mathbb{R}$*,* a *- предельная точка множества* D*,* b *- предельная точка множества* E*,* $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{y\to b} g(y) =$ *и есть такая проколотая окрестность* $B'_\delta(a)$ *точки* a*, что* $f(x) \neq b$ *для каждой точки* $x \in B'_\delta(a) \cap D$*. Тогда* $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$*.*



Доказательство. $h(x) = g(f(x))$

$\lim_{x\to a} f(x) = b \Rightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^\infty \subset D \setminus \{a\}$ при $x_n \to a$ $y_n = f(x_n) \to b$.

$x_n \to a$ и $\exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(a) \to f(x) \neq b \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N : \forall n \geqslant N \to x_n \in B'_\delta(a)$ $(\varepsilon = \delta)$ и $f(x_n) \neq b$.

Тогда последовательность $\{f(x_n)\}_{n=N}^\infty \subset E \setminus \{b\}$ и $f(x_n) \to b \Rightarrow$

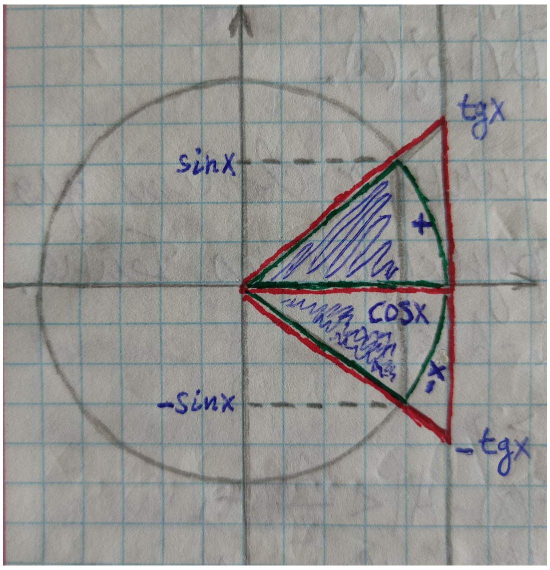
$\Rightarrow$ (из $\lim_{x\to b} g(x) = c$) $g(f(x_n)) \to c$. □

Лекция 10: Замечательные пределы, критерий Коши

3.7 Первый замечательный предел

Предложение 3.13. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

Доказательство. 1. $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$



$S_с \leqslant S_з \leqslant S_к$ - площади синего, зелёного и красного треугольников

Используем формулу площади прямоугольного треугольника $S_с = \frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x$, $S_к = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$, а затем x-ой части круга $S_з = \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2$.

$$\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x < \frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2} \mid \cdot 2$$

$$\sin x \cdot \cos x < x < \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x \cdot \cos x < x \mid : x > 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x < 1 \mid : \cos x > 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$x < \frac{\sin x}{\cos x} \mid \cdot \cos x > 0 \Rightarrow x \cdot \cos x < \sin x \mid : x > 0 \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1, \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ по теореме о зажатой функции.

2. $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$

$$-\frac{1}{2} \cdot \sin x \cdot \cos x < -\frac{x}{2\pi} \cdot \pi \cdot 1^2 = -\frac{x}{2} < -\frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos x > x > \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\sin x \cdot \cos x > x \mid : x < 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} \cdot \cos x < 1 \mid : \cos x > 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$x > \frac{\sin x}{\cos x} \mid \cdot \cos x > 0 \Rightarrow x \cdot \cos x > \sin x \mid : x < 0 \Rightarrow \cos x < \frac{\sin x}{x}$$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

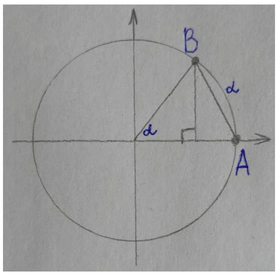
Осталось доказать, что $\lim_{x \to y} \cos x = \cos y$, т. е. функция непрерывна (предел в этой точке равен значению функции в этой точке)

Требуется доказать $\lim\limits_{x \to y} \cos x = \cos y$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - y| < \delta \to |\cos x - \cos y| < \varepsilon$$

$$|\cos x - \cos y| = \left|2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\right| \leqslant 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|$$

Здесь мы пользуемся неравенством $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$



Дуга больше отрезка AB. Отрезок больше высоты. Поэтому дуга угла α больше синуса соответствующего угла (или равна, если $A = B$).

Тогда если взять $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, то $|x - y| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \Rightarrow |\cos x - \cos y| < \varepsilon$.

$\square$

3.8 Второй замечательный предел

Предложение 3.14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e.$

Доказательство. Пусть $f(x) := \left(1+\frac{1}{1+[x]}\right)^{[x]}, g(x) := \left(1+\frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1}$.

Тогда $f(x) \leqslant \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \leqslant g(x)$.

Кроме того,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = e$.

Утверждение следует из теоремы о пределе зажатой функции. □

3.9 Критерий Коши

Теорема 3.15. *Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ и a - предельная точка D. Предел $\lim_{x\to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждых $x, y \in B'_\delta(a)\cap D$ выполнено $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = A \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x \in D$,

$0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Тогда $|f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(y)-A| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |f(x)-f(y)| = |f(x)-A+A-f(y)| \leqslant |f(x) - A| + |A - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Пусть $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall x, y \in B'_\delta(a)\cap D \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{a\}, x_n \to a$. Тогда $f(x_n)$ - фундаментальна (т. к. $\exists N : \forall n \geqslant N, x_n \in B'_\delta(a)\cap D \Rightarrow \forall n, m > N \to |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon) \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Пусть есть другая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D \setminus \{a\}, y_n \to a$.

Рассмотрим последовательность $z_{2k-1} = x_k, z_{2k} = y_k$, т. е. это последовательность вида $x_1, y_1, ... \subset D \setminus \{a\}$.

$$\left.\begin{array}{l} x_n \to a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n \geqslant N_1 \to |x_n - a| < \varepsilon \\ y_n \to a \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n \geqslant N_2 \to |y_n - a| < \varepsilon \end{array}\right| \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_3 = 2\max\{N_1, N_2\} :$$

$\forall n \geqslant N_3 \to |z_n - a| < \varepsilon \Rightarrow z_n \to a \Rightarrow$ (из определения предела функции по Гейне) $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = B$.

Но т. к. подпоследовательность $f(x_n)$ последовательности $f(z_n)$ сходится к A, то вся последовательность $f(z_n)$ сходится к $A = B$. Значит $\lim_{x\to a} f(x)$ единственный. Таким образом, доказано существование предела по Гейне.

$\square$

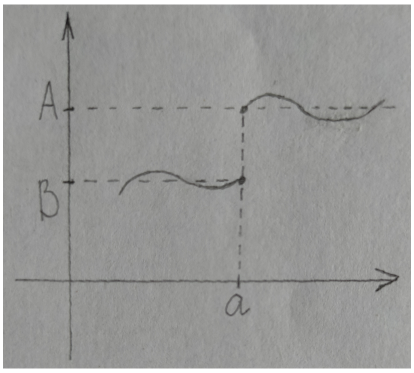
Лекция 11: Эквивалентность и о-символика

3.10 Пределы справа и слева

Пусть $D_a^+ := D \cap (a, +\infty)$ и $D_a^- := D \cap (-\infty, a)$.

Определение 3.16. *Пусть точка a - предельная для множества D_a^+ и существует предел функции f по множеству D_a^+ в точке a. Этот предел называют пределом справа функции f в точке a и обозначают $\lim_{x\to a+0} f(x)$. Аналогично определяется предел слева, который обозначают $\lim_{x\to a-0} f(x)$.*

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = A, \lim_{x\to a-0} f(x) = B$$



3.11 Теорема Вейерштрасса

Теорема 3.17. *Пусть f - не убывает и ограничена на множестве D, a - предельная точка множества D_a^-. Тогда существует предел слева*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \sup\{f(x) : x \in D_a^-\}.$$

Пусть f - не убывает и ограничена на множестве D, a - предельная точка множества D_a^+. Тогда существует предел справа

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \inf\{f(x) : x \in D_a^+\}.$$

Аналогичные утверждения с заменой inf *на* sup *справедливы и для невозрастающей функции.*

Доказательство. Пусть $M = \sup_{x\in D_a^-} f(x)$.

1. $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in D_a^- : f(x_0) > M - \varepsilon$

   Пояснение. $M = \sup A$

(a) $\forall a \in A\ a \leqslant M$

(b) $\forall b$ - верхняя грань $A \to b \geqslant M$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in A : a > M - \varepsilon$

2. $f(x)$ не убывает $\Rightarrow \forall x \geqslant x_0 \to f(x) \geqslant f(x_0) \Rightarrow f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant M < M + \varepsilon$

Из (1) и (2) $\Rightarrow \varepsilon > 0\ \exists \delta = a - x_0 > 0 : \forall x \in B'_\delta(a) \cap D_a^- \to |f(x) - M| < \varepsilon$

Для предела справа доказывается аналогично. □

3.12 Отношение эквивалентности

Определение 3.18. *Бинарное отношение $\sim$ на множестве X называется отношением эквивалентности, если оно обладает следующими свойствами:*

1. *рефлексивность:* $\forall x \in X \to x \sim x$;
2. *симметричность:* $\forall x, y \in X \to x \sim y \Rightarrow y \sim x$;
3. *транзитивность:* $\forall x, y, z \in X \to (x \sim y \text{ и } y \sim z) \Rightarrow x \sim z$.

3.13 Классы эквивалентности

Определение 3.19. *Пусть на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$. Классом эквивалентности элемента $x \in X$ называется множество*

$$[x] = \{y \in X : x \sim y\}$$

Пример 3.20. *Пусть задано натуральное число k. Для целых чисел m, n будем писать $m \overset{k}{\sim} n$, если $\frac{m-n}{k} \in \mathbb{Z}$. Проверьте, что бинарное отношение $\overset{k}{\sim}$ является отношением эквивалентности на $\mathbb{Z}$. Для любого $m \in \mathbb{Z}$ класс эквивалентности $[m]$ состоит из всех целых чисел, имеющих такой же остаток при делении на k, что и число m.*

Доказательство. Если $\frac{m-n}{k} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \underset{k}{\equiv} n$.

1. $m \underset{k}{\equiv} m$
2. если $m \underset{k}{\equiv} n$, то $n \underset{k}{\equiv} m$
3. если $m \underset{k}{\equiv} n, n \underset{k}{\equiv} p \Rightarrow m \underset{k}{\equiv} p$

Таким образом, $\overset{k}{\sim}$ - класс эквивалентности. □

Определение 3.21. *Будем говорить, что множество X является дизъюнктным объединением семейства множеств $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и писать $X = \bigsqcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$, если*

1. $X = \bigcup\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$
2. $X_\alpha \cap X_\beta = \varnothing\ \forall \alpha, \beta \in A : \alpha \neq \beta$.

Лемма 3.22. *Если на множестве X задано отношение эквивалентности $\sim$, то X является дизъюнктным объединением различных классов эквивалентности $[x]$, где $x \in X$.*

Доказательство. ДОДЕЛАТЬ □

3.14 Эквивалентность функций

Определение 3.23. *Пусть функции f и g определены и не обращаются в 0 в некоторой $B'(x_0)$. Функции f и g называются эквивалентными (пишут: $f(x) \sim g(x)$) при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.*

Лемма 3.24. *Отношение эквивалентности функций при $x \to x_0$ является отношением эквивалентности на множестве функций, определенных и не обращающихся в ноль в $B'_\delta(x_0)$.*

Доказательство. Проверим требуемые свойства.

1. Рефлексивность: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow f(x) \sim f(x)$;
2. Симметричность: $f(x) \sim g(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

   $\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow g(x) \sim f(x)$;
3. Транзитивность:

$$\begin{cases} f(x) \sim g(x) \\ g(x) \sim h(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \\ \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)}{g(x)h(x)} = 1\cdot 1 = 1.$$

□

Замечание 3.25. *Замечательные пределы и разобранные на семинарах примеры показывают, что при $x \to 0$*

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \operatorname{arctg} x \sim \arcsin x \sim e^x - 1 \sim \ln(1+x).$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arcsin x} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\ln(1+x)} = 1$$

3.15 Свойства отношения эквивалентности

Лемма 3.26. *Пусть функции $f_1(x), f_2(x), g_1(x), g_2(x)$ определены и не обращаются в 0 в некоторой $B'_\delta(x_0)$ и пусть $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$ при $x \to x_0$. Тогда $f_1(x)g_1(x) \sim f_2(x)g_2(x)$, $\frac{f_1(x)}{g_1(x)} \sim \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ при $x \to x_0$.*

Доказательство.

1. $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)\cdot g_1(x)}{f_2(x)\cdot g_2(x)} = 1 \cdot 1 = 1$
2. $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} : \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)\cdot g_2(x)}{f_2(x)\cdot g_1(x)} = 1 \cdot 1 = 1$

□

Замечание 3.27. *Из условий $f_1(x) \sim f_2(x), g_1(x) \sim g_2(x)$ при $x \to x_0$ не следует $f_1(x) + g_1(x) \sim f_2(x) + g_2(x)$ при $x \to x_0$. Например, $-x \sim -x$, $x + x^2 \sim x + x^3$ при $x \to 0$, но $-x + x + x^2 \not\sim -x + x + x^3$ при $x \to 0$.*

$$\lim_{x\to 0} \frac{-x}{-x} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{x + x^2}{x + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x}{1 + x^2} = \frac{1}{1} = 1, \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty.$$

3.16 Подсчет пределов

Лемма 3.28. *Если $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$, то $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$, а если один из пределов не существует, то не существует и другой.*

Доказательство.

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) = A \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

□

Следствие 3.29. *При вычислении пределов произведений и частных функций эти функции можно заменять на эквивалентные.*

Пример 3.30. *Найдите* $lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\arcsin x^2}{\operatorname{tg} x \ln^2(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot x^2}{x\cdot x^2} = 1.$

1. $e^x - 1 \sim x \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
2. $\arcsin x^2 \sim x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x^2}{x^2} = 1$ *(теорема о пределе сложной функции)*
3. $\operatorname{tg} x \sim x \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
4. $\ln(1 + x) \sim x \Rightarrow \ln^2(1 + x) \sim x^2$ *(произведение эквивалентных функций)*

Лемма 3.31. *Пусть $f(y) \sim g(y)$ при $y \to y_0$, и пусть $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ и $y(x) \neq y_0$ при $x \in B'_\delta(x_0)$. Тогда $f(y(x)) \sim g(y(x))$ при $x \to x_0$.*

Доказательство. По теореме о пределе сложной функции

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(y(x))}{g(y(x))}=\lim_{y\to y_0}\frac{f(y)}{g(y)}=1$$

$\square$

Пример 3.32.

$$\lim_{x\to 0}\frac{(e^{\sin x}-1)^3}{\operatorname{tg}(\sin x)\ln^2(1+(e^x-1))}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)^3}{\operatorname{tg}x\ln^2(1+x)}\ \textit{(лемма 3.31)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}1=1.$$

Лекция 12: Эквивалентность и o-символика

3.17 o-малое

Определение 3.33. *Пусть функции f и g определены в $B'(x_0)$ и функция $g(x)$ не обращается в 0. Говорят, что функция f является <u>бесконечно малой</u> относительно функции g при $x \to x_0$ и пишут $f(x) = o(g(x))$ при $x \to x_0$, если $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.*

Замечание 3.34. *$o(g(x))$ - это класс функций. Запись $f(x) = o(g(x))$ означает, что функция $f(x)$ принадлежит классу функций $o(g(x))$. Поэтому равенство в записи $f(x) = o(g(x))$ необратимо, т. е. нельзя писать $o(g(x)) = f(x)$. Например, $x^3 = o(x), x^2 = o(x)$, при $x \to 0$, но $x^3 \neq x^2$.*

Пояснение.
$x^3 = o(x)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ $x^3 \in o(x)$
$x^2 = o(x)$ $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0$ $x^2 \in o(x)$
$x^3 \neq x^2$

Теорема 3.35. *$f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0 \Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$ при $x \to x_0$.*

Доказательство.

$$f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + o(g(x))$$

$\square$

Пример 3.36. *Из теоремы 3.32 следует, что эквивалентности из замечания 3.25 можно переписать в виде*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Leftrightarrow \sin x \sim x \Leftrightarrow \sin x = x + o(x) \text{ (теорема 3.32)}$$

$$\begin{aligned} \sin x = x + o(x), &\qquad \operatorname{tg} x = x + o(x), \\ \arcsin x = x + o(x), &\qquad \operatorname{arctg} x = x + o(x), \\ e^x = 1 + x + o(x), &\qquad \ln(1+x) = x + o(x), \\ \operatorname{sh} x = x + o(x), &\qquad \operatorname{th} x = x + o(x) \qquad \text{при } x \to 0. \end{aligned}$$

<u>*Справка по гиперболическим функциям*</u>

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$$

Пример 3.37.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x + o(x) + x + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x + o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{x} + \frac{o(x)}{x}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} 2 + \lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x} = 2 + 0 = 2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0} e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x} = 1\cdot 1 = 1 \Rightarrow \operatorname{sh} x \sim x \Rightarrow \operatorname{sh} x = x + o(x)$$

3.18 О-большое

Определение 3.38. *Пусть функции f и g определены в $B'_\delta(x_0)$. Говорят, что функция f ограничена относительно функции g, и пишут $f(x) = O(g(x))$ при $x \to x_0$, если*

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall x \in B'(x_0) \to |f(x)| \leqslant C|g(x)|.$$

3.19 Свойства о-малого и О-большого

Теорема 3.39. *Для функций, не обращающихся в 0 в некоторой $B'(x_0)$ при $x \to x_0$, справедливы равенства:*

1. $o(f) \pm o(f) = o(f)$
2. $O(f) \pm O(f) = O(f)$
3. $o(f) = O(f)$
4. $o(O(f)) = o(f)$
5. $O(o(f)) = o(f)$
6. $O(O(f)) = O(f)$
7. $o(f)\cdot O(g) = o(fg)$
8. $O(f)\cdot O(g) = O(fg)$
9. $(o(f))^\alpha = o(f^\alpha)\ \forall\alpha > 0$
10. $(O(f))^\alpha = O(f^\alpha)\ \forall\alpha > 0.$

Доказательство. 1. $o(f) \pm o(f) \subseteq o(f)$ - это подразумевается под равенством

Пусть $g(x) \in o(f), h(x) \in o(f)$.

$$g(x) = o(f(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, h(x) = o(f(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x) \pm h(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} \pm \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0 \pm 0 = 0 \Rightarrow g(x) \pm h(x) \in o(f)$$

2. $O(f) + O(f) = O(f)$

   Пусть $g(x) \in O(f), h(x) \in O(f)$. Тогда $\exists C_1 : |g(x)| \leqslant C_1|f(x)|, \exists C_2 : |h(x)| \leqslant C_2|f(x)| \Rightarrow |g(x) + h(x)| \leqslant |g(x)| + |h(x)| \leqslant C_1|f(x)| + C_2|f(x)| = (C_1 + C_2)|f(x)| \Rightarrow g(x) + h(x) \in O(f)$.

3. $o(f) \subseteq O(f)$

   Пусть $g(x) \in o(f) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta : \forall x \in B'_\delta(x_0) \ \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| < \varepsilon \Rightarrow |g(x)| \leqslant \varepsilon |f(x)|$ (в данной окрестности $f(x)$ не обращается в ноль)

4. $o(O(f)) \subseteq o(f)$

   Пусть $g(x) \in O(f) \Leftrightarrow \exists C : |g(x)| \leqslant C \cdot |f(x)| \Rightarrow \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| \leqslant C$.

   $h(x) \in o(g(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)}$$

$$-C \cdot \left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} \leqslant C \cdot \left|\frac{h(x)}{g(x)}\right|$$

   $\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| \to 0 \Rightarrow$ по теореме о зажатой функции $\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{f(x)} = 0 \Rightarrow h(x) \in o(f)$.

5. $O(o(f)) = o(f)$

   Пусть $g(x) \in o(f(x)) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

   $h(x) \in O(g(x)) \Leftrightarrow \exists C : |h(x)| \leqslant C|g(x)| \Rightarrow \left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| \leqslant C$

$$\left|\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)}\right| = \lim_{x \to x_0} \left|\frac{h(x)}{f(x)}\right| = \lim_{x \to x_0} \left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| \cdot \left|\frac{g(x)}{f(x)}\right| = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0$$

6. $O(O(f)) = O(f)$

   Пусть $g(x) \in O(f(x)), h(x) \in O(g(x))$.

$$\exists C_1 : |g(x)| \leqslant C_1 \cdot |f(x)|$$

$$\exists C_2 : |h(x)| \leqslant C_2 \cdot |g(x)| \leqslant C_1 \cdot C_2 \cdot |f(x)| = C \cdot |f(x)|$$

7. $o(f) \cdot O(g) \subseteq o(fg)$

   Пусть $h(x) \in o(f), k(x) \in O(g)$.

   Тогда $\lim_{x\to x_0} \frac{h(x)}{f(x)} = 0, \exists C : |k(x)| \leqslant C|g(x)|$.

$$-C\left|\frac{h(x)}{g(x)}\right| \leqslant \frac{h(x)\cdot k(x)}{f(x)\cdot g(x)} \leqslant C\left|\frac{h(x)}{f(x)}\right| \Rightarrow h(x)\cdot k(x) \in o(fg)$$

8. $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$

   Пусть $h(x) \in O(f), k(x) \in O(g)$.

   Тогда $\exists C_1 : |h(x)| \leqslant C_1|f(x)|$, $\exists C_2 : |k(x)| \leqslant C_2|g(x)| \Rightarrow |h(x)\cdot k(x)| = |h(x)|\cdot|k(x)| \leqslant C_1 \cdot C_2 \cdot |f(x)\cdot g(x)| \Rightarrow h(x)\cdot k(x) \in O(fg)$

9. $(o(f))^\alpha = o(f^\alpha)\ \forall \alpha > 0$

   Пусть $g(x) \in o(f) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0, \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$ (при $\alpha > 0$) $\Rightarrow$ по теореме о пределе сложной функции $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^\alpha = 0$. Но

$$\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)^\alpha = \frac{g^\alpha(x)}{f^\alpha(x)} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{g^\alpha(x)}{f^\alpha(x)} = 0 \Rightarrow g^\alpha(x) = o(f^\alpha).$$

10. $(O(f))^\alpha = O(f^\alpha)\ \forall \alpha > 0$

    Пусть $g(x) \in O(f) \Leftrightarrow \exists C : |g(x)| \leqslant C|f(x)| \Rightarrow |g(x)|^\alpha \leqslant C^\alpha|f(x)|^\alpha = C'|f(x)|^\alpha \Rightarrow |g^\alpha(x)| \leqslant C'|f^\alpha(x)| \Rightarrow g^\alpha(x) \in O(f^\alpha)$.

$\square$

Глава 4

Непрерывные функции

Определение 4.1. *Функция* $f : D \to \mathbb{R}$ *непрерывна (по множеству D) в точке* $a \in D$, *если для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, *что для каждого* $x \in D$, $|x - a| < \delta$, *выполнено* $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. *С помощью кванторов данное утверждение записывается в виде*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D \ |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Определение 4.2. *Точка* $a \in D$ *называется изолированной точкой множества* D, *если для некоторого* $\delta > 0$ *выполнено* $B'_\delta(a) \cap D = \varnothing$.

Замечание 4.3. *Точка* $a \in D$ *может быть либо изолированной, либо предельной точкой множества* D.

Если точка a *не изолированная, то* $\forall \delta > 0 \ B'_\delta(a) \cap D \neq \varnothing \Rightarrow a$ *- предельная.*

Если точка a *не предельная, то* $\exists \varepsilon > 0 : B'_\varepsilon(a) \cap D = \varnothing \Rightarrow a$ *- изолированная.*

Предложение 4.4. *Пусть* $f : D \to \mathbb{R}, a \in D$. *Следующие утверждения равносильны:*

1. *функция* f *непрерывна в точке* a *(по множеству* D*);*
2. *для каждой последовательности точек* $x_n \in D, x_n \to a$, *выполнено* $f(x_n) \to f(a)$*;*
3. *либо точка* a *- изолированная точка множества* D, *либо* a *- предельная точка множества* D *и* $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Доказательство. I. a - изолированная $\Rightarrow \exists \delta > 0 \to B'_\delta(a) \cap D = \varnothing$

1. Возьмём в определении 4.1 такую δ. Тогда в данной окрестности $B_\delta(a)$ нет точек, кроме самой a, которые принадлежат D. Но для точки a и любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon \Rightarrow f(x)$ - непрерывна.

2. $x_n \to a \Rightarrow$ начиная с какого-то номера все члены последовательности x_n принадлежат $B'_\delta(a)$. Возьмём в определении предела $\varepsilon = \delta$. Но при этом они должны лежать в D, значит они становятся равными a. Следовательно, с какого-то номера $f(x_n)$ становится равной $f(a) \Rightarrow f(x_n) \to a$.

3. автоматически выполнено (a - изолированная точка)

Значит если точка a - изолированная, то эти утверждения равносильны.

II. a - не изолированная $\Rightarrow a$ - предельная (по замечанию)

1) $\Rightarrow$ 2) От противного. Пусть $\exists x_n \to a$ и $f(x_n) \not\to f(a)$. Тогда $\exists \varepsilon > 0 : \forall N\ \exists n \geqslant N \to |f(x_n) - f(a)| \geqslant \varepsilon$

$x_n \neq a$, иначе $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$

Таких x_n бесконечно много, потому что в противном случае, если таких x_n конечное число, то есть последний по номеру. Возьмём N равное номеру x_n, идущего в последовательности после последнего. Тогда, начиная с $n \geqslant N$, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ - противоречие.

Значит такие $\{x_n\}$ образуют подпоследовательность $\{y_k\}$. Причём $y_k \neq a \Rightarrow \forall y_k \in D \setminus \{a\}\ y_k \to a$ (предел подпоследовательности y_k равен пределу сходящейся последовательности x_n)

Почему отсюда будет следовать, что $f(y_k) \to f(a)$? Функция f - непрерывна в точке $a \Rightarrow f(x) \to f(a)$ по Коши (первое условие сильнее второго, т. к. в определении непрерывности $|x-a| < \delta$, а в определении по Коши $0 < |x-a| < \delta$). Определение предела функции по Коши эквивалентно определению по Гейне: $f(y_k) \to f(a)$ - противоречие.

2) $\Rightarrow$ 3) Из 2) следует определение предела функции по Гейне (2) сильнее Гейне) $\Rightarrow$ определение предела по Коши $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $\lim_{x\to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ по Коши

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ определение непрерывности

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in D, |x - a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

(т. к. при $x = a$ оно и так выполняется $|f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$).

1) $\Leftarrow$ 2), т. к. 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1)

2) $\Leftarrow$ 3), т. к. 3) $\Rightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2)

3) $\Leftarrow$ 1), т. к. 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3)

Значит 1) $\Leftrightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3).

□

Предложение 4.5. *Пусть функции f, g определены на некотором множестве $D \subset \mathbb{R}$ и непрерывны в некоторой точке $a \in D$. Тогда*

1. *$\alpha f + \beta g, f \cdot g$ - непрерывны в точке a;*
2. *если $g(x) \neq 0$ при $x \in D$, то f/g - непрерывна в точке a;*
3. *найдутся такие $\delta > 0$ и $C > 0$, что $|f(x)| \leqslant C$ при каждом $x \in D \cap B_\delta(a)$;*
4. *если $f(a) \neq 0$, то найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x)| > \frac{|f(a)|}{2}$ при $x \in D \cap B_\delta(a)$.*

Доказательство. I. a - изолированная на множестве D.

1. $\alpha f + \beta g$ и $f \cdot g$ определены на множестве $D \Rightarrow$ по предложению 4.3 из 3) $\Rightarrow$ 1), т. е. $\alpha f + \beta g$ - непрерывна в точке a и $f \cdot g$ непрерывна в точке a.
2. $\frac{f}{g}$ определение на множестве $D \Rightarrow$ по предложению 4.3 из 3) $\Rightarrow$ 1).
3. По определения изолированной точки $\exists \delta > 0 \to B'_\delta(a) \cap D = \varnothing \Rightarrow$ при таком δ только $a \in B_\delta(a) \cap D \Rightarrow$ можно подобрать такое $C > 0$, что $|f(a)| \leqslant C$.
4. Из определения изолированной точки $\exists \delta > 0 \to B'_\delta(a) \cap D = \varnothing \Rightarrow$ при таком δ только $a \in B_\delta(a) \cap D$ и $|f(a)| > \frac{|a|}{2}$ (т. к. $f(a) \neq 0$).

