Suites numériques

Activité 1

1) On a : $u_1 = \frac{25}{10 - u_0} = \frac{25}{10 - 0} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

$u_2 = \frac{25}{10 - u_1} = \frac{25}{10 - \frac{5}{2}} = \frac{50}{20 - 5} = \frac{50}{15} = \frac{10}{3}$

2) • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$5 - u_{n+1} = 5 - \frac{25}{10 - u_n} = \frac{50 - 5u_n - 25}{10 - u_n}$

$= \frac{25 - 5u_n}{10 - u_n} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : 5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)}$

• Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : 5 - u_n > 0$

• Pour $n = 0$: $5 - u_0 = 5 - 0 = 5 > 0$

• Soit n de $\mathbb{N}$, on suppose que $5 - u_n > 0$ et on va montrer que : $5 - u_{n+1} > 0$

On a : $5 - u_{n+1} = \frac{5(5 - u_n)}{5 + (5 - u_n)} > 0$

Car $5 - u_n > 0$

• Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N} : 5 - u_n > 0$

3) • Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$v_{n+1} = \frac{5}{5 - u_{n+1}} = \frac{5}{5 - \frac{25}{10 - u_n}} = \frac{5(10 - u_n)}{50 - 5u_n - 25} = \frac{5(10 - u_n)}{25 - 5u_n}$

$= \frac{10 - u_n}{5 - u_n}$

$v_{n+1} - v_n = \frac{10 - u_n}{5 - u_n} - \frac{5}{5 - u_n} = \frac{5 - u_n}{5 - u_n} = 1$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : v_{n+1} - v_n = 1$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison 1

b) (v_n) est une suite arithmétique de raison $r=1$, donc

$\forall n\in\mathbb{N} : v_n = v_0 + nr = 1 + n$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$v_n = \frac{5}{5-u_n}$, donc $5-u_n = \frac{5}{v_n}$

donc $u_n = 5 - \frac{5}{v_n} = \frac{5v_n - 5}{v_n}$

D'où $\forall n\in\mathbb{N} : u_n = \frac{5v_n - 5}{v_n}$

d) On a : $\forall n\in\mathbb{N} : u_n = \frac{5v_n - 5}{v_n}$ et $v_n = 1+n$

Donc $\forall n\in\mathbb{N} : u_n = \frac{5(n+1)-5}{n+1} = \frac{5n}{n+1}$

On a : $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= \frac{n-0+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(1+1+n)$

$\therefore S_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Activité 2

1) $u_1 = \frac{2u_0+3}{u_0+4} = \frac{3}{4}$

$u_2 = \frac{2u_1+3}{u_1+4} = \frac{6/4 + 3}{3/4 + 4} = \frac{6+12}{3+16} = \frac{18}{19}$

2) Montrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}^* : 0 < u_n < 1$

- On a : $u_1 = \frac{3}{4}$, donc $0 < u_1 < 1$.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on suppose que $0 < u_n < 1$ et on va montrer que $0 < u_{n+1} < 1$
  - On a $u_n > 0$, donc $2u_n + 3 > 3$ et $u_n + 4 > 4$

    donc $2u_n + 3 > 0$ et $u_n + 4 > 0$

  donc $u_{n+1} = \frac{2u_n+3}{u_n+4} > 0$ (1)

- On a : $1-u_{n+1} = 1-\frac{2u_n+3}{u_n+4} = \frac{u_n+4-2u_n-3}{u_n+4}$

$= \frac{-u_n+1}{u_n+4}$

On a $u_n+4>0$ et $u_n<1$ (c-à-d $-u_n+1>0$)

Donc $1-u_{n+1}>0$ c-à-d $u_{n+1}<1$ ②

Donc $0<u_{n+1}<1$ (d'après ① et ②)

D'où d'après le principe de récurrence

$\forall n\in\mathbb{N}^*$: $0<u_n<1$.

3) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$u_{n+1}-u_n = \frac{2u_n+3}{u_n+4}-u_n = \frac{2u_n+3-u_n^2-4u_n}{u_n+4}$

$= \frac{-u_n^2-2u_n+3}{u_n+4}$

$= \frac{-(u_n-1)(u_n+3)}{u_n+4}$

or : $u_n-1<0$, $u_n+3>0$ et $u_n+4>0$

Donc $u_{n+1}-u_n>0$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_{n+1}-u_n>0$

D'où (u_n) est croissante.

4) ⓐ Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+3} = \frac{\frac{2u_n+3}{u_n+4}-1}{\frac{2u_n+3}{u_n+4}+3} = \frac{2u_n+3-u_n-4}{2u_n+3+3u_n+12}$

$= \frac{u_n-1}{5u_n+15} = \frac{u_n-1}{5(u_n+3)} = \frac{1}{5}\times\frac{u_n-1}{u_n+3} = \frac{1}{5}v_n$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$: $v_{n+1}=\frac{1}{5}v_n$, d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $1/5$.

