

---

# ESPRIT - LE MANS Université

## Projet Actuariat vie

4 INFINI

Groupe 1

---

### **Sujet : Influence des taux de mortalité sur un produit de rente viagère et de capital décès**

---

Réaliser par :

BEN NASR Imen

ELOUAFI Samar

MECHMECH Amel

HANNACHI Oussama

LARIBI Asma

Enseignant :

MATOUSSI Anis



---

# REMERCIEMENT

Nous tenons à témoigner toute notre reconnaissance aux **M. Anis Mattousi** et **M. Mohamed Anis BenLasmer**, pour leur dévouement, leur disponibilité, leur soutien pédagogique et surtout leurs judicieux conseils tout au long du déroulement du cours ainsi que la réalisation de ce projet.



---

# Table des matières

|  |           |
|--|-----------|
| <b>LISTE DES FIGURES</b>   | <b>iv</b> |
| <b>LISTE DES TABLEAUX</b>  | <b>v</b>  |
| <b>LISTE DES ABRÉVIATIONS</b>  | <b>vi</b> |
| <b>INTRODUCTION GÉNÉRALE</b>   | <b>1</b>  |
| <b>1 Cadre général du projet</b>   | <b>2</b>  |
| 1.1 INTRODUCTION . . . . .   | 3         |
| 1.2 Actuariat vie . . . . .  | 3         |
| 1.3 Les types de contrats . . . . .  | 4         |
| 1.3.1 Contrat de rente viagère . . . . .   | 4         |
| 1.3.2 Contrat de capital décès . . . . .   | 5         |
| 1.4 Modèle de Lee-Carter . . . . .   | 5         |
| 1.4.1 Estimation des paramètres du modèle . . . . .                                | 6         |
| 1.4.2 Limites du modèle de Lee- Carter . . . . .                                   | 7         |
| 1.5 Valeur actuelle probable . . . . .   | 8         |
| 1.6 CONCLUSION . . . . .   | 9         |
| <b>2 Présentation, traitement et description des données</b>                       | <b>10</b> |
| 2.1 INTRODUCTION . . . . .   | 11        |
| 2.2 Présentation des données . . . . .   | 11        |
| 2.3 Traitement des données . . . . .   | 12        |
| 2.3.1 la table de mortalité . . . . .  | 12        |
| 2.3.2 les taux de mortalité par maximum de vraisemblance . . . . .                 | 13        |
| 2.3.3 Calcul de la VAP de la rente viagère anticipée et du capital décès . . . . . | 13        |
| 2.3.4 Estimer les paramètres d'un modèle de Lee-Carter . . . . .                   | 14        |
| 2.3.5 Estimer la projection centrale (moyenne) . . . . .                           | 17        |
| 2.3.6 Afficher les log taux de mortalités projetés . . . . .                       | 18        |

|                            |   |           |
|----------------------------|---|-----------|
| 2.3.7                      | Comparaison des deux résultats de montant de la VAP . . . . . | 19        |
| 2.3.8                      | Autres paramètres ont une influence sur la VAP . . . . .      | 19        |
| 2.4                        | Outils . . . . .  | 20        |
| 2.4.1                      | R . . . . .   | 20        |
| 2.4.2                      | Packages utilisés : . . . . .                                 | 21        |
| 2.4.2.1                    | StMoMo . . . . .  | 21        |
| 2.4.2.2                    | Demography . . . . .  | 21        |
| 2.4.2.3                    | Lifecontingencies . . . . .                                   | 21        |
| 2.4.2.4                    | reliaR . . . . .  | 21        |
| 2.5                        | CONCLUSION . . . . .  | 22        |
| <b>CONCLUSION GÉNÉRALE</b> |   | <b>23</b> |
| <b>BIBLIOGRAPHIE</b>       |   | <b>23</b> |



---

## LISTE DES FIGURES

|      |  |    |
|------|--|----|
| 2.1  | les données téléchargées . . . . .   | 11 |
| 2.2  | extrait de table de mortalité construit . . . . .                                | 12 |
| 2.3  | Log de taux de mortalité en fonction de l'âge et années . . . . .                | 14 |
| 2.4  | Estimations des $\alpha_x$ . . . . .   | 15 |
| 2.5  | Estimations des $\beta_x$ . . . . .  | 16 |
| 2.6  | Estimations des $k_t$ . . . . .  | 16 |
| 2.7  | les résidus des modelé . . . . .   | 17 |
| 2.8  | Estimer la projection centrale . . . . .   | 18 |
| 2.9  | les log taux de mortalités projetésles log taux de mortalités projetés . . . . . | 18 |
| 2.10 | R logo . . . . .   | 20 |



---

# LISTE DES TABLEAUX

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 2.1 | Comparaison des deux résultats de montant de la VAP . . . . . | 19 |
|-----|---|----|



---

# LISTE DES ABRÉVIATIONS

**HMD** Human Mortality Database

**VAP** Valeur actuelle probable



---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

Dans le cadre de notre module Actuariat Vie, nous allons estimer et projeter la mortalité d'une cohorte d'assurés ( hommes suisses ) afin de calculer la VAP de la rente viagère anticipée et du capital décès . Plus précisément, on suppose que l'assureur possède un portefeuille d'assurés hommes nés en 1960. Certains assurés ont contracté en 2018 un contrat de rente viagère à termes anticipés et d'autre de capital décès.

Pour clarifier la notion de mortalité et bien souligner son influence sur la VAP , ce rapport sere divisé en deux chapitres comme suit :

- le 1er chapitre est dévoué à présenter les notions de base nécessaires et indispensables en Actuariat Vie .
- le 2ème chapitre traite les étapes suivies pour traiter le sujet.



# Cadre général du projet

---

## Sommaire

|            |   |          |
|------------|---|----------|
| <b>1.1</b> | <b>INTRODUCTION . . . . .</b>                 | <b>3</b> |
| <b>1.2</b> | <b>Actuariat vie . . . . .</b>                | <b>3</b> |
| <b>1.3</b> | <b>Les types de contrats . . . . .</b>        | <b>4</b> |
| 1.3.1      | Contrat de rente viagère . . . . .            | 4        |
| 1.3.2      | Contrat de capital décès . . . . .            | 5        |
| <b>1.4</b> | <b>Modèle de Lee-Carter . . . . .</b>         | <b>5</b> |
| 1.4.1      | Estimation des paramètres du modèle . . . . . | 6        |
| 1.4.2      | Limites du modèle de Lee- Carter . . . . .    | 7        |
| <b>1.5</b> | <b>Valeur actuelle probable . . . . .</b>     | <b>8</b> |
| <b>1.6</b> | <b>CONCLUSION . . . . .</b>                   | <b>9</b> |

### 1.1 INTRODUCTION

Au cours de ce premier chapitre, nous nous intéressons à décrire les notions de base, dans lequel s'est déroulé notre projet .

