

Tentu, berikut adalah solusi terperinci untuk 7 soal Ujian Tengah Semester (UTS) yang telah Anda susun, dengan merujuk pada prinsip-prinsip Sinyal dan Sistem yang ditemukan dalam sumber.

Solusi Ujian Tengah Semester (UTS) Sinyal dan Sistem

1. Soal Periodisitas (Waktu Kontinu)

Sinyal: $x(t) = 5 \cos(4t) - 3 \sin(6t)$

Solusi:

1. **Tentukan Periode Fundamental untuk setiap komponen:** Sinyal $x(t)$ merupakan penjumlahan dari dua sinyal periodik:

- $x_1(t) = 5 \cos(4t)$. Frekuensi fundamental $\omega_1 = 4$ rad/s.

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

- $x_2(t) = 3 \sin(6t)$. Frekuensi fundamental $\omega_2 = 6$ rad/s.

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

2. **Cek Keterkaitan Rasional:** Sinyal gabungan periodik jika rasio periodenya rasional.

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\pi/2}{\pi/3} = \frac{3}{2}$$

Karena rasio $T_1/T_2 = 3/2$ adalah bilangan rasional, sinyal $x(t)$ **adalah periodik**.

3. **Tentukan Periode Fundamental T_0 :** T_0 adalah kelipatan persekutuan terkecil (KPK) dari T_1 dan T_2 yang dihitung berdasarkan rasio rasional $3/2$ (di mana 3 dan 2 adalah bilangan bulat prima relatif, $q = 3$ dan $r = 2$).

$$T_0 = 2 \cdot T_1 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

Atau

$$T_0 = 3 \cdot T_2 = 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$$

Kesimpulan: Sinyal $x(t)$ adalah periodik dengan periode fundamental $T_0 = \pi$.

2. Soal Cek Linearitas dan Invariansi Waktu (LTI)

Sistem: $y(t) = tx(t)$

Solusi:

1. **Uji Linearitas (Linearity)** Linearitas harus memenuhi prinsip superposisi (aditivitas dan homogenitas).

- **Aditivitas dan Homogenitas (Prinsip Superposisi):** Misalkan input $x(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$. Output sistem:

$$y(t) = T\{ax_1(t) + bx_2(t)\} = t[ax_1(t) + bx_2(t)]$$

$$y(t) = a[tx_1(t)] + b[tx_2(t)]$$

Karena $y_1(t) = tx_1(t)$ dan $y_2(t) = tx_2(t)$, maka:

$$y(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

Karena prinsip superposisi terpenuhi, **sistem adalah Linear**.

2. **Uji Invariansi Waktu (Time-Invariance - TI)** TI terpenuhi jika pergeseran input $x(t - t_0)$ menghasilkan pergeseran output $y(t - t_0)$.

- **Output dari Input yang Digeser ($y_d(t)$):**

$$y_d(t) = T\{x(t - t_0)\} = tx(t - t_0)$$

- **Output yang Digeser ($y_s(t)$):** Kita ambil output asli $y(t) = tx(t)$, lalu geser waktu $t \rightarrow (t - t_0)$:

$$y_s(t) = y(t - t_0) = (t - t_0)x(t - t_0)$$

- **Perbandingan:**

$$y_d(t) = tx(t - t_0)$$

$$y_s(t) = tx(t - t_0) - t_0x(t - t_0)$$

Karena $y_d(t) \neq y_s(t)$ (kecuali jika $t_0 = 0$), **sistem tidak Invarian Waktu** (Time-Varying).

Kesimpulan: Sistem $y(t) = tx(t)$ adalah **Linear** tetapi **tidak Invarian Waktu**.

3. Soal Konvolusi (Integral Konvolusi Waktu Kontinu)

Sinyal: $h(t) = e^{-2t}u(t)$, $x(t) = e^{-t}u(t)$. Hitung $y(t) = x(t)*h(t)$.

Solusi:

Kita akan menggunakan integral konvolusi:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

1. Substitusi dan Batasan Integrasi:

- $x(\tau) = e^{-\tau}u(\tau)$
- $h(t - \tau) = e^{-2(t-\tau)}u(t - \tau)$ Karena $u(\tau)$ memerlukan $\tau \geq 0$, dan $u(t - \tau)$ memerlukan $t - \tau \geq 0$ (atau $\tau \leq t$), batas integrasi menjadi $[0, t]$ untuk $t \geq 0$. Untuk $t < 0$, tidak ada overlap, sehingga $y(t) = 0$.

2. **Formulasi Integral (untuk $t \geq 0$):**

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2(t-\tau)} d\tau$$

3. **Penyederhanaan Integran:**

$$y(t) = \int_0^t e^{-\tau} e^{-2t} e^{2\tau} d\tau = e^{-2t} \int_0^t e^{2\tau - \tau} d\tau$$

$$y(t) = e^{-2t} \int_0^t e^\tau d\tau$$

4. **Perhitungan Integral:**

$$y(t) = e^{-2t} [e^\tau]_0^t = e^{-2t} (e^t - e^0)$$

$$y(t) = e^{-2t} (e^t - 1) = e^{-2t} e^t - e^{-2t}$$

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

Kesimpulan: Mengingat batasan $t \geq 0$, output sistem adalah:

$$y(t) = (e^{-t} - e^{-2t}) u(t)$$

4. **Soal LCCDE Orde 1 (Respon Impuls)**

LCCDE: $\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = x(t)$. (Sistem kausal, diam awal).

Solusi:

Kita mencari respon impuls $h(t)$, yang merupakan output $y(t)$ ketika input $x(t) = \delta(t)$.

