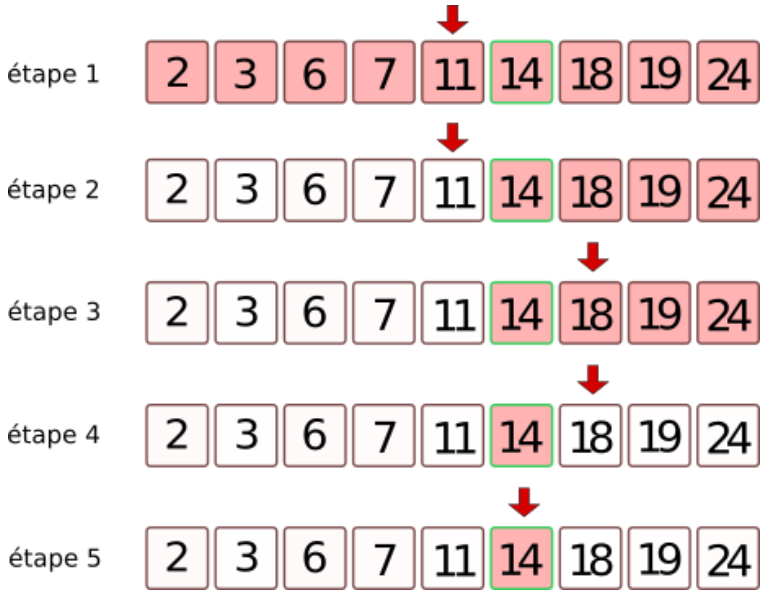
Fiche La recherche par dichotomie

1. Le principe

- On travaille avec une liste triée.
- on se place au milieu de la liste.
- on regarde si on est inférieur ou supérieur à la valeur cherchée.
- on ne garde que la bonne moitié de la liste qui nous intéresse, et on recommence jusqu'à trouver la bonne valeur

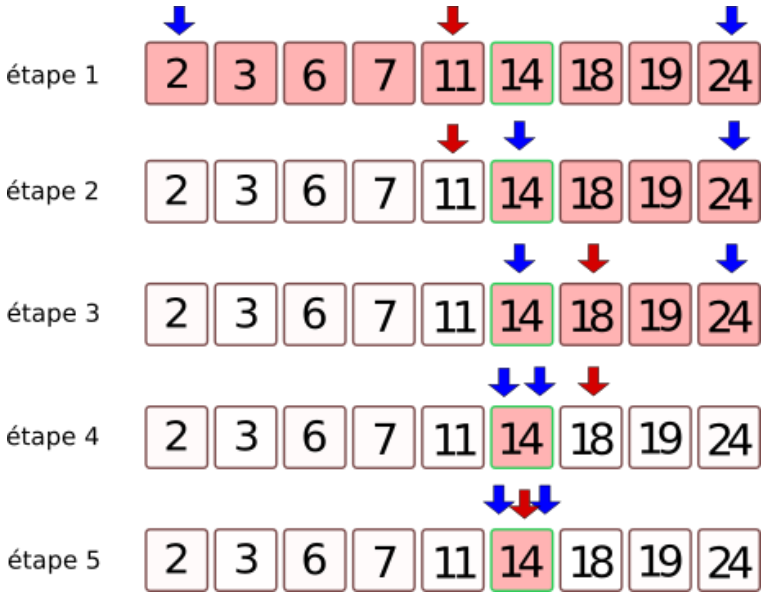
2. Illustration



Recherchons la valeur 14 dans notre liste L.

- étape 1 : toute la liste est à traiter. On se place sur l'élément central. Son indice est la partie entière de la moitié de la longueur de la liste. Ici il y a 9 éléments, donc on se place sur le 4ème, qui est 11.
- étape 2 : on compare 11 à la valeur cherchée (14). Il faut donc garder tout ce qui est supérieur à 11.
- étape 3 : on se place au milieu de la liste des valeurs qu'il reste à traiter. Ici il y a 4 valeurs, donc il n'y a pas de valeur centrale. On va donc se positionner sur la 2ème valeur, qui est 18.
- étape 4 : on compare la valeur 18 à la valeur cherchée : 14. Elle est supérieure, donc on garde ce qui est à gauche. Il n'y a plus qu'une valeur.
- étape 5 : on se place sur la valeur 14 et on compare avec 14. La valeur est trouvée.

