ENS Paris-Saclay
L3 SAPHIRE

Année 2017-2018
Examen

Examen - SAPH 211

L'usage des calculatrices est interdit. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées.

1 Régression polynomiale

On considère un système à temps discret à l'entrée duquel on applique un signal $u(k)$ et à la sortie duquel on mesure $y(k)$, $k > 0$. Afin de décrire le comportement du système, on utilise un modèle polynomial

$$y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, k) = p_0 + p_1 u(k) + p_2 u_2(k) + \cdots + p_n u_n(k). \tag{1}$$

1. Le modèle (1) est-il un modèle de connaissance ou un modèle de comportement ?
2. Le modèle (1) est-il un modèle linéaire en les paramètres ou non-linéaire en les paramètres ?
3. Donnez l'expression de l'estimée au sens des moindres carrés de $\mathbf{p}$ à l'aide de $u(k)$ et de $y(k)$, $k = 0, \ldots, N$. Vous introduirez pour cela toutes les notations que vous jugerez utile.
4. Quel critère connaissez-vous pour choisir le nombre de termes n du modèle (1) ? Que se passe-t-il lorsque n est trop grand ? Que se passe-t-il lorsque n est trop petit ?

2 Estimation ensembliste

On considère le modèle à temps discret

$$y_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\theta}, k) = \theta_1 u(k) + \theta_2 u(k-1) \tag{2}$$

d'un système linéaire que l'on supposera décrit par

$$y(k) = y_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\theta}^*, k) + e(k) \tag{3}$$

où $\boldsymbol{\theta}^*$ est la vraie valeur du vecteur des paramètres, $u(k)$, $k \geqslant 0$ est l'entrée connue et où les $e(k)$ sont des réalisations d'un bruit de mesure distribué uniformément dans l'intervalle $[\underline{e}; \overline{e}]$ pour tout $k \geqslant 1$. On cherche à déterminer l'ensemble $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ de toutes les valeurs de $\boldsymbol{\theta}$ compatibles avec les mesures $y(1), \ldots, y(N)$, la structure du modèle (2) et avec les bornes sur le bruit de mesure. Cet ensemble peut être défini de la manière suivante

$$\Theta = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \mid y_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\theta}, k) \in \left[y(k) - \overline{e}, y(k) - \underline{e} \right], k = 1, \ldots, N \right\}. \tag{4}$$

1. Justifier brièvement la forme de l'estimée ensembliste (4).

2. Montrer que Θ peut également se mettre sous la forme suivante

$$\Theta = \bigcap_{k=1}^{N} \Theta_k$$

avec

$$\Theta_k = \left\{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \mid y_{\mathrm{m}}(\boldsymbol{\theta}, k) \in [y(k) - \overline{e}, y(k) - \underline{e}] \right\}.$$

3. Montrer que si $u(k-1) \neq 0$ ou $u(k) \neq 0$ pout tout $k \leqslant 1$, alors les ensembles Θ_k sont des intersections de deux demi-plans délimités par des droites parallèles.

4. Est-il possible d'obtenir un ensemble Θ vide ? Comment interpréter un tel résultat ?

5. Application numérique. En supposant que $[\underline{e}; \overline{e}] = [-0.5; 0.5]$, caractériser l'ensemble Θ lorsque $u(0) = 1$, $u(1) = 2$, $u(2) = -1$, $u(3) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = -1$, et $y(3) = -0.7$.

3 Localisation à l'aide d'un réseau d'antennes

Dans cet exercice, nous considérons le problème de l'estimation à l'aide d'un réseau d'antennes de l'angle d'arrivée d'une onde émise par une source lointaine. L'ensemble des antennes se trouve dans le même plan et est formé de paires d'antennes dont les coordonnées dans un repère approprié sont $\mathbf{a}_k$ et $\mathbf{b}_k$, $k = 1, \ldots, N$. Les paires d'antennes sont telles que $\mathbf{v}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k$ satisfait

$$\|\mathbf{v}_k\|_2 = d,\ k = 1, \ldots, N$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme Euclidienne.

Le fait que la source soit lointaine permet de considérer que l'onde reçue par les antennes est une onde plane se propageant à la vitesse v suivant le vecteur directeur

$$\mathbf{s} = (\sin\theta_1 \cos\theta_2, \cos\theta_1 \cos\theta_2, \sin\theta_2)^T,$$

où θ_1 est l'azimut de l'onde et θ_2 son élévation, voir la figure 1.