1. **Persamaan Homogen (untuk $t > 0$):** Untuk $t > 0$, $x(t) = 0$. Persamaan menjadi:

$$\frac{dh(t)}{dt} + 5h(t) = 0$$

Persamaan karakteristiknya adalah $s + 5 = 0$, sehingga $s = -5$. Solusi homogenanya adalah $h(t) = Ae^{-5t}$ untuk $t > 0$.

2. **Menentukan Kondisi Awal ($h(0^+)$) menggunakan $\delta(t)$:** Integrasikan persamaan diferensial dari $t = 0^-$ hingga $t = 0^+$:

$$\int_{0^-}^{0^+} \frac{dh(t)}{dt} dt + 5 \int_{0^-}^{0^+} h(t) dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

- Integral kiri pertama menghasilkan $h(0^+) - h(0^-)$.
- Karena sistem diam awal, $h(0^-) = 0$.

- Integral kiri kedua nol karena $h(t)$ terhingga.
- Integral kanan adalah 1 (sifat impuls).

$$h(0^+) - 0 + 0 = 1 \implies h(0^+) = 1$$

3. **Menentukan Konstanta A:** Gunakan kondisi $h(0^+) = 1$ pada $h(t) = Ae^{-5t}$:

$$1 = Ae^{-5(0)} \implies A = 1$$

4. **Respon Impuls:** Karena sistem kausal, $h(t) = 0$ untuk $t < 0$.

Kesimpulan: Respon impulsnya adalah:

$$h(t) = e^{-5t}u(t)$$

5. Soal LCCDE Orde 1 (Solusi Lengkap)

LCCDE: $\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 4u(t)$, dengan $y(0^-) = 1$.

Solusi:

Solusi lengkap $y(t)$ adalah jumlah dari solusi homogen $y_h(t)$ dan solusi partikular $y_p(t)$.

1. **Solusi Homogen ($y_h(t)$):** Persamaan karakteristik: $s + 2 = 0$, sehingga $s = -2$.

$$y_h(t) = Ae^{-2t}$$

2. **Solusi Partikular ($y_p(t)$):** Karena input $x(t) = 4u(t)$ adalah konstanta 4 untuk $t \geq 0$, kita asumsikan solusi partikular berbentuk konstanta Y .

$$\frac{d(Y)}{dt} + 2(Y) = 4$$

$$0 + 2Y = 4 \implies Y = 2$$

$$y_p(t) = 2$$

3. **Solusi Lengkap:**

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-2t} + 2$$

4. **Tentukan Konstanta A dari Kondisi Awal:** Gunakan kondisi awal $y(0^-) = 1$. Karena input $4u(t)$ tidak mengandung impuls, $y(t)$ bersifat kontinu di $t = 0$, sehingga $y(0^+) = y(0^-) = 1$. Substitusikan $t = 0$ ke dalam solusi lengkap:

$$y(0) = Ae^{-2(0)} + 2$$

$$1 = A + 2$$

$$A = -1$$

Kesimpulan: Solusi lengkap untuk $t \geq 0$ adalah:

$$y(t) = 2 - e^{-2t}$$

6. Soal Deret Fourier Waktu Kontinu (CTFS - Koefisien)

Sinyal: $x(t) = \cos(2t)$

Solusi:

1. **Tentukan Frekuensi Fundamental (ω_0):** Dari $x(t) = \cos(2t)$, kita peroleh $\omega_0 = 2$ rad/s.
2. **Gunakan Identitas Euler:** Representasikan $\cos(2t)$ sebagai eksponensial kompleks:

$$x(t) = \cos(2t) = \frac{1}{2}e^{j2t} + \frac{1}{2}e^{-j2t}$$

3. **Bandingkan dengan Persamaan Sintesis CTFS:** Persamaan sintesis CTFS adalah $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$. Dengan $\omega_0 = 2$, kita punya:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk2t}$$

4. **Identifikasi Koefisien a_k :** Dengan membandingkan hasil Euler dengan persamaan sintesis, kita peroleh:
 - Koefisien e^{j2t} terjadi saat $k = 1$, sehingga $a_1 = 1/2$.
 - Koefisien e^{-j2t} terjadi saat $k = -1$, sehingga $a_{-1} = 1/2$.
 - Tidak ada harmonik lain.

Kesimpulan: Koefisien Deret Fourier kompleksnya adalah:

$$a_k = \begin{cases} 1/2 & \text{untuk } k = 1 \\ 1/2 & \text{untuk } k = -1 \\ 0 & \text{untuk } |k| \neq 1 \end{cases}$$

7. Soal Deret Fourier Waktu Kontinu (CTFS - Aplikasi LTI)

Input: $x(t)$ dengan koefisien a_k . **Sistem LTI:** $H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega}$. **Frekuensi Fundamental:** $\omega_0 = 4$ rad/s. **Tujuan:** Tuliskan ekspresi untuk koefisien output b_k .

Solusi:

1. **Hubungan Koefisien Input-Output pada Sistem LTI:** Untuk sistem LTI, koefisien Deret Fourier output b_k dihubungkan dengan koefisien input a_k melalui respon frekuensi sistem $H(j\omega)$ yang dievaluasi pada frekuensi harmonik $k\omega_0$.

$$b_k = a_k H(jk\omega_0)$$

2. **Substitusi Frekuensi Harmonik:** Dengan $\omega_0 = 4$, frekuensi harmonik adalah $\omega = 4k$. Subtitusikan $\omega = 4k$ ke dalam $H(j\omega)$:

$$H(jk\omega_0) = H(j4k) = \frac{1}{1 + j(4k)}$$

3. **Ekspresi Koefisien Output:**

$$b_k = a_k \cdot \left(\frac{1}{1 + j4k} \right)$$

Kesimpulan: Koefisien Deret Fourier output b_k adalah:

$$b_k = \frac{a_k}{1 + j4k}$$