Corrcetion : Suites numériques

Prof. ELAAMRI Younes

10 décembre 2025

1 On a

$$u_1 = \frac{25}{10-u_0} = \frac{25}{10-0} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2},$$

puis

$$u_2 = \frac{25}{10-u_1} = \frac{25}{10-\frac{5}{2}} = \frac{50}{20-5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}.$$

2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} 5 - u_{n+1} &= 5 - \frac{25}{10-u_n} = \frac{5(10-u_n)-25}{10-u_n} \\ &= \frac{50-5u_n-25}{10-u_n} = \frac{25-5u_n}{10-u_n} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5 - u_{n+1} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}.$$

Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 5 - u_n > 0$.
Pour $n = 0$:

$$5 - u_0 = 5 - 0 = 5 > 0.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $5 - u_n > 0$ et on va montrer que $5 - u_{n+1} > 0$.
On a

$$5 - u_{n+1} = \frac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}.$$

Comme $5 - u_n > 0$, le numérateur est > 0. De plus

$$5 + (5 - u_n) > 5,$$

donc le dénominateur est > 0. Ainsi $5 - u_{n+1} > 0$.
Donc, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 5 - u_n > 0 \quad (\text{c.-à-d. } u_n < 5).$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{5}{5-u_{n+1}} = \frac{5}{5-\dfrac{25}{10-u_n}} = \frac{5(10-u_n)}{5(10-u_n)-25} \\ &= \frac{5(10-u_n)}{50-5u_n-25} = \frac{5(10-u_n)}{25-5u_n} = \frac{10-u_n}{5-u_n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{10-u_n}{5-u_n} - \frac{5}{5-u_n} \\ &= \frac{10-u_n-5}{5-u_n} = \frac{5-u_n}{5-u_n} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = 1,$$

donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

4 b) (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 1$, donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 + nr = 1 + n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$v_n = \frac{5}{5-u_n} \iff 5-u_n = \frac{5}{v_n} \iff u_n = 5 - \frac{5}{v_n} = \frac{5v_n - 5}{v_n}.$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{5v_n - 5}{v_n}.$$

Or $v_n = n+1$, donc

$$u_n = \frac{5(n+1)-5}{n+1} = \frac{5n+5-5}{n+1} = \frac{5n}{n+1}.$$

On a

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n.$$

Comme (v_n) est arithmétique,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{n-0+1}{2}(v_0+v_n) = \frac{n+1}{2}(1+1+n) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Activité 2

1

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2u_0+3}{u_0+4} = \frac{2\cdot 0+3}{0+4} = \frac{3}{4}, \\ u_2 &= \frac{2u_1+3}{u_1+4} = \frac{2\cdot\frac{3}{4}+3}{\frac{3}{4}+4} = \frac{\frac{6}{4}+3}{\frac{3}{4}+4} = \frac{6+12}{3+16} = \frac{18}{19}. \end{aligned}$$

2 **Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < u_n < 1$.**

- On a $u_1 = \dfrac{3}{4}$, donc $0 < u_1 < 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $0 < u_n < 1$ (H.R.) et on va montrer que $0 < u_{n+1} < 1$.

Puisque $0 < u_n < 1$, on a $2u_n + 3 > 3$ et $u_n + 4 > 4$, donc

$$2u_n + 3 > 0 \quad \text{et} \quad u_n + 4 > 0,$$

d'où

$$u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} > 0.$$

De plus,

$$\begin{aligned} 1 - u_{n+1} &= 1 - \frac{2u_n+3}{u_n+4} = \frac{u_n+4-2u_n-3}{u_n+4} \\ &= \frac{-u_n+1}{u_n+4}. \end{aligned}$$

Comme $u_n + 4 > 0$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $1 - u_n > 0$, on a

$$1 - u_{n+1} > 0 \quad (\text{c.-à-d. } u_{n+1} < 1).$$

D'où, d'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_n < 1.$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2u_n+3}{u_n+4} - u_n \\ &= \frac{2u_n+3-u_n^2-4u_n}{u_n+4} \\ &= \frac{-u_n^2-2u_n+3}{u_n+4} \\ &= \frac{-\left(u_n-1\right)\left(u_n+3\right)}{u_n+4}. \end{aligned}$$

On a $0 \leq u_n < 1$, donc $u_n - 1 < 0$, et $u_n + 3 > 0$ et $u_n + 4 > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n > 0$.
Ainsi (u_n) est croissante.