II. a - предельная и $\lim_{x \to a} f(x) = f(a), \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$.

1. $\lim_{x \to a}(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f(a) + \beta g(a) \Rightarrow \alpha f(x) + \beta g(x)$ - непрерывна в точке a (по предложению 4.3 3) $\Rightarrow$ 1)).

   $\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = f(a) \cdot g(a) \Rightarrow f(x) \cdot g(x)$ - непрерывна в точке a (по предложению 4.3 3) $\Rightarrow$ 1)).
2. $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ - непрерывна в точке a (по предложению 4.3 3) $\Rightarrow$ 1)).
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ из ограниченности функции следует утверждение.
4. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Rightarrow$ из отделимости от нуля следует утверждение.

□

Лекция 13: Свойства непрерывных функций

4.1 Непрерывность композиции

Предложение 4.6. *Пусть $f : D \to K \subset \mathbb{R}$ и $g : K \to \mathbb{R}$, причем f непрерывна в точке $a \in D$ по множеству D, а g непрерывна в точке $f(a)$ по множеству K. Тогда функция $g \circ f$ непрерывная в точке по множеству D, где $g \circ f(x) := g(f(x))$.*

Доказательство.
1. Если a - изолированная $\Rightarrow$ по предложению 4.3 $f \circ g(x)$ непрерывна в точке a по множеству D (какую юы функцию мы не рассматриваем)
2. Если a - предельная, то по предложению 4.3 из непрерывности f и g следует, что если $x_n \in D, x_n \to a$, то $f(x_n) \to f(a), f(x_n) \in K$ и что $g(f(x_n)) \to g(f(a))$

$\square$

Определение 4.7. *Точка $a \in D$ называется <u>точкой разрыва функции</u> $f : D \to \mathbb{R}$, если f не является непрерывной в точке a.*

4.2 Классификация разрывов

Определение 4.8. *<u>Устранимый разрыв</u>: существует $\lim_{x\to x_0} f(x)$, но или f не определена в точке x_0, или $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.*

<u>Разрыв 1-го рода</u>: в точке разрыва x_0 существуют оба односторонних предела

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0 - 0), \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

но скачок функции

$$\Delta f(x_0) = |f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)| \neq 0.$$

<u>Разрыв 2-го рода</u>: не существует хотя бы один из односторонних пределов

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) \text{ или } \lim_{x\to x_0+0} f(x).$$

Пример 4.9. *Классифицируйте точки разрыва функции:*

1. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$;

2. $f(x) = \frac{\sin x}{|x|}$.

1. Функция $\sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$

Пример 4.10. *Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, если $x \neq 0, f(0) = 0$. Тогда точка $x = 0$ - разрыв второго рода для функции f, заданной на всем множестве $\mathbb{R}$.*

4.3 Разрывы монотонной функции

Предложение 4.11. *Пусть f - монотонная на интервале (a, b) функция (т. е. f либо не убывает, либо не возрастает). Тогда f может иметь разрывы только первого рода на интервале (a, b).*

Доказательство. □

4.4 Теорема Вейерштрасса

Определение 4.12. *Функцию, непрерывную в каждой точке множества D (по множеству D), будем называть просто непрерывной на множестве D.*

Определение 4.13. *Будем говорить, что функция ограничена на множестве D, если найдется такое число $C > 0$, что $\forall x \in [a, b] \to |f(x)| \leqslant C$.*

Теорема 4.14 (Вейерштрасс). *Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограничена на $[a, b]$ и достигает минимума и максимума, т. е. существуют такие точки $x_m, x_M \in [a, b]$, что*

$$f(x_m) = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\} \text{ и } f(x_M) = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}.$$

Доказательство. □

4.5 Теорема о промежуточном значении

Теорема 4.15 (Коши). *Пусть f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Если $f(a) = A, f(b) = B$, то для каждого значения $C \in [A, B]$ (или $C \in [B, A]$, если $B < A$) найдется точка $c \in [a, b]$, для которой $f(c) = C$.*

Доказательство. □

Лекция 14: Построение показательной функции

Теорема 4.16 (Критерий непрерывности монотонной функции). *Монотонная функция $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $f([a, b])$ - отрезок.*

Доказательство. □

4.6 Непрерывность обратной функции

Теорема 4.17 (О непрерывности обратной функции). *Пусть f непрерывна и строго монотонна на $[a, b]$ (т. е. f монотонна и $f(x) \neq f(y)$ при $x \neq y$). Тогда f - биекция между отрезками $I = [a, b]$ и J с концами $f(a)$ и $f(b)$ и f^{-1} непрерывна и строго монотонна на J.*

Доказательство. □

Пример 4.18. *У функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ есть непрерывная и строго монотонная на $\mathbb{R}$ обратная функция.*

Доказательство. □

4.7 Построение показательной функции

Лемма 4.19. *Пусть $N \in \mathbb{N}$. Тогда найдется такое число $C(N)$, что для всех $x, y \in \mathbb{Q}, x, y \leqslant N$, выполнено $|a^x - a^y| \leqslant C(N)|x - y|$*

Доказательство. □

Лекция 15: Производная и дифференциал

Теорема 4.20. *Пусть $a > 1$. Существует единственная непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, совпадающая с $x \mapsto a^x$ при $x \in \mathbb{Q}$.*

Доказательство. □

Следствие 4.21. *Для построенной функции a^x выполнены следующие свойства:*

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \text{ и } x < y \Rightarrow a^x < a^y.$$

Доказательство. □

По теореме об обратной функции корректно определена непрерывная строго монотонная функция $\log_a : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Глава 5

Производная

Лекция 16: Свойства дифференцируемых функций

Лекция 17: Теоремы о среднем для дифференцируемых функций

Лекция 18: Правило Лопиталя, производные старших порядков

Лекция 19: Формула Тейлора

Лекция 20: Ряд Тейлора

Глава 6

Исследование функций с помощью производных

Лекция 21: Исследование функций с помощью производных

6.1 Необходимое условие экстремума

Напомним, что для дифференцируемой в точке локального экстремума c функции f по теореме Ферма выполнено $f'(c) = 0$. Т. е. равенство нулю производной является необходимым условием локального экстремума дифференцируемой функции.

Напомним, что нами также было уже доказано следствие 5.26:

Следствие (5.26) Пусть f дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда f не убывает (не возрастает) на (a, b) тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$ соответственно) для каждой точки $x \in (a, b)$. Кроме того, если $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то f строго возрастает (соответственно, строго убывает) на (a, b).

Докажем теперь достаточное условие локального экстремума в терминах производных старших порядков.

6.2 Достаточное условие экстремума

Теорема 6.1. *Пусть f имеет n производных в окрестности точки $c \in (a, b)$ и $f(c) = f'(c) = ... = f^{(n-1)}(c) = 0$, а $f^{(n)}(c) \neq 0$. Тогда, если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) < 0$ ($f^{(n)}(c) > 0$), то c — точка локального максимума (минимума). Если $n = 2k + 1$, то точка c не является точкой локального экстремума.*

Доказательство. По формуле Тейлора

$$f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!} \cdot (x - c) + ... + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n + o((x - c)^n) =$$

$$= \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n + o((x-c)^n) = (x-c)^n\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1)\right)$$

Т. к. $o(1) \to 0$ при $x \to c$, то по определению предела

$$\exists B_\delta(c) : \forall x \in B_\delta(c) \to |o(1)| < \varepsilon = \left|\frac{f^{(n)}(c)}{n!}\right| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall x \in B_\delta(c)$ $\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1)\right)$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(c)$

1. Если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) > 0$, то $f(x) = (x-c)^n\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1)\right) = (x-c)^{2k} \cdot A(x)$ $(A(x) > 0\ \forall x \in B_\delta(c))$

   При $x = c$ $f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c, $f(x) > 0 \Rightarrow c$ - точка минимума.

2. Если $n = 2k$ и $f^{(n)}(c) < 0$, то $f(x) = (x-c)^n\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1)\right) = (x-c)^{2k} \cdot A(x)$ $(A(x) < 0\ \forall x \in B_\delta(c))$

   При $x = c$ $f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c, $f(x) < 0 \Rightarrow c$ - точка максимума.

3. Если $n = 2k+1$ и $f^{(n)}(c) > 0$, то $f(x) = (x-c)^n\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1)\right) = (x-c)^{2k+1} \cdot A(x)$ $(A(x) > 0\ \forall x \in B_\delta(c))$

   При $x = c$ $f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c в положительную сторону, $f(x) > 0$; так только мы отходим от точки c в отрицательную сторону, $f(x) < 0 \Rightarrow c$ - ни точка максимума, ни точка минимума.

4. Если $n = 2k+1$ и $f^{(n)}(c) < 0$, то $f(x) = (x-c)^n\left(\frac{f^{(n)}(c)}{n!} + o(1)\right) = (x-c)^{2k+1} \cdot A(x)$ $(A(x) < 0\ \forall x \in B_\delta(c))$

   При $x = c$ $f(c) = 0$; так только мы отходим от точки c в положительную сторону, $f(x) < 0$; так только мы отходим от точки c в отрицательную сторону, $f(x) > 0 \Rightarrow c$ - ни точка максимума, ни точка минимума.

Хочется отметить, что выполнение условия теоремы $f(c) = f'(c) = ... = f^{(n-1)}(c) = 0$ можно гарантировать, сдвинув функцию на константу: $g(x) = f(x) - f(c)$. $\square$

6.3 Выпуклость и вогнутость

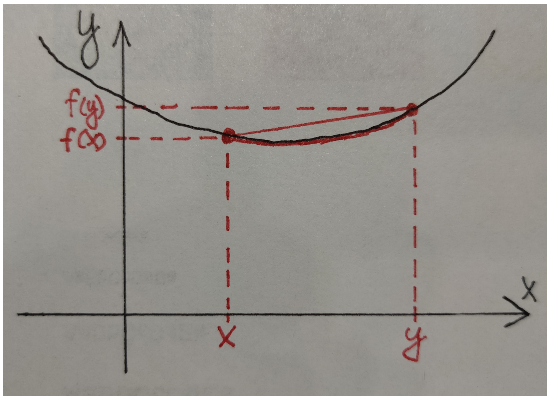
Определение 6.2. *Функция f на интервале (a, b) называется* ***выпуклой****, если $\forall x, y \in (a, b)$ и для каждого $t \in [0, 1]$ выполнено*

$$f(tx + (1-t)y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Пояснение. *Функция $tx + (1-t)y$ при фиксированных x и y при различных значениях $t \in [0,1]$ задаёт точку на отрезке $[x,y]$: при $t = 0$ функция равна y, при $t = 1$ функция равна x, если возьмём производную функции $tx + (1-t)y$, то получим $x - y < 0 \Rightarrow$ функция монотонно убывает от y до x.*

Функция $tf(x) + (1-t)f(y)$ от t является линейной и она задаёт хорду с концами в точках $(x, f(x))$ (при $t = 1$) и $(y, f(y))$ (при $t = 0$).

Получается с левой стороны неравенства - это значение функции в точке на отрезке $[x,y]$, а с правой - ордината точки на хорде и понятно, что неравенство выполняется.



Определение 6.3. *Функция f на интервале (a,b) называется* ***вогнутой****, если $\forall x, y \in (a,b)$ и для каждого $t \in [0,1]$ выполнено*

$$f(tx + (1-t)y) \geqslant tf(x) + (1-t)f(y).$$

Лемма 6.4. *Функция f на интервале (a,b) выпукла тогда и только тогда, когда для всех точек $x < z < y$ из этого интервала выполнено*

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

Доказательство. Неравенство, которое нужно доказать эквивалентно

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leqslant \frac{f(y) - f(z)}{y - z} \,\Bigg|\, \cdot (z-x)(y-z)$$

$$yf(z) - zf(z) - yf(x) + zf(x) \leqslant zf(y) - xf(y) - zf(z) + xf(z)$$

$$xf(z) - yf(z) \geqslant zf(x) - yf(x) + xf(y) - zf(y)$$

Т. к. $x < z < y$, то $\exists t \in [0,1]$ $z = t \cdot x + (1-t) \cdot y \Leftrightarrow t = \frac{z-y}{x-y}$.

Т. к. $f(x)$ - выпукла, то $f(z) = f(t \cdot x + (1-t) \cdot y) \leqslant tf(x) + (1-t)f(y) = \frac{z-y}{x-y}f(x) + \frac{x-z}{x-y}f(y) \Leftrightarrow xf(z) - yf(z) \geqslant zf(x) - yf(x) + xf(y) - zf(y)$, т. е пришли к тому же самому неравенству.

В обратную сторону. Имеем, что

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \Rightarrow xf(z)-yf(z) \geqslant zf(x)-yf(x)+xf(y)-zf(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(z) \leqslant \frac{z-y}{x-y}f(x)+\frac{x-z}{x-y}f(y)$$

Т. к. $x<z<y$, то $\exists t \in [0,1]$ $z = t\cdot x+(1-t)\cdot y \Leftrightarrow t = \frac{z-y}{x-y}$.

Значит

$$f(t\cdot x+(1-t)\cdot y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y),$$

что является определением выпуклости функции. □

Теорема 6.5. *Дифференцируемая функция f на интервале (a,b) выпукла тогда и только тогда, когда f' — неубывает.*

Доказательство. $\Rightarrow$ $\forall x<z<y \in (a,b)$ f - выпукла $\Rightarrow$ по предыдущей лемме

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

Тогда при $z \to x$ по теореме о переходе к пределу в неравенстве

$$f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

(Здесь есть тонкость: мы можем устремлять z к x только справа, поэтому мы получим правую производную, но если функция дифференцируема, то правая производная совпадает с левой)

Пусть $z \to y$. Тогда

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$$

Таким образом, $\forall x<y$ $f'(x) \leqslant f'(y) \Rightarrow f'(x)$ - неубывает.

$\Leftarrow$ Пусть $x<z<y$

По теореме Лагранжа $\exists \xi_1 \in (x,z) : \frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi_1)$

$\exists \xi_2 \in (z,y) : \frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(\xi_2)$

Таким образом, $\xi_1 \leqslant \xi_2 \Rightarrow f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2) \Rightarrow \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \Rightarrow f$ на интервале (a,b) выпукла по предыдущей лемме.

□

Следствие 6.6. *Дважды дифференцируемая функция f на интервале (a,b) выпукла тогда и только тогда, когда $f''(x) \geqslant 0$ $\forall x \in (a,b)$.*

Доказательство. $f''(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f'(x)$ неубывает. □

Следствие 6.7. *Пусть f — дифференцируемая выпуклая функция на интервале (a, b). Тогда $f(x) \geqslant f'(c)(x-c) + f(c)$ для всех $x, c \in (a, b)$.*

Доказательство. $f(x) \geqslant f'(c)(x-c) + f(c) \Leftrightarrow f(x) - f(c) \geqslant f'(c)(x-c)$ $(*)$

1. Пусть $x > c$
$$(*) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant f'(c)$$
По теореме Лагранжа $\exists \xi \in (c, x):$
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) \geqslant f'(c),$$
т. к. функция выпукла и по теореме 6.5 функция неубывает.

2. Пусть $x < c$
$$(*) \Leftrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant f'(c)$$
По теореме Лагранжа $\exists \xi \in (x, c):$
$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(\xi) \leqslant f'(c),$$
т. к. функция выпукла и по теореме 6.5 функция неубывает.

3. Пусть $x = c$. Тогда $(*) : 0 \geqslant 0$.

□

6.4 Неравенство Йенсена

Теорема 6.8 (Неравенство Йенсена)**.** *Пусть функция f выпукла на интервале (a, b). Тогда для всех $x_1, ..., x_n \in (a, b)$ и для всех чисел $t_1 \geqslant 0, ..., t_n \geqslant 0$, для которых $t_1 + ... + t_n = 1$, выполнено*
$$f(t_1 x_1 + ... + t_n x_n) \leqslant t_1 f(x_1) + ... + t_n f(x_n).$$

Доказательство. Индукция по n. База индукции: $n = 2$
$$t_1 + t_2 = 1 \Rightarrow t_2 = 1 - t_1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(t_1 x_1 + t_2 x_2) = f(t_1 x_1 + (1 - t_1) x_2) \leqslant t_1 f(x_1) + (1 - t_1) f(x_2) = t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$$
по определению выпуклости.

Шаг индукции: пусть $t_1+...+t_n+t_{n+1}=1$. Возьмём $t=t_1+...+t_n \Rightarrow t+t_{n+1}=1$

$$f(t_1x_1+...+t_nx_n+t_{n+1}x_{n+1}) = f\left(t\left(\frac{t_1}{t}x_1+...+\frac{t_n}{t}x_n\right)+t_{n+1}x_{n+1}\right) = (*)$$

Тогда из выпуклости функции

$$(*) \leqslant tf\left(\frac{t_1}{t}f(x_1)+...+\frac{t_n}{t}f(x_n)\right)+t_{n+1}f(x_{n+1}) = (**)$$

$\frac{t_1}{t}+...+\frac{t_n}{t}=\frac{t_1+...+t_n}{t}=\frac{t}{t}=1$. Применяем предположение индукции

$$(**) \leqslant t_1f(x_1)+...+t_nf(x_n)+t_{n+1}f(x_{n+1})$$

$\square$

Пример 6.9 (Неравенство о средних)**.** *Пусть* $x_1,...,x_n>0$. *Тогда* $\sqrt[n]{x_1...x_n} \leqslant \frac{x_1+...+x_n}{n}$.

$t_1=t_2=...=t_n=\frac{1}{n}, f(x)=e^x, y_i=\ln x_i$
$f''(x)=e^x \geqslant 0\ \forall x \Rightarrow f(x)=e^x$ - выпуклая.
По неравенству Йенсена

$$f(t_1y_1+...+t_ny_n) \leqslant t_1f(y_1)+...+t_nf(y_n)$$

$$f(t_1y_1+...+t_ny_n) = e^{t_1y_1+...+t_ny_n} = e^{\frac{\ln x_1}{n}+\frac{\ln x_2}{n}+...+\frac{\ln x_n}{n}} = e^{\frac{\ln x_1}{n}}\cdot...\cdot e^{\frac{\ln x_n}{n}} = \sqrt[n]{x_1...x_n}$$

$$t_1f(y_1)+...+t_nf(y_n) = \frac{1}{n}(x_1+...+x_n)$$

6.5 Асимптоты

Определение 6.10. *Прямая* $y=\alpha x+\beta$ *называется* ***асимптотой*** *графика функции* f *при* $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, *если* $f(x)=\alpha x+\beta+o(1)$ *при* $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$. *Ясно, что в случае асимптоты на* $+\infty$ *справедливы равенства*

$$\alpha=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\alpha x)$$

Аналогичные равенства верны и в случае асимптоты на $-\infty$ *с заменой везде* $+\infty$ *на* $-\infty$.

Глава 7

Первообразная и неопределенный интеграл

Лекция 22: Первообразная, неопределённый интеграл

7.1 Первообразная

Определение 7.1. *Функция F называется первообразной функции f на некотором интервале I, если F дифференцируема на I и $F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$.*

Педагогический приём. $\frac{1}{x} = (\ln|x|)' = \frac{2}{2x} = (\ln|2x|)'$, т. к. $\ln 2x = \ln 2 + \ln x$, т. е. отличается на константу.

Лемма 7.2. *Любые две первообразные F_1 и F_2 функции f на интервале I отличаются на константу.*

Доказательство. $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$

$\Phi(x)$ дифференцируема как сумма дифференцируемых функций.

$\Phi'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = f(x) - f(x) = 0$

Т. к. $\Phi(x)$ дифференцируема $\Rightarrow$ непрерывна на любом интервале.

По теореме Лангранжа

$\forall a, b \in I, a \leqslant b\ \exists c \in (a, b) \to \Phi(a)$ - $\Phi(b) = \Phi'(c)(a-b) = 0 \cdot (a-b) = 0$. Значит $\Phi(x) = const$. □

Определение 7.3. *Множество всех первообразных функции f на некотором заданном интервале I называется неопределённым интегралом от f и обозначается $\displaystyle\int f(x)\,dx$.*

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + C \mid F(x) \text{ - первообразная } f(x), C \in \mathbb{R}\}$$

7.2 Таблица первообразных

- $\displaystyle\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, a \neq -1;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{x}\,dx = \ln|x| + C;$
- $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C;$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + C;$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + C;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$
- $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$

7.3 Свойства неопределённого интеграла

Теорема 7.4. *1. (Линейность)*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx + C;$$

2. (Формула интегрирования по частям)

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx;$$

3. (Формула замены переменной)

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)}.$$

(Здесь подразумевается, что все интегралы существуют.)

Доказательство. 1. Пусть $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$.

$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow \alpha F(x) + \beta G(x)$ - первообразная функции $\alpha f(x) + \beta g(x) \Rightarrow \displaystyle\int \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

А также $\alpha \displaystyle\int f(x)\ dx + \beta \int g(x)\ dx = \alpha F(x) + \alpha c_1 + \beta G(x) + \beta c_2 = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$.

2. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow f(x)g(x) + C =$
$= \displaystyle\int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\ dx = \int f'(x)g(x)\ dx + \int f(x)g'(x)\ dx$ (линейность)
$\Rightarrow \displaystyle\int f(x)g'(x)\ dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\ dx.$

3. $(F(\varphi(t)))'_t = F'_x(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \Rightarrow F(\varphi(t)) \in \displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

С другой стороны, $F(\varphi(t)) \in \displaystyle\int f(x)\ dx\Big|_{x=\varphi(t)}$.

Следовательно, $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int f(x)\ dx\Big|_{x=\varphi(t)}$.

□

Замечание 7.5. *Отметим, что, т.к. $f'(x)\ dx = df$ и $g'(x)\ dx = dg$ (инвариантность первого дифференциала), то свойство 2) обычно записывают в виде $\displaystyle\int f\ dg = fg - \int g\ df$.*

*Аналогично, свойство 3) обычно записывают в виде $\displaystyle\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt =$
$= \displaystyle\int f(\varphi(t))\ d\varphi(t)$ и рассматривают φ как новую переменную.*

Пример 7.6. *Найдём следующие первообразные:*

1.1 $\displaystyle\int \cos^9 x \sin x\ \ dx = -\int \cos^9 x (\cos x)'\ \ dx =$ *(формула замены переменной)* $\displaystyle -\int t^9\ dt\Big|_{t=\cos x} = -\frac{t^{10}}{10} + C\Big|_{t=\cos x} = -\frac{\cos^{10} x}{10} + C;$

1.2 $\displaystyle\int \cos^9 x \sin x\ dx = -\int \cos^9 x (\cos x)'\ dx =$ *(Замечание 7.6)* $\displaystyle - \int \cos^9 x\ d\cos x = -\frac{\cos^{10} x}{10} + C;$

Здесь $\cos x$ *воспринимаем как переменную.*

2.1 $\int \ln x\ dx = \int \ln x \cdot 1\ dx = \int \ln x \cdot x'\ dx =$ *(формула интегрирования по частям)* $x\ln x - \int x(\ln x)'\ dx = x\ln x - \int 1\ dx = x\ln x - x + C$;

2.2 $\int \ln x\, dx = x\ln x - \int x\, d\ln x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x\ln x - x + C$;

3. $\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \left[x = \cos t; -1 \leqslant x \leqslant 1; t = \arccos x; 0 \leqslant t \leqslant \pi\right]$ *(здесь используем формулу замены переменной в обратную сторону)* $= \int \sqrt{1-\cos^2 t}\ d\cos t = -\int \sqrt{1-\cos^2 t}\sin t\ dt = -\int \sin^2 t\ dt$ $(t \geqslant 0)$ $= -\int 1-\cos^2 t\, dt = \int \cos^2 t - 1\, dt = \int \cos^2 t\, dt - \int 1\, dt = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dt - t = \int \frac{1}{2}\ dt + \frac{1}{2}\int \cos 2t\ dt - t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\frac{\sin 2t}{2} + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sin t\cos t + C = \frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\cos(\arccos x)\sin(\arccos x) + C$ *(мы подставили в* $\varphi(t)$ $t = \varphi^{-1}(x)$ *и получили, что* $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = x$*, т. к.* $\varphi(t) = \cos t$ *- биекция)* $= \frac{1}{2}\arccos x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C$;

Как мы поняли, интеграл - это обратная операция к дифференцированию и обратные операции часто усторены сложнее, чем прямые. Так и с интегралом: если продифференцировать можно почти любую функцию в виде формулы, то интеграл от функции, выраженной через элементарные функции, иногда не может быть выражен через элементарные функции. Но для некоторых функций ответ выражается через элементарные. В частности, всегда можно найти интеграл от рациональной функции, но с некоторой оговоркой.

Глава 8

Интеграл от рациональной функции

Лекция 23: Интеграл от рациональной функции

8.1 Рациональная функция

Определение 8.1. *Функция $R(x)$ называется рациональной, если*

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

для некоторых многочленов $P(x)$ и $Q(x)$.

Пример 8.2. *Найдём следующие первообразные:*

1. $\int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \int \frac{1}{x-1}\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x-1| - \ln|x| + C;$

2. $\int \frac{1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right) dx = \int \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{x(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx - \int \frac{1}{x-1}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$ *(используем пункт 1)* $= -\frac{1}{x-1} - \ln|x-1| + \ln|x| + C;$

3. $\int \frac{1}{x(x^2+1)}\,dx = \int \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx - \int \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| + C - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x| + C - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1}$ $(d(x^2+1) = (x^2+1)'dx = 2xdx)$ $= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C;$

8.2 Разложение многочлена на неприводимые

Теорема 8.3. *Любой многочлен единственным образом раскладывается на неприводимые множители. (без доказательства)*

Замечание 8.4. *Любой многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ раскладывается на множители вида $(x-a)$ и (x^2+px+q), где $p^2-4q<0$ (дискриминант меньше нуля).*

8.3 Правильная дробь

Определение 8.5. *Рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ правильная, если степень числителя меньше степени знаменателя. Нулевой многочлен 0 является правильной дробью.*

Замечание 8.6. *Любая рациональная дробь единственным способом представима как сумма многочлена и правильной дроби.*

8.4 Элементарная дробь

Определение 8.7. *Правильная рациональная дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ называется элементарной (или простейшей), если её знаменатель $Q(x)$ представляет собой степень неприводимого многочлена $p(x)$:*

$$Q(x) = p^k(x), k \leqslant 1,$$

а степень числителя $P(x)$ меньше степени $p(x)$.

8.5 Разложение дроби на элементарные

Теорема 8.8. *Любая правильная рациональная дробь единственным образом разлагается в сумму элементарных дробей. (без доказательства)*

Следствие 8.9. *Каждая рациональная функция $\frac{P(x)}{Q(x)}, P(x), Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ представима в виде суммы многочлена и элементарных рациональных дробей*

$$\frac{A}{(x-a)^m}, \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}, p^2-4q<0, A, M, N \in \mathbb{R}.$$

8.6 Интегрирование рациональных функций

Теорема 8.10. *Пусть P и Q два многочлена. Тогда первообразная функции $\frac{P}{Q}$ выражается в элементарных функциях (более точно, рациональных, ln и arctg).*

Доказательство. Пусть $Q(x) = (x-a_1)^{m_1} \cdot ... \cdot (x-a_s)^{m_s} \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{n_1} \cdot ... \cdot (x^2+p_kx+q_k)^{n_k}$. По теореме 8.8 дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ раскладывается в сумму элементарных дробей

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{A_{ij}}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{B_{ij}x + C_{ij}}{(x^2+p_ix+q_i)^j}.$$

(Здесь более сильное утверждение: любая рациональная функция раскладывается в виде суммы *именно таких* элементарных дробей)

Чтобы проинтегрировать $\frac{P(x)}{Q(x)}$, нужно, в силу линейности интеграла, проинтегрировать по отдельности многочлен $R(x)$ и элементарные дроби. Но многочлен мы уже умеем интегрировать, осталось разобраться с элементарными дробями.

1. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a} = Aln|x-a| + C;$

2. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + C, n \neq 1$ (проверяется взятием производной у правой части);

3. Воспользуемся тем, что $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+a^2}\ dx = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\frac{x}{a}}{(\frac{x}{a})^2+1} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}(\frac{x}{a}) + C.$

   $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\ dx = M\int \frac{x+\frac{N}{M}}{x^2+px+q}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p-p+\frac{2N}{M}}{x^2+px+q}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\ dx + \frac{M}{2}\int \frac{\frac{2N}{M}-p}{x^2+px+q}\ dx = \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q}\ dx + \frac{M}{2}\left(\frac{2N}{M}-p\right)\int \frac{dx}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}} = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) +$
   $\left(N - \frac{pM}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C$ ($x^2+px+q > 0$, т. к. $D = p^2-4q < 0$, ещё здесь пользуемся верхним интегралом);

4. $\displaystyle n \in \mathbb{N}, a \neq 0, J_n(x,a) = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int xd\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)$ (формула интегрирования по частям) $\displaystyle= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \int \frac{x\cdot n\cdot 2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} +$

$2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{x^2+a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx - 2n\int\frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\ dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n(x,a) - 2na^2J_{n+1}(x,a) \Rightarrow J_{n+1}(x,a) = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2nJ_n(x,a) - J_n(x,a)\right) = \frac{1}{2na^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)J_n(x,a)\right)$

5. $n > 1$,

$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p-p+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\int\frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n}\ dx + \frac{M}{2}\int\frac{-p+\frac{2N}{M}}{(x^2+px+q)^n}\ dx = \frac{M}{2}\int\frac{d(x^2+px+q)}{(x^2+px+q)^n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot$

$\cdot\int\frac{dx}{\left((x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n} = \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)J_n\left(x+\frac{p}{2}, \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right).$

□

Лекция 24: Интегрирование рациональных функций, интеграл Римана

8.7 Метод Остроградского

Теорема 8.11 (Формула Остроградского)**.** *Пусть* $\deg P < \deg Q$. *Тогда:*

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx,$$

где $Q_2(x)$ *имеет те же корни, что и многочлен* $Q(x)$, *но однократно,* $Q_1(x) = \frac{Q(x)}{Q_2(x)}$, *а* $P_1(x)$ *и* $P_2(x)$ *находятся методом неопределенных коэффициентов после дифференцирования формулы, с учетом* $\deg P_1(x) < \deg Q_1(x), \deg P_2(x) < \deg Q_2(x)$.

Доказательство. Если мы складываем две правильные дроби, то получим правильную дробь:

$$\deg A(x) < \deg B(x), \deg C(x) < \deg D(x)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} + \frac{C(x)}{D(x)} = \frac{A(x)D(x) + C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$$

$$\deg A(x)D(x) = \deg A(x) + \deg D(x) < \deg B(x) + \deg D(x)$$

$$\deg C(x)B(x) = \deg C(x) + \deg B(x) < \deg D(x) + \deg B(x) = \deg B(x) + \deg D(x)$$

Тогда

$$\deg A(x)D(x) + C(x)B(x) = max(\deg A(x)D(x)), \deg C(x)B(x)) <$$

$$< \deg B(x) + \deg D(x)$$

Значит дробь $\frac{A(x)D(x)+C(x)B(x)}{B(x)D(x)}$ правильная.

Пусть

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{k_i} \frac{a_{jk}}{(x-x_j)^k} + \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{s_j} \frac{b_{js}x + c_{js}}{(x^2 + p_j x + q_j)^s}.$$

Проинтегрируем каждое слагаемое по отдельности. Если для каждого слагаемого мы можем применить такую формулу

$$\int \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}\,dx = \frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} + \int \frac{P_2^*(x)}{Q_2^*(x)}\,dx,$$

в которой многочлены $P^*(x), Q^*(x), P_1^*(x), Q_1^*(x), P_2^*(x), Q_2^*(x)$ удовлетворяют условию теоремы, то потом эти формулы мы можем сложить и получить итоговую формулу. Когда мы суммируем левую часть, то из-за линейности интеграла все интегралы вида $\displaystyle\int \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}\,dx$ объединятся в правильную дробь $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$ (используем доказанный факт). В правой части слагаемые вида $\displaystyle\int \frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)}\,dx$ объединяются в правильную дробь $\displaystyle\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,dx$, приэтом свойство знаменателя о том, что степень каждого множителя $Q_1(x)$ меньше на единицу, чем у $Q(x)$, сохраняется. А также при суммировании в правой части интегралов вида $\displaystyle\int \frac{P_2^*(x)}{Q_2^*(x)}\,dx$ получаем $\displaystyle\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$, приэтом степень каждого множителя многочлена $Q_2(x)$ равна 1, т. к если мы складываем дроби с одинаковыми знаменателями, то знаменатель дроби не изменяется, т. е. множители остаются в первой степени, а если мы складываем дроби с разными знаменателями, то знаменатели перемножаются и каждый множитель остаётся в первой степени.

Осталось проверить, что формула выполняется для каждого слагаемого. Докажем это для 5 интегралов из теоремы 23.3.

В 1. $\displaystyle\int \frac{Adx}{x-a}$ и 3. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$ случаях $\frac{P_1^*(x)}{Q_1^*(x)} = 0$.

Во 2. $\displaystyle\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = -\frac{A}{(n-1)(x-a)^{n-1}} + \int \frac{0}{Q_2(x)}\,dx$, у первого слагаемого степень $n-1$ в знаменателе.

В 5. $\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\,dx = \frac{M}{2}\frac{(x^2+px+q)^{1-n}}{1-n} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) J_n\left(x+\frac{p}{2}, \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right)$, у первого слагаемого степень $n-1$ в знаменателе. Теперь нужно разобраться с J_n.

В 4.$J_n(x,a) = \displaystyle\frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-1)J_{n-1}(x,a)\right)$ у первого слагаемого в знаменателе степень на 1 меньше, а второе слагаемое - это интеграл следующего порядка. Когда мы применим реккурентную формулу для J_{n-1}, то получим дробь со степенью ещё на 1 меньше в знаменателе. Продолжим этот процесс пока не дойдём до первой степени в знаменателе. Если сложить дроби, у которых степень в знаменателе убывает, то получится дробь, у которой знаменатель имеет степень $n-1$, т. е. на 1 меньше. А интеграл от дроби со степенью 1 в знаменателе, на котором мы остановились, имеет вид $\displaystyle\int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\,dx$. □

Замечание 8.12. *Метод Остроградского удобно использовать, если знаменатель $Q(x)$ имеет кратные корни.*

8.8 Рациональные функции от cos и sin

Пример 8.13. *Пусть $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. Заметим, что*

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$$

Тем самым, интегралы от функций $R(\cos x, \sin x)$, где R — рациональная функция, сводятся заменой к интегралам от рациональных функций.

Пояснение.

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}; x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = d(2\operatorname{arctg} t) = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Договоримся, что $-\pi < x < \pi$, тогда получаем биекцию между t и x. Функции $\sin x$ и $\cos x$ - это 2π-периодические функции и интервал, на котором мы посчитали интеграл, имеет длину 2π и далее "копируем"то, что получилось после *интегрирования на другие интервалы длины 2π. Следовательно,*

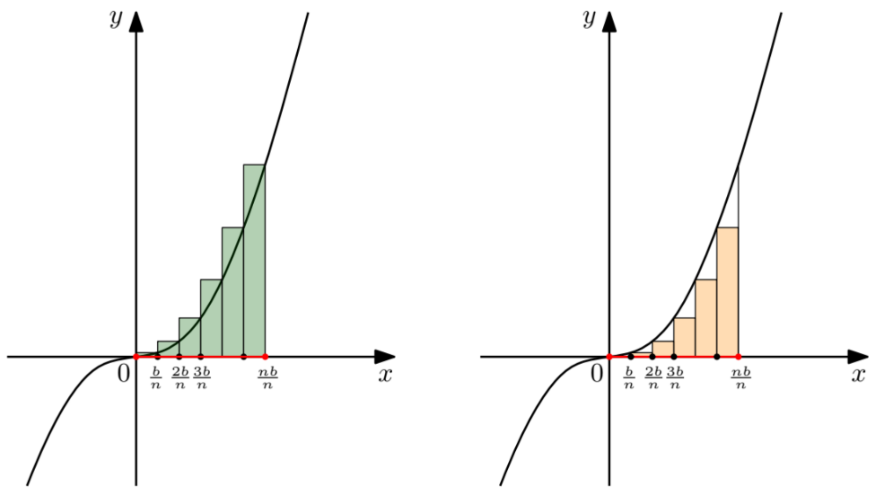
$$\int \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)}\,dx = \int \frac{P\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)}{Q\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right)}\,\frac{2dt}{1+t^2}$$

Глава 9

Определенный интеграл

9.1 Определенный интеграл как площадь

Пример 9.1. *Чему равняется площадь под графиком функции $y = x^3$ на отрезке $[0; b]$?*



Пояснение. *Площадь столбиков на левой картинке:*

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{kb}{n}\right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{b^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{b^4}{n^4}(1+2+...+n)^2(*) = \frac{b^4}{n^4}\frac{(n+1)^2 n^2}{4}$$

(*) Формула суммы кубов доказывается по индукции.

Площадь фигуры под графиком заведомо покрывается зелёными столбиками.

Площадь столбиков на правой картинке:

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(k-1)b}{n}\right)^3 \frac{b}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(k-1)^3 b^4}{n^4} \cdot k^3 = \frac{b^4}{n^4} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^3 = \frac{b^4}{n^4}(1+2+...+n)^2 =$$

$$= \frac{b^4}{n^4}\frac{(n-1)^2 n^2}{4}$$

Сумма S_2 меньше площади фигуры под графиком.

$$\lim_{n\to\infty} S_1 = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{n^4}\frac{(n+1)^2n^2}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_2 = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{n^4}\frac{(n-1)^2n^2}{4} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\frac{(n-1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{b^4}{4}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{b^4}{4}$$

По теореме о зажатой последовательности площадь фигуры равна $\frac{b^4}{4}$. Но можно было получить ответ, посчитав интеграл: $\displaystyle\int x^3dx = \frac{x^4}{4} + C$.

9.2 Интеграл Римана

Определение 9.2.

- *<u>Разбиением</u> T отрезка $[a, b]$ называется набор точек $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.*
- *Отрезки $[x_{k-1}, x_k]$ называются <u>отрезками разбиения</u>. Длину отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ обозначим через $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, k \geqslant 1$.*
- *Величина $\Delta_T := \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \Delta x_k$ называется <u>диаметром разбиения</u>.*
- *<u>Размеченным разбиением</u> (T, ξ) отрезка $[a, b]$ называется пара, состоящая из разбиения T отрезка $[a, b]$ и набора точек $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n), \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$.*
- *<u>Интегральной суммой</u> функции f, соответствующей размеченному разбиению (T, ξ), называется выражение*

$$\sigma(f, T, \xi) := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Определение 9.3. *Функция f называется интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$, если существует такое число I, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall$ размеченного разбиения (T, ξ) с диаметром разбиения $\Delta_T < \delta$ выполнено $|\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$.*

Число I называют интегралом функции f на отрезке $[a, b]$ и обозначают $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Пояснение. *Геометрически мы уменьшаем длину отрезков и увеличиваем их число.*

Пример 9.4. *1. $\displaystyle\int_a^b 1\,dx = b - a$;*

2. Функция $I_{\mathbb{Q}}$ не интегрируема ни на каком отрезке.

Пояснение. *1. $\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$. (функция $f(\xi_k) = 1\ \forall k$)*

2. Функция Дирихле $I_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to 0, 1$ определяется следующим образом:

$$I_{\mathbb{Q}} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

$\forall$ разбиения T можно взять $\xi \in \mathbb{Q}$, $\zeta \in \mathbb{I}$ (внутри любого отрезка разбиения можно взять рациональное и иррациональное число)

Тогда $\sigma(I_{\mathbb{Q}}, T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} I_{\mathbb{Q}}(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$ и $\sigma(I_{\mathbb{Q}}, T, \zeta) = \sum_{k=1}^{n} I_{\mathbb{Q}}(\zeta_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$.

Тогда для любого T с любым диаметром разбиения можно взять разметку, такую что иногда сумма равна $b - a$, иногда 0. Если $b - a \neq 0$, то функция не интегрируема.

Лекция 25: Интеграл Римана, суммы Дарбу

Предложение 9.5. *Если функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть f - интегрируема на $[a, b]$.

Тогда $\exists I \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall (T, \xi)$ с $\Delta_T < \delta \to |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon \Leftrightarrow \Leftrightarrow I - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon$.

$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

Пусть f - неограничена на $[a, b] \Rightarrow$ неограничена на одном из отрезков Δ_k, пусть на Δ_{k_0}. Фиксируем ξ_k для всех k кроме k_0. Тогда $\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = C + f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0} \Rightarrow I - C - \varepsilon < f(\xi_{k_0})\Delta x_{k_0} < I - C + \varepsilon \Rightarrow \frac{I - C - \varepsilon}{\Delta x_{k_0}} < f(\xi_{k_0}) < \frac{I - C + \varepsilon}{\Delta x_{k_0}}$ - противоречие, функция ограничена. $\square$

Предложение 9.6 (Линейность интеграла)**.** *Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$. Тогда для произвольных чисел α, β функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и*

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx.$$

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall (T, \xi)$ с $\Delta_T < \delta_1 \to |\sigma(f, T, \xi) - I_1| < \varepsilon$.

g - интегрируема на $[a,b] \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 : \forall (T,\xi)$ с $\Delta_T < \delta_2 \to |\sigma(g,T,\xi) - I_2| < \varepsilon$.

Размеченное разбиение (T,ξ) взяли одно и то же для обоих интегралов.

Первые два утверждения означают, что $I_1 = \int_a^b f(x)\,dx, I_2 = \int_a^b g(x)\,dx$.

Рассмотрим интегральную сумму

$$\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} (\alpha f(\xi_k) + \beta g(\xi_k))\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} \beta g(\xi_k)\Delta x_k =$$

$$= \alpha\sigma(f,T,\xi) + \beta\sigma(g,T,\xi)$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмём $\delta = \min(\delta_1,\delta_2) \Rightarrow |\sigma(\alpha f + \beta g, T,\xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| = |\alpha\sigma(f,T,\xi) + \beta\sigma(g,T,\xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| \leqslant |\alpha\sigma(f,T,\xi) - \alpha I_1| + |\beta\sigma(g,T,\xi) - \beta I_2| \leqslant |\alpha|\varepsilon + |\beta|\varepsilon = (|\alpha| + |\beta|)\varepsilon$

$\forall \varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2(|\alpha|+|\beta|)} > 0\ \exists \delta = \min(\delta_1,\delta_2) > 0 : \forall (T,\xi)$ с $\Delta_T < \delta \to |\sigma(\alpha f + \beta g, T, \xi) - \alpha I_1 - \beta I_2| \leqslant (|\alpha| + |\beta|)\frac{\varepsilon'}{2(|\alpha|+|\beta|)} = \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon'$. □

Предложение 9.7 (Монотонность интеграла)**.** *Пусть f и g интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$. Если $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a,b]$, то* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. $f(x) \leqslant g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) \geqslant 0$ и $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx \Leftrightarrow \int_a^b g(x) - f(x)\,dx \geqslant 0$ (пользуемся линейностью). Пусть $h(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow$ требуется доказать, что $h(x) \geqslant 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) \geqslant 0$.

По определению $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (T,\xi)$ с $\Delta_T < \delta \to |\sigma(h,T,\xi) - \int_a^b h(x)\,dx| < \varepsilon \Leftrightarrow \int_a^b h(x)\,dx - \varepsilon < \underline{\sigma(h,T,\xi) < \int_a^b h(x)\,dx + \varepsilon}.$

$\sigma(h,T,\xi) \geqslant 0$(т. к. $h(\xi_k) \geqslant 0 \Rightarrow \sum_{k=1}^n h(\xi_k)\Delta x_k \geqslant 0) \Rightarrow \int_a^b h(x) + \varepsilon > 0\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) > -\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \int_a^b h(x) \geqslant 0$. □

Замечание 9.8. *В частности,* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Доказательство. Далее мы докажем, что если $f(x)$ интегрируема, то и $|f(x)|$ интегрируема.

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)| \Rightarrow -\int_a^b |f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx$$

□

Глава 10

Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций

10.1 Суммы и интегралы Дарбу

Фиксируем ограниченную функцию f, определённую на отрезке $[a, b]$.

Определение 10.1. *Для ограниченной на отрезке $[a, b]$ функции f и разбиения T определим нижнюю и верхнюю суммы Дарбу:*

$$s(f, T) := \sum_{k=1}^{n} \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k;$$

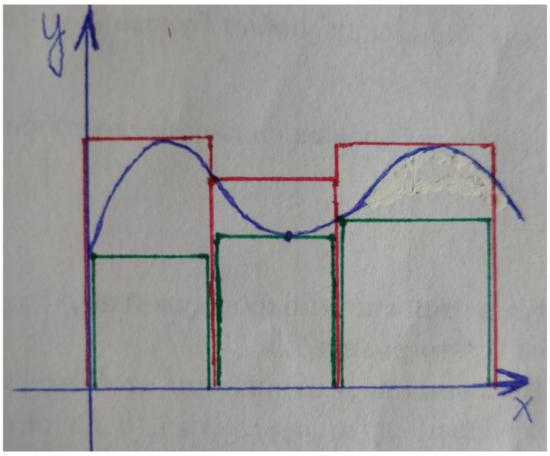
(на каждом отрезке берём минимальное значение функции)

$$S(f, T) := \sum_{k=1}^{n} \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x) \Delta x_k.$$

(на каждом отрезке берём максимальное значение функции)

Нижним интегралом Дарбу называется число $I_* = \sup\limits_{T} s(f, T)$, а верхним интегралом Дарбу называется число $I^* = \inf\limits_{T} S(f, T)$.

Сумма зелёных прямоугольников - это $s(f, T)$, сумма красных прямоугольников - это $S(f, T)$.



10.2 Критерий Дарбу

Лемма 10.2. *1. $s(f,T) \leqslant \inf\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi) \leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant \sup\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi) \leqslant S(f,T)$;*

2. Если $T \subset T'$, то $s(f,T) \leqslant s(f,T')$ и $S(f,T') \leqslant S(f,T)$;

3. $s(f,T_1) \leqslant s(f,T_1 \cup T_2) \leqslant S(f,T_1 \cup T_2) \leqslant S(f,T_2)$.

Доказательство. 1. Докажем, что $s(f,T) = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi)$

$\leqslant$: $\forall \xi\ \ s(f,T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \inf\limits_{\xi_k} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow s(f,T)$ - нижняя грань $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.

$\inf\limits_{\xi} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \inf\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi)$ - точная нижняя грань $\Rightarrow s(f,T) \leqslant \inf\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi)$.

$\geqslant$: $s(f,T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \inf\limits_{\xi_k} f(\xi_k)\Delta x_k$

По определенению инфимума $\forall \varepsilon > 0\ \exists \xi'_k \in \Delta_k : f(\xi'_k) \leqslant \inf\limits_{\xi_k} f(\xi_k) + \varepsilon$.

$\sigma(f,T,\xi') = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi'_k)\Delta x_k \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\inf\limits_{\xi_k} f(\xi_k) + \varepsilon\right)\Delta x_k = s(f,T) + \varepsilon(b-a)$

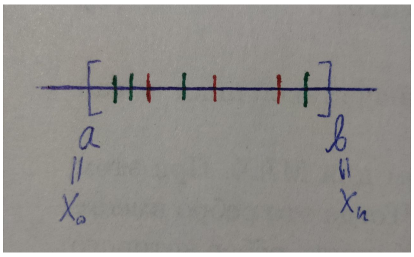
$\inf\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi) \leqslant \sigma(f,T,\xi') \leqslant s(f,T) + \varepsilon(b-a)$

При $\varepsilon \to 0$ $\inf\limits_{\xi} \sigma(f,T,\xi) \leqslant s(f,T)$.

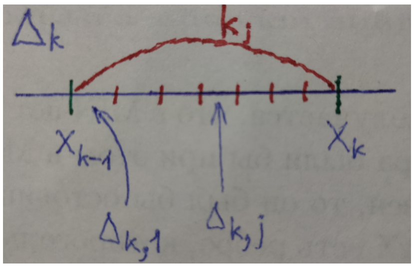
Второе и третье неравенство в цепочке очевидное. Четвёртое неравенство на самом деле является равенством и доказывается как первое равенство.

2. Рассмотрим отрезок $[a, b]$. На нём определено разбиение T. Теперь рассмотрим измельчение разбиения T'. Оно содержит те же точки, что и в T, но добавляет ещё свои точки.

   Красные точки - точки разбиения T, красные и зелёные точки - точки измельчения T'.

   Пусть подотрезки $\Delta_k \in T$, а подотрезки $\Delta'_k \in T'$, $T \subset T'$. Рассмотрим отрезок Δ_k и будем считать, что он разбился на k_j отрезков. Поэтому отрезок Δ'_k мы будем индексировать двумя индексами, первый номер - номер отрезка Δ_k, в котором он лежит, второй номер - номер отрезка Δ'_k внутри отрезка Δ_k.

   Тогда

   $$s(f, T') = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_{k,j}} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j}$$

   Приэтом на нескольких маленьких отрезках инфимум не меньше инфимума на одном большом отрезке, потому что на большом отрезке у нас есть больше точек, из которых мы можем выбрать меньшее значение. Если инфимум достигался на красном отрезке, то этот отрезок принадлежит большому, поэтому мы можем взять точку принадлежащую красному отрезку и получить инфимум на большом отрезке не больше, чем на маленьких. Поэтому

   $$s(f, T') = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_{k,j}} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j} \geqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_j} \inf_{\xi \in \Delta_{k}} f(\xi) \cdot \Delta x_{k,j}$$

Продолжаем преобразования.

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_j}\inf_{\xi\in\Delta_k} f(\xi)\cdot\Delta x_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\inf_{\xi\in\Delta_k} f(\xi)\sum_{j=1}^{k_j}\Delta x_{k,j}=\sum_{k=1}^{n}\inf_{\xi\in\Delta_k} f(\xi)\Delta x_k=s(f,T)$$

Второе неравенство доказывается аналогично.

3.

$$T_1\subset T_1\cup T_2\Rightarrow (\text{из пункта 2})\ s(f,T)\leqslant s(f,T_1\cup T_2)$$
$$(\text{из пункта 1})\ s(f,T_1\cup T_2)\leqslant S(f,T_1\cup T_2)$$
$$T_1\cup T_2\supset T_2\Rightarrow (\text{из пункта 2})\ S(f,T_1\cup T_2)\leqslant S(f,T_2)$$

□

Лекция 26: Интеграл Римана, суммы Дарбу

Лемма 10.3. *$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\forall T$ с $\Delta_T<\delta$ выполнено $I_*\leqslant s(f,T)+\varepsilon$ и $I^*\geqslant S(f,T)-\varepsilon$.*

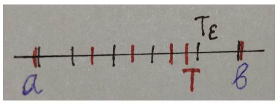
Доказательство. По определению супремума

$$I_*=\sup_T s(f,T)\Rightarrow\forall\varepsilon>0\ \exists T_\varepsilon: I_*\leqslant s(f,T_\varepsilon)+\varepsilon$$

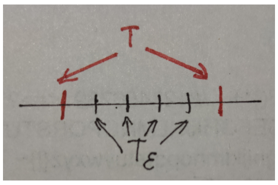
Рассмотрим произвольное разбиение T

$$s(f,T_\varepsilon\cup T)\geqslant(\text{пункт 2 предыдущей леммы})s(f,T_\varepsilon)\geqslant I_*-\varepsilon$$

Точки из разбиения T окрасим в красный цвет, точки из T_ε - в чёрный цвет.



Точки T_ε делят отрезок с красными концами на число чёрных точек + 1. Тогда точки из T_ε могут разбить на не более, чем $2|T_\varepsilon|$ отрезков, потому что максимум достигается, когда в каждом отрезке мы ставим по одной чёрной точке (т. е. разбиваем отрезок на два).



Пояснение. Здесь Δ_k - отрезок $[x_{k-1}, x_k]$, подразумеваем под знаком суммы сумму по всем отрезкам, которые образуются этим множеством точек (отрезок образуют соседние точки, т. е. внутри отрезка других точек разбиения нет).

$$s(f, T_\varepsilon \cup T) = \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k = \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \in T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k +$$

$$+ \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \notin T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k = (*)$$

Первая сумма - сумма отрезков с красными концами, вторая сумма - сумма остальных отрезков (т. е. либо оба конца чёрные, либо один конец чёрный, а другой - красный). Первое слагаемое выразим как разность суммы по всем отрезкам с красными концами и суммы по всем отрезкам с красными концами, но с чёрными точками внутри.

$$(*) = \sum_{\Delta_k \in T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \Delta x_k - \sum_{\Delta_k \in T \text{ и } \Delta_k \notin T \cup T_\varepsilon} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k + \sum_{\Delta_k \in T_\varepsilon \cup T \text{ и } \Delta_k \notin T} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi) \cdot \Delta x_k \leqslant$$

$$\leqslant s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \Delta_T \cdot 2|T_\varepsilon|$$

В конце - грубая оценка для последних двух слагаемых.

Возьмём $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2 \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot 2|T_\varepsilon|}$. Тогда для T с $\Delta_T < \delta$

$$I_* \leqslant s(f, T_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant s(f, T \cup T_\varepsilon) + \varepsilon \leqslant s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \Delta_T \cdot 2|T_\varepsilon| + \varepsilon <$$

$$< s(f, T) + 2 \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot \delta \cdot 2|T_\varepsilon| + \varepsilon = s(f, T) + \varepsilon + \varepsilon = s(f, T) + 2\varepsilon$$

Заменой $\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{2}$ получаем $I_* \leqslant s(f, T) + \varepsilon'$.

Аналогично доказывается, что $I^* \geqslant S(f, T) - \varepsilon$.

Уточнение. Если фиксируем ε, то T_ε - фиксированное число. $f(x)$ интегрируема $\Rightarrow$ она ограничена (по предложению 9.5) $\Rightarrow$ супремум ограничен, поэтому такое δ рассматривать корректно. □

Теорема 10.4 (Критерий Дарбу). *Ограниченная функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда $I^* = I_*$.*

Доказательство. $\Rightarrow$ Если функция интегрируема, то

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall (T, \xi) \text{ с } \Delta_T < \delta \to |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$$

$$I - \varepsilon < \sigma(f, T, \xi) < I + \varepsilon$$

$$I-\varepsilon \leqslant \inf_{\xi} \sigma(f,T,\xi) = s(f,T) \leqslant \sup_{T} s(f,T) = I_*$$
$$I^* = \inf_{T} S(f,T) \leqslant S(f,T) = \sup_{\xi} \sigma(f,T,\xi) \leqslant I+\varepsilon$$

Докажем, что $I_* \leqslant I^*$:

$\forall T_1, T_2\ s(f,T_1) \leqslant S(f,T_2) \Rightarrow \sup\limits_{T_1} s(f,T_1) \leqslant S(f,T_2) \Rightarrow \sup\limits_{T_1} s(f,T_1) \leqslant \inf\limits_{T_2} S(f,T_2)$

Тогда

$$I-\varepsilon \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant I+\varepsilon$$

Устремляя $\varepsilon \to 0$, получаем, что $I_* = I^*$.

$\Leftarrow$ $I = I_* = I^*$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta \to I - \varepsilon = I_* - \varepsilon \leqslant \text{(лемма 10.3) } s(f,T) \leqslant$$
$$\leqslant \sigma(f,T,\xi) \leqslant S(f,T) \leqslant \text{(лемма 10.3) } I^* + \varepsilon = I + \varepsilon \Rightarrow |\sigma(f,T,\xi) - I| < \varepsilon,$$

что есть определение интеграла.

□

10.3 Колебание функции

Определение 10.5. *Колебанием функции f на отрезке Δ называется число*

$$\omega(f,\Delta) := \sup_{x,y\in\Delta} |f(x)-f(y)| = \sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y).$$

Пояснение. *1. В одну сторону*

$$\forall x,y \in \Delta\ f(x) - f(y) \leqslant \sup_{x\in\Delta}(f(x)) - f(y) \leqslant \sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x,y\in\Delta} |f(x)-f(y)| \leqslant \sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y)$$

2. В другому сторону

По определению супремума и инфимума

$$\forall \delta > 0\ \exists x_\delta : \sup_{x\in\Delta} f(x) \leqslant f(x_\delta) + \delta$$
$$\forall \delta > 0\ \exists y_\delta : \inf_{y\in\Delta} f(y) \geqslant f(y_\delta) - \delta$$

Тогда

$$\sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y) \leqslant f(x_\delta) - f(y_\delta) + 2\delta \leqslant \sup_{x,y\in\Delta} |f(x)-f(y)| + 2\delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x\in\Delta} f(x) - \inf_{y\in\Delta} f(y) \leqslant \sup_{x,y\in\Delta} |f(x)-f(y)| \text{ \textit{при} } \delta \to 0$$

Лекция 27: Интегрируемость по Риману различных классов функций

Теорема 10.6. *Пусть f - ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $I^* = I_*$;
2. *Функция f интегрируема на $[a, b]$;*
3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T$ *с* $\Delta_T < \delta$:
$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon;$$
4. $\forall \varepsilon > 0\ \exists T$:
$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon;$$

Доказательство. Заметим, что

$$S(f,T) - s(f,T) = \sum_{k=1}^{n} \sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sup_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k - \inf_{\xi \in \Delta_k} f(\xi)\Delta x_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k$$

$1 \Rightarrow 2$ Применяем критерий Дарбу.

