28 mai 2025

TP3 - 234 - Correction numérique (Préparation)

Scott Hamilton Ibrahim El Kassimi

Encadrement par Cécile Durieu

Table des matières

1. Préparation 1

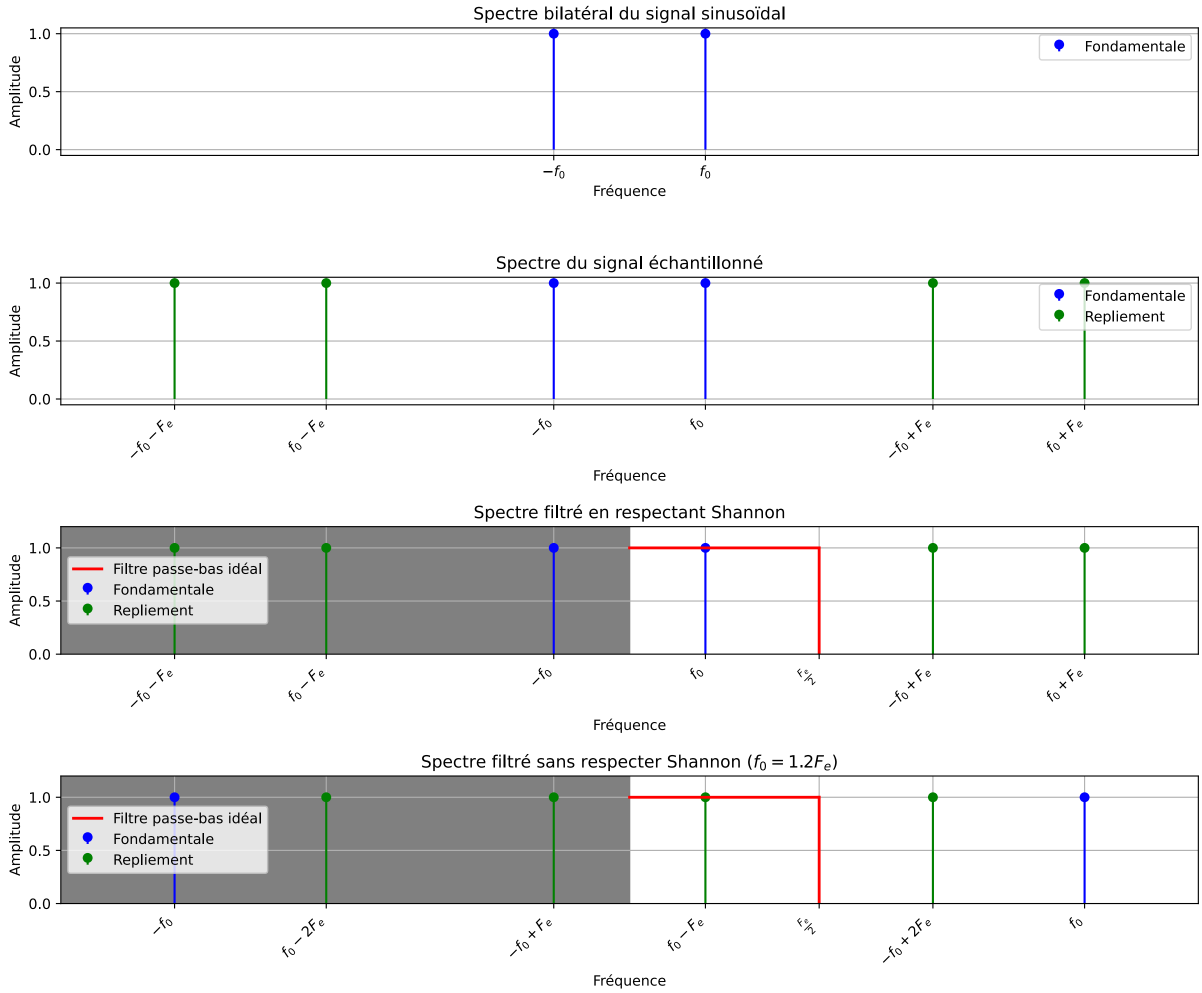

Fig. 1. – Principe du filtre anti-repliement

REMARQUE: On néglige le facteur $\frac{1}{T_e}$ sur les amplitudes de spectre pour les signaux échantillonés.

