Chap 02 : Méthode diviser pour régner

Compétences évaluables :

- Ecrire un algorithme utilisant la méthode « diviser pour régner »

Table des matières

La méthode diviser pour régner *divide and conquer* se décompose en 3 étapes.

- **Diviser** : découper le problème de départ en sous problèmes
- **Régner** : résoudre les sous problèmes soit directement soit récursivement si la division nous place dans le même problème de départ mais en plus petit
- **Combiner** : à partir des solutions trouvées au sous problème, former la réponse finale. Si la récursivité a été employée dans la résolution, elle le sera aussi ici

1. Introduction

L'idée de base est de trouver une **méthodologie** pour résoudre des problèmes. Par exemple : On veut résoudre le problème A.
Si on sait :

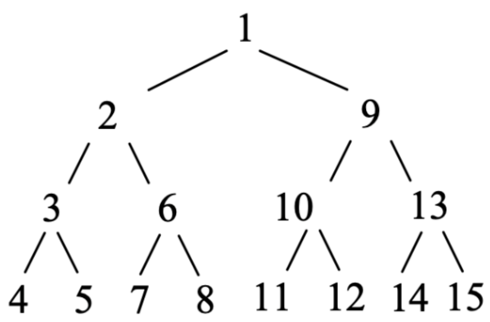
1. transformer le problème A en un problème B;
2. résoudre le problème B;
3. transformer la solution du problème B en une solution du problème A,

alors on sait résoudre le problème A.

Exemple Le téléphone en chaine
Les 15 joueuses d'une équipe de volleyball ont la liste des joueuses de l'équipe avec leur numéro de téléphone. La capitaine reçoît l'information que le prochain match a été déplacé. Il faut prévenir toutes les autres joueuses.

Solution 1 : la capitaine se charge d'**appeler toutes les autres joueuses**. Et si elle passe 5 minutes au téléphone avec chacune d'entre-elles…
Question à propos de la solution 1 : En combien de temps (noté t1) l'ensemble de l'équipé est informé? En déduire la complexité de cette solution en fonction de n (taille de l'équipe)

Solution 2 : Une solution plus efficace et plus confortable pour la capitaine est **qu'elle divise la liste de joueuses en deux moitiés**. Elle **appelle alors la première joueuse** de chacune des deux listes obtenues. Elle leur donne l'information de report de match et leur demande à leur tour de faire la même chose : **diviser en deux la demi-liste** à laquelle elles appartiennent, **appeler la première joueuse** de chacune des parties et ainsi de suite … jusqu'à ce qu'il n'y ait plus personne à prévenir.
Représentons l'arbre des appels pour la liste de 15 joueuses numérotées de 1 à 15.



arbre binaire des appels

Question à propos de la solution 2: Si on suppose qu'un appel téléphonique dure 5 min. En combien de temps (noté t2) l'ensemble de l'équipe est informé ? En déduire la complexité de cette solution en fonction de n (taille de l'équipe)

Conclusion: La solution 2 illustre bien la méthode **Diviser pour régner** puisqu'à chaque nouvel appel téléphonique, le nombre de joueuses contactées avec le même message va doubler. La durée nécessaire pour la résolution du problème initial (téléphoner à toutes les joueuses) est alors réduite de manière significative.

La méthode « diviser pour régner » va s'appliquer à des problèmes où la **notion de taille va apparaitre**. La résolution en utilisant la méthode diviser pour régner

1. Diviser pour faire apparaître les sous-problèmes à résoudre ;
2. Régner pour résoudre effectivement les sous-problèmes ;
3. Combiner pour obtenir une solution du problème initial.

2. L'exponentiation

L'exponentiation consiste à trouver une méthode pour calculer x à la puissance n, **SANS utiliser l'opérateur *puissance*.** L'idée est de se rapprocher de l'algorithme utilisé par le processeur d'un ordinateur, qui n'utilise que les 3 opérateurs de base pour effectuer les calculs (+,-,*).

2.1. Programme itératif

Activité n°1.: Etudions l'algorithme d'exponentiation en version itérative

```python
def exp1(n : int ,x: float) -> float :
    """
    programme qui donne x^n en sortie
    """
    valeur=1
    for i in range(n):
        valeur*=x
    return valeur
```

Complexité :

La boucle for est exécutée n fois. Il y a, à chaque itération, une opération arithmétique qui est réalisée (multiplication par x), et une affectation (le résultat est affecté à *valeur*).
Il y a donc au total : **2n + 1** opérations.
La complexité est O(n).

2.2. Programme récursif

Activité n°2.: Etudions l'algorithme d'exponentiation en version récursive

```python
def exp2(n : int ,x: float) -> float :
    """
    programme qui donne x^n en sortie
    """
    if n == 0:
        return 1
    else:
        return x* exp2(n-1,x)
```

Complexité :

La complexité est aussi O(n).

2.3. Exponentiation rapide : application de la méthode Diviser pour régner

Comme de nombreux algorithmes utilisant cette méthode, celui-ci fait des appels récursifs. Mais à la différence du précédent, **l'appel récursif se fait avec un paramètre que l'on divise par 2** (le paramètre n). C'est ce qui fait que le nombre d'appels récursifs est plus réduit.
Par exemple 49^5

$$49^5$$
$$5 = 5\,//2 + 5\,//2 + 1$$

$$49^5 = 49 \times 49^2 \times 49^2$$

On retrouve l'étape 3 évoquée en introduction (la combinaison des sous problèmes) lorsque l'on réalise l'opération : `return y*y` ou bien `return x*y*y`.

Activité n°3.: Etudions l'algorithme d'exponentiation en version méthode Diviser pour régner

```python
def exp3(n : int ,x: float) -> float :
    """
    programme qui donne x^n en sortie
    """
    if n == 0:
        return 1
    else:
        y = exp3(n//2,x) # on prend la valeur inférieure de n/2
        if n%2 == 0 :
            return y*y
        else:
            return x*y*y
```

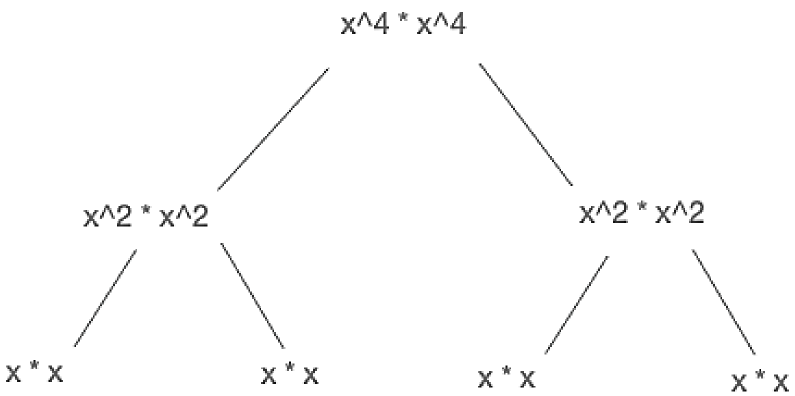
Complexité

Prenons pour exemple n = 8 :
Dans la phase de descente : exp3(8,x) appelle exp3(4,x) appelle exp3(2,x) qui appelle exp3(1,x) puis exp3(0,x).
Dans la phase de remontée: Une seule opération est réalisée à chaque appel recursif : y*y
C'est comme si l'on **dupliquait** le résultat de chaque multiplication (voir représentation en arbre plus bas)

- exp3(0,x) retourne 1
- exp3(1,x) retourne x * 1 * 1
- exp3(2,x) retourne x * x
- exp3(4,x) retourne $x^2 * x^2$
- exp3(8,x) retourne $x^4 * x^4$

Le nombre d'opérations est le nombre de divisions par 2 qu'il faut faire pour réduire n à 0. Ce nombre est justement égal à :

