

Examen - SAPH 211

L'usage des calculatrices est interdit. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées.

1 Régression polynomiale

On considère un système à temps discret à l'entrée duquel on applique un signal $u(k)$ et à la sortie duquel on mesure $y(k)$, $k > 0$. Afin de décrire le comportement du système, on utilise un modèle polynomial

$$y_m(\mathbf{p}, k) = p_0 + p_1 u(k) + p_2 u_2(k) + \dots + p_n u_n(k). \quad (1)$$

1. Le modèle (1) est-il un modèle de connaissance ou un modèle de comportement ?
2. Le modèle (1) est-il un modèle linéaire en les paramètres ou non-linéaire en les paramètres ?
3. Donnez l'expression de l'estimée au sens des moindres carrés de \mathbf{p} à l'aide de $u(k)$ et de $y(k)$, $k = 0, \dots, N$. Vous introduirez pour cela toutes les notations que vous jugerez utile.
4. Quel critère connaissez-vous pour choisir le nombre de termes n du modèle (1) ? Que se passe-t-il lorsque n est trop grand ? Que se passe-t-il lorsque n est trop petit ?

2 Estimation ensembliste

On considère le modèle à temps discret

$$y_m(\boldsymbol{\theta}, k) = \theta_1 u(k) + \theta_2 u(k-1) \quad (2)$$

d'un système linéaire que l'on supposera décrit par

$$y(k) = y_m(\boldsymbol{\theta}^*, k) + e(k) \quad (3)$$

où $\boldsymbol{\theta}^*$ est la vraie valeur du vecteur des paramètres, $u(k)$, $k \geq 0$ est l'entrée connue et où les $e(k)$ sont des réalisations d'un bruit de mesure distribué uniformément dans l'intervalle $[\underline{e}; \bar{e}]$ pour tout $k \geq 1$. On cherche à déterminer l'ensemble $\Theta \subset \mathbb{R}^2$ de toutes les valeurs de $\boldsymbol{\theta}$ compatibles avec les mesures $y(1), \dots, y(N)$, la structure du modèle (2) et avec les bornes sur le bruit de mesure. Cet ensemble peut être défini de la manière suivante

$$\Theta = \{ \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \mid y_m(\boldsymbol{\theta}, k) \in [y(k) - \bar{e}, y(k) - \underline{e}], k = 1, \dots, N \}. \quad (4)$$

1. Justifier brièvement la forme de l'estimée ensembliste (4).
2. Montrer que Θ peut également se mettre sous la forme suivante

$$\Theta = \bigcap_{k=1}^N \Theta_k$$

avec

$$\Theta_k = \{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^2 \mid y_m(\boldsymbol{\theta}, k) \in [y(k) - \bar{e}, y(k) - \underline{e}]\}.$$

3. Montrer que si $u(k-1) \neq 0$ ou $u(k) \neq 0$ pour tout $k \leq 1$, alors les ensembles Θ_k sont des intersections de deux demi-plans délimités par des droites parallèles.
4. Est-il possible d'obtenir un ensemble Θ vide ? Comment interpréter un tel résultat ?
5. Application numérique. En supposant que $[\underline{e}; \bar{e}] = [-0.5; 0.5]$, caractériser l'ensemble Θ lorsque $u(0) = 1$, $u(1) = 2$, $u(2) = -1$, $u(3) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = -1$, et $y(3) = -0.7$.

3 Localisation à l'aide d'un réseau d'antennes

Dans cet exercice, nous considérons le problème de l'estimation à l'aide d'un réseau d'antennes de l'angle d'arrivée d'une onde émise par une source lointaine. L'ensemble des antennes se trouve dans le même plan et est formé de paires d'antennes dont les coordonnées dans un repère approprié sont \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k , $k = 1, \dots, N$. Les paires d'antennes sont telles que $\mathbf{v}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k$ satisfait

$$\|\mathbf{v}_k\|_2 = d, \quad k = 1, \dots, N$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme Euclidienne.

Le fait que la source soit lointaine permet de considérer que l'onde reçue par les antennes est une onde plane se propageant à la vitesse v suivant le vecteur directeur

$$\mathbf{s} = (\sin \theta_1 \cos \theta_2, \cos \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_2)^T,$$

où θ_1 est l'azimut de l'onde et θ_2 son élévation, voir la figure 1.

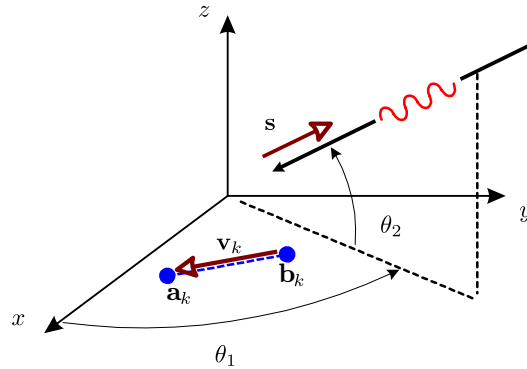


Figure 1: Une antenne du réseau

Pour chaque paire d'antennes, on mesure la différence de temps d'arrivée τ_k entre l'instant de réception de l'onde par l'antenne \mathbf{a}_k et par l'antenne \mathbf{b}_k . Cette différence s'exprime de la manière suivante

$$\tau_k = \tau_k^m(\theta_1^*, \theta_2^*) + n_k$$

où les n_k sont des réalisations de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance σ^2 et où θ_1^* et θ_2^* sont les vraies valeurs de l'azimut et de l'élévation.

1. Montrer que

$$\tau_k^m(\theta_1, \theta_2) = \frac{d}{v} \cos(\theta_2) \cos(\theta_1 - \phi_k)$$

où $\phi_k = \angle \mathbf{v}_k$ est l'angle de \mathbf{v}_k par rapport à la direction de référence du plan où se trouvent les paires d'antennes.

2. Ce modèle est-il structurellement identifiable ? Justifier.

On souhaite réaliser une estimation au sens du maximum de vraisemblance de $(\theta_1^*, \theta_2^*)^T$ à partir du vecteur de mesures $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_N)^T$.

3. On suppose dans un premier temps que θ_2^* est connu. Donner l'expression de la fonction de vraisemblance $\pi(\boldsymbol{\tau}|\theta_1)$.
4. Dans le cas où θ_2^* n'est pas connu, donner l'expression de la fonction de vraisemblance $\pi(\boldsymbol{\tau}|\theta_1, \theta_2)$.
5. Est-il possible d'obtenir des expressions explicites des estimées au sens du maximum de vraisemblance ?

4 Estimation des paramètres d'un oscillateur

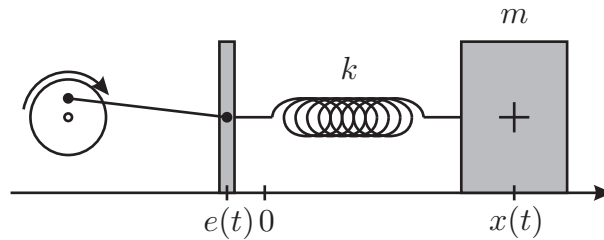


Figure 2: Système masse-ressort

On considère le système masse ressort représenté sur la figure 2. Un objet de masse m est relié à un support mobile par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k . A l'équilibre, le centre de gravité de l'objet se trouve en $x = \ell$ et la longueur du ressort est ℓ . A l'instant $t = 0$, l'objet est immobile et le support mobile est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un cylindre tournant auquel il est relié par une bielle. La position du support mobile en fonction du temps est notée $e(t)$ et on suppose que $e(0) = 0$. On supposera que le mouvement est rectiligne et que l'objet subit un frottement fluide dont la direction est opposé à la vitesse de déplacement et dont la norme est $\mu \left| \frac{dx}{dt} \right|$, où μ est la constante de frottement visqueux.

1. Donner l'équation différentielle du deuxième ordre reliant $y(t) = x(t) - \ell$ et $e(t)$ en fonction de m , μ et k . Préciser les conditions initiales.
2. En posant $y_1 = y$ et $y_2 = \frac{dy}{dt}$, donner le système différentiel du premier ordre décrivant l'évolution de $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$. Préciser les conditions initiales.

On cherche à concevoir une expérience permettant d'estimer simultanément m , μ et k . Pour cela, on observe la position $y_1(t)$ de l'objet à différents instants. Dans les trois questions suivantes, les frottements sont négligés.

3. Donner la fonction de transfert entre $y_1(s)$ et $e(s)$ sous forme canonique (dans le domaine de Laplace, avec s , la variable de Laplace).

4. Lorsque seuls $y_1(t)$ et $e(t)$ sont mesurés, le modèle est-il structurellement globalement identifiable ? Est-il structurellement localement identifiable ?
5. Dans la suite, on suppose que m est connue (mesurée à l'aide d'une balance). Le modèle devient-il structurellement globalement identifiable ?

Des mesures bruitées de la position du mobile $z(t_k) = y_1(t_k) + b(t_k)$ sont prélevées aux instants de mesures t_k , $k = 1, \dots, N$. L'identification du vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (\mu, k)^T$ doit se faire sans résoudre *à la main* le système d'équations différentielles. Une procédure d'intégration numérique simple (méthode d'Euler) sera employée pour simuler le modèle du système. L'estimation est réalisée par la méthode des moindres carrés. L'estimée de \mathbf{p} est l'argument du minimum du critère

$$c(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (y_m(t_k, \mathbf{p}) - z(t_k))^2. \quad (5)$$

Nous supposons que $y_m(t, \mathbf{p}) = y_1(t)$.

6. Justifiez la forme du critère utilisé pour réaliser l'estimation de \mathbf{p} .

4.1 Méthode du gradient

Nous considérons la méthode du gradient pour minimiser le critère.

7. Montrez que le gradient du critère $c(\mathbf{p})$ s'exprime de la manière suivante

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_1} \\ \frac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N (y_m(t_k) - z(t_k)) s_1^{p_1}(t_k) \\ \sum_{k=1}^N (y_m(t_k) - z(t_k)) s_1^{p_2}(t_k) \end{pmatrix} \quad (6)$$

où

$$s_i^{p_j}(t) = \frac{\partial y_i}{\partial p_j}(t)$$

sont les fonctions de sensibilité des y_i , $i = 1, 2$, à l'égard de p_j , $j = 1, 2$.

8. Donner un système différentiel dont la solution donne l'évolution de $s_1^{p_1}$ et $s_2^{p_1}$ en fonction du temps. Préciser les conditions initiales.
9. En déduire le système différentiels satisfaits par $s_1^{p_2}$ et $s_2^{p_2}$.

Les deux systèmes décrivant l'évolution des fonctions de sensibilité peuvent être regroupés au sein d'un seul grand système de six équations différentielles du premier ordre.

10. Ecrire un fichier `ressort.m` permettant d'obtenir les dérivées temporelles des différentes fonctions de sensibilité en plus de dy_1/dt et dy_2/dt . La syntaxe de cette fonction devra être

```
function dydt = ressort(y,p,e)
% Entrées :
% - y : valeur de y à l'instant t
% - p : vecteur des paramètres
% - e : position du support à l'instant t
%
dy1dt =
dy2dt =
```

```

% Fonctions de sensibilité par rapport à p1
ds11dt =
ds21dt =
% Fonctions de sensibilité par rapport à p2
ds12dt =
ds22dt =
dydt = [dy1dt;dy2dt;ds11dt;ds21dt;ds12dt;ds22dt];

```

La fonction `euler.m`, dont l'en-tête est

```

function X = euler(func,x0,p,t,M)
%%
% Intégration par la méthode d'Euler de l'EDO décrite par func
% Entrées :
% - func : fonction à intégrer
% - x0 : condition initiales à t=0
% - p : vecteur des paramètres
% - t : vecteur des instants de mesure
% - M : nombre de pas d'intégration entre deux instants de mesure
%
% Sorties :
% - X : mesures mises sous forme de vecteurs colonnes rangés en une matrice

```

permet de réaliser une intégration numérique approchée d'un système d'équations différentielles ordinaires, partant d'un vecteur de conditions initiales, pour différents instants stockés dans un vecteur **t**, et avec une précision dépendant du nombre de pas de calcul M ($= 100$ par exemple) entre chaque instant de mesure.

11. Construire une fonction prenant en entrée **p**, **z** et **t** permettant de calculer la valeur ainsi que le gradient du critère (5). Une structure possible est

```
function [c,g]=critgrad(p,z,t)
```

Cette fonction utilisera les fonctions `euler.m` et `ressort.m`.

12. Rappelez la structure de la méthode d'optimisation du gradient.

Examen - Estimation Paramétrique

*L'usage des calculatrices est interdit. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées. **Les exercices 1 et 2, les exercices 3 et 4, et l'exercice 5 seront à rédiger sur 3 feuilles séparées.***

1 Gradient, Newton, et Gauss-Newton

On considère la fonction de Rosenbrock

$$f(\mathbf{x}) = (1 - x_1)^2 + (x_2 - x_1^2)^2. \quad (1)$$

1. Montrer que le point $\mathbf{x} = (1, 1)^T$ est un argument du minimum global de $f(\mathbf{x})$.

On utilise une méthode de recherche itérative du minimum de $f(\mathbf{x})$. Pour cela, on part du point $\mathbf{x}_0 = (-1, 0)^T$.

2. Méthode du gradient

- (a) Donner la direction de descente \mathbf{d}_g donnée par cette méthode.
- (b) Evaluer $f(\mathbf{x}_1)$ avec $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_g$.

3. Méthode de Newton.

- (a) Donner la direction de descente \mathbf{d}_n donnée par cette méthode.
- (b) Evaluer $f(\mathbf{x}_1)$ avec $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_n$.

