Section 2 - Notions fondamentales

Tuesday 11$^{\text{th}}$ February, 2025

Abstract

Cette section présente les concepts fondamentaux du traitement des signaux, essentiels pour comprendre et analyser les systèmes de communication. Elle aborde les définitions, classifications et opérations de base des signaux. L'analyse de Fourier y est développée pour explorer la décomposition des signaux en composantes fréquentielles. Les principes de modulation d'amplitude et les systèmes linéaires invariants dans le temps (LTI) sont également discutés, avec un accent sur des notions clés telles que la largeur de bande, la densité spectrale de puissance, l'autocorrélation et les filtres. Enfin, la section introduit les signaux aléatoires, en se concentrant sur les distributions gaussiennes, les moyennes statistiques et le théorème de la limite centrale, établissant ainsi une base solide pour l'étude des signaux dans des environnements variés.

1 Signal

Définition: Signal Un **signal** est une fonction qui transmet des informations sur un phénomène.

Les signaux constituent les entrées et les sorties des systèmes. Un signal peut être classé selon différents critères. Les critères que nous allons examiner sont énumérés ci-dessous.

1. Signaux à temps continu et à temps discret:
    - Un **signal à temps continu** est un signal $g(t)$ pour lequel la variable indépendante t prend des nombres réels.
    - Un **signal à temps discret**, noté $g[n]$, est un signal pour lequel la variable indépendante n prend ses valeurs dans l'ensemble des entiers.
    - En échantillonnant un signal à temps continu $g(t)$ à des instants séparés par T_E, nous pouvons définir le signal à temps discret $g[nT_E]$. Ici, n est l'indice de temps, représentant le $n$ième échantillon.

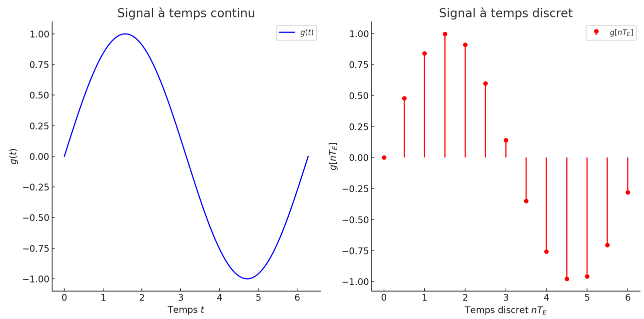

Figure 1: Signaux à temps continu et à temps discret (la période d'échantillonnage est de $T_E = 0.5$ unités de temps).

[resume]Signaux analogiques et numériques

1.
   - Un signal dont l'amplitude peut prendre n'importe quelle valeur dans une gamme continue est un **signal analogique**.
     - Cela signifie que l'amplitude d'un **signal analogique** peut prendre un nombre (indénombrable) infini de valeurs.
   - Un **signal numérique**, par contre, est un signal dont l'amplitude ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs.

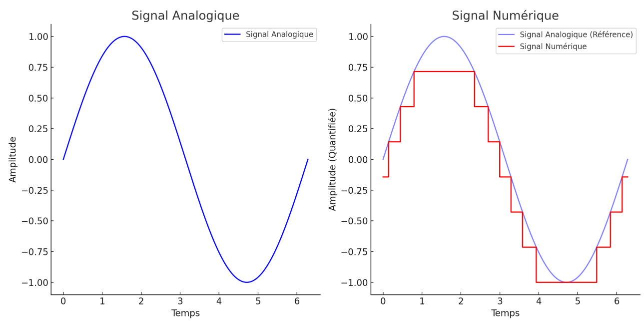

Figure 2: Signaux analogiques et numériques.

[resume]Signaux périodiques et non périodiques.

1.
   - Un **signal périodique** se répète dans le temps ; il suffit donc de spécifier le signal dans un intervalle de base appelé période, T_0, Pour un signal signal périodique :

$$g(t) = g(t + T_0), \forall t \tag{1}$$

   - Un **signal non périodique** ne se répète pas dans le temps.

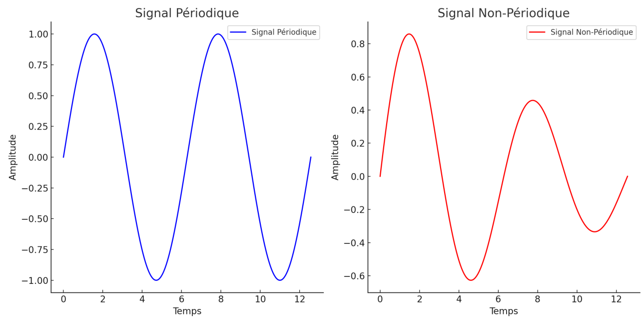

Figure 3: Signaux périodiques (où $T_0 = 6$ unités de temps) et non périodiques.

[resume]Signaux réels et complexes.

1. - Un **signal réel** prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres réels, $g_R(t) \in R$
   - Un **signal complexe** prend ses valeurs dans l'ensemble des nombres complexes $g_C(t) \in C$.

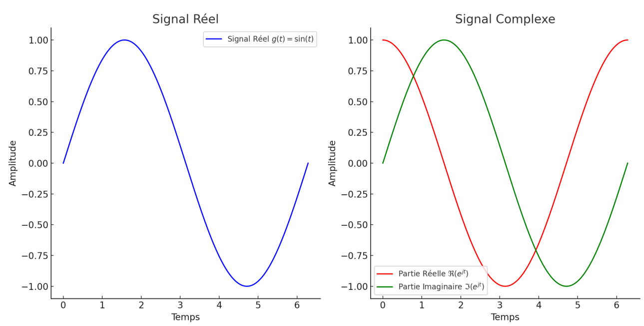

Figure 4: Signaux réels et complexes. Le signal réel est l'onde sinusoïdale $g_R(t) = \sin(t)$. Le signal complexe est $g_C(t) = e^{jt} = \cos(t) + j\sin(t)$, dont les parties réelle ($\cos(t)$) et imaginaire ($\sin(t)$) sont tracées séparément.

Transformations des signaux réels et complexes :

- Représentation complexe Le signal complexe $g_c(t)$ est composé d'une partie réelle $g_R(t)$ et d'une partie imaginaire $g_I(t)$, telles que :

  g$_c(t) = g_R(t) + jg_I(t), (2)$ où $j = \sqrt{-1}$.

- Partie réelle $g_R(t)$:

g$_R(t) = |g_c(t)| \cos(\angle g_c(t))$.(3)

- Partie imaginaire $g_I(t)$:

g$_I(t) = |g_c(t)| \sin(\angle g_c(t))$.(4)

- Amplitude du signal complexe

$|\mathrm{g}_c(t)| = \sqrt{g_R^2(t) + g_I^2(t)}$.(5)

- Phase du signal complexe :

$\angle$

g$_c(t) = \arctan\left(\frac{g_I(t)}{g_R(t)}\right)$.(6)

[resume]Signaux déterministes et aléatoires.

