



LES FONCTIONS LOGARITHMES

2BAC PC/SVT

Cours détaillé avec correction de toutes les applications, exercices et activités.

I

Fonction Logarithme Népérien

Activité 1

1 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ admet une primitive sur $]0, +\infty[$.

La primitive de f sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1 est appelée fonction logarithme népérien et se note \ln .

2 Étudier les variations de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$.

3 En déduire que $\forall (x, y) \in (]0, +\infty[)^2 : \ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$

4 Étudier le signe de la fonction \ln sur $]0, +\infty[$.

1

Définition et propriétés

Définition

La fonction logarithme népérien est la primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1, et se note \ln ou Log .

Remarque

Le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est $D = \{x \in \mathbb{R} \mid u(x) > 0\}$.

Application 1

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1 $f(x) = \ln(3x + 9)$

2 $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

3 $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$

4 $f(x) = \ln(|2x - 1|)$

Propriétés

- La fonction \ln est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- $\forall (x, y) \in \forall (x, y) \in (]0, +\infty[)^2 : \ln(x) > \ln(y) \Leftrightarrow x > y$.
- $\forall (x, y) \in \forall (x, y) \in (]0, +\infty[)^2 : \ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y$.

Application 2

Résoudre dans \mathbb{R} les équations et les inéquations suivantes :

1 $\ln(x - 1) = \ln(2 - x)$

2 $\ln(2x - 1) \geq \ln(x)$

3 $\ln(x^2 - 2x) = 0$

4 $\ln(x^2 - 3x + 3) < 0$

Propriété

Soit $x \in]0; +\infty[$. On a

- $\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
- $\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Application 3

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f dans les cas suivants :

[1] $f(x) = \ln(\ln x)$

[2] $f(x) = \sqrt{(x-2)\ln(x)}$

Propriétés algébriques

Soient a et b deux réels strictement positifs et $r \in \mathbb{Q}^*$. On a :

- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$
- $\ln(a^r) = r \ln(a)$
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$

Exemples :

- $\ln(\sqrt{8}) = \frac{1}{2}\ln(8) = \frac{1}{2}\ln(2^3) = \frac{3}{2}\ln(2).$
- $\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln(3) - \ln(4) + \ln(4) - \ln(3) = 0.$

Application 4

1. Simplifier les expressions suivantes $A = \ln(9) + \ln\sqrt[3]{3} - \ln(81)$ et $B = \ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right) + \ln\left(\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)$.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante (E) : $\ln(x^2 - 1) + 2 \ln(2) = \ln(4x - 1)$.

Exercice 1

1. Soient a et b deux réels strictement positifs. Simplifier le nombre suivant :

$$A = \ln(ab^2) - \ln\left(\sqrt[3]{a^2b^5}\right) + \ln\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) - \ln\left(\sqrt[4]{a^2b^6}\right).$$

2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante : $\ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln(3)$.

Propriétés

- L'équation $\ln(x) = 1$ admet une solution unique sur $]0, +\infty[$ qui se note e ($e \approx 2,71$).
- Pour tout $r \in \mathbb{Q}$ on a : $\ln(e^r) = r$.

Exemple :

Résolvons l'équation $4\ln(x) = 3$.

Soit $x > 0$. On a :

$$\begin{aligned} 4\ln(x) = 3 &\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{3}{4} \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = \ln\left(e^{\frac{3}{4}}\right) \\ &\Leftrightarrow x = e^{\frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Puisque $e^{\frac{3}{4}} > 0$, l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{e^{\frac{3}{4}}\}$

Application 5

1. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$
2. En déduire les solutions de l'équation dans \mathbb{R} $\ln(x)^2 - 4\ln(x) + 3 = 0$.



Exercice 2

1 Résoudre dans \mathbb{R} ce qui suit :

- (a) $\ln^2 x - \ln x = 0$
 (b) $\ln^2(x) + \ln(x) - 6 \geq 0$

2 Résoudre dans \mathbb{R}^2 ce qui suit :

- (a) $\begin{cases} \ln x^2 + \ln y^5 = 16 \\ \ln x^3 + \ln y^3 = 6 \end{cases}$
 (b) $\begin{cases} x - y = 2 \\ \ln x + \ln y = \ln 3 \end{cases}$

2 Limites usuelles

Propriété

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

Exemple :

Calculons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

Application 6

Calculer les limites suivantes :

- 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - \sqrt{x}$
 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$
 3 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 4}{x^2}$

- 4 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right)$
 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$
 6 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3}$

- 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \ln^2 x - \ln x + 1$
 8 $\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2-x)$
 9 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\frac{x}{3})}{x-3}$

Exercice 3

Calculer les limites suivantes :

- 1 $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \ln x$
 2 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5 \ln x$
 3 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 (\ln x)^3$
 4 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$

- 5 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2}$
 6 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$
 7 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x + \ln x}$
 8 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{x^2 + 1}$

- 9 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x^2 + x + 1}{3 + 2x^2} \right)$
 10 $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$
 11 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln^2 x - \ln x}{1 + \ln x}$
 12 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x^2 - x)}{2x}$

3

Étude de la fonction $x \mapsto \ln x$

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Les branches infinies :

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, alors l'axe des ordonnées est une asymptote verticale de (C_{\ln}) .