ⓑ On a (v_n) est une suite géométrique donc

$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = v_0 \times q^n = -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{-1}{3\times 5^n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 3}$ donc $u_n v_n + 3 v_n = u_n - 1$

donc $u_n(v_n - 1) = -1 - 3v_n$

d'où $u_n = \frac{1 + 3v_n}{1 - v_n}$

Alors : $u_n = \frac{1 - 1/5^n}{1 + \frac{1}{3\times 5^n}}$.

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N} : u_n = \frac{1 - 1/5^n}{1 + 1/3\times 5^n}$

ⓒ Soit $n \in \mathbb{N}$: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

$= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$S_n = -\frac{1}{3} \times \frac{1 - (1/5)^{n+1}}{1 - 1/5}$

$S_n = -\frac{5}{12}\left(1 - 1/5^{n+1}\right)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $S_n = -\frac{5}{12}\left(1 - 1/5^{n+1}\right)$

Application 1

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+n+1}{3n^3+n-6} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2(1 + 1/n + 1/n^2)}{n^3\left(3 + 3/n^2 - \frac{6}{n^3}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{n\left(3 + \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^3}\right)}$

$= 0$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{6}{n^3} = 0$

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+2)\sqrt{n}}{n+4} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n\left(1+4/n\right)}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1+\frac{2}{n}\right)}{1+4/n} = +\infty$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{4}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt{n}\left(1+1/\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n}\left(1+3/\sqrt{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+1/\sqrt{n}}{1+3/\sqrt{n}} = 1$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}} = 0$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1} = +\infty$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2n-\sqrt{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

Puisque : $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ et $\lim\limits_{+\infty} n = +\infty$.

Application (2

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{8}\right)^n + \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty$

Puisque : $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \left(3/8\right)^n = 0 & \text{car } -1 < 3/8 < 1 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{5}{4}\right)^n = +\infty & \text{car } \dfrac{5}{4} > 1. \end{cases}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_n = \dfrac{5^n}{(-4)^n} = \left(-\dfrac{5}{4}\right)^n$ or $-\dfrac{5}{4} < -1$

donc la suite (u_n) n'a pas de limite

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n = \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\dfrac{2^n}{3^n} - 1\right)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \dfrac{2}{3} < 1\right)$

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4^n-3^n}{4^n+3^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4^n\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n} = 1$

Puisque : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \quad \left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$

Exercice 1

1) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6u_n}{1+15u_n} - \frac{1}{3}$

$$= \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{3(1+15u_n)} = \frac{3u_n - 1}{3(1+15u_n)}$$

$$= \frac{\frac{3u_n-1}{3}}{1+15u_n} = \frac{u_n - 1/3}{1+15u_n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - 1/3}{1+15u_n}$.

ⓑ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{1}{3}$.

- On a : $u_0 = 1$, donc $u_0 > \frac{1}{3}$
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que : $u_n > \frac{1}{3}$ et on va montrer que $u_{n+1} > \frac{1}{3}$.

On a $u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - 1/3}{15u_n + 1} > 0$

Puisque : $u_n > \frac{1}{3} \Rightarrow u_n - \frac{1}{3} > 0$ et $15u_n + 1 > 0$

Donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > \frac{1}{3}$.

2) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3\left(\frac{6u_n}{1+15u_n}\right)} = 1 - \frac{1+15u_n}{18u_n}$

$$= \frac{18u_n - 1 - 15u_n}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{6 \times 3u_n}$$

$$= \frac{1}{6}\left(\frac{3u_n}{3u_n} - \frac{1}{3u_n}\right) = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{3u_n}\right) = \frac{1}{6} v_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$, d'où (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$.

b) On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 1/6$ et $v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, donc

$\forall n \in \mathbb{N} : v_n = v_0 \times q^n = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{2}{3 \times 6^n}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$ donc $\frac{1}{3u_n} = 1 - v_n$

$$\text{d'où } 3u_n = \frac{1}{1 - v_n}$$

$$\text{càd } u_n = \frac{1}{3(1 - v_n)}$$

$$\text{donc } u_n = \frac{1}{3\left(1 - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right)}$$

Par suite $\forall n \in \mathbb{N} :$ $u_n = \dfrac{1}{3\left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n \times \frac{2}{3}\right)}$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$ Puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \frac{1}{6} < 1\right)$

Application 3

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n^{5/2} - n^{4/3} = \lim\limits_{n \to +\infty} n^{5/2}\left(1 - n^{\frac{4}{3} - \frac{5}{2}}\right)$

$$= \lim_{n \to +\infty} n^{5/2}\left(1 - n^{-7/6}\right) = +\infty$$

Puisque $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} n^{5/2} = +\infty & (5/2 > 0) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n^{-7/6} = 0 & (-7/6 < 0) \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n} - \sqrt[4]{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} n^{1/2} - n^{1/4}$

$$= \lim_{n \to +\infty} n^{1/2}\left(1 - n^{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}\right) = \lim_{n \to +\infty} n^{1/2}\left(1 - n^{-1/4}\right)$$

$$= +\infty$$

Puisque : $\begin{cases} \lim\limits_{n \to +\infty} n^{1/2} = +\infty & (1/2 > 0) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} n^{-1/4} = 0 & (-1/4 < 0) \end{cases}$

Application 4

1) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 1$.

