

Tentu, berikut adalah solusi terperinci untuk 7 soal Ujian Tengah Semester (UTS) yang telah Anda susun, dengan merujuk pada prinsip-prinsip Sinyal dan Sistem yang ditemukan dalam sumber.

## Solusi Ujian Tengah Semester (UTS) Sinyal dan Sistem

### 1. Soal Periodisitas (Waktu Kontinu)

**Sinyal:**  $x(t) = 5 \cos(4t) - 3 \sin(6t)$

**Solusi:**

1. **Tentukan Periode Fundamental untuk setiap komponen:** Sinyal  $x(t)$  merupakan penjumlahan dari dua sinyal periodik:

- $x_1(t) = 5 \cos(4t)$ . Frekuensi fundamental  $\omega_1 = 4 \text{ rad/s}$ .

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

- $x_2(t) = 3 \sin(6t)$ . Frekuensi fundamental  $\omega_2 = 6 \text{ rad/s}$ .

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

2. **Cek Keterkaitan Rasional:** Sinyal gabungan periodik jika rasio periodenya rasional.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi/2}{\pi/3} = \frac{3}{2}$$

Karena rasio  $T_1/T_2 = 3/2$  adalah bilangan rasional, sinyal  $x(t)$  **adalah periodik**.

3. **Tentukan Periode Fundamental  $T_0$ :**  $T_0$  adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari  $T_1$  dan  $T_2$  yang dihitung berdasarkan rasio rasional  $3/2$  (di mana 3 dan 2 adalah bilangan bulat prima relatif,  $q = 3$  dan  $r = 2$ ).

$$T_0 = 2 \cdot T_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Atau

$$T_0 = 3 \cdot T_2 = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$$

**Kesimpulan:** Sinyal  $x(t)$  adalah periodik dengan periode fundamental  $T_0 = \pi$ .

---

### 2. Soal Cek Linearitas dan Invariansi Waktu (LTI)

**Sistem:**  $y(t) = tx(t)$

**Solusi:**

1. **Uji Linearitas (Linearity)** Linearitas harus memenuhi prinsip superposisi (aditivitas dan homogenitas).

- **Additivitas dan Homogenitas (Prinsip Superposisi):** Misalkan input  $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$ . Output sistem:

$$y(t) = T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = t[ax_1(t) + bx_2(t)]$$

$$y(t) = a[tx_1(t)] + b[tx_2(t)]$$

Karena  $y_1(t) = tx_1(t)$  dan  $y_2(t) = tx_2(t)$ , maka:

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

Karena prinsip superposisi terpenuhi, **sistem adalah Linear**.

2. **Uji Invariansi Waktu (Time-Invariance - TI)** TI terpenuhi jika pergeseran input  $x(t - t_0)$  menghasilkan pergeseran output  $y(t - t_0)$ .

- **Output dari Input yang Digeser ( $y_d(t)$ ):**

$$y_d(t) = T\{x(t - t_0)\} = tx(t - t_0)$$

- **Output yang Digeser ( $y_s(t)$ ):** Kita ambil output asli  $y(t) = tx(t)$ , lalu geser waktu  $t \rightarrow (t - t_0)$ :

$$y_s(t) = y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0)$$

- **Perbandingan:**

$$y_d(t) = tx(t - t_0)$$

$$y_s(t) = tx(t - t_0) - t_0x(t - t_0)$$

Karena  $y_d(t) \neq y_s(t)$  (kecuali jika  $t_0 = 0$ ), **sistem tidak Invarian Waktu** (Time-Varying).

