

Corrcetion : Suites numériques

Prof. ELAAMRI Younes

3 décembre 2025

Activité 1

1 On a

$$u_1 = \frac{25}{10 - u_0} = \frac{25}{10 - 0} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2},$$

puis

$$u_2 = \frac{25}{10 - u_1} = \frac{25}{10 - \frac{5}{2}} = \frac{50}{20 - 5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}.$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} 5 - u_{n+1} &= 5 - \frac{25}{10 - u_n} = \frac{5(10 - u_n) - 25}{10 - u_n} \\ &= \frac{50 - 5u_n - 25}{10 - u_n} = \frac{25 - 5u_n}{10 - u_n} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}.$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 5 - u_n > 0$.

Pour $n = 0$:

$$5 - u_0 = 5 - 0 = 5 > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $5 - u_n > 0$ et on va montrer que $5 - u_{n+1} > 0$.

On a

$$5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}.$$

Comme $5 - u_n > 0$, le numérateur est > 0 . De plus

$$5 + (5 - u_n) > 5,$$

donc le dénominateur est > 0 . Ainsi $5 - u_{n+1} > 0$.

Donc, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5 - u_n > 0 \quad (\text{c.-à-d. } u_n < 5).$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5}{5 - u_{n+1}} = \frac{5}{5 - \frac{25}{10 - u_n}} = \frac{5(10 - u_n)}{5(10 - u_n) - 25} \\ &= \frac{5(10 - u_n)}{50 - 5u_n - 25} = \frac{5(10 - u_n)}{25 - 5u_n} = \frac{10 - u_n}{5 - u_n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{10 - u_n}{5 - u_n} - \frac{5}{5 - u_n} \\ &= \frac{10 - u_n - 5}{5 - u_n} = \frac{5 - u_n}{5 - u_n} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = 1,$$

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

4 b) (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 + nr = 1 + n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_n = \frac{5}{5 - u_n} \Leftrightarrow 5 - u_n = \frac{5}{v_n} \Leftrightarrow u_n = 5 - \frac{5}{v_n} = \frac{5v_n - 5}{v_n}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5v_n - 5}{v_n}.$$

Or $v_n = n + 1$, donc

$$u_n = \frac{5(n + 1) - 5}{n + 1} = \frac{5n + 5 - 5}{n + 1} = \frac{5n}{n + 1}.$$

On a

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n.$$

Comme (v_n) est arithmétique,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n - 0 + 1}{2} (v_0 + v_n) = \frac{n + 1}{2} (1 + 1 + n) \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Activité 2

1

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0 + 3}{u_0 + 4} = \frac{2 \cdot 0 + 3}{0 + 4} = \frac{3}{4}, \\ u_2 &= \frac{2u_1 + 3}{u_1 + 4} = \frac{2 \cdot \frac{3}{4} + 3}{\frac{3}{4} + 4} = \frac{\frac{6}{4} + 3}{\frac{3}{4} + 4} = \frac{6 + 12}{3 + 16} = \frac{18}{19}. \end{aligned}$$

2 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 < u_n < 1$.

■ On a $u_1 = \frac{3}{4}$, donc $0 < u_1 < 1$.

■ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 < u_n < 1$ (H.R.) et on va montrer que $0 < u_{n+1} < 1$.
Puisque $0 < u_n < 1$, on a $2u_n + 3 > 3$ et $u_n + 4 > 4$, donc

$$2u_n + 3 > 0 \quad \text{et} \quad u_n + 4 > 0,$$

d'où

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} > 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} 1 - u_{n+1} &= 1 - \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} = \frac{u_n + 4 - 2u_n - 3}{u_n + 4} \\ &= \frac{-u_n + 1}{u_n + 4}. \end{aligned}$$

Comme $u_n + 4 > 0$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $1 - u_n > 0$, on a

$$1 - u_{n+1} > 0 \quad (\text{c.-à-d. } u_{n+1} < 1).$$

D'où, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n < 1.$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - u_n \\ &= \frac{2u_n + 3 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} \\ &= \frac{-u_n^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4} \\ &= \frac{-(u_n - 1)(u_n + 3)}{u_n + 4}. \end{aligned}$$

On a $0 \leq u_n < 1$, donc $u_n - 1 < 0$, et $u_n + 3 > 0$ et $u_n + 4 > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n > 0$.
Ainsi (u_n) est croissante.