On voit bien Fig. 1 la nécessité de respecter la condition de Shannon ($f_0 < 2F_e$) pour s'assurer que le filtrage anti-repliement représente bien le signal initial.

- Dans le cas $f_0 < \frac{F_e}{2}$, le signal obtenu est exactement le signal d'entrée, un sinus de fréquence f_0 et de même amplitude
- Dans le cas $f_0 = 1,2F_e$, le signal obtenu présente des battements, il s'agit d'un sinus de fréquence $f_0 - F_e = 0,2F_e$ et de même amplitude

2. Préparation 2

Pour un correcteur proportionnel $C(p) = K_p$, on obtient la FTBF suivante

$$\boxed{T_{\mathrm{BF}}(p) = \frac{K_p}{1+K_p} \frac{1}{1+\frac{2m}{\omega_0(1+K_p)}p+\frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{K_1}{1+\frac{2m_1}{\omega_1}p+\frac{p^2}{\omega_1^2}} \text{ avec } \begin{cases} \omega_1=\omega_0\sqrt{1+K_p} \\ m_1=\frac{m}{\sqrt{1+K_p}} \end{cases}}$$

Pour $K_p = 20$, on obtient les valeurs suivantes

- $\omega_1 = 591$ rad/s
- $m_1 = 0,109$

- $\boxed{t_{r,5\%}\text{=50 ms}}$

- $\boxed{D_{1\%}\text{=70\%}}$

On lit sur le Tableau 1, $\Phi(\omega = 209 \text{ rad/s}) = -135°$. Or $G_{\text{dB}}(\omega = 209 \text{ rad/s}) = -7,2$ dB.

Donc pour assurer une marge de phase $M_\Phi = 45°$, il suffit d'imposer $\boxed{K_p\text{=}K_{45}\text{=7,2 dB=2,29}}$.

La marge de gain vaut $+\infty$. En effet, pour un système du second ordre, la phase à $-180°$ n'est jamais atteinte.

