Travaux dirigés et travaux pratiques intégrés
Identification paramétrique et optimisation

TP 1 – Identification et égalisation

Avertissement

Le TP doit être préparé par tous les étudiants avant le début de la séance (une préparation écrite par binôme). La préparation comprend la lecture de l'ensemble du sujet, sa compréhension et la réponse aux questions de la partie TD.

Le logiciel utilisé lors de la séance de TP est Matlab® qui, comme Python, est un langage interprété et il n'est pas nécessaire d'avoir de connaissances spécifiques à ce logiciel. Vous pouvez cependant vous familiariser avec Matlab™ en regardant les vidéos de découverte en ligne sur le site de Mathworks® (`https://fr.mathworks.com/support/learn-with-matlab-tutorials.html`). L'École dispose d'une version Campus de Matlab® que vous pouvez utiliser (*cf.* intranet).

1 Objectifs

L'égalisation, qui consiste à restituer un signal émis après avoir subi l'effet du canal de transmission, des échos et du bruit, est un problème important dans le domaine des communications (numériques et analogiques). Les méthodes d'égalisation reposent sur des techniques d'inversion dont les plus courantes sont celles dites du filtrage inverse, du filtrage de Wiener ou du filtrage de Kalman.

Les techniques d'inversion nécessitent de modéliser le système. En première approximation on peut le modéliser par un filtre linéaire. Le présent TP est consacré à l'identification d'un tel système par la méthode des moindres carrés et à l'égalisation par filtrage de Wiener. Au-delà de l'application visée, l'identification est un problème important en sciences pour l'ingénieur, en physique et, plus généralement, en traitement de données.

2 Partie TD : Identification d'un canal de transmission et décodage du message transmis

2.1 Système

On considère un système de communication cellulaire composé d'une station de base B émettant le signal e_n vers un terminal mobile T. À cause de l'environnement, de nombreuses réflexions de l'onde électromagnétique émise ont lieu sur les bâtiments ou sur le sol. De plus, des interférences se produisent. Ainsi plusieurs versions retardées et atténuées se superposent pour former le signal s_n reçu par T. Il est fait l'hypothèse que

$$s_n = \sum_{l=0}^{L-1} h_l e_{n-l} + b_n \tag{1}$$

où $\mathbf{h} = (h_0 \ \cdots \ h_{L-1})^{\mathrm{T}}$ est la réponse impulsionnelle, de longueur L, du canal de transmission entre B et T et b_n représente toutes les sources de bruit.

1. De quel type de modèle s'agit-il et pourquoi avoir considéré un modèle à temps discret ?
2. Pourquoi h_l ne comporte pas de termes pour $l < 0$ et L est fini ?
3. Que représente le bruit b_n ?

2.2 Estimation de la réponse impulsionnelle

La réponse impulsionnelle du canal est inconnue et, sauf dans des conditions très particulières de transmission, il est indispensable de l'estimer. Pour cela, périodiquement, à la période N, une séquence d'apprentissage contenant une succession de M échantillons de e_n, connus de B et de T, est émise par la station de base. Cette séquence d'apprentissage commence à l'échantillon e_0 et le message proprement dit à l'échantillon e_M. On suppose que $N > M$ et $M \geq 2L - 1$.

4. En supposant que les échantillons e_n pour $n < 0$ ne sont pas connus, établir que les équations de la phase d'apprentissage s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{s}_\mathrm{a} = \mathbf{E}_\mathrm{a}\mathbf{h} + \mathbf{b}_\mathrm{a} \tag{2}$$

où $\mathbf{s}_\mathrm{a} = (s_{L-1} \ \cdots \ s_{M-1})^\mathrm{T}$, $\mathbf{b}_\mathrm{a} = (b_{L-1} \ \cdots \ b_{M-1})^\mathrm{T}$ et $\mathbf{E}_\mathrm{a}$ est la matrice des régresseurs dont tous les éléments sont connus. Donner la taille de la matrice $\mathbf{E}_\mathrm{a}$ et préciser sa structure et ses éléments.

5. En supposant que les e_n pour $n < 0$ sont connus, comment se trouve modifiée la relation (2) ? Pourquoi n'est-il pas judicieux de considérer s_n pour $n = -\infty, \cdots, M - 1$ pour l'identification du canal entre $n = 0$ et $n = M - 1$.

La réponse impulsionnelle est estimée à partir des échantantillons de la séquence d'apprentissage et des échantillons du signal reçu contenus dans le vecteur $\mathbf{s}_\mathrm{a}$. L'estimateur au sens des moindres carrés, défini par

$$\hat{\mathbf{h}}_\mathrm{MC} = \arg\min_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^L} \|\mathbf{s}_\mathrm{a} - \mathbf{E}_\mathrm{a}\mathbf{h}\|^2 , \tag{3}$$

est retenu.

6. Exprimer $\hat{\mathbf{h}}_\mathrm{MC}$ en fonction de $\mathbf{E}_\mathrm{a}$ et de $\mathbf{s}_\mathrm{a}$. Justifier la condition $M \geq 2L - 1$. Quelle autre condition sur la séquence d'apprentissage faut-il ajouter pour obtenir $\hat{\mathbf{h}}_\mathrm{MC}$?

