

3M101 - Projet Le Brachistochrone

Benjamin Richard, Louis Christienne,
Miadantsoa Rasoloarivony, Matthieu Gallo

5 mai 2019

Table des matières

1	Principe de Fermat et optique géométrique	3
1.1	Le mouvement de la bille	3
1.2	Principe de Fermat et loi de Snell-Descartes	4
1.3	Analogie avec le problème du brachistochrone	6
2	Introduction au calcul des variations	8
2.1	Formulation du temps de parcours	8
2.2	L'équation d'Euler-Lagrange	9
2.3	Application au brachistochrone	12
3	Étude d'une fonction : la cycloïde	14
4	Exploration des caractéristiques de la cycloïde	17
4.1	Détermination du rayon de la cycloïde	17
4.2	Temps de trajet sur divers chemins	18
	Bibliographie	22
	Appendices	23
A	Code source de production de la courbe cycloïde	23

Introduction

Une bille est placée en hauteur sur un rail, on suppose qu'elle glisse sans frottement et soumise uniquement à la gravité jusqu'au point d'arrivée, plus bas, à la fin du rail. Pour des points de départ et d'arrivée fixes, quelle doit être l'allure du rail pour que le temps de trajet de la bille soit le plus petit possible ?

Cette question fut résolue par Jean Bernoulli à la fin du XVII^{ième} siècle et donna naissance au *calcul des variations*, une branche de l'analyse fonctionnelle d'une grande importance en géométrie différentielle et en physique mathématique.

Nous allons à notre tour tenter de résoudre ce problème via deux approches distinctes.

Notre premier contact avec le problème sera basée sur une analogie nous permettant de faire appel au principe de Fermat et aux lois de l'optique géométrique. Ce fut historiquement cette approche qui apporta la solution à Jean Bernoulli.

Dans un second temps, nous considérerons une généralisation du problème et notre recherche d'une condition d'"extrémisation" d'une fonctionnelle nous mènera à l'équation centrale du calcul des variations, l'équation d'Euler-Lagrange. La solution concrète au problème du brachistochrone nous sera fournie par application de cette équation à notre situation.

Chapitre 1

Principe de Fermat et optique géométrique

1.1 Le mouvement de la bille

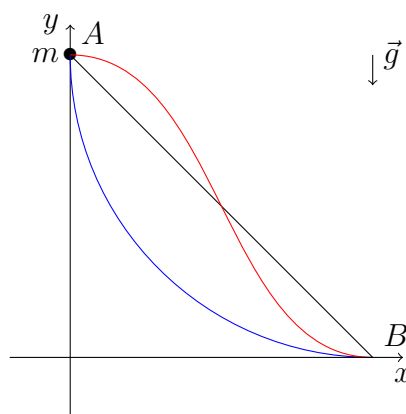


FIGURE 1.1 – Exemples de chemins dans le problème du brachistochrone

Dans notre problème nous étudions une bille de masse m supposée ponctuelle placée sans vitesse initiale au point $A(0, 1)$ qui descend sans frottement suivant un chemin continu dans le plan (xOy) jusqu'au point $B(1, 0)$. Elle n'est soumise qu'à un champ de gravité $\mathbf{g} = -g\mathbf{u}_y$ constant en tout point de l'espace.

Nous voulons déterminer quel est le chemin entre A et B qui minimise le temps de parcours de la bille. La conservation de l'énergie mécanique nous permet déjà de déterminer la vitesse de la bille en tout point.

Proposition 1.1.1. *Pour tout point $M(x, y)$ appartenant au chemin emprunté par la bille, la vitesse $v(M)$ de la bille en ce point M est*

$$|v(x, y)| = \sqrt{2g(1 - y)} .$$

Démonstration. Soit $E(x, y) = E_c(x, y) + E_p(x, y)$ l'énergie mécanique de la bille au point $M(x, y)$, avec $E_c(x, y) = \frac{1}{2}mv^2(x, y)$ son énergie cinétique et $E_p(x, y) = mgy$ son énergie potentielle. D'après la conservation de l'énergie mécanique, pour tout point M de l'espace, $E(M) = E(A) = E(0, 1) = mg$ car $v(A) = 0$ par hypothèse, d'où

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(x, y) + mgy &= mg , \\ \iff v^2(x, y) &= 2g(1 - y) , \\ \iff |v(x, y)| &= \sqrt{2g(1 - y)} . \end{aligned}$$

□

On remarquera que la vitesse en $M(x, y)$ ne dépend que de la deuxième coordonnée de M . Autrement dit, la vitesse de la bille ne dépend que de la hauteur à laquelle elle se trouve.

1.2 Principe de Fermat et loi de Snell-Descartes

Nous nous écartons temporairement de notre problème concernant le temps de parcours d'une bille matérielle pour nous intéresser au comportement de la lumière dans des milieux où sa vitesse varie. Nous établirons ensuite une analogie entre notre problème initial et une situation d'optique simple, nous permettant de faire usage des résultats que nous allons démontrer dans cette partie.