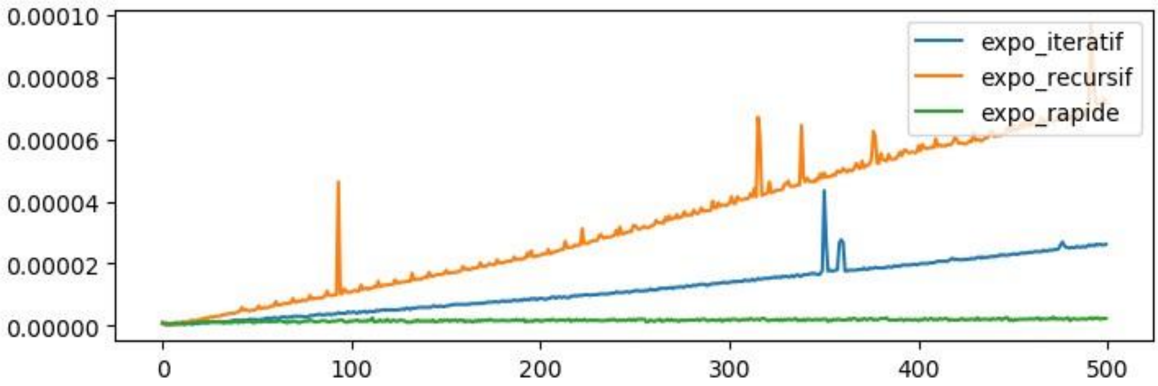
$$\log_2(n)$$



représentation en arbre

Remarque : L'exponentiation rapide peut être utilisée pour des "multiplications" plus compliquées, comme la multiplication de matrices, la composition de fonctions,… Dans ces cas, il ne faut pas oublier de compter le coût de la multiplication dans les calculs, qui n'est pas toujours constant.

Comparaison des vitesses des différents algorithmes d'exponentiation



3. Tri fusion (MergeSort)

3.1. Le principe

Dans cette partie, nous allons essayer de comprendre les principes sur lesquels s'appuie ce tri.

Le tri fusion s'appuie sur la méthode **Diviser pour régner** pour trier les `n` éléments d'une séquence S :

1. **Diviser :** Si la séquence S est composée de 0 ou un élément, retourner S immédiatement ; cette séquence est déjà triée. => **Cas de base**.
   Si la séquence S est composée de plus de deux éléments, la **diviser en deux sous-séquences S_1 et S_2** contenant chacune environ la moitié des éléments de S ; donc S_1 est formée des $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ premiers éléments de Set $\boldsymbol{S_2}$ et contient les $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ derniers éléments de S.

2. **Régner : Trier récursivement S_1 et S_2**
3. **Combiner : Reformer la séquence S** en combinant, dans l'ordre, les éléments des séquences triées S_1 et S_2

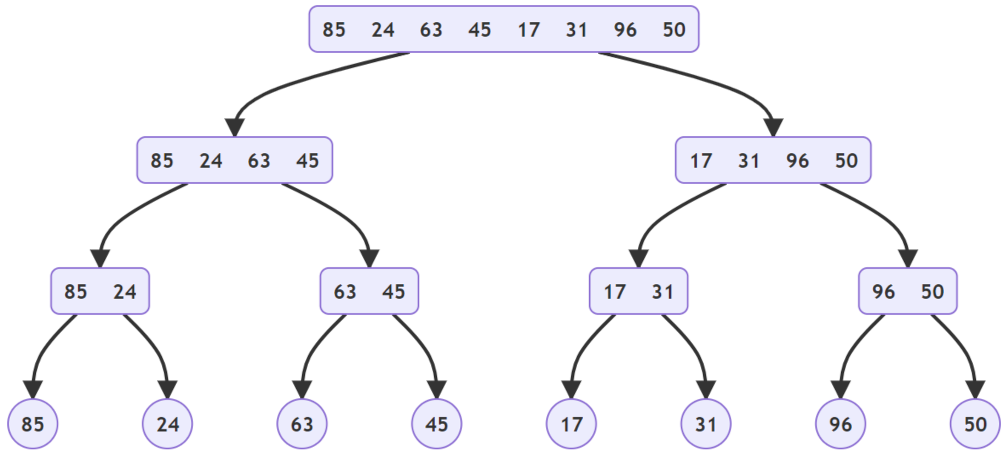
Remarques :

- $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ est la notation mathématique pour l'opération en Python `n // 2`, c'est à dire *le plus grand entier inférieur au résultat de la division de n par 2*.

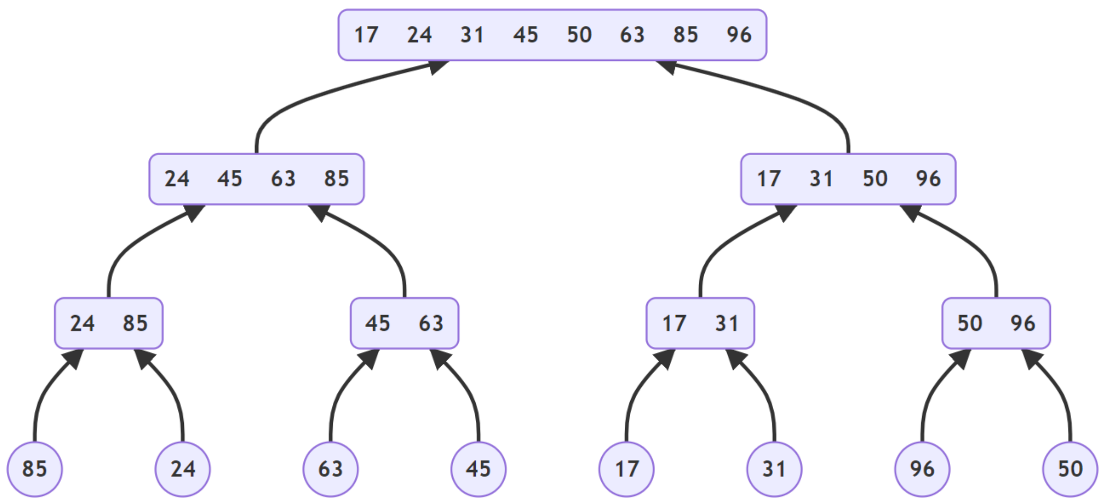
- $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ est la notation mathématique pour l'opération en Python `n // 2 + 1`, c'est à dire pour *le plus petit entier supérieur au résultat de la division de n par 2*.

3.2. Illustration graphique

Pour bien comprendre la méthode employée, le plus simple est de construire un arbre binaire dans lequel chaque nœud est le résultat d'un appel récursif.



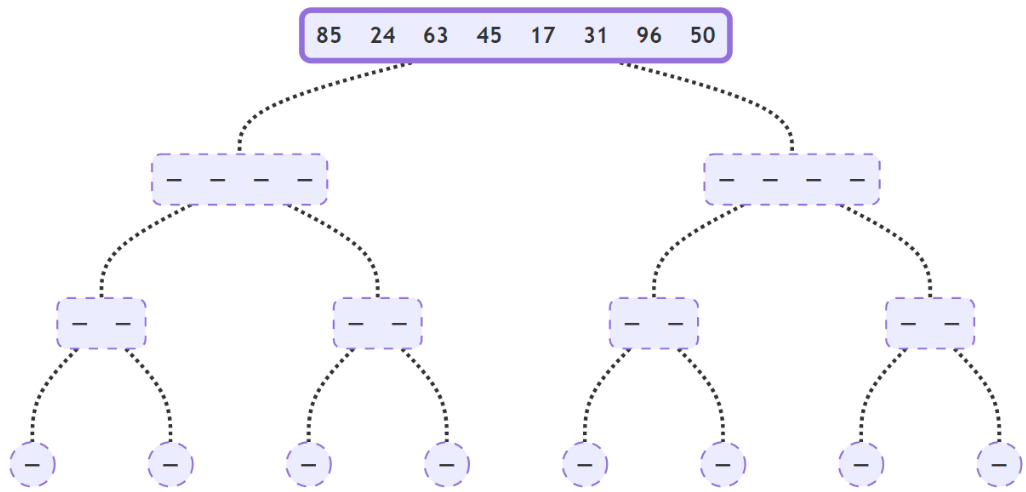
*Résultats des différents appels récursifs (Partie **Diviser**)*