4. Méthode de Gauss-Newton.

- (a) Donner la direction de descente \mathbf{d}_{gn} donnée par cette méthode.
- (b) Evaluer $f(\mathbf{x}_1)$ avec $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{d}_{gn}$.

5. Conclusion.

2 Estimation au sens des moindres carrés

On considère le système d'équations surdéterminé suivant issu de l'observation d'un système linéaire et invariant dans le temps

$$\begin{cases} 3a &= 5 \\ 4a &= -1 \\ -3a &= 1 \\ 2a &= 3 \end{cases}$$

Donnez l'estimée de a au sens des moindres carrés. Détaillez votre réponse.

3 Choix d'un guichet

Vous entrez dans un bureau de poste comportant deux guichets. On vous a appris qu'au guichet 1, le temps de service (le temps mis par l'agent pour servir un client) est décrit par une variable aléatoire X_1 , distribuée suivant une loi exponentielle

$$p_{X_1}(t) = a \exp(-2t) u(t),$$

où $u(t)$ est l'échelon unité. Le temps de service au guichet 2 est décrit par une variable aléatoire X_2 distribuée suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 3]$. Vous ne trouvez pas les numéros des guichets et choisissez donc l'un des deux guichets au hasard. Soit G la variable aléatoire représentant le numéro du guichet. Soit Y la variable aléatoire décrivant le temps de service au guichet que vous avez choisi. Il s'agit de déterminer à partir de Y si vous avez été au guichet 1 ou au guichet 2.

1. Calculez la valeur de a .
2. Déduisez de l'énoncé la probabilité *a priori* $\Pr(G = 1)$ de choisir le guichet 1. Même question pour $\Pr(G = 2)$ concernant le guichet 2.
3. Sachant que le temps mis par l'agent pour vous servir est $Y = y$, donnez en fonction de y l'expression de la probabilité *a posteriori* que le guichet que vous avez choisi soit le guichet 1. Donnez en fonction de y l'expression de la probabilité *a posteriori* que le guichet que vous avez choisi soit le guichet 2. Représentez ces deux probabilités *a posteriori* en fonction de y .
4. Pour quelles valeurs de y décidez-vous que vous avez choisi le guichet 1 ? Quelle est, en fonction de y , la probabilité d'erreur associée à ce choix ?
5. Pour quelles valeurs de y décidez-vous que vous avez choisi le guichet 2 ? Quelle est, en fonction de y , la probabilité d'erreur associée à ce choix ?
6. Quelle est en moyenne la probabilité d'erreur ?

Pour vous aider dans vos applications numériques, on vous rappelle que $\ln(6) = 1.79$ et que $\exp(-6) = 0.025$.

4 Entrées D-optimales (choix des entrées minimisant l'incertitude d'estimation)

On considère le modèle à temps discret

$$y_m(k, \mathbf{p}) = p_1 u(k) + p_2 u(k-1), \quad (2)$$

où $u(k)$ est l'entrée à l'instant k et où $\mathbf{p} = (p_1, p_2)^T$.

1. Ce modèle est dit à réponse impulsionnelle finie. Expliquer pourquoi.
2. On fait l'hypothèse que les mesures effectuées sur le système satisfont

$$y(k) = y_m(k, \mathbf{p}^*) + \varepsilon(k), k = 1, \dots, N, \quad (3)$$

où les $\varepsilon(k)$ sont des réalisations de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi normale de moyenne nulle et de variance connue σ^2 . Détailler le calcul de l'estimée $\hat{\mathbf{p}}$ de \mathbf{p} au sens du maximum de vraisemblance (ou des moindres carrés, si vous ne savez pas faire). On supposera $u(k)$ connu pour $k = 0, \dots, N$ et nul pour $k < 0$. On montrera en particulier que la vraisemblance s'écrit

$$\pi(\mathbf{y}|\mathbf{p}) = (2\pi\sigma^2)^{-N/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{R}\mathbf{p}\|^2\right) \quad (4)$$

où \mathbf{R} est une matrice dont il faudra préciser le contenu.

La matrice d'information de Fisher

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}, u(0), \dots, u(N)) = \mathbb{E} \left(\frac{1}{N} \frac{\partial \log \pi(\mathbf{y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial \log \pi(\mathbf{y}|\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}^T} \middle| \mathbf{p} \right), \quad (5)$$

où $\mathbb{E}(\cdot)$ est l'espérance, permet d'avoir une idée de l'incertitude d'estimation des paramètres. En effet, on peut montrer que pour $N \rightarrow \infty$, $N(\mathbf{p} - \mathbf{p}^*)$ est distribué suivant une loi Gaussienne de moyenne nulle et de matrice de covariance l'inverse $\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{p}, u(0), \dots, u(N))$ de la matrice d'information de Fisher. Plus la matrice d'information de Fisher sera « grande », et meilleure sera la précision d'estimation de \mathbf{p}^* réalisée par $\hat{\mathbf{p}}$. Dans le cas du modèle donné par (2) et avec un modèle de mesure donné par (3), (5) devient

$$\mathbf{M}(\mathbf{p}, u(0), \dots, u(N)) = \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{R}^T \mathbf{R}. \quad (6)$$

3. Exprimer les éléments de la matrice d'information de Fisher en fonction des valeurs successives de l'entrée $u(k)$, $k = 0, \dots, N$.

4. Sous la contrainte

$$|u(k)| \leq 1 \text{ pour tout } k \quad (7)$$

trouver une suite d'entrées D-optimale, c'est-à-dire qui maximise le déterminant de la matrice d'information de Fisher (se contenter de maximiser les termes intervenant positivement et d'annuler ou de rendre négligeables ceux qui interviennent négativement).

5. Que se passerait-il si on négligeait l'existence de la contrainte (7) ?

6. Dans le cas particulier $N = 10$, comparer les performances du protocole D-optimal déterminé à la question 4 et du protocole correspondant à une entrée en échelon unité ($u(k) = 1$ pour tout $k \geq 0$) en termes

(a) de déterminant de la matrice d'information de Fisher,

(b) d'écart-type de l'erreur d'estimation de chacun des paramètres (racine carrée des éléments diagonaux de l'inverse de la matrice d'information de Fisher).

5 Localisation

Les objets connectés sont en plein développement et l'une des problématiques auxquelles les ingénieurs doivent faire face est leur localisation que ce soit en environnement extérieur ou à l'intérieur de bâtiments.

1. Indiquer brièvement pourquoi la localisation d'un objet connecté à l'aide d'un GPS n'est pas possible à l'intérieur d'un bâtiment.

Une solution pour localiser de tels objets connectés à l'intérieur d'un bâtiment est d'avoir recours à la mesure par différentes balises (WiFi, SigFox...) des instants de réception d'une onde électromagnétique émise par l'objet à localiser.

Dans la suite de cet exercice, nous considérons que l'objet est fixe, se trouve dans un plan auquel est attaché un repère \mathcal{R} ; et que la position de l'objet dans ce repère est $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T$. L'objet est entouré de N balises dont les positions dans \mathcal{R} sont parfaitement connues et égales à $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$, $i = 1, \dots, N$. Chaque balise est équipée d'une horloge et nous supposons que ces horloges sont parfaitement synchronisées. Par contre, elles ne sont pas nécessairement synchrones avec l'horloge de l'objet. Dans la suite, les temps seront indiqués dans la référentiel temporel des balises. A l'instant $t = t_{0,0}$ (dans la base de temps des balises), l'objet émet une onde électromagnétique se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le vide c . Cette onde est détectée aux instants $t_{0,i}$, $i = 1, \dots, N$ par les balises. Ces mesures sont ensuite transmises à un organe de traitement central. En négligeant les réflexions de l'onde et en supposant le bruit de mesure additif, les mesures peuvent s'écrire de la manière suivante

$$y_i^{\text{TA}} = y_{\text{m}}^{\text{TA}}(t_{0,0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) + b_i^{\text{TA}}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (8)$$

Nous supposons les bruits de mesure b_i^{TA} gaussiens, de moyenne nulle, décorrelés, et de variances connues σ_i^2 , $i = 1, \dots, N$.

2. Donner l'expression de $y_m^{\text{TA}}(t_{0,0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$.
3. En supposant que le seul vecteur de paramètres à estimer soit \mathbf{x}_0 , le modèle $y_m^{\text{TA}}(t_{0,0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$ est-il linéaire ou non-linéaire en les paramètres ?
4. Donner l'expression de la matrice de covariance du bruit de mesure $\mathbf{\Gamma}^{\text{TA}} = \text{E} \left((\mathbf{b}^{\text{TA}}) (\mathbf{b}^{\text{TA}})^T \right)$ avec $\mathbf{b}^{\text{TA}} = (b_1^{\text{TA}}, \dots, b_N^{\text{TA}})$.

5.1 Localisation à l'aide des différences de temps d'arrivée

L'instant d'émission $t_{0,0}$ n'étant pas connu par les balises, une solution est de considérer une balise de référence $j \in \{1, \dots, N\}$ et de calculer des différences entre les instants de détection des balises par rapport à l'instant de détection de la balise de référence. Ainsi, si la balise de référence est la balise 1, on obtient

$$y_i^{\text{DTA}} = y_{i+1}^{\text{TA}} - y_1^{\text{TA}}, \quad i = 1, \dots, N-1 \quad (9)$$

5. Montrer qu'on a alors

$$y_i^{\text{DTA}} = y_m^{\text{DTA}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1) + b_i^{\text{DTA}}, \quad i = 1, \dots, N-1. \quad (10)$$

et donner l'expression de $y_m^{\text{DTA}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1)$ et de b_i^{DTA} .

6. Exprimer la matrice de covariance du bruit de mesure $\mathbf{\Gamma}^{\text{DTA}} = \text{E} \left((\mathbf{b}^{\text{DTA}}) (\mathbf{b}^{\text{DTA}})^T \right)$ avec $\mathbf{b}^{\text{DTA}} = (b_1^{\text{DTA}}, \dots, b_N^{\text{DTA}})$. Les bruits de mesure dans ce cas sont-ils toujours décorrelés ?
7. Proposer une méthode de choix de la balise de référence.
8. Donner l'expression du critère à maximiser pour obtenir l'estimée au sens du maximum de vraisemblance $\hat{\mathbf{x}}_0^{\text{MV,DTA}}$ de \mathbf{x}_0 .
9. Montrer que

$$\hat{\mathbf{x}}_0^{\text{MV,DTA}} = \arg \min_{\mathbf{x}} j^{\text{DTA}}(\mathbf{x})$$

où

$$j^{\text{DTA}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}^{\text{DTA}} - \mathbf{y}_m^{\text{DTA}}(\mathbf{x}))^T (\mathbf{\Gamma}^{\text{DTA}})^{-1} (\mathbf{y}^{\text{DTA}} - \mathbf{y}_m^{\text{DTA}}(\mathbf{x}))$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{\text{DTA}} &= (y_1^{\text{DTA}}, \dots, y_{N-1}^{\text{DTA}})^T \\ \mathbf{y}_m^{\text{DTA}}(\mathbf{x}) &= (y_m^{\text{DTA}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \dots, y_m^{\text{DTA}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N, \mathbf{x}_1))^T. \end{aligned}$$

On rappelle qu'un vecteur \mathbf{b} Gaussien de moyenne $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^N$ et de matrice de covariance $\mathbf{\Gamma}$ a pour densité de probabilité

$$\pi_B(\mathbf{b}) = (2\pi)^{-N/2} (\det(\mathbf{\Gamma}))^{-1/2} \exp \left(-\frac{1}{2} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{\Gamma}^{-1} (\mathbf{b} - \boldsymbol{\mu}) \right). \quad (11)$$

10. Est-il possible d'obtenir facilement une expression explicite de $\hat{\mathbf{x}}_0^{\text{MV,DTA}}$?

On propose une technique itérative du type gradient pour essayer d'obtenir $\hat{\mathbf{x}}_0^{\text{MV,DTA}}$. Pour cela, partant d'une estimée initiale $\mathbf{x}(0)$, on applique la relation de récurrence suivante

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) - \lambda(k) \mathbf{g}(\mathbf{x}(k)) \quad (12)$$

où $\lambda(k)$ est un pas à adapter et $\mathbf{g}(\mathbf{x}(k))$ est le gradient du critère $j^{\text{DTA}}(\mathbf{x})$ évalué en $\mathbf{x}(k)$.

11. Donner l'expression de $\mathbf{g}(\mathbf{x}(k))$ en fonction de \mathbf{y}^{DTA} , $\mathbf{y}_m^{\text{DTA}}(\mathbf{x}(k))$, $\mathbf{\Gamma}^{\text{DTA}}$ et des autres variables du problème.
12. Suggérer une initialisation possible pour $\mathbf{x}(0)$ qui permette une convergence plus rapide de l'algorithme itératif qu'avec une initialisation aléatoire.
13. Proposer une technique permettant de choisir $\lambda(k)$ à chaque itération.
14. Proposer un critère d'arrêt des itérations.

5.2 Localisation à l'aide des temps d'arrivée

Dans ce cas, l'instant d'émission $t_{0,0}$ doit être estimé conjointement avec la position \mathbf{x}_0 de l'objet. Il faut donc estimer le vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (t_{0,0}; \mathbf{x}_0^T)^T$.