$2 \Rightarrow 3$ Пусть f - интегрируемая функция на $[a, b]$. Тогда $I^* = I_* = I$.

По лемме 10.3

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta : \begin{cases} I = I^* \geqslant S(f,T) - \varepsilon, \\ I = I_* \leqslant s(f,T) + \varepsilon. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I - I \leqslant s(f,T) - S(f,T) + 2\varepsilon$$

По замечанию заключаем

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k \leqslant 2\varepsilon$$

$3 \Rightarrow 4$ По предыдущему пункту существует такое T с диаметром $\Delta_T < \delta$, значит и просто T существует.

$4 \Rightarrow 1$ В доказательстве критерия Дарбу мы получили следующую цепочку неравенств

$$s(f,T) \leqslant I_* \leqslant I^* \leqslant S(f,T)$$

Тогда

$$0 \leqslant I^* - I_* \leqslant S(f,T) - s(f,T) = \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon \Rightarrow \text{ при } \varepsilon \to 0 \ I^* = I_*$$

□

10.4 Интегрируемость модуля, квадрата и произведения функций

Следствие 10.7. *Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, то $|f|$ и f^2 интегрируемы по Риману на отрезке $[a,b]$ и для любого $[c,d] \subset [a,b]$ функция f интегрируема по Риману на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. f - интегрируема на $[a,b] \Leftrightarrow$ по пункту 4 теоремы 10.6

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists T : \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon.$$

<u>Доказательство для модуля функции</u>

(Неравенство треугольника: $|A| - |B| \leqslant |A - B|, |B| - |A| \leqslant |A - B| \Rightarrow ||A| - |B|| \leqslant |A - B|$)

$$\omega(|f|,\Delta_k) = \sup_{x,y\in\Delta_k} ||f(x)| - |f(y)|| \leqslant \sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x) - f(y)| = \omega(f,\Delta_k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega(|f|,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega(f,\Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon$$

<u>Доказательство для квадрата функции</u>

$$\omega(f^2,\Delta_k) = \sup_{x,y\in\Delta_k} |f^2(x) - f^2(y)| = \sup_{x,y\in\Delta_k} |(f(x) - f(y))(f(x) + f(y))| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x) - f(y)|(|f(x)| + |f(y)|) \leqslant 2 \sup_{x\in\Delta_k} |f(x)| \sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x) - f(y)| =$$

$$= 2 \sup_{x\in\Delta_k} |f(x)| \cdot \omega(f,\Delta_k)$$

$$\sum_{k=1}^{n}\omega(f^2,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} 2\sup_{x\in\Delta_k}|f(x)|\omega(f,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant 2\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta_k)\Delta x_k \leqslant$$
$$\leqslant M\cdot\varepsilon, \text{где М - константа.}$$

В обоих случаях в конце мы применяем теорему 10.6 и заключаем, что функции интегрируемы на $[a,b]$.

Интегрируемость функции на подотрезке докажем далее. □

Следствие 10.8. *Если f и g интегрируемы на $[a,b]$, то и $f\cdot g$ интегрируема на $[a,b]$.*

Доказательство. Если f и g интегрируемы, то $f-g$ и $f+g$ интегрируемы. Тогда их квадраты $(f-g)^2$ и $(f+g)^2$ интегрируемы. Следовательно, $\frac{1}{4}((f+g)^2-(f-g)^2)=\frac{1}{4}\cdot 4fg=fg$ интегрируема. □

10.5 Интегрируемость монотонной функции

Следствие 10.9. *Если f монотонна на $[a,b]$, то f интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

Доказательство. Без ограничения общности пусть f - возрастающая функция.

$$\omega(f,\Delta_k)=f(x_k)-f(x_{k-1})$$

$$\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta_k)\cdot\Delta x_k=\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\Delta x_k=(*)$$

Пусть $\Delta x_k=\Delta x_j\ \forall k,j$. Тогда

$$(*)=\Delta x_1\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))=\Delta_T(f(b)-f(a))$$

Следовательно, $\forall T-$ разбиение $[a,b]$ на одинаковые части с $\Delta_T<\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$

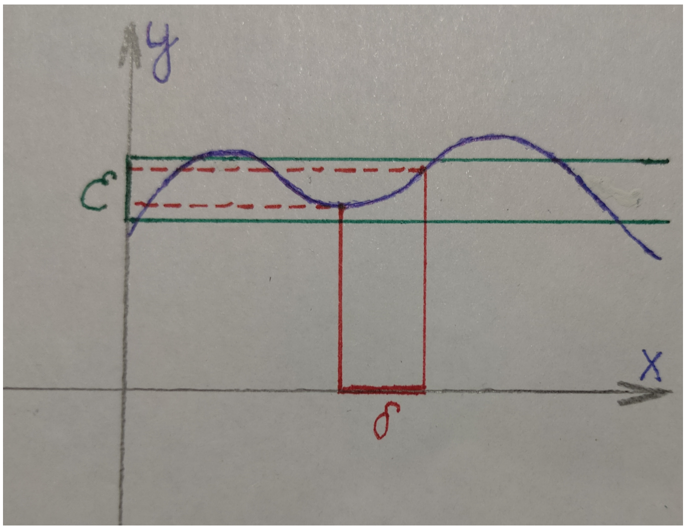
$$\sum_{k=1}^{n}\omega(f,\Delta_k)\Delta x_k\leqslant\varepsilon.$$

Для убывающей f доказывается аналогично. □

10.6 Равномерная непрерывность

Определение 10.10.

Функция f называется равномерно непрерывной на множестве X, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ для которого из неравенства $|x - y| < \delta$ следует $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.



Пояснение. *Другими словами, существует δ на оси OX такая, что расстояние между x и y меньше, чем δ, и разность между значениями функции в точках x и y помещается в этот $\varepsilon-$коридор.*

Замечание 10.11. *Если функция является равномерно-непрерывной, то она является и непрерывной, т. к. определение непрерывности слабее:*

$f-$*непрерывна на* $X \Rightarrow \forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

В обратную сторону это не правда, см. пункт 2) примера 10.12.

Пример 10.12.

1. *Функция $f(x) := \sin x$ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, т.к. по теореме Лагранжа $|\sin x - \sin y| = |\cos \xi| \cdot |x - y| \leqslant |x - y|$.*
2. *Функция $f(x) = \frac{1}{x}$ не равномерно непрерывна на $(0, 1)$, т.к. $f(\frac{1}{2n}) - f(\frac{1}{n}) = n, |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} \to 0$.*

Пояснение.

1. *По теореме Лагранжа $\forall x, y \in \mathbb{R} |\sin x - \sin y| = |(\sin \xi)'(x - y)| = |\cos \xi||(x - y)| \leqslant |x - y|$*
2. *Требуется доказать отрицание определения равномерной непрерывности:*

$$\exists \varepsilon = 1\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in (0, 1)\ |x - y| < \delta : |f(x) - f(y)| \geqslant 1$$

Будем доказывать для $\delta = \frac{1}{n}$, потому что всегда можно взять $\frac{1}{n} < \delta$. Тогда пусть $x = x_n = \frac{1}{n}, y = y_n = \frac{1}{2n} \Rightarrow |x - y| = |\frac{1}{n} - \frac{1}{2n}| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}, |f(x) - f(y)| = |n - 2n| = n \geqslant 1$.

10.7 Интегрируемость непрерывной функции

Теорема 10.13 (Кантора). *Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то f равномерно непрерывна на $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть f - непрерывная функция на $[a,b]$, но не равномерно-непрерывная:

$$\exists\varepsilon > 0 : \forall\delta = \frac{1}{n} > 0\ \exists x_n, y_n \in [a,b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \to |f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$$

x_n - ограниченная последовательность, т. к. $x_n \in [a,b] \Rightarrow$ по теореме Больцано $\exists x_{n_k} \to x \Rightarrow$ из неравенства $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ следует, что $x_{n_k} - \frac{1}{n} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n}$. $x_{n_k} - \frac{1}{n} \to x, x_{n_k} + \frac{1}{n} \to x \Rightarrow$ по теореме о зажатой последовательности $y_{n_k} \to x$.

$\varepsilon \leqslant |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| = |f(x_{n_k}) - f(x) + f(x) - f(y_{n_k})| \leqslant |f(x_{n_k}) - f(x)| + |f(x) - f(y_{n_k})|$

Но $|f(x_{n_k}) - f(x)| \to 0, |f(x) - f(y_{n_k})| \to 0$, а $\varepsilon > 0$ - противоречие. □

Следствие 10.14. *Пусть f непрерывна на $[a,b]$. Тогда f интегрируема по Риману на $[a,b]$.*

Доказательство. В силу предыдущей теоремы f равномерно непрерывна на $[a,b]$. Поэтому

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \forall T \text{ с } \Delta_T < \delta\ \forall x, y \in \Delta_k \to \sup_{x,y\in\Delta_k} |f(x) - f(y)| < \varepsilon\ \forall k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega(f, \Delta_k) < \varepsilon\ \forall k.$$

Для такого разбиения $\sum\limits_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon|b - a| \Rightarrow$ по теореме 10.6 функция f интегрируема по Риману на $[a,b]$. □

Лекция 28: Формула Ньютона-Лейбница

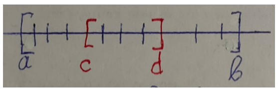
10.8 Аддитивность интеграла

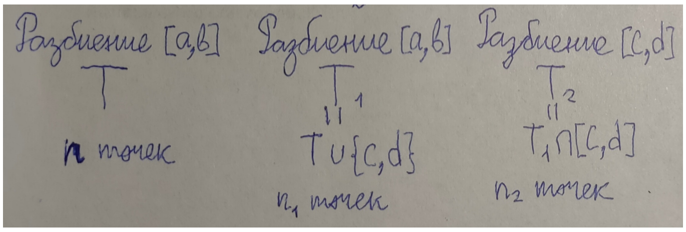
Следствие 10.15. *Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a,b]$, $[c,d] \subseteq [a,b]$, то f интегрируема на отрезке $[c,d]$.*

Доказательство. f - интегрируема на $[a,b] \Rightarrow$ по теореме 10.6 $\forall\varepsilon > 0\ \exists T$:

$$\sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k) \cdot \Delta x_k < \varepsilon \Leftrightarrow 0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in\Delta_k} f(x) \cdot \Delta_k - \sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in\Delta_k} f(x) \cdot \Delta_k < \varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leqslant S(f,T) - s(f,T) < \varepsilon$$





$$\sum_{k=1}^{n_2} \omega(f, \Delta_k^2)\Delta^2 x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n_1} \omega(f, \Delta_k^1)\Delta^1 x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k < \varepsilon$$

Первое неравенство выполняется, потому что в новую сумму мы добавили слагаемые отрезков, не входящих в отрезок $[c, d]$, но принадлежащих отрезку $[a, b]$, колебание функции всегда неотрицательно (разность супремума и инфимума функции неотрицательна). Здесь мы переходим от разбиения T_2 к разбиению T_1. Второе неравенство выполняется, потому что T_1 - это измельчение разбиения T. На измельчении нижняя сумма Дарбу $s(f, T_1)$ только больше, а верхняя сумма Дарбу $S(f, T_1)$ только меньше, значит разность $S(f, T_1) - s(f, T_1) \leqslant S(f, T) - s(f, T)$ (лемма 10.2, пункт 2). □

Следствие 10.16. *Если f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, $c \in [a, b]$, то f интегрируема на отрезках $[a, c]$ и $[c, b]$ и верно равенство*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Доказательство. Если интеграл слева существует, то существуют и интегралы справа по предыдущему следствию (на самом деле утверждение верно в обратную сторону, но доказательство на лекциях не приводилось).

Замечание 10.17. *Если f - интегрируема на $[a, b]$, то для любой последовательности разбиений T_n такой, что $\Delta_{T_n} \to 0$, интегральная сумма $\sigma(f, T_n, \xi_n) \to I$.*

Доказательство. f - интегрируема на $[a, b]$ $\Rightarrow$ по определению $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T$ с $\Delta_T < \delta$ и $\xi \to |\sigma(f, T_n, \xi_n) - I| < \varepsilon$

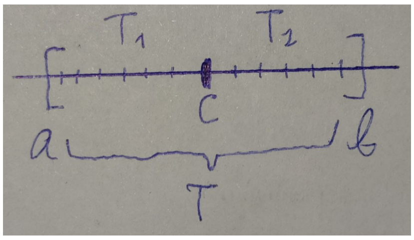
Тогда

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \Delta_{T_n} < \delta \to |\sigma(f, T_n, \xi_n) - I| < \varepsilon \Rightarrow \sigma(f, T_n, \xi_n) \to I$$

□

Это означает, что если функция интегрируемая, то можно выбирать любое разбиение, с стремящимся к нулю диаметром, чтобы найти интеграл.

Будем брать такое разбиение T отрезка $[a, b]$, которые содержат точку c. T_1 - разбиение отрезка $[a, c]$, T_2 - разбиение отрезка $[c, b]$.



f - интегрируема $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall T$ с $\Delta_T < \delta \to |\sigma(f, T, \xi) - I| < \varepsilon$

$\Delta_T < \delta \Rightarrow \Delta_{T_1} < \delta, \Delta_{T_2} < \delta \Rightarrow |\sigma(f, T_1, \xi_1) - I_1| < \varepsilon, |\sigma(f, T_2, \xi_2) - I_2| < \varepsilon$

Пусть отрезок $[a, c]$ поделен на n_1 отрезков. Тогда

$$\sigma(f, T, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n_1} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=n_1+1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma(f, T_1, \xi_1) + \sigma(f, T_2, \xi_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sigma(f, T, \xi) - I_1 - I_2| = |\sigma(f, T_1, \xi_1) + \sigma(f, T_2, \xi_2) - I_1 - I_2| \leqslant$$
$$\leqslant |\sigma(f, T_1, \xi_1) - I_1| + |\sigma(f, T_2, \xi_2) - I_2| < 2\varepsilon$$

Следовательно,

$$\sigma(f, T, \xi) \to I, \sigma(f, T, \xi) \to I_1 + I_2 \Rightarrow I_1 + I_2 = I$$

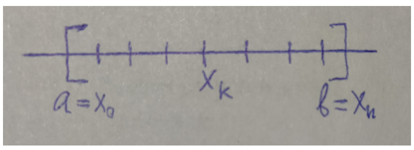
□

10.9 Формула Ньютона–Лейбница

Теорема 10.18 (Формула Ньютона–Лейбница). *Пусть F - первообразная интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ функции f. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Доказательство. Рассмотрим разбиение T отрезка $[a, b]$.



$$F(b) - F(a) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + F(x_3) - F(x_2) + ...$$
$$... + F(x_n) - F(x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k) - F(x_{k-1}) = (*)$$

Применяем теорему Лагранжа для каждого отрезка $[x_{k-1}, x_k]$:

$$(*) = \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sigma(f, T, \xi)$$

Число $F(b) - F(a)$ равняется интегральной сумме Римана $\sigma(f, T, \xi)$. Поскольку функция интегрируема, то по замечанию из следствия выше при $T \to 0$ интегральная сумма Римана стремится к интегралу $\int_a^b f(x)\,dx$. При этом, как мы показали, для любого разбиения T всегда есть такая разметка ξ, когда $F(b)-F(a) = \sigma(f, T, \xi)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

□

Далее будем использовать соглашение: при $b > a$ по определению

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

10.10 Существование первообразной

Теорема 10.19. *Пусть f интегрируема по Риману на $[a, b]$. Тогда функция*

$$F(x) := \int_a^x f(x)\,dx$$

непрерывна на $[a, b]$. Кроме того, если f непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$, то F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Доказательство. Доказательство первого утверждения.

$y \in [a, b]$

$$F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$$

$$|F(y) - F(x_0)| = \left|\int_a^y f(x)\,dx - \int_a^{x_0} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{x_0}^y f(x)\,dx\right|$$

f - интегрируема на $[a, b] \Rightarrow$ ограничена: $|f(x)| \leqslant M$

$$\left|\int_{x_0}^y f(x)\,dx\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^y M\,dx\right| = M \cdot |y - x_0| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ при $y \to x_0$ $F(y) \to F(x_0) \Rightarrow F(x)$ непрерывна.

Доказательство второго утверждения.

Пусть теперь f непрерывна в $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$$

Воспользуемся монотонностью интеграла и проинтегрируем каждую часть.

$$\int_{x_0}^{x} (f(x_0) - \varepsilon) \, dx \leqslant \int_{x_0}^{x} f(x) \, dx \leqslant \int_{x_0}^{x} (f(x_0) + \varepsilon) \, dx$$

$$(f(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) \leqslant F(x) - F(x_0) \leqslant (f(x_0) + \varepsilon)(x - x_0)$$

Пусть $x > x_0$, поделим на $x - x_0$.

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leqslant f(x_0) + \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

Это означает, что предел $\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ существует и он равен $f(x_0)$. Таким образом, F дифференцируема в x_0 и $F'(x_0) = f(x_0)$.

Если $x < x_0$, то когда поделим на $x - x_0$ знаки перевернутся, но в итоге мы получим тоже самое. $\square$

Следствие 10.20. *Пусть f непрерывна на $[a, b]$, тогда у f существует первообразная.*

Пояснение. *Если во всех точках f непрерывна, то по теореме 10.19 первообразная f существует во всех точках.*

10.11 Формула интегрирования по частям

Теорема 10.21 (Формула интегрирования по частям). *Пусть f, g — непрерывно дифференцируемые на отрезке $[a, b]$ функции. Тогда*

$$\int_a^b f(x) g'(x) \, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x) g(x) \, dx.$$

Доказательство. $F(x) = g(x) \cdot f(x)$

$F'(x) = g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$

Непрерывно дифференцируемая функция - это дифференцируемая функция, у которой первая производная непрерывна. Это означает, что $g'(x) \cdot f(x)$ и $g(x) \cdot f'(x)$ непрерывны $\Rightarrow g'(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f'(x)$ непрерывна. У непрерывных функций есть первообразная по предыдущему следствию. Тогда мы можем их интегрировать.

$\int_a^b F'(x)\ dx = F(b) - F(a)$

$$g(b)\cdot f(b) - g(a)\cdot f(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\ dx = \int_a^b g'(x)\cdot f(x) + g(x)\cdot f'(x)\ dx =$$

$$= \int_a^b g'(x)\cdot f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\cdot f'(x)\ dx$$

$\square$

Пример 10.22. $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arctg} x\ dx.$

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\ dx = x \operatorname{arctg} x\Big|_0^1 - \int_0^1 x\ d \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\ dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$$

Глава 11

Критерий Дарбу и классы интегрируемых функций

Лекция 29: Несобственный интеграл

11.1 Формула интегрирования подстановкой

Теорема 11.1. *Пусть f — непрерывна на $[a,b], \varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство. f — непрерывна на $[a,b] \Rightarrow f$ - интегрируема на $[\varphi(a),\varphi(b)]$ (функция интегрируема на любом подотрезке $[a,b]$) и у f есть первообразная (по теореме 10.19).

Тогда у функции $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ тоже есть первообразная $F(\varphi(t))$.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx$$

□

Пример 11.2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx.$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}+1}\,dx = (*)$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

Применяем формулу

$$(*) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + 2} = \int_{\operatorname{tg} 0}^{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} \frac{dy}{y^2+2} = \int_0^1 \frac{dy}{y^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{2}}\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

11.2 Мера Жордана (дополнительный материал)

Пусть Δ — параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, являющийся декартовым произведением промежутков вида $[a_i, b_i]$, (a_i, b_i), $[a_i, b_i)$ или $(a_i, b_i]$. Мера Жордана параллелепипеда Δ определяется как произведение

$$\mu\Delta = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i).$$

Для ограниченного множества $E \subset \mathbb{R}^n$ определяются:

- внешняя мера Жордана

$$\mu^* E = \inf \sum_{k=1}^{N} \mu\Delta_k, \ \bigcup_k \Delta_k \supset E$$

- внутренняя мера Жордана

$$\mu_* E = \sup \sum_{k=1}^{N} \mu\Delta_k, \bigcup_k \Delta_k \subset E, \Delta_k \cap \Delta_m = \varnothing, \text{ если } k \neq m.$$

Здесь $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_N$ — параллелепипеды описанного выше вида.

Определение 11.3. *Множество E называется измеримым по Жордану (или квадрируемым), если $\mu^* E = \mu_* E$. В этом случае мера Жордана равна $\mu E = \mu^* E = \mu_* E$.*

11.3 Несобственный интеграл Римана

Определение 11.4. *Пусть f интегрируема на каждом отрезке $[a, x]$ при $x < b$ ($b \in (-\infty, +\infty]$). Говорят, что несобственный интеграл*

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

<u>сходится</u>, если существует предел

$$\lim_{x \to b-0} \int_a^x f(t)\, dt.$$

В этом случае значение несобственного интеграла полагают равным значению данного предела. В противном случае (если предела не существует) говорят, что несобственный интеграл расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл с особенностью в нижнем пределе интегрирования.

Пример 11.5.
$$\int_1^b \frac{1}{x^p}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(b^{1-p}-1), & p \neq 1,\\ \ln b, & p = 1. \end{cases}$$

Предел при $b \to \infty$ существует тогда и только тогда, когда $p > 1$.

С другой стороны,

$$\int_b^1 \frac{1}{x^p}\,dt = \begin{cases} \frac{1}{1-p}(1-b^{1-p}), & p \neq 1,\\ -\ln b, & p = 1. \end{cases}$$

Предел при $b \to 0$ существует тогда и только тогда, когда $p < 1$.

11.4 Свойства несобственного интеграла

Теорема 11.6. *Пусть f, g интегрируемы на каждом отрезке $[a,x]$ при $x < b$ и пусть для них определены несобственные интегралы на промежутке $[a,b)$. Тогда*

1. *если $b \in \mathbb{R}$ и f интегрируема на $[a,b]$, то значение несобственного интеграла на промежутке $[a,b)$ совпадает со значением обычного интеграла Римана по отрезку $[a,b]$;*

2. *функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[a,b)$ и*
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx;$$

3. *если $c \in [a,b)$, то*
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx;$$

Доказательство. 1. По определению $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx$.

По теореме 10.19 если $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ интегрируема на $[a,b]$, то $F(t)$ непрерывна на $[a,b] \Rightarrow \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\,dx = F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$.

2. $\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)\ dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t \alpha f(x)+\beta g(x)\ dx$ (здесь уже обычный определённый интеграл, применяем линейность) $= \lim_{t\to b-} \alpha \int_a^t f(x)\ dx + \beta \int_a^t g(x)\ dx = \alpha \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\ dx + \beta \lim_{t\to b-} \int_a^t g(x)\ dx = \alpha \int_a^b f(x)\ dx + \beta \int_a^b g(x)\ dx$

   Мы предполагаем, что интегралы $\int_a^b f(x)\ dx$ и $\int_a^b g(x)\ dx$ существуют, тогда существует интеграл $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)\ dx$.

3. $\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\ dx = (*)$

   При $c \in [a, b)$ для уже определённого интеграла применяем аддитивность: $(*) = \lim_{t\to b-} \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^t f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \lim_{t\to b-} \int_c^t f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$.

   В отличие от пункта 2 здесь равенство выполняется в обе стороны: $\int_a^c f(x)\ dx$ является константой, поэтому предел $\lim_{t\to b-} \int_c^t f(x)\ dx$ существует тогда и только тогда, когда существует $\lim_{t\to b-} \int_a^t f(x)\ dx$.

$\square$

11.5 Формула интегрирования подстановкой

Теорема 11.7. *Пусть f непрерывна на $[a, b)$ и интегрируема в несобственном смысле, $\varphi : [\alpha, \beta) \to [a, b)$ - непрерывно дифференцируемое отображение, $\varphi(\alpha) = a, \varphi(t) \to b$ при $t \to \beta$. Тогда функция $t \mapsto f(\varphi(t))\varphi'(t)$ интегрируема в несобственном смысле на промежутке $[\alpha, \beta)$ и*

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt.$$

Доказательство. Из условия теоремы знаем, что

$$\exists \int_a^b f(x)\ dx = \lim_{y\to b-} \int_a^y f(x)\ dx$$

Рассмотрим следующий интеграл (мы не знаем заранее, существует ли он):

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \lim_{s\to\beta} \int_\alpha^s f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$$

При этом не важно с какой стороны s стремится к β (справа или слева), потому что мы определили интеграл как в случае $\alpha < \beta$, так и в случае $\beta < \alpha$.

Для данного определённого интеграла под пределом действует формула интегрирования заменой (теорема 11.1).

$$\lim_{s\to\beta}\int_{\alpha}^{s} f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \lim_{s\to\beta}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x)\ dx$$

$\varphi(\alpha) = a, \varphi(s) \to b$ при $s \to \beta \Rightarrow$

$$\lim_{s\to\beta}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(s)} f(x)\ dx = \lim_{y\to b}\int_{a}^{y} f(x)\ dx$$

что тоже самое, что интеграл в начале доказательства. Значит интеграл $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)$ существует и равен $\int_a^b f(x)\ dx$. □

11.6 Формула интегрирования по частям

Теорема 11.8. *Пусть f, g непрерывно дифференцируемы на $[a, b)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)g(x)$. Тогда функции $f'g$ и fg' одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$ и в случае интегрируемости*

$$\int_a^b f(t)g'(t)\ dt = \lim_{x\to b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\ dt.$$

Доказательство. Если существует $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)g(x)$, то $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)g(x) - f(a)g(a)$ - это число. Тогда функции $f'g$ и fg' одновременно интегрируемы или не интегрируемы в несобственном смысле на $[a, b)$.