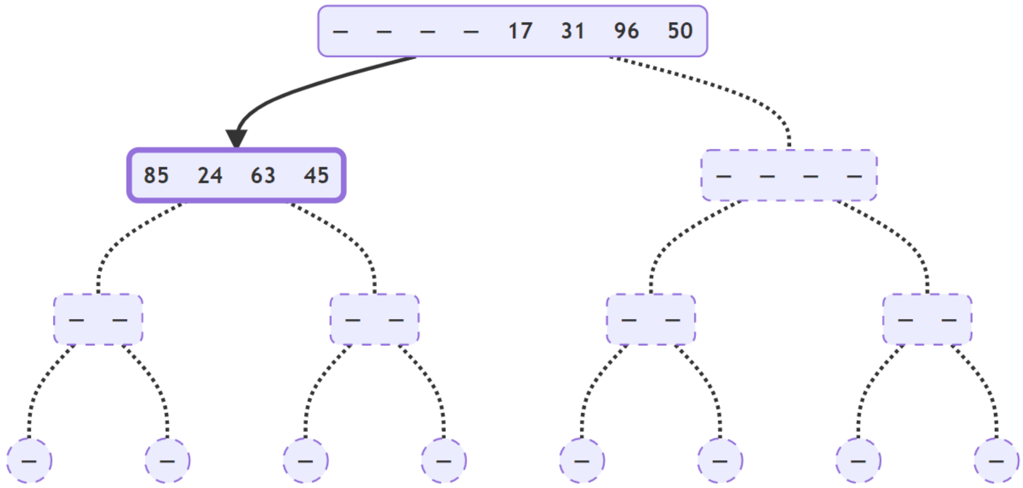


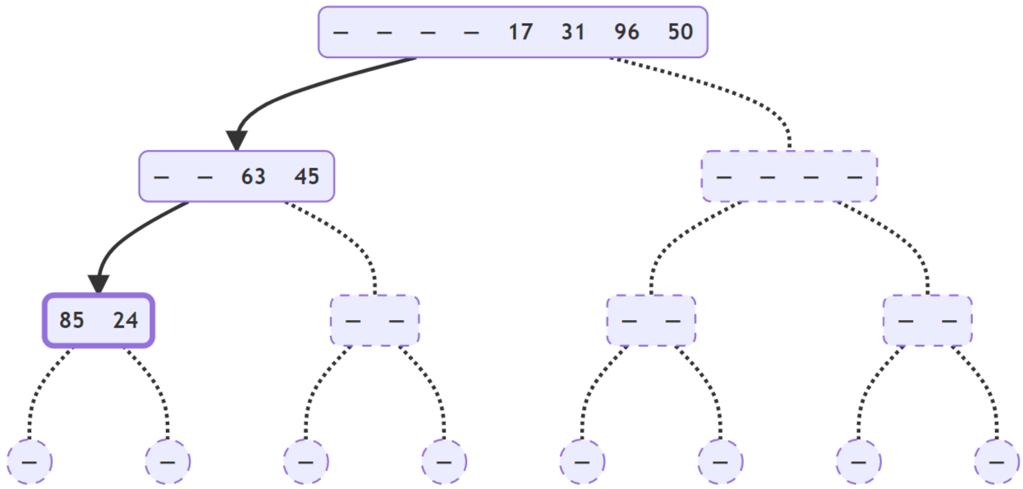
*Résultats progressifs après les étapes **Régner** et **Fusionner**.*

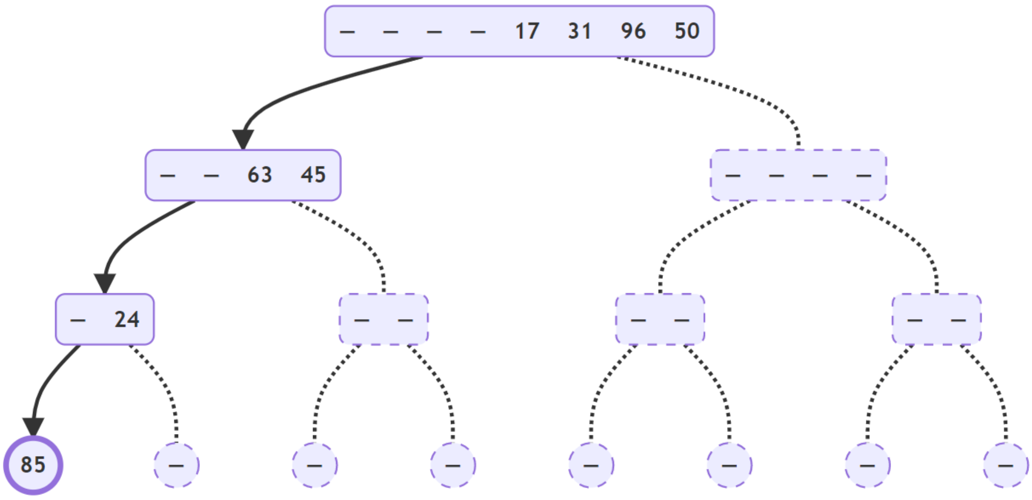
Légende

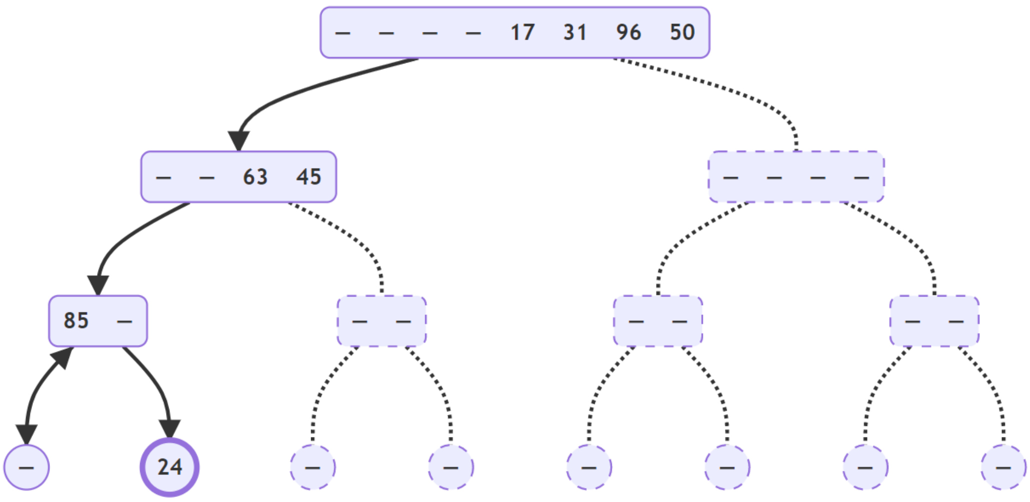
- *Chaque nœud représente un appel récursif* ;
- **Nœud avec une bordure en pointilles :** *appels récursifs non encore effectués* ;
- **Nœud avec une bordure en gras :** *appel récursif en cours* ;
- **Nœud vide avec une bordure :** *partie déjà traitée* ;
- **Nœud en partie vide (contenant tout de même des valeurs) :** *appels récursifs en attente*.

