

► **EXERCICE 1 :** (18 pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x} - \ln(x)$  et  $(C_f)$  sa courbe dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$  puis interpréter géométriquement le résultat. (2 pt)
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x$ , en déduire la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$ . (2 pt)
3. (a) Dresser le tableau de signe de  $(1-x)\ln(x)$  sur  $]0; +\infty[$ . (1 pt)  
(b) Déduire la position relative de  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta) : y = x$ . (1 pt)
4. Montrer que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{x^2 - x + 1 - \ln(x)}{x^2}$ . (1.5 pt)
5. En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée  $f'$  sur  $]0; +\infty[$  :

$x$	0	$\beta$	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$f'(\beta)$	$+\infty$

(Avec  $f'(\beta) \approx 0.58$ )

- (a) Prouver que  $f$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$  puis dresser le tableau de variations de  $f$ . (1 pt)
  - (b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde  $f''$  de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$ . (1 pt)
  - (c) Déduire la concavité de la courbe  $(C_f)$  en précisant l'abscisse du point d'inflexion. (1 pt)
6. Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  sur  $[\frac{1}{2}; 1]$ . (1 pt)
  7. Construire  $(C_f)$  et  $(\Delta)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . On donne  $(\alpha \approx 0.54)$ ,  $(\beta \approx 1.81)$  et  $(f(\beta) \approx 1.54)$ . (2 pt)
  8. (a) Vérifier que la fonction  $x \mapsto x \ln(x) - x$  est une primitive de la fonction  $x \mapsto \ln(x)$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$ . (1 pt)  
(b) Déterminer la fonction primitive  $F$  de la fonction  $f$  sur  $]0; +\infty[$  tel que  $F(1) = 0$ . (1 pt)
  9. Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $U_0 = \frac{3}{2}$  et  $(\forall n \in \mathbb{N}), U_{n+1} = f(U_n)$ .  
(a) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}), U_n \geq 1$ . (1 pt)  
(b) Montrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante. (0.5 pt)  
(c) Déduire que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente puis déterminer sa limite. (1 pt)

► **EXERCICE 2 :** (2 pts)

1. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $\ln(x+1) = \ln(3x-2)$ . (1 pt)
2. Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  tel que  $1 - (\frac{5}{6})^n > 0.99$ . (1 pt)