15. Montrer que dans ce cas, l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de \mathbf{p} nécessite de résoudre le problème suivant

$$\hat{\mathbf{p}}^{\text{MV,TA}} = \arg \min_{\mathbf{p}} j^{\text{TA}}(\mathbf{p})$$

où

$$j^{\text{TA}}(\mathbf{p}) = (\mathbf{y}^{\text{TA}} - \mathbf{y}_m^{\text{TA}}(\mathbf{p}))^T (\mathbf{\Gamma}^{\text{TA}})^{-1} (\mathbf{y}^{\text{TA}} - \mathbf{y}_m^{\text{TA}}(\mathbf{p}))$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{\text{TA}} &= (y_1^{\text{TA}}, \dots, y_N^{\text{TA}})^T \\ \mathbf{y}_m^{\text{TA}}(\mathbf{p}) &= (y_m^{\text{TA}}(t_{0,0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1), \dots, y_m^{\text{TA}}(t_{0,0}, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_N))^T. \end{aligned}$$

16. Une procédure itérative similaire à celle présentée au paragraphe précédent peut être mise en oeuvre. Comment initialiser la valeur $\mathbf{p}(0)$ du vecteur des paramètres ?
17. Des mesures aberrantes sont souvent présentes dans ce type d'application.
- (a) Quelle est l'origine de ces mesures aberrantes ?
 - (b) Quel est l'impact de ces mesures aberrantes sur l'estimée obtenue ?
 - (c) Quelle solution pouvez-vous mettre en oeuvre de manière à en limiter l'impact ?

Examen - Estimation Paramétrique

L'usage des calculatrices est interdit. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées.

1 Modèle auto-régressif

On considère le modèle à temps discret

$$y_m(\boldsymbol{\theta}, k) = \theta_1 y^2(k-1) + \theta_2 y(k-2)$$

du système dynamique non-linéaire suivant

$$y(k) = \theta_1^* y^2(k-1) + \theta_2^* y(k-2) + \varepsilon(k)$$

où les $\varepsilon(k)$ sont des réalisations indépendantes et identiquement distribuées d'un bruit de moyenne nulle et $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ est un vecteur de paramètres dont la vraie valeur est $\boldsymbol{\theta}^* = (\theta_1^*, \theta_2^*)^T$. On cherche à déterminer l'estimée $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ à partir de N mesures de la sortie $y(1), \dots, y(N)$ qui minimise l'erreur de prédiction

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{k=3}^N (y(k) - y_m(\boldsymbol{\theta}, k))^2 \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

1. Donner l'expression de \mathbf{y} et de \mathbf{R} .
2. Donner l'expression de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ minimisant $f(\boldsymbol{\theta})$ en fonction de \mathbf{y} et de \mathbf{R} .

2 Localisation par estimation ensembliste

Les objets connectés sont en plein développement et l'une des problématiques auxquelles les ingénieurs doivent faire face est leur localisation que ce soit en environnement extérieur ou à l'intérieur de bâtiments.

1. Indiquer brièvement pourquoi la localisation d'un objet connecté à l'aide d'un GPS n'est pas possible à l'intérieur d'un bâtiment.

Une solution pour localiser de tels objets connectés à l'intérieur d'un bâtiment est d'avoir recours à la mesure par différentes balises (WiFi, SigFox...) des instants de réception d'une onde électromagnétique émise par l'objet à localiser.

Dans la suite de cet exercice, nous considérons que l'objet est fixe, se trouve dans un plan auquel est attaché un repère \mathcal{R} ; et que la position de l'objet dans ce repère est $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T$. L'objet est entouré de N balises dont les positions dans \mathcal{R} sont parfaitement connues et égales à $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i)^T$, $i = 1, \dots, N$. Chaque balise est équipée d'une horloge et nous supposons que ces horloges sont parfaitement synchronisées entre elles et avec l'horloge de l'objet.

2. Cette hypothèse est-elle réaliste en pratique ? Justifier brièvement.

A l'instant $t = t_0$, l'objet émet une onde électromagnétique se déplaçant à la vitesse de la lumière dans le vide $c = 3 \times 10^8$ m/s. Cette onde est détectée aux instants t_i , $i = 1, \dots, N$ par les balises. Ces mesures sont ensuite transmises à un organe de traitement central. En négligeant les réflexions de l'onde et en supposant le bruit de mesure additif, les mesures peuvent s'écrire de la manière suivante

$$t_i = t_m(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i) + b_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1)$$

Nous supposons les bruits de mesure b_i uniformément distribués sur l'intervalle $[\underline{b}, \bar{b}]$ pour $i = 1, \dots, N$, avec \underline{b} et \bar{b} connus.

3. Donner l'expression de $t_m(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$.
4. En supposant que le vecteur des paramètres à estimer est \mathbf{x}_0 , le modèle $t_m(t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_i)$ est-il linéaire ou non-linéaire en \mathbf{x}_0 ?

On cherche à déterminer l'ensemble $\mathbb{X}_0 \subset \mathbb{R}^2$ de toutes les positions \mathbf{x} de l'objet compatibles avec les mesures t_i , $i = 1, \dots, N$, la structure du modèle (1) et avec les bornes sur le bruit de mesure. Cet ensemble peut être défini de la manière suivante

$$\mathbb{X}_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid t_m(t_0, \mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \in [t_i - \bar{b}, t_i - \underline{b}], i = 1, \dots, N\}. \quad (2)$$

5. Montrer que l'estimée ensembliste (2) correspond à l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de \mathbf{x}_0 à partir de t_i , $i = 1, \dots, N$.
6. Montrer que \mathbb{X}_0 peut également se mettre sous la forme suivante

$$\mathbb{X}_0 = \bigcap_{i=1}^N \mathbb{X}_{0,i}$$

avec

$$\mathbb{X}_{0,i} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid d_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) \in [c(t_i - t_0 - \bar{b}), c(t_i - t_0 - \underline{b})]\}$$

et exprimer $d_m(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i)$. A quoi correspondent $c(t_i - t_0)$, $c\underline{b}$, et $c\bar{b}$?

7. Quelle est la forme des ensembles $\mathbb{X}_{0,i}$?
8. Quel est le nombre minimum \underline{N} de balises nécessaires pour localiser l'objet sans ambiguïté ?
9. En supposant $\bar{b} = -\underline{b} = 10^{-9}$ s, déterminer approximativement l'incertitude de localisation de l'objet.
10. Application numérique. On considère $N = 3$ balises dont les positions (exprimée en m) sont $\mathbf{x}_1 = (0, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (10, 0)$ et $\mathbf{x}_3 = (5, 5)$. Les mesures fournies par ces balises sont $d_1 = c(t_1 - t_0) = 5$ m, $d_2 = c(t_2 - t_0) = 8$ m et $d_3 = c(t_3 - t_0) = 2$ m. Les erreurs de mesure sont telles que $\bar{b} = -\underline{b} = 10^{-9}$ s. Donner l'allure de \mathbb{X}_0 . Il est possible d'utiliser le papier millimétré en fin d'énoncé, à rendre avec votre copie.

3 Estimation de la direction d'arrivée d'une onde à l'aide d'un réseau d'antennes

Dans cet exercice, nous considérons le problème de l'estimation à l'aide d'un réseau d'antennes de l'angle d'arrivée d'une onde émise par une source lointaine. L'ensemble des antennes se trouve dans le même plan et est formé de paires d'antennes dont les coordonnées dans un repère approprié sont \mathbf{a}_k et \mathbf{b}_k , $k = 1, \dots, N$. Les paires d'antennes sont telles que $\mathbf{v}_k = \mathbf{a}_k - \mathbf{b}_k$ satisfait

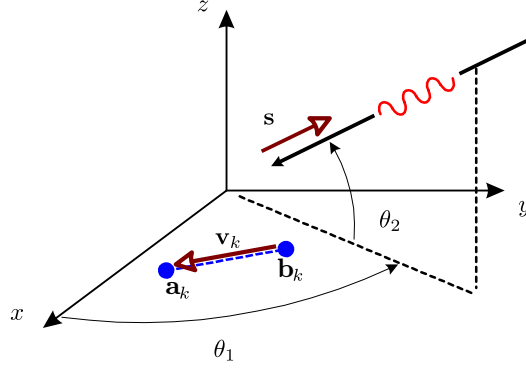
$$\|\mathbf{v}_k\|_2 = d, \quad k = 1, \dots, N$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme Euclidienne.

Le fait que la source soit lointaine permet de considérer que l'onde reçue par les antennes est une onde plane se propageant à la vitesse v suivant le vecteur directeur

$$\mathbf{s} = (\cos \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_1 \cos \theta_2, \sin \theta_2)^T,$$

où θ_1 est l'azimut de l'onde et θ_2 son élévation, voir la figure ci-dessous.



Pour chaque paire d'antennes, on mesure la différence de temps d'arrivée τ_k entre l'instant de réception de l'onde par l'antenne \mathbf{a}_k et par l'antenne \mathbf{b}_k . Cette différence s'exprime de la manière suivante

$$\tau_k = \tau_k^m(\theta_1^*, \theta_2^*) + n_k$$

où les n_k sont des réalisations de variables aléatoires Gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance σ^2 et où θ_1^* et θ_2^* sont les vraies valeurs de l'azimut et de l'élévation.

1. Montrer que

$$\tau_k^m(\theta_1, \theta_2) = \frac{d}{v} \cos(\theta_2) \cos(\theta_1 - \phi_k)$$

où $\phi_k = \angle \mathbf{v}_k$ est l'angle de \mathbf{v}_k par rapport à la direction de référence du plan où se trouvent les paires d'antennes.

2. Ce modèle est-il structurellement identifiable ? Justifier.
3. On souhaite réaliser une estimation au sens du maximum de vraisemblance de $(\theta_1^*, \theta_2^*)^T$ à partir du vecteur de mesures $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_N)^T$.
 - (a) On suppose dans un premier temps que θ_2^* est connu. Donner l'expression de la fonction de vraisemblance $\pi(\boldsymbol{\tau}|\theta_1)$.
 - (b) Dans le cas où θ_2^* n'est pas connu, donner l'expression de la fonction de vraisemblance $\pi(\boldsymbol{\tau}|\theta_1, \theta_2)$.
4. Est-il possible d'obtenir une expression explicite des valeurs $\hat{\theta}_1$ et $\hat{\theta}_2$ correspondant aux estimées au sens du maximum de vraisemblance de θ_1^* et θ_2^* ? Si ce n'est pas possible, quelle procédure numérique suggérez-vous ?

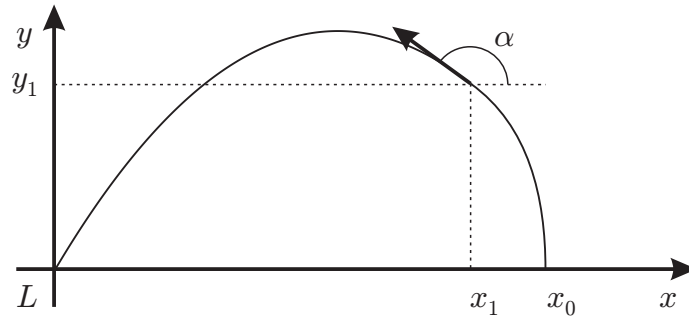
4 Localisation du pas de tir d'un V2

A partir de fin novembre 1944, les allemands bombardent Londres à l'aide de missiles, les V2 (*Vergeltungswaffe 2*), lancés depuis la côte Hollandaise, encore occupée. Rapidement, l'état major britannique réagit en envoyant en Belgique un groupe de Women's Auxiliary Air Force (WAAF) dont l'objectif est de déterminer la position des sites de lancement des V2. Pour cela, les membres des WAAF disposent de mesures obtenues à l'aide d'un radar actif. Après le lancement d'un V2, les

premières mesures parviennent et elles disposent 6 minutes pour estimer la position du pas de tir et communiquer ses coordonnées à une groupe de chasseurs en charge de le bombarder. Au delà, les allemands disposent de suffisamment de temps pour replier le pas de tir.

La trajectoire du V2 comporte deux phases. Une première phase de *propulsion*, grâce à la combustion d'ergols liquides, est suivie d'une phase *balistique*, pendant laquelle le V2 n'est plus soumis qu'à l'accélération de la gravité.

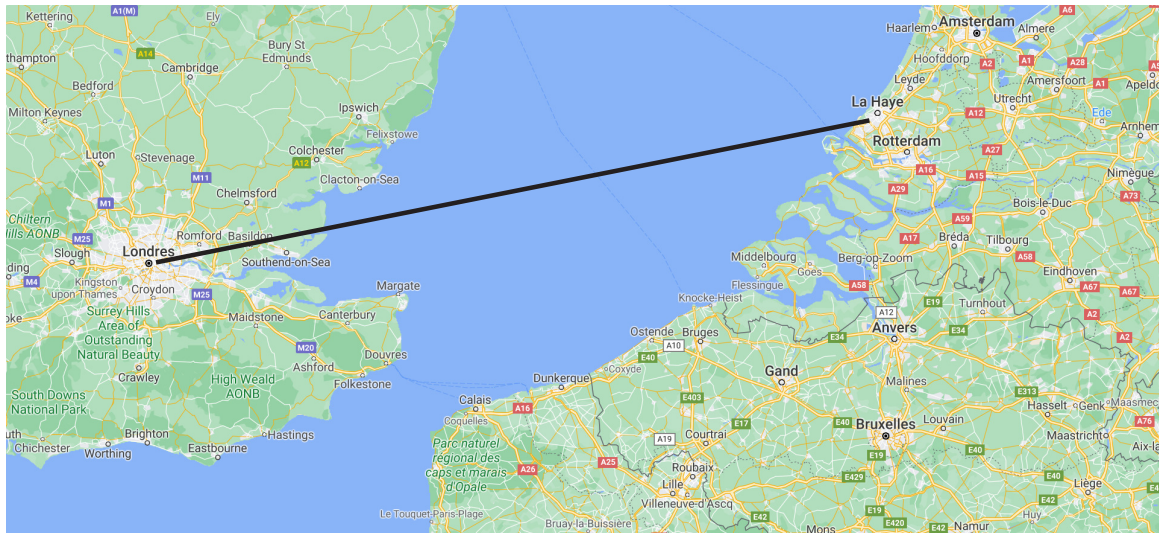
Nous allons considérer une situation simplifiée où la trajectoire d'un V2 reste dans un plan et négligerons la courbure de la Terre. Dans un repère terrestre, dont le centre de Londres (L) est l'origine, nous supposons que les coordonnées du point de lancement du V2 sont $\mathbf{x}_0 = (x_0, 0)^T$, voir le schéma ci-dessous.