### 1.2 Actuariat vie

La science actuarielle se spécialise dans l'analyse et le contrôle du risque et des effets du hasard dans toutes les questions d'assurance et de régimes de retraite.

Parmi les responsabilités des actuaires, on note :

- la création et l'évaluation des coûts de nouvelles polices d'assurance ;
- l'évaluation de revenus éventuels selon les hypothèses de conditions futures ;
- l'analyse et la prévision de résultats financiers des régimes de rente ;
- le remaniement de régimes d'assurance sociale selon l'évolution du cadre légal.

Environ 80 % des actuaires œuvrent en assurance-vie, contre 20 % en assurances « IARD » (incendies, accidents, risques divers).[1]

En effet, L'assurance-vie est un placement financier qui permet au souscripteur d'épargner de l'argent dans l'objectif de le transmettre à un bénéficiaire lorsque survient un événement lié à l'assuré : son décès ou sa survie. Ce produit d'épargne permet au souscripteur de percevoir des intérêts sur son contrat en fonction du capital investi.

- En cas de vie du souscripteur, il reste le bénéficiaire et titulaire des fonds et peut récupérer librement le capital et les intérêts
- En cas de décès du souscripteur, le contrat sera dénoué et le capital et les intérêts seront transmis à le (ou les) bénéficiaire(s) de son choix (enfants, conjoints, concubin, frères et sœurs, etc...)

L'assurance vie est principalement utilisée de nos jours comme un contrat pour épargner de l'argent en bénéficiant des avantages de la fiscalité de l'assurance vie cumulés avec ceux liés à

la transmission du patrimoine. Les contrats sont ouverts dans l'objectif de préparer sa retraite, se constituer un capital à terme ou anticiper un projet immobilier.

### 1.3 Les types de contrats

Il convient néanmoins de faire la distinction entre l'assurance décès et l'assurance vie. Dans un contrat d'assurance décès, l'assureur s'engage à verser un capital ou une rente déterminé aux bénéficiaires désignés par l'assuré dans le cas où celui-ci vient à décéder avant une certaine date. L'assurance décès est généralement souscrite pour permettre à la famille de rembourser un emprunt ou pour payer les études des enfants si l'assuré décède brutalement.

#### 1.3.1 Contrat de rente viagère

Une rente viagère est un produit d'assurance qui comporte un montant de versement périodique prédéterminé jusqu'au décès du rentier. Ils sont couramment utilisés pour assurer un revenu garanti à la retraite qui ne peut être survécu.

Les rentes viagères, avec leurs versements garantis à vie, sont essentiellement des assurances longévité, car le risque de survivre à ses économies est transféré à l'émetteur de la rente, généralement un assureur. Les rentes viagères sont souvent utilisées comme méthode de paiement pour les gagnants de loterie et dans les règlements structurés. Les régimes de retraite à prestations définies sont une forme de rente viagère, en ce sens qu'ils versent une prestation à vie basée sur le salaire, l'âge et la durée de service d'un employé.

Une fois financée et promulguée, la rente verse périodiquement au rentier, généralement mensuellement, une source fiable de revenu. Lorsqu'un événement déclencheur se produit, comme un décès, les versements périodiques de la rente cessent généralement, bien qu'ils puissent continuer à payer selon l'option choisie par l'acheteur de la rente.

$$a_x = \sum_{k=1}^{k=\infty} v^k \cdot {}_xP_k$$

### 1.3.2 Contrat de capital décès

Le capital décès désigne généralement la somme d'argent versée par la Sécurité sociale aux ayants droit d'une personne décédée. Le versement de ce capital, pour lequel il est nécessaire de faire une demande, vise généralement à limiter l'impact, notamment financier causé par la mort d'un assuré.

Le capital décès peut aussi correspondre à :

- un capital constitué, suite à la souscription individuelle d'un contrat auprès d'une compagnie d'assurance ou d'un organisme de prévoyance ;
- un capital garanti dans le cadre de la souscription d'un contrat collectif auprès d'un organisme de prévoyance par un employeur, en faveur des salariés.

un capital garanti dans le cadre de la souscription d'un contrat collectif auprès d'un organisme de prévoyance par un employeur, en faveur des salariés.

Pour la somme versée par la Sécurité sociale, il existe un ordre préétabli pour les bénéficiaires. Les bénéficiaires du capital décès sont donc par ordre d'importance : le conjoint survivant ou, le/la partenaire survivant, ou les enfants ou en dernier lieu les ascendants.[2]

$$A_x = \sum_{k=0}^{k=\infty} v^{k+1} \cdot {}_x P_k \cdot q_{x+k}$$

## 1.4 Modèle de Lee-Carter

Le modèle Lee – Carter est un algorithme numérique utilisé dans la prévision de la mortalité et la prévision de l'espérance de vie. L'entrée dans le modèle est une matrice de taux de mortalité par âge classés de façon monotone par le temps, généralement avec des âges en colonnes et des années en rangées. La sortie est une autre matrice prévue des taux de mortalité.

Il s'agit d'une méthode d'extrapolation des tendances passées initialement utilisée sur des données américaines, qui est devenue rapidement un standard.

On travaille sur les taux de mortalité  $\mu_{x,t}$  qui par définition valent  $\mu_{x,t} = -d \log({}_t P_x / dt)$ . L'hypothèse central du modèle de Lee-Carter est

$$\log(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \xi_{x,t}, \text{ pour } t=1, \dots, n \text{ et } x = x_{\min}, \dots, x_{\max}$$

où  $\alpha_x$  est l'impact de l'âge sur les log-taux au cours du temps,  $\beta_x$  est la composante traduisant la sensibilité de la mortalité instantanée par rapport à l'évolution temporelle  $k_t$  et  $\xi_{x,t}$  est un résidu aléatoire indépendants et identiquement distribués centrés et de variance commune  $\sigma^2$ .