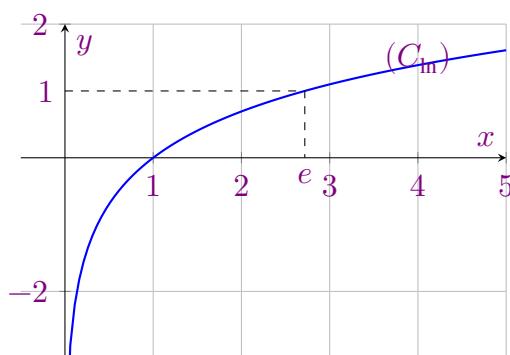
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

Pour tout $x > 0$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Alors la courbe (C_{\ln}) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

Concavité de la courbe de $x \mapsto \ln(x)$:

$(\ln(x))'' = \frac{-1}{x^2} < 0$, alors la courbe (C_{\ln}) est concave.

Représentation graphique de $x \mapsto \ln(x)$:



4

Dérivée de la fonction $x \mapsto \ln x$

Propriété

- Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I et on a : pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Si u est une fonction dérivable et ne s'annule pas sur l'intervalle I , alors la fonction $f : x \mapsto \ln(|u(x)|)$ est dérivable sur I et on a : pour tout $x \in I$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple :

On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln(\sqrt{x})$.

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable et strictement positive sur $]0, +\infty[$, alors la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Et on a : $(\forall x \in]0, +\infty[) : f'(x) = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$;

Application 7

- 1 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln(x^2 - x + 1)$ est dérivable sur \mathbb{R} puis déterminer sa dérivée.
- 2 Déterminer f' dans les cas suivants :
 - a $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 4})$ sur \mathbb{R}
 - b $f(x) = \ln(\ln x)$ sur $]1, +\infty[$



(c) $f(x) = \frac{x}{\ln(2x-1)}$ sur $\left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty [$

Corollaire

Soit u une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur un intervalle I .

Les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I sont les fonctions $x \mapsto \ln|u(x)| + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

La fonction u est soit strictement positive, soit strictement négative sur I .

Exemple :

Déterminons une primitives de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $I =]-\infty; 0[$

On a $f(x) = \frac{1}{x} = \frac{(x)'}{x}$

Donc une primitives de la fonction f sur $I =]-\infty; 0[$ est $x \mapsto \ln(|x|)$.

C'est-à-dire $x \mapsto \ln(-x)$.

Application 8

Déterminer une primitive de f dans les cas suivants :

1 $f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x + 1}$ sur $]1, +\infty[$.

2 $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$ sur $]0; 1[$.

3 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ sur $]-1, +\infty[$.

4 $f(x) = \tan x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

II

Fonction Logarithme de base a

1

Définition et propriétés

Définition

Soit a un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base a est la fonction, notée \log_a , définie sur $]0, +\infty[$ par $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.



Remarque

- $\log_e(x) = \ln(x)$
- $\log_a(a) = 1$
- $\log_a(1) = 0$
- $\log_a(a^r) = r$ ($r \in \mathbb{Q}$)

Propriétés

Pour tous réels strictement positifs x et y et pour tout $r \in \mathbb{Q}$, on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
- $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$.
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$.

■ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.

Exemple :

On a : $\log_{\frac{1}{2}}(2^4) = 4 \log_{\frac{1}{2}}(2) = 4 \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 4 \times -1 = -4$

Application 9

Simplifier le nombre suivant : $A = \log_2(8) - \log_3(27) + \log_5\left(\frac{1}{125}\right)$

2

Étude de la fonction \log_a

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$.

- Si $a > 1$, alors la fonction \log_a est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.
- Si $0 < a < 1$, alors la fonction \log_a est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

Preuve :

La fonction \log_a est dérivable sur $]0, +\infty[$ et on a ($\forall x \in]0, +\infty[$) : $\log'_a(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$.

Donc le signe de $\log'_a(x)$ dépend du signe de $\ln a$, ce qui nous amène à discuter deux cas :

$a > 1$ (c'est-à-dire $\ln a > 0$)

$0 < a < 1$ (c'est-à-dire $\ln a < 0$)

Conséquence

Pour tous réels strictement positifs x et y . On a :

- Si $a > 1$, alors $\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y$.
- Si $0 < a < 1$, alors $\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x < y$

Application 10

Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations suivantes :

1 $\log_{\frac{1}{2}}(2-x) \leq \log_{\frac{1}{2}}(x+4)$

2 $\log_3(2-x) \leq \log_3(x+4)$

3 Fonction logarithme décimal

Définition

La fonction logarithme décimal est la fonction logarithme de base 10. Elle est notée \log .

