▶ EXERCICE 1 : (10 pts)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 13}{x - 1}$$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Déterminer D_f. (1 pt)
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. (1 pt)
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ puis interpréter les résultats obtenus. (1 pt)
2. (a) Montrer que pour tout $x \in D_f$: $f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$. (1 pt)
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur D_f puis dresser le tableau de variations de f. (1 pt)
3. (a) Vérifier que pour tout $x \in D_f$: $f(x) = x - 4 + \frac{9}{x-1}$. (1 pt)
   (b) En déduire que la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. (1 pt)
4. Construire (D) et (C_f). (1 pts)
5. On définit la fonction g par : $g(x) = \frac{x^2-5|x|+13}{|x|-1}$.
   (a) Déterminer D_g puis étudier la parité de g. (0.5 pt)
   (b) Montrer que $\forall x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$, on a $g(x) = f(x)$. (0.5 pt)
   (c) En déduire une construction de (C_g). (1 pt)

▶ EXERCICE 2 : (10 pts)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 6$ et $u_{n+1} = \frac{8u_n-10}{u_n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - 5 = \frac{3(u_n-5)}{u_n+1}$ et $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-2)(u_n-5)}{u_n+1}$. (1 pt)
   (b) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 5$. (1 pt)
   (c) En déduire que (u_n) est décroissante et que (u_n) est bornée. (1 pt)
   (d) En déduire que (u_n) est convergente. (1 pt)
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \frac{u_n-5}{u_n-2}$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ puis donner v_n en fonction de n. (1 pt)
   (b) En déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = \frac{20-2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$. (1 pt)
   (c) Déterminer la limite de (u_n). (1 pt)
3. (a) Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 3$. (1 pt)
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - 5| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. (1 pt)
4. On définit la suite (w_n) par : $w_n = h\left(\frac{u_n}{5}\right)$ où $h(x) = \cos(\pi x)$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$. (1 pt)