Suites majorée, minorée, bornée

Définitions

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique (avec $I \subset \mathbb{N}$).

1. (u_n) est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in I,\ u_n \leq M$.
2. (u_n) est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in I,\ u_n \geq m$.
3. (u_n) est **bornée** si et seulement si elle est à la fois minorée et majorée, c'est-à-dire $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in I,\ m \leq u_n \leq M$.

Monotonie d'une suite

Définitions

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

1. **Croissante si** $\forall n \in I\ u_{n+1} \geq u_n$.
2. **Décroissante si** $\forall n \in I\ u_{n+1} \leq u_n$.
3. **Strictement croissante si** $\forall n \in I\ u_{n+1} > u_n$.
4. **Strictement décroissante si** $\forall n \in I\ u_{n+1} < u_n$.

Critères (différences et quotients)

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

1. Si $\forall n \in I :\ u_{n+1} - u_n \geq 0$, alors (u_n) est **croissante**.
2. Si $\forall n \in I :\ u_{n+1} - u_n \leq 0$, alors (u_n) est **décroissante**.
3. Si $\forall n \in I,\ u_n > 0$ et $\forall n \in I :\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors (u_n) est **croissante**.
4. Si $\forall n \in I,\ u_n > 0$ et $\forall n \in I :\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors (u_n) est **décroissante**.

Remarque

Si (u_n) est croissante, alors pour tous $n \geq p$, on a $u_n \geq u_p$.
Si (u_n) est décroissante, alors pour tous $n \geq p$, on a $u_n \leq u_p$.

Suite arithmétique

Définition

La suite (v_n) est **arithmétique** de raison r si $v_{n+1} - v_n = r$ pour tout n de I.

Propriétés et formules

Pour tout $n \geq p$:

1. $v_n = v_p + (n-p)\,r$; en particulier $v_n = v_1 + (n-1)r$ ou $v_n = v_0 + nr$.
2. **Somme des termes consécutifs** :

$$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = \frac{(n-p+1)\,(v_p + v_n)}{2}$$

. Ici, $n-p+1$ est le nombre de termes, v_p le premier et v_n le dernier.

Suite géométrique

Définition

La suite (v_n) est **géométrique** de raison q si $v_{n+1} = q\,v_n$ pour tout n de I.

Propriétés et formules

Pour tout $n \geq p$:

1. $v_n = v_p\, q^{n-p}$; en particulier $v_n = v_0\, q^n$.
2. **Somme des termes consécutifs** (si $q \neq 1$) :

$$v_p + v_{p+1} + \ldots + v_n = v_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Limites usuelles

Limites de référence

Pour $p > 0$ et $k > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0.$$

Limite de (q^n)

Pour $q \in \mathbb{R}$:

1. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
2. Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
3. Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
4. Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'admet **pas** de limite.

Convergence d'une suite

Théorème (suite monotone bornée)

Toute suite **croissante et majorée** est convergente.
Toute suite **décroissante et minorée** est convergente.

Critères de comparaison et d'encadrement

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

1. Si $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$.
2. Si $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = -\infty$.
3. Si $l \in \mathbb{R}$, $|u_n - l| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.
4. (*Théorème des gendarmes*) Si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \lim\limits_{n\to\infty} w_n = l$, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = l$.

Limite de (v_n) avec $v_n = f(u_n)$

Théorème (continuité et passage à la limite)

Soit (u_n) une suite qui converge vers un réel l et soit f une fonction continue en l. Si l'on pose $v_n = f(u_n)$, alors la suite (v_n) tend vers $f(l)$.

Suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$

Propriété (point fixe)

Soit (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_n \in I$ pour tout n, f continue sur un intervalle I et $f(I) \subset I$.
Si (u_n) **converge** vers L, alors L vérifie l'équation du point fixe $f(L) = L$ (c'est-à-dire L est solution de $f(x) = x$ sur I).

Critères de monotonie

Soit I un intervalle, $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_n \in I$ pour tout n.

1. Si $\forall x \in I,\ f(x) \geq x$, alors (u_n) est **croissante**.
2. Si $\forall x \in I,\ f(x) \leq x$, alors (u_n) est **décroissante**.

Principe de récurrence (rappel)

Méthode

Pour démontrer la propriété $\forall n \geq n_0,\ P(n)$:

1. **Initialisation** : vérifier que $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** : supposer $P(n)$ vraie pour un $n \geq n_0$ et démontrer $P(n+1)$ est vraie.
3. **Conclusion** : par récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.