On a pour tout $x \in]0, +\infty[$: $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

On note le logarithme népérien par Log (L majuscule) et le logarithme de base 10 par \log (l minuscule)



Remarque

- $\log(1) = 0$
- $\log(10) = 1$
- $\log(10^r) = r$ ($r \in \mathbb{Q}$)

Exemple :

$$\log(0,001) = \log(10^{-3}) = -3.$$

Application 11

Simplifier le nombre suivant : $A = \log(1000) - \log(0,0001) + \log\left(\frac{1}{10000}\right)$

Propriété

- $(\forall x > 0)(\forall r \in \mathbb{Q}) : \log(x) = r \Leftrightarrow x = 10^r$
- $\log(x) > r \Leftrightarrow x > 10^r$
- $\log(x) \leq r \Leftrightarrow 0 < x \leq 10^r$

Exemple :

On appelle ion oxonium l'ion H_3O^+ .

Le pH d'une solution aqueuse est défini par :

$$\text{pH} = -\log([H_3\text{O}^+]),$$

où $[H_3\text{O}^+]$ désigne la concentration de l'ion oxonium dans la solution (exprimée en moles par litre).

On en déduit :

$$[H_3\text{O}^+] = 10^{-\text{pH}}.$$

(On rappelle qu'une solution est acide si $\text{pH} < 7$, neutre si $\text{pH} = 7$ et basique si $\text{pH} > 7$)

Application 12

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) : $\log(x+11) + \log(x-4) = 2$.

Exercice 4 de synthèse : Extrait de la session de rattrapage 2022

Soit f la fonction numérique définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\begin{cases} f(x) = x^4(\ln x - 1)^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1cm).

- 1 Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de (C) au voisinage de $+\infty$.
- 2
 - a Montrer que f est continue à droite en 0.
 - b Étudier la dérivabilité de f à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat.
- 3
 - a Montrer que $f'(x) = 2x^3(\ln x - 1)(2\ln x - 1)$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
 - b Dresser le tableau de variations de f .
- 4
 - a Sachant que $f''(x) = 2x^2(6\ln x - 5)\ln x$ pour tout x de l'intervalle $]0; +\infty[$, étudier le signe de $f''(x)$ sur $]0; +\infty[$.
 - b En déduire que la courbe (C) admet deux points d'inflexion dont on déterminera les abscisses.
- 5
 - a Construire (C) dans le repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$ (on prend : $\sqrt{e} \approx 1,6$ et $e^2 \approx 7,2$).
 - b En utilisant la courbe (C) , déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^2(\ln x - 1) = -1$.
- 6 On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = f(|x|)$
 - a Montrer que la fonction g est paire.
 - b Construire (C_g) la courbe représentative de g dans le même repère $(0; \vec{i}, \vec{j})$.

Corrections

Correction Activité 1

- 1 On a f est une fonction rationnelle et $D_f = \mathbb{R}^*$, donc f est continue sur $]0, +\infty[$ ($]0, +\infty[\subset D_f$), par suite f admet une primitive sur $]0, +\infty[$.

2 On a :

$$\forall x \in]0, +\infty[: \ln'(x) = \left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

donc \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

- 3 On a \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, donc

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 : \ln(x) > \ln(y) \iff x > y.$$

- 4 On a $\ln(1) = 0$ et \ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Donc

- si $x > 1$ alors $f(x) > f(1)$ cad $f(x) > 0$
- si $0 < x < 1$ alors $f(x) < f(1)$ cad $f(x) < 0$

On en déduit le tableau de signe de $\ln(x)$:

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		-	0 +

Correction Application 1

- 1 $f(x) = \ln(3x + 9)$.

On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 3x + 9 > 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x > -3\}$.

$=] -3; +\infty[$

- 2 $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $x \in D_f \iff x^2 - 2x > 0$.

Or $x^2 - 2x = 0 \iff x(x - 2) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 2$.

Donc

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x^2 - 2x$	+	0	-	0 +

Par suite $x \in D_f \iff x > 2$ ou $x < 0$.

Finalement : $D_f =] -\infty, 0[\cup]2; +\infty[$

- 3 $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$.

On a $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x+2} > 0 \text{ et } x+2 \neq 0\right\}$.

Or

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$x + 1$	—		—	0 +
$x + 2$	—	0 +		+
$\frac{x+1}{x+2}$	+		—	0 +

Donc $D_f =]-\infty; -2[\cup]-1; +\infty[$

- [4] $f(x) = \ln(|2x - 1|)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\iff |2x - 1| > 0 \\ &\iff |2x - 1| \neq 0 \\ &\iff 2x - 1 \neq 0 \\ &\iff x \neq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Donc $D_f = \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$

Correction Application 2

- [1] $\ln(x - 1) = \ln(2 - x)$.