В случае интегрируемости

$$\int_a^b f(t)g'(t)\ dt = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)g'(t)\ dt$$

Применяем формулу интегрирования по частям для определённого интеграла

$$\lim_{x\to b}\int_a^x f(t)g'(t)\ dt = \lim_{x\to b-}\left(f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^x f'(t)g(t)\ dt\right) =$$

$$= \lim_{x\to b-} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)\ dt$$

□

11.7 Критерий Коши

Теорема 11.9 (Критерий Коши). *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a;b)$, интегрируема в собственном смысле на любом отрезке $[a;\xi] \subseteq [a;b)$ и неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Тогда для сходимости интеграла*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число η, что при любых $\eta_1, \eta_2 \in (\eta; b)$

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Доказательство. Запишем критерий Коши для функции $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$:

$$\exists \lim_{x\to b-} F(x) \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \eta > 0\ \forall\eta_1, \eta_2 \in B_\delta(b) \to |F(\eta_1) - F(\eta_2)| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\int_a^{\eta_1} f(x)\,dx - \int_a^{\eta_2} f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{\eta_1} f(x)\,dx + \int_{\eta_2}^{a} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{\eta_2}^{\eta_1} f(x)\,dx\right| =$$
$$= \left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

□

Лекция 30: Абсолютная сходимость

11.8 Абсолютная сходимость

Определение 11.10. *Говорят, что несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ сходится **абсолютно**, если сходится интеграл $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$.*

Предложение 11.11. *Из абсолютной сходимости интеграла следует обычная сходимость.*

Доказательство. Запишем критерий Коши (теорема 11.9)

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \text{ - сходится} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : \eta_1, \eta_2 \in B_\delta(b) \to \left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$$

Применяем замечание 9.8 (первое неравенство)

$$\left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|\,dx \leqslant \left|\int_{\eta_1}^{\eta_2} |f(x)|\,dx\right| < \varepsilon$$

Значит сходится интеграл $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. □

Замечание 11.12. *Исследование абсолютной сходимости сводится к исследованию сходимости интеграла от неотрицательной функции. В случае неотрицательной функции f функция F оказывается монотонной, поэтому сходимость интеграла от неотрицательной функции равносильна ограниченности F на $[a, b)$ (применяем теорему Вейерштрасса).*

11.9 Условная сходимость

Определение 11.13. *Говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(t)\,dt$ сходится **условно**, если сам интеграл сходится, но не сходится абсолютно.*

Пример 11.14. *Примером условно сходящегося интеграла может служить интеграл $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.*

Доказательство. Формула интегрирования по частям дает следующее равенство

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\cos x}{x}\bigg|_1^\infty - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx,$$

Последний интеграл в этом равенстве сходится абсолютно, поскольку

$$\int_1^\infty \left|\frac{\cos x}{x^2}\right| dx \leqslant \int_1^\infty \left|\frac{1}{x^2}\right| dx \text{ - сходится.}$$

В то же время, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ не сходится абсолютно. Действительно,

$$\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geqslant \int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x}\,dx = \int_1^\infty \frac{1}{2x} - \frac{\cos 2x}{2x}\,dx \text{ (формула: } 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x)$$

Первый интеграл в последнем равенстве расходится, а второй, как и выше, равен

$$\int_1^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = \frac{\sin x}{x}\bigg|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\sin x}{x^2}\,dx \text{ - сходится.}$$

Это означает, что $\displaystyle\int_1^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ является суммой сходящегося и расходящегося интеграла и, следовательно, расходится. □

11.10 Несобственный интеграл от знакопостоянной функции

Теорема 11.15 (Критерий сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции). *Пусть функция $f(x) \geqslant 0$ интегрируема на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$. Тогда сходимость интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ эквивалентна условию $\displaystyle\sup_{b' \in [a,b)} \int_a^{b'} f(x)\,dx < +\infty$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(y) = \int_a^y f(x)\,dx$. На любом отрезке $[x_1, x_2] \subset [a, b)$ функция $f(x)$ интегрируема (в силу следствия 10.15) и, поскольку $f(x) \geqslant 0, F(y)$ - монотонна:

$$F(x_2) = \int_a^{x_2} f(x)\,dx = \int_a^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx \geqslant \int_a^{x_1} f(x)\,dx = F(x_1).$$

Тогда, в силу теоремы Вейерштраса 3.18, если $F(y)$ - ограничена, то

$$\sup_{y \in [a,b]} F(y) = \lim_{y \to b} \int_a^y f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

В обратную сторону

$$\exists \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{y \to b} \int_a^y f(x)\,dx \Rightarrow F(x) - \text{ограничена}.$$

□

11.11 Первый признак сравнения

Теорема 11.16 (Первый признак сравнения). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ и для любого $x \in [a, b)$ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$. Тогда:*

- *из сходимости $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ следует сходимость $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$;*
- *из расходимости $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ следует расходимость $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$.*

Доказательство. Поскольку $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, из монотонности интеграла 9.7 следует, что для любого $y \in [a, b)$:

$$0 \leqslant \int_a^y f(x)\, dx \leqslant \int_a^y g(x)\, dx.$$

Если $\int_a^b g(x)\, dx$ сходится, то по критерию сходимости несобственного интеграла от знакопостоянной функции 11.15 функция $G(y) = \int_a^y g(x)\ dx$ — ограничена. Тогда из неравенства выше следует, что и функция $F(y) = \int_a^y f(x)\, dx$ ограничена. Отсюда, в силу теоремы 11.15, следует сходимость интеграла $\int_a^b f(x)\, dx$.

Если же $\int_a^b f(x)\, dx$ расходится, то $F(y)$ неограничена, как и функция $G(y)$. $\square$

11.12 Эквивалентность в смысле сходимости интегралов

Определение 11.17. *Будем говорить, что $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны в смысле сходимости интегралов при $x \to b - 0$ (обозн. $f(x) \overset{cx.}{\sim} g(x)$ при $x \to b - 0$), если $\exists m, M > 0, b_1 < b$ такие, что $\forall x \in [b_1, b)$ выполняются неравенства*

$$mg(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x).$$

Теорема 11.18 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на любом отрезке $[a, b'] \subset [a, b)$ и $f(x) \overset{cx.}{\sim} g(x)$ при $x \to b - 0$.*

Тогда несобственные интегралы $\int_a^b g(x)\, dx$ и $\int_a^b f(x)\, dx$ сходятся и расходятся одновременно.

Доказательство. Функции эквивалентны в терминах сходимости, когда $\exists b_1 : \forall x \in [b_1, b)$ для которых выполнено $mg(x) \leqslant f(x) \leqslant Mg(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{b_1} f(x)\, dx + \int_{b_1}^b f(x)\, dx \text{ и } \int_a^b g(x)\, dx = \int_a^{b_1} g(x)\, dx + \int_{b_1}^b g(x)\, dx.$$

При этом $\int_a^{b_1} f(x)\ dx$ и $\int_a^{b_1} g(x)\ dx$ - определенный интегралы, не влияющие на сходимость.

Исследуем интегралы $\int_{b_1}^b f(x)\ dx$ и $\int_{b_1}^b g(x)\ dx$. Если $\int_{b_1}^b g(x)\ dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int_{b_1}^b Mg(x)\ dx = M \int_{b_1}^b g(x)\ dx$. Тогда по первому признаку сравнения 11.16 интеграл $\int_{b_1}^b f(x)\, dx$ тоже сходится.

И наоборот, если $\int_{b_1}^b g(x)\, dx$ расходится, то расходится и $\int_{b_1}^b mg(x)\, dx = m \int_{b_1}^b g(x)\, dx$. Тогда по первому признаку сравнения 11.16 интеграл $\int_{b_1}^b f(x)\, dx$ тоже расходится. $\square$

11.13 Второй признак сравнения

Предложение 11.19. *Если* $f \geqslant 0$ *и* $f(x) \sim g(x)$ *при* $x \to b-0$, *то* $f(x) \overset{cx.}{\sim} g(x)$.

Доказательство. $g(x) \sim f(x)$ при $x \to b - 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Тогда $\exists \delta : \forall x \in B'_\delta(b):$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - 1\right| < \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3}{2}.$$

Тогда $g(x) > 0$ и

$$\frac{1}{2}g(x) < f(x) < \frac{3}{2}g(x).$$

□

Предложение 11.20. *Пусть* $f_i(x), g_i(x)$ $i \in \{1,2,3\}$ *- неотрицательные на промежутке* $[a,b)$ *функции, причем* $f_3(x) > 0, g_3(x) > 0$ *и* $f_i(x) \overset{cx.}{\sim} g_i(x)$ $i \in \{1,2,3\}$ *при* $x \to b-0$. *Тогда*

$$\frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{f_3(x)} \overset{cx.}{\sim} \frac{f_1(x)\cdot f_2(x)}{f_3(x)} \text{ при } x \to b-0.$$

Доказательство. ??????????????? □

Пример 11.21. *Исследовать на сходимость* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan\frac{1}{x}\sin\left(\frac{2+\cos x}{x^2}\right)}{(e^{\frac{1}{x}}-1)^\alpha}\,dx$.

Лекция 31: Еще немного про числовые ряды

11.14 Первый признак сравнения

Определение 11.22. *Ряд* $\sum_{n=1}^\infty a_n$ *называется* ***знакопостоянным***, *если или* $a_n \geqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *или* $a_n \leqslant 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Предложение 11.23 (Первый признак сравнения)**.** *Пусть* $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$. *Если ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty b_k$ *сходится, то сходится и ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k$. *Наоборот, если ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty a_k$ *расходится, то расходится и ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^\infty b_k$.

Было доказано ранее.

Замечание 11.24. *Поскольку первые несколько членов не влияют на сходимость ряда, достаточно, чтобы неравенства выше выполнялись начиная с некоторого момента $\forall n > n_0$. Это называется* ***принципом локализации****.*

Следствие 11.25 (Признак Вейерштрасса)**.** *Если $|a_n| \leqslant b_n$ и ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.*

Доказательство. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_n|$ сходится по первому признаку сравнения. Если ряд сходится абсолютно, то он и просто сходится. $\square$

11.15 Второй признак сравнения

Теорема 11.26 (Второй признак сравнения)**.** *Пусть $a_n, b_n > 0$ и $\exists \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$. Тогда $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$— эквивалентны по сходимости, т.е. сходятся/расходятся одновременно.*

Доказательство. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0 \Rightarrow$ из определения предела следует, что $\exists n \geqslant N \to \frac{1}{2}c \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant \frac{3}{2}c$ (отступили на $\frac{1}{2}c$ обе стороны) $\Rightarrow \frac{1}{2}c \cdot b_n \leqslant a_n \leqslant \frac{3}{2}c \cdot b_n$

c - положительное число, поэтому можно применять первый признак сравнения.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2}c \cdot b_n$ - расходится (по первому признаку сравнения) $\Rightarrow \frac{3}{2}c \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - расходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - расходится.
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}c \cdot b_n$ - сходится (по первому признаку сравнения) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ - сходится.

$\square$

Пример 11.27. *Теперь мы можем ответить на вопрос, сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$, т. к. $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.*

Следствие 11.28. *Если $a_n \geqslant 0$ и $a_n \sim b_n, n \to \infty$, то $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Доказательство. Определение эквивалентности для функций: $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

В частности верно для функций от n: $a_n \sim b_n$ при $n \to \infty \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0$

По предыдущей теореме получаем требуемое. $\square$

11.16 Интегральный признак

Предложение 11.29. *Пусть $f(x) \geqslant 0$ и не возрастает на промежутке $[1, +\infty)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\, dx$ сходятся и расходятся одновременно.*

Доказательство. Обозначим через $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k)$ частичную сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$. Поскольку $f(x) \geqslant 0$, последовательность S_n монотонно возрастает.

Заметим, что $\forall b > 1$ функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[1, b]$, поскольку $f(x)$ монотонна (следствие 10.9). Также заметим, что в силу монотонности $f(x)$ для $x \in [n, n+1]$ выполнено

$$f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1).$$

Тем самым, $\forall n \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\int_n^{n+1} f(n)\, dx = f(n)((n+1) - n) = f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\, dx \geqslant f(n+1) =$$

$$= f(n+1)((n+1) - n) = \int_n^{n+1} f(n+1)\, dx.$$

Отсюда, если $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится, то

$$S_n - f(1) = f(2) + ... + f(n) \leqslant \int_1^n f(x)\, dx \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\, dx < +\infty,$$

что означает ограниченность S_n и, в силу монотонности S_n и теоремы Вейерштрасса 2.14, сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$.

Если же $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ расходится, то $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_1^n f(x)\, dx = +\infty$, и

$$S_n = f(1) + ... + f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\, dx \to +\infty,$$

что означает расходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$. □

Пример 11.30. *Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leqslant 1$.*

Применяя интегральный признак,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} - \text{сходится} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx - \text{сходится} \Leftrightarrow p > 1$$

11.17 Признак Даламбера

Теорема 11.31 (Признак Даламбера)**.** *Пусть* $a_k > 0\ \forall k \in \mathbb{N}$*. Тогда*

1. *если существует* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in (0, 1)$ *такие, что* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q\ \forall k \geqslant k_0$*, то ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*
2. *если* $\exists k_0 : \forall k \geqslant k_0 \to \frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1$*, то ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. 1. Знаем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^n$ сходится при $|q| < 1$

Пусть $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1\ \forall k \geqslant k_0$

$$a_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot a_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot a_{k-1} = \frac{a_{k+1}}{a_k} \cdot \frac{a_k}{a_{k-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{k_0+1}}{a_{k_0}} \cdot a_{k_0} \leqslant q^{k-k_0+1} a_{k_0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_k \leqslant q^{k-k_0} a_{k_0} \Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} a_{k_0} \Rightarrow \text{ряд} \sum_{k=k_0}^{\infty} q^{k-k_0} a_{k_0} \text{ сходится} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k \text{ сходится (по первому признаку сравнения)}$$

Значит по принципу локализации ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

2. $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1 \Rightarrow a_{k+1} \geqslant a_k \geqslant \ldots \geqslant a_{k_0} > 0 \Rightarrow a_k \not\to 0$, т. е. не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

□

Следствие 11.32 (Признак Даламбера в предельной форме)**.** *Пусть* $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ *и* $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$*, тогда*

1. *при* $q < 1$ *ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2. *при* $q > 1$ *ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*

3. *при* $q = 1$ *ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *может сходится, а может и расходится.*

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Возьмём $q' = \frac{q+1}{2}$ - середина отрезка $[q, 1]$.
Поскольку $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то

$$\exists N : \forall n > N \to \frac{a_{n+1}}{a_n} < q' < 1 \Rightarrow$$

по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2. $q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geqslant N \to \frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1 \Rightarrow$
по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

3. $q = 1$. Пример: $a_n = (\frac{1}{n})^p$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^p = 1 \text{ при любом } p$$

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^p$ сходится при $p > 1$ и не сходится $p \leqslant 1$.

□

11.18 Радикальный признак Коши

Теорема 11.33 (Радикальный признак Коши)**.** *Пусть* $a_k > 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

1. *если существуют* $k_0 \in \mathbb{N}$ *и* $q \in (0, 1)$ *такие, что* $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q$ $\forall k \geqslant k_0$, *то ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*

2. *если* $\exists k_0 : \forall k \geqslant k_0 \to \sqrt[k]{a_k} \geqslant 1$, *то ряд* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится.*

Доказательство. 1. Пусть $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1 \Rightarrow a_k \leqslant q^k$ $\forall k > k_0$.
Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ - сходится, т. к. $q \in (0, 1) \Rightarrow$ по первому признаку сравнения $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

2. $\sqrt[k]{a_k} \geqslant 1 \Rightarrow a_k \geqslant 1 \ \forall k \geqslant k_0 \Rightarrow a_n \not\to 0 \Rightarrow$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - расходится в силу необходимого условия сходимости ряда.

$\square$

Следствие 11.34 (Признак Коши в предельной форме)**.** *Пусть* $a_k > 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$ *и* $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = q$, *тогда*

1. *при* $q < 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится;*
2. *при* $q > 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *расходится;*
3. *при* $q = 1$ *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *может сходится, а может и расходится.*

Доказательство. 1. Пусть $q < 1$. Возьмём $q' = \frac{q+1}{2}$ - середина отрезка $[q, 1]$.

Поскольку $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то

$$\exists N : \forall n > N \to \sqrt[n]{a_n} < q' < 1 \Rightarrow$$

по признаку Коши ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - сходится.

2. $q > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1 \Rightarrow \exists N : \forall n \geqslant N \to \sqrt[n]{a_n} \geqslant 1 \Rightarrow$

по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - расходится.

3. $q = 1$. Пример: $a_n = (\frac{1}{n})^p$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^p} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^p = 1^p = 1 \text{ при любом } p.$$

Здесь мы воспользовались $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n})^p$ сходится при $p > 1$ и не сходится $p \leqslant 1$.

$\square$

Пример 11.35. *Признак Коши сложнее, однако сильнее, чем признак Даламбера. Если признак Даламбера подтверждает сходимость или расходимость ряда, то и признак Коши делает то же, однако обратное неверно:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$$

Признак Даламбера

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1}-n-1}}{2^{(-1)^n-n}} = 2^{(-1)^{n+1}-(-1)^n-n-1+n} = 2^{2(-1)^{n+1}-1} = \begin{cases} 2^{-3}, n - \text{чётное;} \\ 2, n - \text{нечётное.} \end{cases}$$

Следовательно, признак Даламбера не применим.
Признак Коши. $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}}$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \leqslant \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[n]{2^{-n}} \leqslant \sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}} \leqslant \sqrt[n]{2}\sqrt[n]{2^{-n}} = \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Знаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0) \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2}, \sqrt[n]{2} \cdot \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \text{ при } n \to \infty.$$

По теореме о зажатой последовательности $\sqrt[n]{2^{(-1)^n-n}} \to \frac{1}{2} < 1$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд сходится.

11.19 Признак Гаусса

Теорема 11.36 (Признак Гаусса)**.** *Пусть $a_n > 0$. Если существует $p \in \mathbb{R}, \delta > 0$ такие, что $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O(\frac{1}{n^{1+\delta}})$, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, т. е. при $p > 1$ сходится и при $p \leqslant 1$ расходится.*

Доказательство. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^p\right)$$

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^p\right) = \ln\left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p\right) = (1)$$

Применим формулу Тейлора для $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p$

$$(1) = \ln\left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p\right) = \ln\left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)\right) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \left(1 + \frac{p}{n} + \frac{p(p-1)}{2}\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = (2)$$

Знаем, что $o(g) = O(g)$. Тогда

$$(2) = \ln\left(\left(1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) =$$

$$= \ln\left(1 - \frac{p}{n} + \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = (3)$$

Если $\delta > 1$, то $O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$; если $\delta < 1$, то $O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$.

Возьмём $\delta' = \min(\delta, 1)$. Тогда

$$(3) = \ln\left(1 + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right)\right) = (4)$$

Применим формулу Тейлора для $\ln(1 + x)$

$$(4) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right) + O\left(O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^{1+\delta'}}\right)$$

Следовательно по определению О-большого $\exists C > 0 :$

$$\ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^p\right) \leqslant C\frac{1}{n^{1+\delta'}}$$

По первому признаку сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^p\right)$ сходится.

Значит

$$\exists \lim_{N\to\infty} S_N = S$$

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^p\right) = \ln\left(\prod_{n=1}^{N} \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^p\right) = \ln\left(\frac{a_{N+1}}{a_1}(N+1)^p\right)$$

стремится к S при $N \to \infty$.

$$\ln\left(\frac{a_{N+1}}{a_1}(N+1)^p\right) = S + o(1)$$

$$\frac{a_{N+1}}{a_1}(N+1)^p = e^S \cdot e^{o(1)} = (5)$$

Применим формулу Тейлора для $e^{o(1)}$

$$(5) = e^S \cdot (1 + o(1) + o(o(1))) = e^S \cdot (1 + o(1))$$

$$\frac{a_{N+1}}{\frac{e^S a_1}{(N+1)^p}} = 1 + o(1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{a_{N+1}}{\frac{e^S a_1}{(N+1)^p}} = 1 \Rightarrow a_n \sim \frac{const}{n^p} \text{(второй признак сравнения)}$$

$\square$

Лекция 32: Признаки Абеля и Дирихле

11.20 Признак Дирихле

Теорема 11.37 (Признак Дирихле). *Пусть последовательность частичных сумм ряда* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *ограничена:*

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} \to \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant C,$$

а последовательность $\{b_k\}$ *монотонно стремится к нулю. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство.

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, A_n - \text{ограничена}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n} A_{k-1} b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=1}^{n-1} A_k b_{k+1} \ (A_0 = 0) = \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_n \cdot b_n$$

A_n - ограничена, $b_n \to 0 \Rightarrow A_n \cdot b_n \to 0$.

Докажем, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k (b_k - b_{k+1})$ - сходится абсолютно, значит и просто сходится.

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k (b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \cdot |b_k - b_{k+1}| = (*)$$

Без ограничения общности последовательность b_k - монотонно убывает ($b_k \geqslant b_{k+1}$). Пусть ряд A_k ограничен числом M.

$$(*) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M (b_k - b_{k+1}) = M \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_{n+1}) = Mb_1 - Mb_{n+1} \to Mb_1$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, ряд $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ сходится. □

11.21 Признак Абеля

Теорема 11.38 (Признак Абеля). *Пусть ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *сходится, последовательность* $\{b_k\}$ *монотонна и ограничена. Тогда ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится.*

Доказательство. b_n - монотонна и ограничена $\Rightarrow$ (по т. Вейерштрасса) $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = b$

Пусть $b'_n = b_n - b \Rightarrow b'_n$ стремится монотонно к нулю.

По признаку Дирихле сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_n b'_n$. Здесь мы пользуемся, что $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится $\Rightarrow$ частичная сумма $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ограничена.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b'_k = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - b\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\sum_{k=1}^{n} a_k b'_k$ - сходится, $b\sum_{k=1}^{n} a_k$ - сходится $\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ - сходится. □

Следствие 11.39 (Следствие из признака Абеля). *Пусть последовательность* $\{b_k\}$ *монотонна и* $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b \in (0, +\infty)$. *Тогда ряды* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ *сходится или расходятся одновременно.*

Доказательство.

1. Пусть $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится, последовательность b_k - монотонна, ограничена (т. к. имеет предел) $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится (по признаку Абеля).

2. Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится.

   Т. к. $b_k \to b > 0$, то $\exists k_0 : \forall k \geqslant k_0 \to b_k > 0$. Тогда последовательность $\{\frac{1}{b_k}\}$ - монотонна с $k \geqslant k_0$ и имеет предел $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{b_k} = \frac{1}{b} > 0$.

   Если $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ - сходится, то $\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k b_k$ - сходится.

   Последовательность $b'_k = \{\frac{1}{b_k}\}$ - монотонна, ограничена $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} (a_k \cdot b_k) \cdot b'_k$ - сходится по признаку Абеля $\Rightarrow \sum_{k=k_0}^{\infty} a_k$ - сходится $\Rightarrow$ по принципу локализации $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ - сходится.

□

Замечание 11.40. *Следствие из признака Абеля утверждает, что характер сходимости ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *не изменится, если последовательность* $\{a_k\}$ *заменить на эквивалентную последовательность* $\{c_k\}$ *(предел отношения последовательностей* $\{a_k\}$ *и* $\{c_k\}$ *должен стремится к 1) при условии, что последовательность* $\{\frac{c_k}{a_k}\}$ *монотонна.*

11.22 Признак Лейбница

Теорема 11.41 (Признак Лейбница). *Если последовательность b_k монотонно стремится к нулю, то ряд Лейбница $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ сходится.*

Доказательство. $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = \begin{cases} -1, k - \text{нечётное} \\ 0, k - \text{чётное} \end{cases}$ - ограничена, b_k монотонно стремится к нулю $\Rightarrow$ по признаку Дирихле $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k b_k$ - сходится. □

Пример 11.42. *Последовательность $\{\frac{1}{n}\}$ монотонно стремится к нулю $\Rightarrow$ по признаку Лейбница ряд $\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^n}{n}$ - сходится.*

Замечание 11.43. *Из того, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится и $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{b_k}{a_k} = 1$ не следует, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.*

Доказательство. Пусть, например, $a_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}, b_k = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + \frac{1}{k}$. Тогда $\frac{b_k}{a_k} = 1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \to 1$ при $k \to \infty$. При этом ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится по признаку Лейбница, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится, т. к. $b_k = a_k + c_k$, где $c_k = \frac{1}{k}$ и, как было показано ранее гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ расходится. □

11.23 Теоремы о среднем

Теорема 11.44 (Первая теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$, и $g(x)$ не меняет знак (то есть либо всюду неотрицательна: $g(x) \geqslant 0$, либо всюду неположительна $g(x) \leqslant 0$). Тогда существует такое число $\mu, m \leqslant \mu \leqslant M$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть без ограничения общности $g(x) \geqslant 0$.

$$m \leqslant f(x) \leqslant M \Rightarrow mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m\int_a^b g(x)\,dx \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leqslant M\int_a^b g(x)\,dx$$

1. Если $\int_a^b g(x)\,dx = 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)g(x) = 0 = \mu \int_a^b g(x)\,dx$
2. Если $\int_a^b g(x)\,dx \neq 0 \Rightarrow \mu = \frac{\int_a^b f(x)g(x)\,dx}{\int_a^b g(x)\,dx}$

   В частности $m \leqslant \mu \leqslant M$.

□

Следствие 11.45 (Первая теорема о среднем). *Пусть функции $f(x)$ - непрерывна, а $g(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и не меняет знак. Тогда существует такое число $c \in [a,b]$, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Если функция f непрерывна, то тогда она принимает все значения от наибольшего до наименьшего. Тогда $\exists c : \mu = f(c)$, где μ из предыдущей теоремы. Мы можем переписать утверждение предыдущей теоремы так:

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$$

□

Теорема 11.46 (Вторая теорема о среднем). *Если функция $f(x)$ монотонна (нестрого) на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx + f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 11.47 (Формулы Бонне). *Если функция $f(x)$ не возрастает и $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a,b]$, а функция $g(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\,dx.$$

Если же функция $f(x)$ не убывает, то

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(b)\int_\xi^b g(x)\,dx.$$

Доказательство. Пусть разбиение $T = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$.

Функция $f(x)$ - монотонная $\Rightarrow$ интегрируема (Следствие 10.9), $g(x)$ по условию леммы интегрируема $\Rightarrow$ $f(x)g(x)$ интегрируема.

Воспользуемся аддитивностью интеграла.

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)g(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,dx +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))g(x)\,dx$$

Пусть $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} g(x)\,dx, \rho = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k))g(x)\,dx$.

Докажем, что $\rho \to 0$ при $\Delta_T \to 0$.

$$|\rho| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x) - f(x_k)||g(x)| = (*)$$

Здесь мы применили неравенство треугольника и то, что модуль функции интегрируем.

Если функция $g(x)$ интегрируема по Риману, то она ограничена числом M.

$$(*) \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega(f, \Delta_k) M\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) M \int_{x_k}^{x_{k+1}} 1\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) M \Delta x_k =$$

$$= M \sum_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k) \Delta x_k$$

f интегрируема $\Rightarrow \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k \to 0$ при $\Delta_T \to 0$ по критерию Дарбу.

Обозначение: $G(x) = \int_a^x g(x)\,dx$

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \cdot (G(x_{k+1}) - G(x_k)) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) G(x_{k+1}) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) G(x_k) = (**)$$

Т. к. $f(x_0)G(x_0) = f(a)G(a) = f(a) \cdot 0 = 0$, то мы можем изменить индекс суммирования у первой суммы, а последнее слагаемое вынести отдельно.

$$(**) = \sum_{k=1}^{n-1} G(x_k)(f(x_{k-1}) - f(x_k)) + f(x_{n-1})G(b) = (***)$$

По теореме 10.19 $G(x)$ - непрерывна. Тогда $m = \min G(x), M = \max G(x)$ и $G(x)$ достигает эти значения. Кроме того, $f(x_{k-1}) - f(x_k) \geqslant 0$.

$$(***) \geqslant m \sum_{k=1}^{n-1} (f(x_{k-1}) - f(x_k)) + f(x_{n-1})m = mf(a)$$

Аналогично, $\sigma \leqslant Mf(a)$.
$\int_a^b f(x)g(x)\ dx = \sigma + \rho$

$$mf(a) + \rho \leqslant \sigma + \rho \leqslant Mf(a) + \rho$$

Перейдём к пределу при $\Delta_T \to 0$

$$mf(a) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\ dx \leqslant Mf(a)$$

$$\exists \xi : G(\xi) = \mu \in (m, M) \text{ и } \int_a^\xi g(x)\ dx \cdot f(a) = \mu f(a) = \int_a^b f(x)g(x)\ dx$$

Аналогично доказывается вторая формула. □

Пусть $f(x)$ - не возрастает, $f_2(x) = f(x) - f(b) \geqslant 0$.
Применяем формулу Бонне
$\displaystyle\int_a^b f_2(x)g(x)\ dx = f_2(a)\int_a^\xi g(x)\ dx = (f(a) - f(b))\int_a^\xi g(x)\ dx$
$\displaystyle\int_a^b f_2(x)g(x)\ dx = \int_a^b (f(x) - f(b))g(x)\ dx = \int_a^b f(x)g(x)\ dx - f(b)\int_a^b g(x)\ dx$
Тогда $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\ dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\ dx - f(b)\int_a^\xi g(x)\ dx + f(b)\int_a^b g(x)\ dx = f(a)\int_a^\xi g(x)\ dx - f(b)\int_\xi^b g(x)\ dx$ □

Лекция 33: Некоторые приложения интеграла

11.24 Признак Дирихле

Пусть функция $y = f(x)g(x)$ определена на промежутке $[a; b)$ и неограниченна в левой окрестности точки $x = b$. Тогда справедливы следующие достаточные признаки сходимости.

Теорема 11.48 (Признак Дирихле). *Интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\ dx$ сходится, если:*

- *функция $f(x)$ непрерывна и имеет ограниченную первообразную на $[a; b)$;*

- *функция* $g(x)$ *монотонна на* $[a;b)$*, причем* $\lim\limits_{x\to b-0} g(x)=0$.

Доказательство. Рассмотрим интеграл $\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\ dt$ для некоторых $x_1, x_2 \in [a,b)$ (не ограничивая общности будем считать $x_1 \leqslant x_2$). Так как $g(t)$ монотонна на $[x_1;x_2]$, она на нём интегрируема, а значит и $f(t)g(t)$ интегрируема на $[x_1;x_2]$ как произведение интегрируемых функций.