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} \\ &= \frac{\frac{2u_n + 3 - u_n - 4}{u_n + 4}}{\frac{2u_n + 3 + 3u_n + 12}{u_n + 4}} \\ &= \frac{-u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{-(u_n + 1)}{5(u_n + 3)} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5} v_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n,$$

et (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$.

5 On a (v_n) géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 3} = \frac{0 - 1}{0 + 3} = -\frac{1}{3}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{1}{3 \cdot 5^n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n v_n + 3v_n = u_n - 1$, donc $u_n v_n - u_n = -1 - 3v_n$. Par suite $u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$,
d'où $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{3 \cdot 5^n}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{3 \cdot 5^n}\right)} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3 \cdot 5^n}}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3 \cdot 5^n}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n+5}.$$

Comme (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$,

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+6}}{1 - q} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+6}}{1 - \frac{1}{5}} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+6}}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{12} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+6}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = -\frac{5}{12} \left(1 - \frac{1}{5^{n+6}}\right).$$

Application 1

1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{3n^3 + 3n - 6} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3 \left(3 + \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^3}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{3 + \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^3}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{n^3} = 0.$$

2

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)\sqrt{n}}{n+4} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \left(1 + \frac{4}{n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{1 + \frac{4}{n}} = +\infty, \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

3

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} + 1}{\sqrt{n} + 3} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{3}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{n}}} = 1,\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0.$$

4

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0,\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

5

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2n - \sqrt{n}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(2 - \frac{\sqrt{n}}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \\ &= +\infty,\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

Application 2

1

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{3}{8}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n \right) = +\infty,$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0 \quad (\text{car } -1 < \frac{3}{8} < 1) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty \quad (\text{car } \frac{5}{4} > 1).$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{2n} = 1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1} = -1.$$

La suite (u_n) n'a donc pas de limite.

3

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 3^n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1 \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n - 1 \right) = -\infty,
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0 \quad (\text{car } -1 < \frac{2}{3} < 1).$$

4

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n + 2^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right)}{4^n \left(1 + \left(\frac{2}{4} \right)^n \right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n}{1 + \left(\frac{1}{2} \right)^n} = 1,
 \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 \quad (\text{car } -1 < \frac{3}{4}, \frac{1}{2} < 1).$$

Exercice 1

1 a Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{6u_n}{1 + 15u_n} - \frac{1}{3} \\
 &= \frac{3(6u_n) - (1 + 15u_n)}{3(1 + 15u_n)} \\
 &= \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{3(1 + 15u_n)} \\
 &= \frac{3u_n - 1}{3(1 + 15u_n)} \\
 &= \frac{3u_n - 1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}.$$

b Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > \frac{1}{3}$.Pour $n = 0$:

$$u_0 = 1 \text{ donc } u_0 > \frac{1}{3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > \frac{1}{3}$ (H.R) et on va montrer que $u_{n+1} > \frac{1}{3}$.

On a

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}.$$

Puisque $u_n > \frac{1}{3}$, on a $u_n - \frac{1}{3} > 0$. De plus

$$1 + 15u_n > 1 + 15 \cdot \frac{1}{3} = 6 > 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0 \quad (\text{c.-à-d. } u_{n+1} > \frac{1}{3}).$$

Ainsi, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > \frac{1}{3}.$$

2 a Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3 \left(\frac{6u_n}{1 + 15u_n} \right)} \\ &= 1 - \frac{1 + 15u_n}{18u_n} = \frac{18u_n - (1 + 15u_n)}{18u_n} \\ &= \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{6 \cdot 3u_n} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{3u_n}{3u_n} - \frac{1}{3u_n} \right) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3u_n} \right) = \frac{1}{6} v_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n,$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$.

b On a (v_n) géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ et $v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 q^n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^n = \frac{2}{3 \cdot 6^n}.$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$. On en déduit que $\frac{1}{3u_n} = 1 - v_n$, ce qui donne $3u_n = \frac{1}{1 - v_n}$.

