

Examen - Estimation Paramétrique

L'usage des calculatrices est interdit. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées.

1 Modèle auto-régressif

On considère le modèle à temps discret

$$y_m(\boldsymbol{\theta}, k) = \theta_1 y^2(k-1) + \theta_2 y(k-2)$$

du système dynamique non-linéaire suivant

$$y(k) = \theta_1^* y^2(k-1) + \theta_2^* y(k-2) + \varepsilon(k)$$

où les $\varepsilon(k)$ sont des réalisations indépendantes et identiquement distribuées d'un bruit de moyenne nulle et $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ est un vecteur de paramètres dont la vraie valeur est $\boldsymbol{\theta}^* = (\theta_1^*, \theta_2^*)^T$. On cherche à déterminer l'estimée $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ à partir de N mesures de la sortie $y(1), \dots, y(N)$ qui minimise l'erreur de prédiction

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{k=3}^N (y(k) - y_m(\boldsymbol{\theta}, k))^2 \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

1. Donner l'expression de \mathbf{y} et de \mathbf{R} .
2. Donner l'expression de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ minimisant $f(\boldsymbol{\theta})$ en fonction de \mathbf{y} et de \mathbf{R} .

2 Localisation par estimation ensembliste

Les objets connectés sont en plein développement et l'une des problématiques auxquelles les ingénieurs doivent faire face est leur localisation que ce soit en environnement extérieur ou à l'intérieur de bâtiments.

1. Indiquer brièvement pourquoi la localisation d'un objet connecté à l'aide d'un GPS n'est pas possible à l'intérieur d'un bâtiment.

Une solution pour localiser de tels objets connectés à l'intérieur d'un bâtiment est d'avoir recours à la mesure par différentes balises (WiFi, SigFox...) des instants de réception d'une onde électromagnétique émise par l'objet à localiser.

Dans la suite de cet exercice, nous considérons que l'objet est fixe, se trouve dans un plan auquel est attaché un repère \mathcal{R} ; et que la position de l'objet dans ce repère est $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T$. L'objet est entouré de N balises dont les positions dans \mathcal{R} sont parfaitement connues et égales à $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$, $i = 1, \dots, N$. Chaque balise est équipée d'une horloge et nous supposons que ces horloges sont parfaitement synchronisées entre elles et avec l'horloge de l'objet.

2. Cette hypothèse est-elle réaliste en pratique ? Justifier brièvement.

A l'instant $t = t_0$, l'objet émet une onde électromagnétique se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8$ m/s. Cette onde est détectée aux instants t_i , $i = 1, \dots, N$ par les balises. Ces mesures sont ensuite transmises à un organe de traitement central. En négligeant les réflexions de l'onde et en supposant le bruit de mesure additif, les mesures peuvent s'écrire de la manière suivante

$$t_i = t_m(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) + b_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Nous supposons les bruits de mesure b_i uniformément distribués sur l'intervalle $[\underline{b}, \bar{b}]$ pour $i = 1, \dots, N$, avec \underline{b} et \bar{b} connus.

3. Donner l'expression de $t_m(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$.
4. En supposant que le vecteur des paramètres à estimer est \mathbf{x}_0 , le modèle $t_m(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$ est-il linéaire ou non-linéaire en \mathbf{x}_0 ?

On cherche à déterminer l'ensemble $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{R}^2$ de toutes les positions \mathbf{x} de l'objet compatibles avec les mesures t_i , $i = 1, \dots, N$, la structure du modèle (1) et avec les bornes sur le bruit de mesure. Cet ensemble peut être défini de la manière suivante

$$\mathbb{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid t_m(t_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \in [t_i - \bar{b}, t_i - \underline{b}], i = 1, \dots, N\}. \quad (2)$$

5. Montrer que l'estimée ensembliste (2) correspond à l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de \mathbf{x}_0 à partir de t_i , $i = 1, \dots, N$.
6. Montrer que \mathbb{X}_0 peut également se mettre sous la forme suivante

$$\mathbb{X}_0 = \bigcap_{i=1}^N \mathbb{X}_{0,i}$$

avec

$$\mathbb{X}_{0,i} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \in [c(t_i - t_0 - \bar{b}), c(t_i - t_0 - \underline{b})]\}$$

et exprimer $d_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$. A quoi correspondent $c(t_i - t_0)$, $c\underline{b}$, et $c\bar{b}$?

7. Quelle est la forme des ensembles $\mathbb{X}_{0,i}$?
8. Quel est le nombre minimum \underline{N} de balises nécessaires pour localiser l'objet sans ambiguïté ?
9. En supposant $\bar{b} = -\underline{b} = 10^{-9}$ s, déterminer approximativement l'incertitude de localisation de l'objet.
10. Application numérique. On considère $N = 3$ balises dont les positions (exprimée en m) sont $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (10, 0)$ et $\mathbf{x}_3 = (5, 5)$. Les mesures fournies par ces balises sont $d_1 = c(t_1 - t_0) = 5$ m, $d_2 = c(t_2 - t_0) = 8$ m et $d_3 = c(t_3 - t_0) = 2$ m. Les erreurs de mesure sont telles que $\bar{b} = -\underline{b} = 10^{-9}$ s. Donner l'allure de \mathbb{X}_0 . Il est possible d'utiliser le papier millimétré en fin d'énoncé, à rendre avec votre copie.

