ENS Paris-Saclay
L3 SAPHIRE

Année 2022-2023
Examen

Examen - Modélisation - Estimation Paramétrique

L'usage des calculatrices est autorisé. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées.

1 Identifiabilité structurelle

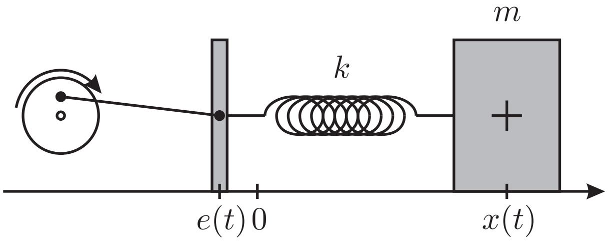

FIGURE 1 – Système masse-ressort

On considère le système masse ressort représenté sur la figure 1. Un objet de masse m est relié à un support mobile par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k. A l'équilibre, le centre de gravité de l'objet se trouve en $x = \ell$ et la longueur du ressort est ℓ. A l'instant $t = 0$, l'objet est immobile et le support mobile est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un cylindre tournant auquel il est relié par une bielle. La position du support mobile en fonction du temps est notée $e(t)$ et on suppose que $e(0) = 0$. On supposera que le mouvement est rectiligne et que l'objet subit un frottement visqueux dont la direction est opposé à la vitesse de déplacement et dont la norme est $-\mu\frac{dx}{dt}$, où μ est la constante de frottement visqueux.

1. Donner l'équation différentielle du deuxième ordre reliant $y(t) = x(t) - \ell$ et $e(t)$ en fonction de m, μ et k. Préciser les conditions initiales.
2. On est capable d'observer la position du centre de gravité de la masse à tout instant.
   (a) Les paramètres m, μ et k sont-ils structurellement identifiables ? Justifier.
   (b) Lorsque m est connu, les paramètres μ et k sont-ils structurellement identifiables ? Justifier.

2 Planification de trajectoire d'un robot

On considère un robot se déplaçant dans le plan auquel est attaché un repère $\mathcal{R}$. Initialement, le centre de masse du robot se trouve à l'origine du repère $(x_0, y_0) = (0, 0)$. N balises ponctuelles dont les positions sont $(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_i)$, $i = 1, \ldots, N$ sont placées dans le plan avec

$$\widetilde{x}_1 < \widetilde{x}_2 < \cdots < \widetilde{x}_N.$$

L'objectif de ce problème est de construire une trajectoire possible pour le robot permettant de s'approcher des différentes balises, tout en effectuant un trajet le plus court possible. Pour cela, on considère une trajectoire polynomiale de la forme

$$y(\mathbf{p}, x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_M x^M, \tag{1}$$

avec $M < N$. On note $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_M)^{\mathrm{T}}$.

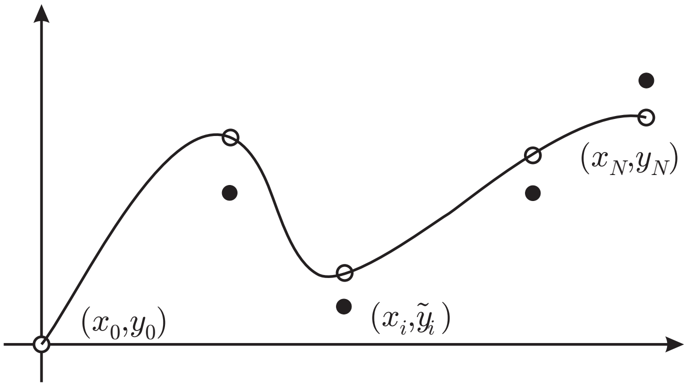

FIGURE 2 – Problème de navigation

1. Quelle est la contrainte sur les p_m, $m = 0, \ldots, M$ pour que la trajectoire passe par $(x_0, y_0) = (0, 0)$?

2.1 Méthode des moindres carrés

Dans cette partie, on souhaite trouver la trajectoire qui minimise la somme des carrés des distances entre les balises et le robot uniquement pour les points d'abscisses $\widetilde{x}_i$, $i = 1 \ldots, N$ de la trajectoire.

