Exercice1: (9 pts)

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} \end{cases}$.

1. Calculer u_1 et u_2. 0.5 pt
2. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_n > 2$. 1 pt
3. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-1)(u_n-2)}{u_n+1}$. 0.75 pt
   (b) En déduire la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$. 1 pt
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. 0.5 pt
4. (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(u_n - 2)$. 1 pt
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} : \quad 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. 1.5 pt
   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. 0.75 pt
5. Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$.
   (a) Montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique dont on précisera sa raison. 1 pt
   (b) Déterminer en fonction de n l'expression de v_n et u_n. 1 pt

Exercice 2: (11 pts)

Soit f la fonction définie par: $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x-2}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. (a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f. 0.5 pt
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$. 1 pt
   (c) Calculer $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus. 1.5 pt
2. (a) Montrer que $\forall x \in D_f : \quad f'(x) = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$. 1.5 pt
   (b) Étudier les variations de la fonction f et dresser le tableau de variations de f. 1.5 pt
3. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe (C_f) au point $(0, f(0))$. 1 pt
4. Montrer que le point $A(2, 1)$ est un centre de symétrie de la courbe (C_f). 1.5 pt
5. Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$. 1.5 pt
6. Construire la courbe (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. 1 pt