Lancio della moneta

Elia Castellarin

October 2023

1 Prefazione

In questo documento esporrò una soluzione ad un classico problema di probabilità

Problema 1. *Se si lancia una moneta 2 volte, la probabilità di ottenere una testa e una croce (in qualsiasi ordine) è pari al 50%. Se la moneta viene lanciata 4 volt, la probabilità di ottenere due test e due croci, in qualsiasi ordine, è ancora pari al 50%?*

2 Definizioni preliminari

Definizione 1. *Il risultato di un singolo tiro di moneta è:* $R = \begin{cases} Testa = 1 \\ Croce = 0 \end{cases}$

Per comodità d'ora in avanti chiamerò un $Testa = T$ *e* $Croce = C$

Definizione 2. *Il risultato di un multipli lanci è pari alla somma dei risultati dei singoli lanci. Prendendo in esame il caso in cui lancio 5 monete: T T C C T; il risultato dei lanci sarà:* $R = T + T + C + C + T = 1 + 1 + 0 + 0 + 1 = 3$

Definizione 3. *Dato un insieme* $M : [x, y, ..., z]$ *chiamo* M_n *l'insieme i cui elementi sono gli elementi di* M *aumentati di n:*

$$M_n : [x + n, y + n, ..., z + n]$$

Definizione 4. *Dato un insieme* $M : [x, y, ..., z]$ *chiamo* ${}_nM$ *l'insieme i cui elementi sono gli elementi di* M *traslati di n, aggiungo n zeri all'inizio dell'insieme:*

$${}_nM : [0, 0, ..., 0, x, y, ..., z]$$

Definizione 5. *Dati due insiemi* $A : [x, y, ...z]$ *e* $B : [w, u, ...t]$ *chiamo* C *l'insieme risultato dell operazione* $A \wedge B$. *L'operazione consiste nella creazione di un nuovo insieme composto da tutte le possibili combinazioni di due elementi apparteneti uno al primo insieme e uno al secondo.* $C = A \wedge B$ *sostintuendo:*

$$C = [x, y, ...z] \wedge [w, u, ...t] = [x+w, x+u, ...x+t, y+w, y+u, ...y+t, z+w, z+u, ...z+t]$$

.

Definizione 6. *Dati N insiemi: I_n, chiamo*

$$I = I_1 \wedge I_2 \wedge ... \wedge I_n = \bigwedge_{i=1}^{N} I_n$$

Definizione 7. *Chiamo τ l'insieme composto dai risultati del tiro di una moneta:*

$$\tau : [T, C]$$

Definizione 8. *Addizione in τ*

$$C + 1 = T$$

$$T + 1 = C$$

Definizione 9. *Quando compongo una funzione con un insieme otterrò un insieme dove tutti gli elementi sono il risultato dell'operazione datta datta funzione. $P = a, b, ..., z$ $f(P) = f(a), f(b), ..., f(z)$.*

3 Analisi del Problema

3.1 $P(N)$

Chaimo $P(N)$ lo spazio di N dimensioni dove una dimensione è l'insieme τ.

$$P(N) = \tau^N$$

Chiamo p un qualsiasi punto all'interno di $P(N)$ e definisco $f(p)$ come la somma delle coordinate di p.

Esempio 1.

$$P(2) = \tau^2 = \begin{array}{c|c|c} & T & C \\ \hline T & p1 & p2 \\ \hline C & p3 & p4 \end{array}$$

passando tutti i punti di $P(N)$ tramite la funzione $f(p_n)$ ottengo:

$$f(P(2)) = \begin{array}{c|c|c} & T & C \\ \hline T & f(p1) & f(p2) \\ \hline C & f(p3) & f(p4) \end{array} = \begin{array}{c|c|c} & T & C \\ \hline T & 2 & 1 \\ \hline C & 1 & 0 \end{array}$$

3.2 rappresentazione semplificata di $P(N)$

Per semplificare la rappresentazione posso ridurre le dimensioni grazie al seguente algoritmo:

$$0 < k < N$$

$$P(N) = \tau^N = \bigwedge_{i=1}^{k} \tau * \bigwedge_{i=1}^{N-k} \tau$$

Esempio 2.