2. Ecrire le critère $j_{\mathrm{MC}}(\mathbf{p})$ à minimiser pour résoudre ce problème.
3. Montrer que ce critère peut s'écrire sous la forme

$$j_{\mathrm{MC}}(\mathbf{p}) = (\mathbf{Rp} - \widetilde{\mathbf{y}})^{\mathrm{T}} (\mathbf{Rp} - \widetilde{\mathbf{y}})$$

en explicitant $\mathbf{R}$ et $\widetilde{\mathbf{y}}$.

4. Donner l'expression de $\widehat{\mathbf{p}}_{\mathrm{MC}}$ minimisant $j_{\mathrm{MC}}(\mathbf{p})$.

2.2 Méthode min-max

Dans cette partie, on souhaite trouver la trajectoire qui minimise la plus grande des distances entre les balises et le robot lorsque la trajectoire de celui-ci aura pour abscisses $\widetilde{x}_i$, $i = 1 \ldots, N$.

5. Ecrire le critère $j_{\mathrm{mM}}(\mathbf{p})$ à minimiser pour résoudre ce problème.
6. Montrer que minimiser ce critère revient à résoudre un problème de programmation linéaire du type

$$\widehat{\mathbf{u}} = \arg\min_{\mathbf{u}} \mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{u}$$
$$\text{sous contrainte } \mathbf{Au} \leqslant \mathbf{b}$$

et expliciter $\mathbf{c}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{A}$ et $\mathbf{b}$.

7. Est-il possible d'obtenir une expression explicite de $\widehat{\mathbf{p}}_{\mathrm{mM}}$ minimisant $j_{\mathrm{mM}}(\mathbf{p})$. Si non, que faire ?

3 Fonctions de sensibilité

On considère un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. Ce système est décrit par un modèle d'entrée $u(t)$ et de sortie $y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t)$ dont la relation entrée-sortie satisfait

$$\frac{\partial^2 y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t)}{\partial t^2} + p_1 \frac{\partial y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} + p_2 y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t) = p_3 u(t) \tag{2}$$

avec

$$\left.\frac{\partial^2 y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p},t)}{\partial t^2}\right|_{t=0} = 0 \text{ et } y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p},0) = p_4$$

et $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_4)^{\mathrm{T}}$ un vecteur de paramètres constants à déterminer.

Pour cela, on applique une entrée connue $u(t)$ au système, indépendante de $\mathbf{p}$ et on mesure la sortie $y(t)$ aux instants t_i, $i = 1, \dots, N$. On suppose qu'il existe une valeur $\mathbf{p}^*$ du vecteur des paramètres telle que

$$y(t_i) = y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}^*, t_i) + e(t_i), \ i = 1, \dots, N$$

où $e(t_i)$ représente le bruit de mesure à l'instant t_i. On cherche à déterminer l'estimée $\widehat{\mathbf{p}}$ de $\mathbf{p}^*$ au sens des moindres carrés

$$\widehat{\mathbf{p}} = \arg\min_{\mathbf{p}} j(\mathbf{p})$$

avec

$$j(\mathbf{p}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (y(t_i) - y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t_i))^2 .$$

1. Donner l'expression du gradient

$$\begin{aligned}\mathbf{g}(\mathbf{p}) &= \frac{\partial j(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ &= \left(\frac{\partial j(\mathbf{p})}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial j(\mathbf{p})}{\partial p_4}\right)^T\end{aligned}$$

   de $j(\mathbf{p})$ en fonction de $y(t_i)$, $y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t_i)$ et de ses dérivées partielles par rapport aux composantes de $\mathbf{p}$.
2. Combien faut-il faire d'évaluations de $j(\mathbf{p})$ pour calculer $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ par différences finies ?

On introduit la fonction de sensibilité du modèle par rapport au k-ème paramètre

$$s_k(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t)}{\partial p_k}, \ k = 1, \dots, 4.$$

3. Donner une équation différentielle du second ordre satisfaite par $s_k(\mathbf{p}, t)$, $k = 1, \dots, 4$. Préciser les conditions initiales.
4. Quelle relation y a-t-il entre $s_1(\mathbf{p}, t)$ et $s_2(\mathbf{p}, t)$?

