

**Licence double-diplôme – 3<sup>e</sup> année – Parcours SPI**

Mathématiques, Physique et Sciences pour l'ingénieur

**Formation Saphire**

Sciences appliquées en physique et ingénierie pour la recherche et l'enseignement

---

**UE 234 – SIGNAUX, SYSTÈMES LINÉAIRES ET COMMANDE**

**Travaux pratiques**

**2024-2025**



## Avant-propos

Les travaux pratiques (TP) doivent être préparés par tous les étudiants avant le début de la séance avec une préparation écrite par binôme (sauf cas particuliers). La démarche suivie pour établir les résultats doit être précisée, les calculs rédigés de manière concise et les approximations nécessaires à la simplification des expressions justifiées.

Les manipulations seront effectuées par binôme (sauf cas particuliers). Le compte-rendu de manipulation sera rédigé pendant la séance de TP et déposé sur la plateforme eCampus en fin de séance ou remis à l'enseignant. Les résultats expérimentaux devront être commentés, comparés aux prédéterminations de la préparation et illustrés par des courbes judicieusement choisies.

## Notation et évaluation des travaux pratiques

Tous les TP sont notés. La qualité et la pertinence des réponses sont prises en compte dans l'évaluation ainsi que la clarté de la rédaction. Le détail de la notation est précisé ci-dessous.

### TP 1 :

- Un corrigé succinct de la préparation est disponible sur eCampus afin de vérifier les résultats établis lors de la préparation ou d'identifier les points posant des difficultés et qui devront être discutés lors de la séance de TP. Il n'est pas demandé de remettre la préparation.
- Le travail de chaque étudiant pendant la séance de TP, sa volonté de comprendre ce qui est fait et de progresser, sa pugnacité, son autonomie, la réponse aux sollicitations de l'enseignant et les questionnements relatifs à la préparation seront notés sur 10 points.
- Le compte-rendu de manipulation sera noté sur 10 points.

### TP 2 et 3 :

- La préparation sera remise avec le compte-rendu de manipulation à la fin de la séance de TP et notée sur 5 points.
- Le travail de chaque étudiant pendant la séance de TP, sa volonté de comprendre ce qui est fait et de progresser, sa pugnacité, son autonomie et la réponse aux sollicitations de l'enseignant seront notés sur 5 points.
- Le compte-rendu de manipulation sera noté sur 10 points.

## Ordre des travaux pratiques

Pour des raisons matérielles, les TP 2 et 3 ne peuvent pas être effectués par l'ensemble des binômes au cours d'une même séance. Les binômes seront formés lors de la première séance et un numéro sera attribué à chaque binôme. Il permettra de déterminer le sujet qui sera traité au cours des séances suivantes.

Les TP seront réalisées dans l'ordre suivant :

- 1<sup>re</sup> séance : tous les étudiants font le TP n°1,
- 2<sup>e</sup> séance : les binômes pairs font le TP n°2 et les binômes impairs le TP n°3,
- 3<sup>e</sup> séance : les binômes pairs font le TP n°3 et les binômes impairs le TP n°2.



# Table des matières

<b>TP 1 – Étude comparative des correcteurs PID .....</b>	<b>1</b>
I/ Matériel .....	1
II/ Processus du premier ordre.....	2
II.1/ Correcteur proportionnel.....	2
II.2/ Correcteur intégral.....	2
II.3/ Correcteur proportionnel et intégral.....	3
III/ Processus à pôle dominant.....	4
III.1/ Correcteur proportionnel.....	4
III.2/ Correcteur proportionnel et intégral.....	5
III.3/ Correcteur proportionnel, intégral et dérivé .....	5
<b>TP 2 – Commande en vitesse d'un moteur à courant continu.....</b>	<b>9</b>
I/ Matériel .....	9
II/ Identification .....	9
III/ Correction.....	11
III.1/ Correction proportionnelle .....	11
III.2/ Correction proportionnelle et intégrale .....	11
IV/ Régulation.....	12
<b>TP 3 – Synthèse de correcteurs numériques par approximation de correcteurs analogiques.....</b>	<b>15</b>
I/ Introduction.....	15
II/ Échantillonnage et prise en main du matériel .....	16
III/ Correcteur proportionnel .....	16
III.1/ Correcteur analogique .....	16
III.2/ Correcteur analogique numérisé.....	17
IV/ Correcteur proportionnel et intégral analogique numérisé .....	18
IV.1/ Numérisation d'un filtre analogique .....	18
IV.2/ Synthèse du correcteur numérique.....	18
<b>Annexe – Filtre passe-bas du second ordre .....</b>	<b>22</b>



## TP 1 – ÉTUDE COMPARATIVE DES CORRECTEURS PID

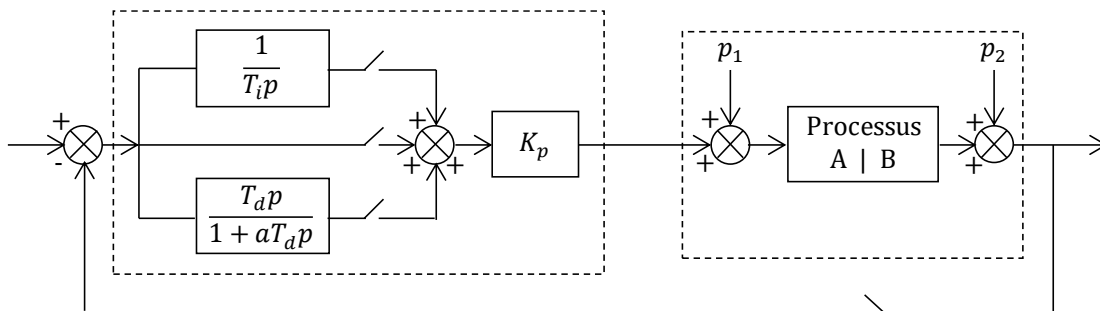
L'objectif de ce TP est d'étudier et d'illustrer l'effet des correcteurs classiques : proportionnel (P), intégral (I) et dérivé (D) pour améliorer les performances de processus élémentaires. Dans un premier temps le système est un filtre linéaire passe-bas du premier ordre. Ensuite, un filtre linéaire passe-bas avec un pôle dominant est corrigé. Les processus étudiés n'étant pas des systèmes physiques mais des systèmes simulés à l'aide d'éléments (amplificateurs opérationnels) quasi-parfaits (compte tenu des fréquences mises en jeu), il ne doit pas apparaître de phénomènes externes mal connus ou difficilement maîtrisables ; les résultats expérimentaux doivent donc être proches de ceux prévus théoriquement. Il convient en conséquence de manipuler soigneusement et de se poser des questions lorsque les résultats ne sont pas ceux escomptés.

Les résultats de la préparation seront établis sans faire appel à des logiciels de simulation.

### I/ MATÉRIEL

On dispose d'une maquette analogique simulant le fonctionnement d'un processus linéaire et comportant différents correcteurs avec un retour unitaire (Figure 1). Pour avoir un processus du premier ordre il suffit de mettre l'interrupteur du bloc simulant le système sur la position A. Si l'interrupteur est sur la position B le processus a un pôle dominant. Les correcteurs peuvent être désactivés, de même que la contre-réaction, en coupant simplement les connexions à l'aide des interrupteurs prévus à cet effet. Les paramètres des correcteurs peuvent être ajustés à l'aide de potentiomètres (réglables par bouton en % de la valeur maximale).

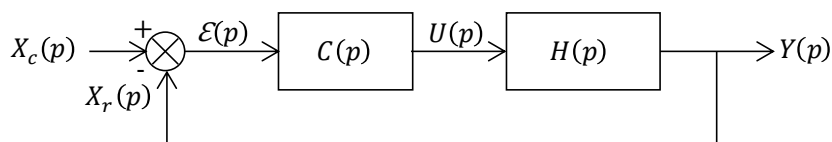
Dans ce TP on s'intéresse uniquement aux performances du système corrigé en asservissement (réponse à une entrée de consigne). Les entrées  $p_1$  et  $p_2$  permettent d'injecter des perturbations et d'étudier les performances du système en régulation (effet des perturbations avec une consigne constante).



**Figure 1 – Schéma de la maquette**

Les différents signaux sont précisés sur la figure 2 où, de manière générique,  $S(p)$  est la transformée de Laplace (TL) du signal  $s(t)$ . On note :

- $H(p)$  la fonction de transfert (FT) du processus,
- $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur,
- $T_{BO}(p)$  la fonction de transfert en boucle ouverte (BO) et  $K_0$  son gain statique,
- $T_{BF}(p)$  la fonction de transfert en boucle fermée (BF) et  $K_F$  son gain statique,
- $\varepsilon_s$  l'erreur statique (de position),
- $t_r(5\%)$  le temps de réponse à 5% du système en BF.



**Figure 2 – Système bouclé à retour unitaire**

## II/ PROCESSUS DU PREMIER ORDRE

Dans un premier temps le processus est un filtre linéaire (FL) du premier ordre de FT

$$H(p) = \frac{1}{1 + Tp} \quad (1)$$

avec  $T = 1$  ms.

### II.1/ Correcteur proportionnel

Dans cette partie le correcteur est un gain réel et positif :

$$C(p) = K_p. \quad (2)$$

#### Préparation 1 :

1/ Vérifier que  $T_{BF}(p)$  est une FT du premier ordre dont les grandeurs caractéristiques ( $K_F$ , constante de temps  $T_F$ , bande passante,  $t_r(5\%)$  et  $\varepsilon_s$ ) seront exprimées en fonction de  $K_p$ .

2/ Préciser l'évolution de la précision et la rapidité du système en BF en fonction de  $K_p$ .

3/ On appelle produit gain-bande le produit du gain statique par la bande passante à 3 dB. Vérifier que le produit gain-bande en BO est égal au produit gain-bande en BF. On dit encore que le produit gain-bande est constant pour un système passe-bas du premier ordre.