On a

$$\begin{aligned} D_E &= \{x \in \mathbb{R} / x - 1 > 0 \text{ et } 2 - x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ et } x < 2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 2\} \\ &=]1; 2[. \end{aligned}$$

Soit $x \in D_E$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(x - 1) = \ln(2 - x) &\iff x - 1 = 2 - x \\ &\iff 2x = 3 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

On a $\frac{3}{2} \in D_E$, par suite

$$S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$$

- [2] $\ln(x^2 - 2x) = 0$.

On a : $D_E =]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ (Voir application 1).

Soit $x \in D_E$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 2x) = 0 &\iff \ln(x^2 - 2x) = \ln(1) \\ &\iff x^2 - 2x = 1 \\ &\iff x^2 - 2x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de la dernière équation : $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-1) = 4 + 4 = 8 > 0$

donc

$$\begin{aligned} x^2 - 2x - 1 = 0 &\iff x = \left(\frac{2 + \sqrt{8}}{2(1)} \right) \text{ ou } x = \left(\frac{2 - \sqrt{8}}{2(1)} \right) \\ &\iff x = \left(\frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} \right) \text{ ou } x = \left(\frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} \right) \\ &\iff x = 1 + \sqrt{2} \text{ ou } x = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

On a $2 > 1$, donc $\sqrt{2} > 1$ cad $1 - \sqrt{2} < 0$, donc $1 - \sqrt{2} \in D_E$.

Aussi $2 > 1$ donc $\sqrt{2} > 1$, par suite $\sqrt{2} + 1 > 2$, donc $1 + \sqrt{2} \in D_E$.

Finalement :

$$S = \{1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}\}.$$

3 $\ln(2x - 1) \geq \ln(x)$.

On a

$$\begin{aligned} D_I &= \{x \in \mathbb{R} / 2x - 1 > 0 \text{ et } x > 0\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{1}{2} \text{ et } x > 0 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} / x > \frac{1}{2} \right\} = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[\end{aligned}$$

Soit $x \in D_E$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(2x - 1) \geq \ln(x) &\iff 2x - 1 \geq x \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

Donc $S = [1, +\infty[\cap D_E = [1; +\infty[$

4 $\ln(x^2 - 3x + 3) < 0$.

On a $D_I = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 3 > 0\}$

On a le discriminant de $x^2 - 3x + 3$ est $\Delta = (-3)^2 - 4(3)(1) = 9 - 12 = -3 < 0$

donc le signe de $x^2 - 3x + 3$ est celui de 1 (coefficients de x^2)

par suite $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 3 > 0$.

On en déduit que $D_I = \mathbb{R}$.

Soit $x \in D_I$. On a :

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 3x + 3) < 0 &\iff \ln(x^2 - 3x + 3) < \ln(1) \\ &\iff x^2 - 3x + 3 < 1 \\ &\iff x^2 - 3x + 2 < 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de $x^2 - 3x + 2 = 0$ est $\Delta = (-3)^2 - 4(1)(2) = 1 > 0$. Donc

$$\begin{aligned} x^2 - 3x + 2 = 0 &\iff x = \left(\frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2(1)} \right) \text{ ou } x = \left(\frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2(1)} \right) \\ &\iff x = \left(\frac{3+1}{2} \right) \text{ ou } x = \left(\frac{3-1}{2} \right) \\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = 1 \end{aligned}$$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	-	0	+	

Par suite $\ln(x^2 - 3x + 3) < 0 \iff 1 < x < 2$

Finalement $S =]1; 2[$.

Correction Application 3

1 $f(x) = \ln(\ln x)$. On a

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / \ln x > 0 \text{ et } x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ln x > \ln 1 \text{ et } x > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 1\} \\ D_f &=]1; +\infty[\end{aligned}$$

2 $f(x) = \sqrt{(x-2)\ln(x)}$.

$$\text{On a } D_f = \{x \in \mathbb{R} / (x-2)\ln(x) \geq 0 \text{ et } x > 0\}$$

Or :

x	0	1	2	$+\infty$
$x - 2$	—		—	0 +
$\ln(x)$		— 0 +		+
$(x-2)\ln(x)$	+	0 —	0 +	

Donc

$$D_f =]0, 1] \cup [2; +\infty[$$

Correction Application 4

1 On a :

(a)

$$\begin{aligned} A &= \ln(9) + \ln(\sqrt[3]{3}) - \ln(81) \\ &= \ln(3^2) + \ln(3^{1/3}) - \ln(3^4) \\ &= 2\ln 3 + \frac{1}{3}\ln 3 - 4\ln 3 \\ &= \left(2 + \frac{1}{3} - 4\right)\ln 3 \\ &= \left(\frac{6}{3} + \frac{1}{3} - \frac{12}{3}\right)\ln 3 \\ &= \left(\frac{6+1-12}{3}\right)\ln 3 \\ &= \frac{-5}{3}\ln 3 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} B &= \ln(\sqrt{2+\sqrt{2}}) + \ln(\sqrt{2-\sqrt{2}}) \\ &= \ln\left(\sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \\ &= \ln\left(\sqrt{2^2 - (\sqrt{2})^2}\right) \\ &= \ln(\sqrt{4-2}) = \ln(\sqrt{2}) \\ &= \frac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$

