Chapitre

Suites numériques

Les orientations pédagogiques

- Toute étude théorique de la notion de limite d'une suite est hors programme.
- On admettra dans une première étape les limites des suites : $(n)_{n\geq 0}, (n^2)_{n\geq 0}, (n^3)_{n\geq 0}, (\sqrt{n})_{n\geq 0}, (n^p)_{n\geq 0}$ et les suites : $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}, \left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 3, quand n tend vers $+\infty$.
- Si (v_n) vérifie $v_n \geq \alpha u_n$ pour $n \geq p$ et (u_n) tend vers $+\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- Si (v_n) vérifie $|v_n - l| \leq \alpha u_n$ pour $n \geq p$ et (u_n) tend vers 0, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.
- On admettra les opérations sur les limites finies et infinies et on habituera les élèves à les utiliser correctement. L'usage de l'outil informatique est recommandé.
- On admettra les critères de convergence en se basant sur la compatibilité des opérations sur les suites avec l'ordre. Si (u_n) vérifie : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.
- On étudiera des suites récurrentes et des suites de type $v_n = f(u_n)$ où f est une fonction continue.
- Propriétés à admettre :
  - ✓ Si (u_n) est du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et converge vers l, alors l est solution de $f(x) = x$.
  - ✓ Si (u_n) converge vers l et si f est continue en l, alors $(v_n = f(u_n))$ converge vers $f(l)$.
- On étudiera les limites des suites $(a^n)_n$ et $(n^\alpha)_n$ et on les considérera comme usuelles.
- L'étude des fonctions précédera celle des suites.

Les capacités attendues :

- Utiliser les suites géométriques et les suites arithmétiques pour étudier des exemples de suites de la forme : $u_{n+1} = au_n + b$, $u_{n+1} = \dfrac{au_n + b}{cu_n + d}$ et d'autres suites récurrentes simples.
- Utiliser les suites de référence et les critères de convergence pour déterminer les limites de suites numériques.
- Utiliser les suites pour résoudre des problèmes variés de différents domaines.
- Déterminer la limite d'une suite convergente (u_n) de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction continue sur un intervalle I et vérifiant $f(I) \subset I$.

I Rappels

Activité 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{25}{10 - u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Vérifier que $5 - u_{n+1} = \dfrac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{5}{5 - u_n}$.
   - a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.
   - b) Exprimer v_n en fonction de n.
   - c) Vérifier que $u_n = \dfrac{5v_n - 5}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   - e) Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Activité 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 < u_n < 1$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. On considère (v_n), la suite numérique définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
   - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison.
   - b) Déterminer v_n en fonction de n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   - c) Calculer la somme S_n en fonction de n où : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Monotonie d'une suite numérique

Soit (u_n) une suite numérique définie sur $I \subseteq \mathbb{N}$.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est croissante si $(\forall n \in I),\, u_n \leq u_{n+1}$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante si $(\forall n \in I),\, u_n \geq u_{n+1}$.

Suite majorée - Suite minorée - Suite bornée

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est majorée par un nombre réel M si et seulement si $(\forall n \in I)$, $u_n \leq M$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est minorée par un nombre réel m si et seulement si $(\forall n \in I)$, $u_n \geq m$.
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in I}$ est bornée si elle est majorée et minorée.

Remarque

- Si (u_n) est une suite croissante, alors elle est minorée par son premier terme.
- Si (u_n) est une suite décroissante, alors elle est majorée par son premier terme.

II Limite d'une suite

1 Définition

Définition

Soient (u_n) une suite numérique et l un nombre réel. On dit que l est la limite de (u_n), et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ ou plus simplement $\lim u_n = l$ si tout intervalle ouvert centré en l contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice.

2 Limite de suites de références

Propriété

Soit p un élément de $\mathbb{N}$ tel que $p \geq 3$, on a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^p = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^p} = 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Exemple

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{\sqrt{n}} = +\infty$.

Exemple

On a :

$$\lim_{n\to+\infty} (-2n^4 + 3n^2 + 1) = \lim_{n\to+\infty} n^4 \left(-2 + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^4}\right).$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{n^2} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^4} = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-2 + \dfrac{3}{n^2} + \dfrac{1}{n^4}\right) = -2$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^4 = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (-2n^4 + 3n^2 + 1) = -\infty$.

Remarque

Les règles de calcul sur les limites de suites sont les mêmes que celles sur les limites de fonctions en $+\infty$, car une suite n'est rien d'autre qu'une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

Application 1

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n^2 + n + 1}{3n^3 + n - 6}$.
2. $u_n = \dfrac{(n+2)\sqrt{n}}{n+4}$.
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3}$.
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
5. $u_n = 2n - \sqrt{n}$.

Définition

Soit (u_n) une suite numérique.

- On dit que (u_n) est convergente si elle admet une limite finie (c'est-à-dire s'il existe un réel l tel que $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$).
- On dit que (u_n) est divergente si elle n'est pas convergente (c'est-à-dire si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ ou si elle n'a pas de limite).

Exemple

- La suite (u_n) telle que $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n = \dfrac{n}{\sqrt{n+1}}$ est divergente car $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- La suite (v_n) telle que $(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ est convergente car $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- La suite (w_n) telle que $(\forall n \in \mathbb{N})\ w_n = (-1)^n$ est divergente car elle n'a pas de limite.

3 Limite de la suite géométrique (q^n) où q est un réel non nul

Propriété

Soit q un réel, on a :

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite (q^n) n'a pas de limite.
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$.