$$P(3) = \tau^3 = \tau \wedge \tau * \tau$$

rappresentazione di $f(P(3))$

	T+T	*C+T*	*T+C*	*C+C*
T	*3*	*2*	*2*	*1*
C	*2*	*1*	*1*	*0*

3.3 $P(N+1)$

$P(N+1)$ sarà l'insieme di N+1, e sarà composto dall'unione tra $T \wedge P(N)$ e $C \wedge P(N)$

$$P(N+1) = T \wedge P(N) \cup C \wedge P(N)$$

da questo posso derivare $f(P(N+1))$

$$f(P(N+1)) = f(T \wedge P(N)) \cup f(C \wedge P(N))$$

per come è stata definita $f(P(N))$ so che C è l'elemento neuto della funzione f mentre $f(T \wedge P(N))$ è equivalente a $f_1(P(N))$. Quindi posso riscrivere la funzione precedente come:

$$f(P(N+1)) = f(P(n)) + f_1(P(N))$$

3.4 $\aleph(N)$

Chiamo $\aleph(N)$ l'insieme delle numerosità dei singoli valori di $P(N)$.

Esempio 3.

$P(3) =$

	T+T	*C+T*	*T+C*	*C+C*
T	*3*	*2*	*2*	*1*
C	*2*	*1*	*1*	*0*

$$\aleph(3) = [0:1, 1:3, 2:3, 3:1]$$

L'elemento 0 si ripete 1 volta, l'elemento 1 3 volte e così via.

3.5 $G(N)$

Chiamo $G(N)$ la rappresentazione grafica di $\aleph(N)$

3.6 $G(N+1)$

Per dimostrazione consultare le figure [3,4,5]

Ricavo che: $\aleph(N+1) = \aleph(n) + {}_1\aleph(N)$ e $G(N+1) = G(n) + {}_1G(N)$

3.7 $\aleph(N,x)$

Ora definisco la funzione $\aleph(N,x)$, questa funzione serve per calcolare la numerosità di un certo risultato chiamato x all'interno di $P(N)$. ovvero restituisce il valore di $\aleph(N)$ nel punto di ascissa x.

La funzione $\aleph(N,x)$ gode di alcune proprietà tra cui: $\begin{cases} x<0:0 \\ x=0:1 \\ x=1:N \end{cases}$ $\begin{cases} x=N-1=N \\ x=N:1 \\ x>N:0 \end{cases}$

In particolare $\aleph(N,x)=\aleph(N,N-x)$ da questa proprietà possiamo dire che la funzione $\aleph(N,x)$ possiede un centro di simmetria poisionato a $\frac{N}{2}$.

Posso vedere come la somma di tutti i valori di $\aleph(N)$ sia uguale a 2^N

3.8 calcolo di $\aleph(N,x)$

Per calcolare il valore di $\aleph(N,x)$ posso procedere in modo ricorsivo.

$$\aleph(N,x)=\aleph(N-1,x)+{}_1\aleph(N-1,x)$$

per $G(N+1)$

$$\aleph(N,x)=\aleph(N-1,x)+\aleph(N-1,x-1)$$

per definizione 4

continuando ad espandere la ricorsività ottengo:

$$\aleph(N,x)=\aleph(N-1,x)+\aleph(N-2,x-1)+\aleph(N-3,x-2)+\aleph(N-4,x-3)+....\aleph(N-N+1,x-N+2)$$

continuiamo fino a $\aleph(N-N+1,x-N+2)$ perchè da qui in avanti avranno tutti valori pari a zero se si tengono da conto le proprietà definite in precedenza ma questa è anche la definizione dell'Xesimo elemento nell Neseima riga del triangolo di tartaglia.

$$1 \quad n=0$$
$$1\ \ 1 \quad n=1$$
$$1\ \ 2\ \ 1 \quad n=2$$
$$1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \quad n=3$$
$$1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \quad n=4$$
$$1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1 \quad n=5$$

