Exercice 1 (18 pts)

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x} - \ln(x)$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1. Montrer que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat. (2pt)
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$, en déduire la branche infine de (C_f) au voisinage de $+\infty$. (2pt)
3. (a) Dresser le tableau de signe de $(1-x)\ln(x)$ sur $]0;+\infty[$. (1pt)
   (b) Déduire la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$. (1pt)
4. Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = \frac{x^2-x+1-\ln(x)}{x^2}$. (1.5pt)
5. En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f' sur $]0;+\infty[$:

x	0		β		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f'(\beta)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f'(\beta) \approx 0.58$

   (a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f. (1pt)
   (b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0;+\infty[$. (1pt)
   (c) Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant l'abscisse du point d'inflexion. (1pt)
6. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[\frac{1}{2};1]$. (1pt)
7. Construire (C_f) et (Δ) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$. On donne $(\alpha \approx 0.54)$, $(\beta \approx 1.81)$ et $(f(\beta) \approx 1.54)$. (2pt)
8. (a) Vérifier que la fonction $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$. (1pt)
   (b) Déterminer la fonction primitive F de la fonction f sur $]0;+\infty[$ tel que $F(1) = 0$. (1pt)
9. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), U_{n+1} = f(U_n)$.
   (a) Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}), U_n \geq 1$. (1pt)
   (b) Montrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. (0.5pt)
   (c) Déduire que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite. (1pt)

Exercice 2 (2 pts)

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(x+1) = \ln(3x-2)$. (1pt)
2. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n > 0.99$. (1pt)