Поскольку $f(t)$ — интегрируема, а $g(t)$ – монотонна, выполнены условия второй теоремы о среднем и существует такая точка $\xi \in [x_1;x_2]$, что

$$\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\ dt = g(x_1)\int_{x_1}^{\xi} f(t)\ dt + g(x_2)\int_{\xi}^{x_2} f(t)\ dt.$$

Функция $\int_{x_1}^{x_2} f(t)\ dt$ ограничена на $[a;b)$, а значит, найдется такое $M \geqslant 0$, что

$$\left|\int_{x_1}^{\xi} f(t)\ dt\right| = F_1(\xi) \leqslant M, \left|\int_{\xi}^{x_2} f(t)\ dt\right| = F_2(\xi) \leqslant M$$

Тогда:

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\ dt\right| = \left|g(x_1)\int_{x_1}^{\xi} f(t)\ dt + g(x_2)\int_{\xi}^{x_2} f(t)\ dt\right| \leqslant |g(x_1)|\left|\int_{x_1}^{\xi} f(t)\ dt\right| +$$

$$+|g(x_2)|\left|\int_{\xi}^{x_2} f(t)\ dt\right| \leqslant |g(x_1)|M + |g(x_2)|M = M(|g(x_1)| + |g(x_2)|)$$

$g(x)$ монотонно стремится к нулю, следовательно, она ограничена с одной стороны $g(a)$, а с другой 0. Тогда $|g(x_2)| \leqslant |g(x_1)|$ и
$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\ dt\right| \leqslant 2M|g(x_1)|$. $g(x) \to 0$, что по определению означает
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta \in [a,b)\ \forall x \in (\delta;b) : |g(x)| < \varepsilon$. Тогда $\forall x_1, x_2 \in (\delta;b)$
$\int_{x_1}^{x_2} f(t)g(t)\ dt \leqslant 2M|g(x_1)| < 2M\varepsilon$, что есть не что иное, как критерий Коши сходимости несобственного интеграла. □

Пример 11.49. *Интеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\ dx$*, сходится при* $\alpha > 0$ *по признаку Дирихле.*

При $\alpha > 0$

1. $\int_1^x \sin x\ dx = -\cos x\Big|_1^x$ - ограничена
2. $\frac{1}{x^\alpha} \to 0$ монотонно при $x \to +\infty$.

Следовательно, по признаку Дирихле $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}$ - сходится при $\alpha > 0$.

При $\alpha \leqslant 0$ расходится. Действительно, по критерию Коши

$$\exists \varepsilon = \frac{\pi}{6} : \forall \delta > 0 \ \exists x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k > \delta$$

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx \right| \geqslant \left| \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \, dx \right| = \frac{1}{2}\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3} > \varepsilon$$

11.25 Признак Абеля

В условиях предыдущего слайда на функцию $y = f(x)g(x)$ справедлив следующий достаточный признак сходимости.

Теорема 11.50 (Признак Абеля)**.** *Интеграл* $\int_a^b f(x)g(x) \, dx$ *сходится, если:*

- *функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a; b)$ *и интеграл* $\int_a^b f(x) \, dx$ *сходится;*
- *функция* $g(x)$ *ограничена и монотонна на* $[a; b)$*.*

Доказательство. $g(x)$ - монотонная и ограничена $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса $\lim_{x \to b} g(x) = A$.

Пусть $g_0(x) = g(x) - A \Rightarrow g_0(x) \to 0$ при $x \to b$.

Тогда для $g_0(x)$ и $f(x)$ выполнены условия признака Дирихле $\Rightarrow \int_a^b f(x)g_0(x) \, dx$ - сходится.

$$\int_a^b f(x)g_0(x) \, dx = \int_a^b f(x)(g(x) - A) \, dx = \int_a^b f(x)g(x) \, dx - A \int_a^b f(x) \, dx$$

$\int_a^b f(x) \, dx$ - сходится по условию теоремы. Значит и $\int_a^b f(x)g(x) \, dx$ сходится. □

Пример 11.51. *Докажите, что при* $\alpha > 0$ *интеграл* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \arctan x \, dx$ *сходится.*

$\alpha > 0$

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \, dx$ - сходится.
2. $\operatorname{arctg} x$ - монотонна и ограничена

$\Rightarrow$ по признаку Абеля $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} \operatorname{arctg} x \, dx$ - сходится.

Глава 12

Некоторые приложения интеграла

12.1 Вычисление площади плоских тел

Предложение 12.1. *Пусть $f(x) \geqslant 0$ – неотрицательная на отрезке $[a, b]$ функция. Тогда область Φ под графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ измерима по Жордану в точности тогда, когда $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Более того, $\mu(\Phi) = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Доказательство.

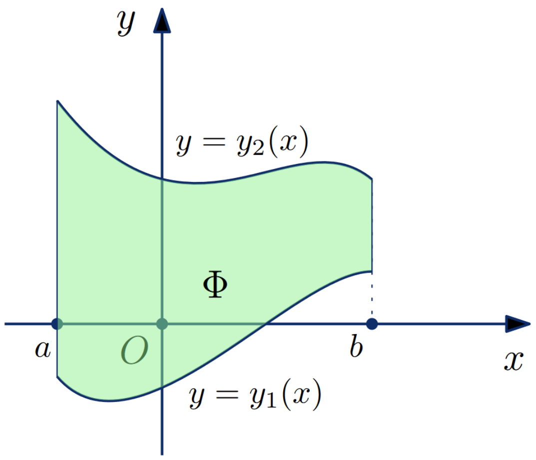
1. Пусть Φ - измерима по Жордану. Возьмём последовательность элементарных фигур (прямоугольников) $P_1, P_2, ..., P_n, ...$ таких, что $\mu(P_n) \to \mu_* = \mu(\Phi)$. Рассмотрим прямоугольники верхнего края нашей фигуры. Каждой такой фигуре можно сопоставить точку в разбиении T, т. е. $P_k \mapsto T_k$.

2.

$\square$

Теорема 12.2. *Пусть функции $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ непрерывны на $[a; b]$ и $y_2(x) \geqslant y_1(x), x \in [a; b]$. Площадь фигуры Φ, ограниченной графиками функций $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ и соответствующими отрезками прямых $x = a, x = b$, равна*

$$S = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\, dx.$$

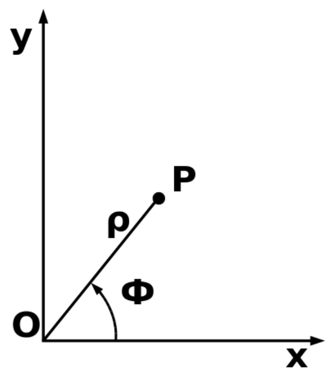


Доказательство. В предыдущем предложении мы рассматривали неотрицательные функции. Здесь мы можем функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ сдвинуть вверх на одну и ту же константу, таким образом, они станут неотрицательными, если не были таковыми до этого, приэтом искомая площадь останется неизменной.

Знаем, что мера Жордана функции $y_2(x)$ - это интеграл $\int_a^b y_2(x)\ dx$, мера Жордана функции $y_1(x)$ - это интеграл $\int_a^b y_1(x)\ dx$. Получается, что мера Жордана искомой площади равна $\int_a^b y_2(x)\ dx - \int_a^b y_1(x)\ dx = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))\ dx$. $\square$

12.2 Площадь в полярной системе координат

Полярная система координат — двумерная система координат, в которой каждая точка на плоскости определяется двумя числами — полярным углом и полярным радиусом.



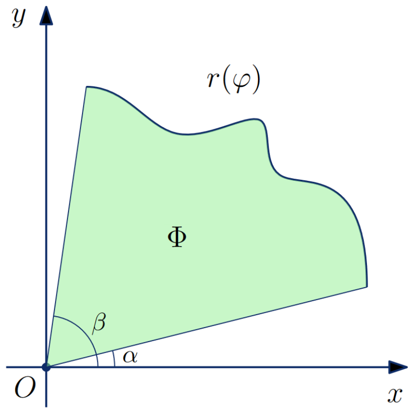
Пару полярных координат r и φ можно перевести в Декартовы координаты x и y путём применения тригонометрических функций синуса и косинуса

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

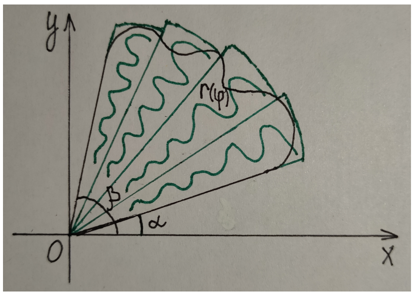
Для $r = 0$, φ может быть произвольным действительным числом. Для $r \neq 0$, чтобы получить уникальное значение φ, следует ограничиться интервалом $[0, 2\pi)$.

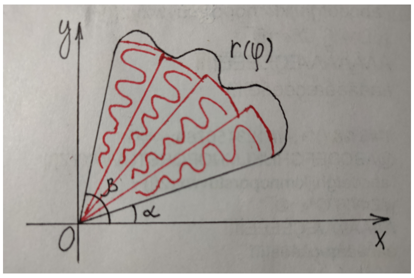
Теорема 12.3. *Площадь сектора Φ, ограниченного графиком функции $r(\varphi)$ в полярных координатах и соответствующими отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, равна*

$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)\, d\varphi.$$



Доказательство. Разделим фигуру на секторы, приэтом сначала выберем радиус сектора как минимальное расстояние до начал координат (красные секторы), а затем - как максимальное (зелёные секторы):





T - разбиение $[\alpha, \beta]$

Формулу площади круга πr^2 можно доказать, посчитав интеграл $4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx$ (фактически считаем площади четверти круга)

$$4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = 4\int_0^r r\sqrt{1-(\frac{x}{r})^2}\,dx = [\sin\varphi = \frac{x}{r} \Rightarrow r\sin\varphi = x \Rightarrow r\cos\varphi d\varphi = dx] =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\sqrt{1-\sin^2\varphi}\cdot r\cos\varphi\,d\varphi = (*),$$

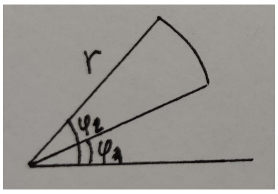
т. к. $\sin\varphi = \frac{r}{r} = 1 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}, \sin\varphi = \frac{0}{r} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$.

$$(*) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r\cos\varphi\cdot r\cos\varphi d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cos^2\varphi\,d\varphi = 4r^2\int_0^{\frac{\varphi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = 2r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi = 2r^2\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) = \pi r^2$$

Тогда площадь сектора равна

$$S_{(\varphi_1,\varphi_2)} = \frac{\pi r^2(\varphi_2-\varphi_1)}{2\pi} = \frac{r^2(\varphi_2-\varphi_1)}{2}$$



Площадь красных секторов

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n}\inf_{\varphi\in\Delta_k} r^2(\varphi)\frac{1}{2}\Delta\varphi_k = s(g,T),$$

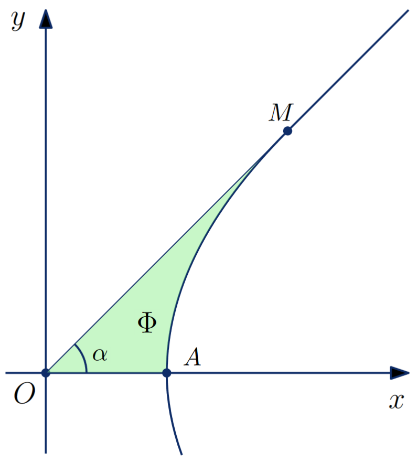
где $g(r) = \frac{r^2}{2}$, $\Delta\varphi_k = \varphi_k - \varphi_{k-1}$.

Площадь зелёных секторов

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n}\sup_{\varphi\in\Delta_k} r^2(\varphi)\frac{1}{2}\Delta\varphi_k = S(g,T)$$

$S(g,T)$ и $s(g,T)$ стремятся к интегралу. Мера Жордана зажата между ними $\Rightarrow$ тоже стремится к интегралу, т. е. к $\int_\alpha^\beta \frac{r^2(\varphi)}{2}\,d\varphi$. □

Пример 12.4. *На гиперболе $x^2-y^2=a^2$ дана точка $M(x_0;y_0)$. Найти площадь криволинейного треугольника OAM.*



Зададим в полярной системе координат гиперболу:

$$x^2-y^2=a^2 \Rightarrow r^2\cos\varphi^2-r^2\sin^2\varphi=a^2 \Rightarrow r^2(\cos\varphi^2-\sin\varphi)=a^2 \Rightarrow r^2=\frac{a^2}{\cos 2\varphi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r=\frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

Угол точки A равен 0, угол точки M равен $\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}$.

Осталось посчитать интеграл:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}}\frac{a^2}{\cos 2\varphi}\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}}\frac{\cos 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}\,d\varphi=\frac{a^2}{4}\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}}\frac{d\sin 2\varphi}{\cos^2 2\varphi}=$$

$$=\frac{a^2}{4}\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}}\frac{d\sin 2\varphi}{1-\sin^2 2\varphi}=\frac{a^2}{8}\ln\left|\frac{1-\sin 2\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}}{1+\sin 2\operatorname{arctg}\frac{y_0}{x_0}}\right|+C=(*)$$

В силу формулы $\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ получаем, что

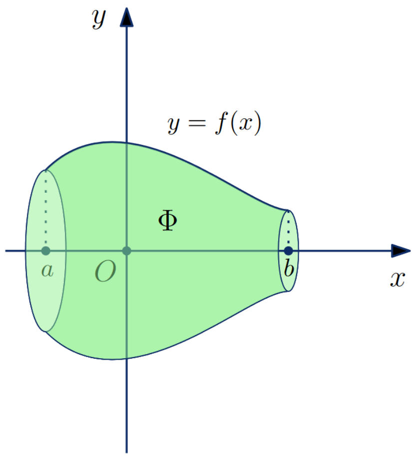
$$(*)=\frac{a^2}{8}\ln\left|\frac{1-\frac{2\frac{y_0}{x_0}}{1+\frac{y_0^2}{x_0^2}}}{1+\frac{2\frac{y_0}{x_0}}{1+\frac{y_0^2}{x_0^2}}}\right|+C$$

Лекция 34: Метрические, нормированные и евклидовы пространства

12.3 Объем тел вращения

Теорема 12.5. *Пусть функция $y=y(x)$ непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a;b]$. Объем V тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры Φ,* *ограниченной графиком функции $f(x)$, отрезками прямых $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси Ox, равен*

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx.$$



Доказательство. Обозначим через G тело, образованное вращением вокруг оси Ox фигуры Φ. Рассмотрим разбиение $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ отрезка $[a; b]$. Заметим, что фигура $C_1(T)$, состоящая из цилиндров высоты $h_k = x_k - x_{k-1}$ радиуса $R = \sup_{x \in \Delta_k} f(x)$, покрывает тело вращения G. А фигура $C_2(T)$, состоящая из цилиндров высоты $h_k = x_k - x_{k-1}$ радиуса $R = \inf_{x \in \Delta_k} f(x)$, наоборот, вписана в тело вращения G. Как известно, объем цилиндра радиуса R и высоты h равен $\pi R^2 h$. Отсюда получаем, что

$$\mu(C_2(T)) = \sum_{k=1}^{n} \pi \inf_{x \in \Delta_k} f^2(x) \Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \pi \sup_{x \in \Delta_k} f^2(x) \Delta x_k = \mu(C_1(T)).$$

В правом и левой частях неравенства стоят в точности нижняя и верхняя суммы Дарбу для функции $\pi f^2(x)$. Поскольку функция $f(x)$ непрерывна, она является интегрируемой (следствие 10.14). А значит интегрируем и ее квадрат (следствие 10.7). Тем самым получаем, что

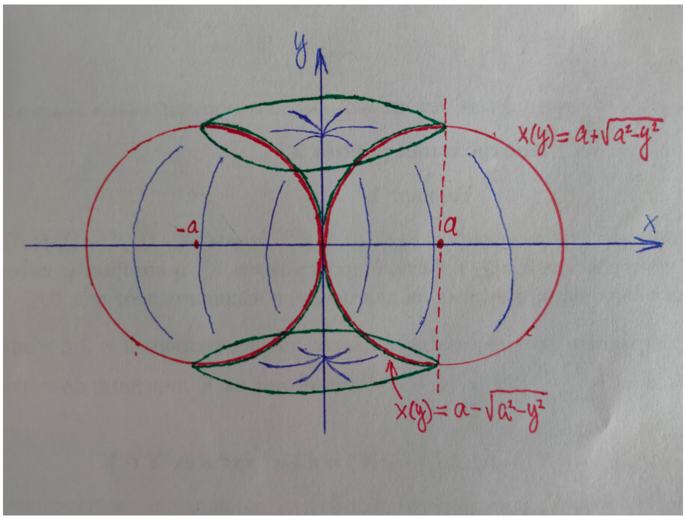
$$\mu(C_1(T)), \mu(C_2(T)) \to I = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx \text{ при } \Delta_T \to 0.$$

Это означает, что G измеримо по Жордану, и его объем равен $V = \pi \int_a^b f^2(x)\, dx$.

$\square$

Пример 12.6. *Найти объем тела, образованного при вращении круга $(x-a)^2 + y^2 \leqslant a^2$ вокруг оси Oy.*

Пояснение. *Хоть здесь фигура вращается вокруг оси OY, но нам это не помешает. $(x-a)^2+y^2 \leqslant a^2$ задаёт круг с центром в точке $(0,a)$ и радиусом a. При повороте этой красной окружности получим "бублик". Чтобы посчитать его объём, нужно вычислить объём фигуры, получающейся при вращении вокруг OY правой полуокружности $x(y)=a+\sqrt{a^2-y^2}$, и вычесть объём фигуры, получающийся при вращении вокруг OY левой полуокружности $x(y)=a-\sqrt{a^2-y^2}$ (отверстие "бублика"). Пользуясь теоремой 12.5 найдём итоговый объём.*



$$V=\pi\int_{-a}^{a}(a+\sqrt{a^2-y^2})^2-(a-\sqrt{a^2-y^2})^2\,dy = 4\pi\int_{-a}^{a}a\sqrt{a^2-y^2}\,dy =$$

$$= 4\pi a\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy$$

Отдельно считаем такой интеграл

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = a^2\int_{-a}^{a}\sqrt{1-(\frac{y}{a})^2}\,d(\frac{y}{a}) = a^2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,dt =$$

$$= a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2 x}\,d(\sin x) = a^2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d(\sin x)$$

Далее

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,d(\sin x) = \cos x\sin x\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,d(\cos x) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,dx =$$

$$= \pi - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,dx = \pi - I$$

Тогда

$$\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-y^2}\,dy = \frac{a^2\pi}{2}$$

Следовательно

$$V = 4\pi a \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\, dy = 2a^3\pi^2$$

12.4 Длина кривой

Для описания длины дуги кривой мы будем использовать иной подход — определим длину кривой через свойства, которым она должна удовлетворять.

Чтобы этот подход был более понятен, сначала реализуем его на площади фигуры.

Пусть $f \geqslant 0$ на $[a, b]$. И пусть $S(\alpha, \beta)$ площадь под графиком функции f на отрезке $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$. Разумные требования на S — это

1. аддитивность: $S(\alpha, \gamma) = S(\alpha, \beta) + S(\beta, \gamma)$ при $a \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant b$;

2. монотонность по включению: $\inf\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha) \leqslant S(\alpha, \beta) \leqslant \sup\limits_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)(\beta-\alpha)$.

Предложение 12.7. *Пусть f интегрируема по Риману на $[a, b]$. При выполнении выше описанных условий $S(a, b) = \int_a^b f(x)\, dx$.*

Доказательство. $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ - разбиение $[a, b]$, $I = \int_a^b f(x)\, dx$.

$$\sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in\Delta_k} f(x)\Delta x_k \leqslant (\text{аддитивность}) \sum_{k=1}^{n} S(x_{k-1}, x_k) = (\text{монотонность по включению})$$

$$= S(a, b) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in\Delta_k} f(x)\Delta x_k (\text{аналогично})$$

Если функция интегрируема, то

$$\sum_{k=1}^{n} \inf_{x\in\Delta_k} f(x)\Delta x_k \to I, \sum_{k=1}^{n} \sup_{x\in\Delta_k} f(x)\Delta x_k \to I \Rightarrow S(a, b) \to I \Rightarrow S(a, b) = I$$

(т. к. площадь константа). □

Определение 12.8. *Пусть $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ - гладкая кривая, т.е. $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ и функции $x, y, z \in C^1([a, b])$ (множество функций, у которых первая производная непрерывна). Пусть $\ell(a, b)$ — длина пути соответствующая отрезку $[a, b]$. Тогда длина кривой удовлетворяет следующим требованиям*

1. $\ell(\alpha, \gamma) = \ell(\alpha, \beta) + \ell(\beta, \gamma)$ *при* $a \leqslant \alpha < \beta < \gamma \leqslant b$;

2. $\inf\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |v(t)|(\beta-\alpha) < \ell(\alpha,\beta) \leqslant \sup\limits_{t\in[\alpha,\beta]} |v(t)|(\beta-\alpha)$, *где* $v(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

Теорема 12.9. *Длина кривой, заданной параметрически уравнениями*

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [a; b],$$

где $x(t), y(t), z(t)$ *- непрерывно дифференцируемые на* $[a; b]$ *функции, равна*

$$s = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\, dx$$

Доказательство. Задаём прямую в $\mathbb{R}^3$, введя при этом параметр $t \in \mathbb{R}$ и точки $(x(t), y(t), z(t))$. Во втором пункте $v(t), t \in [\alpha, \beta]$ - это скорость движения по кривой на временном отрезке $[\alpha, \beta]$. Тогда $|v(t)|(\beta - \alpha)$ - это длина кривой на отрезке $[\alpha, \beta]$. Используя физическую интерпретацию, утверждаем, что скорость - производная по каждой координате: $v = (x'(t), y'(t), z'(t))$. Значит $|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$.

Рассмотрим разбиение времени $T = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, Δt_k - длина отрезка разбиения. По определению

$$\inf_{t\in\Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \leqslant \ell(\Delta t_k) \leqslant \sup_{t\in\Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k$$

По первому свойству

$$\sum_{k=1}^{n} \inf_{t\in\Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \leqslant \ell(a, b) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sup_{t\in\Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k$$

$x(t), y(t), z(t)$ - непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции $\Rightarrow$ функция $|v(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$ - непрерывна. Значит она интегрируема.

Выше мы записали интегральные суммы Дарбу для этой функции $\Rightarrow$

$$\sum_{k=1}^{n} \inf_{t\in\Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \to I, \sum_{k=1}^{n} \sup_{t\in\Delta_k} |v(t)| \cdot \Delta t_k \to I, I = \int_a^b |v(t)|\, dt.$$

$\square$

Глава 13

Предел функции нескольких переменных

13.1 Метрическое пространство

Определение 13.1. *Пусть X - множество. Функция $d : X \times X \to [0, +\infty)$ называется* *метрикой, если*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)\ \forall x, y \in X$;
3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)\ \forall x, y, z \in X$.

Пара (X, d) называется метрическим пространством.

Пример 13.2.

- *Дискретная метрика: $d(x, y) = 0$, если $x = y$, и $d(x, y) = 1$ во всех остальных случаях.*
- *Вещественные числа с функцией расстояния $d(x, y) = |y - x|$ и евклидово пространство являются полными метрическими пространствами.*
- *Расстояние Хэмминга в теории кодирования.*

  (Расстояние Хэмминга - функция расстояния между двоичными словами, которая равна количеству битов, в которых эти слова различаются. Другими словами - это минимальная длина пути от одного двоичного слова до другого в булевом кубе)
- *Манхэттенская метрика: $d(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i|$, где $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)$, $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, ..., q_n)$ — векторы.*

13.2 Нормированное пространство

Определение 13.3. *Пусть X — линейное пространство. Функция $||\cdot|| : X \to [0, +\infty)$ называется нормой, если*

1. $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $||\lambda x|| = |\lambda| ||x|| \ \forall x \in X$;

3. $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \ \forall x, y \in X$.

Пара $(X, ||\cdot||)$ называется нормированным пространством.

Всякое нормированное пространство является метрическим с метрикой $d(x, y) = ||x - y||$.

Проверяем свойства метрического пространства.

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow ||x - y|| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

2. $d(x, y) = ||x - y|| = |-1| ||y - x|| = ||y - x||$

3. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \Leftrightarrow ||x - z|| \leqslant ||x - y|| + ||y - z|| \Leftrightarrow ||a + b|| \leqslant ||a|| + ||b||$, где $a = x - y, b = y - z$.

13.3 Евклидово пространство

Определение 13.4. *Пусть X — линейное пространство. Функция $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$ называется скалярным произведением, если для всех $x, y, z \in X$ и всех $a, b \in \mathbb{R}$ выполнены следующие условия:*

1. $\langle x, x \rangle \geqslant 0$ *и* $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

3. $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$.

Линейное пространство X со скалярным произведением называется евклидовым.

Пример 13.5. *На линейном пространстве $\mathbb{R}^k$ всех упорядоченных наборов $(x_1, ..., x_k)$ задано скалярное произведение $\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^{k} x_j y_j$. Тем самым, на $\mathbb{R}^k$ задана естественная евклидова метрика*

$$||x - y|| := \sqrt{|x_1 - y_1|^2 + ... + |x_k - y_k|^2}.$$

13.4 Неравенство Коши–Буняковского

Лемма 13.6 (Неравенство Коши–Буняковского)**.** *Пусть* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *скалярное произведение на линейном пространстве* X*, тогда*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Доказательство. Рассмотрим скалярный квадрат: $\langle x+yt, x+yt\rangle \geqslant 0, t \in \mathbb{R}, x, y \in X$. Воспользуемся линейностью

$$0 \leqslant \langle x + yt, x + yt\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, yt\rangle + \langle yt, x\rangle + \langle yt, yt\rangle = \langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle$$

Если $\vec{y} = 0$, то просто подставим в исходное неравенство и получим $0 \leqslant 0$. Теперь пусть $\vec{y} \neq 0$. Чтобы неравенство $\langle x, x\rangle + 2t\langle x, y\rangle + t^2\langle y, y\rangle \geqslant 0$ выполнялось, необходимо, чтобы $D = 4\langle x, y\rangle^2 - 4\langle y, y\rangle\langle x, x\rangle \leqslant 0$. Тогда

$$\langle x, y\rangle^2 \leqslant \langle y, y\rangle\langle x, x\rangle$$

□

Следствие 13.7. *На евклидовом пространстве функция* $||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ *является нормой.*

1. По свойству скалярного произведения $||x|| = \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $||\lambda x|| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x\rangle} = |\lambda|\sqrt{\langle x, x\rangle} = |\lambda|||x||$
3. $||x+y||^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle+2\langle x, y\rangle+\langle y, y\rangle \leqslant$ (нер-во Коши-Буняковского) $\langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle = (\sqrt{\langle x, x\rangle} + \sqrt{\langle y, y\rangle})^2 = (||x|| + ||y||)^2$

13.5 Предел в метрическом пространстве

Определение 13.8. *Пусть* (X, d) *метрическое пространство.*

1. *Множество*
$$B_r(x_0) := \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$
называется открытым шаром радиуса r.
2. *Последовательность точек* $x_n \in X$ *называется сходящейся к точке* x*, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *найдется такой номер* $N(\varepsilon)$*, что* $d(x, x_n) < \varepsilon$ *для каждого* $n \geqslant N(\varepsilon)$.
3. *Точка* x *называется предельной для множества* $M \subset X$*, если для всякого* $\varepsilon > 0$ *выполнено* $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \varnothing$.

4. *Точка x называется изолированной для множества $M \subset X$, если $\exists \varepsilon > 0$, такое что $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) = \varnothing$.*

Лемма 13.9. *Пусть (X, d) метрическое пространство. Тогда*

1. *если $x_n \to x, y_n \to y$, то $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$;*

2. *предел сходящейся последовательности единственен.*

Доказательство. 1. Пусть $x_n \to x, y_n \to y$

$$|d(x_n, y_n) - d(x, y)| = |d(x_n, y_n) - d(x_n, y) + d(x_n, y) - d(x, y)| \leqslant |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| +$$

$$+ |d(x_n, y) - d(x, y)| \ (*)$$

$$d(x_n, y_n) \leqslant d(x_n, y) + d(y_n, y) \Rightarrow d(x_n, y_n) - d(x_n, y) \leqslant d(y_n, y)$$

$$d(x_n, y) \leqslant d(x_n, x) + d(x, y) \Rightarrow d(x_n, y) - d(x, y) \leqslant d(x_n, x)$$

$$(*) : |d(x_n, y_n) - d(x_n, y)| + |d(x_n, y) - d(x, y)| \leqslant d(y_n, y) + d(x_n, x)$$

Т. к. $d(y_n, y) \to 0, d(x_n, x) \to 0$, то $d(y_n, y) + d(x_n, x) \to 0 \Rightarrow d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

2. Пусть $x_n \to x, x_n \to y$. По первому пункту $d(x_n, x_n) \to d(x, y)$. Т. к. $d(x_n, x_n) = 0$, то $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$ (по определению).

