

Suites numériques

Activité 1

$$1) \text{ On a: } u_1 = \frac{25}{10 - u_0} = \frac{25}{10 - 0} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$$

$$u_2 = \frac{25}{10 - u_1} = \frac{25}{10 - \frac{5}{2}} = \frac{25}{\frac{15}{2}} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} 5 - u_{n+1} &= 5 - \frac{25}{10 - u_n} = \frac{50 - 5u_n - 25}{10 - u_n} \\ &= \frac{25 - 5u_n}{10 - u_n} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}: 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$$

• Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}: 5 - u_n > 0$

$$\bullet \text{ Pour } n=0: 5 - u_0 = 5 - 0 = 5 > 0$$

\bullet Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $5 - u_n > 0$ et on va montrer que : $5 - u_{n+1} > 0$

$$\text{On a: } 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)} > 0$$

$$\text{Car } 5 - u_n > 0$$

\bullet Donc d'après le principe de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}: 5 - u_n > 0$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - \frac{5}{5 - u_{n+1}} &= \frac{5}{5 - \frac{25}{10 - u_n}} = \frac{5(10 - u_n)}{50 - 5u_n - 25} = \frac{5(10 - u_n)}{25 - 5u_n} \\ &= \frac{10 - u_n}{5 - u_n} \end{aligned}$$

$$v_{n+1} - u_n = \frac{10 - u_n}{5 - u_n} - \frac{5 - u_n}{5 - u_n} = \frac{5 - u_n}{5 - u_n} = 1$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} - v_n = 1$$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison 1

b) (V_n) est une suite arithmétique de raison $r=1$, donc

$$\text{ThGPN: } V_n = V_0 + nr = 1 + n$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$V_n = \frac{5}{5 - U_n}, \text{ donc } 5 - U_n = \frac{5}{V_n}$$

$$\text{dans } U_n = 5 - \frac{5}{V_n} = \frac{5V_n - 5}{V_n}$$

$$\text{D'où ThGPN: } U_n = \frac{5V_n - 5}{V_n}$$

d) On a: ThGPN: $U_n = \frac{5V_n - 5}{V_n}$ et $V_n = 1 + n$

$$\text{D'où ThGPN: } U_n = \frac{5(1+n) - 5}{n+1} = \frac{5n}{n+1}$$

$$\text{On a: } S'_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$$

$$= \frac{n-0+1}{2} (V_0 + V_n) = \frac{n+1}{2} (1+1+n)$$

$$\therefore S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Activité 2

$$1) U_1 = \frac{2U_0 + 3}{U_0 + 4} = \frac{3}{4}$$

$$U_2 = \frac{2U_1 + 3}{U_1 + 4} = \frac{\frac{6}{4} + 3}{\frac{3}{4} + 4} = \frac{6+12}{3+16} = \frac{18}{19}$$

2) Montrons par récurrence que: ThGPN: $0 < U_n < 1$

• On a: $U_0 = \frac{3}{4}$, donc $0 < U_0 < 1$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < U_n < 1$ et on va montrer que $0 < U_{n+1} < 1$

• On a $U_n > 0$, donc $2U_n + 3 > 3$ et $U_n + 4 > 4$

donc $2U_n + 3 > 0$ et $U_n + 4 > 0$

$$\text{donc } U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} > 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{On a: } 1 - u_{n+1} &= 1 - \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} = \frac{u_n + 4 - 2u_n - 3}{u_n + 4} \\ &= \frac{-u_n + 1}{u_n + 4} \end{aligned}$$

On a $u_n + 4 > 0$ et $u_n < 1$ (calc $-u_n + 1 > 0$)

Donc $1 - u_{n+1} > 0$ calc $u_{n+1} < 1$ (2)

Donc $u_{n+1} < 1$ (d'après ① et ②)

D'où d'après le principe de récurrence

Par définition: $0 < u_n < 1$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - \frac{2u_n + 3 - u_n^2 - 4u_n}{u_n + 4} \\ &= \frac{-u_n^2 - 2u_n + 3}{u_n + 4} \\ &= -\frac{(u_n - 1)(u_n + 3)}{u_n + 4} \end{aligned}$$

Or: $u_n - 1 < 0$, $u_n + 3 > 0$ et $u_n + 4 > 0$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$

Donc par définition: $u_{n+1} - u_n > 0$

D'où (u_n) est croissante.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 3} = \frac{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} - 1}{\frac{2u_n + 3}{u_n + 4} + 3} = \frac{-2u_n + 3 - u_n - 4}{2u_n + 3 + 3u_n + 12} \\ &= \frac{u_n - 1}{5u_n + 15} = \frac{u_n - 1}{5(u_n + 3)} = \frac{1}{5} \frac{u_n - 1}{u_n + 3} = \frac{1}{5} v_n \end{aligned}$$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}: v_{n+1} = \frac{1}{5} v_n$, d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

b) On a (v_n) est une suite géométrique.