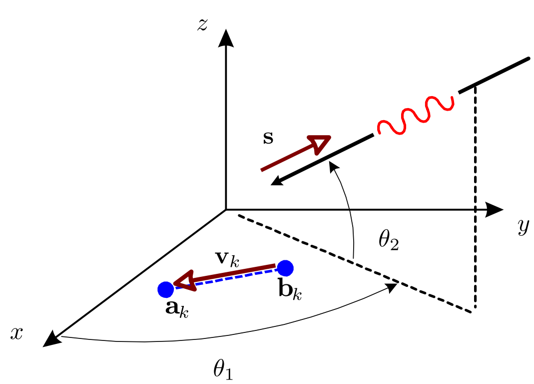

Figure 1: Une antenne du réseau

Pour chaque paire d'antennes, on mesure la différence de temps d'arrivée τ_k entre l'instant de réception de l'onde par l'antenne $\mathbf{a}_k$ et par l'antenne $\mathbf{b}_k$. Cette différence s'exprime de la manière suivante

$$\tau_k = \tau_k^{\mathrm{m}}(\theta_1^*, \theta_2^*) + n_k$$

où les n_k sont des réalisations de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance σ^2 et où θ_1^* et θ_2^* sont les vraies valeurs de l'azimut et de l'élévation.

1. Montrer que
$$\tau_k^{\mathrm{m}}\left(\theta_1, \theta_2\right) = \frac{d}{v} \cos\left(\theta_2\right) \cos\left(\theta_1 - \phi_k\right)$$
où $\phi_k = \angle \mathbf{v}_k$ est l'angle de $\mathbf{v}_k$ par rapport à la direction de référence du plan où se trouvent les paires d'antennes.

2. Ce modèle est-il structurellement identifiable ? Justifier.

On souhaite réaliser une estimation au sens du maximum de vraisemblance de $\left(\theta_1^*, \theta_2^*\right)^T$ à partir du vecteur de mesures $\boldsymbol{\tau} = \left(\tau_1, \ldots, \tau_N\right)^T$.

3. On suppose dans un premier temps que θ_2^* est connu. Donner l'expression de la fonction de vraisemblance $\pi\left(\boldsymbol{\tau}|\theta_1\right)$.

4. Dans le cas où θ_2^* n'est pas connu, donner l'expression de la fonction de vraisemblance $\pi\left(\boldsymbol{\tau}|\theta_1, \theta_2\right)$.

5. Est-il possible d'obtenir des expressions explicites des esitimées au sens du maximum de vraisemblance ?

4 Estimation des paramètres d'un oscillateur

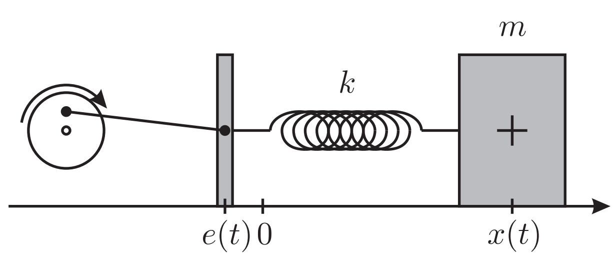

Figure 2: Système masse-ressort

On considère le système masse ressort représenté sur la figure 2. Un objet de masse m est relié à un support mobile par l'intermédiare d'un ressort de constante de raideur k. A l'équilibre, le centre de gravité de l'objet se trouve en $x = \ell$ et la longueur du ressort est ℓ. A l'instant $t = 0$, l'objet est immobile et le support mobile est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un cylindre tournant auquel il est relié par une bielle. La position du support mobile en fonction du temps est notée $e\left(t\right)$ et on suppose que $e\left(0\right) = 0$. On supposera que le mouvement est rectiligne et que l'objet subit un frottement fluide dont la direction est opposé à la vitesse de déplacement et dont la norme est $\mu \left|\frac{dx}{dt}\right|$, où μ est la constante de frottement visqueux.

1. Donner l'équation différentielle du deuxième ordre reliant $y\left(t\right) = x\left(t\right) - \ell$ et $e\left(t\right)$ en fonction de m, μ et k. Préciser les conditions initiales.

2. En posant $y_1 = y$ et $y_2 = \frac{dy}{dt}$, donner le système différentiel du premier ordre décrivant l'évolution de $\mathbf{y} = \left(y_1, y_2\right)^{\mathrm{T}}$. Préciser les conditions initiales.

On cherche à concevoir une expérience permettant d'estimer simultanément m, μ et k. Pour cela, on observe la position $y_1\left(t\right)$ de l'objet à différents instants. Dans les trois questions suivantes, les frottements sont négligés.