1. - Dans un **signal déterministe**, à tout instant t, la valeur de $g(t)$ est donnée comme une valeur réelle ou complexe.
   - Dans un **signal aléatoire** (ou stochastique), à un instant donné t, $g(t)$ est une variable aléatoire, c'est-à-dire qu'elle est définie par une fonction de densité de probabilité.

Notez que toutes ces représentations sont du domaine temporel. Pour pouvoir comprendre le comportement spectral, nous devons également analyser les signaux dans le domaine fréquentiel.

1.1 Représentation fréquentielle des signaux

Dans ce cours, nous utiliserons la transformée de Fourier pour représenter les signaux, même pour les signaux périodiques

Définition: Transformée de Fourier La transformée de Fourier d'un signal $g(t)$ est représentée par $G(f)$, et

$$g(t) \iff G(f) \tag{7}$$

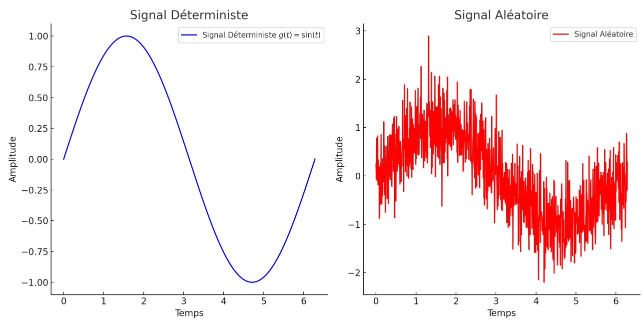

Figure 5: Signaux déterministes et aléatoires. Le signal déterministe $g(t) = \sin(t)$ est parfaitement prévisible à tout instant t. Chaque valeur est fixée et définie. Le signal aléatoire est une superposition d'une onde sinusoïdale et d'un bruit gaussien aléatoire. La valeur de $g(t)$ à un instant donné est imprévisible et suit une distribution aléatoire (donc les valeurs sont imprévisibles).

Transformation

$$G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j2\pi f t} \, dt \tag{8}$$

Transformation inverse

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) e^{j2\pi f t} \, df \tag{9}$$

Propriétés :

1. **homogénéité** de la transformée de Fourier stipule que la transformée de Fourier d'un signal multiplié par un constant scalaire est égale à la transformée de Fourier du signal, également multiplié par cette constante. Si $g(t)$ est un signal avec $g(t) \iff G(f)$ et a est un constant scalaire, :

   F{a $\cdot g(t)\} = a \cdot \mathcal{F}\{g(t)\} = aG(f)$(10) Cela montre que l'échelle d'amplitude dans le domaine temporel est directement reflétée dans le domaine fréquentiel.

2. **superposition** de la transformée de Fourier découle directement de la linéarité. Si un signal $g(t)$ est composé de plusieurs composantes, telles

que $g(t) = g_1(t)+g_2(t)+\cdots+g_n(t)$, avec $g_i(t) \iff G_i(f)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sa transformée de Fourier est donnée par :

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = \mathcal{F}\{g_1(t)\} + \mathcal{F}\{g_2(t)\} + \cdots + \mathcal{F}\{g_n(t)\} = \sum_{i=1}^{n} G_i(f). \tag{11}$$

L'homogénéité et la superposition garantissent **la linéarité** de la transformée de Fourier, permettant ainsi que la transformée d'une combinaison linéaire de signaux, soit égale à la même combinaison linéaire, de leurs transformées respectives. La linéarité est fondamentale en analyse de Fourier, car elles permettent de décomposer des signaux complexes en une somme de signaux plus simples.

Attention
La transformée de Fourier exprime la composition fréquentielle d'un signal par une fonction de densité. Ce concept est essentiel, car nous utiliserons la transformation de Fourier pour calculer la largeur de bande d'un signal.

1.2 Propriétés d'un signal

1.2.1 Valeur moyenne

Valeur moyenne d'un signal non périodiques
La **valeur moyenne d'un signal complexé non périodique**, $g(t)$, est $\overline{g(t)}$ où

$$\overline{g(t)} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t)\, dt \qquad \text{Volts} \tag{12}$$

Valeur moyenne d'un signal périodique
La **valeur moyenne d'un signal complexé périodique**, $g_P(t)$ avec une période de T_0, est $\overline{g_P(t)}$ est obtenue par

$$\overline{g_P(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g_P(t)\, dt \qquad \text{Volts} \tag{13}$$

Attention
Concernant la valeur moyenne la linéarité s'applique

$$\overline{g_1(t) + g_2(t)} = \overline{g_1(t)} + \overline{g_2(t)}. \tag{14}$$

1.2.2 Énergie

Énergie
L'**énergie d'un signal complexé**, $g(t)$, est E_g où

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt \qquad \text{Joules} \tag{15}$$

Attention
Notez que, selon le **Théorème de Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 \, df \tag{16}$$

Donc pour calculer l'énergie d'un signal on utilise le domaine qui est simple à calculer l'expression d'énergie.

1.2.3 Puissance

Puissance d'un signal non périodiques
La **puissance d'un signal non périodique**, $g(t)$, est définie par :

$$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |g(t)|^2 \; dt \qquad \text{Watts} \tag{17}$$

Puissance d'un signal périodique
La **puissance d'un signal périodique**, $g_P(t)$ avec une période de T_0 , est définie par

$$P_g = \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g_P(t)|^2 \; dt \qquad \text{Watts} \tag{18}$$

Notez que $P_g = \overline{|g(t)|^2}$.

Attention
Conversions d'unités

$$[10 \times \log_{10}(P_g)]\,\text{dBW ou } [30 + 10 \times \log_{10}(P_g)]\,\text{dBm} \tag{19}$$

1.2.4 Tension efficace

Tension efficace
La **tension efficace** (*root mean square*; RMS) d'un signal périodiques $g_P(t)$ est définie par

$$RMS_g = \sqrt{P_g} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g_P(t)|^2 \; dt} \qquad \text{Volts} \tag{20}$$

Attention
Conversions d'unités

$$[20 \times \log_{10}(RMS_g)]\,\text{dBW ou } [30 + 20 \times \log_{10}(RMS_g)]\,\text{dBm} \tag{21}$$

Informations supplémentaires pour Travail pratique - 1

Étant donné un circuit dont la source génère $g(t)$, la puissance instantanée dissipée dans une résistance R est calculée selon la formule

$$P_{inst} = \frac{|g(t)|^2}{R} \qquad \text{Watts} \tag{22}$$

et pour le cas normalise, $R = 1$, on obtient $|g(t)|^2$. En classe, nous nous intéressons principalement aux cas normalisés.

1.2.5 Largeur de bande

Définition: Largeur de bande La **largeur de bande** correspond à l'étendue des fréquences disponibles pour la transmission d'un signal. La largeur de bande d'un signal est une mesure de l'étendue de fréquences contenues dans le signal. En termes simples, elle représente la différence entre les fréquences les plus élevées et les plus basses et significatives dans le spectre du signal.