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{1}{3 \times 5^n}.$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On a: } v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3} \text{ donc } u_n v_n + 3 v_n = u_n - 1$$

$$\text{donc } u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$$

$$\text{donc } u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$$

$$\text{Alors: } u_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3 \times 5^n}}.$$

$$\text{Par suite: th GN: } u_n = \frac{1 - \frac{1}{5^n}}{1 + \frac{1}{3 \times 5^n}}.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$$= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = -\frac{1}{3} \times \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{5}}$$

$$S_n = -\frac{5}{12} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)$$

$$\text{Donc th GN: } S_n = -\frac{5}{12} \left(1 - \frac{1}{5^{n+1}}\right)$$

Application 1

$$\begin{aligned} 1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + n + 1}{3n^3 + n - 6} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)}{n^3 \left(3 + \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^3}\right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{n \left(3 + \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^3}\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Puisque: } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-6}{n^3} = 0$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+2)\sqrt{n}}{n+4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(1+\frac{2}{n})}{1+\frac{4}{n}} = +\infty$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n}(1+\frac{1}{\sqrt{n}})}{\sqrt{n}(1+\frac{3}{\sqrt{n}})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}{1+\frac{3}{\sqrt{n}}} = 1$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{n}} = 0$

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 0$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n - \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n(2 - \frac{1}{\sqrt{n}}) = +\infty$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$.

Application (2)

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n + \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$$

Puisque : $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{8}\right)^n = 0 \text{ car } -1 < \frac{3}{8} < 1 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty \text{ car } \frac{5}{4} > 1 \end{cases}$

$$2) \text{ Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On a : } u_n = \frac{5^n}{n \left(\frac{2}{3}\right)^n} = \frac{\left(\frac{5}{2}\right)^n}{n} \text{ et } -\frac{5}{4} < -1$$

donc la suite (u_n) n'a pas de limite.

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n - 3^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty$$

Puisque : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ($-1 < \frac{2}{3} < 1$)

$$4) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4^n (1 - (\frac{3}{4})^n)}{4^n (1 + (\frac{3}{4})^n)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - (\frac{3}{4})^n}{1 + (\frac{3}{4})^n} = 1$$

Principe : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{3}{4})^n = 0 \quad (-1 < \frac{3}{4} < 1)$

Exercice 1

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6u_n}{1+15u_n} - \frac{1}{3}$

$$= \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{3(1+15u_n)} = \frac{3u_n - 1}{3(1+15u_n)}$$

$$\Rightarrow \frac{3u_n - 1}{1+15u_n} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}$$

Dès lors : $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}$.

b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{1}{3}$.

• On a : $u_0 = 1$, donc $u_0 > \frac{1}{3}$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $u_n > \frac{1}{3}$ et on va montrer que $u_{n+1} > \frac{1}{3}$.

On a $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$

Par conséquent : $u_n > \frac{1}{3} \Rightarrow u_n - \frac{1}{3} > 0$ et $15u_n + 1 > 0$

Dès lors d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{1}{3}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3(\frac{6u_n}{1+15u_n})} = 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n}$$

$$= \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{6 \times 3u_n}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{3u_n}{3u_n} - \frac{1}{3u_n} \right) = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{3u_n} \right) = \frac{1}{6} v_n$$

Dès lors $v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$, d'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

b) On a (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$
 et $V_0 = 1 - \frac{1}{3 \cdot 6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, donc

$$\text{VnEN: } V_n = V_0 \times q^n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{2}{3 \times 6^n}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a: $V_n = 1 - \frac{1}{3 \cdot 6^n}$ donc $\frac{1}{3 \cdot 6^n} = 1 - V_n$

$$\text{d'où } 3 \cdot 6^n = \frac{1}{1 - V_n}$$

$$\text{càd } U_n = \frac{1}{3(1 - V_n)}$$

$$\text{donc } U_n = \frac{1}{3 \left(1 - \frac{2}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}$$

$$\text{Par suite: VnEN: } U_n = \frac{1}{3 \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{2}{3}\right)}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{3}$ puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ ($1 < \frac{1}{6} < 1$)