- On a $u_0 = -1$, donc $u_0 < 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n < 1$ et on va montrer que $u_{n+1} < 1$.

On a $1 - u_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{2-u_n} = \dfrac{2-u_n-1}{2-u_n} = \dfrac{1-u_n}{2-u_n} > 0$

Puisque $u_n < 1 \Rightarrow 1-u_n > 0$ et $2-u_n > 1$

Donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : u_n < 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2-u_n} - u_n = \frac{1-2u_n+u_n^2}{2-u_n} = \frac{(u_n-1)^2}{2-u_n} \geqslant 0$$

Puisque $2-u_n > 1$ et $(u_n-1)^2 \geqslant 0$

Donc (u_n) est croissante

On a : (u_n) est croissante et majorée par 1, donc (u_n) est convergente.

Application 5

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $-1 \leqslant \cos(n) \leqslant 1$

Donc $\dfrac{-1}{n^2+1} \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n^2+1} \leqslant \dfrac{1}{n^2+1}$ (car $\dfrac{1}{n^2+1} > 0$)

Donc $\dfrac{-1}{n^2+1} + 2 \leqslant \dfrac{\cos(n)}{n^2+1} + 2 \leqslant \dfrac{1}{n^2+1} + 2$

Car $\dfrac{-1}{n^2+1} + 2 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2+1} + 2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : \dfrac{-1}{n^2+1} + 2 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n^2+1} + 2$

2) On a $\lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{n^2+1}+2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2+1}+2 = 2$

et on a : $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{-1}{n^2+1}+2 \le u_n \le \frac{1}{n^2+1}+2$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Application 6 :

1) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

$\sin(n) \ge -1$ et $\cos(n^2+3) \le 1$

donc $\sin(n)+3n \ge -1+3n$ et $\cos(n^2+3)-\sqrt{n}+1 \le 1-\sqrt{n}+1$

Cad $u_n \ge -1+3n$ et $v_n \le 2-\sqrt{n}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N}$: $u_n \ge -1+3n$ et $v_n \le 2-\sqrt{n}$.

2) On a : $\forall n\in\mathbb{N}$ $u_n \ge -1+3n$ et $v_n \le 2-\sqrt{n}$

or $\lim_{n\to+\infty} -1+3n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} 2-\sqrt{n} = -\infty$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Application 7

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a : $|u_n-1| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$

or $\lim_{+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 2 :

1) Montrons par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$: $0<u_n<1$

- On a : $u_0 = \frac{1}{3}$ donc $0<u_0<1$.
- Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $0<u_n<1$ et on va montrer que $0<u_{n+1}<1$.

On a : $u_n>0$ donc $2u_n>0$ et $u_n+1>0$

Donc $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1} > 0$

On a $1 - u_{n+1} = 1 - \dfrac{2u_n}{u_n+1} = \dfrac{u_n+1-2u_n}{u_n+1} = \dfrac{1-u_n}{u_n+1} > 0$

Puisque : $0 < u_n < 1$ donc $u_n+1 > 1$ et $1-u_n > 0$

Par conséquent $0 < u_{n+1} < 1$

Donc d'après le principe de récurrence $0 < u_n < 1$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{2u_n - u_n^2 - u_n}{u_n+1}$$

$$= \frac{-u_n^2 + u_n}{u_n+1} = \frac{-u_n(u_n-1)}{u_n+1}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \dfrac{-u_n(u_n-1)}{u_n+1}$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = -\frac{u_n(u_n-1)}{u_n+1} \geq 0$$

En effet : On a $0 < u_n < 1$, donc $u_n > 0$, $u_n+1 > 2$ et $u_n - 1 < 0$

c.à.d : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geq 0$

Donc (u_n) est croissante

c) • On a (u_n) est croissante, donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq u_0$
c.à.d $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq \frac{1}{3}$.