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} &= \frac{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\dfrac{2u_n+3}{u_n+4}+3} \\ &= \frac{\dfrac{2u_n+3-u_n-4}{u_n+4}}{\dfrac{2u_n+3+3u_n+12}{u_n+4}} \\ &= \frac{-u_n-1}{5u_n+15} = \frac{-(u_n+1)}{5(u_n+3)} \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n,$$

et (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$.

5 On a (v_n) géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et $v_0 = \dfrac{u_0-1}{u_0+3} = \dfrac{0-1}{0+3} = -\dfrac{1}{3}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = -\frac{1}{3 \cdot 5^n}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n v_n + 3v_n = u_n - 1$, donc $u_n v_n - u_n = -1 - 3v_n$. Par suite $u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$, d'où $u_n = \dfrac{1+3v_n}{1-v_n}$.

Ainsi

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{1+3\cdot\left(-\dfrac{1}{3\cdot 5^n}\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{3\cdot 5^n}\right)} \\ &= \frac{1-\dfrac{1}{5^n}}{1+\dfrac{1}{3\cdot 5^n}}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{1-\dfrac{1}{5^n}}{1+\dfrac{1}{3\cdot 5^n}}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n+5}.$$

Comme (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{5}$,

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 \cdot \frac{1-q^{n+6}}{1-q} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+6}}{1-\frac{1}{5}} \\ &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+6}}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{12}\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+6}\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = -\frac{5}{12}\left(1-\frac{1}{5^{n+6}}\right).$$

Application 1

1

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{3n^3+3n-6} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^3\left(3+\frac{3}{n^2}-\frac{6}{n^3}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3+\frac{3}{n^2}-\frac{6}{n^3}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-6}{n^3} = 0.$$

2

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)\sqrt{n}}{n+4} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+\frac{4}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+\frac{4}{n}} = +\infty, \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty.$$

3

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}\right)}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{1+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}=1,$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}=0.$$

4

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0,$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}=+\infty.$$

5

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(2n-\sqrt{n}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}n\left(2-\frac{\sqrt{n}}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}n\left(2-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$
$$=+\infty,$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}n=+\infty.$$

Application 2

1

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\left(\frac{3}{8}\right)^n+\left(\frac{5}{4}\right)^n\right)=+\infty,$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n=0 \quad (\text{car } -1<\tfrac{3}{8}<1) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{4}\right)^n=+\infty \ (\text{car } \tfrac{5}{4}>1).$$

2 Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$u_{2n}=1 \quad \text{et} \quad u_{2n+1}=-1.$$

La suite (u_n) n'a donc pas de limite.

3

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} (2^n - 3^n)\\ &= \lim_{n\to+\infty} 3^n\left(\frac{2^n}{3^n}-1\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n-1\right) = -\infty,\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} 3^n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \quad (\text{car } -1 < \tfrac{2}{3} < 1).$$

4

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n-3^n}{4^n+2^n}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{4^n\left(1+\left(\frac{2}{4}\right)^n\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1,\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad (\text{car } -1 < \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{2} < 1).$$

Exercice 1

1 (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - \frac{1}{3} &= \frac{6u_n}{1+15u_n} - \frac{1}{3}\\ &= \frac{3(6u_n)-(1+15u_n)}{3(1+15u_n)}\\ &= \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{3(1+15u_n)}\\ &= \frac{3u_n - 1}{3(1+15u_n)}\\ &= \frac{\frac{3u_n-1}{3}}{1+15u_n} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}.\end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}.$$

(b) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > \frac{1}{3}$.