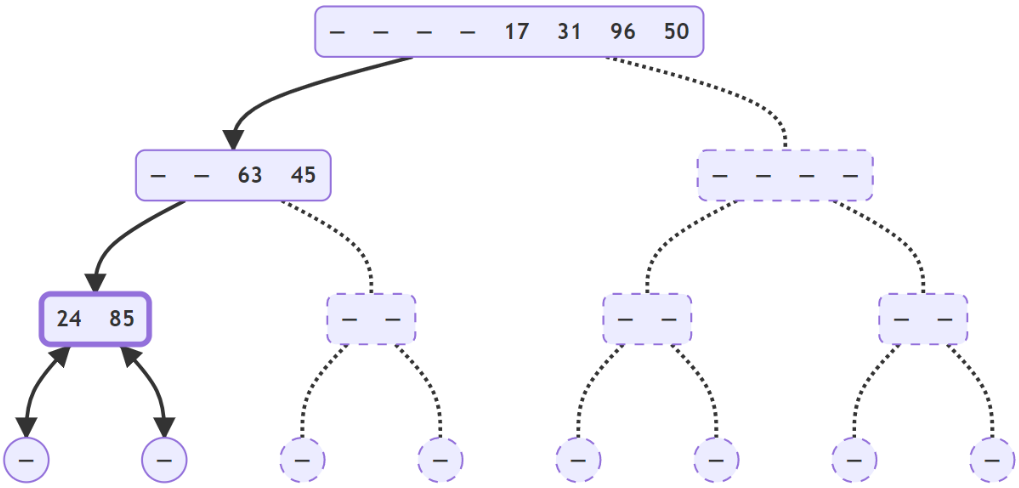


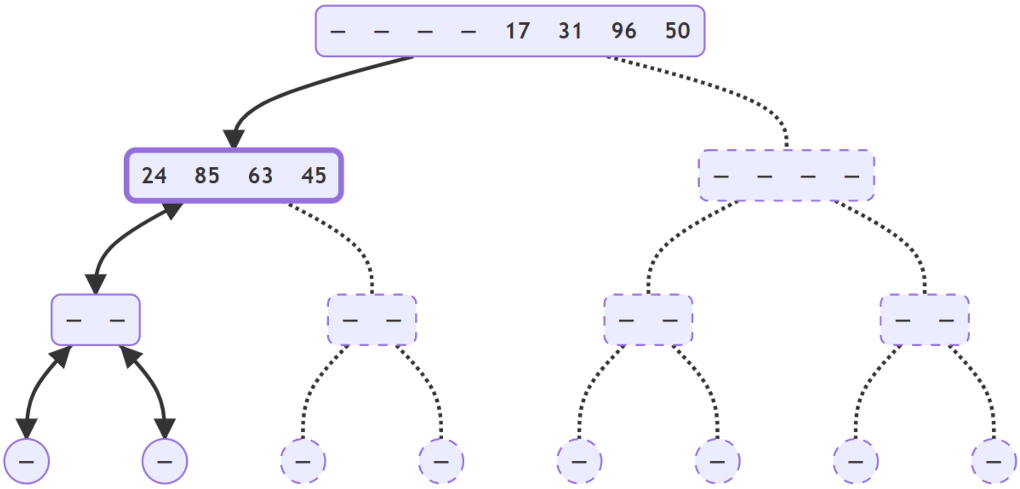

– – – – 17 31 96 50
85 24 63 45
– – – –

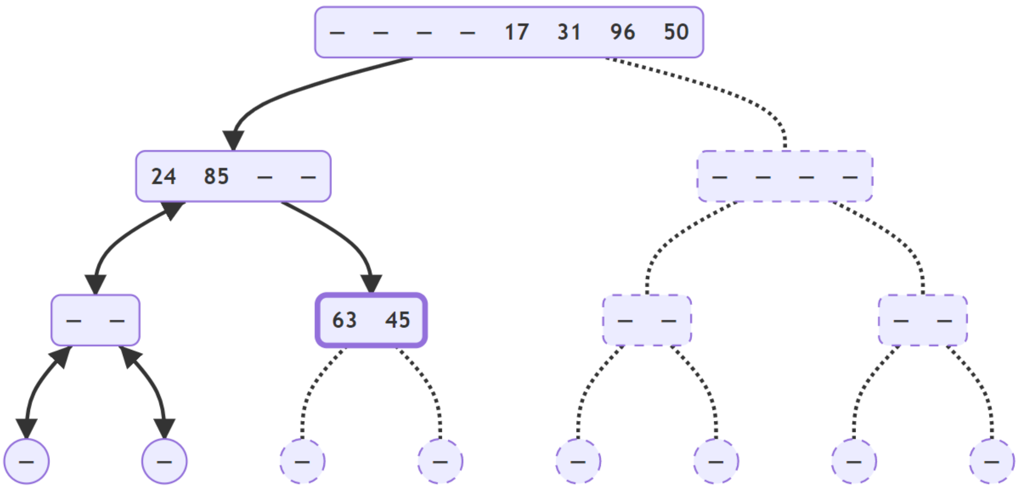

– – – – 17 31 96 50
– – 63 45
– – – –
85 24

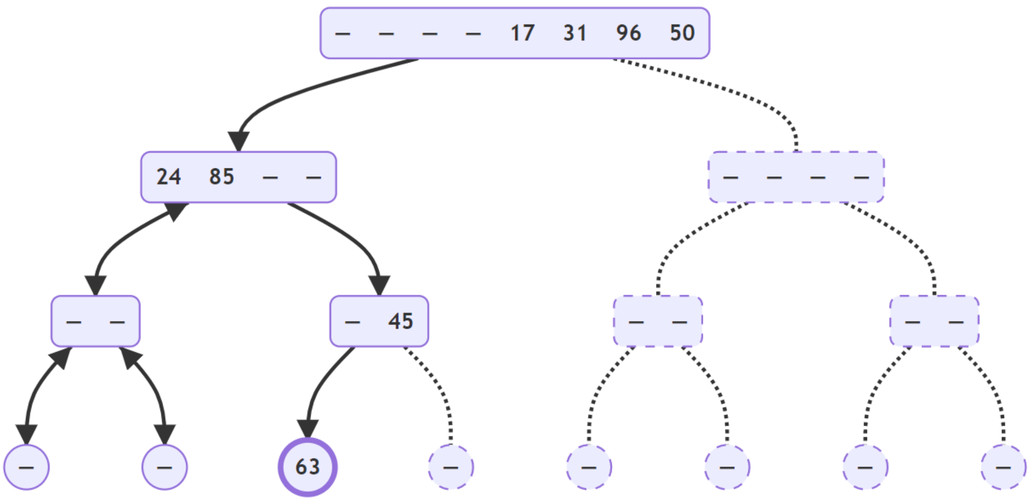

– – – – 17 31 96 50
– – 63 45
– – – –
– 24
85

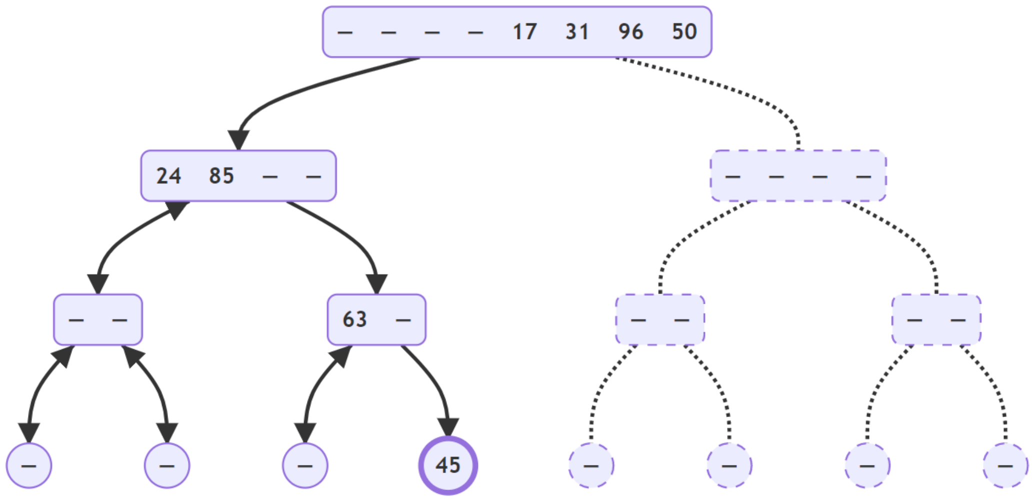

– – – – 17 31 96 50
– – 63 45
– – – –
85 –
24


– – – – 17 31 96 50
– – 63 45
24 85

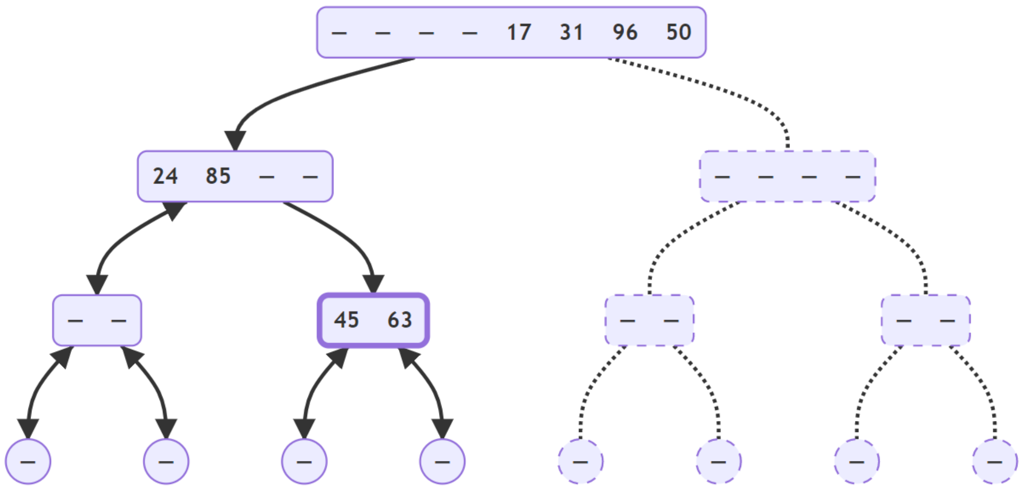

– – – – 17 31 96 50
24 85 63 45


– – – – 17 31 96 50
24 85 – –
63 45

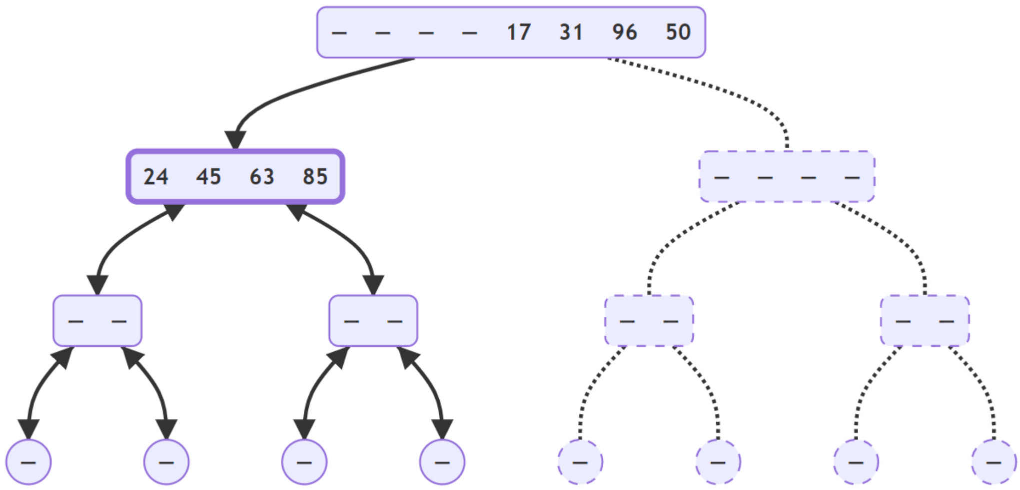

– – – – 17 31 96 50
24 85 – –
– 45
63