1. A l'issue de la phase de propulsion, le V2 de masse m a atteint la position $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)^T$ avec une vitesse $\dot{\mathbf{x}}_1 = (v_1 \cos \alpha, v_1 \sin \alpha)^T$.
 - (a) Déterminer la trajectoire du V2 à partir de \mathbf{x}_1 , sachant que cette trajectoire est balistique et que les forces de frottement aérodynamiques sont négligées. Le V2 est considéré comme un objet ponctuel.
 - (b) Montrer que cette trajectoire est parabolique.
 - (c) Déterminer l'abscisse du point d'impact (cible) x_c en fonction de x_1, y_1, α et v_1 .
 - (d) Lorsque la trajectoire passe par le centre de Londres, déterminer une relation entre x_1, y_1, α et v_1 .
2. On suppose que la première partie de la trajectoire (propulsion) est décrite par

$$y = a\sqrt{x_0 - x}.$$

- (a) Déterminer a en fonction de x_0, x_1 et de y_1 .
 - (b) Sachant que l'ensemble de la trajectoire est lisse (de dérivée continue), en déduire une relation entre a, α, x_0 et x_1 .
3. Plusieurs mesures $\tilde{\mathbf{x}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)^T, i = 1, \dots, N$ de l'évolution de la position du V2 au cours de vol sont disponibles, à la fois pendant la phase de propulsion et pendant la phase balistique. Proposer une approche permettant d'en déduire une estimée de x_0 et de x_c à partir des mesures $\tilde{\mathbf{x}}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)^T$.
4. En supposant que seules des mesures pendant la phase balistique sont disponibles, est-il toujours possible d'estimer x_0 et x_c ? Si oui, quel est le nombre minimum de mesures nécessaires?
5. Sachant que les tirs ont eu lieu près de La Haye, expliquer pourquoi le radar permettant de déterminer les positions des V2 a été placé au nord de Bruxelles, plutôt que sur le sol britannique.
6. Est-ce que x_0 est suffisant pour guider les chasseurs? Comment procéder pour déterminer la latitude et la longitude des pas de tir? Justifier brièvement, sans donner les détails des calculs.



Près de 3000 V2 ont été tirés sur le sol britannique. Les WAAF ne disposaient que d'une règle à calcul pour estimer les positions des pas de tir. Les tirs des V2 se sont poursuivis jusqu'à 6 semaines avant l'armistice.

Examen - Modélisation - Estimation Paramétrique

L'usage des calculatrices est interdit. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées.

1 Gradient, Newton, et Gauss-Newton

On considère la fonction coût suivante

$$c(\mathbf{p}) = ((p_1 - p_2) - 1)^2 + ((p_1 - 2p_2) - 0.5)^2. \quad (1)$$

On utilise une méthode de recherche itérative du minimum de $c(\mathbf{p})$. Pour cela, on part du point $\mathbf{p}_0 = (1, 1)^T$.

1. Méthode du gradient
 - (a) Donner la direction de descente \mathbf{d}_g donnée par cette méthode.
 - (b) Evaluer $c(\mathbf{p}_1)$ avec $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{d}_g$.
2. Méthode de Newton.
 - (a) Donner la direction de descente \mathbf{d}_n donnée par cette méthode.
 - (b) Evaluer $c(\mathbf{p}_1)$ avec $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{d}_n$.
3. Méthode de Gauss-Newton.
 - (a) Donner la direction de descente \mathbf{d}_{gn} donnée par cette méthode.
 - (b) Evaluer $c(\mathbf{p}_1)$ avec $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{d}_{gn}$.
4. Conclusion.

2 Estimation Min-Max

On considère le modèle à temps discret suivant

$$y_m(\boldsymbol{\theta}, k) = \theta_1 y(k-1) + \theta_2 y(k-2) \quad (2)$$

dont l'objectif est de représenter les sorties $y(k)$ mesurées aux instants $k = 1, \dots, N$. L'objectif est d'obtenir une estimée min-max

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{mM}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \max_{k=3, \dots, N} |y(k) - y_m(\boldsymbol{\theta}, k)|$$

du vecteur de paramètres $\boldsymbol{\theta}$.

1. Le modèle (2) est-il linéaire ou non-linéaire en les paramètres ? Justifier.
2. Dans quelle situation est-il préférable d'utiliser une estimation de type min-max à la place d'une estimation au sens des moindres carrés ?
3. Montrer que $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\text{mM}}$ peut être obtenu à partir de la solution d'un programme linéaire de type

$$\min \mathbf{c}^T \mathbf{x}$$

sous la contrainte $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$,

dont les éléments (\mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{x} , et \mathbf{A}) seront à spécifier.

3 Calcul de gradient par état adjoint

On considère le modèle sous forme de représentation d'état à temps discret suivant

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 x_1(k) + p_2 x_2^2(k) \\ p_3 x_1^2(k) \end{pmatrix}$$
$$y_m(k) = x_1(k) + x_2(k)$$

avec

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'un système dynamique dont on a mesuré la sortie $y(k)$ aux instants $k = 0, \dots, N$.

On souhaite réaliser l'estimée au sens des moindres carrés du vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_4)^T$ à partir des mesures $y(k)$ aux instants $k = 0, \dots, N$.

1. Donner la forme du critère $c(\mathbf{p})$ à minimiser pour obtenir cette estimée.
2. Donner la dynamique à temps rétrograde satisfaite par l'état adjoint qui va permettre d'obtenir le gradient du critère $c(\mathbf{p})$. Préciser la valeur initiale de l'état adjoint.
3. Indiquer la manière dont est obtenu le gradient à partir de l'état adjoint.

4 Construction d'un modèle de comportement

On souhaite réaliser un système de téléopération d'un véhicule, d'un drone ou d'un train depuis un site distant, voir la Figure 1. Pour cela, afin de permettre à l'opérateur distant de réagir en cas d'urgence, le véhicule doit envoyer des informations visuelles sur son environnement avec une latence extrêmement faible.



FIGURE 1 – Opérateur télé-conduisant un véhicule distant (source <https://designateddriver.ai/technology/>)

Pour cela, le véhicule doit être équipé de dispositifs d'acquisition (caméra), de compression et de transmission de contenus vidéo efficaces. La latence de bout-en-bout est l'intervalle de temps entre l'instant auquel un événement apparaît en face de la caméra embarquée dans le véhicule et l'instant auquel cet événement est affiché sur l'écran de l'opérateur distant.

1. Quelle est la distance parcourue en 100 ms par un véhicule se déplaçant à 50 km/h ? En déduire un ordre de grandeur de la latence de bout-en-bout tolérable pour un système de télé-conduite.

La Figure 2 présente un schéma simplifié d'un dispositif d'acquisition, de compression et de transmission de contenus vidéo acquis depuis un véhicule. La latence de bout-en-bout est due

- au temps mis par la caméra pour acquérir l'image
- au temps mis par le codeur vidéo pour compresser l'image acquise
- au temps de séjour de l'image compressée dans le tampon d'émission, en attendant que la radio dispose d'opportunités de transmission des paquets dans lesquels l'image compressée a été stockée
- au temps de transmission des paquets par la radio et par le réseau de communication filaire qui suit l'antenne radio réceptrice
- au temps de stockage dans le tampon de réception des paquets reçus
- au temps mis par le décodeur vidéo pour décompresser les paquets reçus
- au temps d'affichage de l'image décompressée.

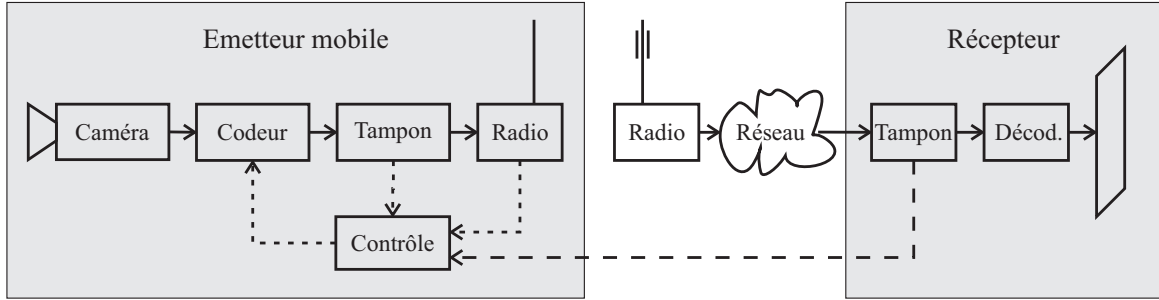


FIGURE 2 – Schéma d'une chaîne d'acquisition, compression et transmission de contenus vidéo acquis en temps réel

Comme le véhicule se déplace dans son environnement, la capacité¹ du canal de communication entre l'antenne radio émettrice sur le véhicule et l'antenne radio réceptrice (dans la station de base ou la gNodeB pour la 5G) varie fortement au cours du temps et en fonction du nombre d'utilisateurs connectés au réseau. Il est par conséquent indispensable d'ajuster régulièrement les paramètres du codeur vidéo afin que la quantité de bits générés par image (débit binaire) soit le plus proche possible de la capacité du canal de communication. C'est le rôle du bloc *contrôle* de la Figure 2.

Pour un dispositif de compression vidéo, le débit R_n en sortie de codeur mesure la quantité de bits à transmettre par seconde pour envoyer l'image n une fois qu'elle est compressée. Si T_i est l'intervalle de temps entre l'acquisition de deux images, le nombre de bits représentant l'image compressée n est $R_n T_i$. La distorsion D_n mesure la qualité de l'image n après compression et décompression. La distorsion correspond à la moyenne des carrés des différences entre l'intensité lumineuse des pixels de l'image acquise et de l'intensité lumineuse des pixels affichés au récepteur. Plus R_n est élevé, plus D_n est faible et meilleure est la qualité de l'image reçue.

2. Que se passe-t-il si le débit binaire R_n en sortie de codeur vidéo est trop important par rapport à la capacité ? Que se passe-t-il lorsqu'il est beaucoup plus faible que la capacité ?

Le compromis entre R_n et D_n dépend principalement du paramètre de quantification (QP) sélectionné par le codeur vidéo pour compresser l'image n . Ce paramètre sera noté Q_n dans ce qui suit. La relation entre R_n et D_n est complexe à décrire et fait l'objet de la suite de cet exercice où nous allons essayer d'en construire un modèle de comportement.

Pour la séquence vidéo ParkScene, la Figure 3 illustre l'évolution de R_n en fonction de $\log(D_{n-1})$ pour différentes valeurs de $Q_n \in \{20, 22, \dots, 42\}$. Les valeurs expérimentales correspondent aux points sur la Figure 3. Les 12 valeurs de Q_n sont notées $Q_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, 12$. Pour chaque $Q_n^{(i)}$, 13 valeurs de distorsion de l'image précédente $n - 1$ ont été considérées. Elles sont notées $D_{n-1}^{(i,j)}$ et les valeurs obtenues de débit sont notées $R_n^{(i,j)}$, $i = 1, \dots, 12$ et $j = 1, \dots, 13$.

3. Est-ce que R_n dépend uniquement de Q_n ?

1. la quantité de bits qu'il est possible d'envoyer par seconde

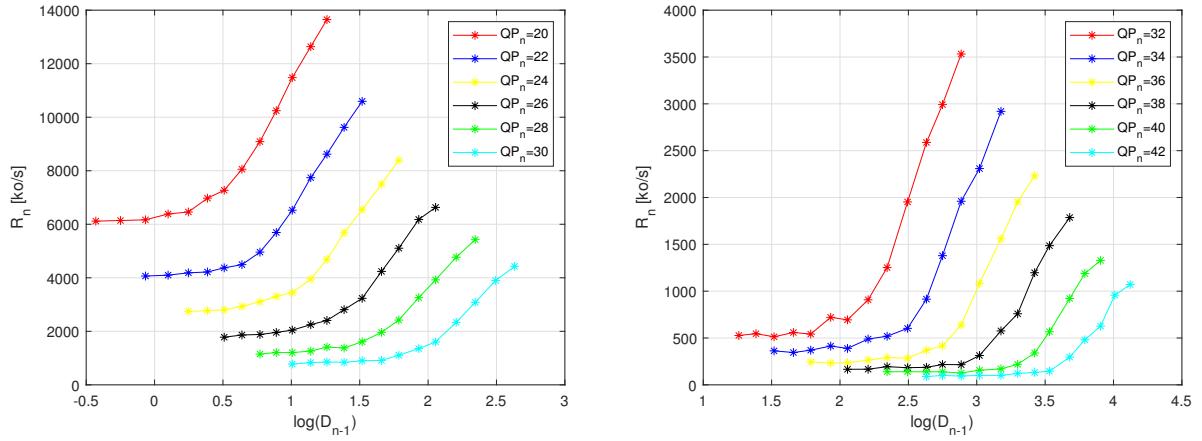


FIGURE 3 – Séquence vidéo *ParkScene* : Débit R_n en sortie de codeur vidéo pour l'image n en fonction du logarithme de la distorsion de l'image $n - 1$, pour différentes valeur du paramètre de quantification Q_n de l'image n

4. Que peut-on dire de la dépendance entre R_n et Q_n lorsque D_{n-1} est faible ? Que peut-on en dire lorsque D_{n-1} est élevé ?