Pour $K_p = K_{45}$, on s'attend aux performances suivantes

- $\boxed{t_{r,5\%}\text{=43 ms}}$

- $\boxed{D_{1\%}\text{=40\%}}$

3. Préparation 3

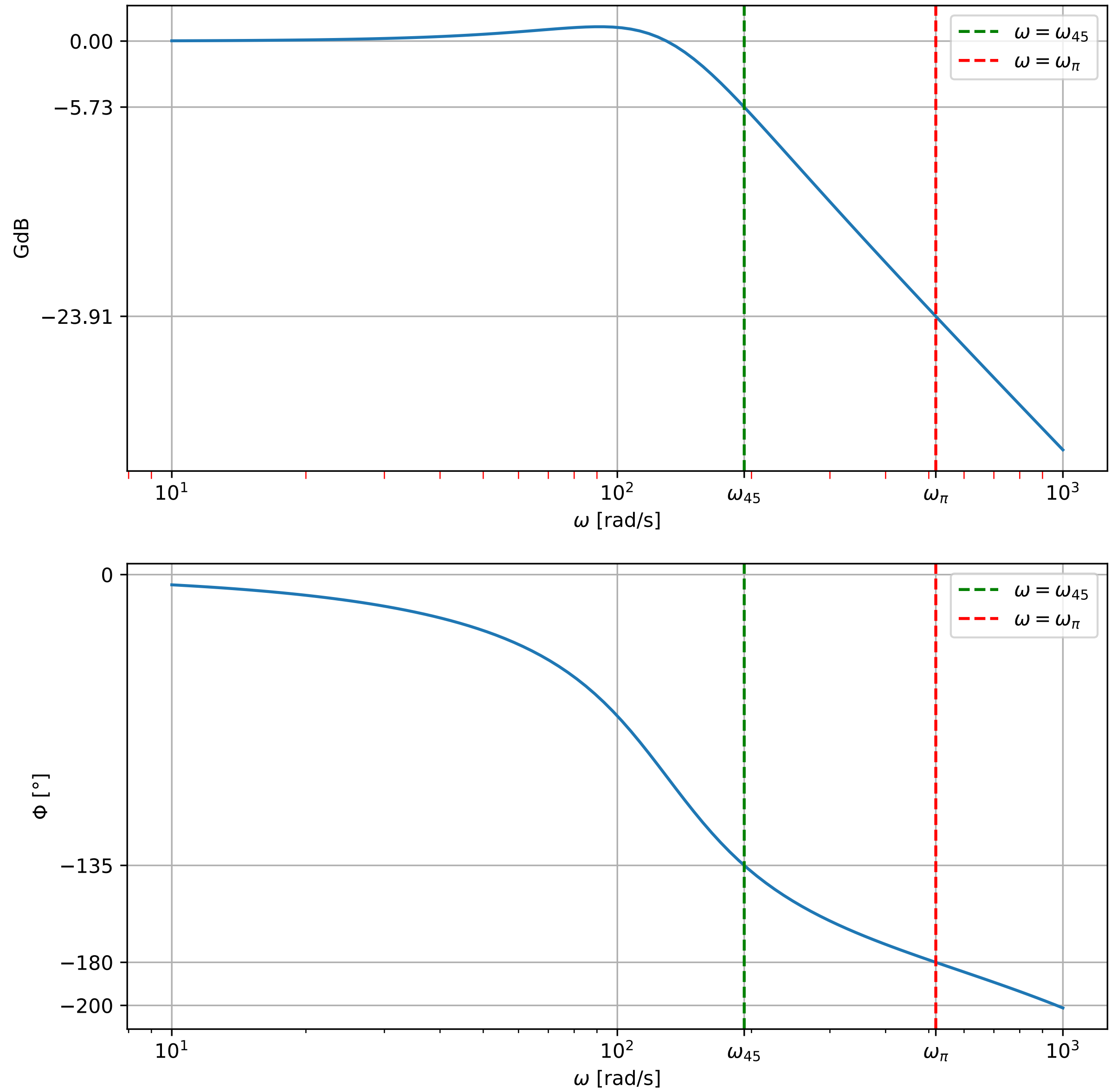

Fig. 2. – Diagramme de Bode de la FTBO avec retard et correcteur proportionnel, $\begin{cases} T_e = 1 \text{ ms} \\ K_p = 1 \end{cases}$