Pour $n = 0$:

$$u_0 = 1 \text{ donc } u_0 > \frac{1}{3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > \frac{1}{3}$ (H.R) et on va montrer que $u_{n+1} > \frac{1}{3}$.

On a

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1+15u_n}.$$

Puisque $u_n > \frac{1}{3}$, on a $u_n - \frac{1}{3} > 0$. De plus

$$1 + 15u_n > 1 + 15 \cdot \frac{1}{3} = 6 > 0.$$

Donc

$$u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0 \quad \text{(c.-à-d. } u_{n+1} > \tfrac{1}{3}\text{)}.$$

Ainsi, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > \frac{1}{3}.$$

2 (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3\left(\dfrac{6u_n}{1+15u_n}\right)} \\ &= 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n} = \frac{18u_n - (1+15u_n)}{18u_n} \\ &= \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{6 \cdot 3u_n} \\ &= \frac{1}{6}\left(\frac{3u_n}{3u_n} - \frac{1}{3u_n}\right) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3u_n}\right) = \frac{1}{6}v_n. \end{aligned}$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n,$$

d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$.

(b) On a (v_n) géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ et $v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3 \cdot 1} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0\, q^n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{2}{3 \cdot 6^n}.$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$. On en déduit que $\frac{1}{3u_n} = 1 - v_n$, ce qui donne $3u_n = \frac{1}{1 - v_n}$.

Par conséquent, $u_n = \frac{1}{3\,(1 - v_n)}$. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{3\left(1 - \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n\right)}.$$

Puisque

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0 \quad (\text{car } 0 < \tfrac{1}{6} < 1),$$

On obtient

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3(1-0)} = \frac{1}{3}.$$

Application 3

1

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^5}-n^{4/3}\right) &= \lim_{n\to+\infty}\left(n^{5/2}-n^{4/3}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n^{5/2}\left(1-n^{4/3-5/2}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n^{5/2}\left(1-n^{-7/6}\right)=+\infty,\end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{n\to+\infty} n^{5/2}=+\infty \quad (\text{car } \tfrac{5}{2}>0) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^{-7/6}=0 \quad (\text{car } -\tfrac{7}{6}<0).$$

2

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} u_n &= \lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(n^{1/2}-n^{1/4}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} n^{1/2}\left(1-n^{1/4-1/2}\right)=\lim_{n\to+\infty} n^{1/2}\left(1-n^{-1/4}\right)=+\infty,\end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/2}=+\infty \quad (\text{car } \tfrac{1}{2}>0) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} n^{-1/4}=0 \quad (\text{car } -\tfrac{1}{4}<0).$$

Application 4

1 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n<1$.
On a $u_0=-1$, donc $u_0<1$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $u_n<1$ (H.R) et on va montrer que $u_{n+1}<1$. On a

$$1-u_{n+1}=1-\frac{1}{2-u_n}=\frac{2-u_n-1}{2-u_n}=\frac{1-u_n}{2-u_n}.$$

Puisque $u_n<1$, on a $1-u_n>0$ et $2-u_n>1>0$, donc $1-u_{n+1}>0$, c.-à-d. $u_{n+1}<1$.
Ainsi, par récurrence,

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n<1.$$

2 Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n &= \frac{1}{2-u_n}-u_n=\frac{1-u_n(2-u_n)}{2-u_n}\\ &= \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n}=\frac{(u_n-1)^2}{2-u_n}.\end{aligned}$$

Comme $u_n<1$, on a $2-u_n>1$ et $(u_n-1)^2\geq 0$, donc $u_{n+1}-u_n\geq 0$. La suite (u_n) est donc croissante.
Elle est croissante et majorée par 1, donc convergente.