- $\alpha_x$  rend compte du comportement moyen du taux de mortalité au cours du temps.
- $\beta_x$  représente l'évolution croisée avec le temps du taux de mortalité

$$\frac{d \log(\mu_{x,t})}{dt} = \beta_x \frac{dk_t}{dt}$$

- $k_t$  traduit l'évolution temporelle (a priori bénéfique) du taux de mortalité. Le nombre de paramètres est important :  $x_{\max} x_{\min} + 1$  pour  $\alpha_x$  et  $\beta_x$ ,  $n$  pour  $k_t$

Pour des problèmes d'identifiabilité, on impose

$$\sum_{t=1}^n k_t = 0, \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} b_x = 1,$$

Ainsi on obtient seulement  $2m + n - 2$  paramètres avec  $m = x_{\max} x_{\min} + 1$ .

Les paramètres sont estimés par la méthode des moindres carrés minimisant donc

$$\min_{a_x, b_x, k_t} (a_x, b_x, k_t) = \min_{a_x, b_x, k_t} \sum_{t=1}^n \sum_{x=x_{\min}}^{x_{\max}} (\log(\mu_{x,t}) - a_x - b_x k_t)^2.$$

### 1.4.1 Estimation des paramètres du modèle

Les paramètres du modèle à estimer sont les  $a_x$ ,  $b_x$  et les  $k_t$ . Leur estimation se fait en 3 étapes :

#### 1ère Etape :

Après avoir estimé les taux bruts par la formule  $\hat{\mu}_{xt} = \frac{t d_x}{(t l_x + t + 1 d_x)/2}$ , on trouve en tenant compte de la contrainte d'identifiabilité sur les  $k_t$  que :

$$\hat{a}_x = \frac{1}{t_M - t_M + 1} \sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \hat{\mu}_{xt}$$

En effet, on a :  $\sum_{t=t_m}^{t_M} \ln \hat{\mu}_{xt} = \sum_{t=t_m}^{t_M} a_x + b_x \sum_{t=t_m}^{t_M} k_x + \sum_{t=t_m}^{t_M} \varepsilon_{xt}$

Les contraintes  $\sum_{t=t_m}^{t_M} k_t = 0$  et  $\sum_{t=t_m}^{t_M} \varepsilon_t = 0$  impliquent alors l'estimation obtenue pour le

paramètre  $\hat{a}_x$ . En d'autres termes,  $\hat{a}_x$  est la moyenne temporelle, à l'âge  $x$ , des taux instantanés de décès (sur l'échelle logarithmique).

### 2ème Etape :

Afin d'estimer les paramètres  $k_t$  et  $b_x$ , on construit la matrice  $Z = (z_{xt})$  définie par :

$$z_{xt} = \ln \hat{\mu}_{xt} - \hat{a}_x.$$

On décompose ensuite en valeurs singulières la matrice  $Z$ . Si  $u_1$  (respectivement  $v_1$ ) désigne le vecteur propre de  $Z'Z$  (respectivement  $ZZ'$ ) associé à la plus grande valeur propre  $\lambda_1$ , les estimations de  $k_t$  et  $b_x$  sont :

$$\hat{b} = \frac{v_1}{\sum_j v_{1j}} \text{ et } \hat{k} = \sqrt{\lambda_1} * \sum_j v_{1j} * u_1$$

### 3ème Etape :

Cette étape est facultative. On peut en effet ajuster les  $\hat{k}_t$  pour que le nombre total de décès enregistrés chaque année corresponde à celui prédit par le modèle, étant donnés les  $\hat{a}_x$  et les  $\hat{b}_x$ . Ainsi, on cherche les  $\hat{\hat{k}}_t$  vérifiant :

$$\sum_{x=x_m}^{x_M} {}_t d_x = \sum_{x=x_m}^{x_M} {}_t l_x \exp \hat{a}_x + \hat{b}_x \hat{\hat{k}}_t$$

Afin de vérifier les contraintes du modèle de Lee-Carter, les estimations retenues pour les paramètres  $a_x$  et  $k_t$  sont :

$$k_t^* = \hat{\hat{k}}_t - \bar{k} \text{ et } a_x^* = \hat{a}_x + \hat{b}_x * \bar{k}$$

où  $\bar{k}$  désigne la moyenne des  $\hat{\hat{k}}_t$  dans le temps .

## 1.4.2 Limites du modèle de Lee- Carter

Guterman et Vanderhoof [1999] ont émis une critique sur le modèle de Lee-Carter portant sur l'approche purement extrapolative de leur méthode. Seule l'histoire passée peut être introduite dans le modèle. Le modèle ne peut prendre en compte les nouveaux progrès de la médecine, ce qui biaise les projections de mortalité au-delà de la période d'étude. Le modèle repose sur les

moindres carrés ordinaires, ce qui nécessite que les résidus vérifient l'hypothèse d'homoscédasticité. Or, c'est une hypothèse peu réaliste.

La dispersion des résidus n'est pas homogène. Les résidus sont bien hétéroscédastiques. On peut par ailleurs noter que le critère de sélection des paramètres optimaux dans le modèle de Lee-Carter n'a pas de justification probabiliste, et chercher alors à modifier l'approche pour obtenir un critère de détermination des paramètres de type « maximum de vraisemblance », qui permettra de bénéficier des « bonnes propriétés » de cette classe d'estimateurs (convergence, efficacité asymptotique, normalité asymptotique, etc.).

### 1.5 Valeur actuelle probable

La Valeur actuelle, lorsqu'elle s'applique à un titre financier, désigne la valeur actuelle des flux futurs espérés, qui est actualisée au taux de rentabilité exigé par les investisseurs. On parle également d'actualisation pour décrire cette technique permettant de comparer différents flux financiers se produisant à des dates différentes.

Elle repose sur la notion de la valeur temps de l'argent qui s'appuie sur le principe du un euro d'aujourd'hui ne vaut pas un euro de demain.

Valeur actuelle probable représente la totalité des engagements à la date de l'évaluation, avec projection des salaires au terme.

Pour une série de flux connus  $F_0, F_1, \dots$ , une série de conditions de paiements aléatoires  $C_0, C_1, \dots$  et un facteur d'actualisation  $0 < v < 1$  (hypothèse de constance du taux d'intérêt), la valeur actuelle des flux est

$$VA = \sum_{k=0}^{\infty} F_k V^k 1_{C_k}$$

et la valeur actuelle probable est

$$VAP = E(VA) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k V^k P(C_k)$$

### 1.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre, on a dévoilé l'idée générale et les objectifs de notre sujet ainsi on a bien compris les tâches à réaliser par la suite. Dans le chapitre suivant, on va entamer le traitement des données et l'implémentation les méthodes.