3. Programmation de la méthode de dichotomie



Nous allons travailler avec deux variables `indice_debut` et `indice_fin` qui vont délimiter la liste à étudier. Ces indices sont représentés en bleu sur la figure ci-dessous. La valeur de l'`indice_central` (représenté en rouge) sera égale à `(indice_debut + indice_fin) // 2`

Le programme s'arrête lorsque la valeur cherchée a été trouvée, ou lorsque `indice_fin` devint inférieur à `indice_debut.`

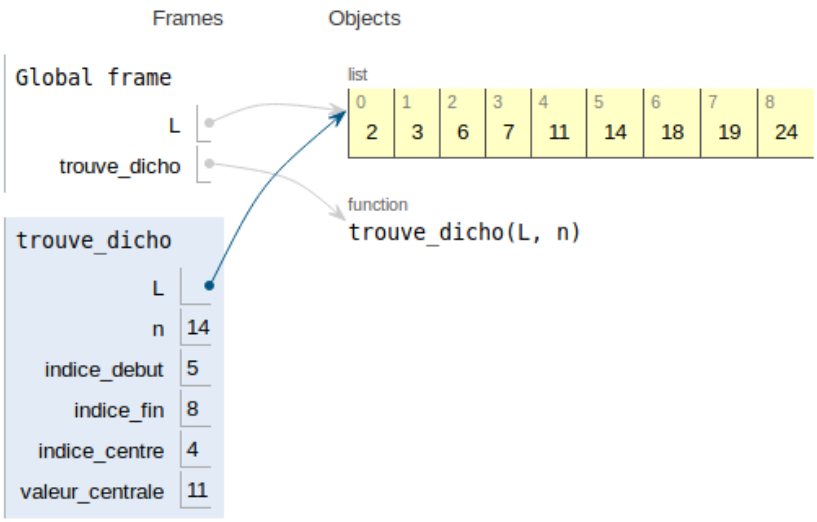
3.1. Codage de l'algorithme ❤️

```
def trouve_dicho(L, val) :
    indice_debut = 0
    indice_fin = len(L)-1
    while indice_debut <= indice_fin :
        indice_centre = (indice_debut + indice_fin) // 2     # on prend l'indice central
        if L[indice_centre] > val:     # si la valeur centrale est trop grande...
            indice_fin = indice_centre - 1
        elif L[indice_centre] < val :          # si la valeur centrale est trop petite...
            indice_debut = indice_centre + 1
        else :     # si la valeur centrale est la valeur cherchée...
            return indice_centre
    return None
```

3.2. Vérification :

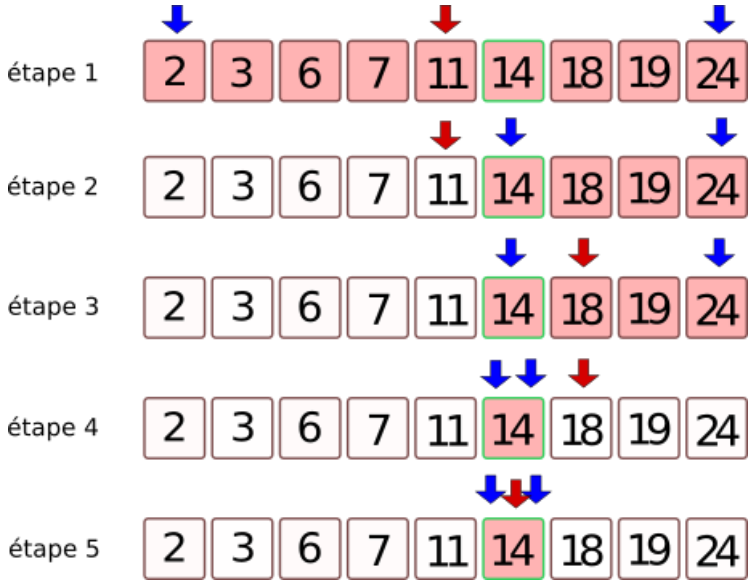
```
>>> L = [2, 3, 6, 7, 11, 14, 18, 19, 24]
>>> print(trouve_dicho(L,14))
5
>>> print(trouve_dicho(L,2))
0
>>> print(trouve_dicho(L,24))
8
>>> print(trouve_dicho(L,1976))
None
```

Une visualisation de l'évolution des variables `indice_debut` et `indice_fin` est disponible sur le site pythontutor via ce lien.



4. Terminaison de l'algorithme

Est-on sûr que l'algorithme va se terminer ?
La boucle `while` qui est utilisée doit nous inciter à la prudence
Il y a en effet le risque de rentrer dans une boucle infinie.
Pourquoi n'est-ce pas le cas ?
Aide : observer la position des deux flèches bleues lors de l'exécution de l'algorithme



La condition de la boucle `while` est `indice_debut <= indice_fin`, qui pourrait aussi s'écrire `indice_fin >= indice_debut`.
Au démarrage de la boucle, on a :

```
indice_debut = 0
    indice_fin = len(L) - 1
```

Ceci qui nous assure donc de bien rentrer dans la boucle.
Ensuite, à chaque étape, les deux variables `indice_debut` et `indice_fin` vont se **rapprocher** jusqu'à ce que le programme rencontre un return ou bien jusqu'à ce que `indice_fin` devienne inférieur à `indice_debut`.