Exemple illustratif :
Si $|G(f)|^2$ représente la densité spectrale de puissance du signal, la largeur de bande, B est définie comme l'étendue de fréquences f pour lesquelles $|G(f)|^2$ est significatif (généralement au-dessus d'un certain seuil, comme 3 dB en dessous de la valeur maximale). Le critère de sélection B dépend de

la tolérance d'erreur dans une application particulière. Nous pouvons par *echoisir*B$ comme étant la largeur de bande qui contient 95% de l'énergie du signal.

Attention
La largeur de bande doit toujours être définie uniquement pour les fréquences positives.

Un signal peut être classé comme **bande de base** ou **bande passante** selon sa concentration dans le domaine fréquentiel.

Définition: Signal bande de base (*baseband*) Un **signal bande de base** est caractérisé par un contenu fréquentiel concentré autour de 0 Hz.

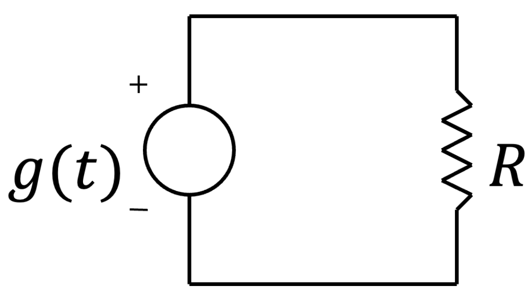

Figure 6: Un circuit d'une seule source avec une résistance

Définition: Signal bande passante (*passband*) Un **signal bande passante** est généralement obtenu après une modulation, c'est-à-dire après multiplication du signal bande de base par une onde porteuse, telle qu'une sinusoïde $cos(2\pi f_p t)$. Le contenu fréquentiel d'un signal bande passante est concentré autour de la fréquence porteuse, f_p Hz.

Attention
Dans le contexte des systèmes de communication, nous nous intéressons plus particulièrement à la puissance et à la largeur de bande des signaux.

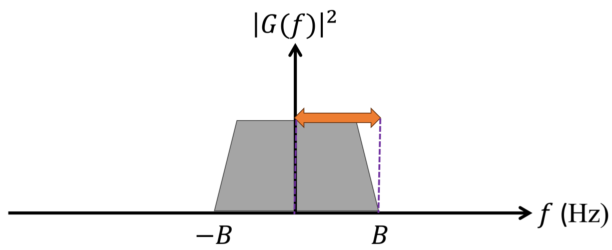

Figure 8: Réponse fréquentielle d'un signal en bande de base autour de f_p, et la largeur de bande est de B Hz.

1.3 Signaux utiles

1.3.1 Impulsion de Dirac (*Dirac impulse*)

Définition: Impulsion de Dirac L'**impulsion de Dirac** est un outil mathématique idéal utilisé pour modéliser une impulsion infiniment brève et intense, qui ne peut pas être réalisée exactement dans la réalité physique.

$$\delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } t = 0, \\ 0, & \text{si } t \neq 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1. \tag{23}$$

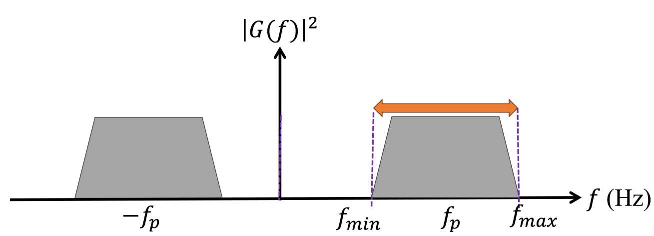

Figure 9: Réponse fréquentielle d'un signal en bande passante où la largeur de bande est de $B = f_{\max} - f_{\min}$

Propriétés:

- Multiplication par l'impulsion de Dirac

$$\phi(t)\delta(t - T) = \phi(T)\delta(t - T) \tag{24}$$

- Échantillonnage pour obtenir une seule valeur à T

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(t - T)\, dt = \phi(T) \tag{25}$$

- La valeur moyenne, l'énergie et la puissance de l'impulsion de Dirac sont indéfinies

- La transformée de Fourier de $\delta(t)$ est une fonction constante dans le domaine fréquentiel, donc $\delta(t) \iff 1, \forall f$

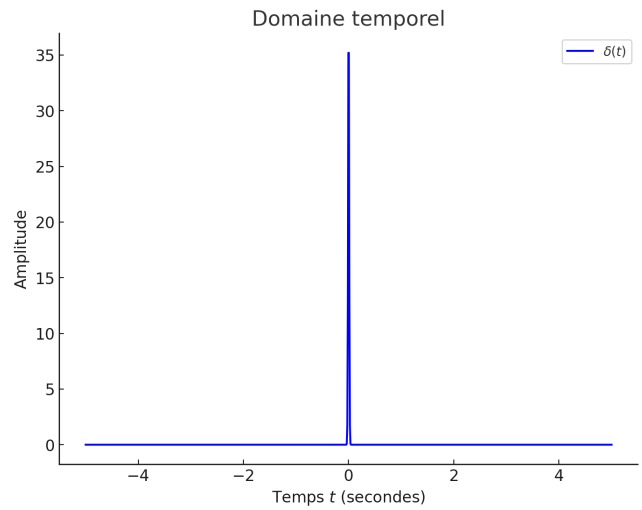

Figure 10: Impulsion de Dirac (en domaine temporel).

1.3.2 Train d'impulsions de Dirac (*Dirac impulse train*)

Définition: Train d'impulsions de Dirac La fonction train d'impulsions de Dirac, notée $\delta_T(t)$, est définie comme une somme infinie d'impulsions de Dirac espacées de T secondes :

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \tag{26}$$

Propriétés:

- La valeur moyenne :
$$\overline{\delta_T(t)} = \frac{1}{T} \tag{27}$$

- L'énergie : infinie

- La puissance :
$$P_D = \frac{1}{T} \tag{28}$$

- La transformée de Fourier :
$$\mathcal{F}\{\delta_T(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - k\frac{1}{T}\right) \tag{29}$$

1.3.3 Fonction sinc (*Sinc function*)

Définition: Fonction sinc La fonction $sinc(t)$ est définie comme suit

$$x(t) = \text{sinc}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t}, & \text{si } t \neq 0, \\ 1, & \text{si } t = 0. \end{cases} \tag{30}$$

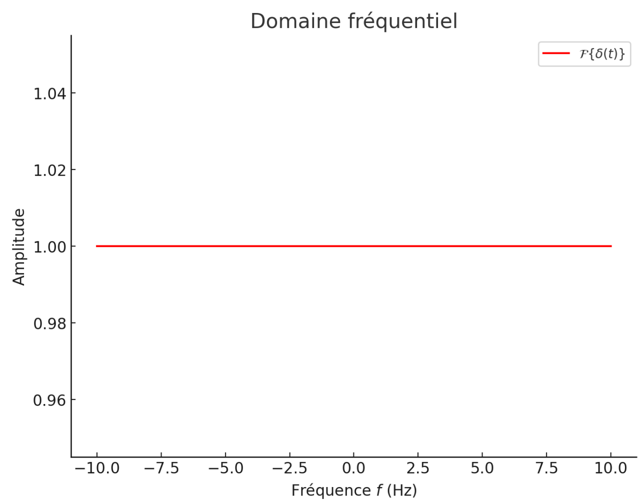

Figure 11: Impulsion de Dirac (en domaine fréquentiel).