On introduit le vecteur d'état

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, t) = \left(y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t), \frac{\partial y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t)}{\partial t}\right)^T .$$

5. Exprimer $\mathbf{x}(\mathbf{p}, 0)$.
6. Montrer que

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \mathbf{A}(\mathbf{p})\,\mathbf{x}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{p})u(t)$$

   où $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ sont une matrice et un vecteur indépendants de $\mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$ dont l'expression est à préciser.
7. Définir un vecteur d'état étendu $\mathbf{x}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p}, t)$ comprenant $\mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$ complété d'un certain nombre de fonctions de sensibilité tel que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{x}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} &= \mathbf{A}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p})\,\mathbf{x}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{B}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p})u(t) \\ (y_{\mathrm{m}}(\mathbf{p}, t), s_1(\mathbf{p}, t), \dots, s_4(\mathbf{p}, t))^T &= \mathbf{C}_{\mathrm{e}}\mathbf{x}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p}, t) .\end{aligned}$$

   Préciser en particulier $\mathbf{x}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p}, 0)$, $\mathbf{A}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p})$, $\mathbf{B}_{\mathrm{e}}(\mathbf{p})$, et $\mathbf{C}_{\mathrm{e}}$.

4 *Multi-armed bandits*

Le modèle de type *multi-armed bandit* (machine à sous à plusieurs bras, voir la figure 3) permet de représenter de nombreuses situations pratiques où un agent a le choix entre plusieurs actions possibles (chacune représentée par un bras de la machine à sous). A chaque action est associée une récompense aléatoire décrite par une distribution de probabilité en général inconnue. L'objectif de l'agent est de déterminer l'action (le bras) qui va produire la récompense la plus élevée.

On peut citer par exemple

— un routeur ayant le choix entre plusieurs interfaces possible pour l'envoi d'un paquet internet : l'objectif est de déterminer le chemin qui va permettre d'acheminer le paquet le plus rapidement possible ;

— un gestionnaire de site web devant choisir l'annonce publicitaire à afficher sur la page consultée par un internaute : l'objectif est de faire en sorte que ce dernier clicke sur l'annonce publicitaire ;

— un médecin devant sélectionner un antibiotique pour traiter un patient : l'objectif est d'obtenir une guérison la plus rapide possible.

Nous ferons l'hypothèse que la distribution de probabilité de la suite de variables aléatoires décrivant les récompenses associées à une action est invariante dans le temps. L'agent dispose alors d'un nombre fini N d'essais ou *épisodes*. Lors d'un épisode, l'agent choisit une action (un bras à actionner) et reçoit une récompense associée à ce choix. L'objectif de l'agent est de maximiser la somme des récompenses obtenues sur l'ensemble des épisodes.

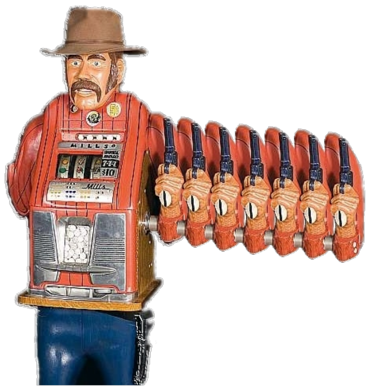

Figure 3 – Machine à sous à plusieurs bras

4.1 Estimation de la récompense moyenne de chaque bras

Nous considérons une machine à sous à K bras. A chaque épisode n, les récompenses associées à chaque bras sont décrites par des variables aléatoires indépendantes de moyennes $m_1, \ldots, m_K$, identiques d'un épisode à l'autre. Lors de l'épisode n, l'agent doit choisir une action $a \in \mathcal{A} = \{1, \ldots, K\}$, correspondant à l'index du bras qu'il va tirer. L'objectif est de choisir l'action qui maximise l'espérance de la récompense R_n sachant que l'action a a été choisie à l'instant n notée

$$q_n^* (a) = \mathbb{E} (R_n \mid A_n = a) . \tag{3}$$

Supposons que lors de l'épisode n, l'action a a été choisie $n_a \leqslant n$ fois et que les récompenses $r_1, \ldots, r_{n_a}$ ont été obtenues.