Ceci nous assure donc que le programme va bien se terminer.
Variant de boucle
On dit que la valeur `indice_fin - indice_debut` représente le **variant de boucle** de cet algorithme. Ce variant est un nombre entier, d'abord strictement positif, puis qui va décroître jusqu'à la valeur 0.

5. Complexité de l'algorithme

Combien d'étapes (au maximum) sont-elles nécessaires pour arriver à la fin de l'algorithme ?
Imaginons que la liste initiale possède 8 valeurs. Après une étape, il ne reste que 4 valeurs à traiter. Puis 2 valeurs. Puis une seule valeur.
Il y a donc 3 étapes avant de trouver la valeur cherchée.

Exercice : Remplissez le tableau ci-dessous :

taille de la liste	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**32**	**64**	**128**	**256**	
nombre d'étapes	_	_	_	**3**	_	_	_	_	_	_

1. Pouvez-vous deviner le nombre d'étapes nécessaires pour une liste de 4096 termes ?
2. Pour une liste de 2^n termes, quel est le nombre d'étapes ?

Conclusion : C'est le nombre de puissances de 2 que contient le nombre *N* de termes de la liste qui est déterminant dans la complexité de l'algorithme. Ce nombre s'appelle le *logarithme de base 2* et se note $log_2(N)$. On dit que l'algorithme de dichotomie a une **vitesse logarithmique**. On rencontrera parfois la notation $O(log_2(N))$..

6. Expériences et comparaison des vitesses d'exécution

6.1. Avec une liste contenant 100 000 valeurs

```
# cette ligne de code permet de transformer le contenu du fichier input_centmille.txt
# en une liste L de 100 000 valeurs.

L = open("input_centmille.txt",'r').read().split('\n')
```

Mesurons le temps nécessaire pour trouver l'indice de la dernière valeur de la liste (qui est 299474) avec la méthode de balayage (méthode 1 : on fait une boucle simple sur l'ensemble du tableau et on compare chaque valeur à celle recherchée):

```
>>> %timeit recherche_lineaire(L, 299474)
4.43 ms ± 86.1 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100 loops each)
```

Mesurons le temps nécessaire pour trouver l'indice de la dernière valeur de la liste (qui est 299474) avec la méthode par dichotomie (méthode 2) :

```
>>> %timeit recherche_dichotomique(L, 299474)
3.21 µs ± 19.6 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100000 loops each)
```

Comparaison des deux méthodes : l'algorithme dichotomique est bien plus rapide que l'algorithme de balayage (la différence d'ordre de grandeur est de 10^3, qui correspond bien à l'ordre de grandeur de $\frac{n}{log(n)}$ lorsque n vaut 10^5).

6.2. Avec une liste contenant 1 000 000 valeurs (soit 10 fois plus que la liste précédente)

```
# ce code permet de transformer le contenu du fichier million.txt en une liste L de 1 000
000 valeurs.
f = open("input_million.txt",'r')
l = f.readlines()
L = []
for k in l :
    L.append(int(k[:-1]))
```

Mesurons le temps nécessaire pour trouver l'indice de la dernière valeur de la liste (qui est 2999306) avec la méthode de balayage (méthode 1) :

```
>>> %timeit recherche_lineaire(L, 299474)
46.9 ms ± 615 µs per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 10 loops each)
```

Mesurons le temps nécessaire pour trouver l'indice de la dernière valeur de la liste (qui est 2999306) avec la méthode par dichotomie (méthode 2) :

```
>>> %timeit recherche_dichotomique(L, 299474)
3.04 µs ± 39.4 ns per loop (mean ± std. dev. of 7 runs, 100000 loops each)
```

Comparaison des deux méthodes : l'algorithme dichotomique est toujours bien plus rapide que l'algorithme de balayage (la différence d'ordre de grandeur est de 10^4, qui correspond bien à l'ordre de grandeur de $\frac{n}{log(n)}$ lorsque n vaut 10^6).

Influence de la taille de la liste sur la vitesse de chaque méthode :

- méthode 1: la recherche dans une liste 10 fois plus grand prend environ 10 fois plus de temps : la vitesse de l'algorithme est bien proportionnelle à la taille n de la liste. $\frac{10^6}{10^5} = 10$
- méthode 2: la recherche dans une liste 10 fois plus grand prend environ 1,2 fois plus de temps : la vitesse de l'algorithme est bien proportionnelle au **logarithme** de la taille n de la liste. $\frac{log(1000000)}{log(100000)} \approx 1{,}2$

Remarque : Il ne faut toutefois pas oublier que la méthode dichotomique, bien plus rapide, nécessite que la liste ait été auparavant triée. Ce qui rajoute du temps de calcul !