On s'intéresse à la trajectoire du rayon lumineux reliant A à B en plaçant une interface horizontale entre ces deux points séparants deux milieux où la lumière se propage à une vitesse différente (cf. figure 1.2).

On accepte le principe suivant :

Postulat 1.2.1 (Principe de Fermat). *La lumière emprunte la trajectoire qui minimise le temps de parcours.*

Ce principe va nous permettre de montrer un résultat important d'optique géométrique :

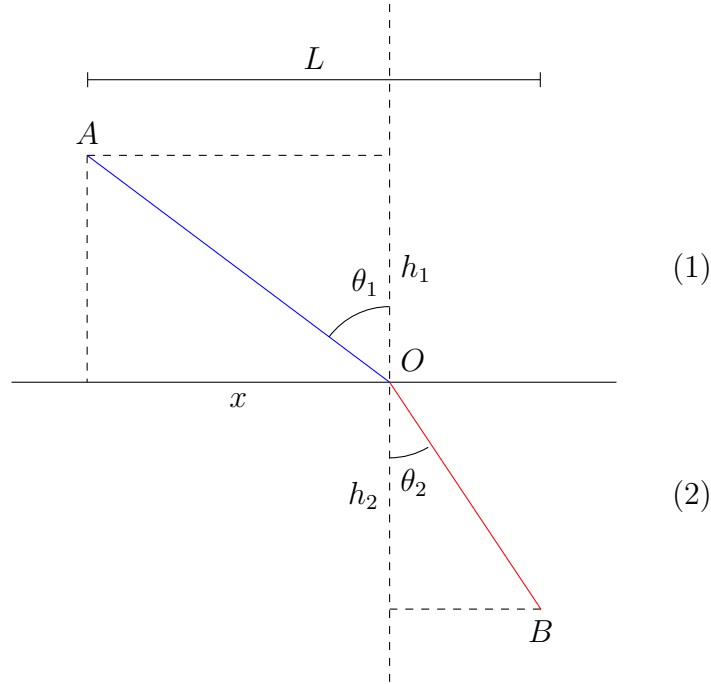


FIGURE 1.2 – Passage d'un dioptre

Théorème 1.2.2 (Loi de Snell-Descartes). *En préservant les notations de la figure 1.2, avec v_i la vitesse de la lumière dans le milieu i , la trajectoire de la lumière en présence d'un dioptre séparant deux milieux satisfait l'équation*

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} .$$

Démonstration. Le temps de parcours $t(x)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} t(x) &= \frac{AO}{v_1} + \frac{OB}{v_2} \\ &= \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (L - x)^2}}{v_2} . \end{aligned}$$

On s'intéresse à la dérivée de cette fonction t :

$$t'(x) = \frac{x}{v_1 \sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{L - x}{v_2 \sqrt{h_2^2 + (L - x)^2}} .$$

On remarque $\frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} = \sin(\theta_1)$ et $\frac{L - x}{\sqrt{h_2^2 + (L - x)^2}} = \sin(\theta_2)$, d'où

$$t'(x) = \frac{\sin(\theta_1)}{v_1} - \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} .$$

D'après le principe de Fermat, le chemin emprunté par la lumière est tel que t soit minimal, donc

$$\begin{aligned} t'(x) &= 0 , \\ \iff \frac{\sin(\theta_1)}{v_1} &= \frac{\sin(\theta_2)}{v_2} . \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

1.3 Analogie avec le problème du brachistochrone

Si l'on revient maintenant au problème du brachistochrone, on remarque que la trajectoire que doit adopter la bille pour minimiser son temps de parcours est celle qui serait adoptée par un rayon lumineux partant de A pour rejoindre B si la vitesse de la lumière variait continument au fur et à mesure que le rayon descend, ce qui revient à dire que la lumière traverse n dioptries avec $n \rightarrow \infty$, respectant à chaque fois la loi de Snell-Descartes avec $v(y) = \sqrt{2g(1-y)}$ d'après l'équation 1.1.1.

Proposition 1.3.1. *Le graphe dérivable $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ reliant $A(0, 1)$ à $B(1, 0)$ qui résout le problème du brachistochrone (minimise le temps de trajet d'une bille suivant les conditions posées dans la section 1.1) est solution de l'équation différentielle*

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2} \sqrt{2g(1-y)}} = A \iff (y')^2(1-y) = y + B ,$$

avec A et B des constantes.

Heuristique. On se place sur le schéma 1.3. La loi de Snell-Descartes nous donne donc $\frac{\sin(\theta_i)}{v_i} = C^{\text{te}}$ et donc, dans le cas continu, en tout point M :

$$\frac{\sin(\theta(M))}{v(M)} = A$$

avec $\theta(M)$ l'angle entre la verticale et la tangente à la courbe au point M , $v(M)$ la vitesse de la bille au point M et A une constante.