1. Montrer que l'estimée au sens des moindres carrés de m_a s'écrit

$$\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}} (n) = \frac{1}{n_a} (r_1 + \cdots + r_{n_a}) . \tag{4}$$

2. L'estimée (4) nécessite de garder en mémoire l'ensemble des n_a récompenses obtenues. Lors de l'épisode $n+1$, l'action a a été choisie une nouvelle fois et la récompense r_{n_a+1} a été obtenue. Montrer que $\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(n+1)$, l'estimée de m_a à la fin de l'épisode $n+1$ peut s'écrire en fonction de $\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(n)$, de r_{n_a+1} et de n_a.
3. Exprimer la relation entre $\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(n+1)$ et $\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(n)$ lorsque l'action a n'a pas été choisie à l'épisode $n+1$.

On suppose maintenant que pour l'épisode n, les récompenses associées à chaque bras sont décrites par des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de moyennes $m_1 \geqslant 0, \dots, m_K \geqslant 0$ et de variances $\sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2$, identiques d'un épisode à l'autre. Supposons à nouveau que lors de l'épisode n, l'action a a été choisie $n_a \leqslant n$ fois et que les récompenses $r_1, \dots, r_{n_a}$ ont été obtenues.

4. Donner l'expression de l'estimée au sens du maximum de vraisemblance $\widehat{\mathbf{p}}_a^{\mathrm{MV}}(n)$ du vecteur de paramètres $\mathbf{p}_a = \left(m_a, \sigma_a^2\right)^T$ à l'épisode n.

4.2 Stratégies de maximisation des récompenses accumulées

Afin de maximiser la somme des récompenses obtenues sur un ensemble de N épisodes, une première stratégie, dite *gloutonne*, consiste à choisir, au début de chaque épisode, l'action pour laquelle l'estimée $\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(n)$ ou $\widehat{m}_a^{\mathrm{MV}}(n)$ est la plus élevée

$$A_n \in \arg\max_{a \in \mathcal{A}} \widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(n) \,.$$

Lorsque plusieurs choix sont possible, l'action A_n est choisie aléatoirement suivant une distribution uniforme parmi ces actions.

5. En supposant que les estimées $\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(0)$ sont initialisées à 0 pour tout $a \in \mathcal{A}$, expliquer pourquoi la stratégie gloutonne ne permet pas toujours de faire en sorte que l'action maximisant l'espérance de la récompense soit choisi, même lorsque N est grand.

Une stratégie alternative, dite ε-gloutonne, consiste, au début de chaque épisode

— avec une probabilité ε, à choisir aléatoirement selon une loi uniforme une action parmi $\mathcal{A}$

— avec une probabilité $1-\varepsilon$, à choisir l'action pour laquelle l'estimée $\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(n)$ ou $\widehat{m}_a^{\mathrm{MV}}(n)$ est la plus élevée.

6. Proposer un algorithme implantant une stratégie ε-gloutonne de maximisation de la somme des récompenses obtenue sur un ensemble de N épisodes.
7. La stratégie ε-gloutonne permet-elle de déterminer efficacement l'action qui maximise $q_n^*(a)$?

Dans la suite de cet exercice, nous allons analyser une stratégie permettant de tenir compte de l'estimée $\widehat{m}_a^{\mathrm{MC}}(n)$ ainsi que de l'incertitude d'estimation associée lors du choix de l'action à l'épisode $n+1$. Pour simplifier le problème, supposons maintenant que pour l'épisode n, les récompenses associées à chaque bras sont décrites par des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de moyennes $m_1, \dots, m_K$ et de variances $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_K^2 = 1$, identiques d'un épisode à l'autre. Les variances sont connues.

8. Quelle est la densité de probabilité de la variable aléatoire $R_1 - m_1$ lorsque R_1 désigne la variable aléatoire représentant la récompense associé à l'action $a = 1$?

La densité de probabilité de la somme des carrés de n variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance unité est appelée loi du chi-deux (loi du χ^2) à n degrés de liberté.