Quindi posso scrivere

$$\aleph(N,x)=\binom{N}{x}$$

anche il triangolo di tartaglia gode della proprietà: la somma dei valori su una riga del triangolo sono congui a: 2^N con N il numero della riga

3.9 considerazioni

Posso vedere come ci sia una stretta relazione tra il triangolo di tartaglia e la curva Gaussiana, questo permette di approssiamare il valore della curva tramite il triangolo. Con valori di N tendenti ad infinito avrò che l'andamento della la distribuzione dei lanci delle monete avrà la stessa forma della campana di Gauss.

Questo perchè: ad infinito $\aleph(N)$ possiede valori per tutta la retta positiva, ma come visto in precedenza se trasliamo la x di $\frac{N}{2}$ otteniamo una curva pari, grazie a $G(N+1)$ possiamo anche dire che $\lim_{x\to\infty} {}_{\frac{N}{2}}\aleph(N)$ rappresenta la curva di Gauss, per normalizzare la curva possiamo definire

$$\varrho(N) = \frac{{}_{\frac{N}{2}}\aleph(N)}{2^N}$$

Quindi $\lim_{N\to\infty} \varrho(N)$ rasenta la Gaussiana normalizzata con forma: $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$ da questo deriva: $\lim_{x\to\infty} \varrho(N,0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{\lim_{N\to\infty} 2\pi\varrho(N,0)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\lim_{N\to\infty} 2\pi \frac{\binom{N}{N/2}}{2^N}^2}}$$

Da questo otteniamo che fa funzione

$$\lim_{N\to\infty} \varrho(N,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} = \alpha e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$$

4 Il rapporto tra: e^{-x^2} e $\binom{N}{x}$

Da quello che abbiamo visto nella sezione precedente esite una relazione molto stretta tra la funzione esponenziale e la binomiale. Questa relazione sta ad indicare che il valore di uno degli indici del triangolo di tartaglia diviso la somma di tutti gli indici. Ora domostriamo:

$$\alpha e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} = \varrho(n,x) \quad per \;\; n,x \in \mathbb{N}$$

I parametri σ e α sono quelli definiti nella sezione precedente. Succesivamente espando $\varrho(N,x)$

$$\varrho(n,x) = \frac{{}_{\frac{n}{2}}\aleph(n,x)}{2^n} = \frac{\aleph(n,x+n/2)}{2^n} = \frac{\binom{n}{x+n/2}}{2^n}$$

Per comodità definisco $\delta = \varrho(n,0) = \frac{\binom{n}{n/2}}{2^n}$ Espando anche $\alpha e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2}$

$$\alpha e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x}{\sigma})^2} = \delta e^{-\frac{x^2}{4\pi\delta^2}}$$

$$\delta e^{-\frac{x^2}{4\pi\delta^2}} = \varrho(n,x)$$

$$\frac{\binom{n}{\frac{n}{2}}}{2^n}e^{-\frac{x^2}{4\pi\delta^2}} = \frac{\binom{n}{x+\frac{n}{2}}}{2^n}$$

$$\binom{n}{\frac{n}{2}}e^{-\frac{x^2}{4\pi\delta^2}} = \binom{n}{x+\frac{n}{2}}$$

$$\frac{n!}{\frac{n}{2}!\frac{n}{2}!}e^{-\frac{x^2}{4\pi\delta^2}} = \frac{n!}{(x+\frac{n}{2})!(n-(x+\frac{n}{2}))!}$$

$$\frac{1}{\frac{n}{2}!\frac{n}{2}!}e^{-\frac{x^2}{4\pi\delta^2}} = \frac{1}{(\frac{n}{2}+x)!(\frac{n}{2}-x)!}$$

$$e^{-\frac{x^2}{4\pi\delta^2}} = \frac{\frac{n}{2}!\frac{n}{2}! = (\frac{n}{2}!)^2}{(\frac{n}{2}+x)!(\frac{n}{2}-x)!}$$