En se plaçant dans le triangle rectangle dont l'hypoténuse est $d\gamma$ et les côtés dx et dy , on a

$$\begin{aligned} \sin(\theta(M)) &= \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} . \end{aligned}$$

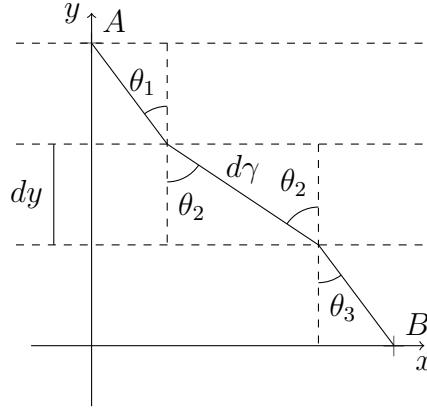


FIGURE 1.3 – Passage de $n = 2$ dioptries

En faisant tendre les dimensions de ce triangle vers 0, on obtient

$$\sin(\theta(M)) = \frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2}} .$$

En revenant à l'équation précédente et en utilisant l'équation 1.1.1, on obtient bien

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (y')^2} \sqrt{2g(1 - y)}} = A ,$$

qui peut aisément être ramenée à l'équation $(y')^2(1 - y) = y + B$ avec B une constante. \square

Cette analogie avec l'optique géométrique nous a permis de parvenir à une équation différentielle sur le chemin dont nous verrons plus loin qu'elle est celle d'une cycloïde.

Nous allons maintenant nous intéresser au problème sous un autre angle, introduire les bases du calcul des variations et montrer que l'on peut également obtenir cette équation différentielle par une approche purement mathématique.

Chapitre 2

Introduction au calcul des variations

2.1 Formulation du temps de parcours

On conserve les grandeurs définies dans la section 1.1. On a déjà montré que la vitesse de la bille en tout point $M(x, y)$ est $|v(y)| = \sqrt{2g(1-y)}$ (cf. équation 1.1.1).

Proposition 2.1.1. *Soit $\gamma : [0, C] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le chemin C^1 sur lequel se déplace la bille. Soit $T(\gamma)$ le temps de parcours de la bille sur le chemin γ .*

On a

$$T(\gamma) = \int_0^C \frac{|\gamma'(s)|}{|v(\gamma_2(s))|} ds .$$

Démonstration. On a $|v(\gamma(s(t)))| = |v(\gamma_2(s(t)))| = \left| \frac{d\gamma(s(t))}{dt} \right| = s'(t)|\gamma'(s(t))|$ (s croît avec le temps, donc $s'(t) \geq 0$). D'où

$$T(\gamma) = \int_{t_A=0}^{t_B} dt = \int_0^{t_B} \frac{s'(t)|\gamma'(s(t))|}{|v(\gamma_2(s(t)))|} dt .$$

Le changement de variable $s = s(t)$, $ds = s'(t) dt$ nous donne alors

$$T(\gamma) = \int_0^C \frac{|\gamma'(s)|}{|v(\gamma_2(s))|} ds .$$

□

Dans le cas où notre chemin prend une forme plus simple de graphe d'une fonction réelle, l'écriture du temps de parcours peut être simplifiée :

Proposition 2.1.2. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le chemin C^1 sur lequel se déplace la bille, de la forme $\gamma(x) = (x, y(x))$ avec $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, alors $T(\gamma)$ ne dépend que de y et

$$T(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(1 - y(x))}} dy$$

Démonstration. On a $\gamma(x) = (x, y(x))$

On en déduit $\gamma'(x) = (1, y'(x))$ et donc $|\gamma'(x)| = \sqrt{1 + (y'(x))^2}$. Par ailleurs, l'équation 1.1.1 nous donne bien $v(y(x)) = \sqrt{2g(1 - y(x))}$, d'où le résultat. \square

2.2 L'équation d'Euler-Lagrange

Peut-on trouver une condition sur y pour que $T(y)$ soit minimal? Une telle condition nous donnerait la solution du problème du brachistochrone, ou tout du moins une piste de solution.

Afin de mettre en évidence une telle condition, nous allons nous intéresser à un cas plus général

On pose $\mathcal{L} : C^\infty([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{L}(y) = \int_0^1 L(y(x), y'(x)) dx$$

avec $L \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On pose ensuite $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $F(\varepsilon) = \mathcal{L}(y + \varepsilon\varphi)$ pour un y donné avec $\varphi \in C_c^\infty([0, 1], \mathbb{R})$

Proposition 2.2.1. La fonction F est dérivable et de dérivée

$$\begin{aligned} F'(\varepsilon) &= \int_0^1 \partial_1 L(y(x) + \varepsilon\varphi(x), y'(x) + \varepsilon\varphi'(x))\varphi(x) dx \\ &\quad + \int_0^1 \partial_2 L(y(x) + \varepsilon\varphi(x), y'(x) + \varepsilon\varphi'(x))\varphi'(x) dx \end{aligned}$$

Démonstration. On s'intéresse à la fonction $\frac{dF}{d\varepsilon}$. Si elle existe, alors

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 L(y(x) + \varepsilon\varphi(x), y'(x) + \varepsilon\varphi'(x)) dx \\ &= \frac{d}{d\varepsilon} \int_0^1 f(\varepsilon, x) dx, \end{aligned}$$

avec $f : \mathbb{R} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(\varepsilon, x) = L(y(x) + \varepsilon\varphi(x), y'(x) + \varepsilon\varphi'(x))$.