# Présentation, traitement et description des données

## Sommaire

|            |  |           |
|------------|--|-----------|
| <b>2.1</b> | <b>INTRODUCTION</b>  | <b>11</b> |
| <b>2.2</b> | <b>Présentation des données</b>                                    | <b>11</b> |
| <b>2.3</b> | <b>Traitement des données</b>                                      | <b>12</b> |
| 2.3.1      | la table de mortalité  | 12        |
| 2.3.2      | les taux de mortalité par maximum de vraisemblance                 | 13        |
| 2.3.3      | Calcul de la VAP de la rente viagère anticipée et du capital décès | 13        |
| 2.3.4      | Estimer les paramètres d'un modèle de Lee-Carter                   | 14        |
| 2.3.5      | Estimer la projection centrale (moyenne)                           | 17        |
| 2.3.6      | Afficher les log taux de mortalités projetés                       | 18        |
| 2.3.7      | Comparaison des deux résultats de montant de la VAP                | 19        |
| 2.3.8      | Autres paramètres ont une influence sur la VAP                     | 19        |
| <b>2.4</b> | <b>Outils</b>  | <b>20</b> |
| 2.4.1      | R  | 20        |
| 2.4.2      | Packages utilisés :  | 21        |
| <b>2.5</b> | <b>CONCLUSION</b>  | <b>22</b> |

### 2.1 INTRODUCTION

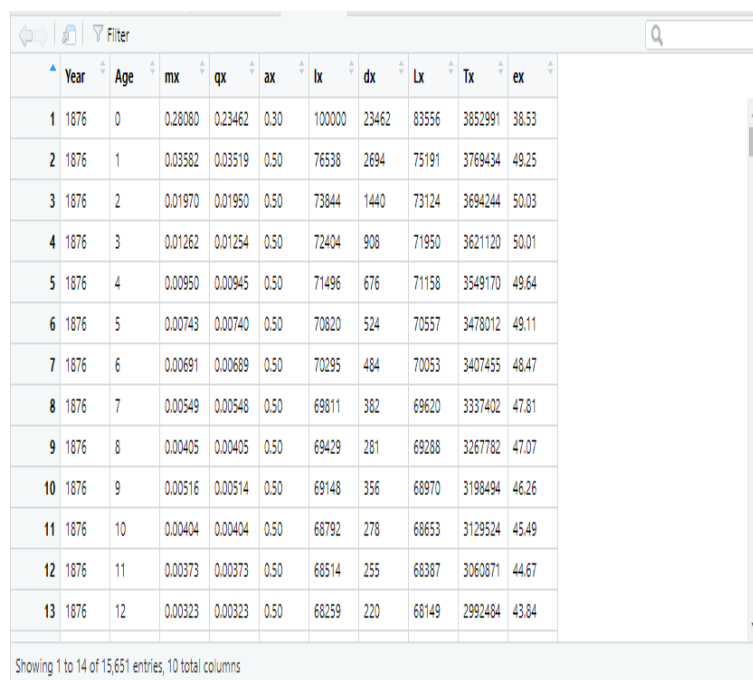
Dans ce 2ème chapitre nous allons traiter un cas concret : les hommes suisses nés en 1960. On va traiter et présenter les données pour pouvoir obtenir des résultats. Pour ce faire, on a eu recours à certains outils et packages qu'on va les définir aussi par la suite.

### 2.2 Présentation des données

Les données utilisées dans cette étude proviennent de HMD, Cette base de données **HMD** [ Human Mortality Database) a été créée pour fournir des données détaillées sur la mortalité et la population aux chercheurs, étudiants, journalistes, analystes des politiques et autres personnes intéressées par l'histoire de la longévité humaine.

À l'heure actuelle, la base de données contient des données détaillées sur la population et la mortalité pour 41 pays ou régions.

Nous avons choisi de travailler sur la mortalité d'une cohorte d'assurés suisses **figure 2.1**



|    | Year | Age | mx      | qx      | ax   | lx     | dx    | Lx    | Tx      | ex    |
|----|------|-----|---------|---------|------|--------|-------|-------|---------|-------|
| 1  | 1876 | 0   | 0.28080 | 0.23462 | 0.30 | 100000 | 23462 | 83556 | 3852991 | 38.53 |
| 2  | 1876 | 1   | 0.03582 | 0.03519 | 0.50 | 76538  | 2694  | 75191 | 3769434 | 49.25 |
| 3  | 1876 | 2   | 0.01970 | 0.01950 | 0.50 | 73844  | 1440  | 73124 | 3694244 | 50.03 |
| 4  | 1876 | 3   | 0.01262 | 0.01254 | 0.50 | 72404  | 908   | 71950 | 3621120 | 50.01 |
| 5  | 1876 | 4   | 0.00950 | 0.00945 | 0.50 | 71496  | 676   | 71158 | 3549170 | 49.64 |
| 6  | 1876 | 5   | 0.00743 | 0.00740 | 0.50 | 70820  | 524   | 70557 | 3478012 | 49.11 |
| 7  | 1876 | 6   | 0.00691 | 0.00689 | 0.50 | 70295  | 484   | 70053 | 3407455 | 48.47 |
| 8  | 1876 | 7   | 0.00549 | 0.00548 | 0.50 | 69611  | 382   | 69620 | 3337402 | 47.81 |
| 9  | 1876 | 8   | 0.00405 | 0.00405 | 0.50 | 69429  | 281   | 69286 | 3267782 | 47.07 |
| 10 | 1876 | 9   | 0.00516 | 0.00514 | 0.50 | 69148  | 356   | 68970 | 3198494 | 46.26 |
| 11 | 1876 | 10  | 0.00404 | 0.00404 | 0.50 | 68792  | 278   | 68653 | 3129524 | 45.49 |
| 12 | 1876 | 11  | 0.00373 | 0.00373 | 0.50 | 68514  | 255   | 68387 | 3060871 | 44.67 |
| 13 | 1876 | 12  | 0.00323 | 0.00323 | 0.50 | 68259  | 220   | 68149 | 2992484 | 43.84 |

Showing 1 to 14 of 15,651 entries, 10 total columns

**FIGURE 2.1: les données téléchargées**

Cette base présente des cohortes suisses de 1976 à 2016 dont l'âge varie entre 0 et 110. Elle se présente sous format texte ; la conversion et le traitement de cette base ont été réalisés au moyen du logiciel RStudio.

On a choisi de travailler sur la cohorte de 1960.

## 2.3 Traitement des données

### 2.3.1 la table de mortalité

La première étape du traitement de données consiste en l'extraction des données de la cohorte suisse en 1960 puis on a construit la table de mortalité TD1960 **figure 2.2**.