Par conséquent, $u_n = \frac{1}{3(1 - v_n)}$. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{3 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^n \right)}.$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6} \right)^n = 0 \quad (\text{car } 0 < \frac{1}{6} < 1),$$

On obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{3(1 - 0)} = \frac{1}{3}.$$

Application 3

1

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^5} - n^{4/3}) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{5/2} - n^{4/3}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{5/2} (1 - n^{4/3-5/2}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{5/2} (1 - n^{-7/6}) = +\infty,\end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{5/2} = +\infty \quad (\text{car } \frac{5}{2} > 0) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-7/6} = 0 \quad (\text{car } -\frac{7}{6} < 0).$$

2

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n} - \sqrt[4]{n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{1/2} - n^{1/4}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/2} (1 - n^{1/4-1/2}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/2} (1 - n^{-1/4}) = +\infty,\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{1/2} = +\infty \quad (\text{car } \frac{1}{2} > 0) \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-1/4} = 0 \quad (\text{car } -\frac{1}{4} < 0).$$

Application 4

1 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 1$.

On a $u_0 = -1$, donc $u_0 < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n < 1$ (H.R) et on va montrer que $u_{n+1} < 1$. On a

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 - u_n} = \frac{2 - u_n - 1}{2 - u_n} = \frac{1 - u_n}{2 - u_n}.$$

Puisque $u_n < 1$, on a $1 - u_n > 0$ et $2 - u_n > 1 > 0$, donc $1 - u_{n+1} > 0$, c.-à-d. $u_{n+1} < 1$.

Ainsi, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < 1.$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2 - u_n} - u_n = \frac{1 - u_n(2 - u_n)}{2 - u_n} \\ &= \frac{1 - 2u_n + u_n^2}{2 - u_n} = \frac{(u_n - 1)^2}{2 - u_n}.\end{aligned}$$

Comme $u_n < 1$, on a $2 - u_n > 1$ et $(u_n - 1)^2 \geq 0$, donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante. Elle est croissante et majorée par 1, donc convergente.

Application 5

1 Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$. On a

$$-1 \leq \cos(n) \leq 1.$$

Comme $n^2 + 1 > 0$, on obtient

$$\frac{-1}{n^2 + 1} \leq \frac{\cos(n)}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}.$$

En ajoutant 2 :

$$\frac{-1}{n^2 + 1} + 2 \leq \frac{\cos(n)}{n^2 + 1} + 2 \leq \frac{1}{n^2 + 1} + 2.$$

Ainsi

$$\frac{-1}{n^2+1} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1} + 2.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n^2+1} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1} + 2.$$

2 On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{n^2+1} + 2 \right) = 0 + 2 = 2,$$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + 2 \right) = 0 + 2 = 2.$$

En plus

$$\forall x \in \mathbb{N}, \frac{-1}{n^2+1} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1} + 2.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Application 6

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sin(n) \geq -1 \quad \text{et} \quad \cos(n^2+3) \leq 1$$

Donc

$$\sin(n) + 3n \geq -1 + 3n \quad \text{et} \quad \cos(n^2+3) - \sqrt{n+1} \leq 1 - \sqrt{n+1}$$

Càd

$$u_n \geq -1 + 3n \quad \text{et} \quad v_n \leq 2 - \sqrt{n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1 + 3n$ et $v_n \leq 2 - \sqrt{n}$.

2 On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq -1 + 3n$ et $v_n \leq 2 - \sqrt{n}$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1 + 3n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - \sqrt{n}) = -\infty$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

Application 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|u_n - 1| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

Donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 2

1 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.

On a $u_0 = \frac{1}{3}$, donc $0 < u_0 < 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < u_n < 1$ (H.R.) et on va montrer que $0 < u_{n+1} < 1$.

On a $0 < u_n < 1$ donc $2u_n > 0$ et $u_n + 1 > 1 > 0$, d'où

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} > 0.$$

D'autre part

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{2u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - 2u_n}{u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{u_n + 1}.$$

Comme $u_n < 1$, on a $1 - u_n > 0$ et $u_n + 1 > 1$, donc $1 - u_{n+1} > 0$, c.-à-d. $u_{n+1} < 1$.
Ainsi, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$

2 **a** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n}{u_n + 1} - u_n \\ &= \frac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n + 1} \\ &= \frac{-u_n(u_n - 1)}{u_n + 1} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n - 1)}{u_n + 1}.$$

b Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n(u_n - 1)}{u_n + 1} \geq 0$$

En effet : On a $0 < u_n < 1$, donc $u_n > 0$, $u_n + 1 > 1$ et $u_n - 1 < 0$.