- On fixe $\varepsilon \in \mathbb{R}$, soit $z = y + \varepsilon\phi \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. Or $[0, 1]$ est un compact et z est continue sur ce compact donc $z([0, 1])$ est compact. Puisque z' est continue aussi, $z'([0, 1])$ est un compact aussi. On en déduit donc que $z([0, 1]) \times z'([0, 1])$ et puisque L est continue, $x \rightarrow f(\varepsilon, x)$ est intégrable sur $[0, 1]$.
- Puisque L est C^1 , le même raisonnement peut être fait pour $\frac{\partial f}{\partial \varepsilon} f(\varepsilon, x)$, qui peut être bornée par une fonction de x intégrable sur $[0, 1]$.
- On fixe $x \in [0, 1]$, L est C^1 sur \mathbb{R}^2 donc $\varepsilon \rightarrow f(\varepsilon, x)$ est dérivable sur \mathbb{R} de dérivée

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} &= \partial_1 L(y(x) + \varepsilon\phi(x), y'(x) + \varepsilon\phi'(x))\phi(x) \\ &\quad + \partial_2 L(y(x) + \varepsilon\phi(x), y'(x) + \varepsilon\phi'(x))\phi'(x) \end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivation sous l'intégrale, F est dérivable sur \mathbb{R} et

$$\begin{aligned} F'(\varepsilon) &= \int_0^1 \partial_1 L(y(x) + \varepsilon\phi(x), y'(x) + \varepsilon\phi'(x))\phi(x) \, dx \\ &\quad + \int_0^1 \partial_2 L(y(x) + \varepsilon\phi(x), y'(x) + \varepsilon\phi'(x))\phi'(x) \, dx . \end{aligned}$$

□

On suppose maintenant que y est un extremum de \mathcal{L} . Cela implique $F'(0) = 0$. Or

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_0^1 [\partial_1 L(y(x), y'(x))\phi(x) + \partial_2 L(y(x), y'(x))\phi'(x)] \, dx \\ &= 0 . \end{aligned}$$

C'est cette égalité qui va nous permettre de démontrer l'équation d'Euler-Lagrange. Néanmoins nous allons avoir besoin d'un résultat intermédiaire, lui même d'une grande importance, afin d'atteindre notre objectif :

Théorème 2.2.2 (Lemme fondamental du calcul des variations). *Soit $\psi \in C^0([a, b], \mathbb{R})$, si*

$$\forall h \in C_c^\infty(]a, b[, \mathbb{R}), \quad \int_a^b \psi(x)h(x) \, dx = 0 ,$$

alors, $\psi = 0$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde :

On suppose que les hypothèses du théorème sont vérifiées et qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\psi(c) \neq 0$. Quitte à prendre $\delta = -\psi$, on peut supposer $\psi(c) > 0$. Par continuité de ψ , il existe $l > 0$ tel que $\forall x \in [c-l, c+l]$, $\psi(x) > 0$.

On pose maintenant

$$h(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{1}{\varepsilon^2 - |x-c|^2}\right\} & \text{si } |x-c| < l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Il est clair que $h \in C_c^\infty(]a, b[, \mathbb{R})$. D'où

$$\int_a^b \psi(x)h(x) \, dx = \int_{c-l}^{c+l} \psi(x)h(x) \, dx > 0$$

car c'est l'intégrale d'une fonction positive non identiquement nulle, donc contradiction. \square

On pose $f(x) = \partial_2 L(y(x), y'(x))$. On notera $(\partial_2 L)' = f'$.

Théorème 2.2.3 (Equation d'Euler-Lagrange). *Soit y un extremum de \mathcal{L} , alors $x \rightarrow y(x)$ satisfait l'équation différentielle*

$$\forall x \in [0, 1], \partial_1 L(y(x), y'(x)) - (\partial_2 L)'(y(x), y'(x)) = 0.$$

Démonstration. On fait l'intégration par parties du deuxième membre de $F'(0)$:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \partial_2 L(y(x), y'(x)) \varphi'(x) \, dx \\ &= [\partial_2 L(y(x), y'(x)) \varphi(x)]_0^1 - \int_0^1 (\partial_2 L)'(y(x), y'(x)) \varphi(x) \, dx \\ &= \int_0^1 -(\partial_2 L)'(y(x), y'(x)) \varphi(x) \, dx. \end{aligned}$$

En effet, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ car φ est à support compact sur $]0, 1[$.