3. Donner la fonction de transfert entre $y_1\left(s\right)$ et $e(s)$ sous forme canonique (dans le domaine de Laplace, avec s, la variable de Laplace).

4. Lorsque seuls $y_1(t)$ et $e(t)$ sont mesurés, le modèle est-il structurellement globalement identifiable ? Est-il structurellement localement identifiable ?

5. Dans la suite, on suppose que m est connue (mesurée à l'aide d'une balance). Le modèle devient-il structurellement globalement identifiable ?

Des mesures bruitées de la position du mobile $z(t_k) = y_1(t_k) + b(t_k)$ sont prélevées aux instants de mesures $t_k,\ k = 1, \ldots, N$. L'identification du vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (\mu, k)^{\mathrm{T}}$ doit se faire sans résoudre *à la main* le système d'équations différentielles. Une procédure d'intégration numérique simple (méthode d'Euler) sera employée pour simuler le modèle du système. L'estimation est réalisée par la méthode des moindres carrés. L'estimée de $\mathbf{p}$ est l'argument du minimum du critère

$$c(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(y_{\mathrm{m}}(t_k, \mathbf{p}) - z(t_k) \right)^2 . \tag{5}$$

Nous supposerons que $y_{\mathrm{m}}(t, \mathbf{p}) = y_1(t)$.

6. Justifiez la forme du critère utilisé pour réaliser l'estimation de $\mathbf{p}$.

4.1 Méthode du gradient

Nous considérons la méthode du gradient pour minimiser le critère.

7. Montrez que le gradient du critère $c(\mathbf{p})$ s'exprime de la manière suivante

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_1} \\ \dfrac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{N} \left(y_{\mathrm{m}}(t_k) - z(t_k) \right) s_1^{p_1}(t_k) \\ \sum_{k=1}^{N} \left(y_{\mathrm{m}}(t_k) - z(t_k) \right) s_1^{p_2}(t_k) \end{pmatrix} \tag{6}$$

   où

$$s_i^{p_j}(t) = \frac{\partial y_i}{\partial p_j}(t)$$

   sont les fonctions de sensibilité des y_i, $i = 1, 2$, à l'égard de p_j, $j = 1, 2$.

8. Donner un système différentiel dont la solution donne l'évolution de $s_1^{p_1}$ et $s_2^{p_1}$ en fonction du temps. Préciser les conditions initiales.

9. En déduire le système différentiels satisfaits par $s_1^{p_2}$ et $s_2^{p_2}$.

Les deux systèmes décrivant l'évolution des fonctions de sensibilité peuvent être regroupés au sein d'un seul grand système de six équations différentielles du premier ordre.

10. Ecrire un fichier `ressort.m` permettant d'obtenir les dérivées temporelles des différentes fonctions de sensibilité en plus de dy_1/dt et dy_2/dt. La syntaxe de cette fonction devra être

```
function dydt = ressort(y,p,e)
% Entrées :
% - y : valeur de y à l'instant t
% - p : vecteur des paramètres
% - e : position du support à l'instant t
%
dy1dt =
dy2dt =
```

```
% Fonctions de sensibilité par rapport à p1
ds11dt =
ds21dt =
% Fonctions de sensibilité par rapport à p2
ds12dt =
ds22dt =
dydt = [dy1dt;dy2dt;ds11dt;ds21dt;ds12dt;ds22dt];
```

La fonction `euler.m`, dont l'en-tête est

```
function X = euler(func,x0,p,t,M)
%%
% Intégration par la méthode d'Euler de l'EDO décrite par func
% Entrées :
%  - func : fonction à intégrer
%  - x0 : condition initiales à t=0
%  - p : vecteur des paramètres
%  - t : vecteur des instants de mesure
%  - M : nombre de pas d'intégration entre deux instants de mesure
%
% Sorties :
%  - X : mesures mises sous forme de vecteurs colonnes rangés en une matrice
```

permet de réaliser une intégration numérique approchée d'un système d'équations différentielles ordinaires, partant d'un vecteur de conditions initiales, pour différents instants stockés dans un vecteur **t**, et avec une précision dépendant du nombre de pas de calcul M ($= 100$ par exemple) entre chaque instant de mesure.

11. Construire une fonction prenant en entrée **p**, **z** et **t** permettant de calculer la valeur ainsi que le gradient du critère (5). Une structure possible est

    ```
    function [c,g]=critgrad(p,z,t)
    ```

    Cette fonction utilisera les fonctions `euler.m` et `ressort.m`.

12. Rappelez la structure de la méthode d'optimisation du gradient.