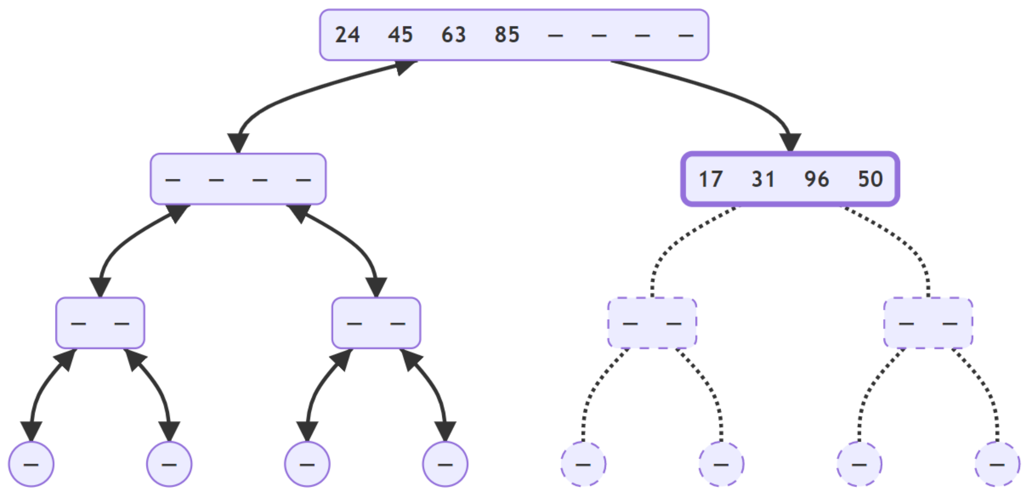
— — — — 17 31 96 50
24 85 — —
— — — —
— —
63 —
— —
— —
— — 45 — — — —



— — — — 17 31 96 50
24 85 — —
— — — —
— —
45 63
— —
— —
— — — — — — — —

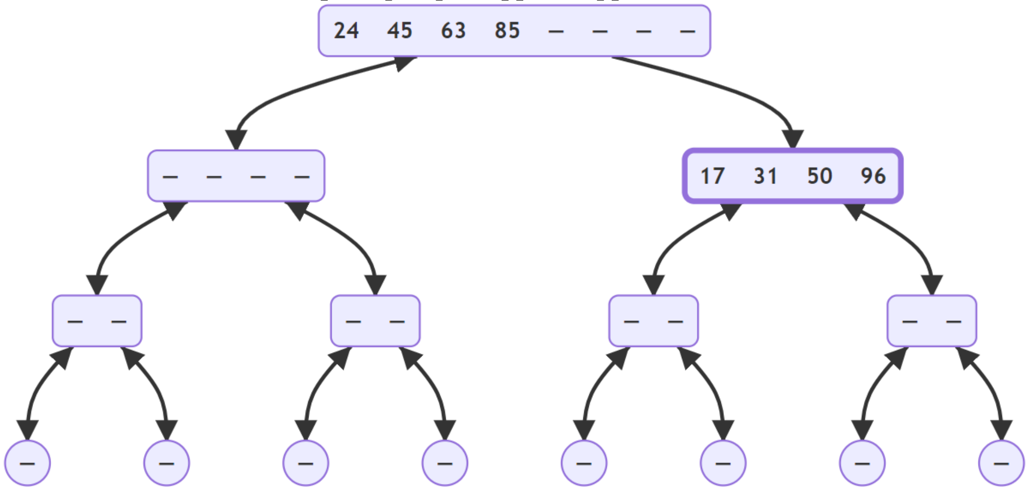


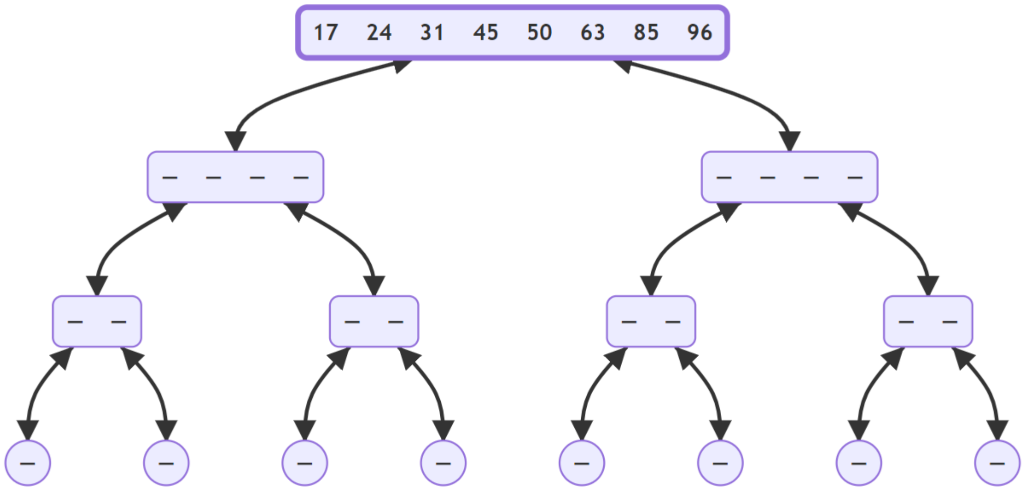
— — — — 17 31 96 50
24 45 63 85
— — — —
— —
— —
— —
— —
— — — — — — — —



24 45 63 85 — — — —
— — — —
17 31 96 50
— —
— —
— —
— —
— — — — — — — —

… et après quelques appels supplémentaires…





3.3. Illustration en vidéo

Vidéo en dance : https://youtu.be/XaqR3G_NVoo Vidéo explicative : https://youtu.be/OEmlVnH3aUg	Visualisation du tri http://lwh.free.fr/pages/algo/tri/tri_fusion.html