□

Лекция 35: Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Из второго пункта определения 13.8 получаем, что для $x_n \in \mathbb{R}^n$

$$x_n \to x \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n \geqslant N \to ||x_n - x|| < \varepsilon$$

13.6 Метрическое пространство

Замечание 13.10. *На $\mathbb{R}^k$ справедливы соотношения*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j| \leqslant ||x|| \leqslant \sqrt{k} \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j|$$

для векторов $x = (x_1, ..., x_k)$. Тем самым, последовательность $x_n \to x$ в $\mathbb{R}^k$ тогда и только тогда, когда $(x_n)_j \to x_j$.

Пояснение. $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n, ||x|| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$ *(рассматриваем евклидово пространство, см. пример 13.5)*

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j| = \sqrt{0 + ... + 0 + \max_{1 \leqslant j \leqslant n} x_j^2 + 0 + ... + 0} \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$$

Получили неравенство выше.

Пусть $x_n \to x (\Leftrightarrow x_n - x \to 0) \Leftrightarrow ||x_n - x|| \to 0$. Поэтому будем рассматривать пределы векторов, которые стремятся к нулевому вектору.

1. *$\forall j \ x_j \to 0 \Rightarrow x \to 0$, т. к. $||x|| \leqslant \sqrt{n} \max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j|$.*
2. *$\forall j \ x \to 0 \Rightarrow ||x|| = 0 \Rightarrow x_j \to 0$, т. к. $\max_{1 \leqslant j \leqslant k} |x_j| \leqslant ||x||$.*

Предложение 13.11. *Пусть $x_n \to x, y_n \to y$ в нормированном пространстве $(X, || \cdot ||)$ и $\alpha_n \to \alpha_0$ в $\mathbb{R}$. Тогда $x_n + y_n \to x + y$ и $\alpha_n x_n \to \alpha_0 x$ в X.*

Доказательство. $||x_n + y_n - (x + y)|| \leqslant ||x_n - x|| + ||y_n - y|| \to 0 + 0 = 0$

$||\alpha_n x_n - \alpha_0 x|| = ||\alpha_n x_n - \alpha_n x + \alpha_n x - \alpha_0 x|| \leqslant ||\alpha_n x_n - \alpha_n x|| + ||\alpha_n x - \alpha_0 x|| = |\alpha_n| \cdot ||x_n - x|| + |\alpha_n - \alpha_0| \cdot ||x|| \to |\alpha_0| \cdot 0 + 0 \cdot ||x|| = 0$ □

13.7 Предел функции по Гейне

Определение 13.12 (предела функции по Гейне)**.** *Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) два метрических пространства, a - предельная точка множества X. Пусть $f : X \setminus \{a\} \to Y$. Говорят, что $A \in Y$ предел функции f при $x \to a$, если для каждой последовательности $x_n \in X \setminus \{a\}, x_n \to a$, выполнено $f(x_n) \to A$. Пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ при $x \to a$.*

Предложение 13.13. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$*, то* $A = B$*.*

Доказательство. a - предельная точка $\Rightarrow \exists x_n \in X\backslash\{a\} : x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to A, f(x_n) \to B$ по определению предела функции по Гейне. Но $y_n = f(x_n)$ - последовательность векторов. А мы уже выяснили, что если у последовательности векторов есть предел, то он один (лемма 13.9). □

13.8 Предел функции по Коши

Определение 13.14 (предела функции по Коши)**.** *Пусть* (X, d_X) *и* (Y, d_Y) *два метрических пространства,* a *— предельная точка множества* X*. Пусть* $f : X \setminus \{a\} \to Y$*. Говорят, что* $A \in Y$ *предел функции* f *при* $x \to a$*, если для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$*, что* $d_Y(f(x), A) < \varepsilon$ *для каждого такого* $x \in X$*, что* $0 < d_X(x, a) < \delta$*.*

13.9 Эквивалентность определений предела

Теорема 13.15. *Определения по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство.

К $\Rightarrow$ Г Пусть $A = \lim_{x\to a} f(x)$ по Коши.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(a) \to ||f(x) - A|| < \varepsilon$$

Пусть $x_n \in X\backslash\{a\}, x_n \to a \Rightarrow \exists N : \forall n \geqslant N \to ||x_n - a|| < \delta \Leftrightarrow x_n \in B'_\delta(a) \Rightarrow \forall n \geqslant N \to ||f(x_n) - A|| < \varepsilon \Rightarrow f(x_n) \to A$

Г $\Rightarrow$ К $\Leftrightarrow \neg$К $\Rightarrow \neg$Г

$$\neg\text{К} \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0\ \exists x \in B'_\delta(a) : ||f(x) - A|| \geqslant \varepsilon$$

Для каждого $\delta = \frac{1}{n}\ \exists x_n \in B'_{\frac{1}{n}}(a) : ||f(x_n) - A|| \geqslant \varepsilon$

Но $x_n \in X\backslash\{a\}, x_n \to a$ и $f(x_n) \not\to A \Rightarrow \neg$Г.

□

13.10 Арифметические свойства предела

Теорема 13.16 (Арифметические свойства предела). *Пусть* (X, d_X) *метрическое пространство,* a *— предельная точка* X*. Пусть* $f, g : X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^k, \alpha : X \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$*. Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A, \lim\limits_{x\to a} g(x) = B, \lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = \alpha_0$*, то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B, \lim\limits_{x\to a}(\alpha(x)f(x)) = \alpha_0 A$.

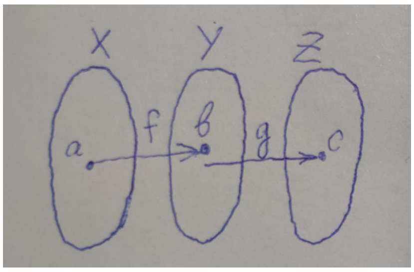
Доказательство. По определению предела функции по Гейне, если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X\setminus\{a\}, x_n \to a$ выполнено $f(x_n) \to A, g(x_n) \to B \Rightarrow f(x_n) + g(x_n) \to A + B$, т. к. $f(x_n), g(x_n)$ - векторы (см. предложение 13.11).

По определению предела функции по Гейне, если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X\setminus\{a\}, x_n \to a$ выполнено $f(x_n) \to A, \alpha(x_n) \to \alpha_0 \Rightarrow \alpha(x_n)f(x_n) \to \alpha_0 A$, т. к. $f(x_n)$ - вектор (см. предложение 13.11). □

13.11 Теорема о пределе сложной функции

Теорема 13.17 (О пределе сложной функции). *Пусть* X, Y, Z *— метрические пространства,* a *— предельная точка* X, b *— предельная точка* Y*. Пусть* $f : X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{b\}$ *и* $g : Y \setminus \{b\} \to Z$*. Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ *и* $\lim\limits_{y\to b} g(y) = c$*, то* $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = c$*.*

Доказательство.



По определению предела функции по Гейне если a - предельная точка, то $\forall x_n \in X\setminus\{a\}, x_n \to a$ выполнено $f(x_n) \in Y\setminus\{b\}, f(x_n) \to b \Rightarrow g(f(x_n)) \to c$. □

Важно: исключение из множеств X и Y точек a и b в функции $f : X \setminus \{a\} \to Y \setminus \{b\}$ обязательно. Контрпример:

$$f(x) = 0\ \forall x, g(y) = \begin{cases} 1, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Тогда $\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 0, \lim_{y\to 0} g(y) = 1$.

13.12 Непрерывность функции

Определение 13.18. *Пусть (X, d_X) и (Y, d_Y) два метрических пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in X$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ или x_0 — изолированная точка.*

Замечание 13.19.

1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в точке a, то для всякой последовательности $x_n \to a$ выполнено $f(x_n) \to f(a)$. Это отличается от определения предела функции по Гейне тем, что не требуется брать x_n отличными от a.*

2. *То же верно и для определения предела по Коши в случае непрерывности: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что $d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$, если $d_X(x, x_0) < \delta$.*

Пояснение.

1. *Если x_0 - изолированная точка, то любая последовательность, стремящаяся к x_0, состоит только из точек $x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.*

   Пусть $\forall x_n (\neq x_0) \to x_0$ $f(x_n) \to f(x_0)$. От противного: пусть $\exists x_n \to x_0 : f(x_n) \not\to f(x_0)$, т. е.

   $$\exists \varepsilon > 0\ \forall N : \exists n \geqslant N \to ||f(x_n) - f(x_0)|| \geqslant \varepsilon \Rightarrow$$

   $\Rightarrow x_n \neq x_0$(*т. к.* $\varepsilon > 0$) $\Rightarrow \exists x_n (\neq x_0) \to x_0$ $||f(x_n) - f(x_0))|| \geqslant \varepsilon -$*противоречие.*

2. *Если x_0 - изолированная, то найдётся такое δ-окрестность, что других точек в ней нет:*

   $$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \to ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$$

   Если x_0 - предельная, то $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(x_0) \to ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$ - условие верно, т. к. оно строже.

   В обратную сторону.

   Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B_\delta(x_0) \to ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$ - верно, то изолированная точка x_0 подходит.

   Теперь возьмём ту же δ что и в условии выше. Тогда для $x \neq x_0$ верно $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x \in B'_\delta(x_0) \to ||f(x) - f(x_0)|| < \varepsilon$, а для $x = x_0$ $||f(x) - f(x_0)|| = 0 < \varepsilon$ - тоже верно.

13.13 Непрерывность композиции

Предложение 13.20. *Пусть* $f : X \to Y$ *непрерывна в точке* $a \in X$, $g : Y \to Z$ *непрерывна в точке* $f(a) \in Y$. *Тогда композиция* $g \circ f : X \to Z$ *непрерывна в точке* a.

Доказательство. Если точка a - изолированная на множестве X, то тогда любая функция в ней непрерывна. Если она не изолированная, т. е. предельная, то рассмотрим предел в этой точке.

$f(x)$ - непрерывна в точке $a \Rightarrow \forall x_n \to a$ выполнено $f(x_n) \to f(a)$.

$g(x)$ - непрерывна в точке $f(a) \Rightarrow \forall y_n \to f(a)$ выполнено $g(y_n) \to g(f(a))$

Тогда $\forall x_n \to a, f(x_n) \to f(a) \Rightarrow g(f(x_n)) \to g(f(a))$ (по теореме о пределе сложной функции). □

Предложение 13.21. *Пусть* $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *— непрерывные в точке* a *функции. Тогда* $f + g$ *непрерывна в точке* a. *Если* $m = 1$, *то и* $f \cdot g$ *непрерывна в точке* a.

Вообще здесь не очень удачная формулировка. Точнее будет сказать, что $f, g : X \to \mathbb{R}^m, X \subseteq \mathbb{R}^k$.

Доказательство. Если a - изолированная точка, то любая функция в ней непрерывна, в частности $f + g$.

В противном случае если a - предельная точка, то по теореме 13.16 предел суммы функций равен сумме пределов функций.

Если $m = 1$, то обе функции переводят вектор в скаляр.

Если a - изолированная точка, то любая функция в ней непрерывна, в частности $f \cdot g$. В случае предельной точки к множеству X пользуемся арифметическими свойствами предела (теорема 13.16). □

Глава 14

Дифференцируемые функции нескольких переменных

Лекция 36: Дифференцируемость функций нескольких переменных

14.1 Дифференцируемое отображение

Определение 14.1. *Отображение $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ называется дифференцируемым в точке x, если для каждого $h \in \mathbb{R}^k$*

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + \alpha(h)||h||,$$

где $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ - линейное отображение, $\lim\limits_{||h|| \to 0} ||\alpha(h)|| = 0$.

Линейное отображение L называют дифференциалом f в точке x и обозначают df.

14.2 Непрерывность дифференцируемого отображения

Замечание 14.2. *Напомним, что отображение $L : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ называется линейным, если*

$$L(a_1 h_1 + a_2 h_2) = a_1 L h_1 + a_2 L h_2$$

для произвольных векторов $h_1, h_2 \in \mathbb{R}^k$ и произвольных чисел $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Если в $\mathbb{R}^k$ фиксирован базис $e := \{e_1, ..., e_k\}$, а в $\mathbb{R}^m$ фиксирован базис $e' := \{e'_1, ..., e'_m\}$, то линейное отображение L представимо в виде $L(h) = L(e_1)h_1 + ... + L(e_k)h_k$, где $h = (h_1, ..., h_k)^T$ в базисе e, а векторы $L(e_j) = (a_{1,j}, ..., a_{m,j})^T$ в базисе e'. В частности, каждое линейное отображение при фиксированных базисах e и e' в $\mathbb{R}^k$ и в $\mathbb{R}^m$ соответственно записывается с помощью матрицы $A = (a_{i,j})$.

Кроме того,

$$||Lh|| = ||L(e_1)h_1 + ... + L(e_k)h_k|| \leqslant (||L(e_1)|| + ... + ||L(e_k)||) \max_{1\leqslant j\leqslant k} |h_j| = C \max_{1\leqslant j\leqslant k} |h_j| \leqslant$$

$$\leqslant C||h||$$

и каждое линейное отображение непрерывно на $\mathbb{R}^k$.

(Если $||h|| \to 0$, *то* $||Lh|| \to 0$. *Но если линейное отображение непрерывно в 0, то оно непрерывно в любой точке, потому что при* $g \to h$ $||L(g) - L(h)|| = ||L(g-h)|| \to 0$*)*

Следствие 14.3. *Если отображение* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ *дифференцируемо в точке* x, *то оно непрерывно в точке* x.

Доказательство. Пользуясь определением дифференцируемости, $||f(x+h)-f(x)|| = ||L(h) + \alpha(h)||h|||| \leqslant ||L(h)|| + ||\alpha(h)|| \cdot ||h||$

$||\alpha(h)|| \cdot ||h|| \to 0$ при $h \to 0$ и, как мы выяснили, $||L(h)|| \to 0 \Rightarrow ||f(x+h) - f(x)|| \to 0 \Rightarrow$ отображение непрерывно в точке x. □

Замечание 14.4. *Т.к. дифференцируемость* f *в точке* x *равносильна тому, что*

$$\lim_{h\to 0} \frac{||f(x+h) - f(x) - Lh||}{||h||} = 0$$

и т.к. сходимость по норме равносильна покоординатной сходимости (предложение 13.11), то при фиксированном базисе $e' := \{e'_1, ..., e'_m\}$ *в* $\mathbb{R}^m$ *дифференцируемость отображения* f *равносильно дифференцируемости каждой координаты* f_j *в точке* x. *В этом случае* $Lh = (L_1h, ..., L_mh)$ *в базисе* e', *где* $L_j = df_j$ *- дифференциал* j*-й координаты.*

Доказательство.

$$L(h) = \begin{pmatrix} \frac{||f_1(x+h)-f_1(x)-L_1(h)||}{||h||} \\ ... \\ \frac{||f_m(x+h)-f_m(x)-L_m(h)||}{||h||} \end{pmatrix}$$

Необходимо для дифференцируемости, чтобы этот столбец стремился к нулевому вектору. Но это верно в точности когда каждая координата стремиться к нулю $\frac{||f_i(x+h)-f_i(x)-L_i(h)||}{||h||} \to 0$. □

14.3 Производная по направлению

Лемма 14.5. *Если отображение $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ дифференцируемо в точке x, то для каждого вектора $h \in \mathbb{R}^k$ (f, x, h фиксируем) функция $\varphi : t \mapsto f(x+th), t \in \mathbb{R}$ дифференцируема в точке 0 и $\dfrac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0} = df(h)$. В частности, дифференциал определен единственным образом.*

Доказательство. Рассмотрим приращение функции в точках t и 0

$$f(x+th) - f(x) = L(th) + \alpha(th)||th||$$

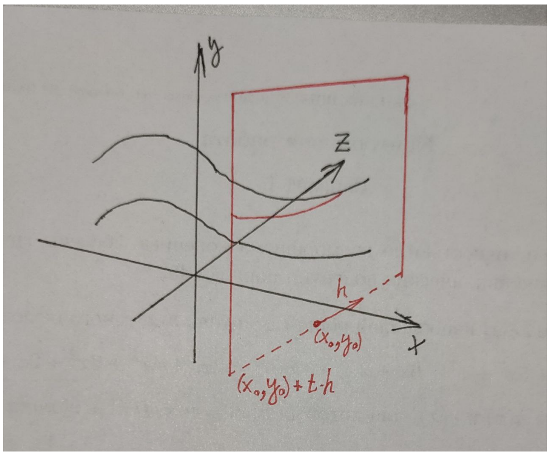
$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \frac{tL(h) + t\alpha(th)||h||}{t} = L(h) + \alpha(th)||h||$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} L(h) + \alpha(th)||h|| =$$

$$\varphi'(0) = \frac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0} = L(h) = df(h)$$

Причём на каждом векторе h мы однозначно знаем, чему равняется производная $df(h) = \frac{d}{dt} f(x+th)\Big|_{t=0}$, в одномерном случае мы знаем, что производная единственна. □

Определение 14.6. *Пусть $||v|| = 1$. Производная $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x) := \dfrac{d}{dt} f(x+tv)\Big|_{t=0}$ называется производной по направлению вектора v.*



Если мы зададим функцию в трёхмерном пространстве, то её график - это поверхность. Теперь если мы отметим точку (x_0, y_0) и направление h единичной длины (важно, иначе функция в сечении растянется или сожмётся), то $(x_0, y_0) + th$ заметает всю прямую. Тогда если мы посмотрим на значения функции в этих точках прямой, то мы сделаем сечение этой функции. Получим знакомую функцию в двумерной системе координат, у которой мы уже умеем находить производную.

Пример 14.7. *Пусть*

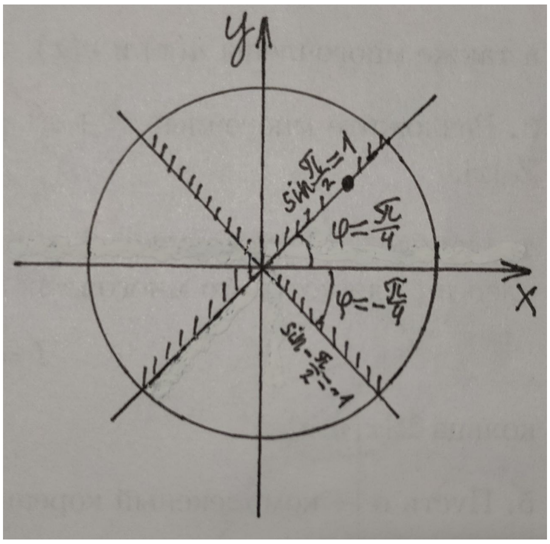
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, (x,y) \neq (0,0), \\ 0, (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Функция f разрывна в нуле, а значит не дифференцируема, но в точке (0, 0) существуют обе частных производных. Действительно, если $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$, то функция $f(x,y) = \sin 2\varphi$. Таким образом, $f(x,y)$ в любой окрестности точки (0, 0) принимает значения ± 1, но $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx}(x,0) = 0$. Аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Пояснение.

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, f(x,y) = \frac{2r^2\sin\varphi\cos\varphi}{r^2} = \sin 2\varphi$$

Значит значение функции в полярной системе координат не зависит от $r \Rightarrow$ в любой окрестности точки (0, 0) $\exists\varphi$, в котором $f(x,y)$ принимает значения ± 1, поэтому функция не непрерывна в нуле, тем более не дифференцируема (следствие 14.3).



Производная вдоль x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t\to 0}\frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

Аналогично производная вдоль y равна 0.

14.4 Частная производная

Определение 14.8. *Частной производной* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ *функции* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *в точке* $x = (x_1, ..., x_k)$ *называется производная по направлению вектора* e_j*, т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{d}{dt} f(x_1, ..., x_{j-1}, t, x_{j+1}, ..., x_k)\Big|_{t=x_j}.$$

Пояснение. *По определению производной по направлению*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \frac{d}{dt}\Big(f(x+te_j)\Big)\Big|_{t=0} = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+te_j)-f(x)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j + t, x_{j+1}, ..., x_k) - f(x_1, ..., x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, ..., x_k)}{t} =$$

$$= \frac{d}{dy} f(x_1, ..., x_{j-1}, y, x_{j+1}, ..., x_k)\Big|_{y=t+x_j}$$

14.5 Градиент

Замечание 14.9. *При фиксированном базисе* $e = \{e_1, ..., e_k\}$ *в* $\mathbb{R}^k$ *линейные функционалы* $dx_1, ..., dx_n$ *оказываются сопряженным базисом к* e*, т.е.* $dx_i(e_j) = \delta_{i,j}$*. Таким образом,*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k.$$

Пояснение. $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$(e_1, ..., e_k)-$ *фиксируем базис.*

$x_1 = \xi(x) = \xi(x_1, ..., x_k)$

$dx_1 = d\xi$

$\xi(x+h) - \xi(x) = x_1 + h_1 - x_1 = h_1 = d\xi(h) + \alpha(h)||h||$

Применим df *к* $h = h_1e_1 + ... + h_ke_k$ *и воспользуемся линейностью.*

$$df(h) = df(e_1)h_1 + df(e_2)h_2 + ... + df(e_k)h_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}h_k = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1(h) + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k(h)$$

Тогда

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}dx_k$$

Определение 14.10. *Градиентом функции* f *называется вектор* $\nabla f := (\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n})$.

14.6 Свойства градиента

Предложение 14.11. *Производная по направлению вектора v равна*

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

Доказательство. Из замечания 14.9

$$\frac{\partial f}{\partial v} = df(v) = \frac{\partial f}{\partial x_1} v_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k} v_k \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x), v \rangle.$$

□

Лемма 14.12. *Если f дифференцируема в точке x и $df \neq 0$, то наибольшее значение производной вдоль единичного вектора v (т.е. $||v|| = 1$) достигается на векторе $||\nabla f(x)||^{-1} \nabla f(x)$.*

Доказательство. По неравенству Коши-Буняковского

$$|\langle \nabla f, v \rangle|^2 \leqslant ||\nabla f|| ||v||$$

Максимум достигается при равенстве, то есть при $v = \frac{\nabla f}{||\nabla f||}$ □

Лекция 37: Частные производные высокого порядка

14.7 Множество уровня

Определение 14.13. *Множеством уровня называется*

$$\gamma(h) = \{(x_1, ..., x_n) \mid \varphi(x_1, ..., x_n) = h\}.$$

Предложение 14.14. *Градиент функции φ в точке $\vec{x}^0$ перпендикулярен её множеству уровня, проходящей через эту точку.*

Пока без доказательства

14.8 Матрица Якоби

Замечание 14.15. *В случае отображения $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ при фиксированных базисах e и e′ в $\mathbb{R}^k$ и в $\mathbb{R}^m$ соответственно, компоненты матрицы дифференциала df имеют $a_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, т.е. по строчкам написаны градиенты $\nabla f_i(x)$.*

Определение 14.16. *При фиксированных базисах e в $\mathbb{R}^k$ и e′ в $\mathbb{R}^m$ матрицу, соответствующую линейному отображению df, называют матрицей Якоби отображения f в точке x и обозначают $J_f(x)$.*

14.9 Достаточное условие дифференцируемости

Теорема 14.17. *Если все частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ существуют в окрестности точки x_0 и непрерывны в этой точке, то f — дифференцируема в точке x_0.*

Доказательство. Индукция по числу переменных.

$k = 1$. У функции от одной переменной одна частная производная и она равна производной.

Пусть утверждение верно для некоторого k, докажем для $k + 1$.

$a = (a_1, a_2, ..., a_{k+1})$

$$f(a_1 + h_1, ..., a_{k+1} + h_{k+1}) - f(a) = f(a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1} + h_{k+1}) -$$

$$-f(a_1 + h_1, .., a_k + h_k, a_{k+1}) + f(a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1}) - f(a)$$

Пусть

$$\sigma = f(a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1} + h_{k+1}) - f(a_1 + h_1, .., a_k + h_k, a_{k+1})$$

$$\rho = f(a_1 + h_1, ..., a_k + h_k, a_{k+1}) - f(a)$$

Считаем, что функция ρ от k переменных и применяем предположение индукции. Расписываем определение дифференцируемости и формулы дифференциала через частные производные:

$$\rho = f(a)+\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k+\alpha(h)||h||-f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k+o(||h||)$$

(Важные моменты: $f(a+h) \to f(a)$ при $h \to 0$; у h всего $k+1$ координат, поэтому если $h \to 0$, то его первые k координат тоже стремятся к нулю)

По теореме Лангранжа $\exists\xi : 0 < \xi < h_{k+1}$

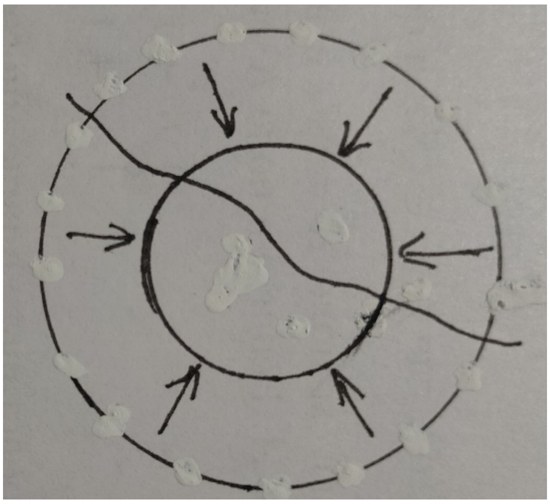
$$\sigma = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1+h_1, ..., a_k+h_k, a_{k+1}+\xi)h_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1} - \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1+h_1, ..., a_k+h_k, a_{k+1}+\xi)h_{k+1} = \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)h_{k+1} + \Bigg(- \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1+h_1, ..., a_k+h_k, a_{k+1}+\xi)\Bigg)h_{k+1}$$

Пользуясь непрерывностью частных производных и тем, что $h_i \to 0$, $0 < \xi < h_{k+1}$, получаем, что

$$\Bigg(- \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a_1+h_1, ..., a_k+h_k, a_{k+1}+\xi)\Bigg) = \alpha(h)$$

$$\alpha(h)||h|| = o(||h||) \Rightarrow \rho+\sigma = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)h_1+...+\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)h_k+\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(a)+o(||h||)$$

Хочется заметить, что когда мы используем теорему Лангранжа необходимо, чтобы функция не только была дифференцируема, но и непрерывна на каком-то отрезке. Наша функция дифференцируема в некоторой окрестности точки a, поэтому можно взять точки h_k, которые лежат внутри этой окрестности. Для того, чтобы добиться непрерывности в каждой точке, возьмём окрестность поменьше (с включённой границей), так, чтобы эти точки h_k остались всё ещё в окрестности.