La table de mortalité est un modèle qui permet de rendre compte de la mortalité vécue par une population depuis la naissance jusqu'à l'extinction de l'ensemble des individus. Cette population est supposée fermée à toute migration.

| Life table SUISSE |    |        |           |           |
|-------------------|----|--------|-----------|-----------|
|                   | x  | lx     | px        | ex        |
| 1                 | 0  | 100000 | 0.9758900 | 68.157210 |
| 2                 | 1  | 97589  | 0.9977354 | 68.841078 |
| 3                 | 2  | 97368  | 0.9986854 | 67.997330 |
| 4                 | 3  | 97240  | 0.9987248 | 67.086837 |
| 5                 | 4  | 97116  | 0.9988776 | 66.172495 |
| 6                 | 5  | 97007  | 0.9992681 | 65.246848 |
| 7                 | 6  | 96936  | 0.9993707 | 64.294638 |
| 8                 | 7  | 96875  | 0.9993084 | 63.335123 |
| 9                 | 8  | 96808  | 0.9996901 | 62.378956 |
| 10                | 9  | 96778  | 0.9993800 | 61.398293 |
| 11                | 10 | 96718  | 0.9994624 | 60.436382 |
| 12                | 11 | 96666  | 0.9996276 | 59.468893 |
| 13                | 12 | 96630  | 0.9995136 | 58.491048 |
| 14                | 13 | 96583  | 0.9994305 | 57.519512 |
| 15                | 14 | 96528  | 0.9995545 | 56.552285 |
| 16                | 15 | 96485  | 0.9994714 | 55.577489 |
| 17                | 16 | 96434  | 0.9990667 | 54.606881 |
| 18                | 17 | 96344  | 0.9989205 | 53.657893 |
| 19                | 18 | 96240  | 0.9986700 | 52.715877 |
| 20                | 19 | 96112  | 0.9986578 | 51.786083 |
| 21                | 20 | 95983  | 0.9983018 | 50.855683 |
| 22                | 21 | 95820  | 0.9981424 | 49.942194 |
| 23                | 22 | 95642  | 0.9981912 | 49.035141 |
| 24                | 23 | 95469  | 0.9980203 | 48.123998 |
| 25                | 24 | 95280  | 0.9985516 | 47.219458 |
| 26                | 25 | 95142  | 0.9984760 | 46.287949 |
| 27                | 26 | 94997  | 0.9985789 | 45.358601 |
| 28                | 27 | 94867  | 0.9985558 | 44.433157 |

FIGURE 2.2: extrait de table de mortalité construit

Avec  $x$  l'âge,  $l_x$  le nombre de d'individus d'âge au moins  $x$  et  $dx = l_x - l_{x+1} + 1$  le nombre de décès à l'âge  $x$ .

Le terme durée de survie désigne le temps aléatoire écoulé avant la survenance d'un événement. L'événement terminal peut être la mort d'un individu, l'apparition d'une maladie, la perte d'autonomie, mais également la panne d'une machine (en fiabilité) ou bien la survenance d'un sinistre en assurance non vie.

À l'aide du commande **pxt**, on a trouvé que la probabilité de survie à l'âge 58 est égale à 0.9844 et à l'aide du commande **qxt**, on a trouvé que la probabilité de décès à l'âge 58 est égale à 0.0155.

### 2.3.2 les taux de mortalité par maximum de vraisemblance

La force (ou taux) de mortalité à l'âge  $x$  d'un individu est notée  $\mu_x$ , qu'on note aussi  $\mu_x(0)$ . Intuitivement, la quantité  $\mu_x(0)d\chi$  correspond à la probabilité qu'un individu ayant atteint l'âge  $x$  meurt avant l'âge  $x + dx$  :

$$\mu_x(0)d\chi \simeq P(T_0x + d\chi \mid T_0 > x)$$

On cherche à maximiser l'expression ci-dessus. On utilise pour cela un algorithme unidimensionnel de Newton. La méthode est itérative. On dispose de trois paramètres :  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $k$ .

Pour appliquer l'itération, on les initialise de façon libre, en veillant toutefois à choisir des valeurs  $x$  non nulles pour éviter les divisions par 0. Comme on souhaite maximiser la log-vraisemblance, il convient d'annuler les dérivées par rapport à chacun des 3 paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $k$ .

### 2.3.3 Calcul de la VAP de la rente viagère anticipée et du capital décès

On a calculé la VAP de la rente viagère à l'aide du commande **axn** pour trouver la résultat suivante : 13.4407

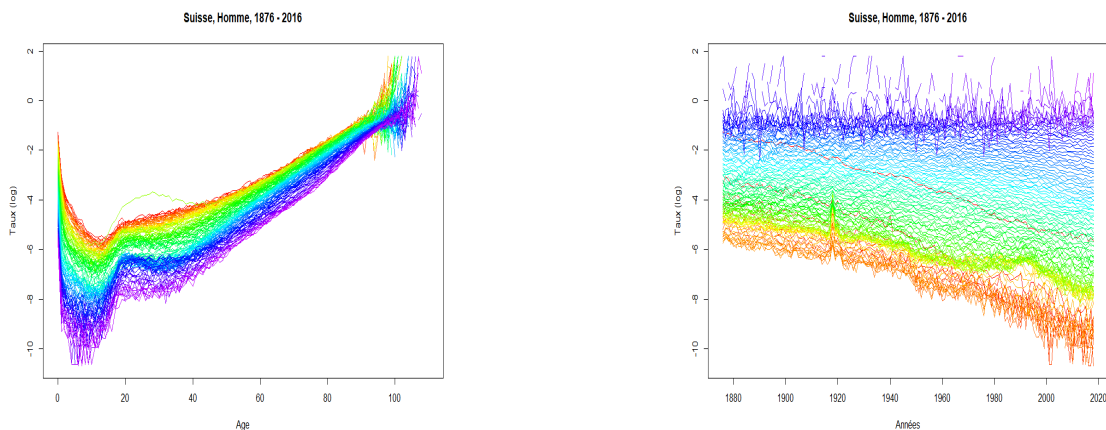
On a calculé la VAP du capital de décès à l'aide du commande **Axn** pour trouver la résultat suivante : 0.5967

### 2.3.4 Estimer les paramètres d'un modèle de Lee-Carter

On a utilisé la fonction `hmd.mx` pour récupérer les données directement de (<https://www.mortality.org/>)

#### -Affichage de log de taux de mortalité en fonction de l'âge et années :

A l'aide de la fonction `plot()`, il est facile de tracer nos quantités d'intérêt, par exemple le tracé des log taux de mortalité en fonction de l'âge ,la **figure 2.3**.