#### Préparation 2 :

1/ Tracer le diagramme de Bode asymptotique de  $T_{BO}(p)$  (module et phase) pour  $K_p = 4$  et en déduire le diagramme de Bode asymptotique approché en BF en « basses-fréquences » et en « hautes-fréquences » ainsi que la pulsation d'intersection des asymptotes du module. Comparer le diagramme de Bode asymptotique ainsi obtenu à celui de  $T_{BF}(p)$ .

2/ En raisonnant sur les diagrammes de Bode asymptotiques en BO et en BF et « sans faire de calculs » retrouver que le produit gain-bande est constant pour un système passe-bas du premier ordre.

#### Préparation 3 :

1/ On suppose que la consigne est un échelon d'amplitude  $E_0 (> 0)$ . Tracer sur un même graphe la réponse indicielle en BF ainsi que le signal de commande. En déduire la valeur maximale de  $K_p$ , notée  $K_{\max}$ , assurant un fonctionnement en régime linéaire, c'est-à-dire sans saturation.

2/ Reprendre la question avec un signal en créneaux d'amplitude  $\pm E_0$  (en précisant la différence avec le cas précédent).

#### Manipulation 1 :

1/ Relever la réponse indicielle du processus puis déterminer son gain statique ainsi que sa bande passante à 3 dB.

2/ Boucler le système avec  $K_p = 4$ . Vérifier que le produit gain-bande est constant et que les performances temporelles du système en BF sont celles escomptées.

3/ L'entrée étant un créneau d'amplitude  $\pm 1$  V, retrouver expérimentalement la valeur de  $K_{\max}$  assurant un fonctionnement sans saturation.

4/ L'entrée étant un créneau d'amplitude  $\pm 0,1$  V, augmenter progressivement  $K_p$  jusqu'à environ 20. Vérifier rapidement que le comportement du système en BF est celui prévu. Continuer à augmenter  $K_p$  jusqu'à environ 50, observer le signal de sortie et justifier le résultat obtenu.

5/ Dresser une conclusion.

### II.2/ Correcteur intégral

Dans cette partie le correcteur est un intégrateur :

$$C(p) = \frac{1}{T_i p}, \quad (3)$$

$T_i$  étant une constante positive. La FT en BF est celle d'un filtre passe-bas du second ordre :

$$T_{BF}(p) = \frac{1}{1 + 2m_F \frac{p}{\omega_F} + \frac{p^2}{\omega_F^2}}. \quad (4)$$

L'évolution du temps de réponse réduit à 5% en BF,  $t_r(5\%) \omega_F$ , en fonction du coefficient d'amortissement en BF  $m_F$  est reportée sur la figure 3. Si  $m_F \ll 1$ , le système a un pôle dominant qui impose le temps de réponse et on démontre (à partir de l'expression des pôles) que  $t_r(5\%) \omega_F \approx 3/m_F$ .



Si  $m_F \gg 1$ , le système est oscillant et le temps de réponse est donné par la décroissance de l'enveloppe exponentielle de la réponse unitaire (partie réelle des pôles) et on a  $t_r(5\%) \omega_F \approx 6m_F$ . Ces approximations sont aussi reportées sur la figure.

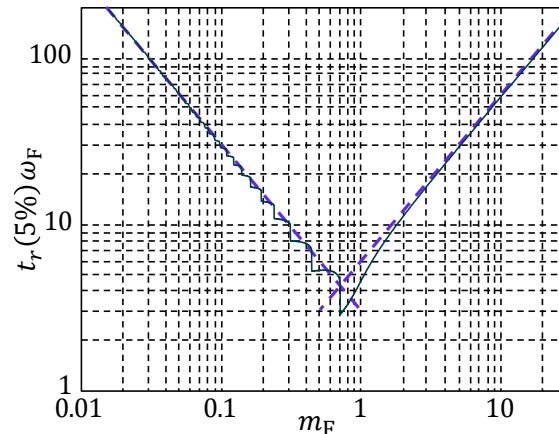


Figure 3 – Temps de réponse réduit à 5% d'un système du 2nd ordre,  $t_r(5\%) \omega_F$ , en fonction du coefficient d'amortissement,  $m_F$ , et approximation

#### Préparation 4 :

- 1/ Expliciter  $K_F$ ,  $\omega_F$  et  $m_F$  en fonction de  $T_i$ . Peut-on régler séparément  $\omega_F$  et  $m_F$  en agissant sur le seul réglage de  $T_i$  ? Comment varie  $\omega_F$ ,  $m_F$  et  $D_1$ , 1<sup>er</sup> dépassement lors d'un essai indiciel, avec  $T_i$  ?
- 2/ Préciser les valeurs de  $T_i$  conduisant à quelques valeurs particulières de  $m_F$ .
- 3/ Représenter l'allure du signal d'erreur puis du signal de commande pour  $t$  « petit » lors d'un essai indiciel et illustrer l'effet de  $T_i$ .
- 4/ L'effet de  $T_i$  sur  $t_r(5\%)$  est étudié en utilisant les approximations indiquées précédemment. Donner une expression approchée de  $t_r(5\%)$  en fonction de  $T_i$ .
- 5/ Un des buts d'un asservissement est d'avoir un système rapide sans pour autant avoir des dépassements indiciels élevés. Indiquer comment choisir « au mieux » la constante d'intégration  $T_i$  ? Le raisonnement suivi doit apparaître clairement.

#### Préparation 5 :

- 1/ Déterminer la valeur de  $T_i$  conduisant à une marge de phase de  $45^\circ$ .
- 2/ En s'appuyant sur le diagramme de Bode en BO, établir que plus l'effet intégrateur est important ( $T_i$  petit) plus la marge de phase diminue.
- 3/ En s'appuyant sur le diagramme de Black, vérifier que si  $m_\phi = 45^\circ$  alors le système en BF a un gain statique unitaire, une résonance d'environ 2,3 dB et une bande passante en BF de l'ordre de la pulsation de transition, notée  $\omega_t$ .
- 4/ Comparer les avantages et les inconvénients d'un correcteur proportionnel et d'un correcteur intégral.

#### Manipulation 2 :

- 1/ Boucler le système avec le correcteur intégral et  $T_i = T$  (ne pas oublier de régler  $K_p$  à 1) et vérifier le bon fonctionnement du système en BF ( $K_F$ ,  $\varepsilon_s$ ,  $D_1$  et  $t_r(5\%)$ ). Mesurer la pente à l'origine de la tension de commande du processus.
- 2/ Régler  $T_i$  à  $5T$  puis visualiser la sortie du système. Diminuer progressivement  $T_i$ , étudier son influence sur la réponse indicelle du système bouclé et retrouver les résultats prévus lors de la préparation.

### II.3/ Correcteur proportionnel et intégral

Afin de concilier les avantages du correcteur proportionnel (système rapide) et du correcteur intégral (erreur statique nulle), la fonction de transfert du correcteur est maintenant

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) \quad (5)$$

où  $K_p$  et  $T_i$  sont des constantes positives.

### Préparation 6 :

- 1/ On choisit  $T_i$  compensant le pôle du processus. Expliciter la FT en BF en fonction de  $K_p$  et préciser ses grandeurs caractéristiques. Faire les applications numériques pour  $K_p = 4$ .
- 2/ À tension d'entrée donnée, pourquoi ne peut-on pas trop augmenter  $K_p$  ?

### Manipulation 3 :

- 1/ Boucler le système avec  $K_p = 4$  et  $T_i = T$  et vérifier le bon fonctionnement du système en BF.
- 2/ Dresser une conclusion sur la correction du système du premier ordre.

## III/ PROCESSUS À PÔLE DOMINANT

Le processus est maintenant un filtre linéaire avec un pôle dominant. Il a donc un pôle « proche » de l'axe imaginaire, qui est le pôle dominant, les autres pôles étant « éloignés » et sans résonance aiguë. La réponse indicielle est alors proche de celle d'un système du premier ordre (Figure 5). Le diagramme de Bode du processus est représentée sur la figure 6 et le lieu de Nyquist sur la figure 7.

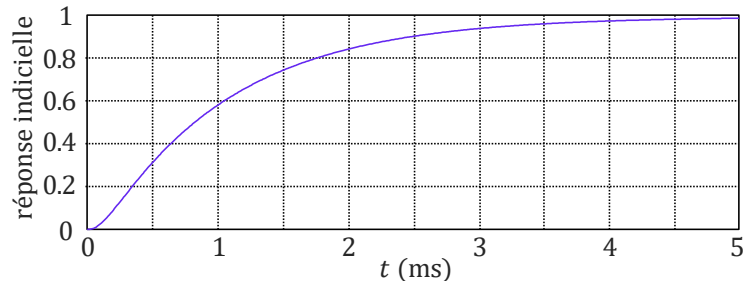


Figure 5 – Réponse indicielle du processus

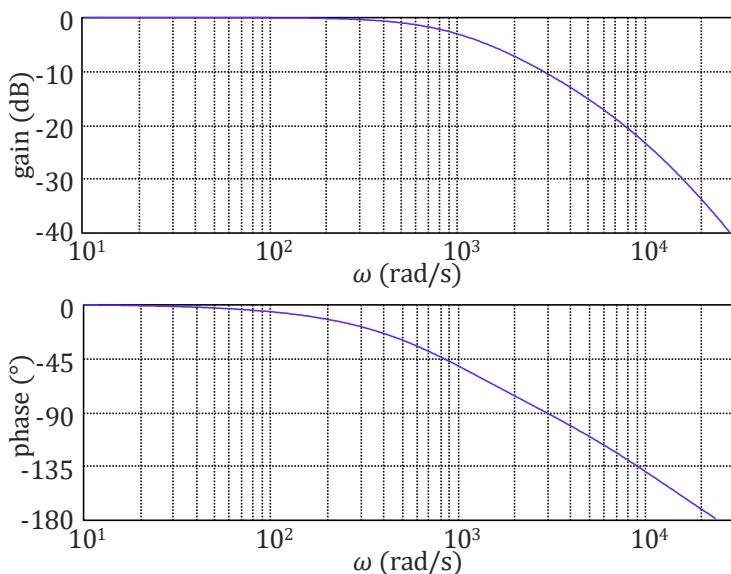


Figure 6 – Diagramme de Bode du processus

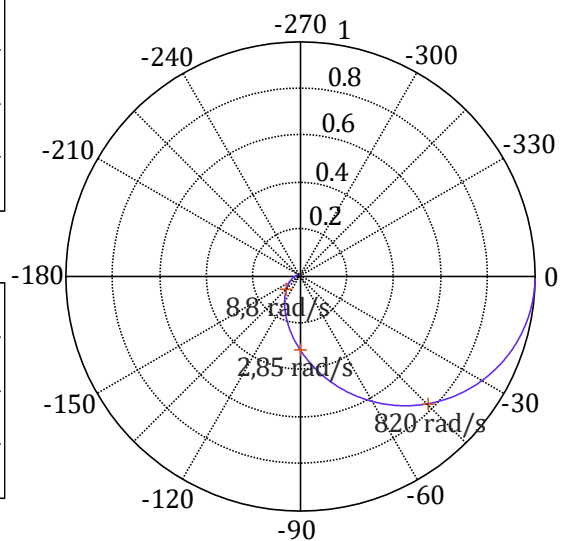


Figure 7 – Lieu de Nyquist du processus

### Préparation 7 :

- 1/ En faisant des simplifications qui seront précisées, estimer la constante de temps  $T$  associée au pôle dominant.