Application 5

1 Soit $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 1$. On a

$$-1\leq\cos(n)\leq 1.$$

Comme $n^2+1>0$, on obtient

$$\frac{-1}{n^2+1}\leq\frac{\cos(n)}{n^2+1}\leq\frac{1}{n^2+1}.$$

En ajoutant 2 :

$$\frac{-1}{n^2+1}+2\leq\frac{\cos(n)}{n^2+1}+2\leq\frac{1}{n^2+1}+2.$$

Ainsi

$$\frac{-1}{n^2+1}+2\leq u_n\leq\frac{1}{n^2+1}+2.$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \frac{-1}{n^2+1}+2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1}+2.$$

2 On a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{n^2+1}+2\right)=0+2=2,$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+2\right)=0+2=2.$$

En plus

$$\forall x \in \mathbb{N},\ \frac{-1}{n^2+1}+2 \leq u_n \leq \frac{1}{n^2+1}+2.$$

D'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2.$$

Application 6

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\sin(n) \geq -1 \quad \text{et} \quad \cos(n^2+3) \leq 1$$

Donc

$$\sin(n)+3n \geq -1+3n \quad \text{et} \quad \cos(n^2+3)-\sqrt{n+1} \leq 1-\sqrt{n+1}$$

Càd

$$u_n \geq -1+3n \quad \text{et} \quad v_n \leq 2-\sqrt{n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -1+3n$ et $v_n \leq 2-\sqrt{n}$.

2 On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -1+3n$ et $v_n \leq 2-\sqrt{n}$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1+3n)=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(2-\sqrt{n})=-\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty$.

Application 7

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$|u_n-1|=\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|=\frac{1}{n}.$$

Or

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0,$$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=1.$$

Exercice 2

1 Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0<u_n<1$.

On a $u_0=\frac{1}{3}$, donc $0<u_0<1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0<u_n<1$ (H.R.) et on va montrer que $0<u_{n+1}<1$.

On a $0<u_n<1$ donc $2u_n>0$ et $u_n+1>1>0$, d'où

$$u_{n+1}=\frac{2u_n}{u_n+1}>0.$$

D'autre part
$$1-u_{n+1}=1-\frac{2u_n}{u_n+1}=\frac{u_n+1-2u_n}{u_n+1}=\frac{1-u_n}{u_n+1}.$$
Comme $u_n<1$, on a $1-u_n>0$ et $u_n+1>1$, donc $1-u_{n+1}>0$, c.-à-d. $u_{n+1}<1$.
Ainsi, par récurrence,
$$\forall n\in\mathbb{N},\quad 0<u_n<1.$$

2 (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned}u_{n+1}-u_n&=\frac{2u_n}{u_n+1}-u_n\\&=\frac{2u_n-u_n^2-u_n}{u_n+1}\\&=\frac{-u_n^2+u_n}{u_n+1}\\&=\frac{-u_n(u_n-1)}{u_n+1}\end{aligned}$$
Donc $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}-u_n=\dfrac{-u_n(u_n-1)}{u_n+1}$.

(b) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :
$$u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n(u_n-1)}{u_n+1}\geq 0$$
En effet : On a $0<u_n<1$, donc $u_n>0$, $u_n+1>2$ et $u_n-1<0$.
Càd ; $\forall n\in\mathbb{N}: u_{n+1}-u_n\geq 0$.
Donc (u_n) est croissante.

(c) On a (u_n) est croissante, donc $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\geq u_0$.
càd ; $\forall n\in\mathbb{N}: u_n\geq \dfrac{1}{3}$.

On a (u_n) est croissante et majorée par 1, donc
(u_n) est convergente.