**FIGURE 2.3: Log de taux de mortalité en fonction de l'âge et années**

Il est possible de sélectionner les années ou les âges affichés.

On remarque une chute à cause de la guerre mondiale pour la partie de la cohorte dont l'âge est égal à 10 ans. Pour cette raison et pour calibrer les données on a choisi comme plage d'âge (15 ans -> 100 ans) et pour la période (1940 -> 2016)

#### -Estimation des paramètres :

Pour les âges élevés, il convient de lisser les taux bruts, on a utilisé le lissage par spline monotone '`method="mspline"`'.

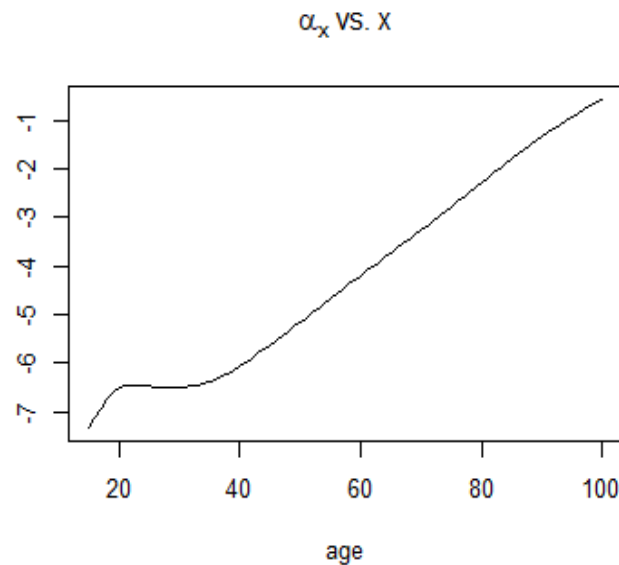
Le modèle de Lee-Carter, aujourd'hui un standard, a déjà fait ses preuves à de maintes reprises en démographie. Il a notamment prouvé son efficacité sur diverses populations. En termes de méthodes, la démarche de Lee-Carter consiste à estimer les taux de mortalité futurs à partir d'une extrapolation des tendances passées, après avoir décomposé la mortalité en deux composantes, l'une propre à l'âge et l'autre tendancielle. Il s'agit ainsi d'une projection à partir d'une extrapolation par période.

$$\ln(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x k_t + \epsilon_{x,t}$$

ANALYSE DES PARAMÈTRES :

On observe :

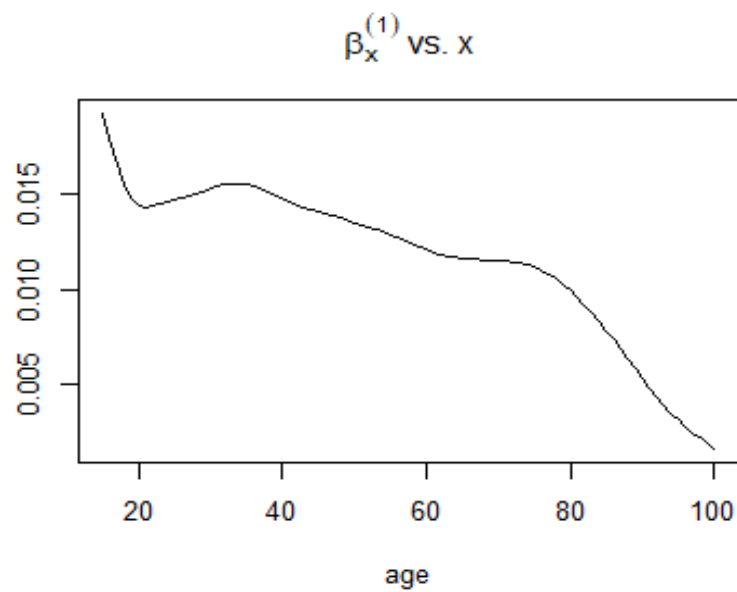
$-\alpha_x$  : la valeur moyenne des logs de la mortalité instantané ( $\ln\mu_{(x,t)}$  au cours du temps ) elle croît en fonction de l'âge elle varie entre -7 et -1 . Le graphique suivant **figure 2.4** présente les estimations des  $\alpha_x$  obtenues par le modèle :



**FIGURE 2.4:** Estimations des  $\alpha_x$

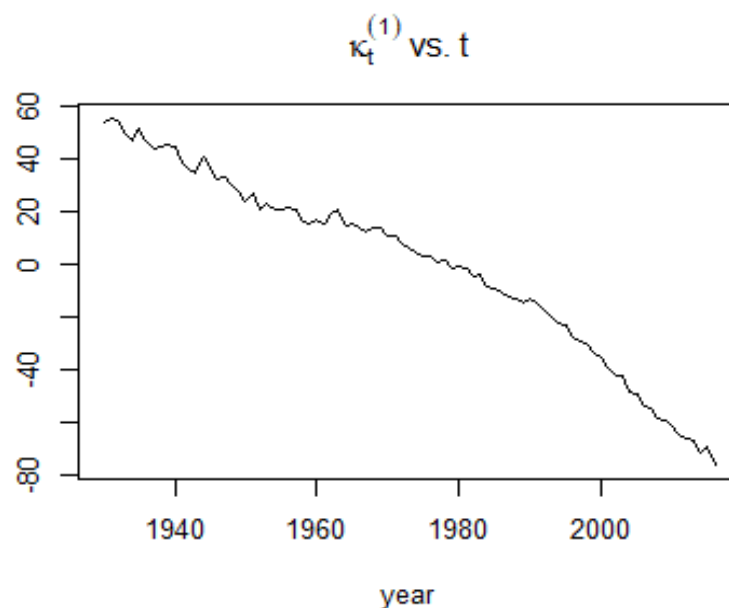
-  $\beta_x$  indique la sensibilité de la mortalité instantanée par rapport à l'évolution générale de la mortalité. Si on se situe à partir de 18 ans, on constate que les âges les plus sensibles à l'évolution temporelle de la mortalité sont ceux entre 20 et 40 ans . On atteint en effet des pics sur ces tranches d'âges.

Le graphique suivant **figure 2.5** illustre l'évolution des paramètres estimés  $\beta_x$  en fonction de l'âge :



**FIGURE 2.5:** Estimations des  $\beta_x$

D'après la figure ci-dessous et comme  $K_t$  indique l'évolution générale de la mortalité dans le temps ; On constate une tendance linéaire à la décroissance des entre 1940 et 1980. Cette tendance à la décroissance du paramètre  $k$ , qui devient négatif au cours de la période, associée à la positivité moyenne du paramètre implique d'après la formule de Lee-Carter, une diminution des taux instantanés de mortalité. En conséquence, on assiste à une augmentation de la probabilité de la survie sur la période observée.