On en déduit que $\forall \varphi \in C_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} F'(0) &= \int_0^1 [\partial_1 L(y(x), y'(x)) - (\partial_2 L)'(y(x), y'(x))] \varphi(x) \, dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'après le lemme fondamental du calcul des variations, on en déduit que

$$\forall x \in [0, 1], \partial_1 L(y(x), y'(x)) - (\partial_2 L)'(y(x), y'(x)) = 0.$$

\square

Nous allons maintenant mettre en évidence un corollaire de l'équation d'Euler-Lagrange qui nous permettra d'aboutir bien plus rapidement à l'équation différentielle que nous recherchons lorsque nous l'appliquerons au problème du brachistochrone.

Corollaire 2.2.4. *Soit y un extremum de \mathcal{L} , alors la fonction $x \rightarrow L(y(x), y'(x)) - \partial_2 L(y(x), y'(x))y'(x)$ est constante.*

Démonstration. Prenons la dérivée de cette fonction :

$$\begin{aligned} & [L(y(x), y'(x)) - \partial_2 L(y(x), y'(x))y'(x)]' \\ &= \partial_1 L(y(x), y'(x))y'(x) - [\partial_2 L(y(x), y'(x))]y'(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

d'après l'équation d'Euler-Lagrange 2.2.3. □

2.3 Application au brachistochrone

On souhaite maintenant appliquer l'équation d'Euler-Lagrange à un chemin y minimisant le temps $T(y)$ défini plus haut.

Remarque. *Dans le cas général, la fonction L était définie sur \mathbb{R}^2 . Dans le cas du brachistochrone, la fonction $\frac{\sqrt{1+(y'(x))^2}}{\sqrt{2g(1-y(x))}}$ n'est pas définie sur \mathbb{R}^2 entier, $y(x)$ doit être strictement supérieur à 1. Nos résultats ne sont donc pas directement applicables en toute rigueur.*

La théorie générale du calcul des variations dépassant le cadre de ce projet, nous négligerons cette difficulté.

Le résultat que nous allons montrer est identique à celui que nous avons trouvé par des méthodes physiques issues de l'optique géométrique, mais les théorèmes qui ont été montrés dans ce chapitre vont nous permettre d'en faire une preuve rigoureuse.

Proposition 2.3.1 (Identique à la proposition 1.3.1). *Le chemin continu $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ reliant $A(0, 1)$ à $B(1, 0)$ qui résout le problème du brachistochrone (minimise le temps de trajet d'une bille suivant les conditions posées dans la section 1.1) est solution de l'équation différentielle*

$$\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{2g(1-y)}} = A \iff (y')^2(1-y) = y + B,$$

avec A et B des constantes.

Démonstration. On rappelle

$$T(y) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(1 - y(x))}} dx .$$

Puisque y est un extremum de T , on applique le corollaire 2.2.4 en posant A une constante :

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{1 + (y'(x))^2}}{\sqrt{2g(1 - y(x))}} - \frac{(y'(x))^2}{\sqrt{1 + (y'(x))^2} \sqrt{2g(1 - y(x))}} &= A , \\ \iff \frac{1}{\sqrt{1 + (y'(x))^2} \sqrt{2g(1 - y(x))}} &= A , \\ \iff 2g(1 + (y'(x))^2)(1 - y(x)) &= \frac{1}{A^2} , \\ \iff (y'(x))^2(1 - y(x)) &= y(x) + B . \end{aligned}$$

□

Cette équation différentielle est déjà connue depuis longtemps lorsque Jean Bernoulli fournit la solution du problème du brachistochrone : c'est l'équation d'une courbe cycloïde.

Chapitre 3

Étude d'une fonction : la cycloïde

La courbe cycloïde est définie comme la trajectoire d'un point sur une roue qui roule sans glisser. Historiquement ce groupe de fonction était déjà étudié par Galilée. On connaissait donc déjà sa relation différentielle et juste eu à l'identifier à la brachistochrone.

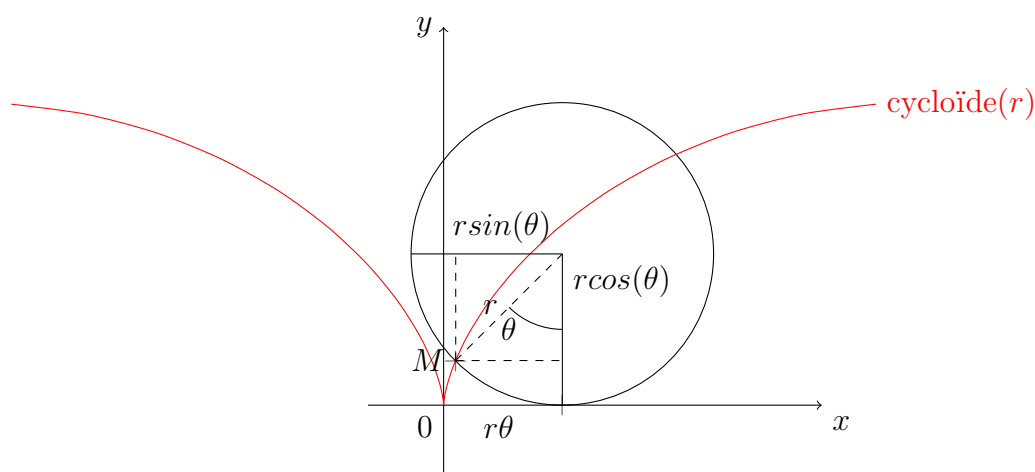


FIGURE 3.1 – Mouvement d'un point sur une roue

On peut décomposer ce mouvement entre le mouvement du point par rapport au centre de la roue et le mouvement du centre de la roue. On prendra les notations de la figure 3.1.