Propriétés:

- La valeur moyenne :

$$\overline{x(t)} = \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \text{sinc}(t)\, dt, \tag{31}$$

  et converge vers zéro lorsque $T \to \infty$.

- L'énergie :

$$E_x = \int_{-T}^{T} |\text{sinc}(t)|^2\, dt, \tag{32}$$

  qui augmente indéfiniment lorsque $T \to \infty$.

- La puissance :

$$P_x = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |\text{sinc}(t)|^2\, dt = 0. \tag{33}$$

- La transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}\{\text{sinc}(t)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } |f| \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{34}$$

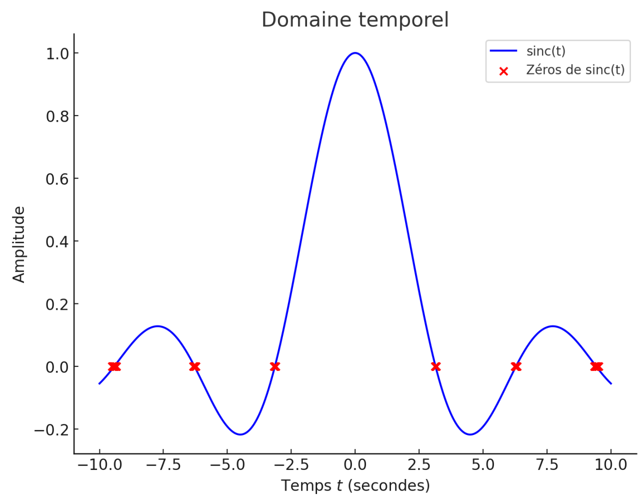

Figure 12: Fonction sinc (en domaine temporel).

1.3.4 L'onde rectangulaire (*Rectangular pulse*)

Définition: L'onde rectangulaire La fonction rectangulaire $\mathrm{rect}(t)$, définie sur l'intervalle $[-T_0/2, T_0/2]$, avec une valeur constante a , est donnée par :

$$g(t) = \begin{cases} a, & \text{si } -\frac{T_0}{2} \leq t \leq \frac{T_0}{2}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{35}$$

Propriétés:

- La valeur moyenne :

$$\overline{g(t)} = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g(t)\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a\, dt = a. \tag{36}$$

- L'énergie :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a^2\, dt = a^2 T_0. \tag{37}$$

- La puissance :

$$P = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} |g(t)|^2\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} a^2\, dt = a^2. \tag{38}$$

- La transformée de Fourier :

$$G(f) = \mathcal{F}\{g(t)\} = aT_0 \mathrm{sinc}(\pi f T_0). \tag{39}$$

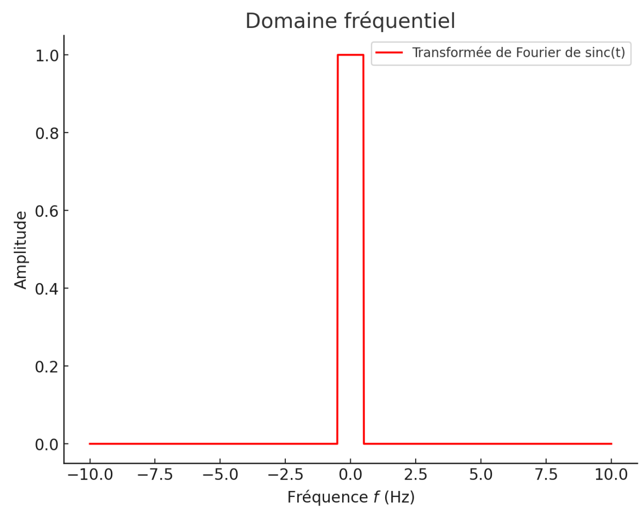

Figure 13: Fonction sinc (en domaine fréquentiel).

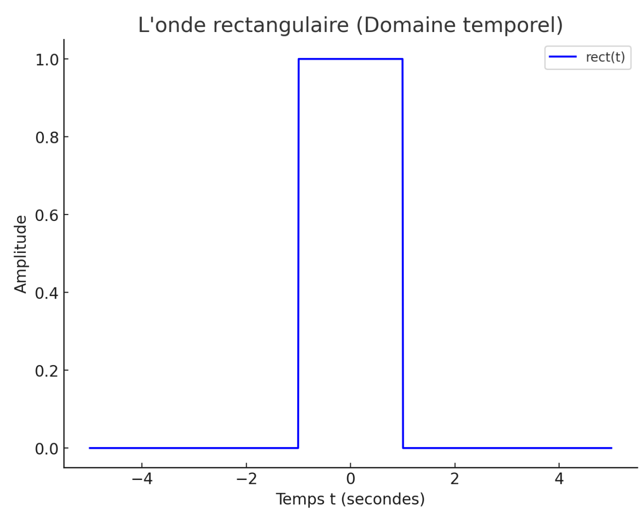

Figure 14: Onde rectangulaire (en domaine fréquentiel).

1.3.5 Ondes porteuses (*Carrier waveforms*)

Définition: Ondes porteuses La majorité des systèmes de communication utilisent les formes d'onde cosinus et sinus comme ondes porteuses. Leur fréquence fondamentale est appelée la fréquence porteuse.

Un cosinus avec fréquence f_p et amplitude A_p est défini comme $c(t) = A_p \cos(2\pi f_p t + \phi)$ où :

- A_p est l'amplitude,
- f_p est la fréquence en Hertz,
- ϕ est la phase initiale (en radians),
- t est le temps.

Propriétés:

- La valeur moyenne :

$$\overline{c(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T A_p \cos(2\pi f_p t + \phi)\,dt = 0 \tag{40}$$

- L'énergie : infinie
- La puissance :

$$P_c = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T |c(t)|^2\,dt = \frac{A_p^2}{2} \tag{41}$$

- La transformée de Fourier :

$$C(f) = \mathcal{F}\{c(t)\} = \frac{A_p}{2}\exp(j\phi)\delta(f - f_p) + \frac{A_p}{2}\exp(-j\phi)\delta(f + f_p), \tag{42}$$

Pour un sinus avec les mêmes paramètres $s(t) = A_p \sin(2\pi f_p t + \phi)$
Propriétés:

- La valeur moyenne : 0
- L'énergie : infinie
- La puissance :

$$P_s = \frac{A_p^2}{2} \tag{43}$$

- La transformée de Fourier :

$$S(f) = \mathcal{F}\{s(t)\} = \frac{A_p}{2j}\exp(j\phi)\delta(f - f_p) - \frac{A_p}{2j}\exp(-j\phi)\delta(f + f_p), \tag{44}$$

Exemple illustratif :
Le signal est défini comme $g(t) = A\cos(2\pi f_p t)$ où A est l'amplitude du signal, et f_p est la fréquence porteuse (en Hz).