**Kesimpulan:** Sistem  $y(t) = tx(t)$  adalah **Linear** tetapi **tidak Invarian Waktu**.

---

### 3. Soal Konvolusi (Integral Konvolusi Waktu Kontinu)

**Sinyal:**  $h(t) = e^{-2t}u(t)$ ,  $x(t) = e^{-t}u(t)$ . Hitung  $y(t) = x(t)*h(t)$ .

**Solusi:**

Kita akan menggunakan integral konvolusi:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

#### 1. Substitusi dan Batasan Integrasi:

- $x(\tau) = e^{-\tau}u(\tau)$
- $h(t - \tau) = e^{-2(t-\tau)}u(t - \tau)$  Karena  $u(\tau)$  memerlukan  $\tau \geq 0$ , dan  $u(t - \tau)$  memerlukan  $t - \tau \geq 0$  (atau  $\tau \leq t$ ), batas integrasi menjadi  $[0, t]$  untuk  $t \geq 0$ . Untuk  $t < 0$ , tidak ada *overlap*, sehingga  $y(t) = 0$ .

2. **Formulasi Integral (untuk  $t \geq 0$ ):**

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau$$

3. **Penyederhanaan Integral:**

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2t} e^{2\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau-\tau} d\tau$$

$$y(t) = e^{-2t} \int_0^t e^{\tau} d\tau$$

4. **Perhitungan Integral:**

$$y(t) = e^{-2t} [e^{\tau}]_0^t = e^{-2t} (e^t - e^0)$$

$$y(t) = e^{-2t} (e^t - 1) = e^{-2t} e^t - e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

**Kesimpulan:** Mengingat batasan  $t \geq 0$ , output sistem adalah:

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)$$

---

4. **Soal LCCDE Orde 1 (Respon Impuls)**

**LCCDE:**  $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$ . (Sistem kausal, diam awal).

**Solusi:**

Kita mencari respon impuls  $h(t)$ , yang merupakan output  $y(t)$  ketika input  $x(t) = \delta(t)$ .

1. **Persamaan Homogen (untuk  $t > 0$ ):** Untuk  $t > 0$ ,  $x(t) = 0$ . Persamaan menjadi:

$$\frac{dh(t)}{dt} + 5h(t) = 0$$

Persamaan karakteristiknya adalah  $s + 5 = 0$ , sehingga  $s = -5$ . Solusi homogennya adalah  $h(t) = Ae^{-5t}$  untuk  $t > 0$ .

2. **Menentukan Kondisi Awal ( $h(0^+)$ ) menggunakan  $\delta(t)$ :** Integrasikan persamaan diferensial dari  $t = 0^-$  hingga  $t = 0^+$ :

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{dh(t)}{dt} dt + 5 \int_{0^-}^{0^+} h(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

- Integral kiri pertama menghasilkan  $h(0^+) - h(0^-)$ .
- Karena sistem diam awal,  $h(0^-) = 0$ .

- Integral kiri kedua nol karena  $h(t)$  terhingga.
- Integral kanan adalah 1 (sifat impuls).

$$h(0^+) - 0 + 0 = 1 \implies h(0^+) = 1$$

3. **Menentukan Konstanta A:** Gunakan kondisi  $h(0^+) = 1$  pada  $h(t) = Ae^{-5t}$ :

$$1 = Ae^{-5(0)} \implies A = 1$$

4. **Respon Impuls:** Karena sistem kausal,  $h(t) = 0$  untuk  $t < 0$ .

**Kesimpulan:** Respon impulsnya adalah:

$$h(t) = e^{-5t}u(t)$$


---

### 5. Soal LCCDE Orde 1 (Solusi Lengkap)

**LCCDE:**  $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4u(t)$ , dengan  $y(0^-) = 1$ .

**Solusi:**

Solusi lengkap  $y(t)$  adalah jumlah dari solusi homogen  $y_h(t)$  dan solusi partikular  $y_p(t)$ .