#### III.1/ Correcteur proportionnel

Dans toute cette partie le correcteur est un gain  $K_p$  réel et positif (2).

### Préparation 8 :

- 1/ Justifier pourquoi, pour obtenir un système rapide en BF ou encore avec une bande passante élevée,  $K_p$  doit être assez grand mais pas trop afin d'avoir une marge de phase et une marge de gain suffisantes.
- 2/ Déterminer la valeur de  $K_p$ , notée  $K_{45}$ , assurant une marge de phase de  $45^\circ$ . Pour cette valeur de  $K_p$  évaluer la largeur de bande passante en BF ainsi que le temps de réponse à 5% (le raisonnement suivi doit apparaître clairement).
- 3/ Déterminer la valeur de  $K_p$ , notée  $K_{\max}$ , plaçant le système à la limite de stabilité.

### Manipulation 4 :

- 1/ Déterminer expérimentalement la valeur de  $K_{45}$ .
- 2/ Relever la réponse indicielle en BF ainsi que ses principales grandeurs caractéristiques pour  $K_p =$

$K_{45}$ .

3/ Relever la réponse indicielle en BF avec une valeur « faible » de  $K_p$  puis l'augmenter progressivement. Vérifier que le système devient de plus en plus rapide puis présente des oscillations de plus en plus importantes (attention à ajuster l'amplitude du créneau afin de ne pas avoir de saturation).

3/ Régler le gain  $K_p$  afin d'obtenir un « bon » compromis stabilité-précision et comparer cette valeur à celle de  $K_{45}$ .

4/ Continuer à augmenter progressivement  $K_p$ , le système étant non excité ( $x_c(t) = 0$ ). Commenter et analyser le résultat obtenu.

### III.2/ Correcteur proportionnel et intégral

Dans cette partie on considère un correcteur proportionnel et intégral (PI) de FT donnée par (5).

**Préparation 9 :** Synthétiser un correcteur conduisant à un système « rapide » et « précis » (la démarche doit être clairement précisée).

#### Manipulation 5 :

1/ Pour le correcteur déterminé en préparation ou, à défaut pour  $K_p = 10$  et  $T_i = 1$  ms, relever la marge de phase expérimentale (faire apparaître clairement la démarche suivie dans le compte-rendu).

2/ Relever la réponse à un échelon en BF et vérifier que le réglage correspond à un bon compromis stabilité-précision. Déterminer les principales grandeurs caractéristiques de la réponse indicielle.

3/ Pour  $T_i = 1$  ms, étudier l'effet de  $K_p$  sur la réponse indicielle.

4/ Pour  $K_p = 10$ , étudier l'effet de  $T_i$  sur la réponse indicielle.

5/ Comparer les performances obtenues avec les correcteurs P et PI.

### III.3/ Correcteur proportionnel, intégral et dérivé

Afin d'avoir un système plus rapide on ajoute une action dérivée qui permet d'anticiper les variations de la commande en appliquant au processus une commande proportionnelle à la vitesse de variation de l'erreur. Ce correcteur permet aussi d'augmenter la marge de phase et, par conséquent, d'avoir des dépassements indiciels plus faibles ou, à marge de phase donnée, d'augmenter le gain et, donc la rapidité du système.

La fonction de transfert du correcteur combinant les actions proportionnelle, intégrale et dérivée filtrée (PID) est

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} + \frac{T_d p}{1 + a T_d p} \right), \quad (6)$$

$K_p, T_i, T_d$  et  $a$  étant des constantes positives. Dans la suite on prendra  $a = 0,1$  et considérera que  $a \ll 1$ .

#### Préparation 10 :

1/ Montrer que si  $T_i \gg T_d$  on peut considérer que

$$C(p) \approx K_p \frac{(1 + T_i p)(1 + T_d p)}{T_i p}. \quad (7)$$

2/ Pour la valeur de  $T_i$  déterminée à la préparation 9, synthétiser un correcteur PID afin d'avoir un dépassement indiciel de l'ordre de 5% (la démarche doit être clairement précisée).

3/ Toujours pour la valeur de  $T_i$  déterminée à la préparation 9, synthétiser un correcteur PID afin d'avoir un système deux fois plus rapide qu'avec un correcteur PI (la démarche doit être clairement précisée).

#### Manipulation 6 :

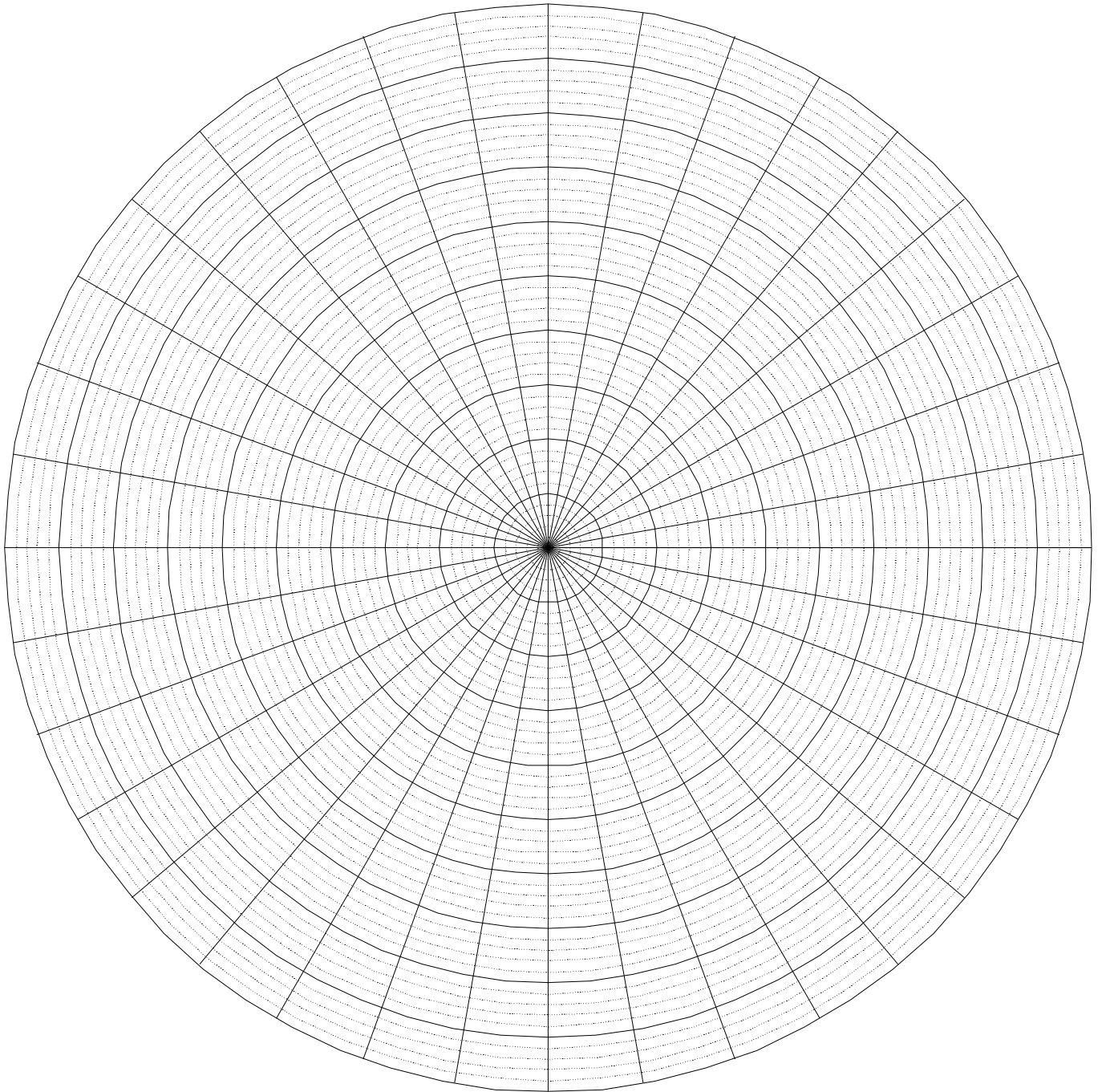
1/ Pour le correcteur déterminé en préparation ou, à défaut pour  $K_p = 20$ ,  $T_i = 1,3$  ms,  $T_d = 0,05$  ms et  $a = 0,1$ , relever la réponse à un échelon et vérifier la diminution du dépassement indiciel par rapport au correcteur PI.

