Correction DS 2

Exercice 1

1) (a) On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x-1 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} \,/\, x \neq 1\}$
$=]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$.

(b)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$.

(c) On a

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

Donc : $\lim\limits_{x\to1^+} x-1 = 0^+$ et $\lim\limits_{x\to1^-} x-1 = 0^-$

En plus $\lim\limits_{x\to1} x^2-5x+13 = 1-5+13 = 9$

Ainsi $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

I. G : La droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale de (C_f)

2) (a) Soit $x \in D_f$. On a : $f'(x) = \left(\dfrac{x^2-5x+13}{x-1}\right)'$

$$= \frac{(2x-5)(x-1)-(x^2-5x+13)\times1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2-2x-5x+5-x^2+5x-13}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^2-2x-8}{(x-1)^2}$$

Or : $(x-4)(x+2) = x^2+2x-4x-8 = x^2-2x-8$

Par suite $\forall x \in D_f$: $f'(x) = \dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$

(b) On a $\forall x \in D_f : f'(x) = \frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ et $(x-1)^2 > 0$

Donc le signe de $f'(x)$ sur D_f est celui de $(x-4)(x+2)$

x	$-\infty$		-2		1		4		$+\infty$
$(x-4)(x+2)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\searrow$ $-\infty$	$\|\|$	$+\infty$ $\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(-2) = \frac{4+10+13}{-2-1} = -\frac{27}{3} = -9$$

$$f(4) = \frac{16-20+13}{4-1} = \frac{9}{3} = 3$$

3) (a) soit $x \in D_f$. On a : $x - 4 + \frac{9}{x-1} = \frac{(x-4)(x-1)+9}{x-1}$

$$= \frac{x^2 - x - 4x + 4 + 9}{x-1}$$

$$= \frac{x^2 - 5x + 13}{x-1}$$

$$= f(x)$$

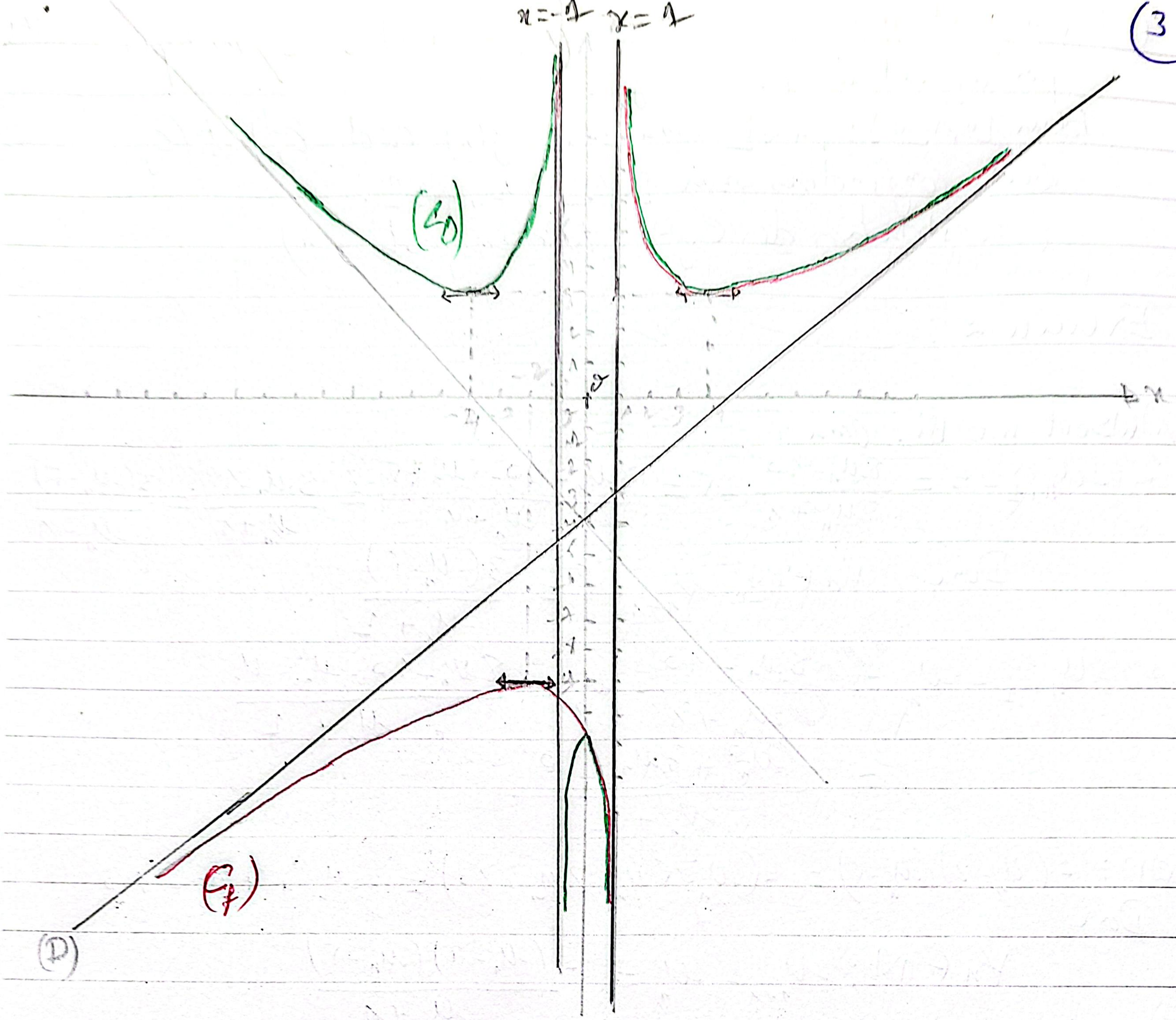
Donc $\forall x \in D_f : f(x) = x - 4 + \frac{9}{x-1}$.