Application 3

$$1) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{2}} \cdot n^{-\frac{4}{3}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{2}} \left(1 - n^{-\frac{4}{3} - \frac{5}{2}}\right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{2}} \left(1 - n^{-\frac{17}{6}}\right) = +\infty$$

$$\text{Puisque: } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{5}{2}} = +\infty & (\frac{5}{2} > 0) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{17}{6}} = 0 & (-\frac{17}{6} < 0) \end{cases}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[4]{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{4}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}} \left(1 - n^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}} \left(1 - n^{-\frac{1}{4}}\right)$$

$$= +\infty$$

$$\text{Puisque: } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\frac{1}{2}} = +\infty & (\frac{1}{2} > 0) \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-\frac{1}{4}} = 0 & (-\frac{1}{4} < 0) \end{cases}$$

Application 4

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.

* On a $u_0 = -1$, donc $u_0 < 1$.

* Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n < 1$ et on va montrer que $u_{n+1} < 1$.

$$\text{On a } 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2-u_n} = \frac{2-u_n-1}{2-u_n} = \frac{1-u_n}{2-u_n} > 0.$$

Puisque $u_n < 1 \Rightarrow 1 - u_n > 0$ et $2 - u_n > 1$

Donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n < 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n} \geq 0$$

Puisque $2 - u_n > 1$ et $(u_n - 1)^2 \geq 0$

Donc (u_n) est croissante

On a : (u_n) est croissante et majorée par 1, donc
 (u_n) est convergente

Application 5

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\text{Dès } -1 \leq \cos(n) \leq 1 \quad \text{Dès } \frac{-1}{n^2+1} \leq \frac{\cos(n)}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2+1} \quad (\text{car } \frac{1}{n^2+1} > 0)$$

$$\text{Dès } \frac{-1}{n^2+1} + 2 \leq \frac{\cos(n)}{n^2+1} + 2 \leq \frac{1}{n^2+1} + 2$$

$$\text{Car } \frac{-1}{n^2+1} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1} + 2$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} : \frac{-1}{n^2+1} + 2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1} + 2$$

$$2) \text{ On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n^2+1} + 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} + 2 = 2$$

$$\text{et on a: } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{1}{n^2+1} + 2 \leq \frac{1}{n^2+1} + 2$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

Application 6 :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sin(n) > -1 \text{ et } \omega(n^2+3) \leq 1$$

$$\text{done } \sin(n) + 3n > -1 + 3n \text{ et } \omega(n^2+3) - \sin(n) \leq 1 - \sin(n)$$

$$(n) \quad u_n > -1 + 3n \text{ et } v_n \leq 2 - \sin(n)$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1 + 3n \text{ et } v_n \leq 2 - \sin(n).$$

$$2) \text{ On a: } \forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1 + 3n \text{ et } v_n \leq 2 - \sin(n)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} -1 + 3n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - \sin(n) = -\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty.$$

Application 7

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}. \text{ On a: } |u_{n+1}| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 2 :

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}: 0 < u_n < 1$

- On a: $u_0 = \frac{1}{3}$ donc $0 < u_0 < 1$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 < u_n < 1$ et on va montrer que $0 < u_{n+1} < 1$.

On a: $u_n > 0$ donc $2u_n > 0$ et $u_n + 1 > 0$

$$\text{Donc } u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 1} > 0$$

$$\text{On a } 1 - u_{n+1} = 1 - \frac{2u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - 2u_n}{u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{u_n + 1} > 0$$

Puisque : $0 < u_n < 1$ donc $u_n + 1 > 1$ et $1 - u_n > 0$

Par conséquent $0 < u_{n+1} < 1$

Donc d'après le principe de récurrence $0 < u_n < 1$ pour tout n de \mathbb{N} .

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n + 1} = -u_n(u_n - 1)$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n(u_n - 1)}{u_n + 1}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n(u_n - 1)}{u_n + 1} > 0$$

En effet : On a $0 < u_n < 1$, donc $u_n > 0$, $u_n + 1 > 2$
et $u_n - 1 < 0$

cad : $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} - u_n > 0$

Donc (u_n) est croissante

c) On a (u_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}: u_n > u_0$

cad $\forall n \in \mathbb{N}: u_n > \frac{1}{3}$

On a (u_n) est croissante et majorée par $\frac{1}{3}$, donc (u_n) est convergente.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{2u_n}{u_n + 1} = \frac{u_n + 1 - 2u_n}{u_n + 1} = \frac{1 - u_n}{u_n + 1}$$