**FIGURE 2.6:** Estimations des  $k_t$

### -Commentaires sur les résidus du modèle :

L'analyse des résidus permet de valider ou non l'hypothèse  $\varepsilon_{x,t}$  sont indépendants et identiquement distribués (iid). Les résidus sont naturellement estimés par

$$\hat{\varepsilon}_{x,t} = \log(\mu_{x,t}) - \hat{\alpha}_x - \hat{\beta}_x \hat{k}_t$$

Sur le graphique ci-dessous **figure 2.7**, les résidus sont les erreurs de chaque paramètre estimé à partir de modelé

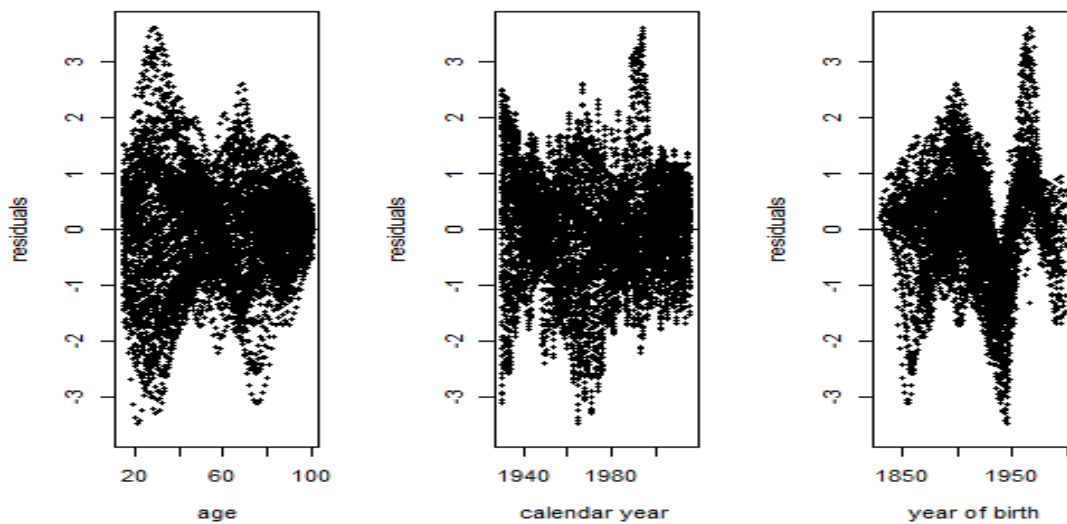


FIGURE 2.7: les résidus des modelé

### 2.3.5 Estimer la projection centrale (moyenne)

Une fois l'ajustement réalise sur les données disponibles, on peut réaliser des projections de la mortalité future sur 25 ans. En particulier, **library(forecast)** propose de nombreuses fonctions possibles pour prédire les valeurs  $k_t$  futures.

Graphiquement, il est alors possible de visualiser les prédictions obtenues pour ces deux modèles, avec respectivement un lissage exponentiel, et une marche aléatoire (ARIMA) avec une tendance linéaire, comme le montre la **figure 2.8**



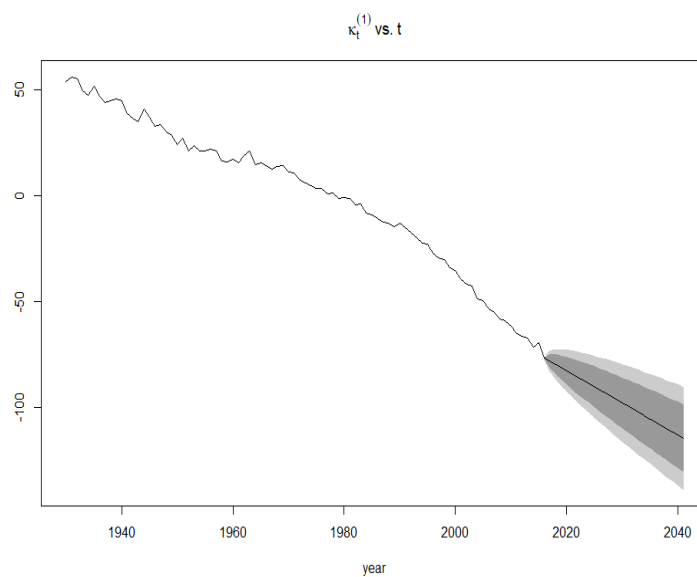


FIGURE 2.8: Estimer la projection centrale

### 2.3.6 Afficher les log taux de mortalités projetés

On constate d'après la **Figure 2.9** un décrochage autour de l'âge 10 ans entre les observations (rouge) et les prédictions (jaune au violet). Cet effet s'estompe rapidement par la suite.

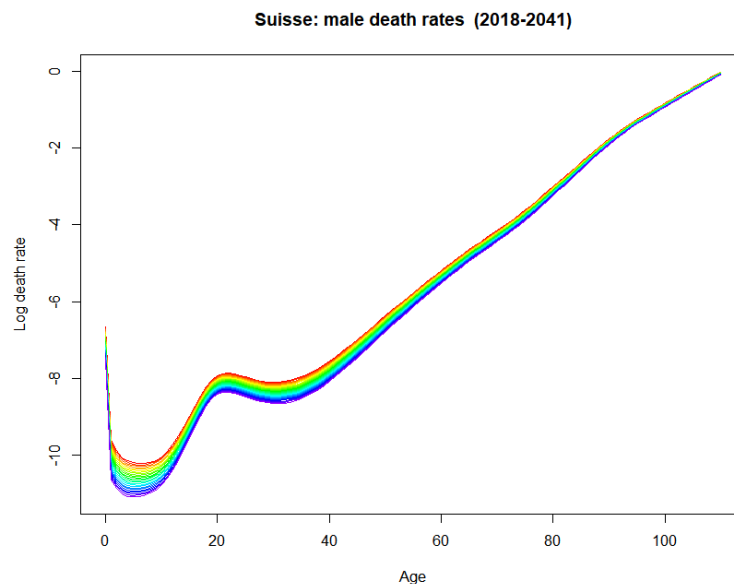


FIGURE 2.9: les log taux de mortalités projetésles log taux de mortalités projetés