(b) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-4) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{9}{x-1} = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x-4) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{9}{x-1} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = x - 4$ est une asymptote de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

4) Construction de (C_f) :



5)

(a) On a $D_g = \{x \in \mathbb{R} / |x|-1 \neq 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / |x| \neq 1\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \text{ ou } x \neq -1\}$

$=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1; +\infty[$

On a : $\forall x \in D_g : -x \in D_g$.

Soit $x \in D_g$.

$g(-x) = \dfrac{(-x)^2 - 5|-x| + 13}{|-x| - 1}$

$= \dfrac{x^2 - 5|x| + 13}{|x| - 1}$

$= g(x)$

Donc $\forall x \in D_g : g(-x) = g(x)$

Par suite g est paire.

(b) Soit $x \in [0, 1[\cup]1; +\infty[$. On a $|x| = x$, donc

$$g(x) = \frac{x^2 - 5|x| + 13}{|x| - 1} = \frac{x^2 - 5x + 13}{x - 1} = f(x)$$

Donc $\forall x \in [0, 1[\cup]1; +\infty[$, $g(x) = f(x)$

(c) On g est une fonction paire, donc (C_g) est symétrique par rapport à l'axe (Oy).
Sur $[0,1[\cup]1,+\infty[$, On a $f(x)=g(x)$ càd (C_f) et (C_g) sont confondues sur $[0,1[\cup]1;+\infty[$.
(Construction de (C_g) : Voir la question 4)

Exercice 2 :

1) (a) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a :

* $u_{n+1}-5=\dfrac{8u_n-10}{u_n+1}-5=\dfrac{8u_n-10-5u_n-5}{u_n+1}=\dfrac{3u_n-15}{u_n+1}=\dfrac{3(u_n-5)}{u_n+1}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-5=\dfrac{3(u_n-5)}{u_n+1}$.