Tout d'abord le mouvement du centre de la roue donne

$$\begin{cases} x_c &= r\theta \\ y_c &= r \end{cases}$$

et le mouvement du point par rapport au centre de la roue donne

$$\begin{cases} x_p &= -r \sin(\theta) \\ y_p &= -r \cos(\theta) \end{cases}$$

Par un changement de référentiel, on obtient l'équation de la cycloïde de paramètre r le rayon de la roue qui la décrit.

$$\begin{cases} x &= r(\theta - \sin(\theta)) \\ y &= r(1 - \cos(\theta)) \end{cases}$$

On a là une courbe paramétrée du style $(x(\theta), y(\theta))$ or on a établi l'équation 1.3.1 dans le cas d'un graphe $(x, y(x))$. Il faut donc de s'y ramener.

Pour définir une fonction du style $y(x)$ il faudra utiliser x^{-1} et donc s'assurer qu'elle est bien définie.

Proposition 3.0.1. $x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \theta \longmapsto x(\theta)$ est une bijection.

Démonstration. On étudie $x'(\theta) = r(1 - \cos(\theta))$. $\cos(\theta) \in [-1; 1]$ donc $x'(\theta) \geq 0$. $x'(\theta) = 0 \Rightarrow \theta \in \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ensemble discret. $x(\theta)$ est donc strictement croissante. Ensuite $\lim_{\pm\infty} x(\theta) = \pm\infty$. Ce qui donne bien $x(\theta)$ bijection. \square

On peut alors définir une fonction $\tilde{y}(X) = y(x^{-1}(X))$. Et en la manipulant un peu, on a :

$$\begin{aligned} (\tilde{y}')^2(X) &= \frac{1}{x'(x^{-1}(X))^2} (y')^2(x^{-1}(X)) \\ &= \frac{1}{y(x^{-1}(X))^2} r^2 \sin^2(x^{-1}(X)) \\ &= \frac{1}{\tilde{y}(X)^2} r(1 - \cos(x^{-1}(X))) r(1 + \cos(x^{-1}(X))) \\ &= \frac{1}{\tilde{y}(X)} r(1 + \cos(x^{-1}(X))) . \end{aligned}$$

En multipliant par $\tilde{y}(X)$ on obtient :

$$\begin{aligned} (\tilde{y}')^2(X) \tilde{y}(X) &= r(1 + \cos(x^{-1}(X))) \\ &= 2r - \tilde{y}(X) . \end{aligned}$$

Et en posant $\tilde{y}_n = \tilde{y} + 1$ on a bien :

$$(\tilde{y}'_n)^2(1 - \tilde{y}_n) = \tilde{y}_n - 2r - 1 .$$

On reconnaît là l'équation différentielle de la brachistochrone.

Il reste maintenant à déterminer le paramètre r donnant la courbe entre A et B spécifiques. Cela ne se résout que par le calcul numérique qui sera traité dans la prochaine section.

Chapitre 4

Exploration des caractéristiques de la cycloïde

4.1 Détermination du rayon de la cycloïde

On s'intéresse à la courbe cycloïde partant de $A(0, 0)$ à $B(1, -1)$ d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x &= r(\theta - \sin(\theta)) \\ y &= r(\cos(\theta) - 1) \end{cases} .$$

La première étape pour déterminer le rayon de la cycloïde est de déterminer la valeur du paramètre θ au point d'arrivée B dans l'équation paramétrique de la cycloïde. On souhaite donc se débarrasser (temporairement) du rayon R . Or, en posant θ_B la valeur du paramètre θ en B , on a

$$\begin{aligned} \frac{y_B}{x_B} = -1 &= \frac{\cos(\theta_B) - 1}{\theta_B - \sin(\theta_B)} , \\ \iff \frac{\cos(\theta_B) - 1}{\theta_B - \sin(\theta_B)} + 1 &= 0 . \end{aligned}$$

On détermine numériquement, par la méthode de Newton (cf. Appendice A), la valeur de $\theta_B = 2.41$. On détermine ensuite $R = \frac{y_B}{\cos(\theta_B) - 1} = -\frac{1}{\cos(\theta_B) - 1} = 0.57$.

