

Exercice 1 (2,5 pts)

Calculer les limites suivantes :

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x} - x \right)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + 3} - x \right)$$

Exercice 2 (1,5 pts)

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+9} - 2}{x+1} \quad ; \quad x \neq -1 \quad \text{et} \quad f(-1) = a$$

Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en -1 .

(1,5pt)

Exercice 3 (7 pts)

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$

1. Déterminer D_f , le domaine de définition de f . (1pt)
2. Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en 1 , interpréter graphiquement le résultat. (1,5pt)
3. Déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.
En déduire que la fonction est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$. (1,5pt)
4. (a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer. (1pt)
(b) Montrer que f^{-1} est dérivable en $2 - \sqrt{3}$ et déterminer $(f^{-1})'(2 - \sqrt{3})$. (1,5pt)

Exercice 4 (9 pts)

On considère la fonction h définie sur \mathbb{R} par : $h(x) = x^5 + x^3 - 1$

1. Donner le tableau de variation de h . (1pt)
2. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans \mathbb{R} et que $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$. (1,5pt)
3. Donner un autre encadrement de α d'amplitude $0,25$. (1pt)
4. Montrer que $\alpha^2 + 1 = \frac{1}{\alpha^3}$. (1pt)
5. Résoudre l'inéquation $\frac{x-1}{h(x)} < 0$. (1pt)
6. Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle que l'on déterminera. (1,5pt)
7. Comparer $h^{-1}(3 + \sqrt{5})$ et $h^{-1}(3 + \sqrt{3})$. (1pt)
8. Déterminer la valeur de $h^{-1}(0)$ puis exprimer $(h^{-1})'(0)$. (1pt)