* $u_{n+1}-u_n=\dfrac{8u_n-10}{u_n+1}-u_n=\dfrac{8u_n-10-u_n^2-u_n}{u_n+1}$

$=\dfrac{-u_n^2+7u_n-10}{u_n+1}$

or : $-(u_n-2)(u_n-5)=-(u_n^2-5u_n-2u_n+10)=-u_n^2+7u_n-10$

Donc

$\forall n\in\mathbb{N};\ u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-5)}{u_n+1}$

(b) On a : $u_0=6$, donc $u_0>5$.
Soit $n\in\mathbb{N}$. On suppose que $u_n>5$ et on va montrer que $u_{n+1}>5$

On a $u_{n+1}-5=\dfrac{3(u_n-5)}{u_n+1}>0$

Puisque : On a $u_n>5$, donc $\begin{cases}u_n-5>0\\ u_n+1>6>0\end{cases}$

Donc $u_{n+1}>5$
Ainsi par récurrence $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>5$.

(c) * Soit $n\in\mathbb{N}$. On a : $u_{n+1}-u_n=\dfrac{-(u_n-2)(u_n-5)}{u_n+1}<0$

Puisque : On a $u_n>5$, donc $\begin{cases}u_n-5>0\\ u_n-2>3>0\\ u_n+1>6>0\end{cases}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}-u_n<0$

Ainsi, (u_n) est décroissante.

On a (u_n) est décroissante, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_0$

càd $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$ en plus $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n > 5$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $5 < u_n < 6$

Ainsi (u_n) est bornée.

(d) On a (u_n) est décroissante et minorée par 5, donc (u_n) est convergente.

2)

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$V_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 5}{u_{n+1} - 2} = \frac{\frac{8u_n - 10}{u_n + 1} - 5}{\frac{8u_n - 10}{u_n + 1} - 2} = \frac{8u_n - 10 - 5u_n - 5}{8u_n - 10 - 2u_n - 2}$$

$$= \frac{3u_n - 15}{6u_n - 12} = \frac{3(u_n - 5)}{6(u_n - 2)} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n - 5}{u_n - 2} = \frac{1}{2} V_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$.

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

On a $V_0 = \frac{u_0 - 5}{u_0 - 2} = \frac{6-5}{6-2} = \frac{1}{4}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = V_0 q^n = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $V_n = \frac{u_n - 5}{u_n - 2}$, donc $V_n u_n - 2V_n = u_n - 5$

càd $V_n u_n - u_n = 2V_n - 5$, par suite : $u_n(V_n - 1) = 2V_n - 5$

Donc $$u_n = \frac{2V_n - 5}{V_n - 1} = \frac{5 - 2V_n}{1 - V_n} = \frac{5 - 2\frac{1}{4}(1/2)^n}{1 - \frac{1}{4}(1/2)^n}$$

$$= \frac{20 - 2(1/2)^n}{4 - (1/2)^n}$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{20 - 2(1/2)^n}{4 - (1/2)^n}$

(c) On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{20 - 2(1/2)^n}{4 - (1/2)^n}$

et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $-1 \leq \frac{1}{2} < 1$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{20}{4} = 5$

3) (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{1}{2} \leq 1$ donc $\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1$

donc $-\left(\frac{1}{2}\right)^n \geq -1$, c.à.d $4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 3$.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$. $4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 3$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$

On a $u_n - 5 = \frac{20 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 5 = \frac{20 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n - 20 + 5\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

$= \frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$

or : $4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \geq 3$, donc $\frac{1}{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \leq \frac{1}{3}$

, donc $\frac{3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n} \leq 3\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{3}$

c.à.d $u_n - 5 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et comme $u_n - 5 > 0$, donc $|u_n - 5| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - 5| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

4) On a $\lim u_n = 5$, donc $\lim \frac{u_n}{5} = 1$ et comme h est continue en 1, donc $\lim w_n = h(1)$

or $h(1) = \cos(\pi) = -1$, donc $\lim w_n = -1$.