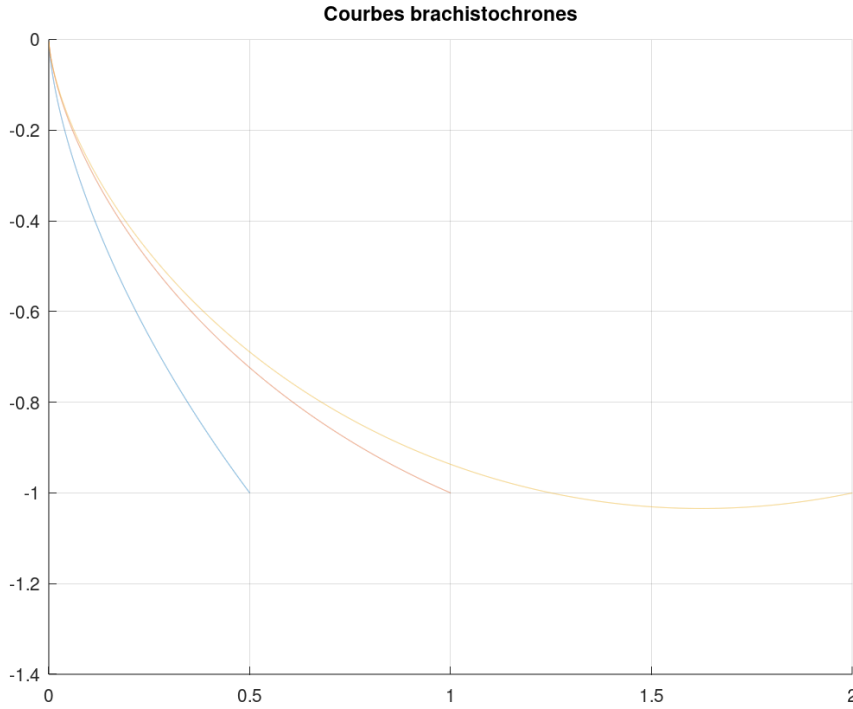


FIGURE 4.1 – Courbes brachistochrones de rayons 0.5, 1, 2.

4.2 Temps de trajet sur divers chemins

Dans le cas de la courbe brachistochrone γ , une fois θ_B et R connus, il est possible de déterminer t_{cyclo} le temps de parcours de la bille entre A et B :

$$\begin{aligned}
 t_{cyclo} &= \int_0^{\theta_B} \frac{|\gamma'(\theta)|}{|v(\gamma_2(\theta))|} d\theta \\
 &= \int_0^{\theta_B} \frac{|(x'(\theta), y'(\theta))|}{\sqrt{-2gy(\theta)}} d\theta \\
 &= \int_0^{\theta_B} \sqrt{\frac{R^2(1 - \cos(\theta))^2 - R^2 \sin^2(\theta)}{2gR(1 - \cos(\theta))}} d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\theta_B} d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{R}{g}} \theta_B .
 \end{aligned}$$

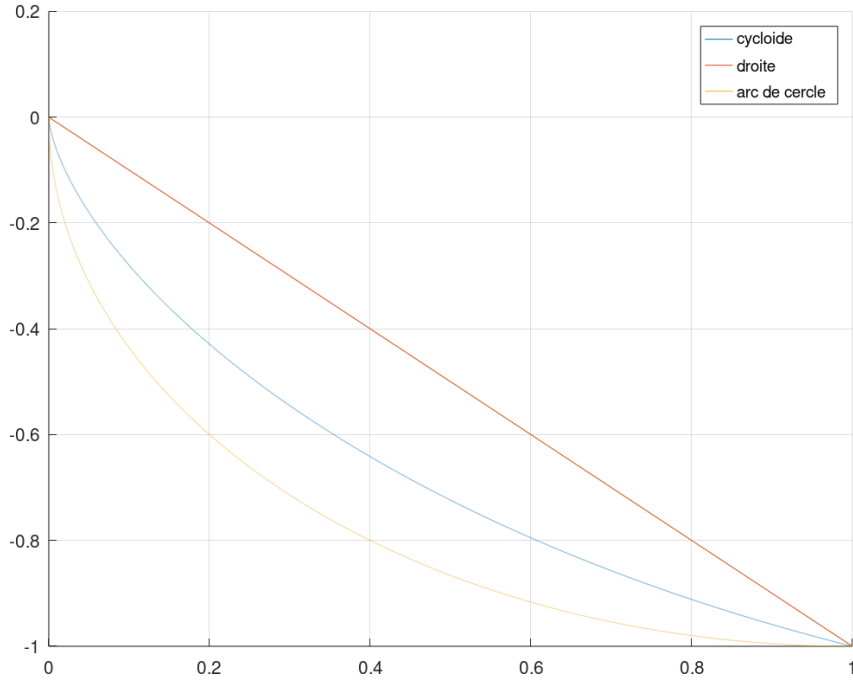


FIGURE 4.2 – Courbe cycloïde, droite et arc de cercle de centre $C(1,0)$ et de rayon 1

Par conséquent, dans notre cas, $t_{cyclo} = 0.58$.

De même, il est possible de déterminer le temps de parcours sur une autre courbe candidate, la droite reliant A et B dont l'équation paramétrique est

$$\begin{cases} x &= \theta \\ y &= -\theta \end{cases} .$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 t_{droite} &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(\theta)|}{|v(\gamma_2(\theta))|} d\theta \\
 &= \int_0^1 \frac{\sqrt{1+1}}{\sqrt{2g\theta}} d\theta \\
 &= \sqrt{\frac{1}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\theta}} d\theta \\
 &= 2\sqrt{\frac{1}{g}} .
 \end{aligned}$$

Le temps de parcours $t_{droite} = 0.64$.

