Activité 1

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{25}{10 - u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Vérifier que $5 - u_{n+1} = \dfrac{5(5-u_n)}{5+(5-u_n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis montrer par récurrence que $5 - u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{5}{5-u_n}$.
   - a. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique et déterminer sa raison.
   - b. Exprimer v_n en fonction de n.
   - c. Vérifier que $u_n = \dfrac{5v_n - 5}{v_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   - d. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   - e. Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n$.

Activité 2

On considère la suite numérique (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 4}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.
3. Montrer que (u_n) est croissante.
4. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3}$.
   - a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.
   - b. Exprimer v_n en fonction de n, puis en déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   - c. Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n+5}$.

Application 1

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{3n^3+n-6}$,
2. $u_n = \dfrac{(n+2)\sqrt{n}}{n+4}$,
3. $u_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+3}$,
4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,
5. $u_n = 2n - \sqrt{n}$.

Application 2

Calculer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = \left(\dfrac{3}{8}\right)^n + \left(\dfrac{5}{4}\right)^n$,
2. $u_n = \dfrac{5^n}{(-4)^n}$,
3. $u_n = 2^n - 3^n$,
4. $u_n = \dfrac{4^n - 3^n}{4^n + 3^n}$.

Exercice 1 : Rattrapage 2011

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \dfrac{6u_n}{1+15u_n}$.

1. a. Vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$.
   b. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > \dfrac{1}{3}$.
2. On considère la suite numérique (v_n) définie par $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 1 - \dfrac{1}{3u_n}$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$.
   b. Exprimer v_n en fonction de n.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n = \dfrac{1}{3 - 2(\frac{1}{6})^n}$ puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Application 3

Calculer la limite de (u_n) dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = n^{\frac{5}{2}} - n^{\frac{4}{3}}$,
2. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt[4]{n}$.

Application 4

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n), puis en déduire qu'elle est convergente.

Application 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\cos(n)}{n^2+1} + 2$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\dfrac{1}{n^2+1} + 2 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2+1} + 2$.
2. En déduire la limite de (u_n).

Application 6

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies par $u_n = \sin(n) + 3n$ et $v_n = \cos(n^2+3) - 5n + 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -1 + 3n$ et $v_n \leq 2 - 5n$.
2. En déduire les limites de (u_n) et (v_n).

Application 7

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + 1$.
Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par $u_0 = \dfrac{1}{3}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n+1}$.

1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 1$.
2. a. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(1-u_n)}{u_n+1}$.
   b. Étudier la monotonie de (u_n).
   c. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $u_n \geq \dfrac{1}{3}$ et que la suite (u_n) est convergente.
3. a. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_{n+1} \leq \dfrac{3}{4}(1-u_n)$.
   b. En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}); 1 - u_n \leq (\dfrac{3}{4})^n \times \dfrac{2}{3}$.
   c. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$.
   a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
   b. Exprimer v_n et u_n en fonction de n.
   c. Déterminer à nouveau $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Application 8

Calculer les limites des suites (u_n) et (v_n) suivantes :

$$u_n = \sin\left(\frac{1-n^2\pi}{n+6n^2}\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sqrt{\frac{16n^2-3n+1}{2n^2+1}}.$$

Application 9

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

1. Montrer que f est décroissante sur $[0, 1]$ et croissante sur $[1, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f(x) \leq x$.
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 2$.
   b. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.