2 Résolvons dans \mathbb{R} , l'équation (E) : $\ln(x^2 - 1) + 2\ln(2) = \ln(4x - 1)$

On a

$$\begin{aligned} D_E &= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 > 0 \text{ et } 4x - 1 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / |x| > 1 \text{ et } x > \frac{1}{4}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ et } x > \frac{1}{4}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 1\} \\ &=]1; +\infty[. \end{aligned}$$

Soit $x \in D_E$. On a :

$$\begin{aligned} (E) &\iff \ln(x^2 - 1) + \ln(2^2) = \ln(4x - 1) \\ &\iff \ln(4(x^2 - 1)) = \ln(4x - 1) \\ &\iff 4x^2 - 4 = 4x - 1 \\ &\iff 4x^2 - 4x - 3 = 0 \end{aligned}$$

On a le discriminant de $4x^2 - 4x - 3$ est $\Delta = (-4)^2 - 4(4)(-3) = 64 > 0$

Donc

$$\begin{aligned} (E) &\iff x = \left(\frac{4 + \sqrt{64}}{2 \times 4} \right) \text{ ou } x = \left(\frac{4 - \sqrt{64}}{2 \times 4} \right) \\ &\iff x = \left(\frac{4 + 8}{8} \right) \text{ ou } x = \left(\frac{4 - 8}{8} \right) \\ &\iff x = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a $\frac{3}{2} \in D_E$ et $-\frac{1}{2} \notin D_E$, par suite $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$

Correction Exercice 1

1 Soit a et b de \mathbb{R}^{+*} . On a :

$$\begin{aligned} A &= \ln(ab^2) - \ln(\sqrt[3]{a^2b^5}) + \ln\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) - \ln(\sqrt[4]{a^2b^6}) \\ &= \ln(a) + \ln(b^2) - \frac{1}{3}(\ln(a^2) + \ln(b^5)) + \ln(a) - \ln(\sqrt{b}) - \frac{1}{4}(2\ln(a) + 6\ln(b)) \\ &= \ln(a) + 2\ln(b) - \frac{2}{3}\ln(a) - \frac{5}{3}\ln(b) + \ln(a) - \frac{1}{2}\ln(b) - \frac{1}{2}\ln(a) - \frac{3}{2}\ln(b) \\ &= \left(1 - \frac{2}{3} + 1 - \frac{1}{2}\right)\ln(a) + \left(2 - \frac{5}{3} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right)\ln(b) \\ A &= \frac{5}{6}\ln(a) - \frac{5}{3}\ln(b) \end{aligned}$$

2 On a

$$\begin{aligned} D_E &= \{x \in \mathbb{R} / x - 1 > 0 \text{ et } x - 3 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 1 \text{ et } x > 3\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x > 3\} \\ &=]3; +\infty[. \end{aligned}$$

Soit $x \in D_E$. On a :

$$\begin{aligned}
 (E) &\iff \ln(x-1) + \ln(x-3) = \ln(3) \\
 &\iff \ln((x-1)(x-3)) = \ln(3) \\
 &\iff (x-1)(x-3) = 3 \\
 &\iff x^2 - 4x + 3 = 3 \\
 &\iff x^2 - 4x = 0 \\
 &\iff x(x-4) = 0 \\
 &\iff x = 0 \text{ ou } x = 4
 \end{aligned}$$

On a $0 \notin D_E$ et $4 \in D_E$. Donc $S = \{4\}$

Correction Application 5

- [1] On a le discriminant de $x^2 - 4x + 3$ est $\Delta = (-4)^2 - 4(3)(1) = 16 - 12 = 4 > 0$
Donc

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4x + 3 = 0 &\iff x = \left(\frac{4 + \sqrt{4}}{2}\right) \text{ ou } x = \left(\frac{4 - \sqrt{4}}{2}\right) \\
 &\iff x = \left(\frac{4 + 2}{2}\right) \text{ ou } x = \left(\frac{4 - 2}{2}\right) \\
 &\iff x = 3 \text{ ou } x = 1
 \end{aligned}$$