On s'intéresse maintenant au quart de cercle de centre $C(1, 0)$ et de rayon

1. Cette courbe a pour équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases} ,$$

avec $\theta \in [\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

Le temps de trajet sur cette courbe est

$$\begin{aligned}
 t_{arc} &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{|\gamma'(\theta)|}{|v(\gamma_2(\theta))|} d\theta \\
 &= \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{\sqrt{\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)}}{\sqrt{-2g(\sin(\theta))}} d\theta \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{\pi}^{3\pi/2} \frac{1}{\sqrt{-\sin(\theta)}} d\theta .
 \end{aligned}$$

L'intégration numérique de cette expression nous donne $t_{arc} = 0.60$.

Il est donc illustré par la comparaison entre ces trois chemins que le trajet le plus court est obtenu pour la courbe brachistochrone.

Conclusion

Le problème du brachistochrone, en apparence très simple, a poussé les mathématiciens qui ont tenté d'y répondre à développer de nouveaux outils mathématiques. Le calcul des variations, qui en est un des héritages direct, s'est avéré être une discipline d'une très grande fertilité, ouvrant la voie à des pans majeurs des mathématiques actuelles, de la géométrie différentielle à l'optimisation en passant par la mécanique analytique. Tous ces champs peuvent tracer leur généalogie jusqu'au problème du brachistochrone.

Par ailleurs, le problème en lui-même s'avère fascinant du fait de sa formulation si simple et accessible, permettant à l'esprit de l'appréhender immédiatement, mais aussi du fait de sa difficulté et de sa richesse. Durant toute l'étude du problème, l'intuition géométrique (et les points où elle était prise en défaut) et le rigoureux abstrait ne cessent de se nourrir l'un l'autre. Le problème n'est pas avare en ramifications, et certaines des dernières contraintes le chercheur à abandonner son espoir d'une solution analytique exacte, mais lui offrant par ailleurs la possibilité d'utiliser les outils des mathématiques numériques pour poursuivre son exploration d'une nouvelle manière et avec une démarche différente.

Ce fut un plaisir de contempler un beau problème.

Bibliographie

- [1] Henry FINK. *Fermat's Principle and the Brachistochrone*. URL : http://www.math.wpi.edu/Course_Materials/MA1024A97/projects/project2.html. (accédé : 16.03.2019).
- [2] Serge MEHL. *Cycloïde*. URL : <http://serge.mehl.free.fr/anx/cycloide.html>. (accédé : 16.03.2019).
- [3] Frederic PALESI. *Chapitre IV : Equation d'Euler-Lagrange*. URL : https://old.i2m.univ-amu.fr/~fpalesi/index_files/Chapitre4.pdf. (accédé : 16.03.2019).
- [4] Jimmy ROUSSEL. *Principe de Fermat*. URL : <https://femto-physique.fr/optique/principe-de-fermat.php>. (accédé : 16.03.2019).
- [5] Sacha SCHUTZ. *Méthode de Newton*. URL : <http://dridk.me/newton-raphson.html>. (accédé : 05.05.2019).

Annexe A

Code source de production de la courbe cycloïde

newton.m

```
1 # Methode de Newton : retourne une (la) racine de la  
2 fonction f  
3 # Attention, la fonction deriv necessite le package  
4 optim  
5  
6 function zero = newton(f, start = 0, accuracy = 0.0001)  
7     x1 = start;  
8     df = deriv(f, x1);  
9     x2 = x1 - f(x1) / df;  
10    while abs(x2 - x1) > accuracy  
11        x1 = x2;  
12        df = deriv(f, x1);  
13        x2 = x1 - f(x1) / df;  
14    endwhile  
15    zero = x2;  
16 end
```

findThetaB.m

```
1 # Trouver la valeur du parametre theta au point B (xb,  
2 -1) pour une  
3 cyloide a tangente verticale en A(0, 0).  
4 function thetaB = findThetaB(xb, yb = -1)
```



```

5         f = @(theta) (yb / xb) - (cos(theta) - 1) / (
           theta - sin(theta));
6         thetaB = newton(f, pi/2);
7     end

```

rayon.m

```

1  # Determine le rayon de la cycloide en fonction de la
   valeur du
2  # parametre theta au point B.
3
4  function R = rayon(thetaB, yb = -1)
5       R = yb / (cos(thetaB) - 1);
6  end

```

cyclo.m

```

1  # Trace nb points de la cycloide de rayon R passant par
   A(0,0). La
2  # valeur du parametre theta en B est thetaB.
3
4  function courbe = cyclo(R, thetaB, nb = 10000)
5       ts = (linspace(0, thetaB, nb))';
6       xs = R * (ts - sin(ts));
7       ys = R * (cos(ts) - 1);
8       courbe = [xs ys];
9  end

```