□

14.10 Частные производные высокого порядка

Определение 14.18. *Пусть* $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *и предположим, что в некоторой окрестности* $B_r(x_0)$ *точки* x_0 *существует частная производная* $\frac{\partial f}{\partial x_j}$*. Если функция* $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}$ *в точке* x_0 *имеет частную производную по переменной* x_i*, то эта частная производная* $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0)$ *называется частной производной второго порядка по переменным* x_j *и* x_i *и обозначается* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0)$*.*

Частная производная порядка k *определяется рекурсивно:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2} \cdots \partial x_{i_k}}\right).$$

Замечание 14.19. *Частные производные* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$*, вообще говоря, могут не совпадать!*

14.11 Теорема Шварца

Теорема 14.20 (Шварц)**.** *Пусть смешанные частные производные* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *и* $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *существуют в окрестности точки* (x_0, y_0) *и непрерывны в этой точке. Тогда их значения в точке* (x_0, y_0) *совпадают.*

Доказательство. Рассмотрим

$$F(t,s) = f(x_0+t, y_0+s) - f(x_0+t, y_0) - f(x_0, y_0+s) + f(x_0, y_0)$$

Пусть

$$\psi(\tau) = f(x_0+\tau, y_0+s) - f(x_0+\tau, y_0)$$

По теореме Лагранжа $\exists c : 0 < c < t$

$$F(t,s) = \psi(t) - \psi(0) = \psi'(c) \cdot t$$

$$\psi'(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c, y_0+s) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c, y_0)$$

$$\varphi(u) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+c, y_0+u)$$

По теореме Лагранжа $\exists d : 0 < d < s$

$$\psi'(c) = \varphi(s) - \varphi(0) = \varphi'(d) \cdot s$$

$$\varphi'(d) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c, y_0 + d), 0 < d < s, 0 < c < t$$

Для всех t и s из достаточно малой окрестности 0

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c, y_0 + d) \cdot t \cdot s, 0 < d < s, 0 < c < t$$

Если перегруппировать слагаемые иначе, получим

$$F(t, s) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(x_0 + \widetilde{c}, y_0 + \widetilde{d}\big) \cdot t \cdot s, 0 < \widetilde{d} < s, 0 < \widetilde{c} < t$$

следовательно

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\big(x_0 + \widetilde{c}, y_0 + \widetilde{d}\big) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0 + c, y_0 + d)$$

$$t \to 0 \Rightarrow c \to 0, \widetilde{c} \to 0$$

$$s \to 0 \Rightarrow d \to 0, \widetilde{d} \to 0$$

В силу непрерывности смешанных производных

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

□

14.12 Теорема Юнга

Теорема 14.21 (Юнг)**.** *Пусть f - дифференцируема в окрестности точки (x_0, y_0), а её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0). Тогда смешанные частные производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ в точке (x_0, y_0) совпадают.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Рассмотрим функцию

$$F(t, t) = f(t, t) - f(0, t) - f(t, 0) + f(0, 0).$$

Применяя теорему Лагранжа к функции $g(u) = f(t, u) - f(0, u)$, получаем

$$F(t, t) = g(t) - g(0) = g'(\xi)t = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(t, \xi) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, \xi)\right)t.$$

Дифференцируемость $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке (0, 0) означает, что

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)x + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)y + o(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)t+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\xi+o(\sqrt{t^2+\xi^2}).$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,\xi)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)\xi+o(\xi).$$

Т. к. $0\leqslant\xi\leqslant t$, то $o(\sqrt{t^2+\xi^2})=o(t)$ (т. к. $\sqrt{t^2+\xi^2}\leqslant\sqrt{2}t$) и $o(\xi)=o(t)$. Таким образом,

$$F(t,t)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)t^2+o(t^2).$$

Аналогично, обозначив $g(u)=f(u,t)-f(u,0)$, получим

$$F(t,t)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)t^2+o(t^2).$$

Приняв полученные выражения, поделив на t^2 и устремив t к нулю, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0).$$

□

Замечание 14.22. *Условия теорем Юнга и Шварца не следуют друг из друга.*

14.13 Дифференцируемость (m + 1) раз

Определение 14.23. *Пусть $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки a. Говорят, что f дважды дифференцируема в точке a, если все её частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ дифференцируемы в точке a.*

Пусть f - m раз дифференцируема в окрестности точки a. Говорят, что f дифференцируема $(m+1)$ раз в точке a, если все частные производные m-того порядка $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}$ дифференцируемы в точке a.

Следствие 14.24. *Если f - m раз дифференцируема в точке a, то значения производных порядка m $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_m}}(a)$ не зависят от порядка дифференцирования.*

Доказательство. База индукции для $m=2$: теорема Юнга.

Переход: рассмотрим производную порядка $m+1$.

$$\frac{\partial}{\partial x_{k_{m+1}}}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m}\ldots\partial x_{k_1}}\right)$$

По предположению индукции внутри скобок можно дифференцировать в любом порядке. Поскольку функция $\frac{\partial^m f}{\partial x_{k_m}\ldots\partial x_{k_1}}$ дифференцируема, то по теореме Юнга мы можем переставлять частную производную по переменной $x_{k_{m+1}}$ в любое место. □

Лекция 38: Правила дифференцирования

14.14 Дифференциалы высоких порядков

Предположим, что $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ - дифференцируема в окрестности точки a и предположим, что ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ дифференцируемы в точке a. Тогда при каждом $h \in \mathbb{R}^k$ возникает функция $x \mapsto df|_x(h) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)h_1 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)h_k$, дифференцируема в точке a. Ее дифференциал

$$d(df(h))|_a(q) = \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_1}(a)q_j\right)h_1 + ... + \left(\sum_{j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)q_j\right)h_k.$$

Т.е. получена билинейная форма $d(df(h))|_a(q) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)q_j h_i$. Эта билинейная форма оказывается симметричной по теореме Юнга, а т.к. симметричная билинейная форма однозначно задается своей квадратичной формой

$$d(df(h))|_a(h) = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)h_j h_i = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)dx_j(h)dx_i(h),$$

то эту квадратичную форму $d^2 f := \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)dx_j dx_i$ и называют вторым дифференциалом функции f.

Определение 14.25. *Если f — n раз дифференцируема в точке a, то*

$$d^n f|_a := \sum_{1\leqslant j_1,\dots,j_n \leqslant k???} \frac{\partial^n f}{\partial x_{j_1}...\partial x_{j_n}}(a)dx_{j_1}...dx_{j_n}.$$

Последняя запись означает лишь то, что при вычислении n-го дифференциала на векторе $h \in \mathbb{R}^k$ надо воспользоваться линейностью, а

$$[dx_{j_1}...dx_{j_n}](h) := dx_{j_1}(h)...dx_{j_n}(h) = h_{j_1}...h_{j_n}.$$

14.15 Правила дифференцирования

Теорема 14.26. *Пусть функции $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ дифференцируемы в некоторой точке x. Тогда, для произвольных чисел $a, b \in \mathbb{R}$, функции $af + bg$ и fg дифференцируемы в точке x и $d(af + bg) = adf + bdg$ и $d(fg) = fdg + gdf$.*

Доказательство. $\alpha(h), \beta(h), \gamma(h) \to 0$ при $h \to 0$

1. Здесь доказываем в общем случае, т. е. для функций $f, g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$.

$$f(x+h) - f(x) = df|_x(h) + \alpha(h)||h||$$

$$g(x+h) - g(x) = dg|_x(h) + \beta(h)||h||$$

$$(af+bg)(x+h) - (af+bg)(x) = af(x+h) + bg(x+h) - af(x) - bg(x) =$$
$$= a(df|_x(h)+\alpha(h)||h||)+b(dg|_x(h)+\beta(h)||h||) = a\cdot df(h)+b\cdot dg(h)+(\alpha(h)+\beta(h))||h|| =$$
$$= a \cdot df(h) + b \cdot dg(h) + \gamma(h)||h||$$

2.

$$fg(x+h)-fg(x) = f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+$$

$$+f(x+h)g(x)-f(x)g(x) = f(x+h)(g(x+h)-g(x))+g(x)(f(x+h)-f(x)) =$$
$$= f(x+h)(dg|_x(h) + \beta(h)||h||) + g(x)(df|_x(h) + \alpha(h)||h||) = (*)$$

Функция f дифференцируема $\Rightarrow$ непрерывна в точке x и $h \to 0$. Тогда

$$(*) = (f(x)+o(1))(dg|_x(h)+\beta(h)||h||)+g(x)(df|_x(h)+\alpha(h)||h||) = f(x)dg|_x(h)+$$

$$+f(x)\beta(h)||h|| + o(1)dg|_x(h) + o(1)\beta(h)||h|| + g(x)df|_x(h) + g(x)\alpha(h)||h|| =$$
$$= f(x)dg|_x(h) + g(x)df|_x(h) + \gamma(h)||h||.$$

$f(x)$ и $g(x)$ - константы $\Rightarrow f(x)\beta(h)||h|| = \gamma(h)||h||$ и $g(x)\alpha(h)||h|| = \gamma(h)||h||$

$||dg|_x(h)|| \leqslant C||h||$ (см. конец замечания 14.2) $\Rightarrow o(1)dg|_x(h) = \gamma(h)||h||$

$o(1)\beta(h)||h|| = \gamma(h)||h||$

$\square$

14.16 Дифференцирование сложной функции

Теорема 14.27. *Пусть $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, причем отображение f дифференцируемо в точке a, отображение g дифференцируемо в точке $f(a)$. Тогда отображение $g \circ f$ дифференцируемо в точке a и $d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$.*

Доказательство. $h \in \mathbb{R}^k, q \in \mathbb{R}^m$

$$f(a+h) = f(a) + df|_a(h) + \alpha(h)||h||$$

$$g(f(a)+q) = g(f(a)) + dg|_{f(a)}(q) + \beta(q)||q||$$

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = g(f(a) + (f(a+h) - f(a))) - g(f(a)) = (*)$$

Функция f - дифференцируема $\Rightarrow$ непрерывна $\Rightarrow$ при $h \to 0$, $f(a+h) - f(a) \to 0 \Rightarrow q \to 0$, поэтому

$$(*) = g(f(a)) + dg|_{f(a)}(f(a+h) - f(a)) + \beta(f(a+h) - f(a))||f(a+h) - f(a)|| - g(f(a)) =$$

$$= dg|_{f(a)}(df|_a(h) + \alpha(h)||h||) + \gamma(h)||h|| = (**)$$

Докажем, что

$$\gamma(h) = \beta(f(a+h) - f(a))\frac{||f(a+h) - f(a)||}{||h||},$$

где $\gamma(h)$ - бесконечно малая функция. Функция f - дифференцируема $\Rightarrow$ непрерывна $\Rightarrow$ при $h \to 0$, $f(a+h) - f(a) \to 0$

$$\frac{||f(a+h) - f(a)||}{||h||} = ||df(\frac{h}{||h||}) + \alpha(h)|| \leqslant \text{(неравенство треугольника)}$$

$$\leqslant ||df\left(\frac{h}{||h||}\right)|| + ||\alpha(h)||$$

По замечанию 14.2 $||df\left(\frac{h}{||h||}\right)|| \leqslant C||\frac{h}{||h||}|| = C$

Далее продолжаем преобразования

$$(**) = dg|_{f(a)} \circ df|_a(h) + ||h||dg|_{f(a)}(\alpha(h)) + \gamma(h)||h|| = (***)$$

По замечанию 14.2 $||h||dg|_{f(a)}(\alpha(h)) \leqslant ||h||C||\alpha(h)|| \to 0$

$$(***) = dg|_{f(a)} \circ df|_a(h) + \gamma_2(h)||h||$$

$dg|_{f(a)} \circ df|_a(h)$ означают композицию двух линейных отображений. □

Замечание 14.28. *Поясним запись $d(g \circ f)|_a = dg|_{f(a)} \circ df|_a$. Здесь $df|_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ есть линейное отображение и $dg|_{f(z)} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение. Тогда их композиция $dg|_{f(a)} \circ df|_a : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ есть линейное отображение, действующее по правилу $dg|_{f(a)} \circ df|_a(h) = dg|_{f(a)}(df|_a(h))$.*

Замечание 14.29. *Матрица Якоби композиции функций $g \circ f$ в точке a равняется произведению матриц Якоби отображения f в точке a и отображения g в точке $f(a)$. В частности, при $n = 1$, для функции $g(x_1, ..., x_m)$ и отображения*

$$f(y_1, ..., y_k) = (f_1(y_1, ..., y_k), ..., f_m(y_1, ..., y_k)),$$

во-первых, выполнено:

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial y_j}(a) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(a))\frac{\partial f_1}{\partial y_j}(a) + ... + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(a))\frac{\partial f_m}{\partial y_j}(a).$$

Во-вторых, выполнено так называемое свойство инвариантности 1-го дифференциала: $dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial g}{\partial x_m}dx_m$, где нам не важно, являются ли $dx_1, ..., dx_m$ - дифференциалами независимых переменных или же являются дифференциалами некоторых функций $x_j = f_j(y_1, ..., y_k)$.

Пояснение. 1. *При композиции линейных отображений их матрицы перехода перемножаются. Для каждой функции такие матрицы будут иметь вид*

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}, J_g = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial f_1} & \frac{\partial g}{\partial f_2} & \cdots & \frac{\partial g}{\partial f_m} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица перехода композиции функций будет равна $J_g J_f$.

2. *С одной стороны,*

$$dg = \frac{\partial g}{\partial f_1}df_1 + ... + \frac{\partial g}{\partial f_m}df_m$$

С другой стороны,

$$dg(f) = \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_1}dx_1 + ... + \frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_k}dx_k = \sum_{i=1}^{k}\frac{\partial(g\circ f)}{\partial x_i}\,dx_i = \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)dx_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial g}{\partial f_j}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,dx_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial f_j}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\,dx_i\right) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g}{\partial f_i}df_j$$

Пример 14.30. *Пусть $f(x,y) = \varphi(u,v,w)$, где $u = xy, v = x+y, w = x-y$. Тогда*

$$df = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + \frac{\partial\varphi}{\partial w}dw = \frac{\partial\varphi}{\partial u}d(xy) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}d(x+y) + \frac{\partial\varphi}{\partial w}d(x-y) =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial u}(xdy + ydx) + \frac{\partial\varphi}{\partial v}(dx+dy) + \frac{\partial\varphi}{\partial w}(dx-dy).$$

В частности, $\frac{\partial f}{\partial x} = y\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}$ и $\frac{\partial f}{\partial y} = x\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi}{\partial w}$.

14.17 Дифференциал обратного отображения

Теорема 14.31. *Пусть $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ - есть непрерывная биекция между окрестностями $U(a)$ и $V(f(a))$, причем обратное отображение $f^{-1} : V(f(a)) \to U(a)$ также непрерывно (т. е. f - гомеоморфизм между $U(a)$ и $V(f(a))$). Предположим, что f - дифференцируемо в точке a и df - обратимое линейное отображение. Тогда f^{-1} - дифференцируемо в точке $f(a)$ и $df^{-1}|_{f(a)} = (df|_a)^{-1}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что такой предел равен 0.

$$\lim_{q\to 0}\frac{||f^{-1}(f(a)+q)-f^{-1}(f(a))-(df|_a)^{-1}(q)||}{||q||}$$

$$h=f^{-1}(f(a)+q)-f^{-1}(f(a)), h\to 0\Leftrightarrow q\to 0$$

$$h=f^{-1}(f(a)+q)-a\Rightarrow q=f(a+h)-f(a)$$

f дифференцируемо в точке a, поэтому

$$\lim_{h\to 0}\frac{||h-(df|_a)^{-1}(f(a+h)-f(a))||}{||f(a+h)-f(a)||}=\lim_{h\to 0}\frac{||h-(df|_a)^{-1}(df|_a(h)+\alpha(h)||h||)||}{||f(a+h)-f(a)||}=$$

Пользуемся линейностью дифференциала и тем, что по замечанию 14.2 $(df|_a)^{-1}(\alpha(h))\leqslant C||\alpha(h)||$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{||\alpha(h)||\cdot||h||}{||df(h)+\alpha(h)||h||||}=\lim_{h\to 0}\frac{||\alpha(h)||}{||df\left(\frac{h}{||h||}\right)+\alpha(h))||}$$

Теперь отдельно оценим знаменатель. p - вектор $\Rightarrow$ по замечанию 14.2

$$||(df)^{-1}(p)||\leqslant C||p||$$

Пусть $p=df(h)$.

$$||(df)^{-1}(df(h))||\leqslant C||df(h)||$$

$$||h||C_2\leqslant||df(h)||$$

Таким образом, применяя неравенство треугольника,

$$||df\left(\frac{h}{||h||}\right)+\alpha(h)||\geqslant||df\left(\frac{h}{||h||}\right)||-||\alpha(h)||\geqslant C-||\alpha(h)||\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{||\alpha(h)||}{||df\left(\frac{h}{||h||}\right)+\alpha(h))||}=0$$

□

Глава 15

Экстремумы функций многих переменных

Лекция 39: Формула Тейлора и экстремум

15.1 Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Теорема 15.1 (Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме). *Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема $m+1$ раз на отрезке $[a, x]$, то*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + ... + \frac{1}{m!} f^{(m)}(a)(x-a)^m + \frac{1}{m!} \int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)\ dt$$

Доказательство. База: $m = 0$.

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ dt = f(a) + f(x) - f(a) = f(x)$$

Переход:

$$R_m = \frac{1}{m!} \int_a^x (x-t)^m f^{(m+1)}(t)\ dt = -\frac{1}{(m+1)!} \int_a^x f^{(m+1)}(t)\ d(x-t)^{m+1} =$$

$$= -\frac{(x-t)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(t) \Big|_a^x + \frac{1}{(m+1)!} \int_a^x (x-t)^{m+1} f^{(m+2)}(t)\ dt =$$

$$= \frac{(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(a) + R_{m+1}$$

□

Следствие 15.2. *Справедливо следующее равенство:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}.$$

Доказательство.

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}\right| = \left|\frac{1}{m!}\int_0^x (x-t)^m e^t \, dt\right| = (*)$$

Пользуемся следующей оценкой

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\, dx\right| \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |\varphi(x)|(b-a)$$

При $x \geqslant 1$

$$(*) \leqslant \left|\frac{x^{m+1}e^x}{m!}\right| \to 0 \text{ при } m \to \infty \text{ и фиксированном x}$$

При $x < 1$

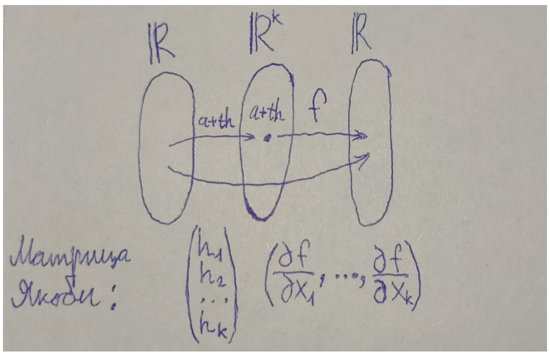
$$(*) \leqslant \left|\frac{e^x}{m!}\right| \to 0$$

□

15.2 Формула Тейлора

Лемма 15.3. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ m раз дифференцируема в окрестности точки $a \in \mathbb{R}^k$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) := f(a+th)$. Тогда φ m раз дифференцируема в окрестности точки нуль и $\varphi^{(m)}(t) = d^m f|_{a+th}(h)$.*

Доказательство. База индукции: $m = 1$.



$$\varphi'(t) = f'(a+th) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \dots \\ h_k \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a+th)h_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(a+th)h_k =$$

$$df\Big|_{a+th}(h)$$

Переход:

$$\varphi^{(m+1)}(t) = (\varphi^{(m)}(t))' = (d^m f|_{a+th}(h))'_t = \Bigg(\sum_{j_1,\dots,j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}} h_{j_1}\dots h_{j_m}\Bigg)'_t =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_m} \frac{\partial}{\partial t}\Bigg(\frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}} h_{j_1}\dots h_{j_m}\Bigg) = \sum_{j_1,\dots,j_m}\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^{m+1} f(a+th)}{\partial x_i \partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_m}} h_{j_1}\dots h_{j_m} h_i =$$

$$= \sum_{j_1,\dots,j_{m+1}} \frac{\partial^{m+1} f(a+th)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{m+1}}} h_{j_1}\dots h_{j_{m+1}} = d^{m+1} f|_{a+th}(h)$$

□

Теорема 15.4. *Пусть функция $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ m раз непрерывно дифференцируема в окрестности точки a. Тогда справедлива следующая формула Тейлора:*

$$f(a+h) = f(a) + df|_a(h) + \frac{1}{2!} d^2 f|_a(h) + \dots + \frac{1}{m!} df^{(m)}|_a(h) + o(||h||^m).$$

Доказательство. $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \varphi(t) = f(a+th)$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot 1 + \dots + \frac{\varphi^{(m-1)}(0)}{(m-1)!} + \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}\varphi^{(m)}(t)\,dt =$$

$$(\text{по лемме 15.3}) = f(a) + \frac{df|_a(h)}{1!} + \dots + \frac{d^{m-1} f|_a(h)}{(m-1)!} + \frac{d^m f|_a(h)}{m!} + R_m$$

$$R_m = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}\varphi^{(m)}(t)\,dt - \frac{\varphi^{(m)}}{m!}(0) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}\varphi^{(m)}(t)\,dt -$$

$$-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}\varphi^{(m)}(0)\,dt = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^1 (1-t)^{m-1}(\varphi^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(0))\,dt$$

$$\frac{|R_m|}{||h||^m} \leqslant \frac{\sup|\varphi^{(m)}(t) - \varphi^{(m)}(0)|}{||h||^m m!} =$$

$$= \sup\Bigg|\sum_{j_1,\dots,j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_n}} h_1\dots h_m - \sum_{j_1,\dots,j_m} \frac{\partial f(a)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_n}} h_1\dots h_m\Bigg| \frac{1}{||h||^m\cdot m!} = (*)$$

$$\forall k\ |h_{j_k}| \leqslant ||h|| \Rightarrow \frac{|h_{j_1}\dots h_{j_m}|}{||h||^m}\frac{1}{m!} \leqslant \frac{1}{m!}$$

m-я производная функции непрерывна ⇒

$$\Rightarrow \sum_{j_1,\dots,j_m} \frac{\partial^m f(a+th)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_n}} - \frac{\partial f(a)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_n}} \to 0 \text{ при } h \to 0$$

Значит $(*) \to 0 \Rightarrow \frac{|R_m|}{||h||^m} \to 0 \Rightarrow R_m = o(||h||^m)$ □

15.3 Точка локального экстремума

Определение 15.5. *Пусть функция* $u = f(x), x \in \mathbb{R}^n$ *определена в некоторой окрестности* $U(x_0)$ *точки* x_0. *Тогда* x_0 *называют точкой*

- *локального максимума функции, если для всех точек* $x \in U(x_0)$ *верно неравенство* $f(x) \leqslant f(x_0)$;
- *строгого локального максимума функции, если для всех точек* $x \in U(x_0)$ *верно неравенство* $f(x) < f(x_0)$;
- *локального минимума функции, если для всех точек* $x \in U(x_0)$ *верно неравенство* $f(x) \geqslant f(x_0)$;
- *строгого локального минимума функции, если для всех точек* $x \in U(x_0)$ *верно неравенство* $f(x) > f(x_0)$;
- *локального экстремума функции, если она входит в одну из перечисленных выше категорий.*

15.4 Необходимое условие локального экстремума

Теорема 15.6 (Необходимое условие локального экстремума). *Пусть* a *- точка локального экстремума функции* f *и предположим, что* f *дифференцируема в точке* a. *Тогда* $df|_a = 0$ *(или, что тоже самое,* $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0 \ \forall j$*).*

Доказательство. Пусть a - точка максимума $\Rightarrow$ при фиксированном h и $t \neq 0$ $\varphi(0) = f(a) > f(a + ht) = \varphi(t)$.

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \Rightarrow$ необходимое условие $\varphi'(0) = 0 = df|_a(h) \ \forall h$ по лемме 15.3 $\Rightarrow df|_a = 0$. ☐

Определение 15.7. *Точки, в которых все частные производные равны нулю, называются стационарными.*

15.5 Достаточное условие локального экстремума

Теорема 15.8 (Достаточное условие локального экстремума). *Пусть* f *дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки* a *и предположим, что в точке* a *выполнено необходимое условие локального экстремума:* $df|_a(h) = 0 \ \forall h$. *Тогда*

1. *если* $d^2f|_a(h) > 0 \ \forall h \neq 0$, *то* a *- точка строгого локального минимума;*

2. если $d^2f|_a(h) < 0\ \forall h \neq 0$, то a - точка строгого локального максимума.

Доказательство. Докажем первый пункт, второй доказывается аналогично. По теореме 15.4

$$f(a+h) - f(a) = df|_a(h) + \frac{d^2f|_a}{2}(h) + o(||h||^2) = \frac{d^2f|_a}{2}(h) + o(||h||^2) =$$

$$= ||h||^2\left(\frac{d^2f|_a(\frac{h}{||h||})}{2} + o(1)\right) = (*)$$

$d^2f|_a(\frac{h}{||h||})$ - симметричная билинейная форма.

Заметим, что квадратичная функция $d^2f\Big|_a(q) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) q_i q_j$ является симметричной квадратичной формой, и как функция аргумента q достигает свое минимальное значение на единичное сфере $\{h\colon \|q\| = 1\}$. Действительно, симметричная квадратичная форма B ортогональными преобразованиями S приводится к диагональному виду D, поэтому

$$\min_{||u||=1} u^T B u = \min_{||u||=1} u^T S^T D S u = \min_{||v||=1} v^T D v = m,$$

где m - минимальный элемент на диагонали матрицы D.

Поэтому непрерывная функция $d^2f\Big|_a(q)$ достигает на сфере своего минимума:

$$\min_{||q||=1} d^2f\Big|_a(q) = m = d^2f\Big|_a(q_0) > 0.$$

Тогда

$$(*) \geqslant ||h||^2(\frac{m}{2} + o(1)) \Rightarrow \forall h \in B_\delta(a)\ ||h||^2(\frac{m}{2} + o(1)) \geqslant ||h||^2\frac{m}{4} > 0.$$

$\square$

15.6 Критерий Сильвестра

Замечание 15.9. *Отметим, что $d^2f|_a(h)$ — это квадратичная форма*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_k}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2}\partial x_k(a) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Условие теоремы выше подразумевает её положительную или отрицательную определенность, что позволяет применить критерий Сильвестра:

1. *все угловые миноры матрицы квадратичной формы $d^2f|_a$ положительны $\Leftrightarrow d^2f|_a$ - положительно определена (т.е. $d^2f|_a(h) > 0$ при каждом $h \neq 0$);*

2. *угловые миноры матрицы квадратичной формы $d^2f|_a$ начинаются с отрицательного, а затем чередуют знаки $\Leftrightarrow d^2f|_a$ - отрицательно определена (т. е. $d^2f|_a(h) < 0$ при каждом $h \neq 0$).*

15.7 Теорема о неявной функции

Для сокращения всех записей будем использовать обозначение $F'_y(x,y) := \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$.

Теорема 15.10. *Пусть $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — определена и непрерывно дифференцируема (т. е. частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности U точки $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.*

Пусть 1) $F(a,b) = 0$ и 2) $F'_y(a,b) \neq 0$. Тогда найдутся промежутки $I_x = (a-\alpha, a+\alpha)$ и $I_y = (b-\beta, b+\beta)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f : I_x \to I_y$, для которых $I_x \times Iy \subset U$ и для каждой точки $(x,y) \in I_x \times I_y$ выполнено $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$. Кроме того, $f'(x) = -\frac{F'_x(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$.

Доказательство. □

Теорема 15.11. *Пусть $F : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}$ - определена и непрерывно дифференцируема (т. е. частные производные непрерывно зависят от точки) в некоторой окрестности U точки $(a,b) = (a_1, ..., a_k, b) \in \mathbb{R}^{k+1}$. Пусть 1) $F(a,b) = 0$ и 2) $F'_y(a,b) \neq 0$. Тогда найдутся $I_x = (a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1) \times ... \times (a_k - \alpha_k, a_k + \alpha_k)$ и $I_y = (b-\beta, b+\beta)$ и непрерывно дифференцируемая функция $f : I_x \to I_y$, для которых $I_x \times I_y \subset U$ и для каждой точки $(x,y) \in I_x \times I_y$ выполнено $F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$. Кроме того, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = -\frac{F'_{x_j}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}$.*

15.8 Теорема о неявном отображении

Теорема 15.12. *Пусть отображение $F : \mathbb{R}^{k+n} \to \mathbb{R}^n$ — определено и непрерывно дифференцируемо в некоторой окрестности U точки $(a,b) = (a_1, ..., a_k, b_1, ..., b_n) \in \mathbb{R}^{k+n}$. Пусть 1) $F(a,b) = 0$ и 2) матрица*

$$F'_y(a,b) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}(a,b) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial y_n}(a,b) \\ ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1}(a,b) & ... & \frac{\partial F_n}{\partial y_n}(a,b) \end{pmatrix} - \textit{обратима.}$$

Тогда найдутся $I_x = (a_1 - \alpha_1, a_1 + \alpha_1) \times ... \times (a_k - \alpha_k, a_k + \alpha_k)$ и $I_y = (b_1 - \beta_1, b_1 + \beta_1) \times ... \times (b_n - \beta_n, b_n + \beta_n)$ и непрерывно дифференцируемое отображение $f =$

$(f_1, ..., f_n) : I_x \to I_y$, *для которых* $I_x \times I_y \subset U$ *и для каждой точки* $(x, y) \in I_x \times I_y$ *выполнено*

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x).$$