3 Estimation de la direction d'arrivée d'une onde à l'aide d'un réseau d'antennes

Dans cet exercice, nous considérons le problème de l'estimation à l'aide d'un réseau d'antennes de l'angle d'arrivée d'une onde émise par une source lointaine. L'ensemble des antennes se trouve dans le même plan et est formé de paires d'antennes dont les coordonnées dans un repère approprié sont \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k , $k = 1, \dots, N$. Les paires d'antennes sont telles que $\mathbf{v}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k$ satisfait

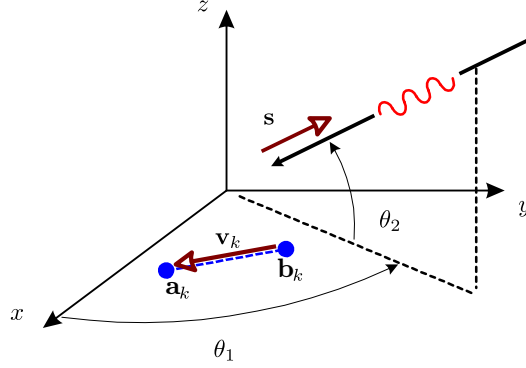
$$\|\mathbf{v}_k\|_2 = d, \quad k = 1, \dots, N$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme Euclidienne.

Le fait que la source soit lointaine permet de considérer que l'onde reçue par les antennes est une onde plane se propageant à la vitesse v suivant le vecteur directeur

$$\mathbf{s} = (\cos \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_2)^T,$$

où θ_1 est l'azimut de l'onde et θ_2 son élévation, voir la figure ci-dessous.



Pour chaque paire d'antennes, on mesure la différence de temps d'arrivée τ_k entre l'instant de réception de l'onde par l'antenne \mathbf{a}_k et par l'antenne \mathbf{b}_k . Cette différence s'exprime de la manière suivante

$$\tau_k = \tau_k^m(\theta_1^*, \theta_2^*) + n_k$$

où les n_k sont des réalisations de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance σ^2 et où θ_1^* et θ_2^* sont les vraies valeurs de l'azimut et de l'élévation.

1. Montrer que

$$\tau_k^m(\theta_1, \theta_2) = \frac{d}{v} \cos(\theta_2) \cos(\theta_1 - \phi_k)$$

où $\phi_k = \angle \mathbf{v}_k$ est l'angle de \mathbf{v}_k par rapport à la direction de référence du plan où se trouvent les paires d'antennes.

2. Ce modèle est-il structurellement identifiable ? Justifier.
3. On souhaite réaliser une estimation au sens du maximum de vraisemblance de $(\theta_1^*, \theta_2^*)^T$ à partir du vecteur de mesures $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_N)^T$.
 - (a) On suppose dans un premier temps que θ_2^* est connu. Donner l'expression de la fonction de vraisemblance $\pi(\boldsymbol{\tau}|\theta_1)$.
 - (b) Dans le cas où θ_2^* n'est pas connu, donner l'expression de la fonction de vraisemblance $\pi(\boldsymbol{\tau}|\theta_1, \theta_2)$.
4. Est-il possible d'obtenir une expression explicite des valeurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ correspondant aux estimées au sens du maximum de vraisemblance de θ_1^* et θ_2^* ? Si ce n'est pas possible, quelle procédure numérique suggérez-vous ?

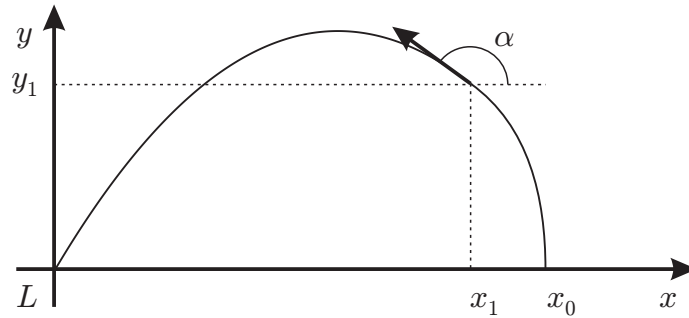
4 Localisation du pas de tir d'un V2

A partir de fin novembre 1944, les allemands bombardent Londres à l'aide de missiles, les V2 (*Vergeltungswaffe 2*), lancés depuis la côte Hollandaise, encore occupée. Rapidement, l'état major britannique réagit en envoyant en Belgique un groupe de Women's Auxiliary Air Force (WAAF) dont l'objectif est de déterminer la position des sites de lancement des V2. Pour cela, les membres des WAAF disposent de mesures obtenues à l'aide d'un radar actif. Après le lancement d'un V2, les

premières mesures parviennent et elles disposent 6 minutes pour estimer la position du pas de tir et communiquer ses coordonnées à une groupe de chasseurs en charge de le bombarder. Au delà, les allemands disposent de suffisamment de temps pour replier le pas de tir.

