

► EXERCICE 1 : (18 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x} - \ln(x)$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat. (2 pt)
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$, en déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$. (2 pt)
3. (a) Dresser le tableau de signe de $(1-x)\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$. (1 pt)
 (b) Déduire la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$. (1 pt)
4. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2 - x + 1 - \ln(x)}{x^2}$. (1.5 pt)
5. En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' sur $]0; +\infty[$:

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$f'(\beta)$	$+\infty$

(Avec $f'(\beta) \approx 0.58$)

- (a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f . (1 pt)
- (b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0; +\infty[$. (1 pt)
- (c) Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant l'abscisse du point d'inflexion. (1 pt)
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\frac{1}{2}; 1]$. (1 pt)
7. Construire (C_f) et (Δ) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . On donne $(\alpha \approx 0.54)$, $(\beta \approx 1.81)$ et $(f(\beta) \approx 1.54)$. (2 pt)
8. (a) Vérifier que la fonction $x \mapsto x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$. (1 pt)
 (b) Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $]0; +\infty[$ tel que $F(1) = 0$. (1 pt)
9. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), U_{n+1} = f(U_n)$.
 - (a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}), U_n \geq 1$. (1 pt)
 - (b) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. (0.5 pt)
 - (c) Déduire que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite. (1 pt)

► EXERCICE 2 : (2 pts)

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\ln(x+1) = \ln(3x-2)$. (1 pt)
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 - (\frac{5}{6})^n > 0.99$. (1 pt)