Exemple

- $\lim_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ parce que $5 > 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} (-0,5)^n = 0$ parce que $-1 < -0,5 < 1$.
- $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{7}{8}\right)^n = 0$ parce que $-1 < \dfrac{7}{8} < 1$.
- La suite $((-3)^n)$ n'a pas de limite.

Application 2

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = \left(\dfrac{3}{8}\right)^n + \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$.
2. $u_n = \dfrac{5^n}{(-4)^n}$.
3. $u_n = 2^n - 3^n$.
4. $u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$.

Exercice 1 (Rattrapage 2011)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n}$.

1. (a) Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$.
   (b) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \dfrac{1}{3}$.
2. On considère la suite numérique (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{1}{3\left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{2}{3}\right)}$ puis déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

4 Limite de la suite n^r où r est un nombre rationnel non nul

Propriété

Soit $r \in \mathbb{Q}^*$, on a :

- Si $r > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} n^r = 0$.

Exemple

- $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{3}} = +\infty$ parce que $\dfrac{5}{3} > 0$.
- $\lim_{n\to+\infty} n^{-\frac{4}{3}} = 0$ parce que $-\dfrac{4}{3} < 0$.

Application 3

Calculer la limite de la suite (u_n) dans les cas suivants :

1. $u_n = n^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{4}{3}}$.
2. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$.

III Critères de convergence

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques. Si :

$$\begin{cases} u_n > v_n \\ \lim_{n\to\infty} u_n = l \\ \lim_{n\to\infty} v_n = l' \end{cases}$$

alors $l \geq l'$.

Exemple

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par $u_n = 2 + \frac{1}{n}$ et $v_n = 2 - \frac{1}{n}$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$.

Propriété

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Application 4

On considère la suite (u_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N})$:

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2 - u_n} \end{cases}$$

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n < 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n) puis en déduire qu'elle est convergente.

Propriété

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques et l un nombre réel. Si :

$$\begin{cases} v_n \le u_n \le w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Application 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2+1} + 2$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ \dfrac{-1}{n^2+1} + 2 \le u_n \le \dfrac{1}{n^2+1} + 2$.
2. En déduire la limite de (u_n).

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques et $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$.

- Si :

$$\begin{cases} \alpha u_n \le v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

- Si :

$$\begin{cases} v_n \le \alpha u_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Application 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par $u_n = \sin(n) + 3n$ et $v_n = \cos(n^2+3) - 5n + 1$.

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \ge -1 + 3n$ et que $v_n \le 2 - 5n$.
2. En déduire la limite de (u_n) et (v_n).

Propriété

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques, l un nombre réel, et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Si :

$$\begin{cases} |u_n - l| \le \alpha v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0 \end{cases}$$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Application 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 1$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 0 < u_n < 1$.
2. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{u_n(u_n-1)}{u_n+1}$.
   (b) Étudier la monotonie de (u_n).
   (c) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \ge \dfrac{1}{3}$ et que la suite (u_n) est convergente.
3. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 1 - u_{n+1} \le \dfrac{3}{4}(1 - u_n)$.
   (b) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 1 - u_n \le \left(\dfrac{3}{4}\right)^n \times \dfrac{2}{3}$.
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

ⓑ Exprimer v_n et u_n en fonction de n.
ⓒ Déterminer de nouveau $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

IV Limite de suites particulières

1 La suite $v_n = f(u_n)$

Propriété

Soit f une fonction numérique continue en l et (u_n) une suite convergente dont la limite est l. La suite (v_n) telle que $v_n = f(u_n)$ est une suite convergente et sa limite est $f(l)$.

Exemple

Déterminons la limite de la suite (v_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ v_n = \cos\left(\frac{\pi n + 2}{3n - 1}\right).$$

Considérons d'abord la suite (u_n) définie par l'expression à l'intérieur du cosinus :

$$u_n = \frac{\pi n + 2}{3n - 1}$$

Pour déterminer la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$, nous levons l'indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le terme de plus haut degré :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi n + 2}{3n - 1}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\pi + \frac{2}{n}\right)}{n\left(3 - \frac{1}{n}\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi + \frac{2}{n}}{3 - \frac{1}{n}}\\ &= \frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

Puisque :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

Composition avec la fonction cosinus

La suite (v_n) est la composée de la suite (u_n) par la fonction cosinus : $v_n = \cos(u_n)$.
La fonction cosinus étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est continue en $\frac{\pi}{3}$. Nous pouvons donc écrire :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \cos\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Conclusion

Sachant que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, nous concluons que :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}}$$

Application 8

Calculer les limites des suites (u_n) et (v_n) suivantes :

$u_n = \sin\left(\frac{1 - n^2\pi}{n + 6n^2}\right)$ et $v_n = \sqrt{\frac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}}$.

2 La suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété

Soit f une fonction numérique et I un intervalle de D_f et soit $(u_n)_n$ une suite telle que :

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Si les conditions suivantes sont vérifiées :
- f est continue sur I.
- $f(I) \subset I$.
- La suite $(u_n)_n$ converge vers l.

Alors $f(l) = l$.

Application 9

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

1. Montrer que f est décroissante sur $[0; 1]$ et croissante sur $[1; +\infty[$.
2. Montrer, pour tout $x \in [1; +\infty[$, que $f(x) \leq x$.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   ⓐ Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ 1 \leq u_n \leq 2$.
   ⓑ Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   ⓒ En déduire que la suite (u_n) est convergente puis déterminer sa limite.