Donc $S = \{1, 3\}$

- [2] Soit $x \in]0, +\infty[$. D'après la question 1, on a :

$$\begin{aligned}
 (\ln x)^2 - 4(\ln x) + 3 = 0 &\iff \ln(x) = 3 \text{ ou } \ln(x) = 1 \\
 &\iff \ln(x) = \ln(e^3) \text{ ou } x = e \\
 &\iff x = e^3 \text{ ou } x = e
 \end{aligned}$$

Comme $e^3 > 0$ et $e > 0$, donc $S = \{e^3, e\}$

Correction Exercice 2

- [1] $\ln^2 x - \ln x = 0$. Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned}
 \ln^2 x - \ln x = 0 &\iff \ln x(\ln x - 1) = 0 \\
 &\iff \ln x = 0 \text{ ou } \ln(x) = 1 \\
 &\iff x = 1 \text{ ou } x = e
 \end{aligned}$$

Comme $1 > 0$ et $e > 0$, donc $S = \{1, e\}$

- [2] $\ln^2(x) + \ln(x) - 6 \geq 0$. Soit $x > 0$. On pose $X = \ln(x)$. L'inéquation $\ln^2(x) + \ln(x) - 6 \geq 0$ devient $X^2 + X - 6 \geq 0$ de discriminant $\Delta = 1^2 - 4(-6)(1) = 25 > 0$, donc $X^2 + X - 6$ admet deux racines

$$\begin{aligned}
 X_1 &= \left(\frac{-1 + \sqrt{25}}{2(1)}\right) = \left(\frac{-1 + 5}{2}\right) = 2 \\
 X_2 &= \left(\frac{-1 - \sqrt{25}}{2(1)}\right) = \left(\frac{-1 - 5}{2}\right) = -3
 \end{aligned}$$

En plus

X	$-\infty$	-3	2	$+\infty$
$X^2 + X - 6$	+	0	-	0

Donc

$$\begin{aligned} X^2 + X - 6 \geq 0 &\iff X \geq 2 \text{ ou } X \leq -3 \\ &\iff \ln(x) \geq 2 \text{ ou } \ln(x) \leq -3 \\ &\iff x \geq e^2 \text{ ou } x \leq e^{-3} \end{aligned}$$

et comme $x > 0$ donc $S =]0; e^{-3}] \cup [e^2; +\infty[$.

3 Résoudre le système pour x et y de $]0, +\infty[$.

$$\begin{cases} \ln(x^2) + \ln(y^5) = 16 \\ \ln(x^3) + \ln(y^3) = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} 2\ln(x) + 5\ln(y) = 16 \\ 3\ln(x) + 3\ln(y) = 6 \end{cases}$$

On pose $\begin{cases} X = \ln x \\ Y = \ln y \end{cases}$ le système devient $\begin{cases} 2X + 5Y = 16 \\ 3X + 3Y = 6 \end{cases}$

Càd $\begin{cases} 2X + 5Y = 16 \\ X + Y = 2 \end{cases}$ On a $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 5 = -3 \neq 0$

$$X = \left(\frac{D_x}{D} \right) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 16 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{-3} \right) = \left(\frac{16 - 10}{-3} \right) = \left(\frac{6}{-3} \right) = -2$$

$$Y = \left(\frac{D_y}{D} \right) = \left(\frac{\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-3} \right) = \left(\frac{4 - 16}{-3} \right) = \left(\frac{-12}{-3} \right) = 4$$

Par suite :

$$\begin{cases} \ln(x) = -2 \\ \ln(y) = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = e^{-2} \\ y = e^4 \end{cases}$$

Finalement $S = \{(e^{-2}; e^4)\}$



4 Soient x et y de $]0, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x - y = 2 \\ \ln(x) + \ln(y) = \ln(3) \end{cases} &\iff \begin{cases} x - y = 2 \\ \ln(xy) = \ln(3) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x - y = 2 \\ xy = 3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2 + y \\ y(2 + y) = 3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2 + y \\ y^2 + 2y - 3 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2 + y \\ (y - 1)(y + 3) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2 + y \\ y = 1 \text{ ou } y = -3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 2 + y \\ y = 1 \quad (\text{car } y > 0) \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc $S = \{(3, 1)\}$

Correction Application 6

$$1 \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(\frac{\ln \sqrt{x}^2}{\sqrt{x}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \left(2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} - 1 \right) = -\infty$$

Puisque :

On pose $y = \sqrt{x}$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$. Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$.

$$2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x}^2)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$ ($y = \sqrt{x}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$)

$$3 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) + 4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x^2} + \frac{4}{x^2} \right) = 0.$$

4 On pose $y = \frac{x}{x+1}$. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} y = 0^+$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(y) = -\infty.$$

5

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2(1 + \frac{1}{x^2}))}{x} \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} \right) \\&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\ln(x)}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} \right)\end{aligned}$$

- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$
- On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 1/x^2)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{\frac{1}{x^2}} \times \frac{1}{x^3} \right)$