La trajectoire du V2 comporte deux phases. Une première phase de *propulsion*, grâce à la combustion d'ergols liquides, est suivie d'une phase *balistique*, pendant laquelle le V2 n'est plus soumis qu'à l'accélération de la gravité.

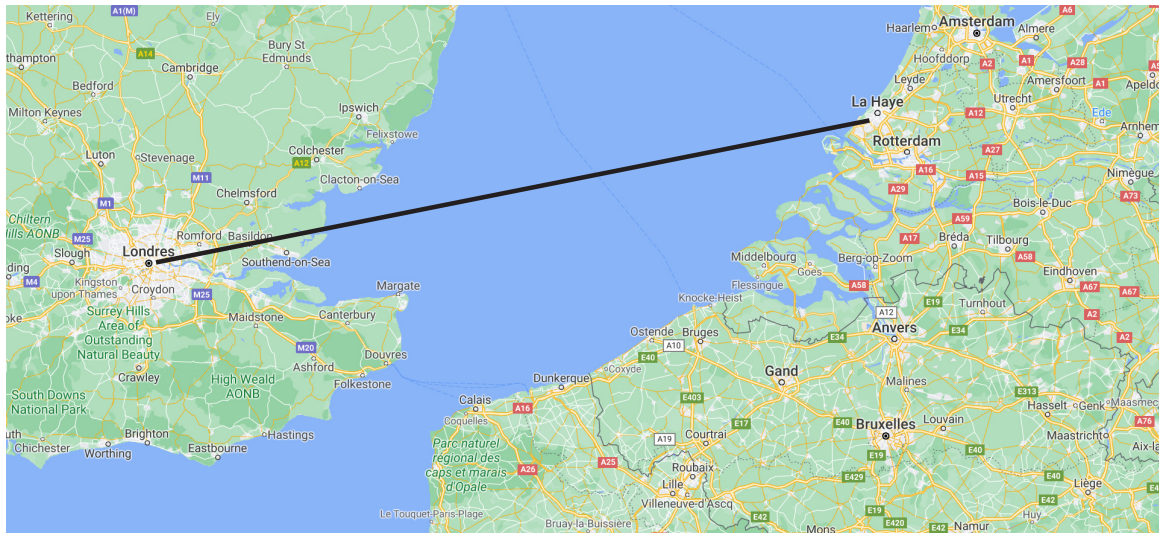
Nous allons considérer une situation simplifiée où la trajectoire d'un V2 reste dans un plan et négligerons la courbure de la Terre. Dans un repère terrestre, dont le centre de Londres (L) est l'origine, nous supposons que les coordonnées du point de lancement du V2 sont $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0)^T$, voir le schéma ci-dessous.



1. A l'issue de la phase de propulsion, le V2 de masse m a atteint la position $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)^T$ avec une vitesse $\dot{\mathbf{x}}_1 = (v_1 \cos \alpha, v_1 \sin \alpha)^T$.
 - (a) Déterminer la trajectoire du V2 à partir de \mathbf{x}_1 , sachant que cette trajectoire est balistique et que les forces de frottement aérodynamiques sont négligées. Le V2 est considéré comme un objet ponctuel.
 - (b) Montrer que cette trajectoire est parabolique.
 - (c) Déterminer l'abscisse du point d'impact (cible) x_c en fonction de x_1, y_1, α et v_1 .
 - (d) Lorsque la trajectoire passe par le centre de Londres, déterminer une relation entre x_1, y_1, α et v_1 .
2. On suppose que la première partie de la trajectoire (propulsion) est décrite par

$$y = a\sqrt{x_0 - x}.$$

- (a) Déterminer a en fonction de x_0, x_1 et de y_1 .
 - (b) Sachant que l'ensemble de la trajectoire est lisse (de dérivée continue), en déduire une relation entre a, α, x_0 et x_1 .
3. Plusieurs mesures $\tilde{\mathbf{x}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)^T, i = 1, \dots, N$ de l'évolution de la position du V2 au cours de vol sont disponibles, à la fois pendant la phase de propulsion et pendant la phase balistique. Proposer une approche permettant d'en déduire une estimée de x_0 et de x_c à partir des mesures $\tilde{\mathbf{x}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)^T$.
4. En supposant que seules des mesures pendant la phase balistique sont disponibles, est-il toujours possible d'estimer x_0 et x_c ? Si oui, quel est le nombre minimum de mesures nécessaires?
5. Sachant que les tirs ont eu lieu près de La Haye, expliquer pourquoi le radar permettant de déterminer les positions des V2 a été placé au nord de Bruxelles, plutôt que sur le sol britannique.
6. Est-ce que x_0 est suffisant pour guider les chasseurs? Comment procéder pour déterminer la latitude et la longitude des pas de tir? Justifier brièvement, sans donner les détails des calculs.



Près de 3000 V2 ont été tirés sur le sol britannique. Les WAAF ne disposaient que d'une règle à calcul pour estimer les positions des pas de tir. Les tirs des V2 se sont poursuivis jusqu'à 6 semaines avant l'armistice.