Une première partie du modèle de comportement reliant R_n et Q_n considérera D_{n-1} très faible. La figure 4 illustre la valeur minimale $R_n^{(i,1)}$ de R_n obtenue pour chaque $Q_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, 12$.

5. Lorsque D_{n-1} est très faible, en vous servant de la Figure 4, quelle structure de modèle

$$R_n = f_1(Q_n, \mathbf{p}_n)$$

pouvez-vous proposer ? Ce modèle est-il linéaire ou non-linéaire en les paramètres ?

6. Quelle est la dimension du vecteur \mathbf{p}_n ?
7. Quel type de critère peut-on considérer pour estimer \mathbf{p}_n à partir des $Q_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, 12$ et des valeurs correspondantes de $R_n^{(i,1)}$? Donner l'expression de ce critère ?
8. Donner une valeur approximative de l'estimée $\hat{\mathbf{p}}_n$ de \mathbf{p}_n au sens du critère proposé.

La Figure 5 illustre les valeurs de $\underline{R}_n^{(i,j)} = R_n^{(i,j)} - f_1(Q_n^{(i)}, \hat{\mathbf{p}}_n)$, $i = 1, \dots, 12$ et $j = 1, \dots, 13$ pour l'image n en fonction du logarithme de la distorsion de l'image $n - 1$, pour différents $Q_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, 12$.

9. On considère une valeur $Q_n^{(i)}$ du paramètre de quantification fixée. A partir de l'observation de la Figure 5, justifier le choix de la structure de modèle paramétrique suivante

$$\underline{R}_n = q_1 (1 + \tanh(q_2 (\log(D_{n-1}) - q_3))) \quad (3)$$

afin de relier \underline{R}_n à $\log(D_{n-1})$. Le vecteur des paramètres de ce modèle est $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)^T$.

10. Le modèle (3) est-il linéaire ou non-linéaire en les paramètres ?

Pour chaque valeur de $Q_n^{(i)}$, une estimation au sens des moindres carrés $\hat{\mathbf{q}}$ de \mathbf{q} est faite à partir de $\underline{R}_n^{(i,j)}$ et $D_{n-1}^{(j)}$, $j = 1, \dots, 13$. La Figure 6 illustre les estimées \hat{q}_1 , \hat{q}_2 et \hat{q}_3 obtenues pour différentes valeurs de $Q_n^{(i)}$ en fonction de Q_n (haut-gauche, bas-gauche, bas-droit) ou de $\log(Q_n)$ (haut-droit).

11. Peut-on dire que \mathbf{q} est indépendant de Q_n ?
12. A partir des courbes de la Figure 6, proposer une structure de modèle permettant de relier
 - (a) q_1 à Q_n ; elle sera notée $q_1 = g_1(Q_n, \mathbf{p})$ ou $q_1 = g_1(\log(Q_n), \mathbf{p})$;

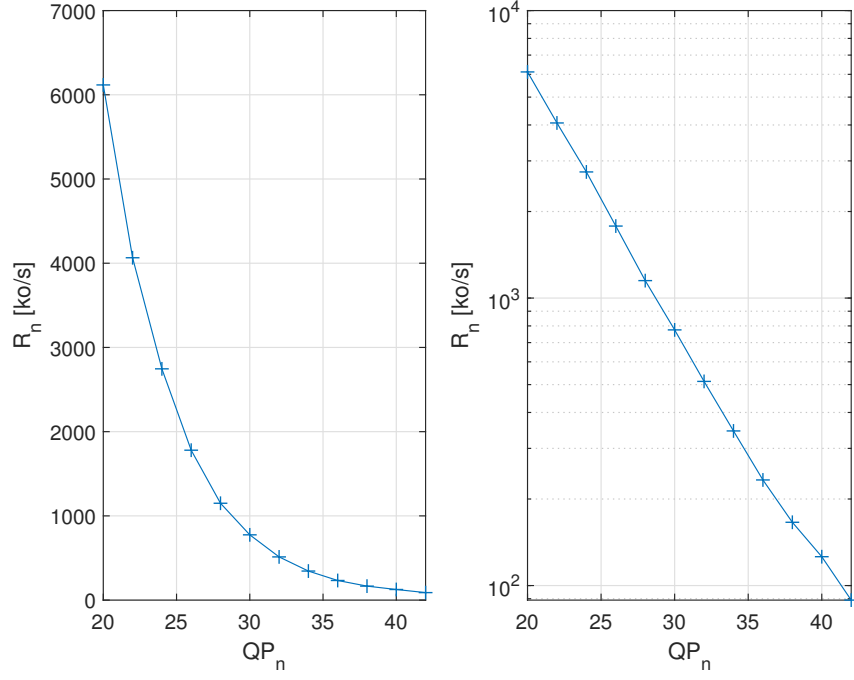


FIGURE 4 – Séquence vidéo *ParkScene* : Débit R_n minimal obtenu en sortie de codeur vidéo pour l'image n en fonction du paramètre de quantification Q_n de l'image n , échelle linéaire (à gauche) et logarithmique (à droite)

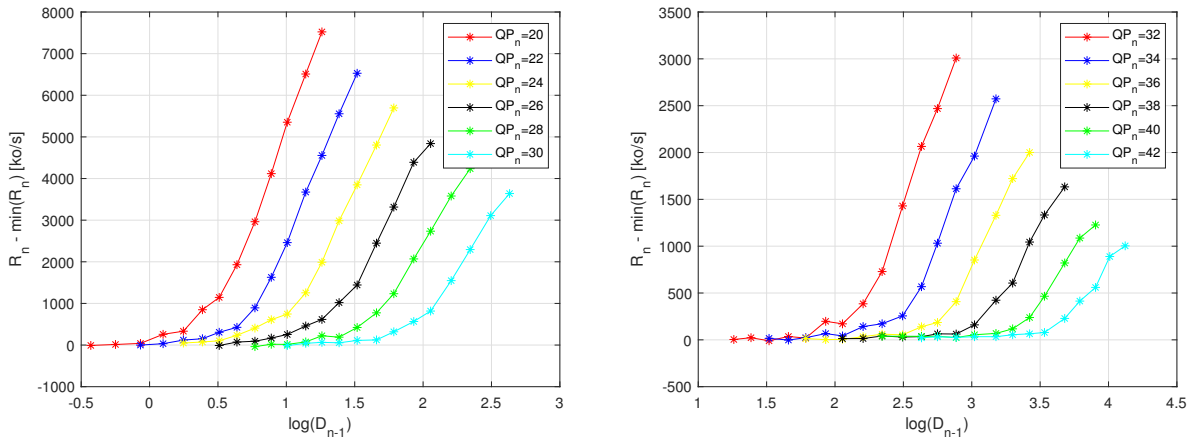


FIGURE 5 – Séquence vidéo *ParkScene* : valeurs de $R_n^{(i,j)} - f_1(Q_n^{(i)}, \hat{\mathbf{p}}_n)$ pour l'image n en fonction du logarithme de la distorsion de l'image $n - 1$, pour différents $Q_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, 12$

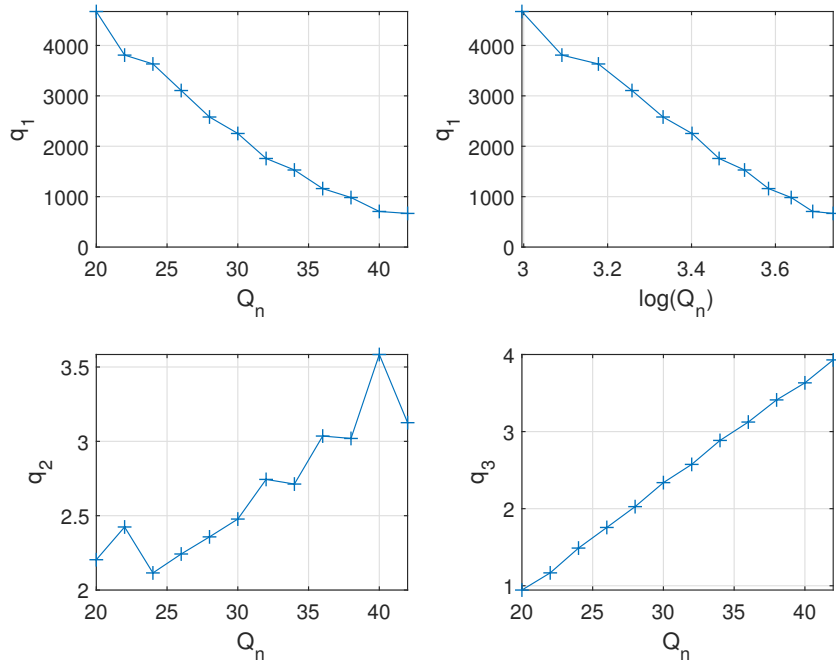


FIGURE 6 – Valeurs des estimées des paramètres q_1 , q_2 et q_3 obtenues pour différentes valeurs de $Q_n^{(i)}$, $i = 1, \dots, 12$ en fonction de Q_n (haut-gauche, bas-gauche, bas-droit) ou de $\log(Q_n)$ (haut-droit)

- (b) q_2 à Q_n ; elle sera notée $q_2 = g_2(Q_n, \mathbf{p})$;
- (c) q_3 à Q_n ; elle sera notée $q_3 = g_3(Q_n, \mathbf{p})$;
- 13. Donner la structure globale du modèle de comportement permettant de relier R_n , D_{n-1} et Q_n . Combien de paramètres ce modèle fait-il intervenir ?
- 14. Quel pourra être l'utilisation de ce modèle dans le contexte applicatif considéré ?

5 Estimation des paramètres d'un oscillateur

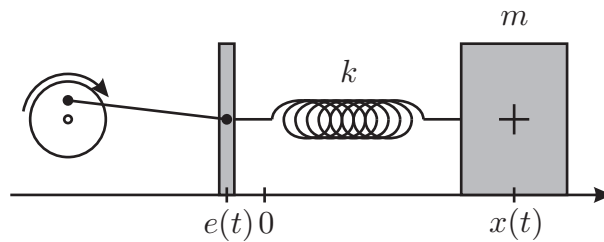


FIGURE 7 – Système masse-ressort

On considère le système masse-ressort représenté sur la figure 7. Un objet de masse m est relié à un support mobile par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k . A l'équilibre, le centre de gravité de l'objet se trouve en $x = \ell$ et la longueur du ressort est ℓ . A l'instant $t = 0$, l'objet est immobile et le support mobile est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un cylindre tournant auquel il est relié par une bielle. La position du support mobile en fonction du temps est notée $e(t)$ et on suppose que $e(0) = 0$. On suppose que le mouvement est rectiligne et que l'objet subit un frottement

fluide dont la direction est opposée à la vitesse de déplacement et dont la norme est $\mu \left| \frac{dx}{dt} \right|$, où μ est la constante de frottement.

1. Donner l'équation différentielle du deuxième ordre reliant $y(t) = x(t) - \ell$ et $e(t)$ en fonction de m , μ et k . Préciser les conditions initiales.
2. En posant $y_1 = y$ et $y_2 = \frac{dy}{dt}$, donner le système différentiel du premier ordre décrivant l'évolution de $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$. Préciser les conditions initiales.

On cherche à concevoir une expérience permettant d'estimer simultanément μ et k (m est mesuré à l'aide d'une balance). Pour cela, des mesures bruitées de la position du mobile $z(t_k) = y_1(t_k) + b(t_k)$ sont prélevées aux instants de mesures t_k , $k = 1, \dots, N$. L'identification du vecteur de paramètres $\mathbf{p} = (\mu, k)^T$ doit se faire sans résoudre à la main le système d'équations différentielles. Une procédure d'intégration numérique simple (par exemple une méthode d'Euler) sera employée pour simuler le modèle du système. L'estimation est réalisée par la méthode des moindres carrés. L'estimée de \mathbf{p} est l'argument du minimum du critère

$$c(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (y_m(t_k, \mathbf{p}) - z(t_k))^2. \quad (4)$$

Nous supposons que $y_m(t, \mathbf{p}) = y_1(t)$.

1. Justifiez la forme du critère utilisé pour réaliser l'estimation de \mathbf{p} .
2. Montrez que le gradient du critère $c(\mathbf{p})$ s'exprime de la manière suivante

$$\mathbf{g}(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_1} \\ \frac{\partial c(\mathbf{p})}{\partial p_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^N (y_m(t_k) - z(t_k)) s_1^{p_1}(t_k) \\ \sum_{k=1}^N (y_m(t_k) - z(t_k)) s_1^{p_2}(t_k) \end{pmatrix} \quad (5)$$

où

$$s_i^{p_j}(t) = \frac{\partial y_i}{\partial p_j}(t)$$

sont les fonctions de sensibilité des y_i , $i = 1, 2$, à l'égard de p_j , $j = 1, 2$.