On pose $y = \frac{1}{x^2}$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 1/x^2)}{1/x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + y)}{y} = 1$$

En plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

$$\text{Par suite } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 1/x^2)}{x} = 0$$

$$\text{Par conséquent : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$$

$$6 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2\ln^2(x) - \ln(x) + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 \left(2 - \frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{(\ln x)^2} \right) = +\infty$$

Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$$7 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{x} \times \frac{1}{x^2} \right) = 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$$8 \quad \text{On pose } y = 2 - x. \text{ On a } \lim_{x \rightarrow 2^-} y = 0^+$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 2^-} \ln(2 - x) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln(y) = -\infty.$$

$$9 \quad \text{On pose } y = \frac{x}{3}. \text{ On a } \lim_{x \rightarrow 3} y = 1, \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\frac{x}{3})}{x - 3} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(\frac{x}{3})}{3(\frac{x}{3} - 1)} \\&= \lim_{y \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(y)}{y - 1} \times \frac{1}{3} \right) \\&= 1 \times \frac{1}{3} \\&= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Correction Exercice 3

$$1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 - \frac{\ln(x)}{x} \right) = +\infty$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

$$2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 5\ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - 5 \frac{\ln x}{x^2} \right) = +\infty$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$

$$[3] \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^4 (\ln x)^3 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x \ln x)^3 = 0$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$

$$[4] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 \left(\frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$$

$$[5] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln^2 x}{x} \times \frac{\ln x}{x} \right) = 0 \times 0 = 0$$

$$[6] \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1+x \ln x}{x} \right) = +\infty$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1+x \ln x = 1+0=1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0^+$$

$$[7] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\ln x \left(\frac{1}{\ln x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{\ln x} + 1} \right) = 1$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

$$[8] \quad \lim_{+\infty} \frac{\ln(2x+3)}{x^2+1} = \lim_{+\infty} \left(\frac{\ln(2x+3)}{2x+3} \times \frac{2x+3}{x^2+1} \right) = 0$$

Puisque :

- On pose $y = 2x+3$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{2x+3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(y)}{y} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0$$

$$[9] \quad \text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln \left(\frac{x^2+x+1}{3+2x^2} \right) = \ln \left(\frac{1}{2} \right) = -\ln(2)$$

$$\text{Puisque } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+x+1}{3+2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$[10] \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{x-e} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-\ln(e)}{x-e} = \ln'(e) = \frac{1}{e}$$

$$[11] \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln^2 x - \ln x}{1+\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2 (2 - \frac{1}{\ln x})}{\ln(x)(\frac{1}{\ln x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x \times \left(\frac{2 - \frac{1}{\ln x}}{\frac{1}{\ln x} + 1} \right) = +\infty$$

Car : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$.

$$[12] \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x^2-x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x^2-x)}{2x^2-x} \times \frac{2x^2-x}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+(2x^2-x))}{2x^2-x} \times \frac{2x-1}{2} \right) = -\frac{1}{2}$$

Puisque :

- On pose $y = 2x^2 - x$, on a $\lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+(2x^2-x))}{2x^2-x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x-1}{2} = \frac{-1}{2}$$

Correction Application 7

- [1] On a le discriminant de $x^2 - x + 1$ est $\Delta = (-1)^2 - 4(1)(1) = -3 < 0$
 donc le signe de $x^2 - x + 1$ est celui de 1 (coefficients de x^2)
 donc $\forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x + 1 > 0$, en plus $x \mapsto x^2 - x + 1$ est
 dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme.
 par suite $f : x \mapsto \ln(x^2 - x + 1)$ est dérivable sur \mathbb{R} .
 Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - x + 1)'}{x^2 - x + 1} \\ &= \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x + 1}$

2 a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4})'}{\sqrt{x^2 + 4}}$

$$\begin{aligned} &= \frac{(x^2 + 4)'}{2\sqrt{x^2 + 4}} \\ &= \frac{x}{x^2 + 4} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{x}{x^2 + 4}$.

b) Soit $x \in]1, +\infty[$. On a $f'(x) = \frac{(\ln x)'}{\ln x}$

$$= \frac{1}{x \ln(x)}$$

Donc $x \in]1, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{x \ln(x)}$

c) Soit $x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[$. On a $f'(x) = \frac{(x)' \ln(2x - 1) - x(\ln(2x - 1))'}{(\ln(2x - 1))^2}$.

$$\begin{aligned} &= \frac{\ln(2x - 1) - x \times \frac{(2x - 1)'}{2x - 1}}{(\ln(2x - 1))^2} \\ &= \frac{\ln(2x - 1) - \frac{2x}{2x - 1}}{(\ln(2x - 1))^2} \\ &= \frac{(2x - 1) \ln(2x - 1) - 2x}{(2x - 1)(\ln(2x - 1))^2} \end{aligned}$$