3 (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a
$$1-u_{n+1}=1-\frac{2u_n}{u_n+1}=\frac{u_n+1-2u_n}{u_n+1}=\frac{1-u_n}{1+u_n}.$$
D'autre part, $u_n\geq\dfrac{1}{3}$, donc
$$1+u_n\geq 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}\quad\Longrightarrow\quad\frac{1}{1+u_n}\leq\frac{3}{4}.$$
Comme $1-u_n>0$, on obtient
$$\frac{1-u_n}{1+u_n}\leq\frac{3}{4}(1-u_n),$$
c.-à-d.
$$1-u_{n+1}\leq\frac{3}{4}(1-u_n).$$

(b) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N},\ 1-u_n\leq\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\cdot\dfrac{2}{3}$.
Pour $n=0$:
$$1-u_0=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^0\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que

$$1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3},$$

et on veut montrer que

$$1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}.$$

On a

$$\begin{aligned} 1 - u_{n+1} &\leq \frac{3}{4}(1 - u_n) \\ &\leq \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \cdot \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, par récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3}.$$

c) On a pour tout n,

$$0 \leq 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3}.$$

Or

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3} = 0 \quad (\text{car } -1 < \tfrac{3}{4} < 1),$$

donc, par le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 1.$$

4 a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n+1} - 1}{\frac{2u_n}{u_n+1}} = \frac{2u_n - u_n - 1}{2u_n} \\ &= \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n$.

La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.

b) La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme :

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{1/3 - 1}{1/3} = -2$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 q^n = -2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Exprimons maintenant u_n en fonction de v_n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n} \iff u_n v_n = u_n - 1$$

C'est-à-dire $u_n(v_n - 1) = -1$, d'où $u_n = \dfrac{-1}{v_n - 1} = \dfrac{1}{1 - v_n}$.
En remplaçant v_n par son expression, on obtient :

$$u_n = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

c) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{1+2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$.

On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{1+0} = 1$.

Application 8

1

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n^2\pi}{n+6n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(\dfrac{1}{n^2}-\pi\right)}{n^2\left(\dfrac{1}{n}+6\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{n^2}-\pi}{\dfrac{1}{n}+6} = -\frac{\pi}{6},\end{aligned}$$

puisque

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Comme la fonction $\sin$ est continue en $-\dfrac{\pi}{6}$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{1-n^2\pi}{n+6n^2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

2 On pose

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to+\infty} \frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2\left(16-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\dfrac{1}{n^2}\right)}\\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{16-\dfrac{3}{n}+\dfrac{1}{n^2}}{2+\dfrac{1}{n^2}} = \frac{16}{2} = 8,\end{aligned}$$

car

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 8, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

Application 9

1 On a : f est dérivable sur $]0,+\infty[$. Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = (x-2\sqrt{x}+2)' = 1-\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = \frac{x-1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

Donc le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est celui de $x-1$
On a

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	||	$-$	0	$+$	

Donc f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$ et f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

2 Soit $x \in [1,+\infty[$. On a

$$x - f(x) = x - (x - 2\sqrt{x} + 2) = 2\sqrt{x} - 2 = 2(\sqrt{x}-1)$$
$$= \frac{2(x-1)}{\sqrt{x}+1} \geq 0 \quad \text{car } x \geq 1.$$

On en déduire que $\forall x \in]1,+\infty[\ f(x) \leq x$

3 a Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout entier naturel n.

- On a $u_0 = 2$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On a $1 \leq u_n \leq 2$ et f est croissante sur $[1,+\infty[$.
Donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$.
C'est-à-dire $1 \leq u_{n+1} \leq 4-2\sqrt{2}$ (car $f(1)=1$ et $f(2)=4-2\sqrt{2}$).
Or, $4-2\sqrt{2} < 2$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.
Donc, d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq 2$.

b On a $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$, donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1,+\infty[$.
Or, $\forall x \in [1,+\infty[$: $f(x) \leq x$, donc $\forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) \leq u_n$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.

c) Soit $I = [1,2]$. On a :

- $u_0 \in I$.
- f est continue sur I.
- $f(I) = [f(1), f(2)] = [1, 4-2\sqrt{2}] \subset I$ (car f est strictement croissante sur I).
- $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$.
- La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1, donc (u_n) est convergente vers une limite l.

Par conséquent, l est une solution de l'équation $f(x)=x$ dans I.
Soit $x \in I$. On a $f(x) = x \iff x - 2\sqrt{x} + 2 = x \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$.
Comme $1 \in I$, on a $l = 1$. C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.