La transformée de Fourier du signal $g(t)$ est

$$A\cos(2\pi f_p t) \iff \frac{A}{2}\left[\delta(f - f_p) + \delta(f + f_p)\right] \tag{45}$$

Donc, la transformée de Fourier montre deux impulsions à $f = f_p$ et $f = -f_p$. Ainsi, la largeur de bande passante est effectivement 0 Hz, autour de f_p.

Son énergie pour une période de $T_0 = \frac{1}{f_p}$ est définie par

$\mathrm{E}_g = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} A^2 \cos^2(2\pi f_p t)\, dt(46)$

En utilisant l'identité trigonométrique $\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$, on obtient

$\mathrm{E}_g = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{A^2}{2}\, dt = \frac{A^2}{2} T_0$ Joules(47) car l'intégrale de $\cos(4\pi f_p t)$ sur toute la durée est nulle car $\cos(4\pi f_p t)$ oscille symétriquement.

Sa puissance est donnée par

$\mathrm{P}_g = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} g^2(t)\, dt = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \frac{A^2}{2}\, dt = \frac{A^2}{2}$ Watts(48)

2 Système

Définition: Système Du point de vue d'un ingénieur en communication, un **système** est une loi qui attribue des signaux de sortie à divers signaux d'entrée.

Le point le plus important dans la définition d'un système est que sa sortie doit être définie de manière unique pour toutes les entrées légitimes.

Chaque système possède **une entrée** ($x(t)$) **une sortie** ($y(t)$) et **une fonction de transfert** ($\mathcal{T}(\cdot)$), ou $y(t) = \mathcal{T}(x(t))$.

Exemple pratique :
Un circuit électrique avec une source de tension en entrée et un courant dans une certaine branche est un système.

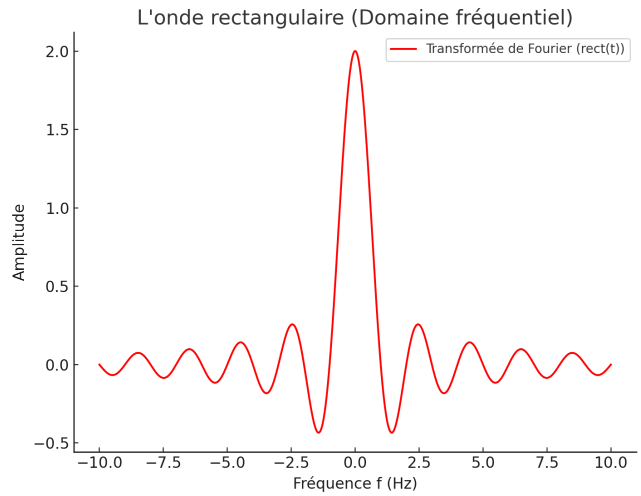

Figure 15: Onde rectangulaire (en domaine temporel).

2.1 Catégories de systèmes

Un système peut être **variant** ou **invariant** dans le temps. De plus, un système peut être **linéaire** ou **non linéaire**. Leurs explications sont données ci-dessous.

2.1.1 Système invariant dans le temps (***Time Invariant System***)

Un système est **invariant dans le temps** si sa réponse à une entrée ne change pas lorsque l'entrée est décalée dans le temps. Si l'on considère un système $\mathcal{T}(\cdot)$ avec une entrée $x(t)$ et une sortie $y(t)$, (i.e. $y(t) = \mathcal{T}(x(t))$), le système est invariant dans le temps si

$$y(t - t_0) = \mathcal{T}(x(t - t_0)) \tag{49}$$

2.1.2 Système variant dans le temps (***Time Varying System***)

Le système est **variant dans le temps** quand l'équation (49) n'est pas applicable.

Exemples illustratifs :

- Le système $y(t) = 2x(t)$ est invariant dans le temps, car pour l'entrée $x(t - t0)$ la sorite est $y(t - t_0)$.
- Le système $y(t) = t \cdot x(t)$ est variant dans le temps, car pour l'entrée $x(t - t0)$ la sorite est $y(t - t_0) \neq (t - t_0)x(t - t_0)$.

2.1.3 Système linéaire (*Linear System*)

Un système $\mathcal{T}(\cdot)$ est linéaire s'il respecte les propriétés suivantes :

1. **homogénéité** : si une entrée $x(t)$ produit une sortie $y(t)$, i.e.,$y(t) = \mathcal{T}(x(t))$, la sortie de $ax(t)$ pour un scalaire a produit $ay(t)$.

2. **superposition** : si un signal $x(t)$ est composé de plusieurs composantes, telles que
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t), \tag{50}$$
où $y_i(t) = \mathcal{T}(x_i(t))$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$,
$$y = \mathcal{T}\{x_1(t)\} + \mathcal{T}\{x_2(t)\} + \cdots + \mathcal{T}\{x_n(t)\} = \sum_{i=1}^{n} y_i(t). \tag{51}$$

Notez que la transformée de Fourier peut être interprétée comme un système linéaire.

Système linéaire invariant dans le temps (*Linear time invariant*; LTI)
Un système est **linéaire invariant dans le temps** (LTI) si les propriétés de linéarité et d'invariance dans le temps sont satisfaites. Ce système est défini simplement par sa **réponse impulsionnelle**, $h(t)$, ou sa **réponse fréquentielle** $H(F)$ où
$$h(t) \iff H(f) \tag{52}$$
.

La sortie $y(t)$ est obtenue par la **convolution** de l'entrée $x(t)$ avec la réponse impulsionnelle $h(t)$ où
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\, d\tau \tag{53}$$
.

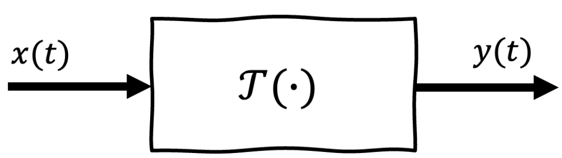

Figure 16: Représentation d'un système

Exemple illustratif : Filtres : passe-bas, passe-bande et passe-haut
Un **filtre**, un dispositif qui sélectionne ou atténue certaines fréquences d'un signal, est un système LTI. Il existe différents types de filtres en fonction de leur **bande passante**. Notez que nous utilisons ici le terme bande passante (au lieu de largeur de bande) car il indique les fréquences permises de laisser passer.

- Un filtre **passe-bas** laisse passer les fréquences inférieures à une fréquence de coupure f_c et atténue les fréquences supérieures. Sa réponse fréquentielle est typiquement donnée par :

$$\text{H(f)} = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_c, \\ 0, & |f| > f_c. \end{cases} \quad (54)$$

  avec la **bande passante :** $[0, f_c]$.