3. Donner un système d'équations différentielles dont la solution donne l'évolution de $s_1^{p_1}$ et $s_2^{p_1}$ en fonction du temps. Préciser les conditions initiales.
4. En déduire le système d'équations différentielles satisfaits par $s_1^{p_2}$ et $s_2^{p_2}$.
5. Les deux systèmes décrivant l'évolution des fonctions de sensibilité peuvent être regroupés au sein d'un seul grand système de six équations différentielles du premier ordre. Ecrire un fichier `ressort.m` permettant d'obtenir les dérivées temporelles des différentes fonctions de sensibilité en plus de dy_1/dt et dy_2/dt . La syntaxe de cette fonction devra être

```
% Entrées :
% - y : valeur de y à l'instant t
% - p : vecteur des paramètres
% - e : position du support à l'instant t
%
dy1dt =
dy2dt =
% Fonctions de sensibilité par rapport à p1
ds11dt =
ds21dt =
% Fonctions de sensibilité par rapport à p2
```

```

ds12dt =
ds22dt =
dydt = [dy1dt;dy2dt;ds11dt;ds21dt;ds12dt;ds22dt];

```

La fonction `euler.m`, dont l'en-tête est

```

function X = euler(func,x0,p,t,M)

%%
% Intégration par la méthode d'Euler de l'EDO décrite par func
% Entrées :
% - func : fonction à intégrer
% - x0 : condition initiales à t=0
% - p : vecteur des paramètres
% - t : vecteur des instants de mesure
% - M : nombre de pas d'intégration entre deux instants de mesure
%
% Sorties :
% - X : mesures mises sous forme de vecteurs colonnes rangés en une matrice

```

permet de réaliser une intégration numérique approchée d'un système d'équations différentielles ordinaires, partant d'un vecteur de conditions initiales, pour différents instants stockés dans un vecteur `t`, et avec une précision dépendant du nombre de pas de calcul M ($= 100$ par exemple) entre chaque instant de mesure.

Construire une fonction prenant en entrée `p`, `z` et `t` permettant de calculer la valeur ainsi que le gradient du critère (4). Une structure possible est

```
function [c,g]=critgrad(p,z,t)
```

Cette fonction utilisera les fonctions `euler.m` et `ressort.m`.

1. Rappelez la structure de la méthode d'optimisation du gradient.

Examen - Modélisation - Estimation Paramétrique

L'usage des calculatrices est autorisé. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées.

1 Identifiabilité structurelle

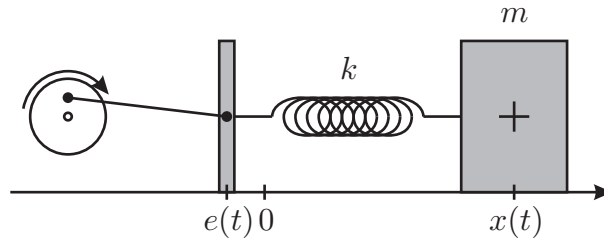


FIGURE 1 – Système masse-ressort

On considère le système masse ressort représenté sur la figure 1. Un objet de masse m est relié à un support mobile par l'intermédiaire d'un ressort de constante de raideur k . A l'équilibre, le centre de gravité de l'objet se trouve en $x = \ell$ et la longueur du ressort est ℓ . A l'instant $t = 0$, l'objet est immobile et le support mobile est mis en mouvement par l'intermédiaire d'un cylindre tournant auquel il est relié par une bielle. La position du support mobile en fonction du temps est notée $e(t)$ et on suppose que $e(0) = 0$. On supposera que le mouvement est rectiligne et que l'objet subit un frottement visqueux dont la direction est opposé à la vitesse de déplacement et dont la norme est $-\mu \frac{dx}{dt}$, où μ est la constante de frottement visqueux.

1. Donner l'équation différentielle du deuxième ordre reliant $y(t) = x(t) - \ell$ et $e(t)$ en fonction de m , μ et k . Préciser les conditions initiales.
2. On est capable d'observer la position du centre de gravité de la masse à tout instant.
 - (a) Les paramètres m , μ et k sont-ils structurellement identifiables ? Justifier.
 - (b) Lorsque m est connu, les paramètres μ et k sont-ils structurellement identifiables ? Justifier.

2 Planification de trajectoire d'un robot

On considère un robot se déplaçant dans le plan auquel est attaché un repère \mathcal{R} . Initialement, le centre de masse du robot se trouve à l'origine du repère $(x_0, y_0) = (0, 0)$. N balises ponctuelles dont les positions sont $(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$, $i = 1, \dots, N$ sont placées dans le plan avec

$$\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2 < \dots < \tilde{x}_N.$$

L'objectif de ce problème est de construire une trajectoire possible pour le robot permettant de s'approcher des différentes balises, tout en effectuant un trajet le plus court possible. Pour cela, on considère une trajectoire polynomiale de la forme

$$y(\mathbf{p}, x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_M x^M, \quad (1)$$

avec $M < N$. On note $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_M)^T$.

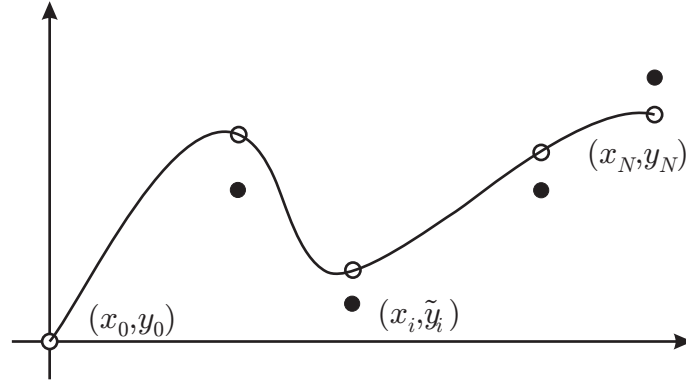


FIGURE 2 – Problème de navigation

1. Quelle est la contrainte sur les p_m , $m = 0, \dots, M$ pour que la trajectoire passe par $(x_0, y_0) = (0, 0)$?

2.1 Méthode des moindres carrés

Dans cette partie, on souhaite trouver la trajectoire qui minimise la somme des carrés des distances entre les balises et le robot uniquement pour les points d'abscisses \tilde{x}_i , $i = 1 \dots, N$ de la trajectoire.

2. Ecrire le critère $j_{MC}(\mathbf{p})$ à minimiser pour résoudre ce problème.
3. Montrer que ce critère peut s'écrire sous la forme

$$j_{MC}(\mathbf{p}) = (\mathbf{R}\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{y}})^T (\mathbf{R}\mathbf{p} - \tilde{\mathbf{y}})$$

en explicitant \mathbf{R} et $\tilde{\mathbf{y}}$.

4. Donner l'expression de $\hat{\mathbf{p}}_{MC}$ minimisant $j_{MC}(\mathbf{p})$.

2.2 Méthode min-max

Dans cette partie, on souhaite trouver la trajectoire qui minimise la plus grande des distances entre les balises et le robot lorsque la trajectoire de celui-ci aura pour abscisses \tilde{x}_i , $i = 1 \dots, N$.

5. Ecrire le critère $j_{mM}(\mathbf{p})$ à minimiser pour résoudre ce problème.
6. Montrer que minimiser ce critère revient à résoudre un problème de programmation linéaire du type

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}} &= \arg \min_{\mathbf{u}} \mathbf{c}^T \mathbf{u} \\ &\text{sous contrainte } \mathbf{A}\mathbf{u} \leq \mathbf{b} \end{aligned}$$

et expliciter \mathbf{c} , \mathbf{u} , \mathbf{A} et \mathbf{b} .

7. Est-il possible d'obtenir une expression explicite de $\hat{\mathbf{p}}_{mM}$ minimisant $j_{mM}(\mathbf{p})$. Si non, que faire ?

3 Fonctions de sensibilité

On considère un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$. Ce système est décrit par un modèle d'entrée $u(t)$ et de sortie $y_m(\mathbf{p}, t)$ dont la relation entrée-sortie satisfait

$$\frac{\partial^2 y_m(\mathbf{p}, t)}{\partial t^2} + p_1 \frac{\partial y_m(\mathbf{p}, t)}{\partial t} + p_2 y_m(\mathbf{p}, t) = p_3 u(t) \quad (2)$$

avec

$$\left. \frac{\partial^2 y_m(\mathbf{p}, t)}{\partial t^2} \right|_{t=0} = 0 \text{ et } y_m(\mathbf{p}, 0) = p_4$$

et $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_4)^T$ un vecteur de paramètres constants à déterminer.

Pour cela, on applique une entrée connue $u(t)$ au système, indépendante de \mathbf{p} et on mesure la sortie $y(t)$ aux instants t_i , $i = 1, \dots, N$. On suppose qu'il existe une valeur \mathbf{p}^* du vecteur des paramètres telle que

$$y(t_i) = y_m(\mathbf{p}^*, t_i) + e(t_i), \quad i = 1, \dots, N$$

où $e(t_i)$ représente le bruit de mesure à l'instant t_i . On cherche à déterminer l'estimée $\hat{\mathbf{p}}$ de \mathbf{p}^* au sens des moindres carrés

$$\hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\mathbf{p}} j(\mathbf{p})$$

avec

$$j(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y(t_i) - y_m(\mathbf{p}, t_i))^2.$$

1. Donner l'expression du gradient

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{p}) &= \frac{\partial j(\mathbf{p})}{\partial \mathbf{p}} \\ &= \left(\frac{\partial j(\mathbf{p})}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial j(\mathbf{p})}{\partial p_4} \right)^T \end{aligned}$$

de $j(\mathbf{p})$ en fonction de $y(t_i)$, $y_m(\mathbf{p}, t_i)$ et de ses dérivées partielles par rapport aux composantes de \mathbf{p} .

2. Combien faut-il faire d'évaluations de $j(\mathbf{p})$ pour calculer $\mathbf{g}(\mathbf{p})$ par différences finies ?

On introduit la fonction de sensibilité du modèle par rapport au k -ème paramètre

$$s_k(\mathbf{p}, t) = \frac{\partial y_m(\mathbf{p}, t)}{\partial p_k}, \quad k = 1, \dots, 4.$$

3. Donner une équation différentielle du second ordre satisfaite par $s_k(\mathbf{p}, t)$, $k = 1, \dots, 4$. Préciser les conditions initiales.
4. Quelle relation y a-t-il entre $s_1(\mathbf{p}, t)$ et $s_2(\mathbf{p}, t)$?

On introduit le vecteur d'état

$$\mathbf{x}(\mathbf{p}, t) = \left(y_m(\mathbf{p}, t), \frac{\partial y_m(\mathbf{p}, t)}{\partial t} \right)^T.$$

5. Exprimer $\mathbf{x}(\mathbf{p}, 0)$.
6. Montrer que

$$\frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = \mathbf{A}(\mathbf{p}) \mathbf{x}(\mathbf{p}, t) + \mathbf{B}(\mathbf{p}) u(t)$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{p})$ sont une matrice et un vecteur indépendants de $\mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$ dont l'expression est à préciser.

7. Définir un vecteur d'état étendu $\mathbf{x}_e(\mathbf{p}, t)$ comprenant $\mathbf{x}(\mathbf{p}, t)$ complété d'un certain nombre de fonctions de sensibilité tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}_e(\mathbf{p}, t)}{\partial t} &= \mathbf{A}_e(\mathbf{p}) \mathbf{x}_e(\mathbf{p}, t) + \mathbf{B}_e(\mathbf{p}) u(t) \\ (y_m(\mathbf{p}, t), s_1(\mathbf{p}, t), \dots, s_4(\mathbf{p}, t))^T &= \mathbf{C}_e \mathbf{x}_e(\mathbf{p}, t). \end{aligned}$$

Préciser en particulier $\mathbf{x}_e(\mathbf{p}, 0)$, $\mathbf{A}_e(\mathbf{p})$, $\mathbf{B}_e(\mathbf{p})$, et \mathbf{C}_e .

4 *Multi-armed bandits*

Le modèle de type *multi-armed bandit* (machine à sous à plusieurs bras, voir la figure 3) permet de représenter de nombreuses situations pratiques où un agent a le choix entre plusieurs actions possibles (chacune représentée par un bras de la machine à sous). A chaque action est associée une récompense aléatoire décrite par une distribution de probabilité en général inconnue. L'objectif de l'agent est de déterminer l'action (le bras) qui va produire la récompense la plus élevée.

On peut citer par exemple

- un routeur ayant le choix entre plusieurs interfaces possible pour l'envoi d'un paquet internet : l'objectif est de déterminer le chemin qui va permettre d'acheminer le paquet le plus rapidement possible ;
- un gestionnaire de site web devant choisir l'annonce publicitaire à afficher sur la page consultée par un internaute : l'objectif est de faire en sorte que ce dernier clique sur l'annonce publicitaire ;
- un médecin devant sélectionner un antibiotique pour traiter un patient : l'objectif est d'obtenir une guérison la plus rapide possible.

Nous ferons l'hypothèse que la distribution de probabilité de la suite de variables aléatoires décrivant les récompenses associées à une action est invariante dans le temps. L'agent dispose alors d'un nombre fini N d'essais ou *épisodes*. Lors d'un épisode, l'agent choisit une action (un bras à actionner) et reçoit une récompense associée à ce choix. L'objectif de l'agent est de maximiser la somme des récompenses obtenues sur l'ensemble des épisodes.



FIGURE 3 – Machine à sous à plusieurs bras

4.1 Estimation de la récompense moyenne de chaque bras

Nous considérons une machine à sous à K bras. A chaque épisode n , les récompenses associées à chaque bras sont décrites par des variables aléatoires indépendantes de moyennes m_1, \dots, m_K , identiques d'un épisode à l'autre. Lors de l'épisode n , l'agent doit choisir une action $a \in \mathcal{A} = \{1, \dots, K\}$, correspondant à l'index du bras qu'il va tirer. L'objectif est de choisir l'action qui maximise l'espérance de la récompense R_n sachant que l'action a a été choisie à l'instant n notée

$$q_n^*(a) = \mathbb{E}(R_n \mid A_n = a). \quad (3)$$

Supposons que lors de l'épisode n , l'action a a été choisie $n_a \leq n$ fois et que les récompenses r_1, \dots, r_{n_a} ont été obtenues.

