SAPHIRE
SCIENCES APPLIQUÉES EN PHYSIQUE ET INGÉNIERIE POUR LA RECHERCHE ET L'ENSEIGNEMENT

école normale supérieure paris-saclay

SAPHIRE
SCIENCES APPLIQUÉES EN PHYSIQUE ET INGÉNIERIE POUR LA RECHERCHE ET L'ENSEIGNEMENT

Examen final de probabilités 2020/2021

(Saph- 215) 2 heures

Ni document, ni ordinateur, ni téléphone portable, ni calculatrice ne sont autorisés. Il est conseillé de lire attentivement le sujet avant de commencer. Les réponses doivent être clairement argumentées et **il sera tenu compte de la présentation.**

Problème I Kangourou boxeur

Un éleveur australien de kangourous a un cheptel de $2N$ femelles et N mâles. Parmi ces kangourous il y en a qui ont la particularité d'être des boxeurs. Il y a 6% de boxeurs chez les mâles et $0,36\%$ chez les femelles.

1. *On choisit un kangourou au hasard dans le cheptel (sans connaître son sexe). Quelle est la probabilité qu'il soit boxeur ?*

2. *On met le kangourou sur un ring et on s'aperçoit que c'est un boxeur. Quelle est la probabilité pour que ce soit une femelle ?*

Problème II Myopathie de Duchenne

Le but de cet exercice est de déterminer la probabilité d'avoir un fils atteint de la myopathie quand son oncle a développé la maladie.

La myopathie de Duchenne est une maladie génétique dont la transmission récessive est liée au chromosome X. C'est à dire :

— les gènes malades sont situés sur le chromosome X ;

— ce gène est récessif. Un gène récessif s'exprime uniquement s'il y a deux gènes malades, ou s'il est le seul gène à pouvoir s'exprimer.

Comme le chromosome X est un chromosome sexuel, le gène s'exprime différemment pour un homme (XY) que pour une femme (XX) [1].

Lorsqu'un homme porte le gène de la myopathie sur le chromosome X, le gène s'exprime et il est porteur de la maladie. Lorsqu'une femme porte le gène de la myopathie un chromosome X, elle possède un autre gène dominant sain sur l'autre chromosome X, donc elle ne développe pas la maladie. En effet, comme cette maladie est très rare et l'espérance de vie des malades très faible, elle n'est transmise que par les femmes, et seuls les hommes peuvent être touchés.

Une femme porteuse du gène de la maladie aura à chaque grossesse 50 % de risques d'avoir un fils atteint et 50 % de risques d'avoir une fille porteuse d'une seule copie du gène de la myopathie.

On s'intéresse à la famille de la figure ci-dessus. Dans cette famille on sait que H_1^2 est atteint par la myopathie et que H_1^3, H_2^3 et H_3^3 sont sains. On souhaite connaître la probabilité que H_1^4 et H_2^4 soient malades.

1. *Sans faire de calcul pensez vous que H_1^4 et H_2^4 ont la même probabilité d'être malade ?*

2. *Sachant que H_1^2 est malade et que H_1^1 est sain, déterminer la probabilité que F_1^1 soit porteuse du gène malade.*

3. *Déterminer la probabilité que l'enfant à naître H_2^4 soit atteint de la myopathie sachant H_1^2 malade (ou mort de la maladie) et que H_1^1 , H_3^2, H_5^3 sont sains.*

1. On rappelle qu'il existe seulement deux sortes de chromosomes sexuels : X et Y.

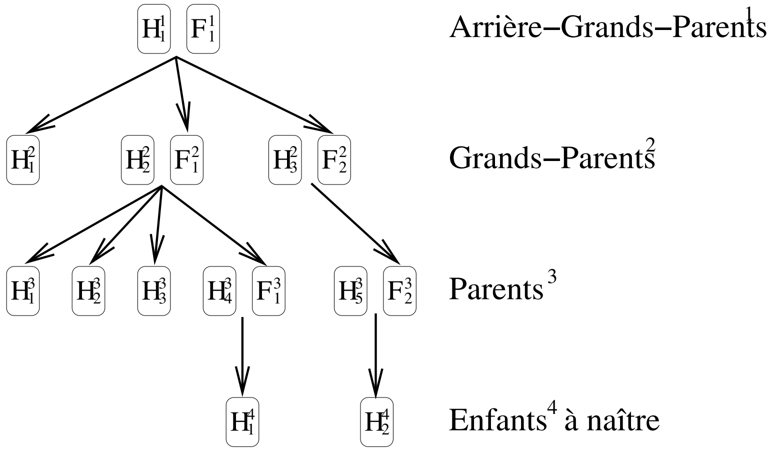

FIGURE 1 – Arbre généalogique d'une famille : le chiffre en exposant indique la génération à laquelle appartient la personne, le chiffre en indice permet de différentier les personnes d'une même génération. Par exemple H_3^2 signifie qu'il s'agit du troisième ($_3$) homme de la génération des grands-parents (^{2})

4. *Déterminer la probabilité que l'enfant à naître H_1^4 soit atteint de la myopathie sachant H_1^2 malade (ou mort de la maladie) et que H_1^1 , H_2^2, H_1^3, H_2^3, H_3^3, H_4^3 sont sains*[2]. *Commenter*

Problème III — Vecteur gaussien.