- Un filtre **passe-bande** (ou bande passante) laisse passer une bande de fréquences entre $f_{\min}$ et $f_{\max}$, et atténue les autres fréquences. Sa réponse fréquentielle est :

$$\text{H(f)} = \begin{cases} 1, & f_{\min} \leq |f| \leq f_{\max}, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases} \quad (55)$$

  avec la **bande passante :** $[f_{\min}, f_{\max}]$.

- Un filtre **passe-haut** laisse passer les fréquences supérieures à une fréquence de coupure f_c et atténue les fréquences inférieures. Sa réponse fréquentielle est :

$$\text{H(f)} = \begin{cases} 1, & |f| \geq f_c, \\ 0, & |f| < f_c. \end{cases} \quad (56)$$

  avec la **bande passante :** $[f_c, \infty[$.

2.1.4 Système non linéaire (***Nonlinear System***)

Si un système ne respecte pas l'une ou l'autre des propriétés d'homogénéité ou de superposition, il est non linéaire.Leur réponse peut varier de manière non proportionnelle ou non additive en fonction des entrées.

Exemple illustratif :
Soit un système défini par la relation suivante : $y(t) = x^2(t)$. Pour homogénéité, si une entrée $x(t)$ produit une sortie $y(t)$, alors une entrée multipliée par une constante a devrait produire une sortie multipliée par cette même constante a, mais $y_{\text{scaled}}(t) = a^2 \cdot x^2(t) \neq x^2(t)$. De plus, pour la superposition si $x_1(t)$ et $x_2(t)$ produisent respectivement $y_1(t)$ et $y_2(t)$, alors la réponse à la somme $x_1(t) + x_2(t)$ devrait être $y_1(t) + y_2(t)$. Cependant, dans notre cas : $y(t) = (x_1(t) + x_2(t))^2 = x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t)$ Donc ce système est non linéaire car il ne respecte pas les deux propriétés.

Modulation - un système non linéaire La modulation est le processus par lequel une onde portesue $c(t) = A_p \cos(2\pi f_p t)$ est multiplié par un signal de message $m(t)$. Cela permet d'intégrer l'information du message dans une onde porteuse adaptée à la transmission.

Pour une modulation d'amplitude (AM), le signal modulé s'écrit :

$$\psi(t) = [A_p + m(t)] \cos(2\pi f_p t), \tag{57}$$

où A_p est l'amplitude de la porteuse et f_p sa fréquence.

Dans ce cas, le signal d'information $m(t)$ module l'amplitude de l'onde porteuse $\cos(2\pi f_p t)$. Soit $m(t)$ a un largeur de bande B Hz avec une réponse fréquentielle $M(f)$. La reponse fréquentielle du signal modulé sera

$\Psi(f) = \frac{A_p}{2}\delta(f - f_p) + \frac{A_p}{2}\delta(f + f_p) + \frac{1}{2}\left[M(f - f_p) + M(f + f_p)\right]$.(58) **Donc la largeur de bande du signal modulé est de $2B$ Hz.**

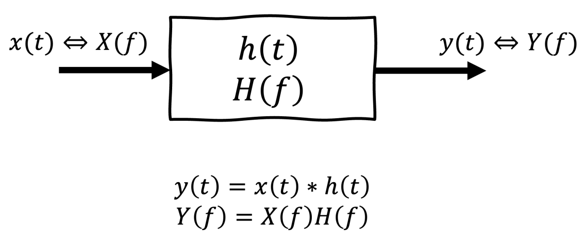

Figure 17: Transmission d'un signal à travers un système linéaire invariant dans le temps (LTI)

Attention
Lorsqu'un signal est modulé, son énergie change en raison de l'ajout de la porteuse et du déplacement spectral.

3 Probabilité

3.1 Probabilité et la règle de Bayes

Les définitions ci-dessous forment la base de la théorie des probabilités, utilisée dans de nombreux domaines comme les statistiques, l'apprentissage automatique et les communications. Elles permettent de quantifier les incertitudes et d'effectuer des prédictions basées sur des observations. Nous les utiliserons principalement pour calculer l'énergie et la puissance des signaux.

Soit N le nombre total d'événements dans un espace d'échantillonnage. Les notions clés associées à la probabilité sont expliquées ci-dessous :

- Un événement A correspond à un ensemble d'issues spécifiques parmi les N issues possibles. Le nombre de fois où l'événement A se réalise est noté comme $N(A)$, qui indique **la réalisation** de A.
- La **probabilité** d'un événement A est définie comme la limite, lorsque N tend vers l'infini, du rapport entre $N(A)$ et N :

  P(A) $= \lim_{N\to\infty} \frac{N(A)}{N}$, (59) avec

  $0 \leq P(A) \leq 1$.(60) Cela signifie que la probabilité est une mesure entre 0 et 1 de la fréquence relative de réalisation de A.
- La **probabilité conditionnelle** de A sachant que B est réalisé est donnée par :

  P(A $\mid B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$, (61) où $P(A \cap B)$ représente la probabilité de la conjonction des événements A et B, et $P(B) > 0$.
- **La règle de Bayes** nous permet de calculer la probabilité conditionnelle de A sachant B en inversant la condition :

  P(A $\mid B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$.(62) Cette règle est particulièrement utile dans les problèmes où il est plus facile de calculer $P(B \mid A)$ que $P(A \mid B)$ directement.

3.2 Variables aléatoires

Une **variable aléatoire** nous permet de modéliser des événements aléatoires avec une règle d'association de valeurs. La fonction de distribution cumulative est un outil clé pour analyser les probabilités associées à ces variables, en respectant des propriétés fondamentales comme la continuité et la monotonie.

Définition: Variable aléatoire Une **variable aléatoire** résulte de l'application d'une règle par laquelle une valeur est assignée à un événement.

> **Exemple illustratif :**
> Soit X, une variable aléatoire définie comme étant le résultat obtenu en lançant un dé.
>
> - Dans ce cas, $X \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Définition: Fonction de distribution cumulative Fonction de distribution cumulative (*Cumulative Distribution Function*; CDF)} La fonction de distribution cumulative (ou CDF, pour Cumulative Distribution Function) est définie comme :

$\mathrm{F}_X(x) = P(X \leq x), (63)$

où $F_X(x)$ représente la probabilité que la variable aléatoire X soit inférieure ou égale à une valeur donnée x.

Propriétés :

1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$, pour tout x.
2. $F_X(\infty) = 1$.
3. $F_X(-\infty) = 0$.
4. $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$, pour $x_1 \leq x_2$ (c'est-à-dire, $F_X(x)$ est une fonction non décroissante).