Donc $\forall x \in \left] \frac{1}{2}; 1 \right[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{(2x - 1) \ln(2x - 1) - 2x}{(2x - 1)(\ln(2x - 1))^2}$

Correction Application 8

1 Soit $x \in]1, +\infty[$, on a

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{(x^2 - 2x + 1)'}{x^2 - 2x + 1} \right)$$

donc une primitive de f est : $x \mapsto \frac{1}{2} \ln|x^2 - 2x + 1|$ cad $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2 - 2x + 1)$, car $\forall x \in]1, +\infty[, x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$

2 Soit $x \in]0, 1[$

$$f(x) = \frac{1}{x \ln x} = \left(\frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)} \right) = \left(\frac{(\ln x)'}{\ln(x)} \right)$$

donc une primitive de f est : $x \mapsto \ln|\ln(x)|$ cad $x \mapsto \ln(-\ln(x))$ puisque $\forall x \in]0, 1[: \ln(x) < 0$

3 Soit $x \in]-1; +\infty[$. On a

$$f(x) = \frac{x}{x + 1} = \left(\frac{x + 1 - 1}{x + 1} \right) = 1 - \left(\frac{1}{x + 1} \right) = 1 - \left(\frac{(x + 1)'}{x + 1} \right)$$

Donc une primitive de f sur $] -1; +\infty[$ est : $x \mapsto x - \ln|x + 1|$, comme $\forall x \in] -1; +\infty[: x + 1 > 0$, donc une primitive de f sur $] -1; +\infty[$ est : $x \mapsto x - \ln(x + 1)$

4 Soit $x \in] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. On a :

$$\tan(x) = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = -\left(\frac{\cos x}{\cos x}\right)$$

Donc une primitive de f est $x \mapsto -\ln |\cos x|$ cad $x \mapsto -\ln(\cos x)$ car $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[: \cos x > 0$.

Correction Application 9

1] On a :

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) = 3$$

$$\log_3(27) = \log_3(3^3) = 3$$

$$\log_5(5^{-3}) = -3$$

Donc

$$\begin{aligned} A &= \log_2(8) - \log_3(27) - \log_5\left(\frac{1}{125}\right) \\ &= 3 - 3 + 3 \\ A &= 3 \end{aligned}$$

Correction Application 10

1] Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} x \in D_I &\iff 2-x > 0 \text{ et } x+4 > 0 \\ &\iff -4 < x < 2 \end{aligned}$$

Donc $D_I =]-4; 2[$

Soit $x \in D_I$. On a

$$\begin{aligned} \log_{1/2}(2-x) \leq \log_{1/2}(x+4) &\iff 2-x \geq x+4 \quad (\text{car } 0 < \frac{1}{2} < 1) \\ &\iff 2x \leq -2 \\ &\iff x \leq -1 \end{aligned}$$

Donc $S =]-4; 2[\cap]-\infty; -1] =]-4; -1]$

2] On a $D_I =]-4; 2[$

Soit $x \in D_I$. On a

$$\begin{aligned} \log_3(2-x) \leq \log_3(x+4) &\iff 2-x \leq x+4 \quad (\text{car } 3 > 1) \\ &\iff 2x \geq -2 \\ &\iff x \geq -1 \end{aligned}$$

Donc $S =]-4; 2[$

$\cap [-1; +\infty[= [-1; 2[$.

Correction Application 11

1] On a

$$\begin{aligned} A &= \log(1000) - \log(0,0001) + \log\left(\frac{1}{10000}\right) \\ &= \log(10^3) - \log(10^{-4}) + \log(10^{-4}) \\ &= 3 + 4 - 4 \\ A &= 3 \end{aligned}$$

1 Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}x \in D_E &\iff x + 11 > 0 \text{ et } x - 4 > 0 \\&\iff x > -11 \text{ et } x > 4 \\&\iff x > 4\end{aligned}$$

Donc $D_E =]4; +\infty[$

Soit $x \in D_E$. On a :

$$\begin{aligned}\log(x + 11) + \log(x - 4) = 2 &\iff \log((x + 11)(x - 4)) = \log(10^2) \\&\iff x^2 + 7x - 44 = 100 \\&\iff x^2 + 7x - 144 = 0\end{aligned}$$

On a le discriminant de $x^2 + 7x - 144$ est $\Delta = 7^2 - 4(1)(-144) = 625 > 0$

Donc

$$\begin{aligned}x^2 + 7x - 144 = 0 &\iff x = \left(\frac{-7 + \sqrt{625}}{2(1)} \right) \text{ ou } x = \left(\frac{-7 - \sqrt{625}}{2(1)} \right) \\&\iff x = \left(\frac{-7 + 25}{2} \right) = 9 \text{ ou } x = \left(\frac{-7 - 25}{2} \right) = -16\end{aligned}$$

On a $-16 \notin D_E$ et $9 \in D_E$. Donc $S = \{9\}$.