Un vecteur $\boldsymbol{x}$ de dimension 3, $(x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}}$ est caractérisé par une distribution de probabilité gaussienne multi-variée.

$$f_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{m_x}, \boldsymbol{R_x}) = (2\pi)^{-3/2}|det(\boldsymbol{R_x})|^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m_x})^{\mathrm{t}}\boldsymbol{R_x}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m_x})\right)$$

On désigne par $\boldsymbol{m_x}$ le vecteur contenant les moyennes $(E\{x_1\}, E\{x_2\}, E\{x_3\})^{\mathrm{t}}$ et par $\boldsymbol{R_x}$ la matrice de covariance que l'on choisi diagonale, $\boldsymbol{R_x} = \mathrm{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_3^2)$. À partir de $\boldsymbol{x}$, on construit un vecteur de dimension 2, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{x}$ où $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

1. *Calculer le vecteur $\boldsymbol{m_y} = (E\{y_1\}, E\{y_2\})^{\mathrm{t}}$*

2. *Calculer la matrice de covariance $\boldsymbol{R_y}$, en déduire la densité $f_{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}|\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, I)$.*

3. *Calculer la densité marginale $f_{y_1}(y_1|\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, I)$.*

Problème IV — Le miroir de Cauchy.

Partie A — Une variable réelle x est caractérisée par la distribution de probabilité de Cauchy dont la densité est:

$$f(x\,|\,I) = \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+x^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

1. *Calculer la densité de probabilité pour la variable $y = 2\,x$. On la notera f_2.*

2. *Calculer la densité de probabilité pour la variable $y_n = n\,x$ où n est un entier. On la notera f_n.*

2. Calculer tout d'abord la probabilité que F_1^2 soit porteuse de la maladie sachant que sa mère F_1^1 est porteuse et que H_1^1 , H_2^2, H_1^3, H_2^3 et H_3^3 sont sains

Partie B — n variables réelles x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) sont indépendamment et identiquement distribuées selon la même distribution de probabilité de Cauchy (1). On donne :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, e^{i\,u\,x}\, \mathrm{d}x = \pi\, e^{-|u|}\,, \qquad u \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

3. *Montrer que* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, e^{2\,i\,u\,x}\, \mathrm{d}x$ *est la transformée de Fourier d'une certaine fonction que l'on précisera.*

4. *Déterminer la densité de probabilité pour la variable* $z = x_1 + x_2$*. On la notera* g*.*

5. *Généraliser au cas de la variable* $z_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$*. On notera sa densité de probabilité* g_n*.*

6. *Comparer* g_n *et* f_n*. Pouvait-on s'attendre à ce résultat ?*

7. *Déterminer la distribution de probabilité pour la variable* $v = \frac{1}{n}\, z_n$ *et commenter le résultat.*

Partie C — Application au miroir de Cauchy. Vous êtes adossé à un long mur rectiligne et vous faites face à un miroir plan vertical sur lequel vous dirigez le faisceau d'une lampe que vous allumez à intervalles réguliers. Ce faisceau est réfléchi par le miroir et vient frapper le mur en un point d'abscisse x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$, voir la figure ci-dessous). L'angle formé par le faisceau incident et le faisceau réfléchi est θ et l'on choisit, pour simplifier, $x_0 = 0$ et $y_0 = 1$.

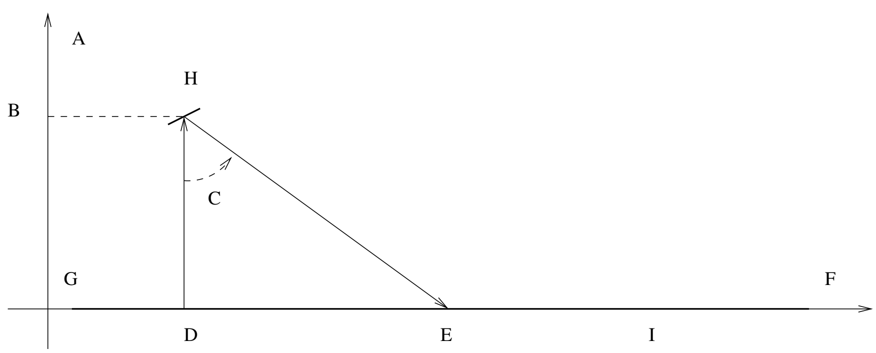

FIGURE 2 – *Principe du miroir de Cauchy (vue de dessus)*

Le miroir peut tourner autour d'un axe vertical et votre petit-frère, qui a décidé de vous embêter, le fait tourner d'une manière imprévisible entre deux allumages consécutifs de la lampe, si bien que θ peut prendre n'importe quelle valeur entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$.

8. *Quelle distribution de probabilité pour* θ *peut-on choisir pour traduire l'incertitude dans laquelle vous êtes à chaque fois que vous allumez la lampe ? Donner l'allure des graphes de sa densité et de sa fonction de répartition.*

9. *En déduire la distribution de probabilité pour les variables* x_i *(on rappelle que la dérivée de la fonction* $\arctan(x)$ *est* $1/(1+x^2)$*).*

10. *Que peut-on dire du comportement de la moyenne des abscisses des points d'impact* $v = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ *?*