Définition: Fonction de densité de probabilité La **fonction de densité de probabilité** (*Probability Density Function*; PDF) caractérise la distribution des probabilités pour une variable aléatoire continue. La PDF d'une variable aléatoire X est définie comme étant la dérivée de la fonction de distribution cumulative (CDF) $F_X(x)$:

$\mathrm{p}_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}.(64)$

Propriétés :

1. $p_X(x) \geq 0$, pour tout x.
2. L'intégrale de $p_X(x)$ sur tout l'espace est égale à 1 :

   $\int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)\, dx = 1.$(65)
3. La CDF $F_X(x)$ peut être exprimée comme l'intégrale de la PDF :

   $\mathrm{F}_X(x) = \int_{-\infty}^{x} p_X(\alpha)\, d\alpha.$(66)

3.2.1 Les moyennes statistiques

Les moyennes statistiques sont des outils fondamentaux pour décrire et analyser les propriétés d'une variable aléatoire. Ces outils sont essentiels pour caractériser le comportement statistique des systèmes aléatoires.

1. **La valeur moyenne** (ou espérance) d'une variable aléatoire X est donnée par :

   $\overline{X} = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p_X(x)\, dx,$ (67) où $E[X]$ représente l'espérance de X, $p_X(x)$ est sa PDF. Cette moyenne représente la valeur centrale attendue de X.
2. Si une fonction $g(X)$ est appliquée à une variable aléatoire X, **la moyenne de cette fonction** $g(X)$ est donnée par :

   $\mathrm{E[g(X)]} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, p_X(x)\, dx.$(68) Cela permet de calculer l'espérance de transformations non linéaires de X.
3. **La variance** mesure la dispersion d'une variable aléatoire autour de sa moyenne. Elle est définie par :

   $\sigma_X^2 = E[(X - \overline{X})^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})^2\, p_X(x)\, dx,$ (69) où σ_X^2 est la variance de X, et $\overline{X}$ est la valeur moyenne de X.

3.2.2 Puissance d'une variable aléatoire

La **puissance d'une variable aléatoire** X, définie comme

$\mathrm{P}_X = E[X^2]$(70)

Exemple illustratif :
Considérons une variable aléatoire X avec deux valeurs possibles :

- $X = -2$ Volts avec une probabilité $P(X = -2) = 0,4$
- $X = 3$ Volts avec une probabilité $P(X = 3) = 0,6$

Donc, sa PDF est

$$p_X(x) = 0,4 \cdot \delta(x+2) + 0,6 \cdot \delta(x-3) \tag{71}$$

La puissance de X est donnée par

$\mathrm{P}_X = E[X^2] = (0,4 \cdot 4) + (0,6 \cdot 9) = 1,6 + 5,4 = 7$ Watts(72)

3.3 Distribution gaussienne (normal)

La distribution gaussienne (ou loi normale) est l'une des distributions les plus importantes en probabilité et statistiques.

Propriétés :

- Fonction de densité de probabilité (PDF) d'une variable aléatoire X suivant une distribution gaussienne est donnée par :

  $\mathrm{p}_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, (73)

  où μ est la moyenne (ou valeur moyenne) de la distribution, σ^2 est la variance, et σ est l'écart type (standard deviation).

- Pour une variable aléatoire X suivant une distribution gaussienne, la probabilité que X soit supérieure à une valeur a :

  $\mathrm{P(X > a)} = \int_a^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = Q\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$, (74)

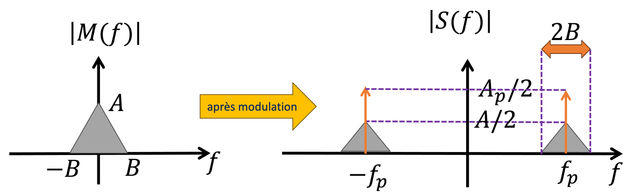

Figure 18: Une illustration de la modification de la largeur de bande et de l'amplitude

où $Q(z)$ est la fonction Q, définie par :

Q(a) $= \int_{a}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$(75)

- La probabilité que X soit inférieure ou égale à une valeur a :

P(X $\leq a) = \int_{-\infty}^{a} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 1 - Q\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.(76)

Théorème de la limite centrale

Le théorème de la limite centrale illustre pourquoi la distribution normale est omniprésente dans les applications pratiques, car elle décrit le comportement asymptotique des sommes de variables aléatoires indépendantes.

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur le même espace de probabilité, et suivant la même distribution.

Définissons :

V = X$_1 + X_2 + \cdots + X_n$.(77)

Selon le théorème de la limite centrale, lorsque n tend vers l'infini, la distribution de la somme V tend vers une distribution gaussienne, quelle que soit la distribution d'origine des X_i, à condition que la moyenne et la variance de chaque X_i soient finies.

La densité de probabilité de V est donnée par :

p$_V(v) = \frac{1}{\sigma_V\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(v-\mu_V)^2}{2\sigma_V^2}}$, (78) où $\mu_V = n{\cdot}\mu$ est la moyenne de la somme, et $\sigma_V^2 = n \cdot \sigma^2$ est la variance de la somme.

Le théorème montre que la distribution gaussienne joue un rôle clé dans l'étude des processus aléatoires :

- Même si les variables aléatoires de départ (X_i) ne sont pas gaussiennes, la somme de ces variables tend vers une distribution gaussienne.
- Le théorème de la limite centrale explique pourquoi la distribution du bruit thermique dans les systèmes de communication peut être modélisée par une distribution gaussienne, car ce bruit résulte de la somme des mouvements aléatoires indépendants des électrons au niveau microscopique.

4 Signaux aléatoires

Définition: Signal aléatoire Un **signal aléatoire** est une réalisation particulière ou une trajectoire d'un processus aléatoire.

Définition: Processus aléatoire Un **processus aléatoire** peut être défini simplement comme un ensemble de variables aléatoires. On dit d'un processus aléatoire qu'il est stationnaire au sens strict lorsque les moyennes statistiques d'ensemble ne changent pas dans le temps. Lorsqu'on ne considère que les deux premiers moments, on parlera de stationnarité au sens large.

Un processus aléatoire est **ergodique** lorsque les moyennes statistiques d'ensemble sont égales aux moyennes statistiques dans le temps de chacune des variables qui le composent.

Exemple illustratif :
Considérons cent personnes lançant simultanément un dé de façon répétitive (et honnête).

- Le processus ainsi constitué est assurément stationnaire car d'une répétition à l'autre les conditions sont les mêmes. Le processus est également ergodique car une personne jouant plusieurs fois, ou plusieurs personnes jouant une fois sont des événements aléatoires équivalents.

4.1 Autocorrélation

L'autocorrélation d'un processus aléatoire $x(t)$ mesure la similitude entre les valeurs du processus à deux instants différents, séparés par un décalage τ. Pour le décalage temporel τ, elle est définie par l'expression suivante :

$R_X(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$.(79) Cette équation analyse la corrélation temporelle des valeurs du processus.