D'autre part: on a $u_n \geq \frac{1}{3}$ donc $u_n + 1 \geq \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

donc $0 < \frac{1}{u_n + 1} < \frac{3}{4}$ et comme $1 - u_n > 0$

donc $\frac{1 - u_n}{1 + u_n} < \frac{3}{4} (1 - u_n)$

C'est : $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4} (1 - u_n)$

Donc P(tN): $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4} (1 - u_n)$

(b) Résolvons par récurrence que: P(tN): $1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$

On a: $1 - u_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \frac{2}{3}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$ et on va montrer que: $1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3}$

On a $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4} (1 - u_n)$

$\leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3}$

Donc $1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3}$

Donc d'après le principe de récurrence:

P(tN), $1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$

(c) On a P(tN): $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$

et $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ ($-1 < \frac{3}{4} < 1$)

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 1$.

4) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{m_{n+1}-1}{m_{n+1}} = \frac{\frac{2m_n}{m_n+1}-1}{\frac{2m_n}{m_n+1}} = \frac{2m_n-m_n-1}{2m_n} \\ &= \frac{m_n-1}{2m_n} = \frac{1}{2} \left(\frac{m_n-1}{m_n} \right) = \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
et $v_0 = \frac{m_0-1}{m_0} = \frac{13-1}{13} = \frac{-2}{1} = -2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n = -2 \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2^{n-1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \frac{m_n-1}{m_n}$ donc $m_n v_n = m_n - 1$

Car $m_n (v_n - 1) = -1$ donc $m_n = \frac{1}{1-v_n}$

donc $m_n = \frac{1}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $m_n = \frac{1}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

c) On a $\forall n \in \mathbb{N}$: $m_n = \frac{1}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} m_n = 1$

Application 8 :

$$\text{On a, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1-n^2\pi}{n+6n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(1/n^2 - \pi)}{n^2(1/n + 6)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n^2 - \pi}{1/n + 6} = -\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

et comme la fonction \sin est continue en $-\frac{\pi}{6}$, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1-n^2\pi}{n+6n^2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2(16 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2})}{n^2(2 + \frac{1}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{16 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\text{Puisque : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

et comme la fonction $n \mapsto \sqrt{n}$ est continue en 8, donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Application 9 :

1) On a : f est dérivable sur $[0, +\infty[$. Soit $x \in [0, +\infty[$:

$$f'(x) = (x - 2\sqrt{x} + 2)' = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

Donc le signe de $f'(x)$ sur $[0, +\infty[$ est celui de $x-1$

Donc

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$	$f(0)$	$f(1)$	$\rightarrow +\infty$

Cela : f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

et f est strictement décroissante sur $[0, 1]$

2) Soit $x \in [1, +\infty[$. On a :

$$x - f(x) = x - (x - 2\sqrt{x} + 2) = 2\sqrt{x} - 2 = 2(\sqrt{x}-1) = \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1} \geq 0$$

Car : $x \geq 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, +\infty]: f(\cdot) \leq n$.

- ③ a) Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- On a $u_0 = 2$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$
 - Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 \leq u_n \leq 2$ et on va montrer que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a $1 \leq u_n \leq 2$ et f est croissante sur $[1, +\infty[$

Donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$

Cela $1 \leq u_{n+1} \leq 4 - 2\sqrt{2}$ ($f(1) = 1$ et $f(2) = 4 - 2\sqrt{2}$)

Or $4 - 2\sqrt{2} < 2$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc d'après le principe de récurrence: $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$

- b) On a $\forall n \in \mathbb{N}: 1 \leq u_n \leq 2$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, +\infty[$

or $f: [1, +\infty[: f(\cdot) \leq n$, donc $\forall n \in \mathbb{N}: f(u_n) \leq u_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante.

- c) Soit $I = [1, 2]$. On a:

- $u_0 \in I$
- f est continue sur I
- $f(I) = [f(1), f(2)] = [1, 4 - 2\sqrt{2}] \subset I$ (car f est croissante sur I)
- $\forall n \in \mathbb{N}: u_{n+1} = f(u_n)$
- On a (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc (u_n) est convergente vers un limite ℓ

Par conséquent: ℓ est une solution de l'équation $f(x) = n$ dans I .

Soit $x \in I$: on a $f(x) = x \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$x \in I$, donc $\ell = 1$ cela li $u_n = 1$.

$n \rightarrow +\infty$