Correction de DM2

Exercice 1

1) On a : $u_1 = \dfrac{4u_0 - 2}{u_0 + 1} = \dfrac{4\times 3 - 2}{3+1} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$.

$u_2 = \dfrac{4u_1 - 2}{u_1 + 1} = \dfrac{4\times(5/2) - 2}{\frac{5}{2}+1} = \dfrac{8}{7/2} = \dfrac{16}{7}$.

2) On a $u_0 = 3$, donc $u_0 > 2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n > 2$ et on montre que $u_{n+1} > 2$.
On a

$$u_{n+1} - 2 = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2 = \frac{4u_n - 2 - 2u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{2u_n - 4}{u_n + 1}$$
$$= \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1}$$

et comme $u_n > 2$, donc $u_n - 2 > 0$ et $u_n + 1 > 2 > 0$

Donc $u_{n+1} - 2 > 0$ c.à.d $u_{n+1} > 2$

Ainsi par récurrence $\forall n \in \mathbb{N} : u_n > 2$.

3) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - u_n = \frac{4u_n - 2 - u_n^2 - u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n^2 + 3u_n - 2}{u_n + 1}$$

D'autre part : $-(u_n - 1)(u_n - 2) = -(u_n^2 - 2u_n - u_n + 2) = -(u_n^2 - 3u_n + 2)$
$= -u_n^2 + 3u_n - 2$

Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1}$

Par suite $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1}$.

ⓑ Soit $n \in \mathbb{N}$.
D'après la question 2, on a : $u_n > 2$, donc $\begin{cases} u_n - 1 > 1 > 0 \\ u_n - 2 > 0 \\ u_n + 1 > 3 > 0 \end{cases}$

et $u_{n+1} - u_n = \dfrac{-(u_n - 1)(u_n - 2)}{u_n + 1}$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$

Par suite : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n < 0$,

Finalement (u_n) est décroissante.

ⓒ On a (u_n) est minorée par 2 et décroissante, donc (u_n) est convergente.

4)

ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a d'après la question 2 :

$$u_{n+1} - 2 = \frac{2(u_n - 2)}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n+1} \times (u_n - 2)$$

En plus : $u_n > 2$, donc $u_n + 1 > 3$, Ainsi $\frac{1}{u_n+1} < \frac{1}{3}$

c-à-d $\frac{2}{u_n+1} < \frac{2}{3}$, donc $\frac{2}{u_n+1} \times (u_n - 2) < \frac{2}{3}(u_n - 2)$

(car $u_n - 2 > 0$) c-à-d $u_{n+1} - 2 < \frac{2}{3}(u_n - 2)$

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - 2 < \frac{2}{3}(u_n - 2)$

ⓑ La proposition $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < u_n - 2$ déjà traité à la question 2.
il suffit de montrer que $u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

On a $u_0 - 2 = 3 - 2 = 1$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$, donc $u_0 - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et on va montrer que : $u_{n+1} - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

On a $\begin{cases} u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(u_n - 2) \\ u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \end{cases}$

Donc $u_{n+1} - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$

c-à-d $u_{n+1} - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

Ainsi par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N},\quad 0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ⓒ On a : $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 < u_n - 2 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_n - 2| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

et comme $\lim \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

Donc $\lim u_n = 2$.

5) ⓐ Soit $n \in \mathbb{N}$, On a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \frac{4u_n - 2 - 2u_n - 2}{4u_n - 2 - u_n - 1}$$

$$= \frac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \frac{2}{3} \times \frac{u_n - 2}{u_n - 1} = \frac{2}{3} v_n$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = \frac{2}{3} v_n$

Ainsi (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$.

ⓑ On a (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$

et $v_0 = \frac{u_0 - 2}{u_0 - 1} = \frac{3 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2}$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$: $v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Soit $n \in \mathbb{N}$, On a : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$, donc $v_n(u_n - 1) = u_n - 2$

càd $v_n u_n - v_n = u_n - 2$, donc $v_n u_n - u_n = v_n - 2$

càd $u_n(v_n - 1) = v_n - 2$, ainsi $u_n = \frac{v_n - 2}{v_n - 1}$

càd $u_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$.

Exercice 2

1) ⓐ On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}$

$=]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

ⓑ On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} x-1 = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0 \end{cases}$

ⓒ On a

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$	

Donc $\lim\limits_{x \to 2^+} x-2 = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} x-2 = 0^-$

ainsi $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$

En plus $\lim\limits_{x \to 2^+} x-1 = \lim\limits_{x \to 2^-} x-1 = 2-1 = 1$

Par suite : $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = -\infty$.

I.G : La droite (D) d'équation $x = 2$ est une asymptote verticale de (C_f).

2) ⓐ Soit $x \in D_f$. On a : $f'(x) = \left(x - 1 + \dfrac{1}{x-2}\right)'$

$= 1 - \dfrac{(x-2)'}{(x-2)^2}$

$= 1 - \dfrac{1}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)^2 - 1^2}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{(x-2-1)(x-2+1)}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}$

Ainsi $\forall x \in D_f : f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

(b) On a $\forall x \in D_f$, $f'(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)^2}$

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(x-1)(x-3)$ sur D_f.

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$(x-1)(x-3)$		$+$	0		$-$		0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

$f(1) = 1 - 1 + \dfrac{1}{1-2} = -1$

$f(3) = 3 - 1 + \dfrac{1}{3-2} = 2 + 1 = 3$

3) On a : $(T) : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

Comme $f'(0) = \dfrac{3}{4}$ et $f(0) = -1 - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}$

Donc $(T) : y = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{2}$.

4) * Soit $x \in D_f$, montrons que $4 - x \in D_f$

On a $x \in D_f \Rightarrow x \neq 2$

$\Rightarrow -x \neq -2$

$\Rightarrow 4 - x \neq 4 - 2$

$\Rightarrow 4 - x \neq 2$

Donc $4 - x \in D_f$

Ainsi $\forall x \in D_f : 4 - x \in D_f$.

* Soit $x \in D_f$. On a :

$f(x) + f(4-x) = x - 1 + \dfrac{1}{x-2} + 4 - x - 1 + \dfrac{1}{4-x-2}$

$= 2 + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{-x+2} = 2 + \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x-2}$

$= 2$

Donc $\forall x \in D_f$ $f(x) + f(4-x) = 2$

Donc le point $A(2;1)$ est un point de symétrie de (C_f).

5) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$

Donc la droite (D) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

6) Construction de (C_f) :