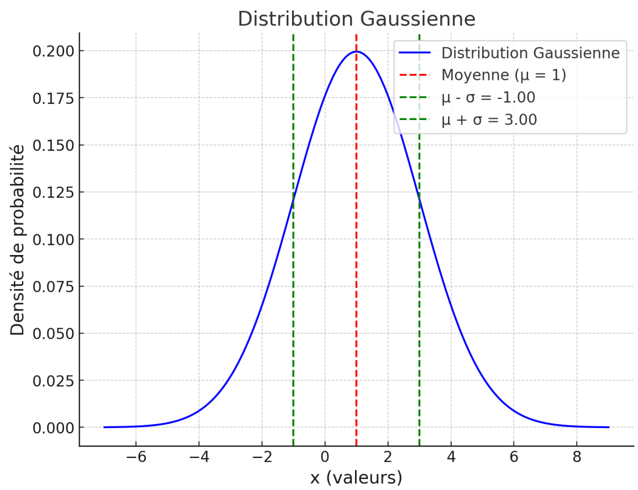

Figure 19: Une distribution gaussienne avec une moyenne μ et une variance $\sigma^2 = 4$.

4.2 Spectre de densité de puissance

Le **spectre de densité de puissance** (*power spectral density*; PSD) est un outil clé pour analyser la répartition de la puissance d'un signal dans le domaine fréquentiel.

La puissance moyenne d'un signal aléatore peut être exprimée e à l'aide de la fonction de densité de puissance $S_g(f)$, définie comme :

$P_g = \lim_{T\to\infty} \frac{E_g}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{|G(f)|^2}{T} = \int_{-\infty}^{\infty} S_g(f)\, df$, (80) où $S_g(f)$ est le spectre de densité de puissance obtenu en prenant la limite lorsque $T \to \infty$. Notez que $|G(f)|^2/T$ représente la densité spectrale de puissance.

La puissance moyenne du signal dans une bande de fréquence spécifique $[f_1, f_2]$ est donnée par :

$P_{[f_1,f_2]} = 2 \times \int_{f_1}^{f_2} S_g(f)\, df$.(81)

Attention

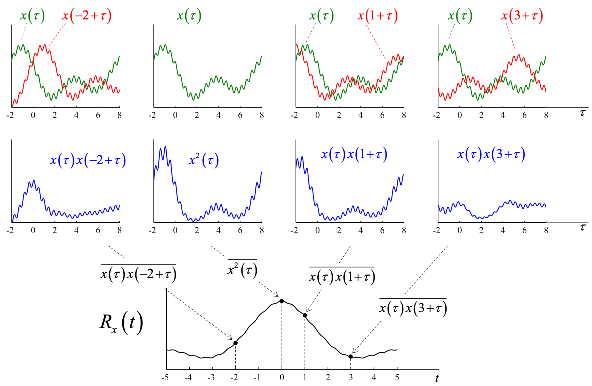

Figure 20: Une illustration de l'autocorrélation d'une réalisation d'un signal aléatoire

- En intégrant $S_g(f)$ sur une plage de fréquences donnée, on peut calculer la puissance dans cette plage.
- La largeur de bande est déterminée en identifiant la plage de fréquences contenant une proportion significative de la puissance du signal. Ces outils sont essentiels pour l'analyse, la conception, et l'optimisation des systèmes de communication et des applications de traitement du signal.

4.2.1 Relation entre autocorrélation et spectre de densité de puissance

L'autocorrélation et le spectre de densité de puissance d'un signal aléatoire sont reliés par une transformée de Fourier :

$\mathrm{R}_g(\tau) \iff S_g(f),$ (82) où $R_g(\tau)$ est la fonction d'autocorrélation dans le domaine temporel et $S_g(f)$ est le spectre de densité de puissance dans le domaine fréquentiel.

Cette relation signifie que :

- La transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation donne le spectre de densité de puissance.
- La transformée inverse du spectre de densité de puissance donne la fonction d'autocorrélation.

Attention
Pour les signaux aléatoires, l'autocorrélation et le spectre de densité de puissance permettent de :

- Quantifier la dépendance temporelle des signaux via la fonction d'autocorrélation $R_X(\tau)$,
- Analyser la répartition de l'énergie ou de la puissance des signaux dans le domaine fréquentiel à l'aide de $S_g(f)$.

Exemple illustratif :
Dans ce cas, seule une proportion donnée (par exemple 90 % ou 99 %) de la puissance totale est considérée. La largeur de bande est déterminée en trouvant l'intervalle $[f_1, f_2]$ tel que :

$2 \times \int_{f_1}^{f_2} S_g(f)\, df = \alpha P_g$, (83) où α est la proportion désirée (e.g. $\alpha = 0.99$ pour 99 %).

4.3 Filtrage d'un signal aléatoire

Lorsqu'un signal aléatoire traverse un système linéaire invariant dans le temps (LTI), le comportement du signal en sortie peut être analysé à l'aide des propriétés du système, caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(t)$ ou sa réponse fréquentielle $H(f)$.

Soit le spectre de densité de puissance d'entrée représenté par $S_x(f)$, et le système est caractérisé par $h(t)$, la réponse impulsionnelle (ou $H(f)$, la réponse fréquentielle)

Le spectre de densité de puissance en sortie est donné par :

S$_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$.(84)

Exemple illustratif :
Considérons un signal aléatoire avec un spectre de densité de puissance d'entrée donné par :

$$\mathrm{S}_x(f) = \begin{cases} 10, & \text{si } |f| \leq 100\,\mathrm{Hz}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (85)$$

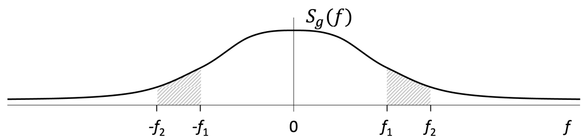

Figure 21: Une illustration de la puissance moyenne du signal dans la bande $[f_1, f_2]$

Le signal passe à travers un filtre passe-bas idéal caractérisé par sa réponse fréquentielle :

$$\mathrm{H(f)} = \begin{cases} 2, & \text{si } |f| \leq 50\,\mathrm{Hz}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (86)$$

Le spectre de densité de puissance en sortie est donné par :

$$\mathrm{S}_y(f) = \begin{cases} 40, & \text{si } |f| \leq 50\,\mathrm{Hz}, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (87)$$

La puissance totale en sortie peut être calculée en intégrant $S_y(f)$ sur toutes les fréquences :

$$\mathrm{P}_y = \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f)\,df = 2 \times \int_0^{50} 40\,df = 40 \cdot 100 = 4000\,\mathrm{W}.(88)$$

5 Resumé

Dans cette section, nous abordons **O2** *application des outils d'analyse spectrale pour résoudre des problèmes liés aux procédures de transmission.* L'analyse spectrale joue un rôle fondamental dans la conception et l'optimisation des systèmes de communication. En représentant les signaux dans le domaine fréquentiel, les ingénieur.e.s peuvent mieux comprendre le contenu spectral et le comportement des signaux transmis. Cette approche facilite l'identification des éléments essentiels tels que la bande passante, la distribution de puissance et le contenu fréquentiel. Les outils spectraux permettent également de concevoir des filtres efficaces pour éliminer les fréquences indésirables, allouer les ressources de manière optimale et réduire les interferences. Ces techniques sont indispensables pour garantir une transmission fiable et efficace des signaux dans les réseaux de communication modernes.

Recueil de problèmes
Testez votre compréhension en résolvant les problèmes de la **Section 2**.