### 2.3.7 Comparaison des deux résultats de montant de la VAP

| Montant de la VAP                 | Mortalité de référence les taux de 2018. | Mortalité de référence les taux projetés | Ecart en % |
|-----------------------------------|--|--|------------|
| VAP de la rente viagère anticipée | 13,44                                    | 12,70                                    | 5%         |
| VAP du capital décès              | 0,59                                     | 0,75                                     | -27%       |

TABLE 2.1: Comparaison des deux résultats de montant de la VAP

- En changeant les taux de mortalité on remarque un écart significatif du montant de la VAP de la rente viagère : une diminution de
- Concernant la VAP du capital décès : on remarque une augmentation de 27% (elle passe de 0,59 à 0,75)
- On peut conclure que les taux de mortalité ont une influence sur la VAP

### 2.3.8 Autres paramètres ont une influence sur la VAP

On rappelle que :

- La valeur actuelle probable d'une temporaire décès de n années, au capital de 1 €, différée de m années :

$${}_m|A_{x:\bar{n}} = \sum_{t=m}^{m+n-1} \frac{d_{x+t}}{l_x} v^{t+\frac{1}{2}} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

- La valeur actuelle probable d'une garantie vie entière de 1 €, différée de m années :

$${}_m|A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x}$$

La VAP dépend de deux facteurs qui sont l'âge de l'assuré , le taux technique  $i$  et le capital ( respectivement la rente ) garanti(e)

-Concernant l'âge la VAP croît en fonction de l'âge (corrélation positive ) vu que la probabilité de décès augmente en fonction de ce dernier . De même pour le capital (rente) garanti

-Le taux technique : La valeur actuelle probable VAP augmente lorsque le taux technique diminue.

## 2.4 Outils

### 2.4.1 R



FIGURE 2.10: R logo

R est un langage et un environnement pour le calcul statistique et les graphiques. Il s'agit d'un projet GNU similaire au langage et à l'environnement S qui a été développé aux laboratoires Bell (anciennement ATT, maintenant Lucent Technologies) par John Chambers et ses collègues.

R peut être considéré comme une implémentation différente de S. Il existe quelques différences importantes, mais une grande partie du code écrit pour S s'exécute sans modification sous R.

Le langage R est un langage interprété (c'est-à-dire qu'il doit être interprété par un autre programme), le développeur utilisant, lui, une interface en ligne de commande. R est un langage de programmation qui est en capacité de traiter et d'organiser un ensemble de données. Il peut ensuite y appliquer des tests statistiques, mais aussi représenter ces données graphiquement. Ce langage est régulièrement utilisé par les statisticiens, ainsi que par la communauté scientifique et universitaire. R a plusieurs utilisations :

- Organiser et traiter rapidement un grand volume de données.
- Créer des graphiques pour visualiser ces données et les analyses.
- Créer une programmation procédurale.[4]

### 2.4.2 Packages utilisés :

La présentation et le traitement des données sont assurés à l'aide des packages suivant :

#### 2.4.2.1 StMoMo

StMoMo (Stochastic Mortality Modeling) est un package R fournissant des fonctions pour spécifier et ajuster les modèles de mortalité stochastique, y compris les modèles Lee-Carter, le modèle CBD, le modèle APC et de nombreux autres modèles (éventuellement nouveaux). Le package comprend également des outils pour analyser la qualité de l'ajustement des modèles et effectuer des projections et des simulations de mortalité..[5]

#### 2.4.2.2 Demography

Le package demography fournit des fonctions pour l'analyse démographique, notamment : les calculs de la durée de vie ; Modélisation Lee-Carter ; analyse des données fonctionnelles des taux de mortalité, des taux de fécondité, des chiffres de migration nette ; et prévisions stochastiques de la population.[6]

#### 2.4.2.3 Lifecontingencies

Le package lifecontingencies fournit classes et méthodes de gestion des tables de mortalité (pour les décréments simples et multiples) et des tables actuarielles. De plus, il contient des fonctions permettant d'effectuer facilement des calculs démographiques, financiers et actuariels sur les calculs d'assurance-vie.[7]

#### 2.4.2.4 reliaR

Package pour certaines distributions de probabilités. Une collection d'utilitaires pour certains modèles de fiabilité / distributions de probabilité[8]

## 2.5 CONCLUSION

Ainsi, les paramètres qui ont une influence sur le calcul des VAP sont divers. Au cours de ce TP, on a pu clarifier l'effet du taux de mortalité sur la VAP de la rente viagère anticipée et du capital décès.



---

## CONCLUSION GÉNÉRALE

L'objectif de ce travail est d'étudier la mise en place de tables de mortalité prospectives à partir des effectifs soumis au risque. Le modèle présenté est le modèles de Lee- Carter. La taille des effectifs étudiés, particulièrement observée aux âges de 1 à 110, implique l'utilisation d'une méthode d'extrapolation des taux de mortalité aux âges étudiés. La méthode de Lee-Carter constitue un modèle bidimensionnel prenant en compte à la fois l'année et l'âge pour déterminer les taux de mortalité. La méthode proposée est appliquée à un portefeuille réel. Les tables prospectives ainsi construites permettent de projeter l'évolution des taux dans le futur, par extrapolation de la composante temporelle. On détermine la meilleure méthode par la proximité des taux lissés par rapport aux taux bruts et surtout par la prudence de ce modèle pour le calcul de rentes viagères.



---

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] **Université de montréal.** Qu'est-ce que l'actuariat ?. Disponible sur :  
<https://dms.umontreal.ca/fr/notre-departement/qu-est-ce-que-l-actuariat>
- [2] **Malakof fhumanis.** Les bénéficiaires d'un capital décès. Disponible sur :  
<https://www.malakoffhumanis.com/s-informer/prevoyance/les-beneficiaires-dun-capital-deces-comment-les-designer/>
- [3] **ressources actuarielles.**
- [4] **journaldunet.fr.** R langage de programmation : définition, utilisation et dernière version.  
Disponible sur :  
<https://www.journaldunet.fr/web-tech/dictionnaire-du-webmastering/1445192-r-definition-utilisation-et-d>
- [5] **rdocumentation.** StMoMo (Stochastic Mortality Modeling). Disponible sur :  
<https://www.rdocumentation.org/packages/StMoMo/versions/0.4.1>
- [6] **rdocumentation.** demography . Disponible sur :  
<https://www.rdocumentation.org/packages/demography/versions/1.22>
- [7] **rdocumentation.** lifecontingencies. Disponible sur :  
<https://www.rdocumentation.org/packages/lifecontingencies/versions/1.3.6>
- [8] **rdocumentation.** reliaR . Disponible sur :  
<https://www.rdocumentation.org/packages/reliaR/versions/0.01>