1. **Solusi Homogen ( $y_h(t)$ ):** Persamaan karakteristik:  $s + 2 = 0$ , sehingga  $s = -2$ .

$$y_h(t) = Ae^{-2t}$$

2. **Solusi Partikular ( $y_p(t)$ ):** Karena input  $x(t) = 4u(t)$  adalah konstanta 4 untuk  $t \geq 0$ , kita asumsikan solusi partikular berbentuk konstanta  $Y$ .

$$\frac{d(Y)}{dt} + 2(Y) = 4$$

$$0 + 2Y = 4 \implies Y = 2$$

$$y_p(t) = 2$$

3. **Solusi Lengkap:**

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-2t} + 2$$

4. **Tentukan Konstanta A dari Kondisi Awal:** Gunakan kondisi awal  $y(0^-) = 1$ . Karena input  $4u(t)$  tidak mengandung impuls,  $y(t)$  bersifat kontinu di  $t = 0$ , sehingga  $y(0^+) = y(0^-) = 1$ . Substitusikan  $t = 0$  ke dalam solusi lengkap:

$$y(0) = Ae^{-2(0)} + 2$$

$$1 = A + 2$$

$$A = -1$$

**Kesimpulan:** Solusi lengkap untuk  $t \geq 0$  adalah:

$$y(t) = 2 - e^{-2t}$$


---

## 6. Soal Deret Fourier Waktu Kontinu (CTFS - Koefisien)

**Sinyal:**  $x(t) = \cos(2t)$

**Solusi:**

1. **Tentukan Frekuensi Fundamental ( $\omega_0$ ):** Dari  $x(t) = \cos(2t)$ , kita peroleh  $\omega_0 = 2$  rad/s.
2. **Gunakan Identitas Euler:** Representasikan  $\cos(2t)$  sebagai eksponensial kompleks:

$$x(t) = \cos(2t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t}$$

3. **Bandungkan dengan Persamaan Sintesis CTFS:** Persamaan sintesis CTFS adalah  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ . Dengan  $\omega_0 = 2$ , kita punya:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2t}$$

4. **Identifikasi Koefisien  $a_k$ :** Dengan membandingkan hasil Euler dengan persamaan sintesis, kita peroleh:
  - Koefisien  $e^{j2t}$  terjadi saat  $k = 1$ , sehingga  $a_1 = 1/2$ .
  - Koefisien  $e^{-j2t}$  terjadi saat  $k = -1$ , sehingga  $a_{-1} = 1/2$ .
  - Tidak ada harmonik lain.

**Kesimpulan:** Koefisien Deret Fourier kompleksnya adalah:

$$a_k = \begin{cases} 1/2 & \text{untuk } k = 1 \\ 1/2 & \text{untuk } k = -1 \\ 0 & \text{untuk } |k| \neq 1 \end{cases}$$


---

## 7. Soal Deret Fourier Waktu Kontinu (CTFS - Aplikasi LTI)

**Input:**  $x(t)$  dengan koefisien  $a_k$ . **Sistem LTI:**  $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$ . **Frekuensi Fundamental:**  $\omega_0 = 4$  rad/s. **Tujuan:** Tuliskan ekspresi untuk koefisien output  $b_k$ .

**Solusi:**

1. **Hubungan Koefisien Input-Output pada Sistem LTI:** Untuk sistem LTI, koefisien Deret Fourier output  $b_k$  dihubungkan dengan koefisien input  $a_k$  melalui respon frekuensi sistem  $H(j\omega)$  yang dievaluasi pada frekuensi harmonik  $k\omega_0$ .

$$b_k = a_k H(jk\omega_0)$$

2. **Substitusi Frekuensi Harmonik:** Dengan  $\omega_0 = 4$ , frekuensi harmonik adalah  $\omega = 4k$ . Substitusikan  $\omega = 4k$  ke dalam  $H(j\omega)$ :

$$H(jk\omega_0) = H(j4k) = \frac{1}{1 + j(4k)}$$

3. **Ekspresi Koefisien Output:**

$$b_k = a_k \cdot \left( \frac{1}{1 + j4k} \right)$$

**Kesimpulan:** Koefisien Deret Fourier output  $b_k$  adalah:

$$b_k = \frac{a_k}{1 + j4k}$$