3.4. Implémentation du tri fusion pour un tableau

Activité n°4.: Étudier le code suivant et remplacer les … pour chaque numéro.

```python
from typing import List

def tri_fusion(S: List[int]) -> None:
    """
    Implémentation du tri fusion. La liste S est modifiée en place.
    """
    n = len(S)  # ... (0)
    if n < 2:
        return None  # ... (1)

    # Diviser, Régner, Combiner ? ... (2)
    milieu = n // 2
    S1 = S[:milieu]  # .... (3)
    S2 = S[milieu:]  # .... (4)

    # Diviser, Régner, Combiner ? ... (5)
    tri_fusion(S1)  # ... (6)
    tri_fusion(S2)  # ... (7)

    # Diviser, Régner, Combiner ? ... (8)
    fusion(S1, S2, S)  # ... (9)
```

Activité n°5.: Étudier le code suivant et expliquer comment s'effectue la fusion.

```
def fusion(S1: List[int], S2: List[int], S: List[int]) -> None:
    """
    Combine les éléments des deux listes S1 et S2 dans la liste S (en place).
    i est le nombre d'élément(s) de S1 copié(s) dans S1.
    j est le nombre d'élément(s) de S2 copié(s) dans S2.
    On doit donc avoir i + j <= len(S).
    """
    i = 0
    j = 0

    while i + j < len(S):
        if j == len(S2) or (i < len(S1) and S1[i] < S2[j]):
            S[i + j] = S1[i]
            i = i + 1
        else:
            S[i + j] = S2[j]
            j = j + 1
```

Activité n°6.: Étudier le comportement du programme complet à l'aide de pythontutor.
Construire la liste à l'aide de l'instruction :

```
liste = [randint(1, 400) for i in range(5)]
```

Ne pas oublier d'importer `random`

Activité n°7.: Quelle est la complexité de la fonction `fusion` ? Essayer d'évaluer la complexité de l'algorithme sans faire de calcul.

3.5. Complexité

Pour déterminer la formule de récurrence qui nous donnera la complexité de l'algorithme, étudions les trois étapes de cet algorithme

- **Diviser** : cette étape se réduit au calcul du milieu de l'intervalle [début, fin]
- **Régner** : l'algorithme résout récursivement deux sous-problèmes de tailles respectives *n/2*.
- **Combiner** : la complexité de cette étape est celle de l'algorithme de fusion qui est de $\Theta(n)$ pour la construction d'un tableau solution de taille n.

Donc la complexité de l'algorithme du tri fusion pour trier un tableur de taille n est $T(n) = O(n.\log_2(n))$

4. Comparaison des performances

La complexité des tris par insertion et sélection est en $O(n^2)$, celle du tri par fusion est en **O(n.log(n))**

Activité n°8.: Comparaison des performances des différents tris. Créer un fichier contenant le script suivant dans le même dossier que les trois tris.

```
import datetime
import random
from tri_insertion import tri_insertion
from tri_selection import tri_selection
from tri_fusion import tri_fusion

n = 1000
t=[random.randint(1,1000) for i in range(n)]

# tri insertion
t1=t[:] #recopie
start = datetime.datetime.now()
t2=tri_insertion(t1)
end = datetime.datetime.now()
print("tri insertion : ",(end-start).total_seconds())
```

```
# tri selection
t1=t[:] #recopie
start = datetime.datetime.now()
t3=tri_selection(t1)
end = datetime.datetime.now()
print("tri selection : ",(end-start).total_seconds())


# tri fusion
t1=t[:] #recopie
start = datetime.datetime.now()
t4=tri_fusion(t1)
end = datetime.datetime.now()
print("tri fusion : ",(end-start).total_seconds())
```

5. Retour sur la recherche dichotomique

Nous avons déjà rencontré la recherche dichotomique. On rappelle qu'il s'agit de déterminer si un entier `val` apparait dans une liste `tab` qui est triée par ordre croissant. Plus précisément on cherche à écrire une fonction qui :

- prend en paramètres : `val` la valeur recherchée, `tab`le tableau trié par ordre croissant;
- renvoie `i` un indice où la valeur `val` apparait dans `tab` et `None` si la `val` n'est pas dans `tab`.

Pour cela on utilisera la technique de la dichotomie. Il s'agira de délimiter une portion du tableau dans laquelle la valeur peut se trouver avec deux indices `g` et `d`. On peut illustrer la situation à chaque étape :

Activité n°9.: Écrire une fonction récursive en `Python` qui

- prend en paramètres une liste `tab` d'entiers triés par ordre croissant, un entier à rechercher `val`.
- renvoie `i` un indice où la valeur `val` apparait dans `tab` (ou `True` selon comment est codé l'algorithme) et `False` si la `val` n'est pas dans `tab`. La valeur `i` est recherchée dans `tab[g..d]`

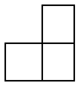
On peut passer les slices des listes de python

6. Exercices

Exercice n°1 : Connaitre le cours

1. En quoi consiste la méthode diviser pour régner ?
2. Donner la séquence des appels de la fonction tri_fusion vue dans la leçon lors de l'appel tri_fusion([23,35,78,15,65,5,99]). La réponse peut être un arbre des appels.
3. Donner la séquence des appels de la fonction recherche basée sur la dichotomie vue dans la leçon lors de l'appel recherche_dichotomique([1,3,15,16,23,35,38,40,42,45],42) puis lors de l'appel de recherche_dichotomique([1,3,15,16,23,35,38,40,42,45],17)

Exercice n°2 : Raisonner avec la méthode "diviser pour régner"

1. Est-il possible de paver, avec une pièce comme ci-contre un  échiquier des dimensions suivantes :

- $3^n \times 3^n$
- $4^n \times 4^n$
- $6^n \times 6^n$

Si oui, expliquez comment réaliser ce pavage

2. Trouver une méthode pour paver, avec des pièces comme dans la question précédente, un échiquier de taille $2^n \times 2^n$ qui contient un trou (1 seul trou qui ne doit pas être couvert par une pièce)

3. Montrer comment la méthode diviser pour régner permet de résoudre le problème précédent

Exercice n°3 : Dichotomie à l'envers

Écrire une fonction `recherche_dichotomique_envers` récursive en `Python` basée sur le principe de dichotomie qui :

— prend en paramètres une liste `tab` d'entiers triés par ordre décroissants, un entier à rechercher `val`, des entiers `g` et `d` qui représentent les bornes de recherche dans la liste

— Renvoie `i` un indice où la valeur `val` apparait dans `tab` et `None` si la `val` n'est pas dans `tab`. La valeur `i` est recherchée dans `tab[g..d]`. Ajoutez quelques tests pour vérifier le bon fonctionnement de votre fonction

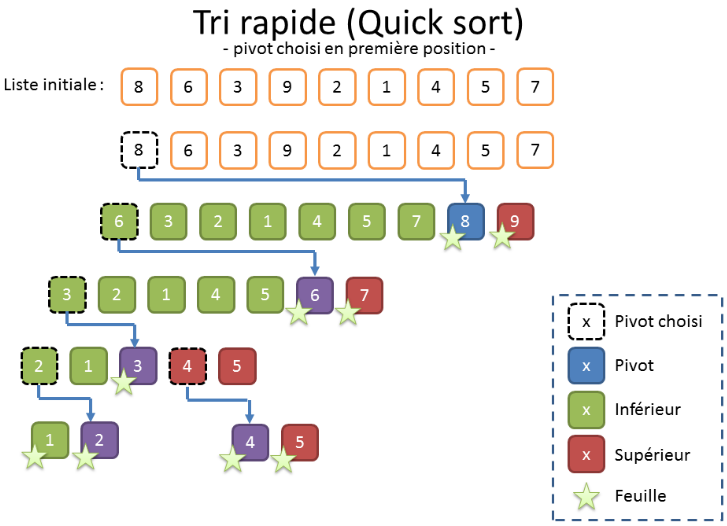
Exercice n°4 : Tri rapide

Le Quicksort est une méthode de tri inventée par Sir Charles Antony Richard Hoare en 1961 et fondée sur la méthode de conception « diviser pour régner ». Il peut être implémenté sur un tableau ou sur des listes ; son utilisation la plus répandue concerne tout de même les tableaux.