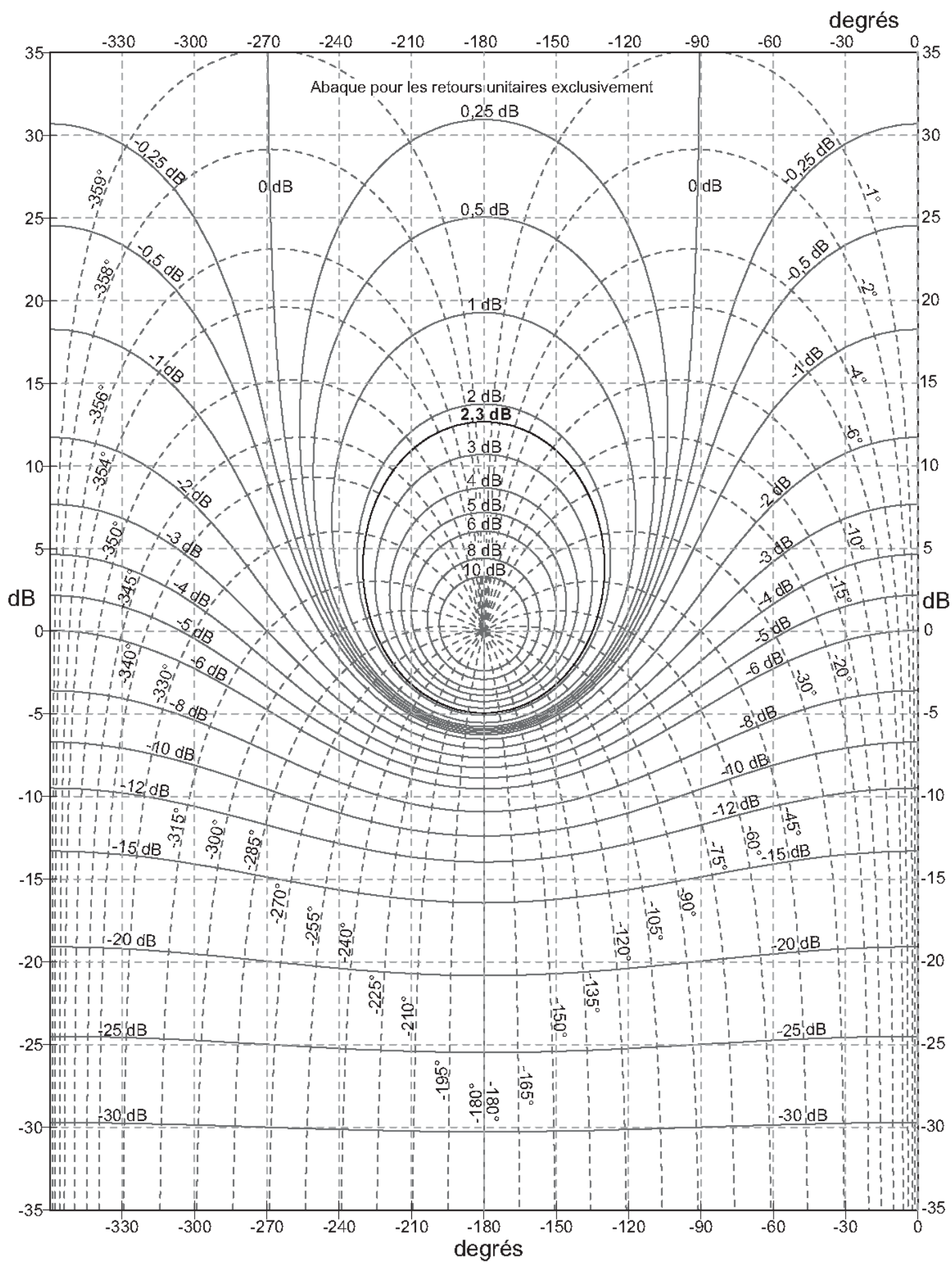
2/ Vérifier qu'en augmentant  $K_p$  on peut obtenir un système plus rapide qu'avec un correcteur PI.

3/ Appliquer un signal d'entrée triangulaire. Visualiser le signal de sortie ainsi que le signal d'erreur et illustrer l'intérêt du correcteur PID.

4/ Dresser une conclusion générale.







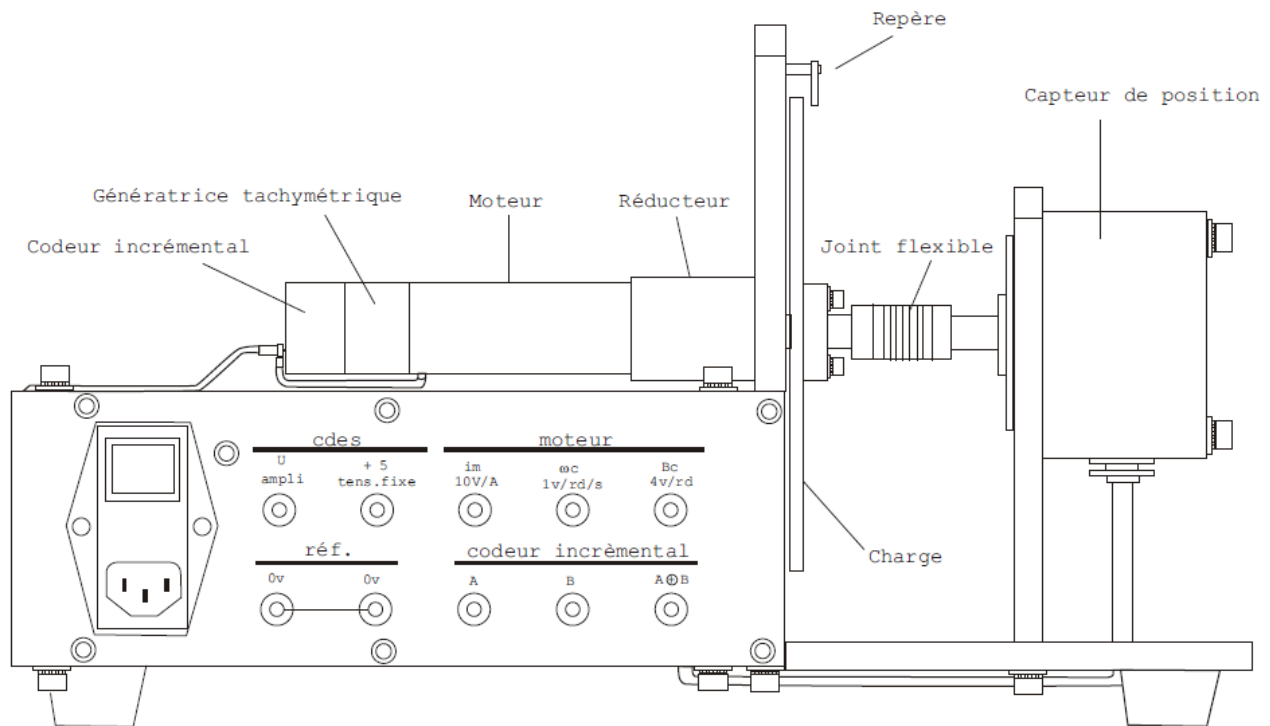


## TP 2 – COMMANDE EN VITESSE D'UN MOTEUR À COURANT CONTINU

L'objectif de ce TP est de mettre en œuvre sur un système physique simple l'ensemble de la démarche allant de la modélisation à la commande en boucle fermée en passant par l'identification. Plus précisément on s'intéresse à l'asservissement de la vitesse de rotation d'une charge autour d'une valeur donnée et étudie l'effet de perturbations.

### I/ MATÉRIEL

On dispose d'un banc (Figure 1) constitué d'un moteur à courant continu de faible puissance avec son amplificateur de puissance, une génératrice tachymétrique, un réducteur (rapport 24) et une charge inertielle (disque) ainsi qu'un simulateur analogique comportant les fonctions de base de l'automatique (sommeur, gain, correcteurs, filtres...).



**Figure 1 – Vue de profil du banc moteur HMC-BAM**

source : documentation constructeur

Le système est représenté par un bloc fonctionnel dont l'entrée est la tension de commande du moteur, notée  $U(t)$ , et la sortie la vitesse de rotation de la charge, notée  $\omega_c(t)$ .  $U_0$  est la tension correspondant à la vitesse  $\Omega_0$ . La tension de commande et la vitesse de rotation varient autour du point de fonctionnement  $(U_0, \Omega_0)$  encore appelé point de repos. La tension d'alimentation du moteur devant être comprises entre  $-10\text{ V}$  et  $+10\text{ V}$ , l'étude sera menée avec  $U_0 = 5\text{ V}$ .

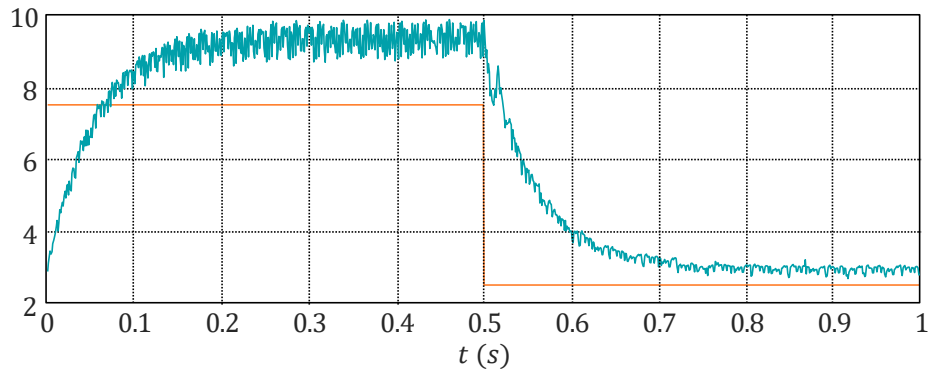
### II/ IDENTIFICATION

Autour du point de fonctionnement  $(U_0, \Omega_0)$ , si le sens de rotation du moteur ne s'inverse pas, on peut considérer que le banc moteur peut être assimilé à / modélisé par un filtre linéaire (FL) du premier ordre de fonction de transfert (FT) (modèle de connaissance et modèle de comportement, cf. Figure 2)

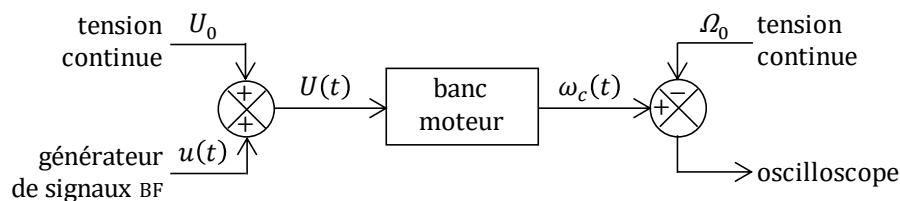
$$G(p) = \frac{G_0}{1 + \tau p}, \quad (1)$$

$G_0$  et  $\tau$  étant des constantes à déterminer. On s'intéresse tout d'abord à l'identification des paramètres du modèle.