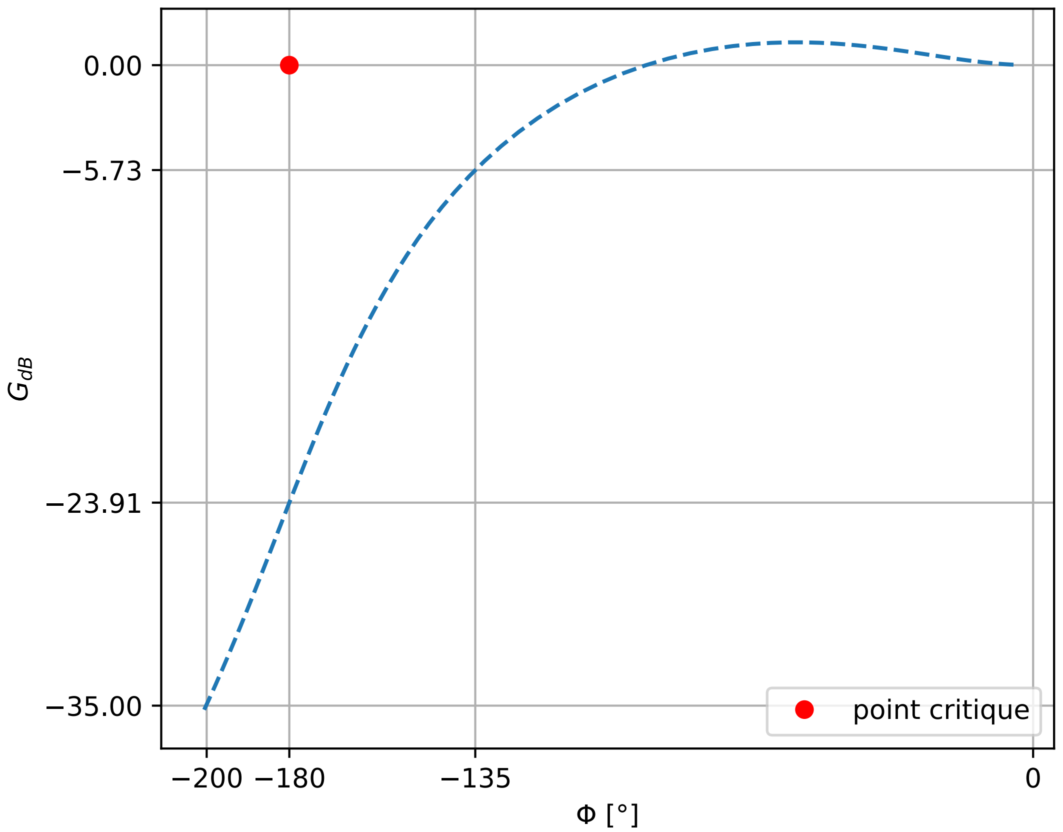

Fig. 3. – Diagramme de Black de la FTBO avec retard et correcteur proportionnel, $\begin{cases} T_e = 1 \text{ ms} \\ K_p = 1 \end{cases}$

On lit Fig. 2 et/ou Fig. 3 $G_{\text{dB}}(\omega_{45}) = -5,73$ dB donc pour une marge de phase de 45°, on impose

$\boxed{K_p = 5{,}73 \text{ dB} = 1{,}93}$.

On lit aussi $G_{\text{dB}}(\omega_\pi) = -23,91$ dB. Donc la limite d'instabilité est atteinte pour

$\boxed{K_p = 23{,}91 \text{ dB} = 15{,}7}$

Pour $T_e = 5$ ms

En reprenant la même analyse pour $T_e = 5$ ms, on obtient une marge de phase de 45° pour

$\boxed{K_p = 2{,}45 \text{ dB} = 1{,}3}$

et une limite d'instabilité pour

$\boxed{K_p = 10{,}4 \text{ dB} = 3{,}3}$

4. Préparation 4

Correcteur PI, $C(p) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i p}\right) = K_p \frac{1+T_i p}{T_i p}$

4.1. Méthode pour la synthèse de la correction analogique

Pour choisir K_p et T_i de façon à assurer une marge de phase de 45°, on raisonne ainsi.

En assurant $\omega_0 = \frac{1}{T_i}$ soit $\boxed{T_i = \frac{1}{\omega_0} \overset{\text{A.N.}}{=} 7{,}75 \text{ ms}}$, on a

$$\Phi_{\text{BO}}(\omega_0) = \underbrace{(-90°)}_{\text{2ème ordre du processus}} + \underbrace{(-45°)}_{\text{1er ordre du correcteur}} = -135° = (-180 + 45)° \qquad [1]$$

Il ne reste donc plus qu'à forcer le gain $G_{\text{BO,dB}}(\omega_0) = 0$ dB.

Soit

$$G_{\text{BO,dB}}(\omega_0) = \underbrace{20\log(K_p) + 3\text{dB}}_{\text{correcteur}} + \underbrace{20\log\left(\frac{1}{2m}\right)}_{\text{résonnance du 2ème ordre}} = 0 \text{ dB} \qquad [2]$$

Ainsi $20\log(K_p) = -3\text{dB} + \underbrace{\cancel{20\log(2m)}}_{\text{car } 2m=1}$ ie $\boxed{K_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707}$

4.2. Correction numérique par méthode des rectangles

$$\boxed{C(z) = K_p\left(1 + \frac{T_e}{T_i(1-z^{-1})}\right) = K_p\ \frac{1+\frac{T_e}{T_i}-z^{-1}}{1-z^{-1}}}$$

4.3. Correction numérique par méthode de Tustin (trapèzes)

$$\boxed{C(z) = K_p\left(1 + \frac{T_e(1+z^{-1})}{2T_i(1-z^{-1})}\right) = K_p\left(1 - \frac{T_e}{2T_i}\right)\ \frac{\frac{2T_i+T_e}{2T_i-T_e}-z^{-1}}{1-z^{-1}}}$$