1. Montrer que l'estimée au sens des moindres carrés de m_a s'écrit

$$\hat{m}_a^{\text{MC}}(n) = \frac{1}{n_a} (r_1 + \dots + r_{n_a}). \quad (4)$$

2. L'estimée (4) nécessite de garder en mémoire l'ensemble des n_a récompenses obtenues. Lors de l'épisode $n + 1$, l'action a a été choisie une nouvelle fois et la récompense r_{n_a+1} a été obtenue. Montrer que $\hat{m}_a^{\text{MC}}(n + 1)$, l'estimée de m_a à la fin de l'épisode $n + 1$ peut s'écrire en fonction de $\hat{m}_a^{\text{MC}}(n)$, de r_{n_a+1} et de n_a .
3. Exprimer la relation entre $\hat{m}_a^{\text{MC}}(n + 1)$ et $\hat{m}_a^{\text{MC}}(n)$ lorsque l'action a n'a pas été choisie à l'épisode $n + 1$.

On suppose maintenant que pour l'épisode n , les récompenses associées à chaque bras sont décrites par des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de moyennes $m_1 \geq 0, \dots, m_K \geq 0$ et de variances $\sigma_1^2, \dots, \sigma_K^2$, identiques d'un épisode à l'autre. Supposons à nouveau que lors de l'épisode n , l'action a a été choisie $n_a \leq n$ fois et que les récompenses r_1, \dots, r_{n_a} ont été obtenues.

4. Donner l'expression de l'estimée au sens du maximum de vraisemblance $\hat{\mathbf{p}}_a^{\text{MV}}(n)$ du vecteur de paramètres $\mathbf{p}_a = (m_a, \sigma_a^2)^T$ à l'épisode n .

4.2 Stratégies de maximisation des récompenses accumulées

Afin de maximiser la somme des récompenses obtenues sur un ensemble de N épisodes, une première stratégie, dite *gloutonne*, consiste à choisir, au début de chaque épisode, l'action pour laquelle l'estimée $\hat{m}_a^{\text{MC}}(n)$ ou $\hat{m}_a^{\text{MV}}(n)$ est la plus élevée

$$A_n \in \arg \max_{a \in \mathcal{A}} \hat{m}_a^{\text{MC}}(n).$$

Lorsque plusieurs choix sont possible, l'action A_n est choisie aléatoirement suivant une distribution uniforme parmi ces actions.

5. En supposant que les estimées $\hat{m}_a^{\text{MC}}(0)$ sont initialisées à 0 pour tout $a \in \mathcal{A}$, expliquer pourquoi la stratégie gloutonne ne permet pas toujours de faire en sorte que l'action maximisant l'espérance de la récompense soit choisi, même lorsque N est grand.

Une stratégie alternative, dite ε -gloutonne, consiste, au début de chaque épisode

- avec une probabilité ε , à choisir aléatoirement selon une loi uniforme une action parmi \mathcal{A}
 - avec une probabilité $1 - \varepsilon$, à choisir l'action pour laquelle l'estimée $\hat{m}_a^{\text{MC}}(n)$ ou $\hat{m}_a^{\text{MV}}(n)$ est la plus élevée.
6. Proposer un algorithme implantant une stratégie ε -gloutonne de maximisation de la somme des récompenses obtenue sur un ensemble de N épisodes.
 7. La stratégie ε -gloutonne permet-elle de déterminer efficacement l'action qui maximise $q_n^*(a)$?

Dans la suite de cet exercice, nous allons analyser une stratégie permettant de tenir compte de l'estimée $\hat{m}_a^{\text{MC}}(n)$ ainsi que de l'incertitude d'estimation associée lors du choix de l'action à l'épisode $n + 1$. Pour simplifier le problème, supposons maintenant que pour l'épisode n , les récompenses associées à chaque bras sont décrites par des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de moyennes m_1, \dots, m_K et de variances $\sigma_1^2 = \dots = \sigma_K^2 = 1$, identiques d'un épisode à l'autre. Les variances sont connues.

8. Quelle est la densité de probabilité de la variable aléatoire $R_1 - m_1$ lorsque R_1 désigne la variable aléatoire représentant la récompense associée à l'action $a = 1$?

La densité de probabilité de la somme des carrés de n variables aléatoires Gaussiennes indépendantes de moyenne nulle et de variance unité est appelée loi du chi-deux (loi du χ^2) à n degrés de liberté.

La figure 4 illustre la densité de probabilité et la fonction de répartition d'une loi du χ^2 pour différentes valeurs du nombre de degrés de liberté n . De plus, le tableau 1 donne les valeurs des quantiles à 95 % et à 99 % de la loi du χ^2 à n degrés de liberté. Si une variable aléatoire X est distribuée suivant une loi du χ^2 à $n = 5$ degrés de liberté, alors on lit dans la table

$$\Pr(X \leq 9.24) = 0.95.$$

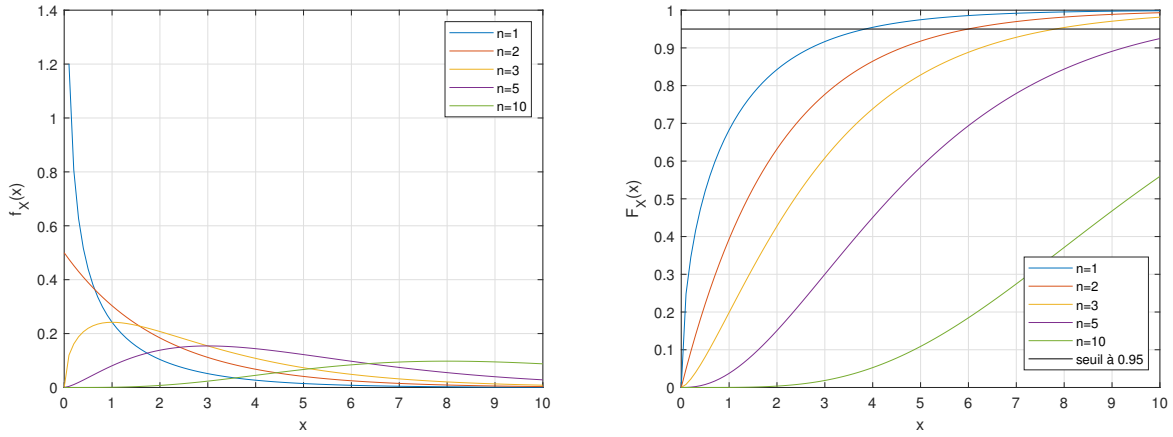


FIGURE 4 – Densité de probabilité (à gauche) et fonction de répartition (à droite) d'une loi du χ^2 pour différents degrés de liberté.

Degré de liberté n	$\chi_{0.95}^2(n)$	$\chi_{0.99}^2(n)$
1	3.84	6.63
2	5.99	9.21
3	7.81	11.34
5	11.07	15.09
10	18.31	23.21

TABLE 1 – Quartiles à 95 % et à 99 % de la loi du χ^2 à n degrés de liberté

Supposons à nouveau que lors de l'épisode n , l'action a a été choisie $n_a \leq n$ fois et que les récompenses r_1, \dots, r_{n_a} ont été obtenues. On considère le critère des moindres carrés permettant d'estimer m_a

$$j(m) = \sum_{n=1}^{n_a} (m - r_n)^2.$$

9. Quelle est la densité de probabilité de $j(m)$ pour $m = m_a$?
10. On considère l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(n)$ des valeurs de m telles que

$$\mathcal{M}_{0.95}(n) = \{m \mid j(m) \leq \chi_{0.95}^2(n_a)\}.$$

Cet ensemble est appelé intervalle de confiance à 95 % de l'estimateur $\hat{m}_a^{\text{MV}}(n)$. Justifier cette dénomination.

11. Donner l'expression des bornes de l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(n)$ en fonction de r_n , $n = 1, \dots, n_a$, et de $\chi_{0.95}^2(n_a)$.
12. On suppose que l'action a a été choisie 2 fois et que les récompenses obtenues sont $r_1 = 1$ et $r_2 = 2$. Donner les bornes de l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(2)$. L'action a a été choisie une nouvelle fois pour obtenir $r_3 = 2$. Donner les bornes de l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(3)$.
13. Comment la taille de l'intervalle $\mathcal{M}_{0.95}(n)$ évolue-t-elle avec n lorsque l'action a est choisie et lorsqu'elle n'est pas choisie ?
14. Proposer une stratégie de maximisation de la somme des récompenses obtenue sur un ensemble de N épisodes exploitant les bornes des intervalles de confiance associés à chacune des actions.

Examen - Modélisation - Estimation Paramétrique

L'usage des calculatrices est interdit. Seule une feuille de notes manuscrites A4 est autorisée. Les parties sont indépendantes. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses devront être soigneusement argumentées.

1 Modèle auto-régressif

On considère le modèle à temps discret

$$y_m(\boldsymbol{\theta}, k) = \theta_1 y^2(k-1) + \theta_2 y(k-2)$$

du système dynamique non-linéaire suivant

$$y(k) = \theta_1^* y^2(k-1) + \theta_2^* y(k-2) + \varepsilon(k)$$

où les $\varepsilon(k)$ sont des réalisations indépendantes et identiquement distribuées d'un bruit de moyenne nulle et $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^T$ est un vecteur de paramètres dont la vraie valeur est $\boldsymbol{\theta}^* = (\theta_1^*, \theta_2^*)^T$. On cherche à déterminer l'estimée $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ de $\boldsymbol{\theta}$ à partir de N mesures de la sortie $y(1), \dots, y(N)$ qui minimise l'erreur de prédiction

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{k=3}^N (y(k) - y_m(\boldsymbol{\theta}, k))^2 \\ &= \|\mathbf{y} - \mathbf{R}\boldsymbol{\theta}\|^2. \end{aligned}$$

1. Donner l'expression de \mathbf{y} et de \mathbf{R} .
2. Donner l'expression de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ minimisant $f(\boldsymbol{\theta})$ en fonction de \mathbf{y} et de \mathbf{R} .

2 Localisation d'une victime à l'aide d'une flotte de drones

Suite à un tremblement de terre, vous avez été chargé(e) par la sécurité civile d'une mission de localisation de survivants enfouis dans des décombres. Pour cela, vous allez exploiter le fait que les équipements électroniques (montres connectées, téléphones portables) des survivants vont continuer à émettre un rayonnement électromagnétique pendant une ou deux journées après la survenue du désastre. Vous disposez d'une flotte de N drones équipés de réseaux d'antennes capables de déterminer l'angle d'incidence d'une onde électromagnétique par rapport à la normale au réseau. A partir de la mesure des angles d'incidence des ondes reçues par les réseaux d'antennes, vous devez déterminer la position d'une victime.

Nous considérons un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ attaché à l'environnement. A un instant t_1 donné, la position des drones dans \mathcal{R} est $\mathbf{x}_k(t_1)$, $k = 1, \dots, N$. Nous supposons que les altitudes des drones sont égales, c'est-à-dire que $x_{3,k}(t_1) = h$, $k = 1, \dots, N$. Une victime se trouve à la position \mathbf{x} . Pour simplifier, nous supposons que la victime se trouve à la même altitude que les drones ($x_3 = h$) et qu'elle est statique. Les drones perçoivent une onde électromagnétique avec un angle d'incidence $\theta_k(t_1)$, $k = 1, \dots, N$ par rapport à (\mathbf{O}, \mathbf{i}) , dans le plan $(\mathbf{O}, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

1. Donner l'expression du critère à minimiser pour réaliser une estimation au sens des moindres carrés $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MC}}$ de \mathbf{x} à partir de $\theta_k(t_1)$, $k = 1, \dots, N$.
2. Est-il possible d'obtenir une expression explicite de $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MC}}$? Si non, quel type d'algorithme pouvez-vous utiliser pour obtenir une expression approchée de $\hat{\mathbf{x}}_{\text{MC}}$?
3. Les drones se déplacent à altitude constante et à l'instant t_2 , leurs positions sont $\mathbf{x}_k(t_2)$, $k = 1, \dots, N$. Ils réalisent une nouvelle mesure d'angles $\theta_k(t_2)$, $k = 1, \dots, N$. Quelle est l'expression de l'estimée au sens des moindres carrés de \mathbf{x} à partir de $\theta_k(t_1)$ et $\theta_k(t_2)$, $k = 1, \dots, N$?
4. Nous supposons maintenant que les bruits de mesure des angles sont décrits par des variables aléatoires Gaussiennes indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance σ^2 . Donner l'expression de l'estimée au sens du maximum de vraisemblance de \mathbf{x} à partir de $\theta_k(t_1)$, $k = 1, \dots, N$.

3 Calcul de gradient

On considère un système décrit par le modèle à temps discret suivant

$$\begin{cases} x_1(k+1) = p_1 x_1^2(k) + p_2 x_2(k) \\ x_2(k+1) = -p_3 x_1(k) x_2(k) \end{cases}$$

avec $\mathbf{x}(0) = (1, 0)^T$. La sortie mesurée du modèle est

$$y_m(\mathbf{p}, k) = x_1(k).$$

On souhaite réaliser une estimée au sens des moindres carrés du vecteur des paramètres $\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)^T$ à partir de mesures $y(1), \dots, y(N)$ obtenues sur le système. Pour cela, on cherche

$$\hat{\mathbf{p}}_{\text{MC}} = \arg \min_{\mathbf{p}} c(\mathbf{p})$$

avec

$$c(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^N (y(k) - y_m(\mathbf{p}, k))^2. \quad (1)$$

A l'aide d'une technique par état adjoint ou par code adjoint, proposez un algorithme ou un programme permettant de calculer le gradient du critère (1) de manière exacte.