Les signaux observés étant basses fréquences, le mode AC de l'oscilloscope ne peut pas être utilisé. Pour faciliter la visualisation des variations de  $\omega_c(t)$  pendant la phase d'identification on soustrait la tension  $\Omega_0$  à la tension délivrée par la génératrice tachymétrique (Figure 2). Ainsi, si  $u(t) = 0$ , la tension en sortie du soustracteur est nulle.



**Figure 2 – Réponse à un créneau du banc moteur :**  
tension de commande  $U(t)$  (—) et vitesse de rotation  $\omega_c(t)$  (—)



**Figure 3 – Montage pour l'identification**

#### Préparation 1 :

- 1/ Indiquer comment déterminer les valeurs de  $G_0$  et de  $\tau$  à partir d'un essai indiciel.
- 2/ Reprendre la question à partir d'une étude en régime harmonique.
- 3/ Commenter le relevé de la figure 2 et l'exploiter au mieux pour déterminer la valeur du point de fonctionnement ( $U_0, \Omega_0$ ) ainsi que celle des paramètres  $G_0$  et  $\tau$  de la fonction de transfert  $G(p)$  (1).

#### Manipulation 1 :

- 1/ Déterminer expérimentalement  $G_0$  et  $\tau$  autour du point de fonctionnement ( $U_0, \Omega_0$ ) à partir d'essais indiciels.
- 2/ Utiliser la fonction moyennage de l'oscilloscope et recommencer les mesures. Commenter la courbe obtenue.
- 3/ Une étude en régime harmonique permet-elle d'identifier facilement et rapidement les paramètres du modèle ?
- 4/ Comparer la valeur de  $G_0$  à celle du rapport  $\Omega_0/U_0$  et justifier l'écart.

Comme on peut le voir sur la figure 3, le signal délivré par la génératrice tachymétrique est fortement bruité. Pour améliorer la qualité des mesures, le signal délivré par la génératrice sera filtré par un filtre passe-bas du second ordre de pulsation propre 20 fois plus grande que la pulsation de coupure du banc moteur. Ce filtre limitera également en boucle fermée les effets néfastes de la résonance due à l'accouplement entre le moteur et la génératrice tachymétrique.

#### Préparation 2 :

- 1/ Pourquoi ne pas avoir choisi une pulsation de coupure du filtre plus basse afin d'éliminer plus de bruit et comment choisir le coefficient d'amortissement du filtre ?
- 2/ Comment peut-on, à partir de la réponse indicielle, s'assurer que le filtre a été « correctement » choisi ?

#### Manipulation 2 :

- 1/ Relever la réponse à un échelon du moteur avant et après filtrage et s'assurer que le filtre a été correctement choisi (préciser la démarche suivie).
- 2/ Refaire les mesures de  $G_0$  et de  $\tau$  avec la réponse indicielle filtrée. Conclure.

Dans toute la suite du TP le bloc de filtrage ne sera pas séparé du banc moteur. Le système étudié expérimentalement sera alors composé du banc moteur et du filtre. Cependant, pour les calculs, la fonction de transfert complète sera approchée par celle du banc moteur seul.



### III/ CORRECTION

Le processus étant correctement identifié, afin d'améliorer ses performances on peut envisager une étape de commande en boucle fermée (BF) autour du point de fonctionnement  $(U_0, \Omega_0)$ . Le schéma du système en BF qui permet d'assurer ce point de fonctionnement quel que soit le correcteur est représenté sur la figure 4. Le montage équivalent pour les variations des signaux de part et d'autre le point de fonctionnement est représenté sur la figure 5. Les correcteurs étudiés sont de type proportionnel (P) ou proportionnel et intégral (PI). On note  $C(p)$  la fonction de transfert du correcteur et  $T_{BF}(p)$  celle du système en BF représenté sur la figure 5.

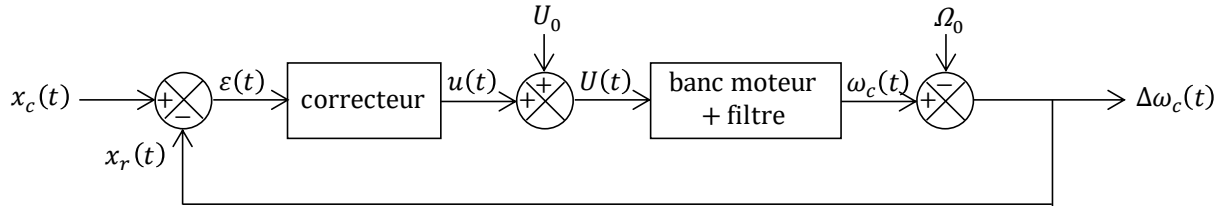


Figure 4 – Montage du système corrigé autour du point de fonctionnement  $(U_0, \Omega_0)$

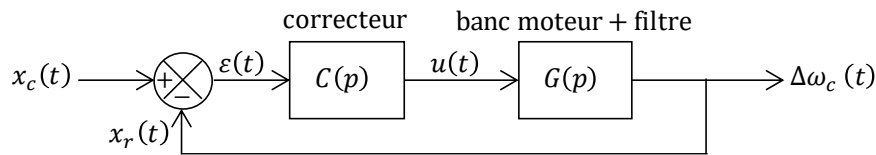


Figure 5 – Schéma « petits signaux » autour du point de fonctionnement  $(U_0, \Omega_0)$

#### Préparation 3 :

1/ Analyser le montage de la figure 4 et justifier le schéma de la figure 5.

#### III.1/ Correction proportionnelle

Dans cette partie

$$C(p) = K, \quad (2)$$

gain réel et positif.

#### Préparation 4 :

- 1/ Expliciter  $T_{BF}(p)$  en fonction de  $G_0$ ,  $\tau$  et  $K$  ainsi que le gain statique et le temps de réponse à 5%.
- 2/ Donner l'expression de  $K = K_1$  conduisant à un temps de réponse à 5% du système en BF 3 fois plus petit que celui du système non corrigé.

#### Manipulation 3 :

- 1/ Pour  $K = K_1$ , mesurer le gain statique en BF, le temps de réponse à 5% et l'erreur statique.
- 2/ Comparer les valeurs mesurées aux valeurs prédéterminées.

#### III.2/ Correction proportionnelle et intégrale

Dans cette partie

$$C(p) = K \left( G + \frac{1}{T_i p} \right), \quad (3)$$

$K$ ,  $G$  et  $T_i$  étant des constantes réelles et positives.

#### Préparation 5 :

- 1/ Déterminer la valeur du produit  $(GT_i)$  compensant le pôle dominant du système.
- 2/ Pour cette valeur de  $(GT_i)$ , donner l'expression de  $T_{BF}(p)$  et du temps de réponse à 5%.
- 3/ On désire toujours un temps de réponse à 5% en BF égal au tiers de celui du banc moteur. On impose  $T_i = T_2 = 0,1$  s. Déterminer l'expression de  $G = G_2$  et  $K = K_2$  répondant au cahier des charges.

#### Manipulation 4 :

- 1/ Pour  $K = K_2$ ,  $T_i = T_2$  et  $G = G_2$  mesurer le gain statique en BF, le temps de réponse à 5% et l'erreur statique et comparer ces valeurs à celles prédéterminées.
- 2/ Étudier l'influence d'une mauvaise compensation de pôle.

#### IV/ RÉGULATION

Au montage de la figure 4 on ajoute en sortie, à l'aide d'un sommateur, un signal  $b(t)$  qui représente une perturbation. Le montage « petits signaux » est représenté sur la figure 6. Dans toute cette partie le signal de consigne est nul ( $x_c(t) = 0$ ), le point de fonctionnement ( $U_0, \omega_0$ ) étant inchangé.