4.4. Vérification

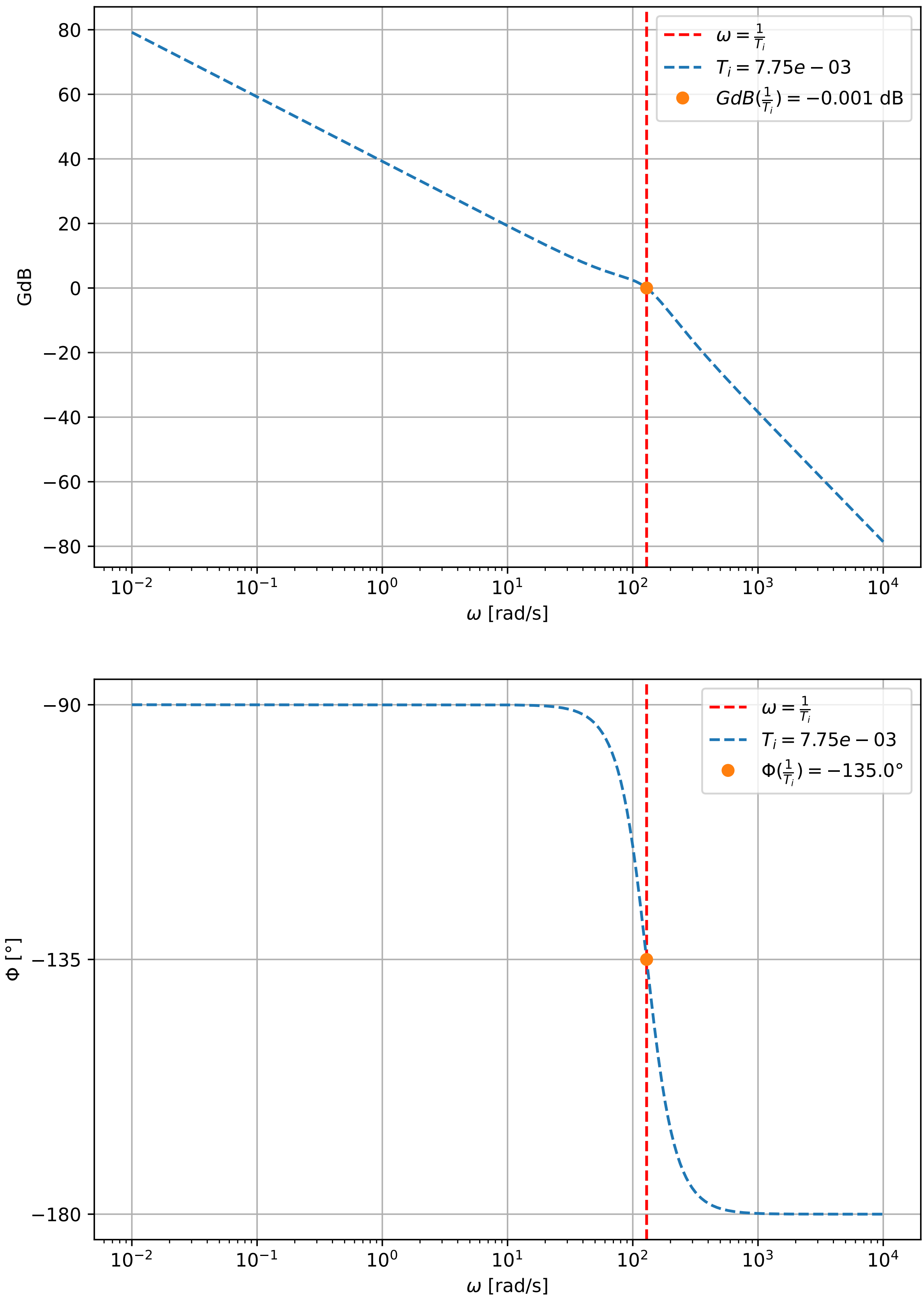

Fig. 4. – Diagramme de Bode de la FTBO avec correcteur PI, ($T_e = 1$ ms)