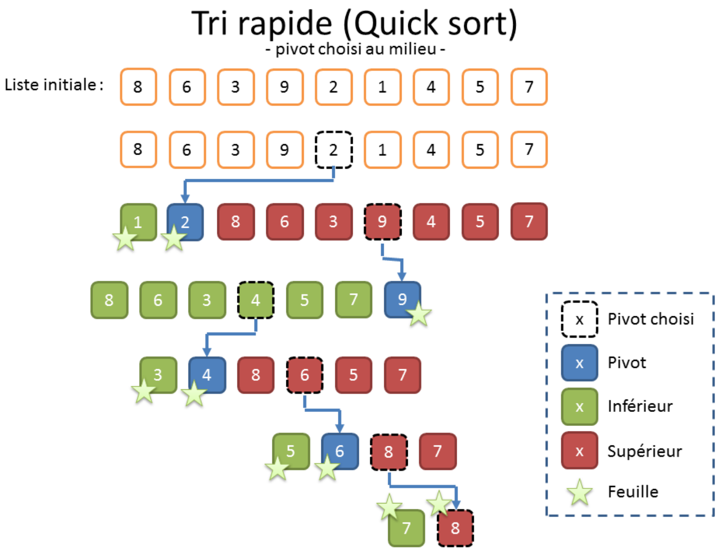
- **Diviser** : on partage le tableau en deux parties. Ce partage se fait autour d'une valeur du tableau choisie au hasard, c'est le pivot. Du coup, le pivot est à sa place ! il ne reste plus qu'à placer les autres !
- **Régner** : On trie les tableaux récursivement (on repartage donc) ou on ne fait rien si la taille est 1 (puisqu'un seul élément est forcément ordonné)
- **Combiner** : rien à faire

La méthode consiste à placer un élément du tableau (appelé **pivot**) à sa place définitive, en permutant tous les éléments de telle sorte que tous ceux qui lui sont inférieurs soient à sa gauche et que tous ceux qui lui sont supérieurs soient à sa droite. Cette opération s'appelle le **partitionnement.**
Pour chacun des sous-tableaux, on définit un **nouveau pivot** et on répète l'opération de partitionnement. Ce processus est répété **récursivement**, jusqu'à ce que l'ensemble des éléments soit trié.
La complexité moyenne est en O(nlogn) mais O(n²) dans le pire des cas.

1. Ecrire une fonction `tri_rapide_gauche` qui permet d'illustrer le schéma suivant :



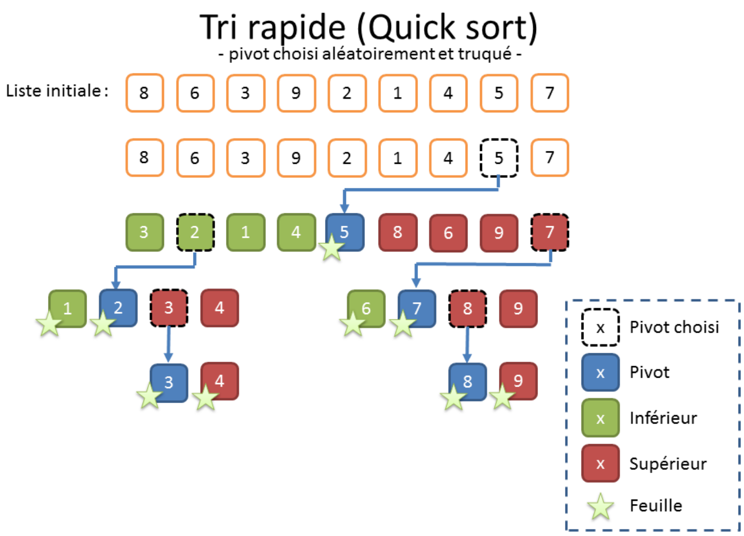
2. Ecrire une fonction `tri_rapide_milieu` qui permet d'illustrer le schéma suivant :



Aide : il faut créer une fonction `partition(T, indice_gauche, indice_droite, indice_pivot)` qui trie les éléments plus petit que le pivot vont à gauche et les élément plus grand que le pivot à droite. Concrètement, pour partitionner un sous-tableau :

- le pivot est placé à la fin (arbitrairement), en l'échangeant avec le dernier élément du sous-tableau ;
- tous les éléments inférieurs au pivot sont placés en début du sous-tableau ;
- le pivot est déplacé à la fin des éléments déplacés.

3. Ecrire une fonction `tri_rapide_aléatoire` qui permet d'illustrer le schéma suivant :



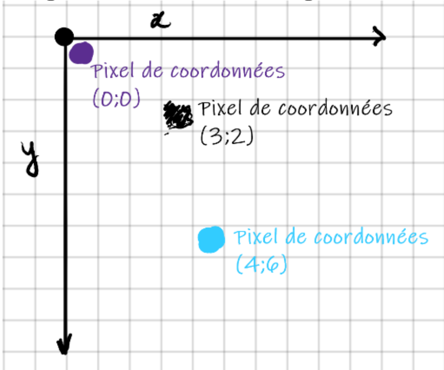
Aide : utiliser la fonction partition précédente

7. Projet (démarche d'investigation)

Projet 1 : **Rotation d'une image numérique**

1. Petits rappels de SNT

Une image est un tableau de pixels.
Une image en 1024x720 se compose de 1024x720 pixels.
Chaque pixel a une couleur. La couleur est définie à partir de ses trois composantes : rouge, vert et bleu.
On définit un repère en prenant comme origine le coin en haut à gauche de l'image.



A l'aide la library PIL de Python nous allons manipuler des images
Nous allons travailler sur cette image :

1.1. Tester et commenter le code ci-dessous :

```
from PIL import Image
img=Image.open("image.png")
largeur, hauteur=im.size
img.show()
```

1.2. Donner les dimensions de l'image
1.3. Donner la couleur du pixel de coordonnées (100;100). (utiliser la methode `getpixel()`)

Souvent, il faudra parcourir l'image pixel par pixel, sur toute la largeur et toute la hauteur. Cela est possible avec deux boucles imbriquées, à condition de connaitre ses dimensions largeur, hauteur:

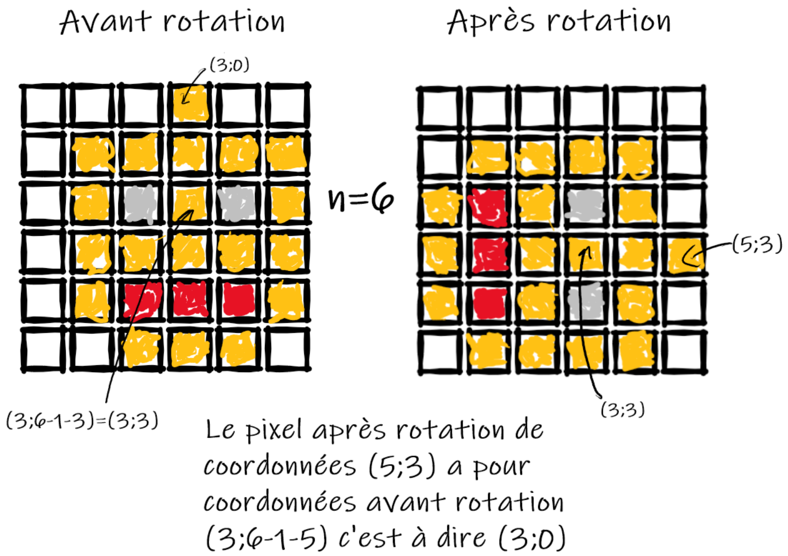
```
for x in range(largeur): # x varie de 0 à largeur - 1
    for y in range(hauteur): # y varie de 0 à hauteur - 1
      # traitement pixel (x,y)

img.save("nouveau_nom.jpg")
```

1.4. Remplacer la couleur des pixels se situant dans un carré de dimension 100 pixels au centre de la photo par la couleur en RGB (25,153,89). Utiliser la méthode `putpixel((x,y),p)`
1.5. Redimensionner l'image pour qu'elle soit deux fois plus petite. On pourra aller voir les fonctionnalités du module PIL.