• On a (u_n) est croissante et majorée par 1, donc (u_n) est convergente.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$1 - u_{n+1} = 1 - \frac{2u_n}{u_n+1} = \frac{u_n+1-2u_n}{u_n+1} = \frac{1-u_n}{1+u_n}.$$

D'autre part : On a $u_n \geq \frac{1}{3}$ donc $u_n + 1 \geq \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

donc $0 < \frac{1}{u_n+1} \leq \frac{3}{4}$ et comme $1 - u_n > 0$

donc $\frac{1-u_n}{1+u_n} \leq \frac{3}{4}(1-u_n)$

C-à-d : $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1-u_n)$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}$: $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1-u_n)$

(b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} : 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$

- On a : $1 - u_0 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 \times \frac{2}{3}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$ et on va montrer que : $1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3}$

On a $1 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(1-u_n)$

$\leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

$\leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3}$

Donc $1 - u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \times \frac{2}{3}$

Donc d'après le principe de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, \ 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$.

(c) On a $\forall n \in \mathbb{N}$: $0 < 1 - u_n \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \frac{2}{3}$

et $\lim_{+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ $\left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$

Donc $\lim_{+\infty} u_n = 1$.

4) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{u_n+1} - 1}{\frac{2u_n}{u_n+1}} = \frac{2u_n - u_n - 1}{2u_n}$$

$$= \frac{u_n - 1}{2u_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{u_n - 1}{u_n}\right) = \frac{1}{2} v_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

ⓑ On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

et $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{3}} = \frac{-2}{1} = -2$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 q^n = -2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-1}{2^{n-1}}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$ donc $u_n v_n = u_n - 1$

c.à.d $u_n(v_n - 1) = -1$ donc $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

donc $u_n = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

ⓒ On a $\forall n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{1}{1 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Application 8 :

* On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1 - n^2\pi}{n + 6n^2} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2(1/n^2 - \pi)}{n^2\left(\frac{1}{n} + 6\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1/n^2 - \pi}{1/n + 6} = -\dfrac{\pi}{6}$

Puisque : $\lim\limits_{n \to +\infty} 1/n^2 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

et comme la fonction sin est continue en $-\frac{\pi}{6}$, donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sin\left(\dfrac{1 - n^2\pi}{n + 6n^2}\right) = \sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -1/2$.

* On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{n^2(16 - \frac{3}{n} + 1/n^2)}{n^2\left(2 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{16 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{2 + \frac{1}{n^2}}$

$= \dfrac{16}{2} = 8$

Puisque : $\lim -\frac{3}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = 0$

et comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 8, donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{16n^2 - 3n + 1}{2n^2 + 1}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Application (9) :

1) On a : f est dérivable sur $]0, +\infty[$. Soit $x \in]0, +\infty[$:

$f'(x) = (x - 2\sqrt{x} + 2)' = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x}} = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} + 1)}$

Donc le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$ est celui de $x - 1$

Donc

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$+\infty$

c.à.d : f est strictement croissante sur $[1, +\infty[$

et f est strictement décroissante sur $[0, 1]$

2) Soit $x \in [1, +\infty[$, on a :

$x - f(x) = x - (x - 2\sqrt{x} + 2) = 2\sqrt{x} - 2 = 2(\sqrt{x} - 1) = \dfrac{2(x - 1)}{\sqrt{x} + 1} \geq 0$

car : $x \geq 1$

Donc $\forall x \in [1, +\infty[: \quad f(x) \leq x$.

3) (a) Montrons par récurrence que $1 \leq u_n \leq 2$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

- On a $u_0 = 2$, donc $1 \leq u_0 \leq 2$
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $1 \leq u_n \leq 2$ et on va montrer que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

On a $1 \leq u_n \leq 2$ et f est croissante sur $[1, +\infty[$

Donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$

C.à.d $1 \leq u_{n+1} \leq 4 - 2\sqrt{2}$ $\quad (f(1) = 1$ et $f(2) = 4 - 2\sqrt{2})$

Or $4 - 2\sqrt{2} \leq 2$, donc $1 \leq u_{n+1} \leq 2$

Donc d'après le principe de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \; 1 \leq u_n \leq 2$.

(b) On a $\forall n \in \mathbb{N} : 1 \leq u_n \leq 2$, donc $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \in [1, +\infty[$

or $\forall x \in [1, +\infty[: f(x) \leq x$, donc $\forall n \in \mathbb{N} : f(u_n) \leq u_n$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} \leq u_n$ donc (u_n) est décroissante.

(c) Soit $I = [1, 2]$. On a :

- $u_0 \in I$
- f est continue sur I
- $f(I) = [f(1), f(2)] = [1, 4 - 2\sqrt{2}] \subset I$ $\quad$ (car f est croissante sur I)
- $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n)$
- On a (u_n) est décroissante et minorée par 1 donc (u_n) est convergente vers une limite ℓ

Par conséquent : ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ dans I.

Soit $x \in I$: On a $f(x) = x \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} + 2 = x \Leftrightarrow \sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$

$1 \in I$, donc $\ell = 1$ c.à.d $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.