7. Préciser la taille de la matrice à inverser et évaluer la complexité de cette inversion (nombre d'opérations nécessaires en utilisant les algorithmes standards d'inversion).

2.3 Estimation du message transmis

Une fois le canal de transmission identifié, il est possible d'estimer les échantillons transmis par la station de base, c'est-à-dire le vecteur $\mathbf{e}_\mathrm{t} = (e_M \ \cdots \ s_{N-1})^\mathrm{T}$. Pour cela, l'hypothèse que les caractéristiques du canal ne varient pas entre $n = 0$ et $n = N - 1$ est faite.

8. Construire une relation similaire à (2) liant les échantillons du signal d'entrée stockés dans le vecteur $\mathbf{e}_\mathrm{t}$ aux échantillons reçus par T stockés dans le vecteur $\mathbf{s}_\mathrm{t}$ qui sera précisé. Les échantillons du bruit sont stockés dans le vecteur $\mathbf{b}_\mathrm{t}$. La matrice introduite sera notée $\mathbf{H}_\mathrm{t}$ et ses éléments seront précisés.

9. Établir que l'estimation de $\mathbf{e}_\mathrm{t}$ peut se formuler comme un problème de minimisation d'un critère des moindres carrés. Donner l'expression de cette estimée et les conditions pour l'établir.

3 Partie TP : Égalisation d'un système de transmission

On s'intéresse dans cette partie à un système de transmission et cherche à déterminer le filtre qui « annule » son effet afin de donner, en l'absence de bruit et d'erreur de modélisation, le signal émis. Cette opération de filtrage inverse, qui effectue une opération de déconvolution, porte le nom d'égalisation et elle est effectuée dans le présent TP par filtrage de Wiener dans le domaine fréquentiel.

Le système est modélisé par un filtre linéaire à réponse impulsionnelle finie et le premier travail consiste à déterminer la réponse impulsionnelle du modèle à partir d'une séquence d'apprentissage, puis on s'intéresse à l'estimation du signal émis par filtrage de Wiener. Des méthodes existent pour reconstruire le signal émis sans utiliser de séquence d'apprentissage. On parle alors d'égalisation aveugle. Ces méthodes utilisent des caractéristiques statistiques du signal émis.

Un programme à compléter (`TP1.m`) est fourni. Pour le bon déroulement de la suite du travail, il est préférable d'utiliser un fichier contenant les commandes (`*.m`) et de l'exécuter plutôt que de taper directement les instructions dans la fenêtre de commandes de Matlab®.

3.1 Étude des signaux

10. Copier le début du programme (parties `Préambule`, `Chargement des données` et `Visualisation des signaux`) dans un fichier (`*.m`). Analyser les fonctions réalisées par les différentes instructions. Pour obtenir de l'aide sur une fonction de Matlab® taper son nom dans la fenêtre `Search Documentation` (en haut à droite).

11. Commenter la forme des différents signaux : signal à traiter pour estimer le signal émis et signaux pour l'identification.
12. Analyser le signal à traiter pour estimer le signal émis et faire des hypothèses sur la nature de la réponse impulsionnelle.
13. Reprendre la question avec les signaux utilisés pour l'identification. En déduire la valeur minimale de la longueur de la réponse impulsionnelle du système.

3.2 Identification du système de transmission

Le modèle du système est recherché sous la forme d'un filtre linéaire causal de réponse impulsionnelle $\mathbf{h}$ de longeur L qui est estimée avec la méthode des moindres carrés. L'estimée correspondante est

$$\hat{\mathbf{h}}_{\mathrm{MC}} = \arg\min_{\mathbf{h}\in\mathbb{R}^L} \|\mathbf{s} - \mathbf{E}\mathbf{h}\|^2 . \tag{4}$$

14. Pourquoi la méthode vue dans la partie TD doit être adaptée compte tenu du nombre d'échantillons des signaux pour l'identification ?
15. Préciser les hypthèses faites pour la mise en équation et donner l'expression du vecteur $\mathbf{s}$ et de la matrice $\mathbf{E}$.
16. Quelle est valeur maximale de L ? L'identification sera effectuée avec cette valeur.
17. Calculer la réponse impulsionnelle estimée et la tracer. À quoi correspond-elle ? Le résultat est-il cohérent avec ce qui a été prévu à la question 13 ?
18. On s'intéresse à l'effet du nombre d'échantillons pour identifier le système. Éliminer P échantillons à la fin du signal de sortie puis apprécier empiriquement l'influence du nombre de points supprimés sur l'estimation de la réponse impulsionnelle en étudiant le conditionnement de la matrice à inverser.

3.3 Inversion du système de transmission

Une approximation de la réponse impulsionnelle du modèle du système de transmission étant disponible, l'étape suivante consiste à reconstruire le signal émis.

19. Pourquoi ne peut-on pas utiliser la méthode vue dans la partie TD pour estimer le signal émis ?
20. Analyser la fonction `Wiener` écrite pour ce TP. Comment fonctionne-t-elle ? Quelle est l'utilité du paramètre introduit dans la fonction ?
21. Visualiser le signal obtenu par filtrage de Wiener et apporter les modifications nécessaires pour avoir le signal émis.
22. Dresser une conclusion générale sur le TP.