2. Rotation

Rotation d'un quart de tour. Un pixel de coordonnées (x;y) dans une image de taille n×n a pour coordonnées **avant** rotation d'un quart de tour en sens horaire (y;n−1−x)



Ecrire la procédure `rotation(image)` qui reçoit pour paramètres une chaîne de caractères correspondant au nom de l'image carrée et un entier n correspondant à la taille de l'image et qui affiche l'image retournée de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. (Evidemment sans utiliser `rotate()` !)
Avant la boucle de parcours des pixels, ajouter :

```
planPixels=Image.new("RGB",(largeur,hauteur))
```

https://www.geeksforgeeks.org/python-pil-image-new-method/
On prendra l'image du crabe

3. Rotation récursive

On cherche maintenant à effectuer cette transformation, SANS utiliser de nouvelle image `planPixels` comme précédemment. Ce sera une méthode dite en `O(1)` du point de vue de la complexité spatiale.

On utilisera l'image suivante (carrée) pour cette méthode : **woody.jpg**

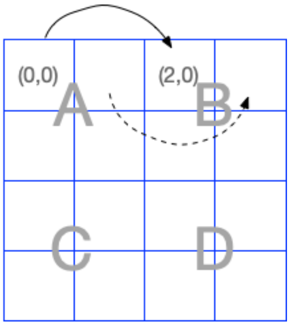
3.1. Compléter la procédure `echange_pix` suivante

```python
def echange_pix(image, x0, y0, x1, y1):
    """procedure qui echange les pixels d'une image entre une position
    de depart start et d'arrivée end
    Params:
    ------
    image : objet de la classe Image
    x0,y0: int, int: coordonnées du pixel de depart
    x1,y1: int, int: coordonnées du pixel d'arrivée

    Example: echange du pixel (0,0) avec celui (120,120)
    --------
    >>> echange_pix(image,0,0,120,120)
    """
    start = image.getpixel((x0, y0))
    end = image.getpixel((x1, y1))
    # à compléter
```

3.2. Compléter la procédure `echange_quadrant` suivante

Cette procédure permet d'échanger les pixels de 2 zones carrées de mêmes dimensions.




```python
def echange_quadrant(image, x0, y0, x1, y1, n):
    """procedure qui echange tous les pixels du bloc de pixels A
    avec ceux du bloc B, de même dimension n*n.
    L'image doit être carrée, de largeur et hauteur égaux à n
    A et B occupent une position quelconque parmi les 4 quarts de l'image
    Params:
    -------
    image : objet de la classe Image
    x0,y0: int, int: coordonnées du pixel du coin superieur gauche de A
    x1,y1: int, int: coordonnées du pixel du coin superieur gauche de B
    n : int : largeur ou hauteur de l'image, en nombre de pixels
    Example: echange du quart d'image en haut à gauche (A) avec celui
    ----------- en haut à droite (B) sur une image de largeur 420


    >>> echange_quadrant(image,0,0,120,0,120)
    """
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            echange_pix(image, # à compléter
```

3.3. On veut échanger les blocs A et D, qui font chacun 120*120 pixels. Quelle instruction faut-il écrire, utilisant la procédure `echange_quadrant`.

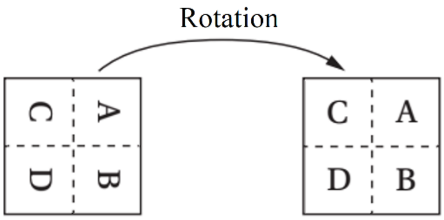
3.4. Même question pour échanger les blocs A et C.

Diviser pour régner

La méthode de "Diviser pour régner" en algorithmique se décompose en trois étapes :

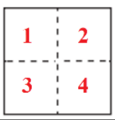
- Diviser : on découpe l'image en images de taille 2x2
- Régner : on effectue la rotation de chaque image de taille 2x2
- Fusion : la fusion est réalisée en échangeant les quadrants lors des appels récursifs.

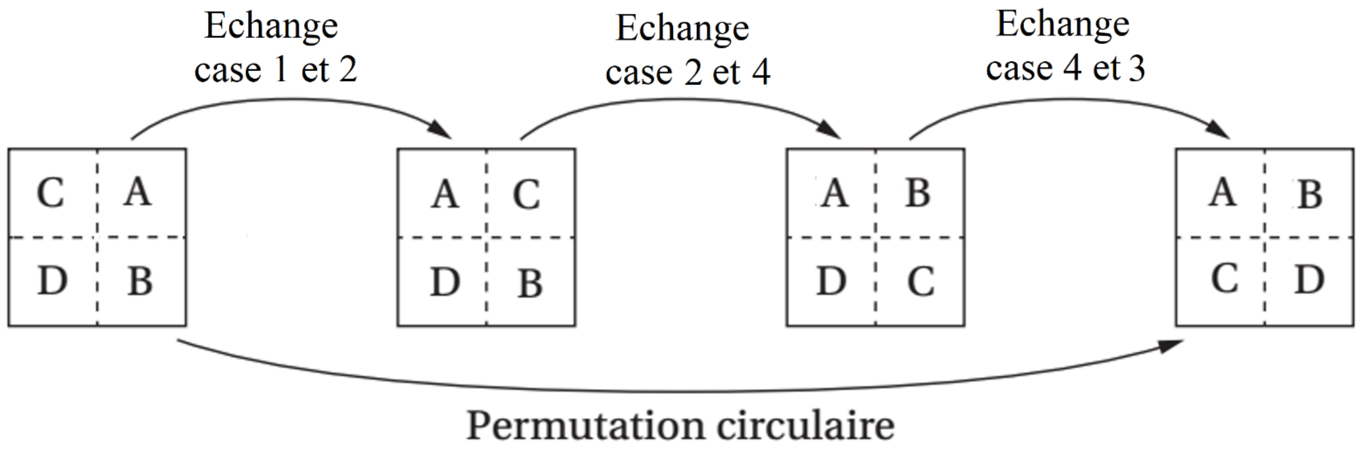
La procédure permet de faire tourner l'image d'un quart de tour par une méthode de type *diviser pour régner*. Une fois la partie **divisée** exécutée (appels récursifs), lorsque les subdivisions de l'image sont constituées d'un seul pixel, les pixels sont déplacés (**règne**) à l'aide d'une rotation



Puis de 3 permutations successives, selon le schéma suivant.

On numérote les cases :





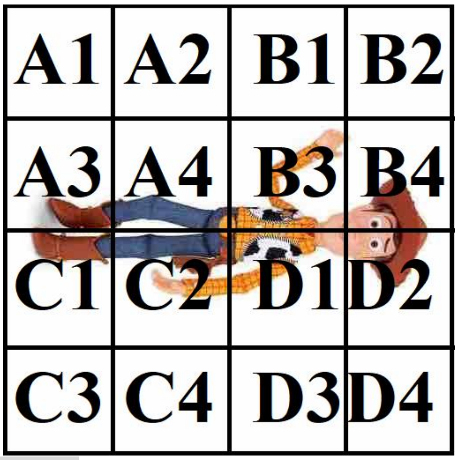
trois permutations réalisées sur les subdivisions de l'image

Ils sont alors recombinés pour reformer l'image, tout en suivant les mêmes permutations, mais avec des blocs de pixels plus gros (**fusion**).

3.5. Si on appelle m la dimension du carré, quelle est la procédure qui permet de réaliser l'échange ci-dessous ?
3.6. Compléter la procédure `rotate`, de telle sorte que la permutation circulaire se fasse :

```
def rotate(image,x0,y0,n):
    """procedure recursive qui tourne d'un quart de tour un carré
    de l'image de dimension n.
    à chaque appel recursif, la taille de l'image est divisée par 2.
    Si l'image fait plus d'un seul pixel, la rotation se fait par
    permutation des (zones de) pixels A<=>B, B<=>D, D<=>C
    Params:
    -------
    image
    x0,y0: int, int: coordonnées du pixel du coin superieur gauche du carré
    n: dimension du carré
    Example:
    --------
    rotate(image,0,0,420)
    """
    if n>=2:
        m = n//2
        rotate(image,x0,y0,m)
        rotate(image,x0,y0+m,m)
        rotate(image,x0+m,y0,m)
        rotate(image,x0+m,y0+m,m)
        # à compléter
```

3.7. *Analysez la procédure :* A l'aide de l'image suivante, que vous découperez, montrer pas à pas ce qui est réalisé par la fonction `rotate`



3.8. Ecrire la procédure `quart_tour(image)` qui réalise la rotation de image de taille n d'un quart de tour.