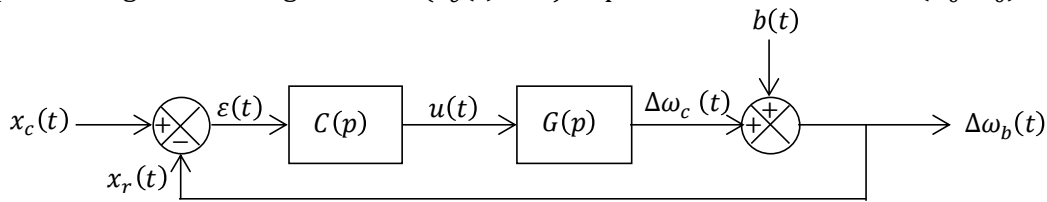


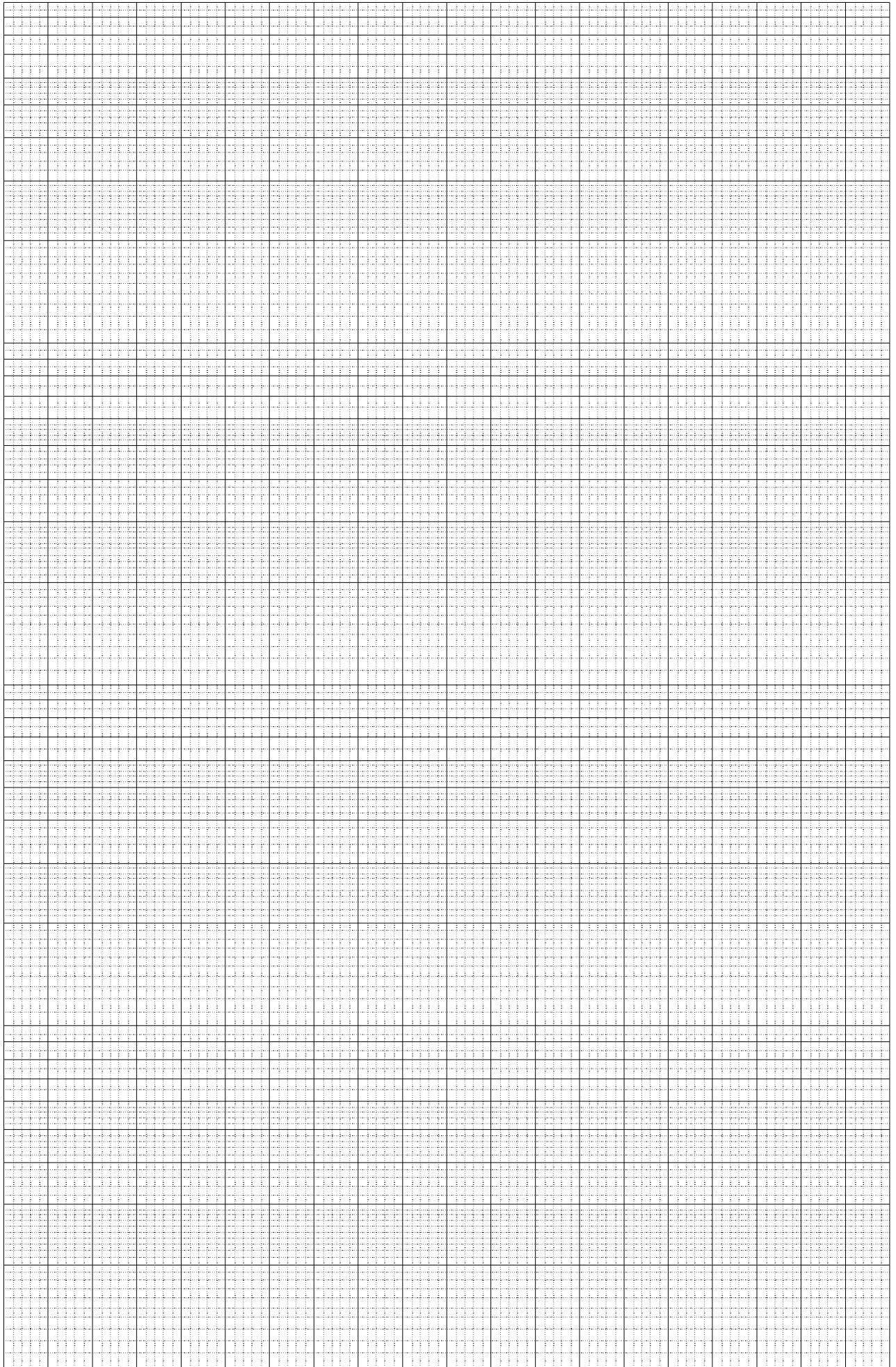
Figure 6 – Schéma « petits signaux » pour l'étude en régulation

##### Préparation 6 :

- 1/ Expliciter la fonction de transfert  $\Delta\Omega_b(p)/B(p)$  pour les correcteurs P et PI répondant au cahier des charges défini précédemment.
- 2/ Pour  $G_0 = 1,2$  et  $\tau = 60$  ms, tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain uniquement) de ces deux fonctions de transfert.
- 3/ On suppose que la perturbation comporte une composante continue  $b_0 = 0,5$  V et une composante sinusoïdale de fréquence  $f_0 = 3$  Hz qui est de l'ordre de grandeur de  $1/(2\pi\tau)$  :  $b(t) = b_0 + \sin(2\pi f_0 t)$ . Donner l'expression de  $\Delta\omega_b(t)$  en régime permanent en fonction du correcteur. Comparer en particulier la transmission de la composante continue.

##### Manipulation 5 :

- 1/ Étudier l'effet du contenu spectral de la perturbation avec les deux correcteurs.
- 2/ Quel est le meilleur correcteur vis-à-vis de la consigne (en asservissement) et de la perturbation (en régulation) ?
- 4/ Dresser une conclusion générale.





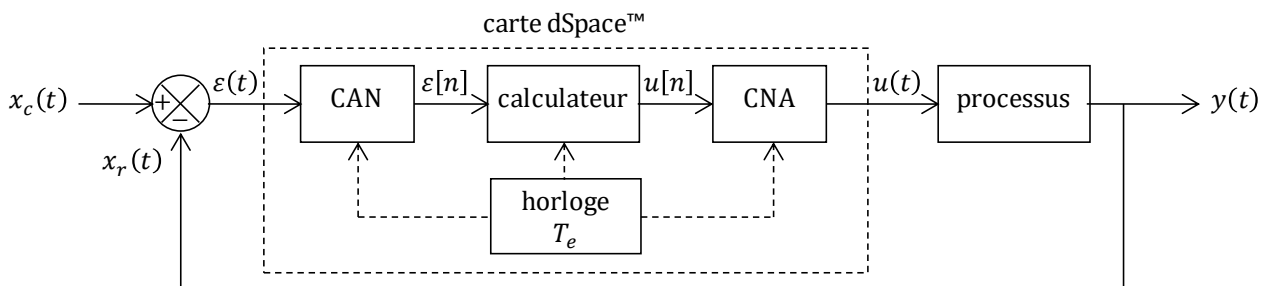
## TP 3 – SYNTHÈSE DE CORRECTEURS NUMÉRIQUES PAR APPROXIMATION DE CORRECTEURS ANALOGIQUES

Dans ce TP on s'intéresse à la commande numérique en boucle fermée d'un processus analogique, le correcteur étant synthétisé par numérisation / discrétisation / transposition d'un correcteur analogique. L'effet de la période d'échantillonnage / fréquence de mise à jour de la commande du processus est étudié, de même que l'influence de la méthode de discrétisation du correcteur.

### I/ INTRODUCTION

La mise en œuvre d'un asservissement analogique numérisé nécessite de traiter à la fois des signaux analogiques et des signaux numériques. Pour faire l'interface entre le « monde analogique » et le « monde numérique », ou encore entre les signaux à temps continu et à temps discret, on utilise un convertisseur analogique-numérique (CAN), qui intègre un échantillonneur, et un convertisseur numérique-analogique (CNA), qui intègre un bloqueur d'ordre 0 et permet d'appliquer en entrée du processus un signal analogique. L'implémentation du correcteur au cours de la séance de TP sera effectuée à l'aide d'une carte dSpace® qui comporte les éléments de base au traitement numérique du signal (CAN, CNA, processeur de traitement numérique du signal (dsp)...) et est pilotée depuis Matlab-Simulink®.

La chaîne de l'asservissement numérique étudié est représentée sur la figure 1 qui précise la notation des différents signaux. Les opérations de conversion (CAN et CNA) sont synchronisées par une horloge à la cadence  $T_e$ . La comparaison peut être effectuée de manière numérique dans le cas où la consigne et la sortie du processus sont des signaux à temps discret. Dans la suite on néglige l'erreur de quantification et le temps de conversion des convertisseurs ainsi que le temps de calcul de la loi de commande. La dynamique des convertisseurs est de  $\pm 10$  V mais les signaux de sortie du CAN et d'entrée du CNA sous Simulink® sont normalisés et compris entre  $\pm 1$ .



**Figure 1 – Synoptique d'un asservissement numérique**

Le processus simulé sur la maquette analogique est un filtre linéaire (FL) passe-bas du second ordre (sortie 3) de fonction de transfert (FT)

$$H(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2m\frac{p}{\omega_0} + 1}. \quad (1)$$

Les prédéterminations et les simulations seront effectuées avec  $\omega_0 = 129$  rad/s et  $m = 0,5$ . La réponse en fréquence (RF) du processus avec ces valeurs est donnée dans le tableau ci-dessous.

$\omega$ (rad/s)	10	20	30	40	50	60	70	80	91	100
$ H(j\omega) $ (dB)	0,03	0,10	0,23	0,39	0,59	0,81	1,01	1,17	1,25	1,19
$\arg(H(j\omega))$ (°)	-4	-9	-14	-19	-25	-31	-38	-45	-55	-63
$\omega$ (rad/s)	110	120	129	140	160	194	209	250	350	500
$ H(j\omega) $ (dB)	0,96	0,54	0	-0,83	-2,6	-5,9	-7,2	-10,6	-16,8	-23,3
$\arg(H(j\omega))$ (°)	-72	-82	-90	-99	-113	-130	-135	-145	-157	-165

**Tableau 1 – Réponse en fréquence du processus**

## II/ ÉCHANTILLONNAGE ET PRISE EN MAIN DU MATÉRIEL

Afin de prendre en main la carte dSpace® on s'intéresse à l'acquisition d'un signal et sa restitution avec un bloqueur d'ordre 0, ainsi la sortie du calculateur est égale à son entrée.

### Préparation 1 :

1/ Représenter le module de la transformée de Fourier (TF) d'un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$  échantillonné à la fréquence  $F_e = 1/T_e$ .

2/ On s'intéresse à la reconstruction du signal par filtrage passe-bas idéal du signal échantillonné. Préciser le signal obtenu dans le cas où  $f_0 < F_e/2$  puis, par exemple, pour  $f_0 = 1,2F_e$ .

### Manipulation 1 :

1/ Réaliser sous Simulink® le schéma représenté sur la figure 2 avec  $T_e = 1$  ms et un signal sinusoïdal de fréquence  $f_0$ . Étudier l'effet de  $f_0$ .