Càd ; $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geq 0$.

Donc (u_n) est croissante.

c On a (u_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq u_0$.

càd ; $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \frac{1}{3}$.

On a (u_n) est croissante et majorée par 1, donc

(u_n) est convergente.

3 **a** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{2u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - 2u_n}{u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{1 + u_n}.$$

D'autre part, $u_n \geq \frac{1}{3}$, donc

$$1 + u_n \geq 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{1 + u_n} \leq \frac{3}{4}.$$

Comme $1 - u_n > 0$, on obtient

$$\frac{1 - u_n}{1 + u_n} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n),$$

c.-à-d.

$$1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1 - u_n).$$

- ⑥ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3}$.

Pour $n = 0$:

$$1 - u_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3},$$

et on veut montrer que

$$1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}.$$

On a

$$\begin{aligned} 1 - u_{n+1} &\leq \frac{3}{4}(1 - u_n) \\ &\leq \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3}.$$

- ⑦ On a pour tout n ,

$$0 \leq 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3}.$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3} = 0 \quad (\text{car } -1 < \frac{3}{4} < 1),$$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

- 4 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n+1} - 1}{\frac{2u_n}{u_n+1}} = \frac{2u_n - u_n - 1}{2u_n} \\ &= \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right) = \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$.

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

- b) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{1/3 - 1}{1/3} = -2$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 q^n = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Exprimons maintenant u_n en fonction de v_n . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \iff u_n v_n = u_n - 1$$

C'est-à-dire $u_n(v_n - 1) = -1$, d'où $u_n = \frac{-1}{v_n - 1} = \frac{1}{1 - v_n}$.

En remplaçant v_n par son expression, on obtient :

$$u_n = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

On en déduit donc que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1 + 0} = 1$.

Application 8

1

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - n^2\pi}{n + 6n^2} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2} - \pi\right)}{n^2\left(\frac{1}{n} + 6\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{n^2} - \pi}{\frac{1}{n} + 6} = -\frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Comme la fonction \sin est continue en $-\frac{\pi}{6}$, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1 - n^2\pi}{n + 6n^2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

2 On pose

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2\left(16 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{16}{2} = 8, \end{aligned}$$

car

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-3}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 8, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Application 9

On considère la fonction $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2.$$

Elle est dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x - 2\sqrt{x} + 2)' = 1 - 2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)} \\ &= \frac{x - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}. \end{aligned}$$

Donc le signe de f' est celui de $x - 1$ sur $]0, +\infty[$, et comme $\forall x \in]0, +\infty[\quad x - 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2 Soit $x \in [1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} x - f(x) &= x - (x - 2\sqrt{x} + 2) = 2\sqrt{x} - 2 = 2(\sqrt{x} - 1) \\ &= \frac{2(x - 1)}{\sqrt{x} + 1} \geq 0 \quad \text{car } x \geq 1. \end{aligned}$$

On en déduit que $\forall x \in [1, +\infty[\quad f(x) \leq x$

3 a Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n .

■ On a $u_0 = 2$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$.

■ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On a $1 \leq u_n \leq 2$ et f est croissante sur $[1, +\infty[$.

Donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$.

C'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 4 - 2\sqrt{2}$ (car $f(1) = 1$ et $f(2) = 4 - 2\sqrt{2}$).

Or, $4 - 2\sqrt{2} < 2$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Donc, d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

b On a $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, +\infty[$.

Or, $\forall x \in [1, +\infty[: f(x) \leq x$, donc $\forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) \leq u_n$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

c) Soit $I = [1, 2]$. On a :

■ $u_0 \in I$.

■ f est continue sur I .

■ $f(I) = [f(1), f(2)] = [1, 4 - 2\sqrt{2}] \subset I$ (car f est croissante sur I).

■ $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.

■ La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc (u_n) est convergente vers une limite l .

Par conséquent, l est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans I .

Soit $x \in I$. On a $f(x) = x \iff x - 2\sqrt{x} + 2 = x \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$.

Comme $1 \in I$, on a $l = 1$. C'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.