La figure 4 illustre la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une loi du χ^2 pour différentes valeurs du nombre de degrés de liberté n. De plus, le tableau 1 donne les valeurs des quantiles à 95 % et à 99 % de la loi du χ^2 à n degrés de liberté. Si une variable aléatoire X est distribuée suivant une loi du χ^2 à $n = 5$ degrés de liberté, alors on lit dans la table

$$\Pr(X \leqslant 9.24) = 0.95.$$

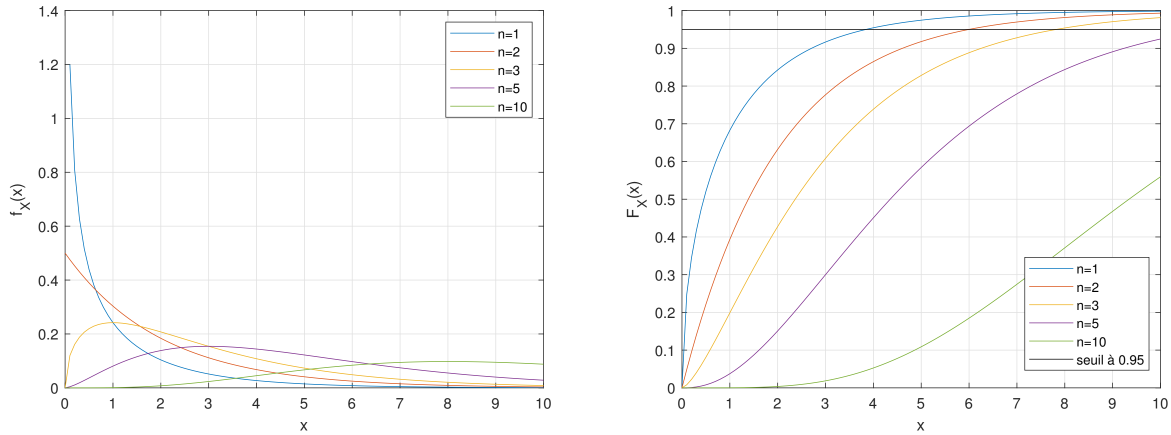

FIGURE 4 – Densité de probabilité (à gauche) et fonction de répartition (à droite) d'une loi du χ^2 pour différents degrés de liberté.

Degré de liberté n	$\chi^2_{0.95}(n)$	$\chi^2_{0.99}(n)$
1	3.84	6.63
2	5.99	9.21
3	7.81	11.34
5	11.07	15.09
10	18.31	23.21

TABLE 1 – Quartiles à 95 % et à 99 % de la loi du χ^2 à n degrés de liberté

Supposons à nouveau que lors de l'épisode n, l'action a a été choisie $n_a \leqslant n$ fois et que les récompenses $r_1, \ldots, r_{n_a}$ ont été obtenues. On considère le critère des moindres carrés permettant d'estimer m_a

$$j(m) = \sum_{n=1}^{n_a} (m - r_n)^2 .$$

9. Quelle est la densité de probabilité de $j(m)$ pour $m = m_a$?
10. On considère l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(n)$ des valeurs de m telles que

$$\mathcal{M}_{0.95}(n) = \left\{ m \mid j(m) \leqslant \chi^2_{0.95}(n_a) \right\} .$$

Cet ensemble est appelé intervalle de confiance à 95 % de l'estimateur $\widehat{m}_a^{\mathrm{MV}}(n)$. Justifier cette dénomination.

11. Donner l'expression des bornes de l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(n)$ en fonction de r_n, $n = 1, \ldots, n_a$, et de $\chi^2_{0.95}(n_a)$.
12. On suppose que l'action a a été choisie 2 fois et que les récompenses obtenues sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Donner les bornes de l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(2)$. L'action a a été choisie une nouvelle fois pour obtenir $r_3 = 2$. Donner les bornes de l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(2)$.
13. Comment la taille de l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(n)$ evolue-t-elle avec n lorsque l'action a est choisie et lorsqu'elle n'est pas choisie ?
14. Proposer une stratégie de maximisation de la somme des récompenses obtenue sur un ensemble de N épisodes exploitant les bornes des intervalles de confiance associés à chacune des actions.