2/ Régler  $f_0$  à 1 kHz et expliquer le phénomène de battement.

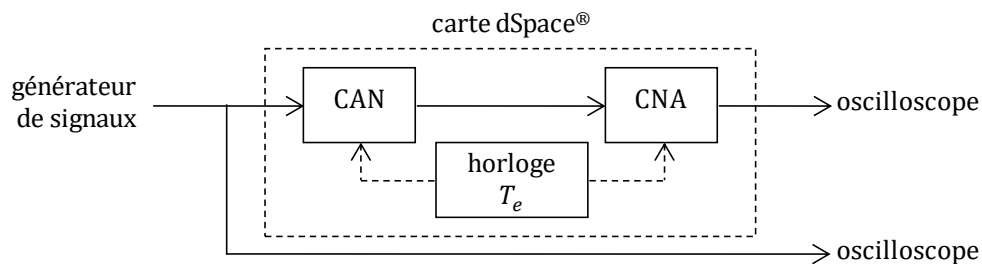


Figure 2 – Acquisition et restitution d'un signal avec un bloqueur d'ordre 0

## III/ CORRECTEUR PROPORTIONNEL

Dans les cas où la fréquence d'échantillonnage est suffisamment grande devant la bande passante du processus on peut considérer que l'asservissement échantillonné se comporte comme un asservissement analogique. L'objectif de cette partie est de discuter de la validité de cette hypothèse en comparant les performances dynamiques d'un asservissement purement analogique à celles d'un asservissement échantillonné corrigé avec un correcteur analogique numérisé, le correcteur étant un gain réel et positif noté  $K_p$ . Ensuite la numérisation du correcteur est prise en compte en introduisant un retard pur de valeur  $T_e/2$ .

### III.1/ Correcteur analogique

Dans un premier on s'intéresse à la correction purement analogique du processus.

### Préparation 2 :

1/ Déterminer l'expression de la fonction de transfert du système en boucle fermée (BF), notée  $T_{BF}(p)$ , en fonction de  $m$ ,  $\omega_0$  et  $K_p$  et préciser ses paramètres.

2/ Pour  $K_p = 20$ , déterminer  $t_r(5\%)$ , temps de réponse à 5 %, ainsi que  $D_1$ , premier dépassement lors d'un essai indiciel en boucle fermée (cf. annexe).

3/ En utilisant le tableau 1 déterminer la valeur de  $K_p$ , notée  $K_{45}$ , assurant une marge de phase de  $45^\circ$ . Pour cette valeur de  $K_p$  déterminer la marge de gain ainsi que les principales grandeurs caractéristiques de la réponse indicielle.

### Manipulation 2 :

1/ Simuler le système corrigé sous Simulink® à l'aide du montage représenté sur la figure 3 et valider les prédéterminations.

2/ Réaliser la correction purement analogique du processus de la maquette avec  $K_p = K_{45}$ . Comparer les résultats expérimentaux à ceux obtenus en simulation.

3/ Si besoin, identifier le système et reprendre la simulation avec les valeurs déterminées expérimentalement. Les nouveaux résultats sont-ils d'avantage en accord avec les mesures ? Par défaut, on prendra les valeurs théoriques pour les simulations suivantes.

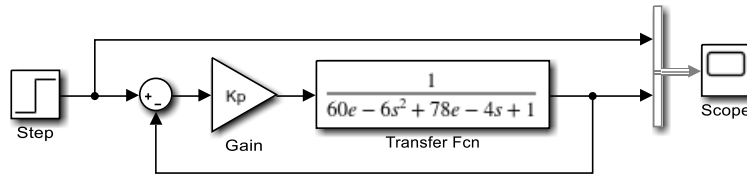


Figure 3 – Schéma de simulation de l'asservissement analogique

### III.2/ Correcteur analogique numérisé

Le processus est maintenant asservi avec un correcteur analogique numérisé selon le schéma représenté sur la figure 4.

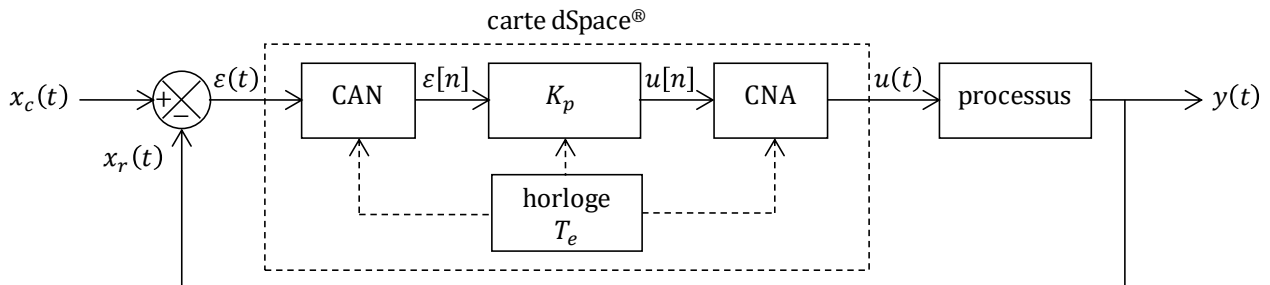


Figure 4 – Synoptique d'un asservissement numérisé avec un correcteur proportionnel

Pour les fréquences suffisamment petites on montre que l'échantillonneur-bloqueur (CAN+CNA) peut être modélisé par un retard pur. Le modèle du système asservi échantillonné est représenté sur la figure 5.

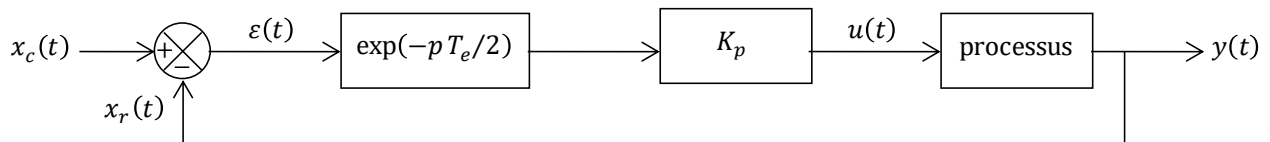


Figure 5 – Modèle analogique d'un asservissement numérisé avec un correcteur proportionnel

#### Préparation 3 :

- 1/ En s'appuyant sur le tableau 1 tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du modèle représenté sur la figure 5 ainsi que le lieu de Black pour  $T_e = 1$  ms et  $K_p = 1$ .
- 2/ En déduire la valeur de  $K_p$  assurant une marge de phase de  $45^\circ$  puis celle plaçant le système en boucle fermée à la limite d'instabilité.
- 3/ Reprendre l'étude avec  $T_e = 5$  ms.

#### Manipulation 3 :

- 1/ Simuler sous Simulink® le système corrigé à l'aide du correcteur numérique (Figure 6) et du correcteur numérique modélisé par un retard pur (Figure 7) et comparer les résultats entre eux et à ceux obtenus avec un correcteur analogique (le bloc « Zero-Order Hold » échantillonne le signal d'entrée et le bloque à la période  $T_e$ , qui est un paramètre de réglage du bloc, comme pour tous les blocs traitant des signaux à temps discret).
- 2/ Corriger le système expérimental avec le correcteur numérique.
- 3/ Dresser une conclusion.

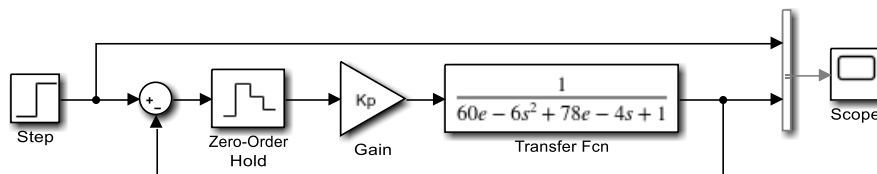


Figure 6 – Schéma de simulation de l'asservissement numérique

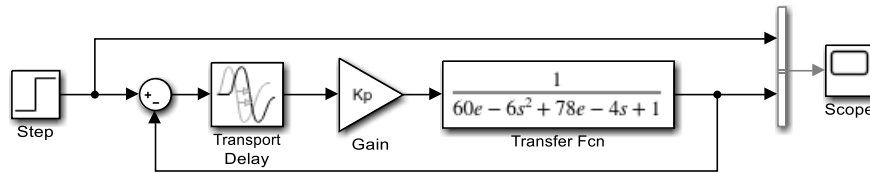


Figure 7 – Schéma de simulation du modèle analogique de l'asservissement numérique

#### IV/ CORRECTEUR PROPORTIONNEL ET INTÉGRAL ANALOGIQUE NUMÉRISÉ

Dans cette partie le correcteur numérique est synthétisé par discrétisation d'un correcteur proportionnel et intégral (PI) analogique de fonction de transfert

$$C(p) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right), \quad (2)$$

$K_p$  et  $T_i$  étant positifs.

##### IV.1/ Numérisation d'un filtre analogique

Pour discrétiser filtre analogique on considère la fonction intégrale

$$u(t) = \int_0^t \varepsilon(\theta) d\theta \quad (3)$$

qui, prise entre deux instants d'échantillonnage, s'écrit

$$u[n] = u[n-1] + \int_{(n-1)T_e}^{nT_e} \varepsilon(\theta) d\theta \quad (4)$$

où  $u[n] = u(nT_e)$ . L'intégrale de (4) peut être approchée avec la méthode des rectangles, encore appelée méthode d'Euler, ou la méthode des trapèzes, encore appelée méthode de Tustin.