4 Minimisation d'un critère quadratique

On cherche à calculer

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{H} \mathbf{x},$$

où \mathbf{H} est une matrice symétrique définie positive. Pour cela, on utilise la méthode du *gradient* avec optimisation *exacte* du pas.

1. Montrez que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ est la solution unique de ce problème.
2. Rappelez la structure d'un algorithme d'optimisation par la méthode du gradient.
3. On fixe une direction de descente \mathbf{p} . Quel sous-problème doit-on résoudre pour effectuer l'optimisation exacte du pas α . Montrez que la longueur du pas α que l'on obtient en faisant une optimisation exacte du pas est donnée par

$$\alpha = -\frac{\mathbf{p}^T \mathbf{g}}{\mathbf{p}^T \mathbf{H} \mathbf{p}},$$

où \mathbf{g} est le gradient de $f(\mathbf{x})$ en \mathbf{x} .

4. On considère le cas particulier où la matrice \mathbf{H} est la matrice diagonale suivante

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$. On considère un point de départ

$$\mathbf{x}_1 = \left(\frac{\sigma}{\lambda_1}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\lambda_n} \right)^T,$$

avec $\sigma = \pm 1$. Montrez qu'après la première itération de l'algorithme du gradient avec optimisation exacte du pas, on obtient

$$\mathbf{x}_2 = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \left(\frac{-\sigma}{\lambda_1}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\lambda_n} \right)^T.$$

Montrez qu'après l'itération $k + 1$, on obtient

$$\mathbf{x}_{k+1} = \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_1 + \lambda_n} \right)^k \left(\frac{(-1)^k \sigma}{\lambda_1}, 0, \dots, 0, \frac{1}{\lambda_n} \right)^T.$$

5. Que peut-on dire de la vitesse de convergence lorsque

- (a) $\lambda_1 = \lambda_n$,
- (b) $\lambda_1 \gg \lambda_n$.

5 Evaluation du gradient d'une fonction coût par rétro-propagation dans un réseau de neurones

Un réseau de neurones tel que celui représenté sur la figure 1 peut être considéré comme une manière d'implanter la composition de fonctions

$$F^L (F^{L-1} (\dots F^1 (\mathbf{x})))$$

où F^ℓ représente la couche $\ell = 1, \dots, L$ du réseau de neurones. Chaque fonction F^ℓ consiste en une partie linéaire impliquant une matrice \mathbf{W}^ℓ et une fonction d'activation non-linéaire f^ℓ appliquée élément par élément. L'entrée de la fonction d'activation de la couche ℓ est appelé vecteur de pré-activation \mathbf{z}^ℓ et est le résultat de la multiplication de l'entrée de la couche par $\mathbf{W}^{\ell T}$. La fonction d'activation f^ℓ est appliquée élément par élément aux coefficients de \mathbf{z}^ℓ pour obtenir le vecteur d'activation \mathbf{a}^ℓ . La couche 1 est la couche d'entrée alimentée par le vecteur d'entrée \mathbf{x} et la couche L est la couche de sortie fournissant le vecteur de sortie \mathbf{y} .

5.1 Propagation vers l'avant

La propagation vers l'avant de la couche $\ell - 1$ vers la couche ℓ des vecteurs d'activation s'effectue par le biais de la fonction F^ℓ telle que

$$\mathbf{a}^\ell = F^\ell (\mathbf{a}^{\ell-1})$$

où F^ℓ peut être décomposée en une partie linéaire et une partie non-linéaire. La partie linéaire évalue

$$\mathbf{z}^\ell = \mathbf{W}^{\ell T} \mathbf{a}^{\ell-1} + \mathbf{b}^\ell, \quad (2)$$

où \mathbf{W}^ℓ est une matrice de poids de taille $n_{\ell-1} \times n_\ell$ pour la couche ℓ et où $\mathbf{b}^{(\ell)}$ est un vecteur de biais de taille $n_\ell \times 1$.

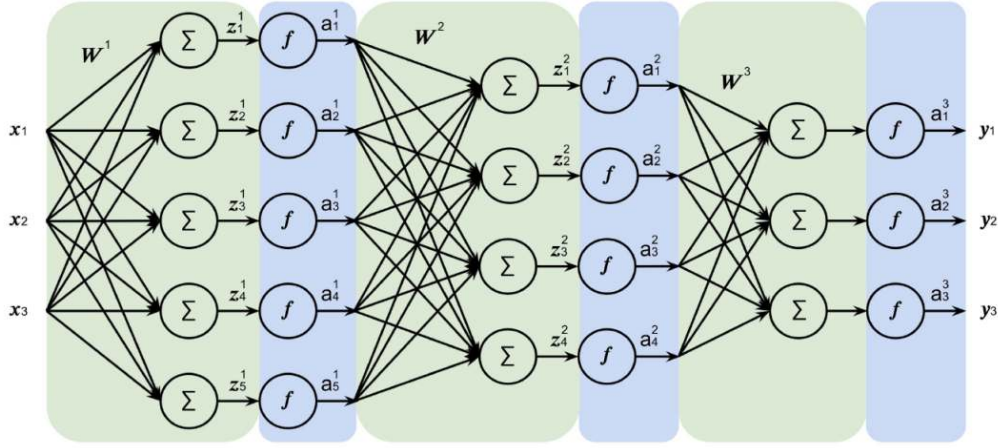


FIGURE 1 – Exemple de réseau de neurones à trois couches entièrement connecté. Chaque couche du réseau se compose d'une partie linéaire et d'une partie non linéaire. L'entrée est le vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ de taille 3×1 , qui est multiplié par la matrice \mathbf{W}^{1T} de taille 5×3 pour produire le vecteur de pré-activation $\mathbf{z}^1 = (z_1^1, \dots, z_5^1)^T = \mathbf{W}^{1T} \mathbf{x}$ de taille 5×1 . Une fonction d'activation non linéaire f^1 est appliquée à chaque élément z_i^1 du vecteur de pré-activation afin d'obtenir un vecteur d'activation $\mathbf{a}^1 = (a_1^1, \dots, a_5^1)^T$ tel que $a_i^1 = f(z_i^1)$. Le vecteur d'activation \mathbf{a}^1 est l'entrée de la deuxième couche. Des opérations similaires sont effectuées aux deuxième et troisième couches. La sortie du réseau \mathbf{y} est le vecteur d'activation de la troisième couche $\mathbf{y} = \mathbf{a}^3$.

1. Afin de simplifier les notations, construire une matrice $\overline{\mathbf{W}}^\ell$ à partir de \mathbf{W}^ℓ et de \mathbf{b}^ℓ et construire un vecteur $\overline{\mathbf{a}}^{\ell-1}$ déduit de $\mathbf{a}^{\ell-1}$ tel que $\mathbf{z}^\ell = \overline{\mathbf{W}}^{\ell T} \overline{\mathbf{a}}^{\ell-1}$.

Dans ce qui suit, le vecteur de biais n'est plus pris en compte dans (2). En outre, pour alléger les notations, \mathbf{W}^ℓ est utilisé à la place de $\overline{\mathbf{W}}^\ell$ et $\mathbf{a}^{\ell-1}$ à la place de $\overline{\mathbf{a}}^{\ell-1}$. La fonction d'activation non linéaire f^ℓ pour la couche ℓ opère sur chaque élément de \mathbf{z}^ℓ pour obtenir

$$\mathbf{a}^\ell = f^\ell(\mathbf{z}^\ell).$$

2. Écrire un algorithme simple effectuant la propagation vers l'avant de l'entrée \mathbf{x} à travers le réseau de neurones pour obtenir la sortie \mathbf{y} .
3. La fonction d'activation non linéaire considérée dans ce qui suit est la sigmoïde

$$f(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}. \quad (3)$$

Évaluer la dérivée par rapport à z de $f(z)$ donnée par (3) et montrer qu'elle peut être exprimée comme une fonction de $f(z)$.

5.2 Fonction coût

En apprentissage supervisé, un ensemble de d'apprentissage \mathcal{T} , contenant des paires $\mathcal{T} = \{(\mathbf{x}_{(i)}, \mathbf{y}_{(i)})_{i=1, \dots, N}\}$, est utilisé pour ajuster les paramètres du réseau de neurones de manière à minimiser une certaine fonction coût. Soit $\hat{\mathbf{y}}_{(i)} = F(\mathbf{x}_{(i)}, \mathcal{W})$ la sortie du réseau de neurones lorsqu'il est alimenté par $\mathbf{x}_{(i)}$. L'ensemble $\mathcal{W} = \{\mathbf{W}^1, \dots, \mathbf{W}^L\}$ contient tous les paramètres du réseau de neurones.

En considérant une paire $(\mathbf{x}_{(i)}, \mathbf{y}_{(i)})$ et la fonction coût quadratique, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{y}_{(i)}, \hat{\mathbf{y}}_{(i)}) &= \|\mathbf{y}_{(i)} - \hat{\mathbf{y}}_{(i)}\|^2 \\ &= \|\mathbf{y}_{(i)} - F(\mathbf{x}_{(i)}, \mathcal{W})\|^2. \end{aligned} \quad (4)$$

4. Expliquer pourquoi l'ajustement des paramètres du réseau de neurones est généralement effectué en considérant un ou plusieurs sous-ensembles de l'ensemble d'apprentissage au lieu d'une seule paire dans l'évaluation de la fonction coût

$$\mathcal{L}(\mathbf{y}_{\mathcal{M}}, \hat{\mathbf{y}}_{\mathcal{M}}) = \frac{1}{m} \sum_{i \in \mathcal{M}} \|\mathbf{y}_{(i)} - F(\mathbf{x}_{(i)}, \mathcal{W})\|^2 \quad (5)$$

où \mathcal{M} est un sous-ensemble de $m < N$ éléments de $\{1, \dots, N\}$.

5.3 Rétro-propagation des gradients

La minimisation de (5) par descente de gradient nécessite l'évaluation du gradient de \mathcal{L} par rapport à \mathbf{W}^ℓ , $\ell = 1, \dots, L$. Cette opération peut être réalisée efficacement par rétro-propagation.

Dans ce qui suit, nous supposons que \mathcal{L} représente $\mathcal{L}(\mathbf{y}_{(i)}, \hat{\mathbf{y}}_{(i)})$. Supposons que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}^\ell}$ soit disponible à la couche ℓ . L'objectif est d'évaluer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{W}^\ell}$ ainsi que $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}^{\ell-1}}$.

5. En utilisant la règle de dérivation des fonctions composées

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}^\ell} = \frac{\partial \mathbf{a}^{\ell T}}{\partial \mathbf{z}^\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}^\ell},$$

montrer que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}^\ell} = f^{\ell'}(\mathbf{z}^\ell) \odot \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}^\ell},$$

où $f^{\ell'}(\mathbf{z}^\ell)$ est la dérivée de f^ℓ appliquée à chaque élément de \mathbf{z}^ℓ et où \odot est le produit élément par élément de deux vecteurs

$$\mathbf{u} \odot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 v_1 \\ \vdots \\ u_n v_n \end{pmatrix}.$$

6. En utilisant à nouveau la règle de dérivation des fonctions composées, montrer que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}^{\ell-1}} = \mathbf{W}^\ell \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}^\ell}.$$

Pour évaluer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{W}^\ell}$, on applique une nouvelle fois la règle de dérivation des fonctions composées pour obtenir

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{W}^\ell} = \frac{\partial \mathbf{z}^{\ell T}}{\partial \mathbf{W}^\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}^\ell},$$

où

$$\frac{\partial \mathbf{z}^{\ell T}}{\partial \mathbf{W}^\ell} = \left[\frac{\partial z_1^\ell}{\partial \mathbf{W}^\ell}, \dots, \frac{\partial z_{n_\ell}^\ell}{\partial \mathbf{W}^\ell} \right]$$

est un vecteur de matrices et

$$\frac{\partial \mathbf{z}^{\ell T}}{\partial \mathbf{W}^\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}^\ell} = \sum_{i=1}^{n_\ell} \frac{\partial z_i^\ell}{\partial \mathbf{W}^\ell} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z_i^\ell}$$

est une matrice.

7. Montrer que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{W}^\ell} = \mathbf{a}^{\ell-1} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{z}^\ell} \right)^T.$$

Finalement, la rétro-propagation des gradients est initialisée par

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{a}^L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\mathbf{y}}_{(i)}}.$$

8. Evaluer $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \hat{\mathbf{y}}_{(i)}}$ pour la fonction coût quadratique (4).
9. Concevoir un algorithme pour effectuer l'évaluation de la fonction coût et la rétro-propagation des gradients.

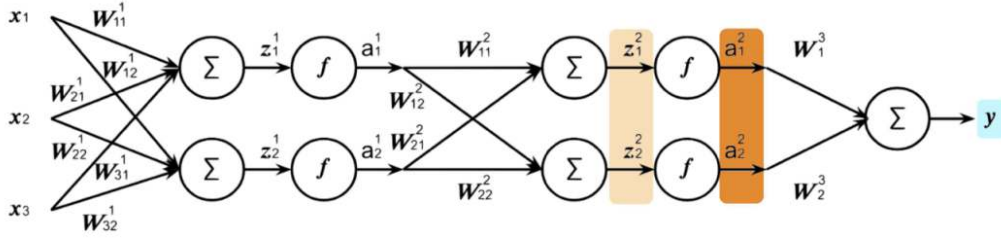


FIGURE 2 – Exemple de réseau de neurones à trois couches entièrement connecté.

10. Appliquer l'algorithme précédant au réseau de neurones de la figure 2 en considérant une fonction coût quadratique.

—oOo—