L'algorithme d'intégration numérique de (4) avec la méthode d'Euler s'écrit

$$u[n] = u[n-1] + T_e \varepsilon[n] \quad (5)$$

et la fonction de transfert numérique correspondant à l'intégrateur analogique, de fonction de transfert  $\frac{1}{p}$ , est  $\frac{T_e}{1-z^{-1}}$ . Cette transformation correspond également à l'approximation de la dérivée d'un signal à l'instant  $nT_e$  par son accroissement entre les instants  $(n-1)T_e$  et  $nT_e$ . La fonction de transfert numérique correspondant au dérivateur analogique, de fonction de transfert  $p$ , est alors  $\frac{1-z^{-1}}{T_e}$ . Le filtre numérique est obtenu en remplaçant l'opérateur  $p$  de la fonction de transfert du filtre analogique par

$$f_r(p) = \frac{1-z^{-1}}{T_e}. \quad (6)$$

L'algorithme d'intégration numérique avec la méthode de Tustin s'écrit

$$u[n] = u[n-1] + T_e \frac{\varepsilon[n] + \varepsilon[n-1]}{2} \quad (7)$$

et la fonction de transfert correspondant à l'intégrateur analogique est  $\frac{T_e}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ . Le filtre numérique est obtenu en remplaçant l'opérateur  $p$  de la fonction de transfert du filtre analogique par

$$f_t(p) = \frac{2}{T_e} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (8)$$

##### IV.2/ Synthèse du correcteur numérique

###### Préparation 4 :

1/ Synthétiser un correcteur analogique PI conduisant à une marge de phase de  $45^\circ$  (le raisonnement suivi doit apparaître clairement).

2/ Exprimer en fonction de  $K_p$ ,  $T_i$  et  $T_e$  la fonction de transfert du correcteur numérique obtenue avec la méthode des rectangles puis la méthode des trapèzes.

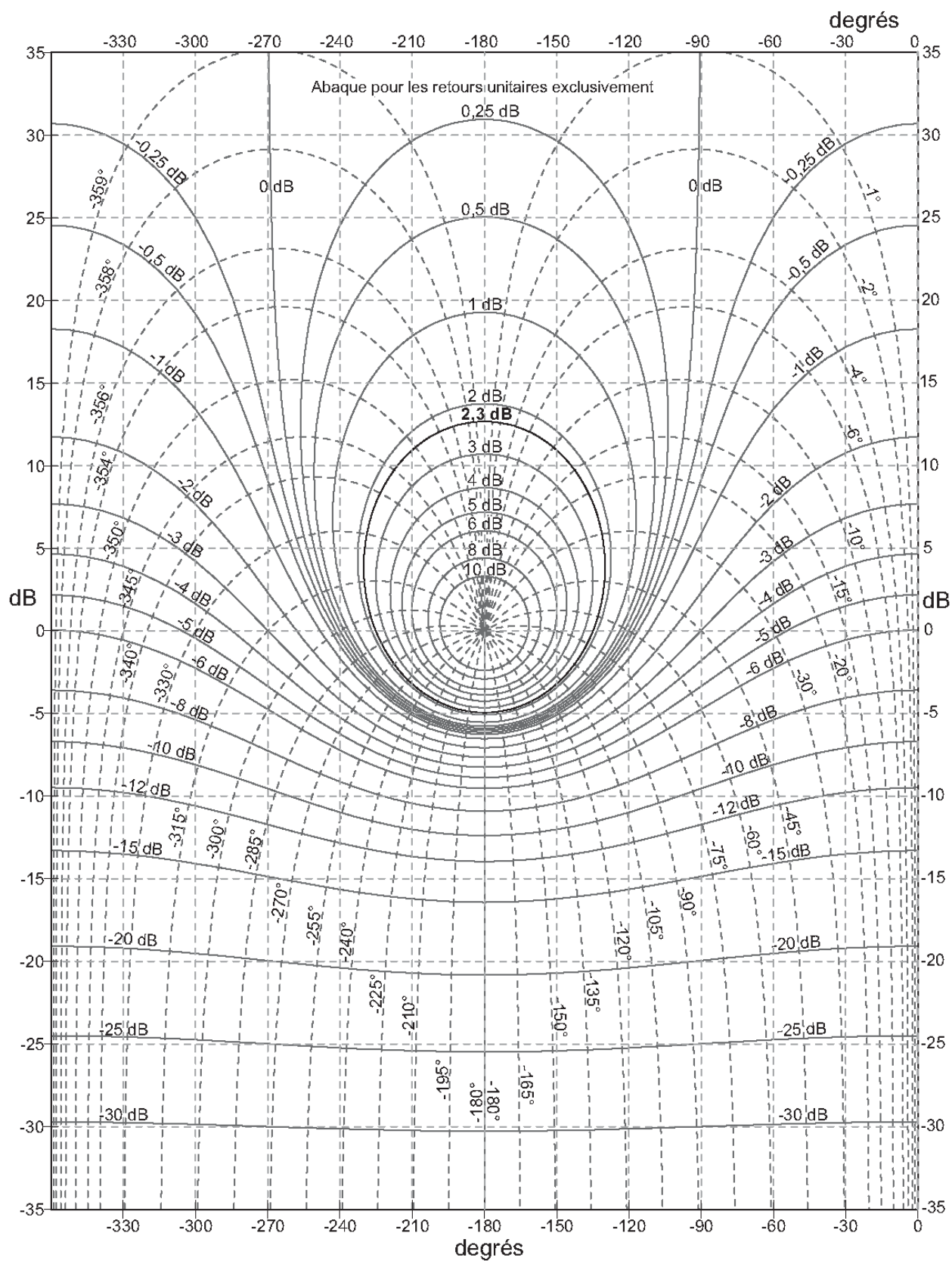
###### Manipulation 4 :

1/ Mettre en œuvre les correcteurs numériques sur le processus expérimental et comparer les réponses indicielles avec  $T_e = 1$  ms puis  $T_e = 5$  ms.



- 2/ Corriger le processus analogique en simulation avec le correcteur PI analogique et analogique discrétisé avec la méthode d'Euler et la méthode de Tustin avec  $T_e = 1$  ms et comparer les résultats. Reprendre l'étude avec  $T_e = 5$  ms.
- 3/ Discuter de la validité de l'approximation de l'intégrale avec la méthode des rectangles et la méthode des trapèzes.
- 4/ Dresser une conclusion générale.





## ANNEXE – FILTRE PASSE-BAS DU SECOND ORDRE

L'évolution du temps de réponse réduit et des premiers dépassements de la réponse indicielle en fonction du coefficient d'amortissement d'un filtre passe-bas du second ordre de fonction de transfert

$$H(p) = \frac{1}{\frac{p^2}{\omega_0^2} + 2m \frac{p}{\omega_0} + 1} \quad (1)$$

est représentée sur les figures ci-dessous.

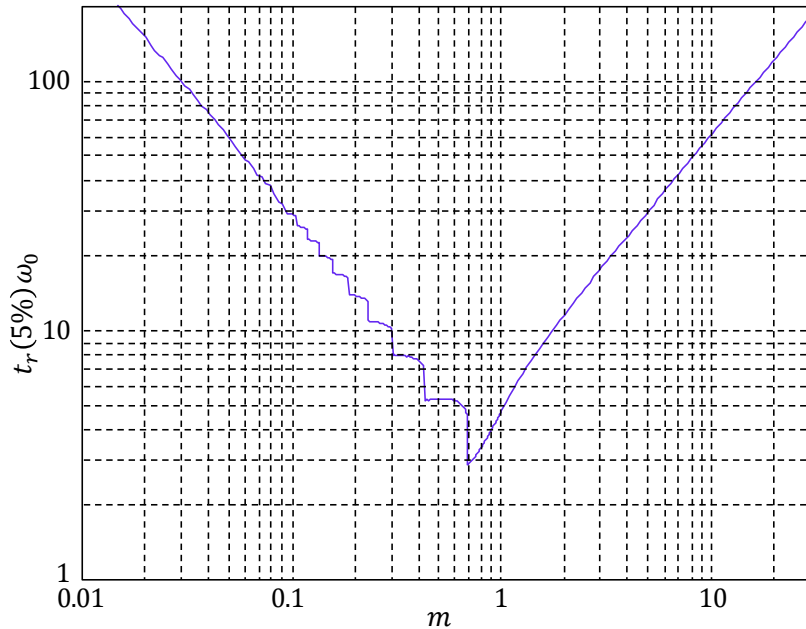


Figure 1 – Temps de réponse réduit à 5% d'un système du 2<sup>nd</sup> ordre

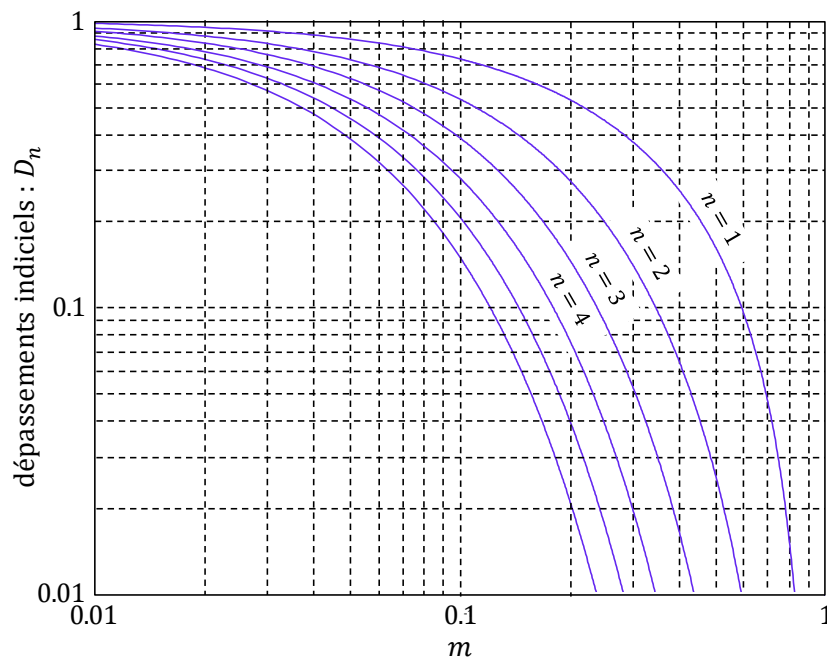


Figure 2 – Dépassements indicels d'un système du 2<sup>nd</sup> ordre